Mecánica Cuántica. Tarea 2[*,†]

José Emmanuel Flores Calderón

Fecha: 14/03/2021.

1. Usando la ortonormalidad de $|+\rangle$ y $|-\rangle$, demuestre

$$\left[S_i, S_j\right] = i\epsilon_{ijk}S_k, \quad \left\{S_i, S_j\right\} = \frac{\hbar^2}{2}\delta_{ij},$$

donde

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\left(|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\right), \;\; S_y = \frac{i\hbar}{2}\left(-|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\right), \;\; S_z = \frac{\hbar}{2}\left(|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|\right).$$

Solución.
Hagamos primero los cálculos para el conmutador.
Por definición, tenemos $\left[S_i, S_j\right] = S_iS_j - S_jS_i$, así que primero calculemos $\left[S_x, S_y\right]$

$$\left[S_x, S_y\right] = S_xS_y - S_yS_x,$$

$$\implies \left[S_x, S_y\right] = i\frac{\hbar^2}{4}\left(|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\right)\left(-|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\right) - \frac{i\hbar^2}{4}\left(-|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\right)\left(|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\right),$$

para el primer producto, tenemos

$$\implies (*) = i\frac{\hbar^2}{4}\left[-|+\rangle\langle-|+\rangle\langle-| + |+\rangle\langle-|-\rangle\langle+| - |-\rangle\langle+|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|-\rangle\langle+|\right],$$

usando las propiedades de ortogonalidad de los kets base

$$\implies (*) = i\frac{\hbar^2}{4}\left[|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|\right].$$

Ahora bien, para el segundo término, tenemos

$$[*] = -i\frac{\hbar^2}{4}\left[-|+\rangle\langle-|+\rangle\langle-| - |+\rangle\langle-|-\rangle\langle+| + |-\rangle\langle+|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|-\rangle\langle+|\right],$$

$$\implies [*] = -i\frac{\hbar^2}{4}\left[-|+\rangle\langle+| + |-\rangle\langle-|\right] = i\frac{\hbar^2}{4}\left[|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|\right].$$

De manera que

$$\left[S_x, S_y\right] = (*) + [*] = i\frac{\hbar^2}{4}\left[|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|\right] + i\frac{\hbar^2}{4}\left[|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|\right] = i\hbar\frac{\hbar}{2}\left[|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|\right],$$

por lo tanto

$$\left[S_x, S_y\right] = i\hbar S_z. \tag{0.1}$$

[*]Grupo C011 | Trimestre 21-1
[†]Profesor: Miguel Angel Bastarrachea Magnani | Ayudante: Yoshua Chávez Bolaños

Por otra parte, sabemos que el conmutador satisface $[A,B] = -[B,A]$, con lo cual tenemos $\left[S_x, S_y\right] = -\left[S_y, S_x\right]$ y por lo tanto

$$\left[S_y, S_x\right] = -i\hbar S_z. \tag{0.2}$$

Ahora hagamos el mismo cálculo para $\left[S_y, S_z\right] = S_y S_z - S_z S_y$,

$$\left[S_y, S_z\right] = \frac{i\hbar^2}{4}\left(-|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\right)\left(|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|\right) - \frac{i\hbar^2}{4}\left(|+\rangle\langle+| + |-\rangle\langle-|\right)\left(-|+\rangle\langle-| - |-\rangle\langle+|\right).$$

Para el primer término de la ecuación anterior, tenemos

$$(*) = \frac{i\hbar^2}{4}\left(-|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\right)\left(|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|\right),$$

$$\Longrightarrow (*) = i\frac{\hbar^2}{4}\left[-|+\rangle\langle-|+\rangle\langle+| + |+\rangle\langle-|-\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle+|-\rangle\langle-|\right],$$

$$\Longrightarrow (*) = i\frac{\hbar^2}{4}\left[|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\right].$$

Mientras que para el segundo término

$$[*] = -i\frac{\hbar^2}{4}\left(|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|\right)\left(-|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\right),$$

$$\Longrightarrow [*] = -i\frac{\hbar^2}{4}\left[-|+\rangle\langle+|+\rangle\langle-| + |+\rangle\langle+|-\rangle\langle+| + |-\rangle\langle-|+\rangle\langle-| - |-\rangle\langle-|-\rangle\langle+|\right],$$

$$\Longrightarrow [*] = -i\frac{\hbar^2}{4}\left[-|+\rangle\langle-| - |-\rangle\langle+|\right] = i\frac{\hbar^2}{4}\left[|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\right].$$

