Mecánica Cuántica. Tarea 1*†

José Emmanuel Flores Calderón

Fecha: 07/03/2021.

1. Una matriz $\hat{X}$ de 2x2 (no necesariamente Hermitiana ni unitaria) está escrita como

$$\hat{X} = a_0\mathbb{I} + \hat{\sigma}\cdot\mathbf{a}$$

donde a_0 y $a_{1,2,3}$ son números.

(a) ¿Cómo están a_0 y a_k $(k = 1, 2, 3)$ relacionadas con $tr(\hat{X})$ y $tr(\sigma_k\hat{X})$?
(b) Obten a_0 y a_k en términos de los elementos de matriz X_{ij}.

Solución.
Las matrices de Pauli tienen la forma

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{0.1}$$

Y además, cumplen con lo siguiente:

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k.$$

De manera que para **a)**, tenemos

$$\hat{X} = a_0\delta_{ij} + \sigma_k a_k,\ \text{con } i, j = 1, 2,\ k = 1, 2, 3,$$

$$\implies \hat{X} = a_0\delta_{ij} + \sigma_1 a_1 + \sigma_2 a_2 + \sigma_3 a_3,$$

Haciendo la identificación de $\sigma_1 = \sigma_x$, $\sigma_2 = \sigma_y$ y $\sigma_3 = \sigma_z$, tenemos que

$$\hat{X} = a_0\delta_{ij} + a_1\sigma_x + a_2\sigma_y + a_3\sigma_z, \tag{0.2}$$

o en notación matricial

$$\hat{X} = a_0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a_1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\implies \hat{X} = \begin{pmatrix} a_0 + a_3 & a_1 - ia_2 \\ a_1 + ia_2 & a_0 - a_3 \end{pmatrix}. \tag{0.3}$$

Para la traza de $\hat{X}$, fijemonos en las ecuaciones dadas en (0.1) y notemos que las matrices de Pauli son de traza cero, es decir

*Grupo C011 | Trimestre 21-1
†Profesor: Miguel Angel Bastarrachea Magnani | Ayudante: Yoshua Chávez Bolaños

$$tr(\sigma_i) = 0 \; \forall i = 1, 2, 3 \; ,$$

con lo cual, tenemos

$$tr(\hat{X}) = tr\left(a_0\delta_{ij} + a_1\sigma_x + a_2\sigma_y + a_3\sigma_z\right) = a_0 tr(\delta_{ij}) + a_1 tr(\sigma_x) + a_2 tr(\sigma_y) + a_3 tr(\sigma_z),$$

$$\implies tr(\hat{X}) = a_0 tr(\delta_{ij}) = a_0\delta_{ii} = 2a_0,$$

$$\therefore \; tr(\hat{X}) = 2a_0$$

Ahora bien, para la $tr(\sigma_k\hat{X})$, sucede

$$\sigma_k\hat{X} = a_0\sigma_k\delta_{ij} + a_1\sigma_k\sigma_1 + a_2\sigma_k\sigma_2 + a_3\sigma_k\sigma_3, \text{ con } k = 1, 2, 3,$$

O bien

$$\sigma_1\hat{X} = a_0\sigma_1\delta_{ij} + a_1\sigma_1\sigma_1 + a_2\sigma_1\sigma_2 + a_3\sigma_1\sigma_3, \tag{0.4}$$

$$\sigma_2\hat{X} = a_0\sigma_2\delta_{ij} + a_1\sigma_2\sigma_1 + a_2\sigma_2\sigma_2 + a_3\sigma_2\sigma_3 \text{ y} \tag{0.5}$$

$$\sigma_3\hat{X} = a_0\sigma_3\delta_{ij} + a_1\sigma_3\sigma_1 + a_2\sigma_3\sigma_2 + a_3\sigma_3\sigma_3, \tag{0.6}$$

Para $\sigma_k\delta_{ij}$ tenemos, en notación matricial

$$\sigma_1\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; \sigma_2\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \sigma_3\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

de manera que

$$\sigma_1\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } \acute{} \sigma_3\delta_{ij} = \sigma_3. \tag{0.7}$$

En lugar de hacer los calculos de los productos involucrados en las ecuaciones (0.4), (0.5) y (0.6), notemos lo siguiente: en general sabemos, por las propiedades de las matrices de Pauli, que sucede lo siguiente

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k,$$

Pero ϵ_{ijk} es en general una constante que depende del orden en el que se encuentren i y j, el cual puede ser $0, 1$ o -1, así que para nuestros propósitos, hagamos $\alpha = i\epsilon_{ijk}$. Por otra parte, en general, el producto $\epsilon_{ijk}\sigma_k$ es alguna matriz de Pauli, llamemosla σ_α, donde el índice α es diferente de los valores que puede tomar i y j, esto es así por las propiedades del símbolo ϵ_{ijk}.

