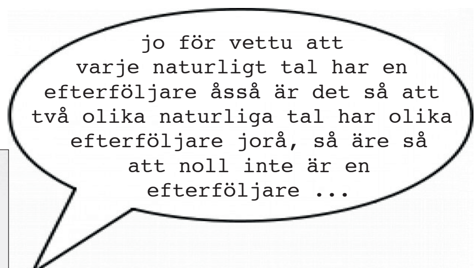
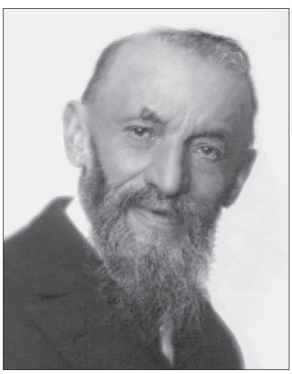
Hur långt kan du räkna?

Ett matematiskt strövtåg är en vandring i fantasins värld där tankarna ömsom löper bekymmerslöst i invanda banor och ömsom lockas in på okänd mark. Men allt är lustbetonat. Vandringen är kravlös och måste inte men kan resultera i ökad förståelse av delar av matematiken. I unika fall kan strövtåget ge idéer som resulterar i nya rön som är av betydelse för ämnets utveckling. Mitt strövtåg har inga sådana ambitioner. Under vandringen kopplar jag samman resultat och teorier som jag mött under mitt liv som matematiklärare. Som varje vandring har den en utgångspunkt men associationerna kan föra långt från den.

Min utgångspunkt är en fråga jag fick av en elev vid ett besök i en tredjeklass i Tyringe i nordvästra Skåne. Ett av mina barnbarn hade bett mig att berätta om min yrkesverksamhet för klassen. Läraren hade avsatt tid för det. Jag pratade i en kvart och sedan fick klassen tillfälle att ställa frågor. Till min förvåning blev det en livlig diskussion. Naturligtvis försökte de sätta mig på prov och bad mig räkna ut produkter av tvåsiffriga tal. Jag minns att jag klarade $69 \cdot 71$ men gick bet på $74 \cdot 87$. Det blev också en diskussion kring det babyloniska talsystemet som läraren tagit upp i undervisningen. Men den allra första frågan var *Hur långt kan du räkna?* och jag låter den vara utgångspunkt för mitt matematiska strövtåg.

”Hur långt kan du räkna?” Mitt svar var att det är omöjligt att säga och jag gav följande förklaring: ”Egentligen kan jag räkna hur långt som helst. Om jag sa till er att jag kunde räkna till en million så kan jag ju alltid fortsätta med en million ett. Varje tal har ju en efterföljare. Jag kan alltså inte ange något slut för min uppräkning.” Jag associerar till ett axiomsystem för de naturliga talen. Den italienske matematikern och logikern Giuseppi Peano publicerade i slutet av 1800-talet en artikel om grundläggande egenskaper hos de naturliga talen där begreppet efterföljare är centralt. Han slår fast att varje tal ska ha precis en efterföljare och att tre andra villkor ska vara uppfyllda. De fyra förutsättningarna utgör grunden för aritmetiken. Genom att utgå från dem är det möjligt att härleda djupa talteoretiska resultat. Det finns en slags skönhet i detta. Ur fyra enkla villkor, som kan förklaras för barn, kan man genom logiska slutledningar härleda resultat som ligger vid forskningsfronten. Men den vandringen kräver hårt arbete, envishet och tid. Den är inget strövtåg.





Giuseppe Peano

”Hur långt kan du räkna?” Jag är inte säker på att alla eleverna var nöjda med mitt svar. Några verkade oförstående. Kanske svarade jag inte på deras fråga. Tal fascinerar barn. Jag kommer att tänka på Mozart och att han som barn helt kunde gå upp i matematiken: ”När han löste räkneuppgifter blev bord, stolar, väggar och till och med golvet täckta av kritade siffror.” Barn vill ge talen namn. De talar om millioners millioner. Det kanske inte var det enkla faktum att varje tal har en efterföljare som var svaret på barnens fråga. De kanske ville veta hur stora tal jag hade namn för. Jag måste erkänna att jag ibland har svårt att ange antalet nollor i en billion, en trillion o s v. Jag vet att ett tal som skrivs med en etta följd av hundra nollor kallas en googol. För det mesta nöjer jag mig att tala om tiopotenser. Att beskriva stora tal är ett gammalt problem. Arkimedes, som levde på 200-talet före Kristus, tar upp det i den berömda skriften *Sandräknaren*. Han utgår från den tidens astronomiska kunskaper och kan med hjälp av avancerade geometriska resonemang göra en uppskattning av antalet sandkorn i universum. Han inför tal av olika ordningar och hans metod förebådar det potensbegrepp som utvecklades nästan tvåtusen år senare. Arkimedes uppskattade antalet sandkorn i universum till 10^{63}.

