Λογισμός Μεταβολών

2^{η} Εργασία

<u>Φοιτητές</u>

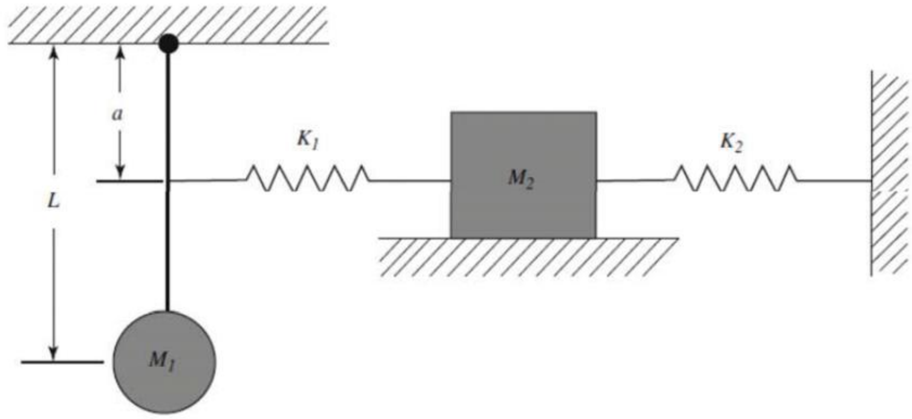
Αρναούτογλου Δημήτριος (57415)

Εμμανουηλίδης Κωνσταντίνος (57315)

Περιεχόμενα

Άσκηση 1

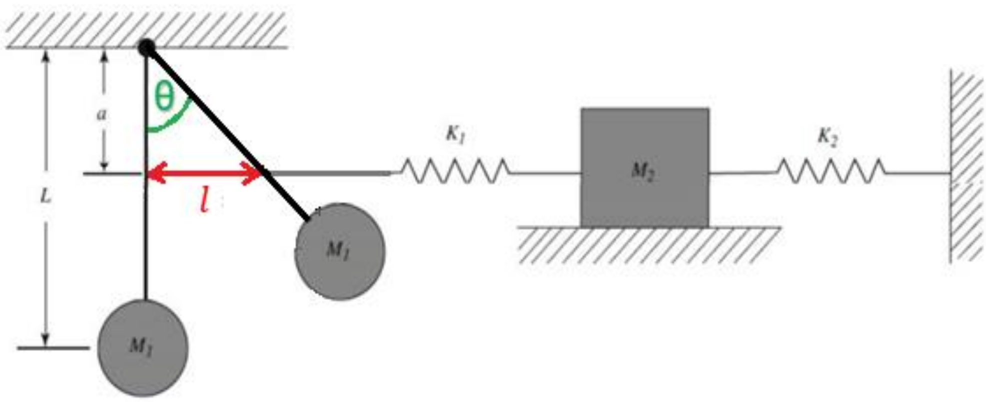
Με χρήση της αρχής του Hamilton να βρείτε τις εξισώσεις κίνησης για το σύστημα για μικρές ταλαντώσεις. Οι τιμές των σταθερών να είναι της επιλογής σας.



Απάντηση

Στη συγκεκριμένη άσκηση καλούμαστε να βρούμε τις εξισώσεις κίνησης του δοθέντος συστήματος. Θα ξεκινήσουμε μελετώντας την δυναμική και κινητική ενέργεια των σωμάτων που συμμετέχουν στο σύστημα.

Μετατοπίζουμε το σώμα M1 κατά γωνία θ προς τα δεξιά και προχωρούμε στην ανάλυση των διαφορετικών ειδών ενέργειας κάθε σώματος. Το σώμα M1 έχει κινητική και δυναμική ενέργεια, ενώ το σώμα M2 έχει μόνο κινητική ενέργεια, αν θεωρήσουμε ότι βρίσκεται σε επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας. Στο σύστημα, επίσης, έχουμε και τη ενέργεια λόγω παραμόρφωσης των δύο ελατηρίων, σταθεράς k1 και k2.



Αξίζει να σημειωθεί ότι για εκτροπή του σώματος M1 προς τα δεξιά κατά γωνία ϑ η οριζόντια μεταβολή του σώματος M2 θα είναι:

$$l = a \cdot sin\theta \approx a \cdot \theta$$

καθώς για μικρές γωνίες θ θεωρήσαμε ότι $sin\theta \approx \theta$.