De manera que, con lo discutido anteriormente y con los cambios de variable hechos, tenemos que

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + \alpha\sigma_\alpha.$$

Ahora bien, tomemos la traza de la ecuación anterior

$$tr(\sigma_i\sigma_j) = tr\left(\delta_{ij} + \alpha\sigma_\alpha\right) = tr(\delta_{ij}) + \alpha tr(\sigma_\alpha) = tr(\delta_{ij}).$$

Es decir, la traza de $\sigma_i\sigma_j$ es diferente de cero siempre y cuando $i = j$.

Ahora bien, usando el resultado anterior junto con las ecuaciones dadas en (0.7) y aplicandolo a las ecuaciones (0.4), (0.5) y (0.6), tenemos

$$tr(\sigma_1\hat{X}) = tr\left(a_0\sigma_1\delta_{ij} + a_1\sigma_1\sigma_1 + a_2\sigma_1\sigma_2 + a_3\sigma_1\sigma_3\right) = tr\left(a_0\sigma_1\delta_{ij} + a_1\sigma_1\sigma_1\right),$$

$$\implies tr(\sigma_1\hat{X}) = a_1 tr\left(\sigma_1\sigma_1\right) = a_1 tr(\delta_{11}) = 2a_1$$

$$\therefore \; tr(\sigma_1\hat{X}) = 2a_1.$$

Para $\sigma_2\hat{X}$, tenemos

$$tr(\sigma_2\hat{X}) = tr\left(a_0\sigma_2\delta_{ij} + a_2\sigma_2\sigma_2\right) = a_2 tr(\sigma_2\sigma_2) = a_2 tr(\delta_{22})$$
$$\implies tr(\sigma_2\hat{X}) = 2a_2.$$

Mientras que para el $\sigma_3\hat{X}$, tenemos

$$tr(\sigma_3\hat{X}) = tr\left(a_0\sigma_3\delta_{ij} + a_3\sigma_3\sigma_3\right) = a_0 tr(\sigma_3) + a_3 tr(\sigma_{33}) = 2a_3 tr(\delta_{33}),$$
$$\implies tr(\sigma_3\hat{X}) = 2a_3 tr(\delta_{33}).$$

Por lo tanto, tenemos el siguiente resultado: si $k = 1, 2, 3$, entonces

$$tr(\sigma_k\hat{X}) = 2a_k.$$

Para **b)**, fijemonos en la ecuación (0.3).

Es claro que

$$\hat{X}_{11} + \hat{X}_{22} = a_0 + a_3 + a_0 - a_3 = 2a_0,$$

$$\therefore\ a_0 = \frac{1}{2}\left(\hat{X}_{11} + \hat{X}_{22}\right).$$

Para a_1, tenemos

$$\hat{X}_{12} + \hat{X}_{21} = a_1 - ia_2 + a_1 + ia_2 = 2a_1,$$
$$\therefore\ a_1 = \frac{1}{2}\left(\hat{X}_{12} + \hat{X}_{21}\right).$$

Por otra parte, para a_2, tenemos

$$-\hat{X}_{12} + \hat{X}_{21} = -a_1 + ia_2 - a_1 + ia_2 = 2ia_2,$$

$$\therefore\ a_2 = \frac{1}{2i}\left(\hat{X}_{21} - \hat{X}_{12}\right).$$

Finalmente, para a_3, tenemos

$$\hat{X}_{11} - \hat{X}_{22} = a_0 + a_3 - a_0 + a_3 = 2a_3,$$
$$\therefore\ a_3 = \frac{1}{2}\left(\hat{X}_{11} - \hat{X}_{22}\right).$$

2. Construya $|\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}; +\rangle$ tal que
$$\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}|\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}; +\rangle = \frac{\hbar}{2}|\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}; +\rangle$$
donde $\hat{n}$ está dada en coordenadas esféricas, con β el ángulo polar y α el ángulo azimutal. Exprese su respuesta como una combinación lineal de $|+\rangle$ y $|-\rangle$.

Solución.

Siendo α el ángulo azimutal y β el ángulo polar, podemos escribir al vector $\hat{\mathbf{n}}$ de la siguiente manera

$$\hat{\mathbf{n}} = \sin(\alpha)\cos(\alpha)\hat{\mathbf{x}} + \sin(\alpha)\sin(\beta)\hat{\mathbf{y}} + \cos(\alpha)\hat{\mathbf{z}},$$

con lo cual, tenemos que el producto $\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}$ esta dado por

$$\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}} = S_x\sin(\alpha)\cos(\alpha) + S_y\sin(\alpha)\sin(\beta) + S_z\cos(\alpha).$$

Por otra parte, la representación matricial de los operadores S_x, S_y, S_z en la base de S_z esta dada por

