Mecánica Cuántica. Tarea 5

Grupo CO11 Trimestre 21-I
Profesor: Miguel Angel Bastarrachea Magnani
Ayudante: Yoshua Chávez Bolaños,
Fecha: Miércoles 28 de abril de 2021.
Fecha de entrega: Miércoles 5 de mayo de 2021.

1. Muestra que las componentes del momento cinético $\vec{\Pi} = \vec{p} - (e/c)\vec{A}$ satisfacen las propiedades de conmutación

$$[\Pi_i, \Pi_j] = \frac{\imath\hbar e}{c}\epsilon_{ijk}B_k$$

donde $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$. Verifica también la versión cuántica de la fuerza de Lorentz

$$m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = e\left[\vec{E} + \frac{1}{2c}\left(\frac{d\vec{x}}{dt} \times \vec{B} - \vec{B} \times \frac{d\vec{x}}{dt}\right)\right]$$

2. Muestre que la ecuación de Schrödinger en presencia de un campo electromagnético origina la ecuación de continuidad $\partial\rho/\partial t + \nabla' \cdot \vec{j} = 0$, donde $\rho = |\psi|^2$ pero la corriente de probabilidad está dada por

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{m}Im(\psi^* \nabla' \psi) - \frac{e}{mc}\vec{A}|\psi|^2$$

Muestra también que si escribimos $\psi = \sqrt{\rho}e^{(\imath S/\hbar)}$, podemos escribir la corriente de probabilidad en la forma alternativa

$$\vec{j} = \frac{\rho}{m}\left(\nabla S - \frac{e}{c}\vec{A}\right)$$

y que la integral espacial de $\vec{j}$ es el valor esperado del momento cinético.

3. Calcula los tres niveles de energía más bajos junto con sus degeneraciones para los siguientes sistemas (asuma partículas distinguibles de masas iguales):

   (a) Tres partículas no interactuantes de espín $\frac{1}{2}$ en una caja de longitud L.

   (b) Cuatro partículas no interactuantes de espín $\frac{1}{2}$ en una caja de longitud L.

4. Un estado cuántico Ψ es conocido por ser un eigenestado de dos operadores Hermitianos A y B los cuales anticonmutan

$$AB + BA = 0$$

¿Qué puedes decir de los eigenvalores de A y B para el estado Ψ? Ilustra tu punto usando el operador de paridad (que se puede escoger que satisfaga $\pi = \pi^{-1} = \pi^\dagger$) y el operador momento.

5. El Hamiltoniano para un sistema de espín 1 está dado por

$$H = AS_z^2 + B(S_x^2 - S_y^2)$$

Resuelve este problema *exactamente* para encontrar los eigenestados de energía normalizados y sus eigenvalores. ¿Es este Hamiltoniano invariante bajo inversión temporal? ¿Cómo transforman los eigenestados que obtuviste bajo inversión temporal?