Σώμα Μ1

Αναλύουμε την ταχύτητα του σώματος Μ1 σε δύο άξονες, έναν κατακόρυφο και έναν οριζόντιο και έχουμε:

$$u_{1,x} = L \cdot \omega_1 \cdot cos\theta = L \cdot \theta' \cdot cos\theta$$

$$u_{1,y} = L \cdot \omega_1 \cdot sin\theta = L \cdot \theta' \cdot sin\theta$$

Οπότε η κινητική ενέργεια θα είναι:

$$K_1 = \frac{1}{2} \cdot M_1 \cdot u_1^2 = \frac{1}{2} \cdot M_1 \cdot L^2 \cdot \theta'^2$$

Η δυναμική ενέργεια του σώματος είναι:

$$V = M_1 g(L \cdot cos\theta - \alpha)$$

Σώμα Μ2

Η οριζόντια ταχύτητα του σώματος είναι:

$$u_2 = \frac{dl}{dt} = a \cdot \theta'$$

Άρα η κινητική του ενέργεια είναι: $K_2 = \frac{1}{2} \cdot M_2 \cdot u_2^2 = \frac{1}{2} \cdot M_2 \cdot a^2 \cdot \theta'^2$

Ελατήρια

Γνωρίζουμε ότι η ενέργεια του ελατηρίου δίνεται από τον νόμο του Hook:

$$V_{\varepsilon\lambda\alpha\tau.} = \frac{1}{2} k \Delta y^2$$

Θεωρώντας ότι για μικρές ταλαντώσεις η μετατόπιση των δύο ελατηρίων είναι η ίδια έχουμε ότι:

$$\Delta y = \frac{l}{2} \Longrightarrow \Delta y = a \cdot \frac{\theta}{2}$$

Η δυναμική ενέργεια λόγων των ελατηρίων, λοιπόν, θα είναι:

$$V_{\varepsilon\lambda\alpha\tau.} = \frac{1}{2} k_1 \left(a \cdot \frac{\theta}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} k_2 \left(a \cdot \frac{\theta}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot (k_1 + k_2) \cdot \left(a \cdot \frac{\theta}{2}\right)^2$$

Η Λαγκραντζιανή του συστήματος θα είναι:

$$L = K - V = K_1 + K_1 - (V_{\varepsilon\lambda\alpha\tau.} + V) \Longrightarrow$$

$$L = \frac{1}{2} \cdot M_1 \cdot L^2 \cdot \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \cdot M_2 \cdot a^2 \cdot \dot{\theta}^2 - \left[\frac{1}{2} \cdot (k_1 + k_2) \cdot \left(a \cdot \frac{\theta}{2}\right)^2 + M_1 g(L - \alpha)\right]$$

Ισχύει ότι:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = (M_1 \cdot L^2 + M_2 \cdot a^2) \cdot \dot{\theta} \Longrightarrow \dot{\theta} = \frac{p_1}{(M_1 \cdot L^2 + M_2 \cdot a^2)}$$

και η Hamiltonian θα είναι:

$$H = \ p_1 \cdot \dot{q}_1 - L \Longrightarrow$$

$$H = \frac{p_1^2}{(M_1 \cdot L^2 + M_2 \cdot a^2)} - \frac{1}{2} p_1^2 - \left[\frac{1}{2} \cdot (k_1 + k_2) \cdot \left(a \cdot \frac{q}{2}\right)^2 + M_1 g(L \cdot cosq - \alpha)\right]$$

Οι εξισώσεις του Hamilton είναι:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{2p_1}{(M_1 \cdot L^2 + M_2 \cdot a^2)} - p_1$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = -\frac{\partial L}{\partial q_k}$$

H Reduced Hamilton - Jacobi εξίσωση είναι:

$$H = E \Longrightarrow$$

$$\frac{\left(\frac{\partial \Psi}{\partial q}\right)^2}{(M_1 \cdot L^2 + M_2 \cdot a^2)} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial q}\right)^2 - \left[\frac{1}{2} \cdot (k_1 + k_2) \cdot \left(a \cdot \frac{q}{2}\right)^2 + M_1 g(L \cdot cosq - \alpha)\right] = E$$