Med hjälp av tiopotenser kan jag alltså skriva mycket stora tal. Talet 10^{63} börjar med en etta och följs av 63 nollor. I potensform tar det mycket liten plats på papperet men jag har svårt att konkretisera det. Arkimedes *Sandräknaren* ger en bild som jag har svårt att ta till mig. Tanken svindlar. Kanske blir det lättare om jag jämför det med något annat stort tal. Jag gör en uppskattning av det antal sekunder som en hundraåring levt. Ett år som inte är skottår omfattar 365 dygn. Jag bortser till en början från skottåren och hundraåringen har då levt i 36 500 dygn och räknar vi om det i sekunder blir det 3 153 600 000. Det är drygt 3 miljarder eller $3 \cdot 10^{9}$ sekunder. Storleksordningen ändras inte om jag lägger till skottdagarna. Den är mycket mindre än 10^{63} och den är det även om jag övergår till nanosekunder. Det går 10^{9} nanosekunder på en sekund. En hundraåring har alltså levt i drygt $3 \cdot 10^{18}$ nanosekunder. Det antalet är en nästan försumbar bråkdel av antalet sandkorn i universum. Möjligen ökar den insikten min känsla för de stora talen en aning.

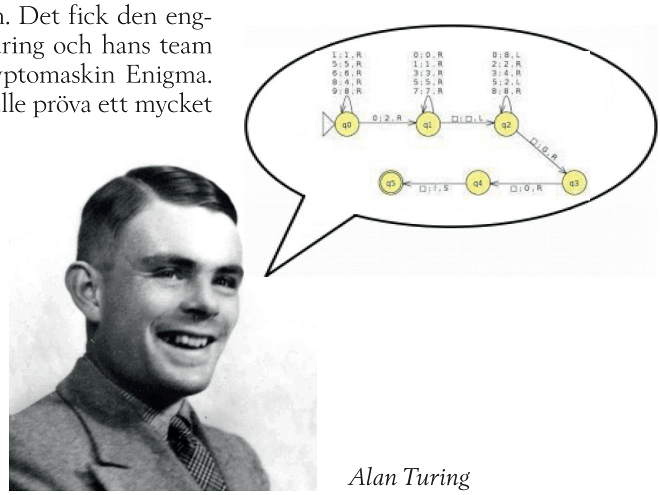
Jag kommer emellertid inte ifrån att jag har svårt att föreställa mig tal som är så stora som 10^{63}. Har de någon praktisk betydelse eller finns de bara på papperet som symboler som konkretiseras med kuriösa tankeexperiment? Jag kommer att tänka på handelsresandeproblemet. En handelsresande ska besöka ett antal kunder. Varje kund ska besökas precis en gång och tiderna det tar mellan varje par kunder är kända. Hur ska resan planeras för att tidsåtgången ska bli minimal? Det ligger nära till hands att gå igenom alla möjligheter och välja ut den minsta. Det låter sig lätt göras om antalet kunder är relativt litet. Om antalet kunder är tre ska sex olika rutter jämföras och det är ju överkomligt.

Detsamma gäller om antalet kunder är fyra. Då finns 24 möjligheter. Men vad

Arkimedes

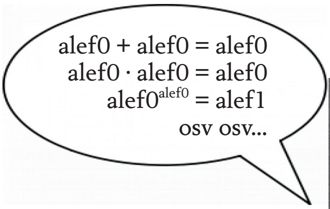
händer om antalet kunder är 50? Då är antalet rutter lika med produkten av de 50 första naturliga talen. Min miniräknare säger att den är av storleksordningen 10^{64}, som är i trakten av Arkimedes uppskattning av antalet sandkorn. Antalet beräkningar som måste göras är alltså oerhört mycket fler än antalet nanosekunder som en hundraåring levt. Det beräkningsarbetet är naturligtvis praktiskt omöjligt att genomföra även om man har tillgång till en aldrig så snabb dator. Handelsresanden bekymrar sig nog inte om det utan använder sin erfarenhet och sin intuition. Men frågan aktualiserades under andra världskriget då man med matematisk metodik ville minimera kostnaderna för flygrutter mellan ett relativt stort antal platser. Att jämföra alla möjliga rutter är tydligen ingen framkomlig väg. Metoden är för grov. Finns det ett smartare sätt som på överkomlig tid alltid leder fram till resultatet? Det vet man faktiskt inte. Ingen har hittills hittat en sådan metod. Det kanske inte finns någon. Handelsresandeproblemet har praktiska tillämpningar men är också av stor principiell betydelse. En lösning skulle ge svar på grundläggande frågor inom beräkningsteori.