Entonces

$$\left[S_y, S_z\right] = (*) + [*] = i\frac{\hbar^2}{4}\left[|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\right] + i\frac{\hbar^2}{4}\left[|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\right],$$

$$\Longrightarrow \left[S_y, S_z\right] = i\hbar\frac{\hbar}{2}\left[|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\right] = i\hbar S_x,$$

por lo tanto

$$\left[S_y, S_z\right] = i\hbar S_x \tag{0.3}$$

Nuevamente, por las propiedades del conmutador, tenemos

$$\left[S_z, S_y\right] = -i\hbar S_x. \tag{0.4}$$

Ahora para el conmutador $[S_z, S_x]$, tenemos

$$[S_z, S_x] = S_z S_x - S_x S_z,$$

$$\Longrightarrow [S_z, S_x] = \frac{i\hbar^2}{4}\left(|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|\right)\left(|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\right) - \frac{i\hbar^2}{4}\left(|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\right)\left(|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|\right),$$

y nuevamente, para el primer término de la ecuación anterior, tenemos

$$(*) = i\frac{\hbar^2}{4}\left(|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|\right)\left(|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\right),$$

$$\Longrightarrow (*) = i\frac{\hbar^2}{4}\left[|+\rangle\langle+|+\rangle\langle-| + |+\rangle\langle+|-\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|+\rangle\langle-| - |-\rangle\langle-|-\rangle\langle+|\right],$$

$$\Longrightarrow (*) = i\frac{\hbar^2}{4}\left[|+\rangle\langle-| - |-\rangle\langle+|\right]$$

Mientras que para el segundo término, se tiene

$$[*] = -i\frac{\hbar^2}{4}\left(|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\right)\left(|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|\right),$$

$$\implies [*] = -i\frac{\hbar^2}{4}\left[|+\rangle\langle-|+\rangle\langle+| - |+\rangle\langle-|-\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle+|-\rangle\langle-|\right],$$

$$\implies [*] = -i\frac{\hbar^2}{4}\left[-|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\right] = i\frac{\hbar^2}{4}\left[|+\rangle\langle-| - |-\rangle\langle+|\right],$$

por lo tanto, tenemos que

$$[S_z, S_x] = (*) + [*] = i\frac{\hbar^2}{4}\left[|+\rangle\langle-| - |-\rangle\langle+|\right] + i\frac{\hbar^2}{4}\left[|+\rangle\langle-| - |-\rangle\langle+|\right],$$

$$\implies [S_z, S_x] = i\frac{\hbar^2}{2}\left[|+\rangle\langle-| - |-\rangle\langle+|\right] = i\hbar\frac{\hbar}{2}\left[|+\rangle\langle-| - |-\rangle\langle+|\right] = i\hbar S_y,$$

$$\therefore [S_z, S_x] = i\hbar S_y. \tag{0.5}$$

Nuevamente, por las propiedades del conmutador, tenemos que

$$\left[S_x, S_y\right] = -i\hbar S_z. \tag{0.6}$$

Ahora bien, en resumen tenemos que

$$\left[S_x, S_y\right] = i\hbar S_z \quad \& \quad \left[S_y, S_x\right] = -i\hbar S_z,$$

$$\left[S_y, S_z\right] = i\hbar S_x \quad \& \quad \left[S_y, S_z\right] = -i\hbar S_x,$$

$$[S_z, S_x] = i\hbar S_y \quad \& \quad [S_x, S_z] = -i\hbar S_y.$$

Además, es claro que $\left[S_i, S_j\right] = 0$, siempre que $i = j$. De manera que si recordamos la definición del símbolo de Levi-Civitta

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & ijk = xyz \;\; yzx \;\; zxy \\ -1 & ijk = xzy \;\; yxz \;\; zyx \\ 1 & \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

tenemos que

$$\left[S_i, S_j\right] = i\epsilon_{ijk}S_k, \tag{0.7}$$

justo como queriamos demostrar.

Ahora bien, para el anticonmutador tenemos lo siguiente. Calculemos $\{S_x, S_x\}$

$$\{S_x, S_x\} = S_xS_x + S_xS_x = 2S_x^2,$$

$$\implies \{S_x, S_x\} = 2\frac{\hbar^2}{4}\left(|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\right)\left(|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\right),$$

$$\implies \{S_x, S_x\} = \frac{\hbar^2}{2}\left(|+\rangle\langle-|-\rangle\langle+| + |-\rangle\langle+|+\rangle\langle-|\right),$$

$$\implies \{S_x, S_x\} = \frac{\hbar^2}{2}\left(|+\rangle\langle+| + |-\rangle\langle-|\right),$$

usando la relación de completez $|+\rangle\langle+| + |-\rangle\langle-| = \mathbb{I}$, tenemos