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \text{ y } S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

de manera que el producto $\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}$, en notación matricial, queda escrito como

$$\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}} = \frac{\hbar}{2}\sin(\beta)\cos(\alpha)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\hbar}{2}\sin(\beta)\sin(\alpha)\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \frac{\hbar}{2}\cos(\beta)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\implies \mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta)\cos(\alpha) - i\sin(\beta)\sin(\alpha) \\ \sin(\beta)\cos(\alpha) + i\sin(\beta)\sin(\alpha) & -\cos(\beta) \end{pmatrix},$$

o bien

$$\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta)\exp(-i\alpha) \\ \sin(\beta)\exp(i\alpha) & -\cos(\beta) \end{pmatrix}.$$

Ahora bien, debemos construir $|\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}};+\rangle$ de tal manera que cumpla con

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta)\exp(-i\alpha) \\ \sin(\beta)\exp(i\alpha) & -\cos(\beta) \end{pmatrix}|\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}};+\rangle = \frac{\hbar}{2}|\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}};+\rangle, \tag{0.8}$$

pero sabemos que podemos expresar al ket $|\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}};+\rangle$ como una combinación lineal de los ket base $|+\rangle$ y $|-\rangle$. De manera que, sea

$$|\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}};+\rangle = \mathcal{C}_+|+\rangle + \mathcal{C}_-|-\rangle,$$

o bien, en notación matricial como $|\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}};+\rangle = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_+ \\ \mathcal{C}_- \end{pmatrix}$, con lo cual, la ecuación (0.8) queda escrita como

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta)\exp(-i\alpha) \\ \sin(\beta)\exp(i\alpha) & -\cos(\beta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathcal{C}_+ \\ \mathcal{C}_- \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \mathcal{C}_+ \\ \mathcal{C}_- \end{pmatrix},$$

o bien

$$\begin{pmatrix} \mathcal{C}_+\cos(\beta) + \mathcal{C}_-\sin(\beta)\exp(-i\alpha) \\ \mathcal{C}_+\sin(\beta)\exp(i\alpha) - \mathcal{C}_-\cos(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_+ \\ \mathcal{C}_- \end{pmatrix},$$

lo cual nos conduce a las siguientes ecuaciones

$$\mathcal{C}_+\cos(\beta) + \mathcal{C}_-\sin(\beta)\exp(-i\alpha) = \mathcal{C}_+, \tag{0.9}$$

$$\mathcal{C}_+\sin(\beta)\exp(i\alpha) - \mathcal{C}_-\cos(\beta) = \mathcal{C}_-. \tag{0.10}$$

Antes de continuar, recordemos que el ket $|\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}};+\rangle$ debe estar normalizado, lo cual se traduce en

$$\|\langle +;\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}|\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}};+\rangle\| = \mathcal{C}_+^2 + \mathcal{C}_-^2 = 1. \tag{0.11}$$

Ahora bien, manipulemos un poco la ecuación (0.9)

$$\mathcal{C}_+\cos(\beta) + \mathcal{C}_-\sin(\beta)\exp(-i\alpha) = \mathcal{C}_+ \implies \mathcal{C}_+(1-\cos(\beta)) = \mathcal{C}_-\sin(\beta)\exp(-i\alpha),$$

recordemos que en general $\mathcal{C}_+,\mathcal{C}_- \in \mathbb{C}$, de manera que multiplicando cada uno por su respectivo complejo conjugado, tenemos

$$\mathcal{C}_+^2(1-\cos(\beta))^2 = \mathcal{C}_-^2\sin^2(\beta).$$

Ahora bien, usando la identidad $\sin^2(\beta/2) = 1/2\,(1-\cos(\beta))$ y la relación $\mathcal{C}_-^2 = 1 - \mathcal{C}_+^2$, tenemos

$$4\mathcal{C}_+^2\sin^4(\beta/2) = \left(1-\mathcal{C}_+^2\right)\sin^2(\beta). \tag{0.12}$$

Ahora usemos la siguiente identidad $\sin(\theta)\cos(\phi) = 1/2(\sin(\theta+\phi) + \sin(\theta-\phi))$ con $\theta = \beta/2$ y $\phi = \beta/2$, teniendo así

$$\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\sin(\beta) + \sin(0)\right) \implies \sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right),$$

$$\implies \sin^2(\beta) = 4\sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right),$$

sustituyendo el resultado anterior en la ecuación (0.12), tenemos

$$4\mathcal{C}_+^2 \sin^4(\beta/2) = 4\left(1-\mathcal{C}_+^2\right)\sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right),$$

$$\implies \mathcal{C}_+^2 \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) = \left(1-\mathcal{C}_+^2\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \implies \mathcal{C}_+^2 \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) + \mathcal{C}_+^2\cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right),$$

$$\implies \mathcal{C}_+^2\left(\sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right)\right) = \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) \implies \mathcal{C}_+^2 = \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right),$$

$$\therefore\ \mathcal{C}_+ = \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