Θέτουμε:

$$g\left(q, \frac{\partial \Psi}{\partial q}\right) = \frac{\left(\frac{\partial \Psi}{\partial q}\right)^2}{(M_1 \cdot L^2 + M_2 \cdot a^2)} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial q}\right)^2 - \left[\frac{1}{2}(k_1 + k_2) \cdot \left(a \cdot \frac{q}{2}\right)^2 + M_1 g(L \cdot cosq - \alpha)\right]$$

Οπότε:

$$C_k = \frac{\left(\frac{\partial \Psi}{\partial q}\right)^2}{(M_1 \cdot L^2 + M_2 \cdot a^2)} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial q}\right)^2 - \left[\frac{1}{2} \cdot (k_1 + k_2) \cdot \left(a \cdot \frac{q}{2}\right)^2 + M_1 g(L \cdot cosq - \alpha)\right] \Longrightarrow$$

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial q}\right)^2\left[\frac{1}{(M_1\cdot L^2+M_2\cdot a^2)}-\frac{1}{2}\right]=C_k+\frac{1}{2}\cdot(k_1+k_2)\cdot\left(a\cdot\frac{q}{2}\right)^2+M_1g(L\cdot cosq-\alpha)\Rightarrow$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial q}=\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{(M_1\cdot L^2+M_2\cdot a^2)}-\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{C_k+\frac{1}{2}\cdot(k_1+k_2)\cdot\left(a\cdot\frac{q}{2}\right)^2+M_1g(L\cdot cosq-\alpha)}\Rightarrow$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial q}=\sqrt{\frac{2\cdot(M_1\cdot L^2+M_2\cdot a^2)}{2-(M_1\cdot L^2+M_2\cdot a^2)}}\cdot\sqrt{C_k+\frac{1}{2}\cdot(k_1+k_2)\cdot\left(a\cdot\frac{q}{2}\right)^2+M_1g(L\cdot cosq-\alpha)}$$

Έστω $\sqrt{\frac{2\cdot(M_1\cdot L^2+M_2\cdot a^2)}{2-(M_1\cdot L^2+M_2\cdot a^2)}}=A$, τότε έχουμε:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial q}=A\ \cdot\sqrt{C_k+\frac{1}{2}\cdot(k_1+k_2)\cdot\left(a\cdot\frac{q}{2}\right)^2+M_1g(L\cdot cosq-\alpha)}$$

$$\Rightarrow\boldsymbol{\Psi}=\boldsymbol{A}\cdot\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\cdot\frac{\left[\boldsymbol{C_k}+\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\cdot(\boldsymbol{k_1}+\boldsymbol{k_2})\cdot\left(\boldsymbol{a}\cdot\frac{\boldsymbol{q}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{M_1g}(\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{cosq}-\boldsymbol{\alpha})\right)\right]^{\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}}}{\frac{\boldsymbol{a^2}(\boldsymbol{k_1}+\boldsymbol{k_2})\boldsymbol{q}}{\mathbf{4}}-\boldsymbol{M_1gL}\cdot\boldsymbol{sinq}}+\boldsymbol{C}$$

Ανάλογα με την τιμή της σταθεράς C_k παίρνουμε και αντίστοιχη τελική λύση. Θεωρούμε ότι η σταθερά C μας είναι μηδέν.

$$\Phi=\Psi-\alpha_1 t$$

$$\beta_1=-\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_1}-t$$

$$\beta_1=-A\ \cdot\sqrt{C_k+\frac{1}{2}\cdot(k_1+k_2)\cdot\left(a\cdot\frac{q}{2}\right)^2+M_1g(L\cdot cosq-\alpha)}-t$$

$$\frac{(\beta_1+t)^2}{A^2}=C_k+\frac{1}{2}\cdot(k_1+k_2)\cdot\left(a\cdot\frac{q}{2}\right)^2+M_1g(L\cdot cosq-\alpha)$$

$$\frac{(\beta_1+t)^2}{A^2}+M_1g\alpha-C_k=\frac{1}{2}\cdot(k_1+k_2)\cdot\left(a\cdot\frac{q}{2}\right)^2+M_1gL\cdot cosq$$

Κανονικά για την συνέχεια της επίλυσης θα πρέπει να λύσουμε ως προς το q, όμως επειδή δεν μπορούμε να συσχετίσουμε το $\cos q$ με το q θα καταφύγουμε σε μια προσέγγιση του $\cos q$.