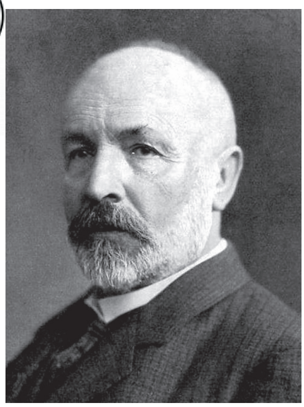
Det är oftast besvärande att de beräkningar som krävs för att lösa ett problem är så många att det är praktiskt omöjligt att genomföra dem. Ibland kan det emellertid – som vid kryptering – vara en fördel. Ett krypto är säkert om man för att forcera det måste testa ett så stort antal möjligheter att beräkningsarbetet i praktiken inte går att genomföra. Det är bra för den som krypterar men inte för kodknäckaren. Det fick den engelske matematikern och logikern Alan Turing och hans team erfara när de skulle forcera tyskarnas kryptomaskin Enigma. De försökte konstruera en maskin som skulle pröva ett mycket stort antal möjligheter på en begränsad tid. Det lyckades först när de får information om att bl a Heil Hitler finns i ingressen till varje meddelande. Då kunde antalet möjligheter reduceras kraftigt och problemet lösas. Alan Turing är legendomspunnen och det har till och med gjorts en spelfilm om honom. I en artikel från slutet av 1930-talet konstruerade han en abstrakt "maskin" som numera kallas Turingmaskin. Tankarna bakom den var av avgörande betydelse då den första fysiska datorn konstruerades i slutet av 1940-talet. Idag är Turingmaskinen ett viktigt redskap vid teoretiska studier om komplexiteten av olika beräkningsmetoder.



Alan Turing

Talet 10^{63} är stort men det är långt till oändligheten – den mystiska oändligheten. De naturliga talen är oändligt många. Hur stora tal jag än skriver upp så finns det alltid ett som är större. Är oändligheten ett tal som man kan räkna med? Jag rådde alltid mina studenter att inte göra det. Det kan medföra bekymmer. Men det rådet hade inte den tyske 1800-talsmatematikern George Cantor lyssnat till. För honom verkade oändligheten vara en realitet. Han införde tal, som han kallade kardinaltal, för att karakterisera olika grader av





Georg Cantor

oändligheter. Den enklaste oändliga mängden består av de naturliga talen och den tilldelas kardinaltalet alef0.

Två mängder har samma kardinaltal om talen i de båda mängderna kan paras ihop två och två så att varje tal i den ena mängden svarar mot precis ett i den andra och omvänt. Det var en gång i tiden en uppenbarelse för mig att de rationella talen också har kardinaltalet alef0. De reella talen har däremot ett större kardinaltal, alef1. Cantor visade hur man kunde räkna med kardinaltalen och skapade en transfinit aritmetik. I mötet med den upplever jag att matematiken inte har några gränser. Den skapas i vår fantasi, men samtidigt som det finns en frihet att bilda nya begrepp och strukturer, måste teorierna inordnas i strängt logiska system. Om frågan ”Hur långt kan du räkna?” omformuleras till ”Hur stora tal kan du räkna med?” skulle jag efter att ha studerat Cantor svara ”Jag kan räkna med oändligt stora tal.”

Där slutar mitt strövtåg. Jag tycker mig ha kommit tillbaka till startpunkten. Vad har min vandring gett mig? Jag har återigen fått fundera över frågor som intresserat mig under mina år med matematiken. Jag inser på nytt att trots att matematik är en mycket gammal vetenskap så är den fortfarande under stark utveckling och att den kan ge upphov till abstrakta fantasifulla konstruktioner. Jag slås av att en fråga av ett nioårigt barn ger upphov till funderingar kring aritmetikens grunder, olösta problem inom beräkningsteori och Cantors transfinita aritmetik. Den tanken ger mig en smula vederkvickelse.

Citatet om Mozart är hämtat från
Solomon, M. (1995). *Mozart – ett liv*. Bokförlaget Bonniers Alba, s 59.

En översättning av Arkimedes Sandräknaren finns i
Sigma del 4 (1965), Forum s 1294–1303.

Lasse Berglund: Världens största tal. *Nämnaren* 2005:1.
http://ncm.gu.se/pdf/namnaren/5859_05_1.pdf

Jonas Hall: Världens största tal II. *Nämnaren* 2007:1
http://ncm.gu.se/pdf/namnaren/5455_07_1.pdf