Por otra parte, para la constante $\mathcal{C}_-$, nuevamente, fijemonos en la ecuación (0.9), de la cual tenemos

$$\mathcal{C}_- \sin(\beta)\exp(-i\alpha) = \mathcal{C}_+\left(1-\cos(\beta)\right).$$

Y usando las relaciónes antes deducidas $\sin^2(\beta/2) = 1/2\left(1-\cos(\beta)\right)$ y $\sin(\beta) = 2\sin(\beta/2)\cos(\beta/2)$, tenemos

$$2\mathcal{C}_- \sin(\beta/2)\cos(\beta/2)\exp(-i\alpha) = 2\mathcal{C}_+ \sin^2(\beta/2),$$

$$\implies \mathcal{C}_- \cos(\beta/2)\exp(-i\alpha) = \mathcal{C}_+ \sin(\beta/2),$$

pero $\mathcal{C}_+ = \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)$, entonces

$$\mathcal{C}_- \cos(\beta/2)\exp(-i\alpha) = \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\sin(\beta/2), \implies \mathcal{C}_- \exp(-i\alpha) = \sin(\beta/2),$$

$$\therefore\ \mathcal{C}_- = \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\exp(i\alpha) \tag{0.13}$$

Por lo tanto, el ket $|\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}};+\rangle$ expresado en los kets base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ esta dado por

$$|\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}};+\rangle = \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)|+\rangle + \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\exp(i\alpha)|-\rangle.$$

3. Un sistema de spín $1/2$ es sabido que está en un autoestado $\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}$ con autovalor de $\frac{\hbar}{2}$, donde $\hat{n}$ es un vector unitario que yace en el plano-xz que genera un ángulo γ con el eje-z positivo.

   (a) Suponga que medimos S_x. ¿Cuál es la probabilidad de obtener $\frac{\hbar}{2}$?

   (b) Evalua la dispersión en S_x. Esto es
   $$\langle (S_x - \langle S_x\rangle)^2\rangle.$$

   Solución.

   Usemos la solución del problema anterior con los siguientes cambios, $\beta \to \gamma$ y $\alpha = 0$, que son los datos dados aquí. Entonces, el vector de estado para este problema, expresado en la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ está escrito como
   $$|\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}};+\rangle = \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)|+\rangle + \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)|-\rangle.$$

   Ahora bien, sabemos que dado un ket arbitrario $|\alpha\rangle$, la probabilidad de que colapse en algún ket base $|a\rangle$ está dada por
   $$\mathcal{P}\left(|a\rangle\right) = |\langle a|\alpha\rangle|^2.$$

En nuestro caso, la probabilidad de que al medir S_x obtengamos $\frac{\hbar}{2}$ es la probabilidad de que el ket $|\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}};+\rangle$ colapse en $|S_x;+\rangle$. Entonces

$$\mathcal{P}\left(S_x;+\right)=\left|\langle S_x;+\left|\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}};+\right\rangle\right|^2.$$

Por otra parte, sabemos que el ket $|S_x;+\rangle$ esta dado por

$$|S_x;+\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle.$$

De manera que

$$\langle S_x;+|=\frac{1}{\sqrt{2}}\langle+|+\frac{1}{\sqrt{2}}\langle-|,$$

con lo cual tenemos lo siguiente

$$\langle S_x;+\left|\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}};+\right\rangle=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle+|+\frac{1}{\sqrt{2}}\langle-|\right)\left(\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)|+\rangle+\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)|-\rangle\right),$$

$$\Longrightarrow\ \langle S_x;+\left|\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}};+\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)\langle+|+\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)\langle+|-\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)\langle-|+\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)\langle-|-\rangle$$

Ahora bien, usando las propiedades de ortogonalidad de los kets base, tenemos que

$$\langle S_x;+\left|\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}};+\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right).$$

De manera que

$$\mathcal{P}\left(S_x;+\right)=\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)\right|^2=\frac{1}{2}\left(\cos^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)+2\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)\right),$$

$$\Longrightarrow\ \mathcal{P}\left(S_x;+\right)=\frac{1}{2}\left(1+2\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)\right),$$

pero, usando la identidad $2\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)=\sin\left(\gamma\right)$, tenemos

$$\mathcal{P}\left(S_x;+\right)=\frac{1}{2}\left(1+\sin\left(\gamma\right)\right).$$

