Mecánica Cuántica. Examen 1

Grupo CO11 Trimestre 21-I
Profesor: Miguel Angel Bastarrachea Magnani
Ayudante: Yoshua Chávez Bolaños,
Fecha: Viernes 23 de abril de 2021.
Fecha de entrega: Lunes 26 de abril de 2021.

1. **Preguntas conceptuales (2 puntos)**. Responde las siguientes preguntas
   (a) Enuncia los postulados de la mecánica cuántica.
   (b) ¿Cuál es la expresión general de la superposición cuántica para un estado cuántico arbitrario en la base de un operador arbitrario?
   (c) ¿Qué es la incompatibilidad entre observables y cómo se enuncia el principio de incertidumbre entre dos operadores?
   (d) ¿Cuáles son las diferencias entre la representación de Schrödinger y la de Heisenberg?
   (e) ¿Que significado físico tiene el propagador en la mecánica cuántica?

2. **Pozo unidimensional infinito (2 puntos).** Considera una partícula de masa m bajo la acción del siguiente potencial:

$$V(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ +\infty & \text{si } x < 0 \text{ y } x > a \end{cases} \tag{1}$$

   (a) Encuentra los eigenestados $|\phi_n\rangle$ y eigenevalores E_n del sistema.
   (b) Si el estado inicial del sistema es $|\psi(0)\rangle = a_1|\phi_1\rangle + a_2|\phi_2\rangle + a_3|\phi_3\rangle + a_4|\phi_4\rangle$, ¿cuál es la probabilidad de encontrar un valor de energía menor a $E = 3\pi^2\hbar^2/ma^2$?
   (c) ¿Cuál es el valor medio y la desviación cuadrática media de la energía de la partícula en el estado $|\psi(0)\rangle$?
   (d) Calcula el vector de estado al tiempo t: $|\psi(t)\rangle$. ¿Los resultados que encontraste en los incisos (b) y (c) permanecen válidos al tiempo t?
   (e) Cuando la energía es medida, se encuentra el resultado $E = 8\pi^2\hbar^2/ma^2$. Después de la medición, ¿cuál es el estado del sistema? ¿Cuál es el resultado si se mide de nuevo la energía?

3. **Molécula triatómica (2 puntos).** Considera un electrón formado por tres átomos equidistantes. Usamos $|\phi_A\rangle$, $|\phi_B\rangle$ y $|\phi_C\rangle$ para denotar los tres estados ortonormales del electrón que corresponden a las tres funciones de onda que representan la localización alrededor de los núcleos atómicos A, B y C, respectivamente. En este caso, nos estamos confinando a un subespacio de estados que es generado sólo por los estados $|\phi_A\rangle$, $|\phi_B\rangle$ y $|\phi_C\rangle$. Cuando negamos la posibilidad de que el electrón salte de un núcleo atómico a otro, su energía está descrita por el Hamiltoniano $\hat{H}_0$ cuyos eigenestados son los estados $|\phi_A\rangle$, $|\phi_B\rangle$ y $|\phi_C\rangle$, todos con energía E_0. El acoplamiento entre los estados $|\phi_A\rangle$, $|\phi_B\rangle$ y $|\phi_C\rangle$ está descrito por un Hamiltoniano adicional $\hat{H}_I$ definido por:

$$\hat{H}_I|\phi_A\rangle = -a|\phi_B\rangle, \tag{2}$$

$$\hat{H}_I|\phi_B\rangle = -a|\phi_A\rangle - a|\phi_C\rangle, \tag{3}$$

$$\hat{H}_I|\phi_C\rangle = -a|\phi_B\rangle, \tag{4}$$

   donde a es una constante real positiva.

   (a) Calcula los eigenestados y eigenenergías del Hamiltoniano $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_I$.
   (b) Si el electrón se encuentra en el estado $|\phi_A\rangle$ al tiempo $t = 0$, discute cualitativamente la localización del electrón a tiempos subsecuentes t. ¿Hay algún valor de t para el cual esté perfectamente localizado en alguno de los átomos A, B o C?
   (c) Sea $\hat{D}$ la observable cuyos eigenestados son $|\phi_A\rangle$, $|\phi_B\rangle$ y $|\phi_C\rangle$ con eigenvalores respectivos $-d, 0, d$. Si D es medida al tiempo t, ¿Qué valores pueden encontrarse y con qué probabilidades?

