Mecánica Cuántica. Tarea 6*†

José Emmanuel Flores Calderón

Fecha: 12/05/2021.

1. Considera una matriz 2×2 definida por

$$U = \frac{a_0 + i\sigma \cdot \mathbf{a}}{a_0 - i\sigma \cdot \mathbf{a}}$$

donde a_0 es un número real y $\mathbf{a}$ es un vector tridimensional con componentes reales.

(a) Demuestra que U es unitario y unimodular ($\det U = \pm 1$).

(b) En general, una matriz unimodular unitaria 2×2 representa una rotación en 3 dimensiones. Encuentra el eje y el ángulo de rotación apropiado para U en términos de a_0, a_1, a_2 y a_3.

Solución.

(a) Sea $X = a_0 + i\sigma \cdot \mathbf{a}$ y $Y = X^\dagger = a_0 - i\sigma \cdot \mathbf{a}$, entonces

$$U = XY^{-1}.$$

Para ver que es unitario, tenemos que probar que

$$UU^\dagger = 1,$$

entonces

$$UU^\dagger = XY^{-1}\left(XY^{-1}\right)^\dagger = X\left(X^\dagger\right)^{-1}\left(X^{-1}\right)^\dagger X^\dagger = X\left(XX^\dagger\right)^{-1} X^\dagger.$$

Ahora bien, calculemos $a_0 + i\sigma \cdot \mathbf{a}$. Sea $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, donde σ_i son las matrices de Pauli, las cuales están dadas por

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

por lo tanto

$$X = a_0 + i\sigma \cdot \mathbf{a} = a_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + ia_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + ia_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + ia_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\implies X = \begin{pmatrix} a_0 + ia_3 & a_2 + ia_1 \\ -a_2 + ia_1 & a_0 - ia_3 \end{pmatrix}. \tag{0.1}$$

Por otra parte tenemos que

$$Y = a_0 - i\sigma \cdot \mathbf{a} = a_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - ia_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - ia_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - ia_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\implies Y = a_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - a_1 \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} - a_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - a_3 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \tag{0.2}$$

*Grupo C011 | Trimestre 21-1

†Profesor: Miguel Angel Bastarrachea Magnani | Ayudante: Yoshua Chávez Bolaños

o bien

$$Y = X^{\dagger} = \begin{pmatrix} a_0 - ia_3 & -a_2 - ia_1 \\ a_2 - ia_1 & a_0 + ia_3 \end{pmatrix}.$$

Para el producto $XX^{\dagger}$, tenemos que

$$XX^{\dagger} = \begin{pmatrix} a_0 + ia_3 & a_2 + ia_1 \\ -a_2 + ia_1 & a_0 - ia_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 - ia_3 & -a_2 - ia_1 \\ a_2 - ia_1 & a_0 + ia_3 \end{pmatrix} = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2,$$

entonces

$$\left(XX^{\dagger}\right)^{-1} = \frac{1}{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2},$$

con lo cual, tenemos que

$$UU^{\dagger} = X\left(XX^{\dagger}\right)^{-1} X^{\dagger} = \frac{1}{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} XX^{\dagger} = \frac{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = 1$$

$$\therefore UU^{\dagger} = 1$$

(b) Ahora bien, sabemos que una rotación general se puede escribir como

$$\exp\left[-i\frac{\sigma \cdot \mathbf{n}}{2}\phi\right] = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - in_z \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) & \left(-in_x - n_y\right)\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \\ \left(-in_x + n_y\right)\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + in_z \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \end{pmatrix}, \tag{0.3}$$

por otra parte, la representación mas general para matrice unimodulares esta dada por

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^{*} & a^{*} \end{pmatrix} \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

Si comparamos las últimas dos expresiones, tenemos que

$$\text{Re}\,(a) = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right), \;\; \text{Im}\,(a) = n_z \sin\left(\frac{\phi}{2}\right), \tag{0.4}$$

$$\text{Re}\,(b) = -n_y \sin\left(\frac{\phi}{2}\right), \;\; \text{Im}\,(b) = -n_x \sin\left(\frac{\phi}{2}\right). \tag{0.5}$$