Ahora bien, para **b)** tenemos que el operador S_x está dado por

$$S_x=\frac{\hbar}{2}\left(|+\rangle\langle-|+|-\rangle\langle+|\right),$$

entonces $\langle S_x\rangle_{\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}}$ está dado por

$$\langle S_x\rangle_{\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}}=\langle\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}};+|\,S_x\left|\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}};+\right\rangle,$$

$$\langle S_x\rangle_{\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}}=\frac{\hbar}{2}\left(\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)\langle+|+\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)\langle-|\right)\left(|+\rangle\langle-|+|-\rangle\langle+|\right)\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)|+\rangle+\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)|-\rangle,$$

desarrollando el producto del segundo parentesis por el tercero, tenemos

$$\left([2]\right)\left([3]\right)=\left(\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)|+\rangle\langle-|+\rangle+\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)|-\rangle\langle+|+\rangle+\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)|+\rangle\langle-|-\rangle+\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)|-\rangle\langle+|-\rangle\right),$$

$$\Longrightarrow\ \left([2]\right)\left([3]\right)=\left(\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)|-\rangle+\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)|+\rangle\right).$$

En donde nuevamente, hemos hecho uso de las propiedades de ortogonalidad. De manera que

$$\langle S_x\rangle_{\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}}=\frac{\hbar}{2}\left(\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)\langle+|+\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)\langle-|\right)\left(\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)|-\rangle+\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)|+\rangle\right),$$

$$\Longrightarrow\ \langle S_x\rangle_{\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}}=\frac{\hbar}{2}\left(\cos^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)\langle+|-\rangle+\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)\langle+|+\rangle+\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)\langle-|-\rangle+\sin^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)\langle-|+\rangle\right),$$

$$\implies \langle S_x \rangle_{\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}} = \frac{\hbar}{2}\left(2\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)\right) \implies \langle S_x \rangle_{\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}} = \frac{\hbar}{2}\sin(\gamma).$$

Por lo tanto

$$\langle S_x \rangle^2_{\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}} = \frac{\hbar^2}{4}\sin^2(\gamma).$$

Por otra parte, para S_x^2, tenemos

$$S_x^2 = S_x S_x = \frac{\hbar}{2}\left(|+\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +|\right)\frac{\hbar}{2}\left(|+\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +|\right),$$

$$\implies S_x^2 = \frac{\hbar^2}{4}\left[(|+\rangle\langle -|+\rangle\langle -|) + (|+\rangle\langle -|-\rangle\langle +|) + (|-\rangle\langle +|+\rangle\langle -|) + (|-\rangle\langle +|-\rangle\langle +|)\right].$$

De la expresión anterior, el primer y ultimo término son cero, debido a la ortogonalidad de los estados, de manera que

$$S_x^2 = \frac{\hbar^2}{4}\left(|+\rangle\langle +| + |-\rangle\langle -|\right).$$

Por lo tanto, el valor esperado para el operador anterior en el estado de interes esta dado por

$$\left\langle S_x^2 \right\rangle_{\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}} = \frac{\hbar^2}{4}\left(\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)\langle +| + \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)\langle -|\right)\left(|+\rangle\langle +| + |-\rangle\langle -|\right)\left(\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)|+\rangle + \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)|-\rangle\right),$$

desarrollando la expresión del producto del segundo con el tercer parentesis, tenemos

$$([2])([3]) = \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)|+\rangle\langle +|+\rangle + \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)|+\rangle\langle +|-\rangle + \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)|-\rangle\langle -|+\rangle + \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)|-\rangle\langle -|-\rangle$$

$$\implies ([2])([3]) = \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)|+\rangle + \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)|-\rangle,$$

entonces

$$\left\langle S_x^2 \right\rangle_{\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}} = \frac{\hbar^2}{4}\left(\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)\langle +| + \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)\langle -|\right)\left(\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)|+\rangle + \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)|-\rangle\right),$$

$$\implies \left\langle S_x^2 \right\rangle_{\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}} = \frac{\hbar^2}{4}\left(\cos^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)\langle +|+\rangle + \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)\langle +|-\rangle + \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)\langle -|+\rangle + \sin^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)\langle -|-\rangle\right),$$

$$\implies \left\langle S_x^2 \right\rangle_{\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}} = \frac{\hbar^2}{4}\left(\cos^2\left(\frac{\gamma}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)\right), \implies \left\langle S_x^2 \right\rangle_{\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}} = \frac{\hbar^2}{2}.$$

Por lo tanto

$$\langle (S_x - \langle S_x \rangle)^2 \rangle_{\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}} = \left\langle (\Delta S_x)^2 \right\rangle_{\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}} = \frac{\hbar^2}{4} - \frac{\hbar^2}{4}\sin^2(\gamma) = \frac{\hbar^2}{4}\left(1 - \sin^2(\gamma)\right),$$

o bien

$$\left\langle (\Delta S_x)^2 \right\rangle_{\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}} = \frac{\hbar^2}{4}\cos^2(\gamma).$$

4. Dos observables A_1 y A_2 que no depeden explícitamente del tiempo se conocen por no conmutar

$$[A_1, A_2] \neq 0.$$

Aún así, sabemos que conmutan con el Hamiltoniano: $[A_1, H] = 0$ y $[A_2, H] = 0$. Pruebe que las energías de los autoestados están, en general, degeneradas. ¿Existen excepciones? Piense en el problema de la fuerza central $H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(r)$, con $A_1 \to L_z$ y $A_2 \to L_x$.

