# Mecánica Cuántica. Tarea 3[*][†]

José Emmanuel Flores Calderón

Fecha: 21/04/2021.

1. Considera una partícula en una dimensión cuyo Hamiltonioano está dado por

$$H = \frac{p^2}{2m} + V\left(x\right).$$

Calculando $\left[\left[H, x\right], x\right]$, pruebe que

$$\sum_{a'} \left|\left\langle a''|x|a'\right\rangle\right|^2 \left(E_{a'} - E_{a''}\right) = \frac{\hbar^2}{2m},$$

donde $\left|a'\right\rangle$ es un eigenket de energía con un eigenvalor $E_{a'}$.

**Solución.**

Primero calculemos el conmutador de $H$ y $x$.

$$\left[H, x\right] = Hx - xH = \left(\frac{p^2}{2m} + V\left(x\right)\right)x - x\left(\frac{p^2}{2m} + V\left(x\right)\right),$$

$$\implies \left[H, x\right] = \frac{p^2}{2m}x + V\left(x\right)x - x\frac{p^2}{2m} + xV\left(x\right),$$

pero $V\left(x\right)$ es una función escalar que conuta con $x$, entonces

$$\left[H, x\right] = \frac{p^2}{2m}x - x\frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2m}\left[p^2, x\right],$$

$$\implies \left[H, x\right] = -\frac{1}{2m}\left[x, p^2\right],$$

pero sabemos que $[x, G(p)] = i\hbar\frac{\partial G}{\partial p}$, entonces

$$\left[H, x\right] = -\frac{1}{2m}\left[x, p^2\right] = -\frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial p^2}{\partial p} = -\frac{i\hbar}{m}p,$$

$$\therefore \left[H, x\right] = -\frac{i\hbar}{m}p.$$

Con el resultado anterior, ahora calculemos el conmutador $\left[\left[H, x\right], x\right]$

$$\left[\left[H, x\right], x\right] = \left[-\frac{i\hbar}{m}p, x\right] = \frac{i\hbar}{m}\left[x, p\right] = \frac{i\hbar}{m}i\hbar,$$

$$\implies \left[\left[H, x\right], x\right] = -\frac{\hbar^2}{m}. \tag{0.1}$$

[*]Grupo C011 | Trimestre 21-1
[†]Profesor: Miguel Angel Bastarrachea Magnani | Ayudante: Yoshua Chávez Bolaños

Por otra parte, tenemos que el conmutador $[[H,x],x]$ esta dado por

$$\begin{aligned} [[H,x],x] &= [H,x]\,x - x\,[H,x] = (Hx - xH)\,x - x\,(Hx - xH)\,, \\ \implies [[H,x],x] &= Hx^2 - xHx - xHx + x^2H, \\ \implies [[H,x],x] &= Hx^2 - 2xHx + x^2H. \end{aligned} \tag{0.2}$$

De (0.1) y (0.2), tenemos que

$$Hx^2 - 2xHx + x^2H = -\frac{\hbar^2}{m},$$

de manera que si calculamos el valor esperado de la ecuación anterior respecto al eigenket $|a''\rangle$, tenemos que

$$\begin{aligned} \langle a''|\, Hx^2 - 2xHx + x^2H\,|a''\rangle &= -\langle a''|\,\frac{\hbar^2}{m}\,|a''\rangle = -\frac{\hbar^2}{m}, \\ \implies -\frac{\hbar^2}{m} &= \langle a''|\,Hx^2\,|a''\rangle - 2\,\langle a''|\,xHx\,|a''\rangle - \langle a''|\,x^2H\,|a''\rangle\,, \end{aligned}$$

pero com o $|a''\rangle$ es eigenket de $H$, tenemos que cumple con la ecuación de eigenvalores

$$H\,|a''\rangle = a''\,|a''\rangle\,,$$

de manera que

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{m} &= a''\,\langle a''|\,x^2\,|a''\rangle - 2\,\langle a''|\,xHx\,|a''\rangle + a''\,\langle a''|\,x^2\,|a''\rangle\,, \\ \implies -\frac{\hbar^2}{m} &= 2a''\,\langle a''|\,x^2\,|a''\rangle - 2\,\langle a''|\,xHx\,|a''\rangle\,, \\ \implies \frac{\hbar^2}{2m} &= \langle a''|\,xHx\,|a''\rangle - a''\,\langle a''|\,x^2\,|a''\rangle\,. \end{aligned}$$