En nuestro caso, tenemos que U esta dada por

$$U = X\left(X^{\dagger}\right)^{-1} = \frac{1}{\det\left(X^{\dagger}\right)} XX^{\star},$$

donde

$$X^{\star} = \begin{pmatrix} a_0 + ia_3 & a_2 + ia_1 \\ -a_2 + ia_1 & a_0 - ia_3 \end{pmatrix}, \quad \det\left(X^{\dagger}\right) = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

entonces

$$U = \frac{1}{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \begin{pmatrix} a_0 + ia_3 & a_2 + ia_1 \\ -a_2 + ia_1 & a_0 - ia_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 + ia_3 & a_2 + ia_1 \\ -a_2 + ia_1 & a_0 - ia_3 \end{pmatrix},$$

$$\Longrightarrow U = \frac{1}{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \begin{pmatrix} a_0 + ia_3 & a_2 + ia_1 \\ -a_2 + ia_1 & a_0 - ia_3 \end{pmatrix}^2,$$

$$\Longrightarrow U = \frac{1}{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \begin{pmatrix} a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 + 2ia_0a_3 & 2a_0a_2 + 2ia_0a_1 \\ -2a_0a_2 + 2ia_0a_1 & a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 - 2ia_0a_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b^{*} & a^{*} \end{pmatrix}.$$

donde

$$\alpha^2 = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2,$$

$$a = a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 + 2ia_0a_3 \quad \& \quad b = 2a_0a_2 + 2ia_0a_1,$$

de manera que si usamos las relacione dadas en (0.4) y (0.5), tenemos

$$\mathrm{Re}\,(a) = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \implies \frac{a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2}{\alpha^2} = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

$$\implies \phi = 2\cos^{-1}\left(\frac{a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2}{\alpha^2}\right).$$

Por otra parte $\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1$, de manera que

$$\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right)} = \sqrt{1 - \frac{a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2}{\alpha^2}}$$

$$\implies \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) = \sqrt{\frac{2a_0^2}{\alpha^2}} = \sqrt{2}\frac{a_0}{\alpha}.$$

Con lo cual tenemos las componentes del vector unitario n_x, n_y y n_z

$$n_x = -\frac{\mathrm{Im}\,(b)}{\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)} \implies n_x = -\frac{2a_0a_1}{\sqrt{2}\frac{a_0}{\alpha}} = -\sqrt{2}\alpha a_1$$

$$\implies n_x = -\sqrt{2}\alpha a_1,$$

para n_y se tiene

$$n_y = -\frac{\mathrm{Re}\,(b)}{\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)} = -\frac{2a_0a_2}{\sqrt{2}\frac{a_0}{\alpha}},$$

$$\implies n_y = -\sqrt{2}\alpha a_2.$$

Finalmente, para n_z

$$n_z = \frac{\mathrm{Im}\,(a)}{\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)} = \frac{2a_0a_3}{\sqrt{2}\frac{a_0}{\alpha}},$$

$$\implies n_z = \sqrt{2}\alpha a_3.$$

Por lo tanto el ángulo sobre el cual es rotado esta dado por

$$\phi = 2\cos^{-1}\left(\frac{a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2}{\alpha^2}\right),$$

y el vector unitario es

$$\mathbf{n} = \left(n_x, n_y, n_z\right) = \left(-\sqrt{2}\alpha a_1, -\sqrt{2}\alpha a_2, \sqrt{2}\alpha a_3\right)$$

2. Conidera una partícula de espín 1. Evalua los elementos de matriz

$$S_z\left(S_z + \hbar\right)\left(S_z - \hbar\right) \quad \& \quad S_x\left(S_x + \hbar\right)\left(S_x - \hbar\right).$$

Solución.

Sabemos que para partículas de espín 1, las representaciones matriciales de S_x, S_z estan dadas por

$$S_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, S_z = \hbar\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

de manera que para el primer producto tenemos que

$$S_z\left(S_z+\hbar\right)\left(S_z-\hbar\right)=h^3\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

$$\implies S_z\left(S_z+\hbar\right)\left(S_z-\hbar\right)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Mientras que para el segundo se tiene

$$S_x\left(S_x+\hbar\right)\left(S_x-\hbar\right)=\left(\frac{\hbar}{\sqrt{2}}\right)^3\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2}&1&0\\1&\sqrt{2}&1\\0&1&\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\sqrt{2}&1&0\\1&-\sqrt{2}&1\\0&1&-\sqrt{2}\end{pmatrix},$$

$$\implies S_x\left(S_x+\hbar\right)\left(S_x-\hbar\right)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

