Mecánica Cuántica. Tarea 10

Grupo CO11 Trimestre 21-I
Profesor: Miguel Angel Bastarrachea Magnani
Ayudante: Yoshua Chávez Bolaños,
Fecha: Miércoles 2 de junio de 2021.
Fecha de entrega: Miércoles 9 de junio de 2021.

1. Considera un problema de dos niveles sujeto a un potencial sinosoidal dependiente del tiempo

$$H_0 = E_1 |1\rangle \langle 1| + E_2 |2\rangle \langle 2|$$

$$V = \gamma e^{i\omega t} |1\rangle \langle 2| + \gamma e^{-i\omega t} |2\rangle \langle 1|$$

Demuestre la fórmula de Rabi

$$|C_2(t)|^2 = \frac{4\Gamma^2}{4\Gamma^2 + (\omega - \omega_{21})^2} \sin^2\{[4\Gamma^2 + (\omega - \omega_{21})^2]^{1/2} \frac{t}{2}\}$$

con $\hbar\omega_{21} = E_2 - E_1$.

2. Un oscilador armónico unidimensional se encuentra en el estado base para $t > 0$. Para $t \geq 0$ se sujeta a una fuerza en la dirección $\hat{x}$ espacialmente uniforme pero dependiente del tiempo, de la forma

$$F(t) = F_0 e^{-t/\tau}$$

   (a) Usado la teoría de perturbaciones dependiente del tiempo a primer orden, obtén la probabilidad de encontrar al oscilador en el primer estado para $t > 0$. Muestra que para $t \to \infty$ (con τ finita) la expresión es dependiente del tiempo. ¿Es este resultado razonable o no?

   (b) ¿Es posible encontrar al oscilador en estados excitados superiores?

3. El formalismo Lippmann-Schwinger puede aplicarse también a un problema unidimensional de transmisión-reflexión con un potencial de alcance finito, $V(x) \neq 0$ para $0 < |x| < a$.

   (a) Supongamos que tenemos una onda incidente llegando desde la izquierda: $\langle x|\phi\rangle = e^{ikx}/\sqrt{2\pi}$. ¿Cómo podemos manejar el operador $1/(E - H_0)$ si tenemos una onda transmitida solo para $x > a$ y una onda reflejada y la onda original para $x < -a$? ¿es la prescripción $E \to E + i\epsilon$ aún correcta? Obtén una expresión para la función de Green apropiada y escribe una ecuación integral para $\langle x|\psi^{(+)}\rangle$.

   (b) Considera el caso especial para un potencial función-δ atractivo

$$V = -\frac{\gamma\hbar^2}{2m}\delta(x)$$

   con $\gamma > 0$. Resuelve la ecuación integral para obtener las amplitudes de transición y reflexión.

(c) El potencial función-δ unidimensional con $\gamma > 0$ admite un y sólo un estado ligado para cualquier valor de γ. Muestra que las amplitudes de reflexión y transmisión que calculaste tienen polos (estados ligados) en la posición esperada cuando k se toma como una variable compleja.

4. Demuestra

$$\sigma_{tot} \simeq \frac{m^2}{\pi\hbar^4}\int d^3x \int d^3x' V(r)V(r')\frac{\sin^2 k|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{k^2|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2}$$

de las siguientes maneras:

(a) Integrando la sección transversal diferencial calculada usando la aproximación de Born a primer orden.

(b) Aplicando el teorema óptico a la amplitud de esparcimiento adelante (*forward-scattering*) en la aproximación de Born a segundo orden. [Note que $f(0)$ es real y se usa la aproximación de Born a primer orden.]

5. Considera el potencial

$$V = 0, r > R, \qquad\qquad V = V_0, r < R$$

donde V_0 puede ser positivo o negativo. Usando el método de ondas parciales, muestra que para $|V_0| \ll E = \hbar^2k^2/2m$ y $kR \gg 1$ la sección diferencial transversal es isotrópica y la sección transversal total está dada por

$$\sigma_{tot} = \frac{16\pi}{9}\frac{m^2V_0^2R^6}{\hbar^4}$$

suponga que la energía se eleva ligeramente. Muestra que la distribución angular puede ser escrita como

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = A + B\cos\theta$$

Obtén una expresión aproximada para B/A.