$$\{S_x, S_x\} = \frac{\hbar^2}{2}\mathbb{I}. \tag{0.8}$$

Ahora bien, para $\left\{S_y, S_y\right\}$ tenemos

$$\left\{S_y, S_y\right\} = 2S_y^2 = 2\frac{i^2\hbar^2}{4}\left(-|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\right)\left(-|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\right),$$

$$\implies \{S_y, S_y\} = \frac{i^2\hbar^2}{2}\left(-|+\rangle\langle-|-\rangle\langle+| - |-\rangle\langle+|+\rangle\langle-|\right),$$

$$\implies \{S_y, S_y\} = -\frac{\hbar^2}{2}\left(-|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|\right) = \frac{\hbar^2}{2}\left(|+\rangle\langle+| + |-\rangle\langle-|\right),$$

y nuevamente, usando la relación de completez de la base, tenemos

$$\{S_y, S_y\} = \frac{\hbar^2}{2}\mathbb{I}. \tag{0.9}$$

Ahora procedamos para $\{S_z, S_z\}$,

$$\{S_z, S_z\} = 2S_z^2 = 2\frac{\hbar^2}{4}\left(|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|\right)\left(|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|\right),$$

$$\implies \{S_z, S_z\} = 2S_z^2 = \frac{\hbar^2}{2}\left(|+\rangle\langle+|+\rangle\langle+| + |-\rangle\langle-|-\rangle\langle-|\right),$$

$$\implies \{S_z, S_z\} = \frac{\hbar^2}{2}\left(|+\rangle\langle+| + |-\rangle\langle-|\right) = \frac{\hbar^2}{2}\mathbb{I}.$$

Por lo tanto

$$\{S_z, S_z\} = \frac{\hbar^2}{2}\mathbb{I}. \tag{0.10}$$

Para el anticonmutador $\{S_x, S_y\}$, tenemos

$$\{S_x, S_y\} = S_xS_y + S_yS_x,$$

$$\implies \{S_x, S_y\} = \frac{i\hbar^2}{4}\left(|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\right)\left(-|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\right) + \frac{i\hbar^2}{4}\left(-|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\right)\left(|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\right),$$

$$\implies \{S_x, S_y\} = \frac{i\hbar^2}{4}\left(|+\rangle\langle-|-\rangle\langle+| - |-\rangle\langle+|+\rangle\langle-| - |+\rangle\langle-|-\rangle\langle+| + |-\rangle\langle+|+\rangle\langle-|\right),$$

$$\implies \{S_x, S_y\} = \frac{i\hbar^2}{4}\left(|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-| - |+\rangle\langle+| + |-\rangle\langle-|\right) = \frac{i\hbar^2}{4}(0) = 0,$$

$$\implies \{S_x, S_y\} = 0. \tag{0.11}$$

Pero $\{S_x, S_y\} = \{S_y, S_x\}$, por lo tanto

$$\{S_y, S_x\} = 0. \tag{0.12}$$

Ahora bien, para $\{S_x, S_z\}$, tenemos

$$\{S_x, S_z\} = S_xS_z + S_zS_x,$$

$$\implies \{S_x, S_z\} = \frac{\hbar^2}{4}\left(|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\right)\left(|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|\right) + \frac{\hbar^2}{4}\left(|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|\right)\left(|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\right),$$

$$\implies \{S_x, S_z\} = \frac{\hbar^2}{4}\left(-|+\rangle\langle-|-\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|+\rangle\langle+| + |+\rangle\langle+|+\rangle\langle-| - |-\rangle\langle-|-\rangle\langle+|\right),$$

$$\implies \{S_x, S_z\} = \frac{\hbar^2}{4}\left(-|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+| + |+\rangle\langle-| - |-\rangle\langle+|\right) = \frac{\hbar^2}{4}(0),$$

$$\implies \{S_x, S_z\} = 0. \tag{0.13}$$

Y nuevamente, por las propiedades del anticonmutador, tenemos que

$$\{S_z, S_x\} = 0. \tag{0.14}$$

Finalmente, para $\{S_y, S_z\}$, tenemos

$$\{S_y, S_z\} = S_yS_z + S_zS_y,$$

$$\implies \{S_y, S_z\} = i\frac{\hbar^2}{4}\left(-|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\right)\left(|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|\right) + i\frac{\hbar^2}{4}\left(|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|\right)\left(-|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\right),$$

$$\implies \{S_y, S_z\} = i\frac{\hbar^2}{4}\left(|+\rangle\langle-|-\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|+\rangle\langle+| - |+\rangle\langle+|+\rangle\langle-| - |-\rangle\langle-|-\rangle\langle+|\right),$$

$$\implies \{S_y, S_z\} = i\frac{\hbar^2}{4}\left(|+\rangle\langle-| + |+\rangle\langle-|-\rangle\langle+| - |+\rangle\langle-| - |-\rangle\langle+|\right) = i\frac{\hbar^2}{4}(0),$$

$$\implies \{S_y, S_z\} = 0. \tag{0.15}$$

Y por lo tanto

$$\{S_z, S_y\} = 0. \tag{0.16}$$

Ahora bien, si juntamos los resultados dados por las ecuaciones (0.8), (0.9), (0.10), (0.11), (0.12), (0.13), (0.14), (0.15) y (0.16) , tenemos que

$$\{S_i, S_j\} = \frac{\hbar^2}{2}\delta_{ij}.$$

justo como se queria demostrar.