Solución.

Otra forma de escribir la proposición anterior es la siguiente: **sean A_1 y A_2 dos observables que no dependen del tiempo y se cumple que $[A_1, H] = 0$ y $[A_2, H] = 0$, pero $[A_1, A_2] \neq 0$, entonces los eigenkets de H están degenerados**.

La demostración de la proposición anterior la haremos por contradicción.

En efecto, supongamos que se cumplen las premisas de la proposición anterior y los eigenkets de H no están degenerados. Esto es, el conjunto de eigenkets$\{|e_i\rangle\}$ que cumple con $H|e_i\rangle = E_i|e_i\rangle\ \forall i$, son tales manera que para los eigenvalores se cumple que $E_i \neq E_j\ \forall i \neq j$.

Ahora bien, consideremos al ket $|e_1\rangle$, sabemos que cumple con

$$H|e_i\rangle = E_1|e_i\rangle\,,$$

pero

$$\begin{aligned}[A_1, H] = 0 \implies A_1H = HA_1 \implies A_1H|e_1\rangle = HA_1|e_1\rangle\,,\\ \implies HA_1|e_1\rangle = A_1H|e_1\rangle = A_1E_1|e_1\rangle\\ \implies HA_1|e_1\rangle = E_1A_1|e_1\rangle\,,\end{aligned}$$

de manera que el ket $A_1|e_1\rangle$ es eigenket de H.

Por otra parte, dado que H y A_1son compatibles, esto implica que si $|e_1\rangle$ es eigenket de H, entonces $|e_1\rangle$ también es eigenket de A_1. Esto es, existe un α_1 tal que

$$A_1|e_1\rangle = \alpha_1|e_1\rangle\,.$$

De manera análoga, como A_2 es compatible con H, entonces existe un α_2 tal que

$$A_2|e_1\rangle = \alpha_2|e_1\rangle\,.$$

En donde α_1 y α_2 son escalares dentro del campo en el cual estan definidos los kets del espacio vectorial en cuestion. Ahora bien, calculemos lo siguiente

$$A_1A_2|e_1\rangle = A_1\alpha_2|e_1\rangle = \alpha_2A_1|e_1\rangle = \alpha_1\alpha_2|e_1\rangle\,,$$

y por otra parte, tenemos

$$A_2A_1|e_1\rangle = A_2\alpha_1|e_1\rangle = \alpha_1A_2|e_1\rangle = \alpha_1\alpha_2|e_1\rangle\,.$$

Por lo tanto

$$A_1A_2|e_1\rangle = A_2A_1|e_1\rangle \implies A_1A_2 = A_2A_1.$$

Lo cual es una contradicción, ya que habiamos supuesto que $[A_1, A_2] \neq 0$.

En conclusión tenemos que los eigenkets de H están degenerados.

Por otra parte, si consideramos el problema de fuerza central dado por el Hamiltoniano

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(r),$$

sabemos que éste conmuta con los operadores de momento angular L_x, L_y y L_z, sin embargo, éstos no conmutan entre sí.

5. a) Calcula

$$\langle(\Delta S_x)^2\rangle = \langle S_x^2\rangle - \langle S_x\rangle^2$$

donde el valor esperado se toma para el estado S_z+. Usando tu resultado revisa la relación de incertidumbre generalizada

$$\langle(\Delta A)^2\rangle\langle(\Delta B)^2\rangle \geq \frac{1}{4}\,|\langle[A, B]\rangle|^2$$

con $A \to S_x$y $B \to S_y$. b) Revisa la relación de incertidumbre con $A \to S_x$ y $B \to S_y$ para el estado S_x+.

Solución.

S_x,S_y y S_z, en términos de los kets base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$, están escritos como

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\left(|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\right),$$

$$S_y = \frac{\hbar}{2}\left(-i|+\rangle\langle-| + i|-\rangle\langle+|\right),$$

$$S_z = \frac{\hbar}{2}\left(|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|\right).$$

De manera que el valor esperado de S_x y S_y para el estado S_z+, el cual escribiremos como$|+\rangle$, viene dado por

$$\langle S_x\rangle_+ = \langle+|\, S_x\, |+\rangle = \langle+|\, \frac{\hbar}{2}\left(|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\right)|+\rangle,$$

$$\implies \langle S_x\rangle_+ = \frac{\hbar}{2}\left(\langle+|+\rangle\langle-|+\rangle + \langle+|-\rangle\langle+|+\rangle\right),$$

pero sabemos que estos kets cumplen con $\langle+|+\rangle = 1$, $\langle-|-\rangle = 1$, y $\langle+|-\rangle = \langle-|+\rangle = 0$. Con lo cual, tenemos que

$$\langle S_x\rangle = 0 \implies \langle S_x\rangle^2 = 0. \tag{0.14}$$

Por otra parte, para S_x^2, tenemos

$$S_x^2 = S_x S_x = \frac{\hbar}{2}\left(|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\right)\frac{\hbar}{2}\left(|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\right),$$

$$\implies S_x^2 = \frac{\hbar^2}{4}\left[\left(|+\rangle\langle-|+\rangle\langle-|\right) + \left(|+\rangle\langle-|-\rangle\langle+|\right) + \left(|-\rangle\langle+|+\rangle\langle-|\right) + \left(|-\rangle\langle+|-\rangle\langle+|\right)\right].$$

