Mecánica Cuántica. Tarea 2

Grupo CO11 Trimestre 21-I
Profesor: Miguel Angel Bastarrachea Magnani
Ayudante: Yoshua Chávez Bolaños,
Fecha: Miércoles 7 de abril de 2021.
Fecha de entrega: Miércoles 14 de abril de 2021.

1. Usando la ortonormalidad de $|+\rangle$ y $|-\rangle$, demuestre

$$[S_i, S_j] = \mathrm{i}\epsilon_{ijk}\hbar S_k, \qquad \{S_i, S_j\} = \frac{\hbar^2}{2}\delta_{ij}$$

donde

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\left(|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\right), \qquad S_y = \frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\left(-|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\right),$$
$$S_z = \frac{\hbar}{2}\left(|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|\right).$$

2. Un sistema de dos estados se caracteriza por el Hamiltoniano

$$H = H_{11}|1\rangle\langle 1| + H_{22}|2\rangle\langle 2| + H_{12}[|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|]$$

donde H_{11}, H_{22} y H_{12} son números reales con unidades de energía y $|1\rangle$ y $|2\rangle$ son eigenkets de algún observable ($\neq H$). Encuentra los autoestados de energía y sus correspondientes autovalores de energía. Asegurate que tu resultado tenga sentido para $H_{12} = 0$. Puedes usar

$$(\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}})|\hat{\mathbf{n}};+\rangle = \frac{\hbar}{2}|\hat{\mathbf{n}};-\rangle$$

con $|\hat{\mathbf{n}};+\rangle$ dado por

$$|\hat{\mathbf{n}};+\rangle = \cos\frac{\beta}{2}|+\rangle + e^{\mathrm{i}\alpha}\sin\frac{\beta}{2}|-\rangle$$

donde β y α son los ángulos polar y azimutal que definen a $\hat{\mathbf{n}}$, respectivamente.

3. Evalúa el producto de incertidumbre $x - p$, $\langle(\Delta x)^2\rangle\langle(\Delta p)^2\rangle$ para una partícula unidimensional confinada entre dos paredes rígidas. Hazlo para el estado base y los estados excitados

4. Considera un espacio ket tridimensional. Si un cierto conjunto de kets ortonormales (digamos $|1\rangle$, $|2\rangle$ y $|3\rangle$) son usados como una base de kets, los operadores A y B están representados por

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}$$

y

$$B = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i}b \\ 0 & \mathrm{i}b & 0 \end{pmatrix}$$

con a y b reales.
a) A exhibe un espectro degenerado. ¿B también?
b) Muestra que A y B conmutan.
c) Encuentra un nuevo conjunto de kets ortonormales que son eigenkets simultaneamnete para A y B. Especifíca los autovalores de cada uno de los eigenkets.

5. a) Verifica

$$[x_i, G(\mathbf{p})] = \mathrm{i}\hbar \frac{\partial G}{\partial p_i}, \qquad [p_i, F(\mathbf{x})] = -\mathrm{i}\hbar \frac{\partial F}{\partial x_i}$$

b) Evalúa $[x^2, p^2]$.