2. Un sistema de dos estados se caracteriza por el Hamiltoniano

$$H = H_{11}|1\rangle\langle 1| + H_{22}|2\rangle\langle 2| + H_{12}\left[|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|\right],$$

donde H_{11},H_{22} y H_{12} son número reales con unidades de energía y $|1\rangle$ y $|2\rangle$son eigenkets de algún observable $(\neq H)$. Encuentra los autoestados de energía y sus correspondientes autovalores de energía. Asegurate que tu resultado tenga sentido para $H_{12} = 0$. Puedes usar

$$\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}|\hat{\mathbf{n}};+\rangle = \frac{\hbar}{2}|\hat{\mathbf{n}};+\rangle,$$

con $|\hat{\mathbf{n}};+\rangle$ dado por

$$|\hat{\mathbf{n}};+\rangle = \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)|+\rangle + \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\exp(i\alpha)|-\rangle$$

donde β y α son los ángulos polar y azimutal que definen a $\hat{\mathbf{n}}$, respectivamente. .

Solución.

En términos matriciales, el operador H esta escrito como

$$H = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}.$$

Ahora bien, dado que nos están diciendo que podemos usar $\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}|\hat{\mathbf{n}};+\rangle = \frac{\hbar}{2}|\hat{\mathbf{n}};+\rangle$, intentemos escribir la matriz anterior en términos de las matrices de Pauli, las cuales estan dadas por

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Entonces, queremos que

$$H = a\mathbb{I} + b\sigma_z + c\sigma_x + d\sigma_y,$$

es claro que $d = 0$, mientras que $c = H_{12}$, de manera que tenemos que resolver el siguiente sistema

$$H_{11} = a + b,\ \&\ H_{22} = a - b,$$

de tal manera que, sumando y restando, tenemos

$$a = \frac{H_{11} + H_{22}}{2}\quad\&\quad b = \frac{H_{11} - H_{22}}{2}.$$

Con lo cual, tenemos que

$$H = a\mathbb{I} + b\sigma_z + c\sigma_x,$$

o bien

$$H = A + B,$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} \frac{H_{11}+H_{22}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{H_{11}+H_{22}}{2} \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} \frac{H_{11}-H_{22}}{2} & H_{12} \\ H_{12} & \frac{H_{11}-H_{22}}{2} \end{pmatrix}.$$

Ahora bien, usando la siguiente propiedad

$$\det\left(A' + B\right) = \det\left(A'\right) + \det\left(B\right) + \det\left(A'\right) Tr\left(\left(A'\right)^{-1} B\right),$$

tenemos que

$$0 = \det\left(A - \lambda \mathbb{I}\right) + \det\left(B\right) + \det\left(A - \lambda \mathbb{I}\right) Tr\left(\left(A - \lambda \mathbb{I}\right)^{-1} B\right),$$

pero notemos que el tercer termino en la ecuación anterior es cero, ya que B tiene traza cero. De manera que

$$0 = \det\left(A - \lambda \mathbb{I}\right) + \det\left(B\right),$$

$$\implies 0 = \left(\frac{H_{11} + H_{22}}{2} - \lambda\right)^2 - \left(\frac{H_{11} - H_{22}}{2}\right)^2 - \left(H_{12}\right)^2 \implies \left(\frac{H_{11} + H_{22}}{2} - \lambda\right)^2 = \left(\frac{H_{11} - H_{22}}{2}\right)^2 + \left(H_{12}\right)^2,$$

$$\implies \frac{H_{11} + H_{22}}{2} - \lambda = \sqrt{\left(\frac{H_{11} - H_{22}}{2}\right)^2 + \left(H_{12}\right)^2},$$

$$\therefore \lambda_{\pm} = \frac{H_{11} + H_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{H_{11} - H_{22}}{2}\right)^2 + \left(H_{12}\right)^2}$$

De manera que los eigenkets, deben estar dados por

$$\left|\lambda_{+}\right\rangle = \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\left|1\right\rangle + \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\left|2\right\rangle \quad \& \quad \left|\lambda_{-}\right\rangle = -\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\left|1\right\rangle + \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\left|2\right\rangle,$$

donde $\alpha = 0$, $\beta = \frac{2H_{12}}{H_{11}-H_{22}}$.

