Mecánica Cuántica. Examen 3

Grupo CO11 Trimestre 21-I
Profesor: Miguel Angel Bastarrachea Magnani
Ayudante: Yoshua Chávez Bolaños,
Fecha: Viernes 11 de junio de 2021.
Fecha de entrega: Lunes 14 de junio de 2021.

1. **Preguntas conceptuales (2 puntos)**. Responde las siguientes preguntas
   (a) ¿Qué es la repulsión de niveles y cuáles son las dos cantidades que la determinan en la teoría de pertrubaciones estacionaria de segundo orden?
   (b) ¿Cuáles son los pasos para resolver un problema con degeneraciones usando la teoría de perturbaciones estacionaria.
   (c) ¿Qué es la representación de Dirac y cuáles son sus diferencias con las representaciones de Schrödinger y Heisenberg?
   (d) ¿Qué es el operador de transición y cómo determina la aproximación de Born de órdenes superiores?
   (e) ¿Por qué se necesita el desarrollo en ondas parciales?

2. **Elipsoide Impenetrable (2 puntos).** Una partícula se encuentra dentro de un elipsoide impenetrable de rotación cuyo potencial es

$$U(x,y,z) = \begin{cases} 0, & \frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} < 1, \\ \infty, & \frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \geq 1, \end{cases} \tag{1}$$

   y $|a-b| \ll a$. Encuentra el corrimiento de energía para el estado base con respecto al estado base de la partícula en un pozo esférico del mismo volumen a primer orden en la teoría de perturbaciones.
   Hint: Debes encontrar los eigenestados del problema con un pozo esférico y después encontrar la forma de la perturbación λV.

3. **Oscilador cargado con dependencia temporal (2 puntos).**
   (a) Considera un oscilador armónico unidimensional que se encuentra en su estado base. Es sujeto a una fuerza externa $F(t)$ con $F(t) \to 0$ con $t \to \pm\infty$. Obtén las probabilidades de que el oscilador sea excitado a varios estados excitados y el valor esperado de su energía conforme $t \to \infty$. Cuando resuelvas el problema usa la representación de Heisenberg y empieza con las ecuaciones de movimiento de los operadores de creación $\hat{a}^\dagger$ y aniquilación $\hat{a}$.
   (b) Ahora el oscilador linear cargado está bajo el efecto de un campo eléctrico homogéneo ($\hat{V} = -e\hat{x}\mathcal{E}(t)$) que cambia en el tiempo bajo leyes específicas:

$$\text{(i) } \mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 e^{-\frac{t^2}{\tau^2}}, \ \text{(ii) } \mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \left(1 + \frac{t^2}{\tau^2}\right)^{-1}, \ \text{(iii) } \mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 e^{-\frac{t^2}{\tau^2}} \cos\omega_0 t. \tag{2}$$

   Asumiendo que el oscilador está en el n-ésimo estado cuántico antes de que el campo se encienda ($t \to -\infty$, encuentra las probabilidades de transición a diferentes estados para $t \to \infty$ en el primer orden de la teoría de perturbaciones no estacionaria.
   (c) Para $n = 0$ compara el resultado obtenido con el problema exacto del primer inciso.

4. **Dos puntos dispersores (2 puntos).** Usando la aproximación de Born, encuentra las amplitudes de dispersión de dos centros de potencial idénticos que están separados por una distancia $\mathbf{a}$ entre sí, por ejemplo, de la forma $U(\mathbf{r}) = U_0(r) + U(|\mathbf{r} - \mathbf{a}|)$. Expresa tu respuesta en términos de la amplitud de dispersión $f_0^{(1)}(q)$ para la dispersión sólo de $U_0(r)$.
   Encuentre una relación entre las secciones eficaces totales de uno a dos centros para los siguientes casos límite
   (a) $ka \ll 1$ (aquí la cantidad kR, siendo R el alcance del potencial $U_0(r)$, podría ser arbitraria).
   (b) $kR \sim 1$ y $a \gg R$ (i. e., la distancia entre los centros es mucho más grande que el alcance $U_0(r)$).

   Generalice el resultado para el caso de un sistema con un número arbitrario de N centro idénticos localizados en los puntos $\mathbf{a}_n$ con $n = 1, 2, ..., N$.