Si ahora suponemos una base ortonormal completa dada por los eigenkets $\{|a'\rangle\}$, que a su vez son eigenkets de energía, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\hbar^2}{2m} &= \langle a''|\,xH\sum_{a'}|a'\rangle\,\langle a'|x\,|a''\rangle - a''\,\langle a''|\,xx\,|a''\rangle\,, \\ \frac{\hbar^2}{2m} &= \langle a''|\,xH\sum_{a'}|a'\rangle\,\langle a'|x\,|a''\rangle - a''\,\langle a''|\,x\sum_{a'}|a'\rangle\,\langle a'|x\,|a''\rangle\,, \\ \implies \frac{\hbar^2}{2m} &= \sum_{a'}\langle a''|\,xH\,|a'\rangle\,\langle a'|x\,|a''\rangle - a''\sum_{a'}\langle a''|\,x\,|a'\rangle\,\langle a'|x\,|a''\rangle\,, \\ \implies \frac{\hbar^2}{2m} &= \sum_{a'}a'\,\langle a''|\,x\,|a'\rangle\,\langle a'|x\,|a''\rangle - a''\sum_{a'}\left|\langle a'|x\,|a''\rangle\right|^2, \\ \implies \frac{\hbar^2}{2m} &= \sum_{a'}a'\,\langle a''|\,x\,|a'\rangle\,\langle a'|x\,|a''\rangle - a''\sum_{a'}\left|\langle a'|x\,|a''\rangle\right|^2, \\ \implies \frac{\hbar^2}{2m} &= \sum_{a'}\left(a'\,\left|\langle a'|x\,|a''\rangle\right|^2 - a''\,\left|\langle a'|x\,|a''\rangle\right|^2\right). \end{aligned}$$

Y por lo tanto, tenemos que

$$\frac{\hbar^2}{2m} = \sum_{a'}\left(a' - a''\right)\left|\langle a'|x\,|a''\rangle\right|^2,$$

si ahora hacemos la identificación de $a' \to E_{a'}$y$a'' \to E_{a''}$, tenemos

$$\frac{\hbar^2}{2m} = \sum_{a'}\left(E_{a'} - E_{a''}\right)\left|\langle a'|x\,|a''\rangle\right|^2,$$

justo como se quería demostrar.

2. Considera una partícula en 3 dimensiones cuyo Hamiltoniano está dado por

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{x}).$$

Calcula $[\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}, H]$ para obtener

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{x} \cdot \mathbf{p} \rangle = \left\langle \frac{\mathbf{p}^2}{m} \right\rangle - \langle x \cdot \nabla V \rangle.$$

Para identificar la relación anterior con u análogo mecánico-cuántico del teorema del virial, es esencial que el lado izquierdo se anule. ¿Bajo qué condiciones pasaría esto?

**Solución.**

Con el fin de hacer la notación más sencilla, para resolver este problema, usaré la notación de suma de Einstein. De manera que para el conmutador, tenemos

$$[x_i p_i, H] = [x_i p_i, H] = x_i p_i H - H x_i p_i,$$

$$\implies [x_i p_i, H] = x_i p_i \left( \frac{p_j^2}{2m} + V \right) - \left( \frac{p_j^2}{2m} + V \right) x_i p_i = x_i p_i \frac{p_j^2}{2m} + x_i p_i V - \frac{p_j^2}{2m} x_i p_i - V x_i p_i,$$

$$\implies [x_i p_i, H] = x_i p_i \frac{p_j^2}{2m} + x_i p_i V - \frac{p_j^2}{2m} x_i p_i - V x_i p_i,$$