3. Considera una secuencia de rotaciones de Euler representadas por

$$A=\exp[-i\frac{\sigma_3\alpha}{2}]\exp[-i\frac{\sigma_2\beta}{2}]\exp[-i\frac{\sigma_3\gamma}{2}]=\begin{pmatrix}\exp\left[-i\left(\alpha+\gamma\right)/2\right]\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)&-\exp\left[-i\left(\alpha-\gamma\right)/2\right]\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\\\exp\left[i\left(\alpha+\gamma\right)/2\right]\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)&\exp\left[i\left(\alpha+\gamma\right)/2\right]\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\end{pmatrix}.$$

Debido al grupo de propiedades de rotación, esperamos que esta secuencia de operaciones sea equivalente a una única rotación alrededor de uno de los ejes por un ángulo θ. encuentra θ.

Solución.

Este problema tiene la misma estrutura que el inciso b del problema 1. Sabemos que una rotación en general esta dada por (0.3), de manera que queremos que se cumpla

$$\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)-in_z\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)&\left(-in_x-n_y\right)\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\\\left(-in_x+n_y\right)\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)&\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)+in_z\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\exp\left[-i\left(\alpha+\gamma\right)/2\right]\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)&-\exp\left[-i\left(\alpha-\gamma\right)/2\right]\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\\\exp\left[i\left(\alpha+\gamma\right)/2\right]\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)&\exp\left[i\left(\alpha+\gamma\right)/2\right]\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\end{pmatrix}$$

Si igualamos la parte real de la componente $(1,1)$ de las matrices anteriores, tenemos que

$$\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\implies\frac{\phi}{2}=\cos^{-1}\left(\cos\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\right)$$

$$\therefore\phi=2\cos^{-1}\left(\cos\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\right)$$

4. Un eigenestado de momento angular $|i,m=m_{max}=j\rangle$ se rota un ángulo infinitesimal ϵ alrededor del eje y. Sin usar la forma explícita de la función $d^{(j)}_{m,n}$,obten una expresión para la probabilidad de que el nuevo estado se encuentre en el esyado original hasta términos de orden ϵ^2.

Solución.

Una rotacion alrededor del eje y se representa por

$$\mathcal{D}_y\left(\phi\right)=\exp\left(-i\frac{J_y}{\hbar}\phi\right).$$

Si ahora hacemos una rotacion infinitesimal ϵ, esto nos permite representar a la exponencial como una serie de potencias, de manera que

$$\mathcal{D}_y\left(\epsilon\right)=\exp\left(-i\frac{J_y}{\hbar}\epsilon\right)\approx1-\frac{iJ_y\epsilon}{\hbar}+\frac{J_y^2\epsilon^2}{2\hbar^2}+\cdots.$$

Si truncamos la serie hasta terminos de orden 2 en ϵ, tenemos que

$$\mathcal{D}_y(\epsilon) \approx 1 - \frac{iJ_y\epsilon}{\hbar} + \frac{J_y^2\epsilon^2}{2\hbar^2}.$$

Ahora bien, para el valor esperado, tenemos que

$$\left\langle \mathcal{D}_y(\epsilon) \right\rangle_{m=m_{max}} = \left\langle i,j \right| \left(1 - \frac{iJ_y\epsilon}{\hbar} + \frac{J_y^2\epsilon^2}{2\hbar^2} \right) \left| i,j \right\rangle,$$

pero recordemos que $J_y = (J_+ - J_-)/2i$, de manera que

$$\left\langle \mathcal{D}_y(\epsilon) \right\rangle_{m=m_{max}} = \left\langle i,j \middle| 1 - \frac{i\epsilon}{\hbar}\frac{1}{2i}(J_+ - J_-) + \frac{\epsilon^2}{2\hbar^2}\frac{1}{4i^2}(J_+ - J_-)^2 \middle| i,j \right\rangle$$

$$\implies \left\langle \mathcal{D}_y(\epsilon) \right\rangle_{m=m_{max}} = \langle i,j|i,j\rangle + \left\langle i,j \middle| -\frac{\epsilon}{\hbar}\frac{1}{2}(J_+ - J_-) - \frac{\epsilon^2}{8\hbar}(J_+ - J_-)^2 \middle| i,j \right\rangle$$

