Modélisation projet ECMA

DUFOUR MAXIME, JAY EMMANUEL
ENSTA ParisTech - CNAM
January 15, 2016

1 Exercice 1 : Modélisation du problème en ignorant la connexité

1.1 Q1 : Modélisation du problème

Variables : Les variables de ce problème sont les $x_{i,j}$ qui sont des variables binaires qui valent 1 si la maille (i, j) est retenue

Fonction objectif : Nous cherchons à maximiser la surface retenue donc :

$$\max \sum_{(i,j)\in M} x_{i,j}$$

Contrainte : Sous la contrainte *fractionnaire* :

$$\frac{\sum_{(i,j)\in M} H_{i,j}^p C_{i,j}^p x_{i,j}}{\sum_{(i,j)\in M} C_{i,j}^p x_{i,j}} + \frac{\sum_{(i,j)\in M} H_{i,j}^a C_{i,j}^a x_{i,j}}{\sum_{(i,j)\in M} C_{i,j}^a x_{i,j}} \geq 2 \tag{1}$$

1.2 Q2 : Linéarisation de la contrainte fractionnaire

L'idée est de séparer la contrainte fractionnaire en deux parties que l'on va poser égales à des variables réelles (contraintes quadratiques) :

$$\frac{\sum_{(i,j)\in M} H_{i,j}^p C_{i,j}^p x_{i,j}}{\sum_{(i,j)\in M} C_{i,j}^p x_{i,j}} = \alpha^p \tag{2}$$

et

$$\frac{\sum_{(i,j)\in M} H_{i,j}^a C_{i,j}^a x_{i,j}}{\sum_{(i,j)\in M} C_{i,j}^a x_{i,j}} = \alpha^a \tag{3}$$

ce qui nous permet d'écrire la contrainte fractionnaire (1) comme cela :

$$\alpha^p + \alpha^a \geq 2 \tag{4}$$

Nous devons donc maintenant linéariser (2) et (3). On utilise pour cela la linéarisation simple entre un booléen et une variable entière. Soit $k \in a, p$. On peut écrire les équations (2) et (3), en multipliant par le dénominateur, comme :

$$\sum_{(i,j)\in M} H_{i,j}^k C_{i,j}^k x_{i,j} = \alpha^k * \sum_{(i,j)\in M} C_{i,j}^k x_{i,j}$$

et donc

$$\sum_{(i,j)\in M} H^k_{i,j} C^k_{i,j} x_{i,j} = \sum_{(i,j)\in M} C^k_{i,j} \alpha^k * x_{i,j}$$

Et le travail revient donc à linéariser les couples de variables $\alpha^k * x_{i,j}$. Pour cela, nous introduisons un nouveau jeu de variables $y^k_{i,j}$ pour $k \in a, p$ et $(i,j) \in M$ qui vont représenter $\alpha^k * x_{i,j}$.

Soit $k \in a, p$ et $(i,j) \in M$, alors on ajoute les contraintes suivantes :

$$y^k_{i,j} \leq u^k * x_{i,j}$$

$$y^k_{i,j} \leq \alpha^k$$

$$y^k_{i,j} \geq (x_{i,j} - 1) * u^k + \alpha^k$$

$$y^k_{i,j} \geq 0$$

Avec u^k une borne supérieure que l'on définit dans les données.

La contrainte fractionnaire (1) se linéarise donc, en ajoutant les variables α^k et $y^k_{i,j}$ en :

$$\sum_{(i,j)\in M} H^k_{i,j} C^k_{i,j} x_{i,j} = \sum_{(i,j)\in M} C^k_{i,j} y^k_{i,j}$$

$$y^k_{i,j} \leq u^k * x_{i,j}$$

$$y^k_{i,j} \leq \alpha^k$$

$$y^k_{i,j} \geq (x_{i,j} - 1) * u^k + \alpha^k$$

$$y^k_{i,j} \geq 0$$

Avec la contrainte supplémentaire (4) :

$$\alpha^p + \alpha^a \geq 2$$

2 Exercice 2 : Modélisation de la connexité

Pour modéliser cette contrainte de connexité, nous avons besoin d'introduire des contraintes qui vont indiquer une distance à une origine que le programme déterminera. Nous allons donc introduire des variables booléennes $s^k_{i,j}$ avec k étant la "distance" à l'origine. Nous devons donc introduire plusieurs contraintes :

Sélection de l'origine. Nous devons avoir une seule variable $s^0_{i,j}$ qui correspond à l'origine :

$$\sum_{(i,j)\in M} s^0_{i,j} = 1$$

Chaque maille retenue doit avoir une distance à l'origine. Cette contrainte correspond à la contrainte de connexité

$$\sum_{k=0}^{k_{max}} s_{i,j}^{k} = x_{i,j} \qquad \forall (i,j) \in M$$

La distance d'une maille est conditionnée par celle de ses voisins. Pour avoir une distance k, nous avons besoin qu'un des voisins de la maille ait une distance $k-1$

$$s_{i,j}^{k} \leq s_{i-1,j}^{k-1} + s_{i,j-1}^{k-1} + s_{i+1,j}^{k-1} + s_{i,j+1}^{k-1} \qquad \forall k \in [|0, k_{max}|]$$

k_{max} **:** Nous avons à déterminer la valeur maximum que ce k peut prendre. Nous pouvons considérer $n * m$ en premier abord.