3. Evalúa el producto de incertidumbre $x - p$, $\left\langle(\Delta x)^2\right\rangle\left\langle(\Delta p)^2\right\rangle$ para una partícula unidimensional confinada entre dos paredes rígidas. Hazlo para el estado base y para los estados excitados.

   Solución.

   En este caso, el potencial esta dado por

$$V = \begin{cases} 0 & 0 < x < a \\ \infty & \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

   Y sabemos que para este problema, las funciones de onda están dadas por la siguiente expresión

$$\langle x|\, n\rangle = \psi_n\left(x\right) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

   Por otra parte, sabemos que las dispersiones de x y p están dadas por

$$\left\langle(\Delta x)^2\right\rangle = \left\langle x^2\right\rangle - \langle x\rangle^2, \text{ y } \left\langle(\Delta p)^2\right\rangle = \left\langle p^2\right\rangle - \langle p\rangle^2.$$

   De manera que tenemos que calcular los valores esperados para x^2, x, p^2 y p. Por definición

$$\langle x\rangle_n = \langle n|\, x\, |n\rangle = \int_0^a dx \psi_n^*\left(x\right) x \psi_n\left(x\right) = \int_0^a dx \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) x \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right),$$

$$\implies \langle x\rangle_n = \frac{2}{a}\int_0^a dx \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) x,$$

al hacer la integral anterior, obtenemos el siguiente resultado

$$\langle x\rangle_n = \frac{2}{a}\left[\frac{x^2}{4} - \frac{a^2\cos\left(\frac{2n\pi x}{a}\right)}{8n^2\pi^2} - \frac{ax\sin\left(\frac{2n\pi x}{a}\right)}{4n\pi}\right]_0^a,$$

$$\Longrightarrow \langle x\rangle_n = \frac{1}{a}\left[\frac{a^2}{2} - \frac{a^2\cos(2n\pi)}{4n\pi^2} - \frac{a^2\sin(2n\pi)}{2n\pi} + \frac{a^2}{4n\pi^2}\right],$$

pero $\cos(2n\pi) = 1$ y $\sin(2n\pi) = 0$, de manera que

$$\Longrightarrow \langle x\rangle_n = \frac{1}{a}\left[\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4n^2\pi^2} + \frac{a^2}{4n^2\pi^2}\right] = \frac{a}{2},$$

$$\therefore \langle x\rangle_n = \frac{a}{2} \tag{0.17}$$

Por otra parte, para x^2 tenemos

$$\left\langle x^2\right\rangle_n = \int_0^a dx\psi_n^*(x)\, x^2\psi_n(x),$$

$$\Longrightarrow \left\langle x^2\right\rangle_n = \int_0^a dx\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)x^2\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = \frac{2}{a}\int_0^a dx\sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right)x^2,$$

$$\Longrightarrow \left\langle x^2\right\rangle_n = \frac{2}{a}\int_0^a dx\sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right)x^2.$$

Haciendo la integral, obtenemos

$$\left\langle x^2\right\rangle_n = \frac{2}{a}\left[\frac{x^3}{6} - \frac{a^2x\cos\left(\frac{2n\pi x}{a}\right)}{4n^2\pi^2} - \frac{a\left(-a^2+2n^2\pi^2x^2\right)\sin\left(\frac{2n\pi x}{a}\right)}{8n^3\pi^3}\right]_0^a,$$

$$\Longrightarrow \left\langle x^2\right\rangle_n = \frac{1}{a}\left[\frac{a^3}{3} - \frac{a^3\cos(2n\pi)}{2n^2\pi^2}\right] = \frac{a^3}{a}\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2n^2\pi^2}\right],$$

$$\Longrightarrow \left\langle x^2\right\rangle_n = a^2\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2n^2\pi^2}\right]. \tag{0.18}$$

Por lo tanto, $\left\langle(\Delta x)^2\right\rangle$ queda escrito como

$$\left\langle(\Delta x)^2\right\rangle = \left\langle x^2\right\rangle - \langle x\rangle^2 = a^2\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2n^2\pi^2}\right] - \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

$$\Longrightarrow \left\langle(\Delta x)^2\right\rangle = a^2\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2n^2\pi^2} - \frac{1}{4}\right] = a^2\left[\frac{1}{12} - \frac{1}{2n^2\pi^2}\right] = \frac{a^2}{6}\left[\frac{1}{2} - \frac{6}{2n^2\pi^2}\right] = \frac{a^2}{6}\left[\frac{1}{2} - \frac{3}{3n^2\pi^2}\right],$$

$$\therefore \left\langle(\Delta x)^2\right\rangle = \frac{a^2}{6}\left[\frac{1}{2} - \frac{3}{3n^2\pi^2}\right]. \tag{0.19}$$