Μπορούμε να προσεγγίσουμε το συνημίτονο με την σειρά Taylor οπότε θεωρούμε $\cos q\approx 1-q^2/2$.

Επειδή θεωρούμε ότι έχουμε μικρές ταλαντώσεις το q είναι μικρό οπότε $\frac{q^2}{2} \ll 1$ άρα η προσέγγιση γίνεται $\cos q \approx 1$.

$$\frac{(\beta_1 + t)^2}{A^2} + M_1 g\alpha - C_k - M_1 gL = \frac{1}{2} \cdot (k_1 + k_2) \cdot \left(a \cdot \frac{q}{2}\right)^2$$

$$\left(a \cdot \frac{q}{2}\right)^2 = \frac{2}{(k_1 + k_2)} \left(\frac{\left(\beta_1 + t\right)^2}{A^2} + M_1 g\alpha - C_k - M_1 gL \right)$$

$$q(t) = \frac{2}{a} \sqrt{\frac{2}{(k_1 + k_2)} \left(\frac{\left(\beta_1 + t\right)^2}{A^2} + M_1 g\alpha - C_k - M_1 gL \right)}$$

$$\boldsymbol{\theta(t) = \frac{2}{a} \sqrt{\frac{2}{(k_1 + k_2)} \left(\frac{\left(\beta_1 + t\right)^2}{A^2} + M_1 g\alpha - C_k - M_1 gL \right)}}$$

Με την χρήση λοιπόν της Hamilton Jacobi εξίσωσης για προβλήματα με συντηρητικές δυνάμεις εξάγουμε την εξίσωση κίνησης που στην περίπτωση μας καθορίζεται από την μεταβολή της γωνίας θ του εκκρεμούς ως προς το χρόνο σε πολικές συντεταγμένες.

Μπορούμε να βρούμε τους υπόλοιπους όρους, όπως ταχύτητα των σωμάτων ή επιτάχυνση, από τις σχέσεις που έχουμε ορίσει παραπάνω, εφόσον πλέον γνωρίζουμε την μεταβολή της θ ως προς το χρόνο.

Η σταθερά C_k την ορίζουμε εμείς για το συγκεκριμένο πρόβλημα που έχουμε και αν θεωρήσουμε ότι $C_k = 0$ έχουμε:

$$\boldsymbol{\theta(t) = \frac{2}{a} \sqrt{\frac{2}{(k_1 + k_2)} \left(\frac{\left(\beta_1 + t\right)^2}{A^2} + M_1 g\alpha - M_1 gL \right)}}$$

Κανονικά θα έπρεπε να βγει μια ημιτονοειδής εξάρτηση της γωνίας θ ως προς το χρόνο, γιατί έχουμε ταλάντωση, αλλά λόγω των απλοποιήσεων η γωνία εξαρτάται τελικά γραμμικά από τον χρόνο.

Άσκηση 2

Χρησιμοποιήστε την μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange για να λύσετε το παρακάτω πρόβλημα:

Ελαχιστοποιήστε την: $f = x^2 + y^2 + z^2$

Με περιοσμό: $\varphi = xy + 1 - z = 0$

<u>Bonus:</u> Είναι η δεύτερη επίλυση με λογισμικό Matlab και την χρήση του optimization toolbox (βλεπε Fmincon).

Απάντηση

Η συγκεκριμένη άσκηση έχει ως στόχο να βρούμε ένα σημείο που να ελαχιστοποιεί την δοθείσα συνάρτηση με τον συγκεκριμένο περιορισμό. Άρα, εμείς θα πρέπει να βρούμε ένα σημείο έστω $A(x_0, y_0, z_0)$ που θα ικανοποιεί τα παραπάνω και το ίδιο να το βρούμε και με την χρήση του Matlab ως Bonus άσκηση.

Αρχικά, η μέθοδος που θα χρησιμοποιήσουμε είναι η μέθοδος Lagrange που στα προβλήματα βελτιστοποίησης είναι μια στρατηγική για την εύρεση τοπικών ελαχίστων και μεγίστων μιας συνάρτησης με βάση κάποιους περιορισμούς.