De la expresión anterior, el primer y ultimo término son cero, debido a la ortogonalidad de los estados, de manera que

$$S_x^2 = \frac{\hbar^2}{4}\left(|+\rangle\langle+| + |-\rangle\langle-|\right).$$

Ahora bien, calculemos el valor esperado de la expresión anterior para el estado $|+\rangle$

$$\langle+|\, S_x^2\, |+\rangle = \frac{\hbar^2}{4}\left(\langle+|\,+\rangle\langle+|\,+\rangle + \langle+\,|-\rangle\langle-|\,+\rangle\right) = \frac{\hbar^2}{4},$$

$$\implies \left\langle S_x^2\right\rangle_+ = \frac{\hbar^2}{4}.$$

Con lo cual

$$\langle(\Delta S_x)^2\rangle_+ = \frac{\hbar^2}{4} - 0, \implies \langle(\Delta S_x)^2\rangle_+ = \frac{\hbar^2}{4}. \tag{0.15}$$

Ahora bien, para revisar el resultado

$$\langle(\Delta S_x)^2\rangle\langle\left(\Delta S_y\right)^2\rangle \geq \frac{1}{4}\left|\langle\left[S_x, S_y\right]\rangle\right|^2$$

Sabemos queen general, se cumple la siguiente relación

$$\left[S_i, S_j\right] = i\epsilon_{ijk}S_k,$$

de manera que, en nuestro caso, tenemos

$$\left[S_x, S_y\right] = iS_z.$$

Para calcular $\left(\Delta S_y\right)^2$ procederemos de manera análoga que para $(\Delta S_x)^2$, entonces

$$\langle+|\, S_y\, |+\rangle = \frac{\hbar}{2}\left(-i\,\langle+|\,|+\rangle\langle-|\,+\rangle + i\,\langle+|\,|-\rangle\langle+|\,+\rangle\right) \implies \left\langle S_y\right\rangle_+ = 0.$$

En donde hemos usado nuevamente las propiedades de ortogonalidad de los kets base. Ahora bien, construyamos S_y^2

$$S_y^2 = S_y S_y = \frac{\hbar}{2}\left(-i|+\rangle\langle -| + i|-\rangle\langle +|\right)\frac{\hbar}{2}\left(-i|+\rangle\langle -| + i|-\rangle\langle +|\right),$$

$$\Longrightarrow\ S_y^2 = \frac{\hbar^2}{4}\left(-|+\rangle\langle -|+\rangle\langle -| + |+\rangle\langle -|-\rangle\langle +| + |-\rangle\langle +||+\rangle\langle -| - |-\rangle\langle +||-\rangle\langle +|\right),$$

$$\Longrightarrow\ S_y^2 = \frac{\hbar^2}{4}\left(|+\rangle\langle +| + |-\rangle\langle -|\right),$$

en donde nuevamente se ha hecho uso de las propiedades de ortogonalidad de los kets base. De manera que

$$\langle +|\, S_y^2\, |+\rangle = \frac{\hbar^2}{4}\left(\langle +|+\rangle\langle +|+\rangle + \langle +|-\rangle\langle -|+\rangle\right)\ \Longrightarrow\ \left\langle S_y^2\right\rangle_+ = \frac{\hbar^2}{4}.$$

Con lo cual

$$\langle (\Delta S_y)^2\rangle_+ = \frac{\hbar^2}{4} - 0,\ \Longrightarrow\ \langle (\Delta S_y)^2\rangle_+ = \frac{\hbar^2}{4}. \tag{0.16}$$

Ahora bien, para $\langle [S_x, S_y]\rangle_+$ tenemos

$$\langle [S_x, S_y]\rangle_+ = i\langle S_z\rangle_+,$$

$$\Longrightarrow\ \langle S_z\rangle_+ = \frac{\hbar}{2}\left(\langle +|+\rangle\langle +|+\rangle - \langle +|-\rangle\langle -|+\rangle\right) = \frac{\hbar}{2}.$$

$$\Longrightarrow\ i\langle S_z\rangle_+ = i\frac{\hbar}{2}\ \Longrightarrow\ |\langle [S_x, S_y]\rangle| = \frac{\hbar^2}{4}. \tag{0.17}$$