Mientras que para p, sabemos que esta dado por $p = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}$(ya que estamos solamente en una dimensión). Entonces

$$\langle p\rangle_n = \int_0^a dx\psi_n^*(x)\left(\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\right)\psi_n(x),$$

$$\Longrightarrow \langle p\rangle_n = \int_0^a dx\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\left(\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\right)\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = \frac{2}{a}\frac{\hbar}{i}\int_0^a dx\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\frac{d}{dx}\left(\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\right),$$

$$\Longrightarrow \langle p\rangle_n = \frac{2}{a}\frac{\hbar}{i}\int_0^a dx\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right),$$

pero por la ortogonalidad de las funciones base, tenemos que la integral anterior es cero. Esto es

$$\langle p\rangle_n = 0 \tag{0.20}$$

Ahora bien, para p^2tenemos

$$\left\langle p^2 \right\rangle_n = \int_0^a dx \psi_n^* (x) \left(\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \right)^2 \psi_n (x) \, ,$$

$$\Longrightarrow \left\langle p^2 \right\rangle_n = \int_0^a dx \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \left(\frac{n\pi x}{a} \right) \left(\frac{\hbar^2}{i^2} \frac{d^2}{dx^2} \right) \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \left(\frac{n\pi x}{a} \right) = -\frac{2\hbar^2}{a} \int_0^a dx \sin \left(\frac{n\pi x}{a} \right) \frac{d^2}{dx^2} \left(\sin \left(\frac{n\pi x}{a} \right) \right) ,$$

$$\Longrightarrow \left\langle p^2 \right\rangle_n = -\frac{2\hbar^2}{a} \int_0^a dx \sin \left(\frac{n\pi x}{a} \right) \left(-\sin \left(\frac{n\pi x}{a} \right) \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \right) ,$$

$$\left\langle p^2 \right\rangle_n = \frac{2\hbar^2 n^2 \pi^2}{a^3} \int_0^a dx \sin^2 \left(\frac{n\pi x}{a} \right) ,$$

Evaluando la integral anterior, tenemos que

$$\left\langle p^2 \right\rangle_n = \frac{2\hbar^2 n^2 \pi^2}{a^3} \left[\frac{x}{2} - \frac{a \sin \left(\frac{2n\pi x}{a} \right)}{4n\pi} \right]_0^a = \frac{2\hbar^2 n^2 \pi^2}{a^3} \left[\frac{a}{2} \right] ,$$

$$\Longrightarrow \left\langle p^2 \right\rangle_n = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{a^2},$$

con lo cual, tenemos

$$\left\langle (\Delta p)^2 \right\rangle = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{a^2}. \tag{0.21}$$

Y por lo tanto,

$$\left\langle (\Delta x)^2 \right\rangle \left\langle (\Delta p)^2 \right\rangle = \frac{a^2}{6} \left[\frac{1}{2} - \frac{3}{3n^2\pi^2} \right] \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{a^2} = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{6} \left[\frac{1}{2} - \frac{3}{3n^2\pi^2} \right] ,$$

$$\therefore \left\langle (\Delta x)^2 \right\rangle \left\langle (\Delta p)^2 \right\rangle = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{6} \left[\frac{1}{2} - \frac{3}{3n^2\pi^2} \right] . \tag{0.22}$$

4. Considera un espacio ket tridimensional. Si un cierto conjunto de kets ortonormales (digamos $|1\rangle$,$|2\rangle$ y $|3\rangle$) son usados como una base de kets, los operadores A y B están representados por

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}$$

y

$$B = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ib \\ 0 & ib & 0 \end{pmatrix}$$

con a y b reales.

   (a) A exhibe un espectro degenerado. ¿B también?.
   (b) Muestre que A y B conmutan.
   (c) Encuentra un nuevo conjunto de kets ortonormales que son eigenkets simultaneamente para A y B. Especifica los autovalores de cada uno de los eigenkets.

Solución.

a) Calculemos el espectro de B. Dado que queremos encontrar el conjunto de valore propios asociados a la matriz B, tenemos que resolver una ecuación de la forma

$$det \left(B - \lambda \mathbb{I} \right) = 0,$$

$$\iff det\left(\left(\begin{array}{ccc} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ib \\ 0 & ib & 0 \end{array}\right) - \lambda\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\right) = det\left(\left(\begin{array}{ccc} b-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -ib \\ 0 & ib & -\lambda \end{array}\right)\right) 0,$$

de manera que

$$(b-\lambda)\left[(-\lambda)(-\lambda) - (-ib)\, ib\right] = 0 \implies (b-\lambda)\left[\lambda^2 - b^2\right] = 0,$$

por lo tanto, $\lambda_1 = b$, $\lambda_{2,3} = \pm b$ son los valores propios, de manera que sí, el espectro de B es degenerado, ya que tenemos un valor propio de multiplicidad dos.