(d) Cuando el estado inicial del electrón es arbitrario, ¿cuáles son las frecuencias de Bohr (las diferencias entre las eigenenergías del sistema) que pueden aparecer en la evolución de $\langle \hat{D} \rangle$? Brinda una interpretación física del operador $\hat{D}$. Si se usan ondas electromagnéticas para excitar al electrón, ¿qué frecuencias puede absorber y emitir en la molécula ?

4. **Polarizador y analizador de átomos (4 puntos).** Considera un dispositivo experimental como se muestra en la figura: un haz de átomos de espín 1/2 sale de un horno E_1, es colimado en F_1 y pasa a través de uno de los aparatos A_1 que sirve como "polarizador" en una dirección que hace un ángulo θ con el eje z en el plano xz, y luego pasa a través de otro aparato A_2, el "analizador", que mide la componente S_z del espín. Asumimos que entre el polarizador y el analizador, un campo magnético $\mathbf{B}_0$ es aplicado de manera uniforme al eje x sobre una distancia L del haz atómico. Llamamos v a la velocidad de los átomos y $T = L/v$ al tiempo durante el cual se encuentran bajo la acción del campo aplicado $\mathbf{B}_0$. Además, definimos $\omega_0 = -\gamma B_0$.

(a) ¿Cuál es el vector de estado $|\psi_1\rangle$ del espín en el momento en el que entra al analizador.

(b) Muestra que cuando la medición ocurre en el analizador hay una probabilidad igual a $\frac{1}{2}\left(1 + \cos\theta \cos\left(\omega_0 T\right)\right)$ de encontrar el estado con $\hbar/2$ y $\frac{1}{2}\left(1 + \cos\theta\cos\left(\omega_0 T\right)\right)$ de encontrar el estado con $-\hbar/2$. Brinda una interpretación física de este resultado.

(c) Muestra que la matriz de densidad ρ_1 de una partícula que entra en el analizador está dada, en la base de $\hat{S}_z$ por:

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 + \cos\theta\cos\left(\omega_0 T\right) & \sin\theta + i\cos\theta\sin\left(\omega_0 T\right) \\ \sin\theta - i\cos\theta\sin\left(\omega_0 T\right) & 1 + \cos\theta\cos\left(\omega_0 T\right) \end{pmatrix}. \tag{5}$$

(d) Calcula Tr$\left(\hat{\rho}_1 \hat{S}_z\right)$, Tr$\left(\hat{\rho}_1 \hat{S}_x\right)$ y Tr$\left(\hat{\rho}_1 \hat{S}_y\right)$.

(e) Asume que la velocidad de los átomos es una variable aleatoria y que en consecuencia el tiempo T se conoce con cierta incertidumbre ΔT. Además, asume que el campo B_0 es lo suficientemente fuerte como para que $\omega_0 \Delta T \gg 1$. Los posibles valores del producto de $\omega_0 T$ son entonces (módulo 2π) todos los valores entre 0 y 2π y todos son igualmente probables. En este caso, ¿cuál es el operador de densidad $\hat{\rho}_2$ de un átomo en el momento que entra en el analizador? ¿Es $\hat{\rho}_2$ un estado puro?

(f) Calcula Tr$\left(\hat{\rho}_2 \hat{S}_z\right)$, Tr$\left(\hat{\rho}_2 \hat{S}_x\right)$ y Tr$\left(\hat{\rho}_2 \hat{S}_y\right)$. ¿Cuál es tu interpretación? En qué caso el operador de espín describe un espín completamente polarizado? En qué caso se describe un espín completamente no polarizado?

(g) Describe cualitativamente el fenómeno observado en la salida del analizador cuando ω_0 varía de cero a un valor donde la condición $\omega_0 \Delta T \gg 1$ se satisface.