Ahora bien, juntando los resultados dados en las ecuaciones (0.15), (0.16) y (0.17), tenemos

$$\frac{\hbar^2}{16} = \frac{\hbar^2}{4}\frac{\hbar^2}{4} \geq \frac{1}{4}\frac{\hbar^2}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{\hbar}{2}\right)^2,$$

$$\Longrightarrow\ \langle (\Delta S_x)^2\rangle\langle (\Delta S_y)^2\rangle \geq \frac{1}{4}\left|\langle [S_x, S_y]\rangle\right|^2.$$

Para **b)** basicamente tenemos que hacer el mismo procedimiento, pero ahora para un estado diferente, para el estado S_x+, el cual, en términos de la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ esta dado por

$$|S_x; +\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle. \tag{0.18}$$

De manera que

$$\langle S_x; +|S_x|S_x; +\rangle = \langle S_x\rangle_{x+},$$

$$\Longrightarrow\ \langle S_x\rangle_{x+} = \frac{\hbar}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle +| + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle -|\right)\left(|+\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle\right),$$

desarrollando el producto del segundo por el tercer parentesis, tenemos lo siguiente

$$\Longrightarrow\ \langle S_x\rangle_{x+} = \frac{\hbar}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle +| + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle -|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle\langle -|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle\langle -|-\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle\langle +|-\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle\langle +|-\rangle\right),$$

simplificando y operando por la izquierda tenemos

$$\Longrightarrow\ \langle S_x\rangle_{x+} = \frac{\hbar}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle +| + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle -|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle\right),$$

$$\Longrightarrow\ \langle S_x\rangle_{x+} = \frac{\hbar}{4}\left(\langle +|+\rangle + \langle +|-\rangle + \langle -|+\rangle + \langle -|-\rangle\right) = \frac{\hbar}{4}2,$$

$$\therefore\ \langle S_x\rangle_{x+}^2 = \frac{\hbar^2}{4}.$$

Ahora bien, para el valor esperado de S_x^2 procedemos como de costumbre

$$\left\langle S_x^2 \right\rangle_{x+} = \frac{\hbar^2}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle +| + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle -|\right)\left(|+\rangle\langle +| + |-\rangle\langle -|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle\right),$$

$$\implies \left\langle S_x^2 \right\rangle_{x+} = \frac{\hbar^2}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle +| + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle -|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle\langle +|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle\langle -|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle\langle +|-\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle\langle -|-\rangle\right),$$

de manera que

$$\left\langle S_x^2 \right\rangle_{x+} = \frac{\hbar^2}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle +| + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle -|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle\right),$$

$$\implies \left\langle S_x^2 \right\rangle_{x+} = \frac{\hbar^2}{4}\frac{1}{2}\left(\langle +|+\rangle + \langle -|+\rangle + \langle +|-\rangle + \langle -|-\rangle\right) = \frac{\hbar^2}{4},$$

$$\therefore \left\langle S_x^2 \right\rangle_{x+} = \frac{\hbar^2}{4}.$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\left\langle (\Delta S_x)^2 \right\rangle_{x+} = \frac{\hbar^2}{4} - \frac{\hbar^2}{4} = 0$$

De manera que para que la igualdad se satisfaga, es necesario que $\langle S_z \rangle_{x+} = 0$. En efecto, queremos verificar que

$$\left\langle (\Delta S_x)^2 \right\rangle_{x+} \left\langle (\Delta S_y)^2 \right\rangle_{x+} \geq \frac{1}{4}\left|\left\langle [S_x, S_y] \right\rangle_{x+}\right|^2,$$

pero acabamos de ver que $\left\langle (\Delta S_x)^2 \right\rangle_{x+} = 0$, de manera que es necesario que $\left\langle [S_x, S_y] \right\rangle_{x+} = 0$, pero sabemos que $\left\langle [S_x, S_y] \right\rangle_{x+} = i\,\langle S_z \rangle_{x+}$.
Así que ahora calculemos $\langle S_z \rangle_{x+}$

$$\langle S_z \rangle_{x+} = \frac{\hbar}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle +| + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle -|\right)\left(|+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle\right),$$

$$\implies \langle S_z \rangle_{x+} = \frac{\hbar}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle +| + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle -|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle\langle +|+\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle\langle -|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle\langle +|-\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle\langle -|-\rangle\right),$$

$$\implies \langle S_z \rangle_{x+} = \frac{\hbar}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle +| + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle -|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle\right),$$

$$\implies \langle S_z \rangle_{x+} = \frac{\hbar}{4}\left(\langle +|+\rangle + \langle -|+\rangle - \langle +|-\rangle + \langle -|-\rangle\right) = \frac{\hbar}{4}(1-1) = 0.$$

Por lo tanto

$$\left|\left\langle [S_x, S_y] \right\rangle_{x+}\right| = 0,$$

y en consecuencia, tenemos que se satisface la relación de incertidumbre.