MPRO–ECMA

Correction partie 1 projet 2015-2016

1 Travail demandé

Exercice 1 — *Modélisation du problème en ignorant la connexité*
Nous proposons de considérer tout d'abord un problème simplifié qui est le suivant :

Déterminer, pour l'ensemble M des mailles d'une commune donnée, le plus grand sous-ensemble de mailles $Z \subseteq M$ tel que la valeur de $H^p(Z) + H^a(Z)$ soit supérieure ou égale à 2.

1. *Modélisation du problème*
   Proposez une modélisation de ce problème par un programme mathématique en variables binaires ayant une fonction objectif linéaire et une contrainte fractionnaire.

▶ **Correction**

$$(PF)\begin{cases} \max \displaystyle\sum_{(i,j)\in M} x_{ij} \\ \text{s.c.} \\ \quad \dfrac{\displaystyle\sum_{(i,j)\in M} H^p_{ij} C^p_{ij} x_{ij}}{\displaystyle\sum_{(i,j)\in M} C^p_{ij} x_{ij}} + \dfrac{\displaystyle\sum_{(i,j)\in M} H^a_{ij} C^a_{ij} x_{ij}}{\displaystyle\sum_{(i,j)\in M} C^a_{ij} x_{ij}} \geqslant 2 \\ \quad x_{ij} = 0 & \forall (i,j) \in M : C^p_{ij} = 0 \\ \quad x_{ij} \in \{0,1\} & \forall (i,j) \in M \end{cases}$$

La contrainte $x_{ij} = 0 \ \forall (i,j) \in M : C^p_{ij} = 0$ sert à ne considérer que les cases où des coefficients de pente et d'altitude différents de 0 ont été attribués. Dans les instances considérées on a : si l'un des coefficients $C^p_{ij}, C^a_{ij}, H^p_{ij}, H^a_{ij}$ vaut 0 alors les 4 valent 0.

2. *Linéarisation de la contrainte fractionnaire*
   Proposez une façon de linéariser la contrainte fractionnaire.

▶ **Correction**

Linéarisation de la contrainte fractionnaire : on la remplace par 2 contraintes quadratiques et 1 contrainte linéaire en introduisant 2 variables réelles H^p et H^a. Les termes quadratiques sont les produits d'une variable réelle par une variable binaire.

$$
(PQ)\begin{cases}
\max \displaystyle\sum_{(i,j)\in M} x_{ij} & \\
\text{s.c.} & \\
\quad H^p \displaystyle\sum_{(i,j)\in M} C^p_{ij} x_{ij} = \sum_{(i,j)\in M} H^p_{ij} C^p_{ij} x_{ij} & \\
\quad H^a \displaystyle\sum_{(i,j)\in M} C^a_{ij} x_{ij} = \sum_{(i,j)\in M} H^a_{ij} C^a_{ij} x_{ij} & \\
\quad H^p + H^a \geqslant 2 & \\
\quad x_{ij} = 0 & \forall (i,j) \in M : C^p_{ij} = 0 \\
\quad x_{ij} \in \{0,1\} & \forall (i,j) \in M
\end{cases}
$$

Puis on linéarise de façon classique les contraintes quadratiques, c'est-à-dire les produits $H^p x_{ij}$ et $H^a x_{ij}$, que l'on remplace respectivement par y_{ij} et z_{ij}. On obtient le programme linéaire en variables mixtes (binaires et réelles) suivant :

$$
(PL)\begin{cases}
\max \displaystyle\sum_{(i,j)\in M} x_{ij} & \\
\text{s.c.} & \\
\quad \displaystyle\sum_{(i,j)\in M} C^p_{ij} y_{ij} = \sum_{(i,j)\in M} H^p_{ij} C^p_{ij} x_{ij} & \\
\quad \displaystyle\sum_{(i,j)\in M} C^a_{ij} z_{ij} = \sum_{(i,j)\in M} H^a_{ij} C^a_{ij} x_{ij} & \\
\quad H^p + H^a \geqslant 2 & \\
\quad y_{ij} \leqslant B^p x_{ij} & \forall (i,j) \in M \\
\quad y_{ij} \leqslant H^p & \forall (i,j) \in M \\
\quad y_{ij} \geqslant H^p - B^p(1 - x_{ij}) & \forall (i,j) \in M \\
\quad y_{ij} \geqslant 0 & \forall (i,j) \in M \\
\quad z_{ij} \leqslant B^a x_{ij} & \forall (i,j) \in M \\
\quad z_{ij} \leqslant H^a & \forall (i,j) \in M \\
\quad z_{ij} \geqslant H^a - B^a(1 - x_{ij}) & \forall (i,j) \in M \\
\quad z_{ij} \geqslant 0 & \forall (i,j) \in M \\
\quad x_{ij} = 0 & \forall (i,j) \in M : C^p_{ij} = 0 \\
\quad x_{ij} \in \{0,1\} & \forall (i,j) \in M
\end{cases}
$$

où B^p et B^a sont des bornes supérieures de H^p et H^a respectivement.