$$\implies \left\langle \mathcal{D}_y(\epsilon) \right\rangle_{m=m_{max}} = 1 + \left\langle i,j \middle| -\frac{\epsilon}{\hbar}\frac{1}{2}(J_+ - J_-) + \frac{\epsilon^2}{8\hbar}(J_+ - J_-)^2 \middle| i,j \right\rangle,$$

de la expresón anterior, el para los terminos J_+ tenemos que ya no pudimos subir más el ket, ya estamos en el máxmio valor posible, de manera que el valor esperado este operador es cero. Por otra parte, al calcular el valor esperado de $-J$, tenemos que el efecto de este operador sobre un ket es el de «bajarlo», de manera que al hacer el producto interno con un ket superior (el cual era antes de el efecto de J_-) nos da cero. De manera que

$$\left\langle \mathcal{D}_y(\epsilon) \right\rangle_{m=m_{max}} = 1 + \frac{\epsilon^2}{8\hbar}\left\langle i,j \right| (J_+ - J_-)^2 \left| i,j \right\rangle$$

$$\left\langle \mathcal{D}_y(\epsilon) \right\rangle_{m=m_{max}} = 1 + \frac{\epsilon^2}{8\hbar}\left\langle i,j \middle| J_+^2 - J_+J_- - J_-J_+ + J_-^2 \middle| i,j \right\rangle.$$

Nuevamente, de la expresión anterior los terminos de J_+^2, J_-^2 se anulan por las propiedades de ortogonalidad de los kets y el término J_-J_+ justamente porque no podemos subir más el ket. Por lo tanto

$$\left\langle \mathcal{D}_y(\epsilon) \right\rangle_{m=m_{max}} = 1 - \frac{\epsilon^2}{8\hbar}\langle i,j|J_+J_-|i,j\rangle,$$

$$\implies \left\langle \mathcal{D}_y(\epsilon) \right\rangle_{m=m_{max}} = 1 - \frac{\epsilon^2}{8\hbar}\sqrt{2j\hbar}\sqrt{2j\hbar} = 1 - \frac{\epsilon^2}{4}\hbar$$

$$\therefore \left\langle \mathcal{D}_y(\epsilon) \right\rangle_{m=m_{max}} = 1 - \frac{\epsilon^2}{4}j$$

5. Prueba que

   (a) Si el momento angular cumple con $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, entonces

   $$[\pi, \mathbf{L}] = 0.$$

   (b) Si $[J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k$ se quiere preservar, entonces $\Theta\mathbf{L}\Theta^{-1} = -\mathbf{L}$, donde Θ es el operador de inversión temporal.

Solución.

(a) Por definición

$$[\pi, \mathbf{L}] = [\pi, \mathbf{r} \times \mathbf{p}] = \pi\mathbf{r} \times \mathbf{p} - \mathbf{r} \times \mathbf{p}\pi$$
$$\implies [\pi, \mathbf{L}] = \pi\mathbf{r} \times \mathbf{p} - \mathbf{r} \times \mathbf{p}\pi,$$

pero sabemos que $\mathbf{r}\pi = -\pi\mathbf{r}$ y que $\mathbf{p}\pi = -\pi\mathbf{p}$, entonces

$$[\pi, \mathbf{L}] = -\mathbf{r}\pi \times \mathbf{p} - \mathbf{r} \times (-\pi\mathbf{p}) = -\mathbf{r} \times \pi\mathbf{p} - \mathbf{r}\pi \times (-\mathbf{p}),$$
$$\implies [\pi, \mathbf{L}] = -\mathbf{r} \times \pi\mathbf{p} - \mathbf{r}\pi \times (-\mathbf{p}) = -\mathbf{r} \times -\mathbf{p}\pi - (-\pi\mathbf{r}) \times (-\mathbf{p}),$$
$$\implies [\pi, \mathbf{L}] = \mathbf{r} \times \mathbf{p}\pi - \pi\mathbf{r} \times \mathbf{p} = -[\pi, \mathbf{L}],$$
$$\implies [\pi, \mathbf{L}] = -[\pi, \mathbf{L}] \implies [\pi, \mathbf{L}] = 0.$$