Αυτοί οι περιορισμοί μπορεί να είναι γραμμικές ισότητες ή ανισότητες ή ακόμα και μη γραμμικές, όπως έχουμε εμείς. Η ιδέα πίσω από την μέθοδο αυτή είναι να μετατρέψουμε το πρόβλημα με τους περιορισμούς σε μια μορφή όπου θα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την παράγωγο για να βρούμε τα ακρότατα (Derivative test).

Η σχέση μεταξύ της κλίσης της συνάρτησης και των κλίσεων των περιορισμών οδηγεί σε μια αναδιατύπωση του προβλήματος, γνωστή και ως συνάρτηση Lagrangian.

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι υπάρχει μια μεταβλητή λ, η οποία ονομάζεται πολλαπλασιαστής Lagrange, τέτοια ώστε να μπορούμε να ορίσουμε την συνάρτηση Lagrange:

$$L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda\varphi(x, y, z)$$

Αρκεί, λοιπόν, τώρα να βρούμε τα ακρότατα της συνάρτησης αυτής και θα έχουμε υπολογίσει το σημείο που αναζητούσαμε στο αρχικό μας πρόβλημα βελτιστοποίησης.

Έχοντας μόνο έναν περιορισμό το πρόβλημα θα είναι σχετικά απλό στην επίλυση, καθώς θα ορίσουμε την συνάρτηση Lagrange και στην συνέχεια θα βρούμε την κλίση της και καθώς και που μηδενίζεται αυτή.

$$L(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(xy + 1 - z)$$

Η παραπάνω συνάρτηση είναι 4 μεταβλητών οπότε θα πάρουμε την κλίση στον τετραδιάστατο χώρο της συνάρτησης και το σημείο μηδενισμού θα είναι το υποψήφιο/πιθανό ακρότατο.

$$\nabla L = \frac{\partial L}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial L}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial L}{\partial z}\hat{z} + \frac{\partial L}{\partial \lambda}\hat{\lambda}$$

Από το παραπάνω προκύπτει ένα σύστημα 4 εξισώσεων με 4 αγνώστους, το οποίο είναι αρκετά εύκολο να το λύσουμε:

$$2x = \lambda y \ \ \textbf{(1)}$$

$$2y = \lambda x \ \ \textbf{(2)}$$

$$2z = -\lambda \ \ \textbf{(3)}$$

$$xy + 1 - z = 0 \ \ \textbf{(4)}$$

<u>Λύση του Συστήματος</u>

- Αρχικά, αν θέσουμε όπου $x, y \neq 0$ και πολλαπλασιάσουμε τις δύο πρώτες εξισώσεις και απαλείψουμε αυτούς τους όρους θα προκύψει $\lambda = \pm 2$.

  Για λ = -2 προκύπτει από την εξίσωση **(3)** ότι $z = 1$, οπότε στην εξίσωση **(4)** οδηγούμαστε στο σημείο που $xy = 0$, το οποίο είναι άτοπο από την παραπάνω υπόθεση μας.

  Για λ=2 από την εξίσωση **(3)** προκύπτει ότι $z = -1$, οπότε στην εξίσωση **(4)** οδηγούμαστε στο σημείο που $xy = -2$. Από την εξίσωση **(1)** για λ=2 παίρνουμε ότι x = y, το οποίο αντικρούει το ότι $xy = -2$. Άρα και αυτή απορρίπτεται.

- Οπότε στην συνέχεια θα θεωρήσουμε ότι είτε το x είτε το y είναι ίσο με το μηδέν αλλά όχι και τα δύο ταυτόχρονα. Ωστόσο, από τις εξισώσεις **(1), (2)** αν ένα από τα x, y είναι μηδέν τότε υποχρεωτικά και το άλλο θα είναι μηδέν, το οποίο μας οδηγεί στην επόμενη περίπτωση.
- Η τελευταία περίπτωση είναι να έχουμε $x = y = 0$ που από τις **(3)** και **(4)** προκύπτει ότι $z = 1$ και $\lambda = -2$ που είναι και λύση του συστήματος.

Συνεπώς, αποδείξαμε ότι το σημείο ελαχίστου στο πρόβλημα μας είναι το $(0,0,1,-2)$ με τιμή ελαχίστου ίση με 1, ενώ αντίστοιχα στο αρχικό μας πρόβλημα το σημείο ελαχίστου είναι $(0,0,1)$ με τιμή ελαχίστου ίση με 1.