pero $p_i$ conmuta con $p_j$, y $x_i$ conmuta con $V$, entonces

$$[x_i p_i, H] = x_i \frac{p_j^2}{2m} p_i - \frac{p_j^2}{2m} x_i p_i + x_i p_i V - x_i V p_i = \frac{1}{2m} \left[ x_i, p_j^2 \right] p_i + x_i [p_i, V],$$

$$\implies [x_i p_i, H] = \frac{1}{2m} \left[ x_i, p_j^2 \right] p_i + x_i [p_i, V],$$

pero

$$[x_i, G(\mathbf{p})] = i\hbar \frac{\partial G}{\partial p_i} \quad \& \quad [p_i, F(\mathbf{x})] = -i\hbar \frac{\partial F}{\partial x_i},$$

entonces

$$[x_i p_i, H] = \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial p_j^2}{\partial p_i} p_i - i\hbar x_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{i\hbar}{m} p_i^2 - i\hbar x_i \frac{\partial F}{\partial x_i},$$

$$\therefore [x_i p_i, H] = i\hbar \left( \frac{1}{m} p_i^2 - x_i \frac{\partial F}{\partial x_i} \right). \tag{0.3}$$

Ahora bien, sabemos que en la representación de Heisenberg, la ecuación de movimiento para los operadores esta dada por

$$\frac{dA^{(H)}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \left[ A^{(H)}, H \right],$$

de manra que si aplicamos la ecuación anterior al operador $\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}$, tenemos que

$$\frac{dx_i p_i}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [x_i p_i, H],$$

pero el lado derecho de la ecuación anterior es justamente el resultado de la ecuación (0.3) dividido por $i\hbar$, de manera que

$$\frac{dx_i p_i}{dt} = \frac{1}{i\hbar} i\hbar \left( \frac{1}{m} p_i^2 - x_i \frac{\partial F}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{m} p_i^2 - x_i \frac{\partial F}{\partial x_i},$$

$$\therefore \frac{dx_i p_i}{dt} = \frac{1}{m} p_i^2 - x_i \frac{\partial F}{\partial x_i}.$$

Si ahora tomamos un el valor esperado de la expresión anterior para un ket de estado arbitrario en la representación de Heisenberg, tenemos que

$$\left\langle \frac{dx_i p_i}{dt} \right\rangle = \frac{d}{dt} \langle x_i p_i \rangle = \left\langle \frac{1}{m} p_i^2 - x_i \frac{\partial F}{\partial x_i} \right\rangle = \frac{1}{m} \left\langle p_i^2 \right\rangle - \left\langle x_i \frac{\partial F}{\partial x_i} \right\rangle,$$

lo cual nos conduce a

$$\frac{d}{dt} \langle x_i p_i \rangle = \frac{1}{m} \left\langle p_i^2 \right\rangle - \left\langle x_i \frac{\partial F}{\partial x_i} \right\rangle,$$

si ahora volvemos a la notación vectorial, tenemos

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{x} \cdot \mathbf{p} \rangle = \frac{1}{m} \left\langle \mathbf{p}^2 \right\rangle - \langle \mathbf{x} \cdot \nabla F \rangle,$$

justo como se quería demostrar.

3. Sean $|a'\rangle$ y $|a''\rangle$ eigenestados de un operador Hermitiano $A$ con eigenvalores $a'$ y $a''$, respectivamente $(a' \neq a'')$. El operador Hamiltoniano está dado por

$$H = |a'\rangle \, \delta \, \langle a''| + |a''\rangle \, \delta \, \langle a'| \,,$$

donde $\delta$ es un número real.

(a) Claramente $|a'\rangle$ y $|a''\rangle$ no son eigenestados del Hamiltoniano. Escribe los eigenestados del Hamiltoniano y sus respectivos eigenvalores de energía.

(b) Supóngase que el sistema es conocido por estar en el estado $|a'\rangle$ a $t = 0$. Escribe el vector de estado en la representación de Schrodinger para $t > 0$.