b) Veámos que A y B conmutan

$$AB = \left(\begin{array}{ccc} a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ib \\ 0 & ib & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc} ab & 0 & 0 \\ 0 & 0 & iab \\ 0 & -iab & 0 \end{array}\right),$$

por otra parte

$$BA = \left(\begin{array}{ccc} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ib \\ 0 & ib & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc} a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc} ba & 0 & 0 \\ 0 & 0 & iba \\ 0 & -iba & 0 \end{array}\right),$$

pero a y b son número y éstos conmutan, de manera que

$$AB = BA.$$

c) Como A y B son observables compatibles, los eigenkets de A también son eigenkets de B y viceversa, así que una manera de obtener un conjunto de eigenkets simultaneos para A y B es encontrar los eigenkets de B, para lo cual resolvemos la ecuación matricial

$$(B - \lambda_1 \mathbb{I})\, \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

para cada uno de los valore propios λ_i. Para $\lambda = b$, tenemos

$$(B - b\mathbb{I})\, \mathbf{x} = 0 \implies \left(\begin{array}{ccc} b-b & 0 & 0 \\ 0 & -b & -ib \\ 0 & ib & -b \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right) \iff -by - ibz = 0 \ \& \ iby - bz = 0$$

$\implies$ $y = 0, z = 0$ y x es un parámetro libre, al cual por comodidad lo escogemos como 1, de manera que el eigenket correspondiente al eigenvalor $\lambda = b$ es $|1\rangle$. Ahora procedamos con el valor propio de $\lambda = -b$, con el cual, tenemos

$$(B - b\mathbb{I})\, \mathbf{x} = 0 \implies \left(\begin{array}{ccc} b+b & 0 & 0 \\ 0 & b & -ib \\ 0 & ib & b \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right) \iff 2bx = 0,\ by - ibz = 0 \ \text{y} \ iby + bz = 0,$$

$\implies$ $x = 0$, mientras que para y y z, tenemos la misma ecuación, por lo tanto, escogiendo a y como parámetro, tenemos que

$$z = -iy$$

y por lo tanto, nuestro conjunto de eigenkets esta dado por

$$\left\{(1,0,0), (0,1,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-i)\right\}.$$

5. a) Verifica

$$[x_i, G(\mathbf{p})] = i\hbar\frac{\partial G}{\partial p_i}, \qquad [p_i, F(\mathbf{x})] = -i\hbar\frac{\partial F}{\partial x_i}.$$

b) Evalúa $\left[x^2, p^2\right]$.

Solución.

a) Desarrollemos en serie de Taylor $G\left(\mathbf{p}\right)$

$$G\left(\mathbf{p}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial G}{\partial p_j}\right)^n p_j^n,$$

de manera que

$$\left[x_i,G\left(\mathbf{p}\right)\right]=x_i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial G}{\partial p_j}\right)^n p_j^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial G}{\partial p_j}\right)^n p_j^n x_i,$$

$$\Longrightarrow\ \left[x_i,G\left(\mathbf{p}\right)\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x_i\left(\frac{\partial G}{\partial p_j}\right)^n p_j^n-\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial G}{\partial p_j}\right)^n p_j^n x_i=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(x_i\left(\frac{\partial G}{\partial p_j}\right)^n p_j^n-\left(\frac{\partial G}{\partial p_j}\right)^n p_j^n x_i\right),$$

$$\Longrightarrow\ \left[x_i,G\left(\mathbf{p}\right)\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left[x_i,\left(\frac{\partial G}{\partial p_j}\right)^n p_j^n\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial G}{\partial p_j}\right)^n\left[x_i,p_j^n\right].$$

Pero $\left[x_i,p_j^n\right]=ni\hbar\delta_{ij}p_j^{n-1}$, en efecto

$$\left[x_i,p_j^n\right]=x_ip_j^n-p_j^nx_i=x_ip_jp_j^{n-1}-p_j^nx_i,$$

pero

$$x_ip_j=i\hbar\delta_{ij}+p_jx_i,$$

entonces

$$\left[x_i,p_j^n\right]=\left(i\hbar\delta_{ij}+p_jx_i\right)p_j^{n-1}-p_j^nx_i=i\hbar p_j^{n-1}\delta_{ij}+p_jx_ip_j^{n-1}-p_j^nx_i,$$

$$\Longrightarrow\ \left[x_i,p_j^n\right]=i\hbar p_j^{n-1}\delta_{ij}+p_jx_ip_jp_j^{n-2}-p_j^nx_i,$$