Bonus

Στη συνέχεια, θα χρησιμοποιήσουμε το μαθηματικό λογισμικό Matlab και ειδικότερα το Optimization toolbox για να επαληθεύσουμε ότι βρήκαμε την σωστή λύση. Η συνάρτηση που παρέχεται από το toolbox και που θα χρησιμοποιήσουμε είναι η $fmincon$, η οποία βρίσκει το ελάχιστο μιας μη γραμμικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών με περιορισμούς.

Η συνάρτηση ορίζεται με τις παρακάτω παραμέτρους τις οποίες θα αναλύσουμε για να γίνει κατανοητό, γιατί επιλέξαμε αυτές στον κώδικα που γράψαμε:

```
x = fmincon(fun,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub,nonlcon)
```

- fun: η μη γραμμική συνάρτηση που θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε που είναι γραμμένη ως συνάρτηση στο Matlab
- x_0: ένα τυχαίο σημείο από το οποίο θα ξεκινήσει η επαναληπτική διαδικασία ελαχιστοποίησης και το οποίο πρέπει να πληρεί τους περιορισμούς που θέσαμε
- A, b: είναι οι συντελεστές και οι σταθερές στην περίπτωση που έχουμε ανισότητες με γραμμικούς συντελεστές που συνδέουν τις μεταβλητές μας. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα τα αφήνουμε κενά.
- A_{eq}, b_{eq}: αντίστοιχα με τα προηγούμενα απλά για συστήματα γραμμικών εξισώσεων μεταξύ των μεταβλητών μας.
- lb, ub: είναι τα κάτω και άνω όρια αντίστοιχα(lower and upper bound) που μπορούν να πάρουν οι μεταβλητές μας, αν στο πρόβλημα μας δεν έχουμε πεδίο ορισμού όλο το R^3.
- $nonlcon$: παράμετρος μέσω της οποίας θα καθορίσουμε τον περιορισμό μας. Αυτή η παράμετρος ορίζει τις μη γραμμικές σχέσεις (ισότητας ή ανισότητας) μεταξύ των μεταβλητών του προβλήματος. Αυτή είναι μια συνάρτηση που παίρνει ως όρισμα ένα διάνυσμα x και επιστρέφει δυο arrays. Το ένα αναπαριστά τους περιορισμούς ισότητας και το άλλο ανισότητας. Εμείς σε αυτήν την περίπτωση θα θέσουμε μόνο το περιορισμό της μη γραμμικής ισότητας και θα αφήσουμε τον άλλο κενό.

Κώδικας

Ακολουθεί ο ορισμός της συνάρτησης ConVar(x) και το κύριο κομμάτι κώδικα, όπου θέτοντας τις κατάλληλες παραμέτρους στην συνάρτηση fmincon() παίρνουμε το ίδιο αποτέλεσμα με αυτό που βρήκαμε μέσω της θεωρητικής προσέγγισης του προβλήματος.

```
function [ c,ceq ] = ConVar(x)
c=[];
ceq=x(1)*x(2)+1-x(3);

end
```

```
clc;
clear;
fun=@(x)x(1)^2+x(2)^2+x(3)^2;
x0=[1,1,0];
A=[];
b=[];
Aeq=[];
beq=[];
lb=[];
ub=[];
nonlcon=@ConVar;
x=fmincon(fun,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub,nonlcon)
```

Αποτελέσματα

```
Local minimum found that satisfies the constraints.

Optimization completed because the objective function is non-decreasing in
feasible directions, to within the default value of the function tolerance,
and constraints are satisfied to within the default value of the constraint tolerance.

<stopping criteria details>


x =

   -0.0000   -0.0000    1.0000
```

Αξίζει να αναφερθεί ότι το αρνητικό πρόσημο που φαίνεται στο μηδέν είναι επειδή κατά τον υπολογισμό της πραγματικής λύσης τα x,y δεν είναι ακριβώς μηδέν και το z δεν είναι ακριβώς 1:

```
Optimization completed: The relative first-order optimality measure, 3.153926e-07,
is less than options.TolFun = 1.000000e-06, and the relative maximum constraint
violation, 2.152056e-11, is less than options.TolCon = 1.000000e-06.

Optimization Metric                                          Options
relative first-order optimality =   3.15e-07        TolFun =   1e-06 (default)
relative max(constraint violation) =   2.15e-11     TolCon =   1e-06 (default)

>> format long
>> x

x =

  -0.000000018953934  -0.000000018953934   0.999999999956959
```