(c) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar el sistema en $|a''\rangle$ para $t > 0$ si se sabe que el sistema está en $|a'\rangle$ cuando $t = 0$?

(d) ¿Puede imaginar alguna situación física correspondiente a este problema?

**Solución.**

Para **a)** escribamos al operador Hamiltoniano en notación matricial. Dado que el operador esta dado en teérminos de un operador Hermitiano, que a su vez consta de solo dos eigenkets, tenemos que, en la base de $\{|a'\rangle, |a''\rangle\}$, la representación de $H$ es

$$H = \begin{pmatrix} 0 & \delta \\ \delta & 0 \end{pmatrix}.$$

De manera que para obtener los eigenestados de energía, junto con sus respectivas eigen energías, tenemos que resolver la ecuación de valores propios, la cual esta dada por

$$(H - \lambda \mathbb{I}) \, \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Para los valores propios, tenemos que resolver

$$\det (H - \lambda \mathbb{I}) = 0 \iff \begin{vmatrix} -\lambda & \delta \\ \delta & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\implies \lambda^2 - \delta^2 = 0 \implies \lambda_{\pm} = \pm\delta.$$

De manera que las eigenenergías estan dadas por $E_+ = \delta$ y $E_- = -\delta$. Ahora, usando las eigenenergías, encontremos los eigenkets de energía. Para $E_+$, tenemos que

$$(H - \delta \mathbb{I}) \, \mathbf{x} = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} -\delta & \delta \\ \delta & -\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff -x\delta + \delta y = 0 \iff y = x.$$

Para $E_-$ repetimos el mismo procedimiento, entonces

$$(H + \delta \mathbb{I}) \, \mathbf{x} = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} +\delta & \delta \\ \delta & +\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \delta x + \delta y = 0 \iff y = -x.$$

De manera que los eigenkets normalizados de energía correspondientes a las energías dadas por $\delta$ y $-\delta$, estan dados por

$$\delta \to \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|E_+\rangle + |E_-\rangle\right) \quad \& \quad -\delta \to \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|E_+\rangle - |E_-\rangle\right),$$

siendo $|E_+\rangle = x \quad \& \, |E_-\rangle = y$. Y además, tenemos que

$$\left|a'\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|E_+\rangle + |E_-\rangle\right) \quad \& \quad \left|a''\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|E_+\rangle - |E_-\rangle\right)$$

Para **b)** sabemos que, en la representación de Schrödinger, la evolución temporal de los kets esta dada por

$$|\alpha, t_0; t\rangle = \mathcal{U}\left(t, t_0\right)|\alpha, t_0\rangle,$$

y si el Hamiltoniano no depende del tiempo, tenemos que

$$\mathcal{U}\left(t, t_0\right) = \exp\left(\frac{iH\left(t - t_0\right)}{\hbar}\right),$$

en nuestro caso $t_0 = 0$ y el estado inicial esta dado por $|\alpha, t_0\rangle = |a'\rangle$, entonces

$$\left|a'; t\right\rangle = \exp\left(\frac{iHt}{\hbar}\right)\left|a'\right\rangle = \exp\left(\frac{iHt}{\hbar}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|E_+\rangle + |E_-\rangle\right),$$

$$\implies \left|a'; t\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\exp\left(\frac{iHt}{\hbar}\right)|E_+\rangle + \exp\left(\frac{iHt}{\hbar}\right)|E_-\rangle\right),$$

$$\therefore \left|a'; t\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\exp\left(\frac{i\delta t}{\hbar}\right)|E_+\rangle + \exp\left(\frac{-i\delta t}{\hbar}\right)|E_-\rangle\right)$$