$$\Longrightarrow\ \left[x_i,p_j^n\right]=i\hbar p_j^{n-1}\delta_{ij}+p_j\left(i\hbar\delta_{ij}+p_jx_i\right)p_j^{n-2}-p_j^nx_i=i\hbar p_j^{n-1}\delta_{ij}+i\hbar p_j^{n-1}\delta_{ij}+p_j^2x_ip_j^{n-2}-p_j^nx_i,$$

$$\Longrightarrow\ \left[x_i,p_j^n\right]=2i\hbar p_j^{n-1}\delta_{ij}+p_j^2x_ip_j^{n-2}-p_j^nx_i,$$

procediendo así, de manera sucesiva, tenemos

$$\left[x_i,p_j^n\right]=ni\hbar\delta_{ij}p_j^{n-1}$$

De manera que usando el resultado anterior, tenemos que

$$\left[x_i,G\left(\mathbf{p}\right)\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial G}{\partial p_j}\right)^n ni\hbar\delta_{ij}p_j^{n-1}=i\hbar\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\partial G}{\partial p_j}\right)^n\delta_{ij}p_j^{n-1}=i\hbar\frac{\partial G\left(\mathbf{p}\right)}{\partial p_i},$$

$$\therefore\ \left[x_i,G\left(\mathbf{p}\right)\right]=i\hbar\frac{\partial G\left(\mathbf{p}\right)}{\partial p_i}.$$

Ahora bien, procediendo de la misma manera para $\left[p_i,F\left(\mathbf{x}\right)\right]=-i\hbar\frac{\partial F}{\partial x_i}$, tenemos

$$F\left(\mathbf{x}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)^n x_j^n,$$

$$\Longrightarrow\ \left[p_i,F\left(\mathbf{x}\right)\right]=p_i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)^n x_j^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)^n x_j^n p_i,$$

$$\Longrightarrow\ \left[p_i,F\left(\mathbf{x}\right)\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}p_i\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)^n x_j^n-\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)^n x_j^n p_i=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(p_i\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)^n x_j^n-\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)^n x_j^n p_i\right),$$

$$\implies [p_i, F(\mathbf{x})] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[p_i, \left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)^n x_j^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)^n \left[p_i, x_j^n\right],$$

pero $\left[p_i, x_j^n\right] = -ni\hbar\delta_{ij}x_j^{n-1}$. En efecto

$$\left[p_i, x_j^n\right] = p_i x_j^n - x_j^n p_i = p_i x_j x_j^{n-1} - x_j^n p_i = \left(x_i p_j - i\hbar\delta_{ij}\right) x_j^{n-1} - x_j^n p_i,$$

$$\implies \left[p_i, x_j^n\right] = -i\hbar\delta_{ij}x_j^{n-1} + x_i p_j x_j^{n-1} - x_j^n p_i,$$

$$\implies \left[p_i, x_j^n\right] = -i\hbar\delta_{ij}x_j^{n-1} + x_i p_j x_j x_j^{n-2} - x_j^n p_i = -i\hbar\delta_{ij}x_j^{n-1} + x_i\left(x_i p_j - i\hbar\delta_{ij}\right) x_j^{n-2} - x_j^n p_i,$$

$$\implies \left[p_i, x_j^n\right] = -2i\hbar\delta_{ij}x_j^{n-1} + x_i^2 p_j x_j^{n-2} - x_j^n p_i,$$

y nuevamente, procediendo secuencialemente, como para el caso anterior, tenemos que

$$\left[p_i, x_j^n\right] = -ni\hbar\delta_{ij}x_j^{n-1}.$$

De manera que usando el resultado anterior, tenemos

$$[p_i, F(\mathbf{x})] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)^n \left(-ni\hbar\delta_{ij}\right) x_j^{n-1} = -i\hbar \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)^n \delta_{ij}x_j^{n-1} = i\hbar\frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial x_i},$$

$$\therefore [p_i, F(\mathbf{x})] = -i\hbar\frac{\partial F(\mathbf{p})}{\partial x_i}.$$

b) Ahora bien, calculemos $\left[x^2, p^2\right]$

$$\left[x^2, p^2\right] = x^2p^2 - p^2x^2 = x^2pp - ppx^2 = \left[x^2, p\right] p + p\left[x^2, p\right],$$

$$\implies \left[x^2, p^2\right] = -\left[p, x^2\right] p - p\left[p, x^2\right] = i\hbar\frac{\partial x^2}{\partial x}p + \mathrm{i}\hbar\frac{\partial x^2}{\partial x} = i\hbar\left(xp + px\right),$$

$$\therefore \left[x^2, p^2\right] = i\hbar\left\{x, p\right\}.$$