Αυτό συμβαίνει γιατί η συνάρτηση λύνει το πρόβλημα με αριθμητική μέθοδο και όχι με αναλυτική και έτσι από μόνη της έχει μια ορισμένη τιμή σφάλματος, η οποία είναι 10^{-6}, και πέρα από την οποία θεωρεί ότι έχει βρει την λύση. Έτσι κι αλλιώς, δεν μπορεί ποτέ να βρεθεί ακριβώς το μηδέν ως λύση στα x,y, καθώς η μικρότερη τιμή σφάλματος που μπορεί να ανιχνευθεί από το Matlab είναι αυτή του σφάλματος μηχανής που είναι ίση περίπου με 10^{-16}.

Άσκηση 3

Έστω ότι $f\big(x,y,y'\big)=y'^2-y'y+y^2$

Να δείξετε ότι $\delta^2 J\big(\eta,y\big)\geq 0$ για κάθε $\eta\ \in H$.

Να υπολογίσετε την Jacobi accessory equation και να δείξετε ότι κάθε non trivial λύση u μπορεί να έχει το πολύ ένα μηδενικό.

Απάντηση

Στην άσκηση αυτή μας δίνεται μια συνάρτηση που θεωρούμε με όσα ξέρουμε από την πρώτη μεταβολή ότι έχει ακρότατο και θέλουμε να δούμε τι συμβαίνει με την δεύτερη μεταβολή που καθορίζει το είδος του ακροτάτου.

Θεωρούμε ότι η συνάρτηση έχει ένα ακρότατο στο y και έστω ότι έχουμε:

$$\hat{y}=y+\varepsilon\eta$$

όπου $\varepsilon\ll 1$ και για το διάστημα που μας ενδιαφέρει $[x_0,x_1]$ έχουμε ότι $\eta(x_0)=\eta(x_1)=0$.

Από το θεώρημα Taylor ως προς το y μπορούμε να πάρουμε την παρακάτω μορφή:

$$f(x,y,y')=f(x,y,y')\varepsilon\left(\eta\frac{\partial f}{\partial y}+\eta'\frac{\partial f}{\partial y'}\right)+\frac{\varepsilon^2}{2}\left(\eta^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+2\eta\eta'\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y'}+\eta'^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^{2\prime}}\right)$$

το οποίο με συντομογραφίες γράφεται ως εξής:

$$f(x,y,y')=f(x,y,y')\varepsilon\big(\eta f_y+\eta' f_{y\prime}\big)+\frac{\varepsilon^2}{2}\big(\eta^2 f_{yy}+2\eta\eta' f_{yy'}+\eta'^2 f_{y'y'}\big)$$

Γνωρίζοντας ότι έχουμε ακρότατο συμπεραίνουμε ότι η πρώτη μεταβολή είναι μηδενική και άρα θα πρέπει να ενδιαφερθούμε με το τι συμβαίνει στην δεύτερη μεταβολή που ισούται με:

$$\delta^2 J(\eta,y)=\int_{x_0}^{x_1}\big(\eta^2 f_{yy}+2\eta\eta' f_{yy'}+\eta'^2 f_{y'y'}\big)dx$$

Το είδος, λοιπόν, του ακροτάτου θα καθορίζεται κατά κύριο λόγο από την δεύτερη μεταβολή και ειδικότερα από το πρόσημο της. Μια άλλη μορφή που μπορούμε να εξάγουμε από την παραπάνω σχέση αν χρησιμοποιήσουμε κατά παράγοντες ολοκλήρωση στον δεύτερο όρο είναι:

$$\delta^2 J(\eta,y)=\int_{x_0}^{x_1}\left(\eta^2\left(f_{yy}-\frac{d}{dx}\big(f_{yy'}\big)\right)+\eta'^2 f_{y'y'}\right)dx$$

