Master de sciences et technologie 1 — MU4MA029
Mention : Mathématiques et applications — 2022–2023

Projet

Ce projet est un travail individuel. Tout le travail d'implémentation doit être fait en Python 3.0 et doit s'appuyer sur les librairies Python pour le calcul scientifique: NumPy, SciPy and Matplotlib. Les fichiers soumis doivent comporter les scripts Python, un fichier 'readme' décrivant comment utiliser votre travail et les fichiers additionnels (graphiques, ...) que vous jugez nécessaires. Tous les graphiques doivent être compréhensibles de manière autonome (les axes labélisés, une légende, ...). Ce projet est principalement une adaptation du travail effectué en TP, on s'attend à ce que vous réutilisiez le code déjà ecrit.

1. **Geometry.** Soit $\ell \in (0,1]$. On considère le domaine en forme de L suivant (voir Figure 1)

$$\Omega := \{(x,y) \in (0,1)\times(0,1) \mid 0 < x < \ell \text{ or } 0 < y < \ell\}\,. \tag{1}$$

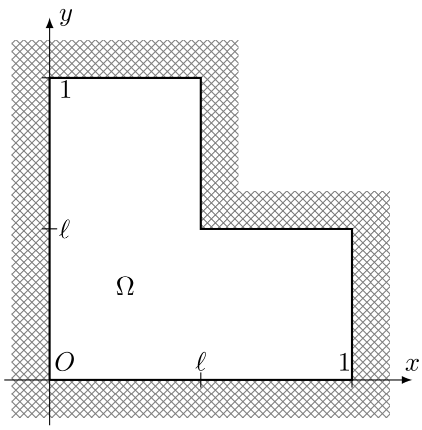

Figure 1: Géométrie du domaine.

(a) Ecrire une routine `GenerateRectangleMesh` sur le modèle de celle du TP2 qui génère un maillage triangulaire structuré pour un rectangle $L_x \times L_y$. Les entrées doivent être: L_x (longueur horizontale), L_y (longueur verticale), N_x (nombre de sous-divisions horizontales) et N_y (nombre de sous-divisions verticales). Les sorties doivent être: `vtx` (matrice de coordonnées) et `elt` (matrice de connectivité).

(b) Ecrire une routine `GenerateLShapeMesh` qui génère un maillage triangulaire structuré pour le domaine Ω, à partir de deux maillages de domaines rectangulaires provenant de la routine `GenerateRectangleMesh` qui seront 're-collés' l'un à l'autre. Le maillage final doit être *conforme*: sur l'interface, tous les nœuds appartenant à l'un des maillages doit coïncider avec un nœud de l'autre maillage, voir Figure 2.

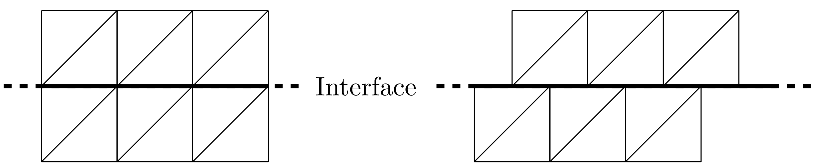

Figure 2: Un maillage conforme (gauche) et un maillage non-conforme (droite).

Les entrées doivent être N et N_ℓ tels que $0 < N_\ell \leq N$. Le premier paramètre N représente le nombre de sous-divisions par unité de longueur dans chaque direction, de telle façon que la longueur d'une sous-division est $h := N^{-1}$. Le second paramètre est tel que le paramètre ℓ apparaissant dans la définition de Ω est $\ell = N_\ell h$. Les sorties doivent être: `vtx` (matrice de coordonnées) et `elt` (matrice de connectivité).

(c) Ecrire une routine `PlotMesh` permettant de représenter un maillage triangulaire du domaine Ω.

2. **Problème.** Soit $f \in L^2(\Omega)$, $c > 0$ et $\mathbf{b} = (b_x, b_y) \in \mathbb{R}^2$. On considère le problème suivant:

$$\begin{cases} \text{Find } u \in H^1(\Omega) \text{ such that :} & \\ -\Delta u + \mathbf{b} \cdot \nabla u + cu = f, & \text{in } \Omega, \\ u = 0, & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

On désire calculer une solution approchée u_h du problème ci-dessus en utilisant une méthode de Galerkine conforme. L'espace d'approximation de dimension finite V_h est construit à partir d'éléments finis $\mathbb{P}_1$ de Lagrange sur un maillage triangulaire.

(a) Ecrire la formulation variationalle associée à (2).

(b) Ecrire trois routines permettant d'assembler les matrices élémentaires associées à chaque terme apparaissant dans la forme sesquilinéaire, sur le modèle des routines écrites pendant le TP5.

(c) Ecrire une routine permettant d'assembler la matrice globale du système linéaire.

3. **Résolution.** On considère le terme source suivant

$$f(x, y) := e^{(b_x x + b_y y)/2} \sin(pr\pi x) \sin(qr\pi y), \qquad \forall (x, y) \in \Omega, \tag{3}$$

avec $p, q, r \in \mathbb{N}$, $p, q, r > 0$, et le paramètre géométrique $\ell = r^{-1}$.

(a) Vérifier que la solution analytique, appelée ensuite u_{ex}, pour le problème (2) avec le terme source f donné par (3) prend la forme $u_{\text{ex}} = \alpha f$, où $\alpha \in \mathbb{R}$ est une constante que l'on déterminera.

(b) Ecrire une routine permettant d'assembler une approximation numérique du second-membre du système linéaire pour le terme source f ci-dessus.

(c) Résoudre numériquement (2) avec le terme source donné par (3) pour des valeurs de $p, q, r \in \mathbb{N}$; et pour les coefficients de l'EDP suivant:

$$\mathbf{b} = (1, 1), \qquad c = 1. \tag{4}$$

(d) Ecrire une routine `PlotApproximation` permettant de représenter un champ linéaire par morceaux $v_h \in V_h$ dans le domaine Ω pour un maillage triangulaire. En utilisant cette routine, représenter la solution numérique u_h et l'erreur $u_h - \Pi_h u_{\text{ex}}$ associée.

(e) Tracer la convergence de l'erreur

$$\frac{\|u_h - \Pi_h u_{\text{ex}}\|_{L^2(\Omega)}}{\|\Pi_h u_{\text{ex}}\|_{L^2(\Omega)}}, \tag{5}$$

en fonction du paramètre de maillage h pour plusieurs rafinements. Quel est l'ordre de convergence ?