Mientra que para c), si para $t = 0$, $|a'\rangle$, la probabilidad de que a cierto tiempo $t$ el sistema se encuentre en $|a''\rangle$esta dado por la proyección de $|a''\rangle$sobre el ket $|a'; t\rangle$ elevada al cuadrado, esto es el módulo al cuadrado de la amplitud de correlación, la cual esta dada por

$$C(t) = \left\langle a'' | a'; t\right\rangle \tag{0.4}$$

. Entonces

$$C(t) = \left\langle a''\right| \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\exp\left(\frac{i\delta t}{\hbar}\right)|E_+\rangle + \exp\left(\frac{-i\delta t}{\hbar}\right)|E_-\rangle\right),$$

pero $\langle a''| = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle E_+| - \langle E_-|\right)$, entonces

$$\left\langle a'' | a'; t\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle E_+| - \langle E_-|\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\exp\left(\frac{i\delta t}{\hbar}\right)|E_+\rangle + \exp\left(\frac{-i\delta t}{\hbar}\right)|E_-\rangle\right),$$

$$\implies \left\langle a'' | a'; t\right\rangle = \frac{1}{2}\exp\left(\frac{i\delta t}{\hbar}\right) - \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{i\delta t}{\hbar}\right),$$

entonces

$$C^2\left(t\right) = \left|\left\langle a'' | a'; t\right\rangle\right|^2 = \left|\frac{1}{2}\left(\exp\left(\frac{i\delta t}{\hbar}\right) - \exp\left(-\frac{i\delta t}{\hbar}\right)\right)\right|^2 = \left|\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\delta t}{\hbar}\right)\right|^2,$$

$$\therefore C^2\left(t\right) = \frac{1}{4}\sin^2\left(\frac{\delta t}{\hbar}\right). \tag{0.5}$$

4. Una caja que contiene una partícula se divide en dos compartimentos, derecho e izquierdo por una pared delgada. Si la partícula se sabe que está en el lado derecho (izquierdo), el estado es representado por el eigenestado $|R\rangle$ ($|L\rangle$), donde hemos ignorado las variaciones espaciales dentro de cada mitad de caja. El vector de estado más general puede ser escrito como

$$|\alpha\rangle = |R\rangle\langle R|\,|\alpha\rangle + |L\rangle\langle L|\,|\alpha\rangle.$$

Donde $\langle R|\alpha\rangle$ y $\langle L|\alpha\rangle$ pueden ser consideradas como funciones de onda. La partícula puede atravesar la pared de separación. Este efecto túnel se caracteriza por el Hamiltoniano

$$H = \Delta\left(|L\rangle\langle R| + |R\rangle\langle L|,\right)$$

donde $\Delta$ es un número real con dimensiones de energía.

(a) Encuentre los autoestados (eigenkets) de energía normalizados ¿Cuáles son los correspondientes autovalores de energía?

(b) En el esquema de Schrödinger la base $|R\rangle$ y $|L\rangle$ esta fija y el vector de estado se mueve con el tiempo,. Suponga que el sistema esta representado por $\alpha$ dado anteriormente para $t = 0$. Encuentra el vector de estado $|\alpha, t_0 = 0; t\rangle$ para $t > 0$ aplicando el operador de evolución temporal a $|\alpha\rangle$.

(c) Suponga para $t = 0$ que la partícula está en el lado derecho. ¿Cuál es la probabilidad de obervar la partícula en el lado izquierdo como una función del tiempo?

(d) Escribe las ecuaciones de Schrödinger para la función de onda $\langle R|\alpha, t_0 = 0; t\rangle$ y $\langle L|\alpha, t_0 = 0; t\rangle$. Muestra que las ecuaciones de Schrödinger son las que se esperaban del inciso b).

(e) Suponga que la edición tiene un error y el Hamiltoniano se escribe

$$H = \Delta\,|L\rangle\langle R|\,.$$

Resuelva explíticamente el problema de evolución temporal más general con este Hamiltoniano y muestre que la conservación de la probabilidad de viola. ¿Por qué sucede esto?

