Mecánica Cuántica. Tarea 4

Grupo CO11 Trimestre 21-I
Profesor: Miguel Angel Bastarrachea Magnani
Ayudante: Yoshua Chávez Bolaños,
Fecha: Miércoles 21 de abril de 2021.
Fecha de entrega: Miércoles 28 de abril de 2021.

1. Muestra que para un oscilador armónico simple unidimensional

$$\langle 0| e^{ik\hat{x}} |0\rangle = exp[-k^2 \langle 0| \hat{x}^2 |0\rangle /2]$$

donde $\hat{x}$ es el operador de posición.

2. Un estado coherente de un oscilador armónico simple unidimensional está definido por ser un eigenestado del operador de aniquilación (no Hermitiano) a

$$a|\lambda\rangle = \lambda |\lambda\rangle$$

donde λ es en general, un número complejo.

(a) Demuestra que

$$|\lambda\rangle = e^{-|\lambda|^2/2} e^{\lambda \hat{a}^\dagger} \lambda |0\rangle$$

es un estado normalizado coherente.

(b) Muestra la relación de incertidumbre mínima para tal estado.

(c) Escribe $|\lambda\rangle$ como

$$|\lambda\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) |n\rangle .$$

Muestra que la distribución de $|f(n)|^2$ con respecto a n es de la forma de Poisson. Encuentra el valor más probable de n, por lo tanto de E.

(d) Muestra que un estado coherente se puede obtener también aplicando el operador de translación $e^{i\hat{p}l/\hbar}$ (desplazamiento finito) (donde $\hat{p}$ es el operador momento y l la distancia desplazada) al estado base.

3. Una partícula en una dimensión ligada a un centro fijo por un potencial función-δ de la forma

$$V(x) = -v_0 \delta(x)$$

con v_0 un real positivo.

(a) Encuentra la función de onda y la energía ligada del estado base. ¿Existen estados excitados?

(b) En $t = 0$, el potencial es repentinamente apagado, esto es, $V = 0$ para $t > 0$. Encuentra la función de onda para $t > 0$ (sé cuantitativo pero no intentes evaluar la integral que podría aparecer).

4. El propagador en el espacio de momento análogo a $\langle \mathbf{x}'', t | \mathbf{x}', t_0 \rangle$ está dado por $\langle \mathbf{p}'', t | \mathbf{p}', t_0 \rangle$. Encuentra una expresión explícita para $\langle \mathbf{p}'', t | \mathbf{p}', t_0 \rangle$ para el caso de la partícula libre.

5. Escribe la expression de la acciión clásica del oscilador armónico simple para un intervalo de tiempo finito. Luego, construye el propagador $\langle \mathbf{x}_n, t_n | \mathbf{x}_{n-1}, t_{n-1} \rangle$ para el oscilador armónico cuántico usando la prescripción de Feynman para $\Delta t = t_n - t_{n-1}$ pequeño. Manteniendo términos sólo de orden $(\Delta t)^2$, muestra que está completamente de acuerdo con el límite $t - t_0 \to 0$ del propagador $\langle \mathbf{x}'', t | \mathbf{x}', t_0 \rangle$.