Για την άσκηση μας, λοιπόν, θα πρέπει να βρούμε τους παρακάτω όρους για να βρούμε το πρόσημο της δεύτερης μεταβολής:

$$f_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(y'^2 - yy' + y^2\right) = -y' + 2y$$

$$f_{y'} = \frac{\partial}{\partial y'}\left(y'^2 - yy' + y^2\right) = 2y' - y$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(-y' + 2y) = 2$$

$$f_{yy'} = \frac{\partial}{\partial y'}(-y' + 2y) = -1$$

$$f_{y'y'} = \frac{\partial}{\partial y'}(2y' - y) = 2$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στην δεύτερη μεταβολή έχουμε:

$$\delta^2 J(\eta, y) = \int_{x_0}^{x_1}\left(\eta^2\left(2 - \frac{d}{dx}(-1)\right) + \eta'^2 2\right)dx = 2\int_{x_0}^{x_1}\left(\eta^2 + \eta'^2\right)dx$$

Έχοντας δύο μη αρνητικούς όρους εντός του ολοκληρώματος(το τετράγωνο της συνάρτησης η και της παραγώγου της) θα ισχύει:

$$\delta^2 J(\eta, y) \geq 0$$

Οπότε η λύση μας είναι τοπικό ελάχιστο στο y.

Τώρα για να βρούμε την Jacobi Accessory Equation και την λύση u θα πρέπει να λύσουμε την παρακάτω διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d}{dx}\left(f_{y'y'}u'\right) - \left(f_{yy} - \frac{d}{dx}f_{yy'}\right)u = 0 \Longrightarrow$$

$$\frac{d}{dx}(2u') - \left(2 - \frac{d}{dx}(-1)\right)u = 0 \Longrightarrow$$

$$\frac{d}{dx}(u') - u = 0$$

Θεωρούμε πως $u' = \frac{du}{dx}$ και έχουμε:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = u$$

Η παραπάνω διαφορική εξίσωση έχει γενική λύση την:

$$u(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}$$

Για να βρούμε ποιες είναι οι trivial λύσεις θα θεωρήσουμε $c \in [x_0, x_1]$ και για όποιες λύσεις ισχύει $u(c) = u'(c) = 0$ αυτές θα θεωρήσουμε ότι είναι trivial.

Έτσι, έχουμε:

$$u'(x) = C_1 e^x - C_2 e^{-x}$$

$$u(c) = u'(c) \Longrightarrow$$

$$C_1 e^c + C_2 e^{-c} = C_1 e^c - C_2 e^{-c} = 0$$

Όμως, για να έχουμε μηδενισμό της $u(x)$ πρέπει οι σταθερές C_1, C_2 να έχουν αντίθετα πρόσημα, ενώ για να έχουμε μηδενισμό της $u'(x)$ πρέπει να έχουν ίδιο πρόσημο. Άρα, μόνο για $C_1 = C_2 = 0$ έχουμε trivial solution.

Αν το $C_2 = 0$ τότε το $C_1 e^x$ δεν μηδενίζεται ποτέ γιατί έχει σύνολό τιμών $(0, +\infty)$.

Οπότε οι υπόλοιπες λύσεις είναι οι non trivial solutions για τις οποίες πρέπει να ισχύει $C_1 \neq 0$ ή/και $C_2 \neq 0$. Έστω, λοιπόν, ότι θέλουμε να μηδενίσουμε την u:

$$u(x) = 0 \Longrightarrow$$

$$C_1 e^x + C_2 e^{-x} = 0 \Longrightarrow$$

$$-\frac{C_1}{C_2} = e^{-2x} \Longrightarrow$$

$$x = -\frac{1}{2} \ln\left(-\frac{C_1}{C_2}\right)$$

Η συνάρτηση του λογαρίθμου γνωρίζουμε ότι είναι συνάρτηση ένα προς ένα. Συνεπώς, υπάρχει μόνο μια τιμή που την μηδενίζει:

$$x = 0 \iff C_1 = -C_2$$

Για να υπάρχει, λοιπόν, μόνο ένα σημείο μηδενισμού του x πρέπει οι σταθερές να έχουν αντίθετα πρόσημα, καθώς αν C_1, C_2 είναι ομόσημα ή μηδέν ο λογάριθμος στην παραπάνω σχέση δεν θα ορίζεται.

Βιβλιογραφία

1. Lagrange Multiplier - Wikipedia
2. Lagrange Multipliers
3. fmincon - Mathworks
4. Hamilton Jacobi Equation - Wikipedia
5. Hamiltonian Mechanics - Wikipedia