Exercice 2 — *Modélisation de la connexité*

Proposez une façon de modéliser la contrainte sur la connexité de la solution attendue. Pour cela, la première étape sera de modéliser le voisinage d'une maille (i, j). Par exemple, une commune peut être représentée par un graphe où chaque maille (i, j) est un sommet et il existe une arête (ou un arc) entre les sommets (i, j) et (k, l) si et seulement si les mailles (i, j) et (k, l) sont voisines. Ensuite, plusieurs choix de modélisation sont possibles. Une façon de faire est de fixer une des mailles sélectionnées comme maille "origine", et d'ajouter des variables pour définir les distances des autres mailles sélectionnées par rapport à cette origine. Une maille sélectionnée ne pourra alors être à distance h de l'origine que si un de ses voisins est à distance $h - 1$ (pour un certain h), et toute maille choisie doit être à une distance finie h (bornée par un paramètre $h_{\max}$) de l'origine.

► **Correction**

Formulation 1 :

On définit les variables booléennes x_{ijh} de la façon suivante : $x_{ijh} = 1$ si et seulement si la maille (i,j) est retenue au "niveau" h (i.e. avec une distance $h-1$ à la racine). On considère alors les contraintes suivantes :

$$(F1)\left\{\begin{array}{lr} \displaystyle\sum_{(i,j)\in M} x_{ij1} = 1 & \\ x_{ijh} \leqslant \displaystyle\sum_{(k,l) \text{ voisin de } (i,j)} x_{kl(h-1)} & \forall (i,j)\in M, \forall h \in \{2,\dots,h_{\max}\} \\ x_{ij} = \displaystyle\sum_{h=1}^{h_{\max}} x_{ijh} & \forall (i,j) \in M \end{array}\right.$$

La première contrainte impose de retenir une maille au niveau 1, c'est-à-dire une "racine". À cause de la deuxième contrainte, on ne peut retenir une maille au niveau h que si une de ses voisines est retenue au niveau $h-1$. Cette formulation a l'avantage d'être simple, mais il faut choisir une valeur pour $h_{\max}$ (qui permet également de définir une certaine compacité des mailles retenues).

Formulation 2 :

On considère les variables booléennes suivantes : $x_{ij} = 1$ si et seulement si la maille (i,j) est retenue et $y_{ijkl} = 1$ si et seulement si l'arc $((i,j),(k,l))$ est retenu pour former une arborescence (couvrant les mailles retenues). On considère alors les contraintes suivantes :

$$(F2)\left\{\begin{array}{ll} y_{ijkl} \leqslant x_{ij} & \forall \text{ arc } ((i,j),(k,l)) \\ \displaystyle\sum_{(i,j) \text{ voisin de } (k,l)} y_{ijkl} \leqslant x_{kl} & \forall (k,l) \in M \\ \displaystyle\sum_{\text{arc } ((i,j),(k,l))} y_{ijkl} = \left(\sum_{(i,j)\in M} x_{ij}\right) - 1 & \\ t_{kl} \geqslant t_{ij} + 1 - T(1 - y_{ijkl}) & \forall \text{ arc } ((i,j),(k,l)) \\ t_{ij} \leqslant (T-1)x_{ij} & \forall (i,j) \in M \\ t_{ij} \geqslant 0 & \forall (i,j) \in M \\ x_{ij} \in \{0,1\} & \forall (i,j) \in M \\ y_{ijkl} \in \{0,1\} & \forall \text{ arc } ((i,j),(k,l)) \end{array}\right.$$

D'après la première contrainte, on ne peut pas retenir l'arc $((i,j),(k,l))$ si la maille (i,j) n'est pas retenue. D'après la deuxième contrainte, on ne peut retenir aucun des arcs arrivant sur (k,l) si la maille (k,l) n'est pas retenue ; si elle est retenue, on ne peut en retenir qu'un seul. La troisième contrainte exprime le fait que le nombre d'arcs retenus est égal au nombre de mailles retenues moins 1. La quatrième contrainte, dans laquelle T est une constante suffisamment grande, interdit de former des circuits : les t_{ij} définissent une "numérotation topologique" des sommets retenus (c'est-à-dire une numérotation telle que l'extrémité terminale d'un arc a un numéro supérieur à celui de son extrémité initiale), dans une arborescence couvrant ces sommets. La cinquième contrainte borne les t_{ij} ($t_{ij} = 0$ si la maille (i,j) n'est pas retenue).