**Solución.**

Para **a)** tenemos que hacer el mismo procedimiento que para el problema anterior, tenemos que resolver el problema de eigenvalores. Es claro que la representación matricial del Hamiltoniano en la base de $\{|R\rangle, |L\rangle\}$ es

$$H = \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ \Delta & 0 \end{pmatrix},$$

de manera que los eigenvalores están dadas por

$$\det\left(H - \lambda\mathbb{I}\right) = 0 \iff \begin{vmatrix} -\lambda & \Delta \\ \Delta & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda^2 - \Delta^2 = 0 \iff \lambda_\pm = \pm\Delta.$$

Vemos que al menos hasta esta parte el problema es identico al anterior, de manera que los eigenkets correspondientes son

$$\Delta \to |E_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|R\rangle + |L\rangle\right) \quad \& \quad -\Delta \to |E_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|R\rangle - |L\rangle\right).$$

Si ahora escribimos a los kets $|L\rangle$ y $|R\rangle$en términos de $|E_+\rangle$ y $|E_-\rangle$, tenemos que

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|E_+\rangle + |E_-\rangle\right) \quad \& \quad |L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|E_+\rangle - |E_-\rangle\right)$$

Ahora bien, para **b)**, tenemos que el vector de estado al tiempo $t$ esta dado por

$$|\alpha, t_0 = 0; t\rangle = |\alpha; t\rangle = \mathcal{U}(t, 0)\,|\alpha\rangle = \exp\left(\frac{iHt}{\hbar}\right)|\alpha\rangle,$$

$$\Longrightarrow |\alpha; t\rangle = \exp\left(\frac{iHt}{\hbar}\right)\left(|R\rangle\langle R|\,|\alpha\rangle + |L\rangle\langle L|\,|\alpha\rangle\right),$$

$$\Longrightarrow |\alpha; t\rangle = \exp\left(\frac{iHt}{\hbar}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|E_+\rangle + |E_-\rangle\right)\right)\langle R|\,|\alpha\rangle + \exp\left(\frac{iHt}{\hbar}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|E_+\rangle + |E_-\rangle\right)\right)\langle L|\,|\alpha\rangle,$$

$$\Longrightarrow |\alpha; t\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\exp\left(\frac{i\Delta t}{\hbar}\right)|E_+\rangle + \exp\left(-\frac{i\Delta t}{\hbar}\right)|E_-\rangle\right)\langle R|\alpha\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\exp\left(\frac{i\Delta t}{\hbar}\right)|E_+\rangle + \exp\left(-\frac{i\Delta t}{\hbar}\right)|E_-\rangle\right)\langle L|\alpha\rangle \tag{0.6}$$

Ahora bien, para **c)**, tenemos que calcular nuevamente el modulo cuadrado de la amplitud de correlación. Esto es la correlación entre el sistema cuando se encuentra en el lado derecho de la caja al tiempo $t = 0$ junto con que el sistema se encuentre en el lado izquierdo al tiempo $t$.

Si al tiempo $t = 0$, el sistema está en el lado derecho de la caja, esto quiere decir que $\langle R|\alpha\rangle = 1$ y $\langle L|\alpha\rangle = 0$, de manera que el vector de estado $|\alpha\rangle$ al tiempo $t = 0$, está dado por

$$|\alpha, t_0 = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\exp\left(\frac{i\Delta t}{\hbar}\right)|E_+\rangle + \exp\left(-\frac{i\Delta t}{\hbar}\right)|E_-\rangle\right),$$

$$\implies C^2(t) = |\langle L|\alpha, t_0 = 0\rangle|^2,$$

esta dado por

$$\langle L|\alpha, t_0 = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle E_+| - \langle E_-|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\exp\left(\frac{i\Delta t}{\hbar}\right)|E_+\rangle + \exp\left(-\frac{i\Delta t}{\hbar}\right)|E_-\rangle\right)\right),$$

$$\implies \langle L|\alpha, t_0 = 0\rangle = \frac{1}{2}\left(\exp\left(\frac{i\Delta t}{\hbar}\right) - \exp\left(-\frac{i\Delta t}{\hbar}\right)\right) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\Delta t}{\hbar}\right),$$

de manera que

$$|\langle L|\alpha, t_0 = 0\rangle|^2 = \frac{1}{4}\sin^2\left(\frac{\Delta t}{\hbar}\right)$$

y por lo tanto, la probabilidad está dad por

$$C^2(t) = \frac{1}{4}\sin^2\left(\frac{\Delta t}{\hbar}\right). \tag{0.7}$$

Para **d)**, sabemos que la ecuación de Schrödinger esta dada por

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\alpha, t_0; t\rangle = H|\alpha, t_0; t\rangle,$$

de manera que, en nuestro caso, tenemos que

$$\langle R| i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\alpha; t\rangle = \langle R| H|\alpha; t\rangle \quad \& \quad \langle L| i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\alpha; t\rangle = \langle L| H|\alpha; t\rangle,$$

para la primera, tenemos que

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\langle R|\alpha; t\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle E_+| + \langle E_-|\right)H|\alpha; t\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Delta\langle E_+| - \Delta\langle E_-|\right)|\alpha; t\rangle, \tag{0.8}$$

mientras que para la segunda

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\langle L|\alpha; t\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle E_+| - \langle E_-|\right)H|\alpha; t\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Delta\langle E_+| + \Delta\langle E_-|\right)|\alpha; t\rangle. \tag{0.9}$$

Es claro que

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\langle R|\alpha; t\rangle = \Delta\langle L|\,|\alpha; t\rangle, \tag{0.10}$$

y también que

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\langle L|\alpha; t\rangle = \Delta\langle R|\,|\alpha; t\rangle. \tag{0.11}$$

El sistema de ecuaciones esta acoplado, de manera que sí derivamos una vez más respecto al tiempo la ecuación (0.9) y sustituimos (0.10), tenemos que

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\langle R|\alpha; t\rangle = -i\frac{\Delta}{\hbar}\langle R|\alpha; t\rangle,$$

cuyas soluciones están dadas por

$$\langle R|\alpha;t\rangle = A\exp\left(i\frac{\Delta}{\hbar}t\right) + B\exp\left(-i\frac{\Delta}{\hbar}t\right)$$

Procediendo de manera similar para la función de onda $\langle L|\alpha;t\rangle$, tenemos que

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\langle L|\alpha;t\rangle = -i\frac{\Delta}{\hbar}\langle L|\alpha;t\rangle\,,$$

cuyas soluciones, nuevamente, están dadas por

$$\langle L|\alpha;t\rangle = C\exp\left(i\frac{\Delta}{\hbar}t\right) + D\exp\left(-i\frac{\Delta}{\hbar}t\right)$$

Si ahora tomamos la ecuación dada en (0.6) y la multiplicamos por el bra $\langle R|$, tenemos que

$$A = \langle R|E_+\rangle \quad \& \quad B = \langle R|E_-\rangle$$

mientras que para (0.11), y siguiendo el mismo procedimiento, tenemos que

$$C = \langle L|E_+\rangle \quad \& \quad C = \langle L|E_-\rangle\,,$$

que es justamente el mismo resultado que el obtenido en **b)**

Para **e)**, notemos que el Hamiltoniano no es Hermitiano, de manera que el operador de evolución temporal, no será unitario, lo cual a su vez implica que la probabilidad no será una cantidad que se conserve en el tiempo. Dado que $H$ es independiente del tiempo, tenemos que el operador de evolución temporal esta dado por

$$\mathcal{U}(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}Ht\right) = \mathbb{I} - \frac{i}{\hbar}Ht = \mathbb{I} - \frac{i}{\hbar}\Delta|L\rangle\langle R|\,t.$$

Si ahora calculamos $\langle\alpha|\alpha\rangle$, es claro que

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = 1 + \frac{\Delta^2 t^2}{\hbar^2}.$$

La ecuación anterior quiere decir que si comenzamos en el estado $|L\rangle$, entonces la probabilidad de que el sistema este en ese estado es 1, y a medida que avanza el tiempo, esta crece, lo cual no tiene sentido, justamente porque la probabilidad es a lo más 1.