Mecánica Cuántica. Tarea 10*†

José Emmanuel Flores Calderón

Fecha: 09/06/2021.

1. Considera un problema de dos niveles sujeto a un potencial sinosoidal dependiente del tiempo

$$H_0 = E_1|1\rangle\langle 1| + E_2|2\rangle\langle 2|,$$

$$V = \gamma \exp(i\omega t)\,|1\rangle\langle 2| + \gamma \exp(-i\omega t)\,|2\rangle\langle 1|.$$

Demuestre la fórmula de Rabi

$$|c_2(t)|^2 = \frac{4\Gamma^2}{4\Gamma^2 + (\omega - \omega_{21})} \sin^2\left\{\left[4\Gamma^2 + (\omega-\omega_{21})^2\right]^{1/2} \frac{t}{2}\right\},$$

con $\hbar\omega_{21} = E_2 - E_1$.

Solución.

El problema que queremos resolver viene dado por

$$i\hbar \begin{pmatrix} \dot{c_1} \\ \dot{c_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12}e^{i\omega_{12}t} \\ V_{21}e^{i\omega_{21}t} & V_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \tag{0.1}$$

en nuestro caso, tenemos que

$$V_{12} = V_{21}^* = \gamma e^{i\omega t} \quad \& \quad V_{11} = V_{22} = 0.$$

Con lo cual , la ecuación (0.1), se transforma en

$$i\hbar \begin{pmatrix} \dot{c_1} \\ \dot{c_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma e^{i\omega t}e^{i\omega_{12}t} \\ \gamma e^{-i\omega t}e^{i\omega_{21}t} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Ahora bien, si consideramos que

$$c_1(0) = 1 \quad \& \quad c_2(0) = 0.$$

2. Un oscilador armónico unidimensional se encuentra en el estado base para $t > 0$. Para $t \geq 0$ se sujeta a una fuerza en la dirección $\hat{x}$ espacialmente uniforme pero dependiente del tiempo, de la forma

$$F(t) = F_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

   (a) Usado la teoría de perturbaciones dependiente del tiempo a primer orden, obtén la probabilidad de encontrar al oscilador en el primer estado para $t > 0$. Muestra que para $t \to \infty$ (con τ finita) la expresión es dependiente del tiempo. ¿Es este resultado razonable o no?

   (b) ¿Es posible encontrar al oscilador en estados excitados superiores?

Solución.

*Grupo C011 | Trimestre 21-1

†Profesor: Miguel Angel Bastarrachea Magnani | Ayudante: Yoshua Chávez Bolaños

(a) De manera general, la transición de probabilidad de $|i\rangle \to |n\rangle$, con $n \neq i$ viene dada por

$$P\left(i \to n\right) = \left|c_n^{(1)}\left(t\right) + c_n^{(2)}\left(t\right) + \dots\right|^2.$$

Ahora bien, considerando la transición $|0\rangle \to |n\rangle$, tenemos que

$$P\left(0 \to n\right) = \left|c_n^{(1)}\left(t\right)\right|^2,$$

a primer orden, donde $c_n^{(1)}$ viene dado por

$$c_n^{(1)}\left(t\right) = \frac{-i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} e^{i\omega_{ni}t'} V_{ni}\left(t'\right) dt'.$$

En nuestro caso, tenemos que

$$V\left(x,t\right) = -F_0 x e^{-t/\tau},$$

cuando $t \geq 0$ y cero cuando $t < 0$. De manera que

$$c_n^{(1)} = \frac{i}{\hbar}\int_0^t e^{i(E_n - E_0)t'/\hbar}\langle n|F_0 x e^{-t'/\tau}|0\rangle = \frac{i}{\hbar}F_0\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}\delta_{n1}\int_0^t e^{i\omega_0 t'}e^{-t'/\tau}dt',$$

de manera que

$$c_n^{(1)} = \frac{i}{\hbar}F_0\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}\frac{e^{(i\omega_0 - 1/\tau)t} - 1}{i\omega_0 - 1/\tau},$$

y $c_n^{(1)} = 0$ para $n \geq 2$. Por lo tanto, se tiene que

$$\left|c_n^{(1)}\right|^2 = \frac{F_0^2}{2m\omega_0}\frac{e^{-2t\tau} - 2e^{-t\tau}\cos\omega_0 t + 1}{\omega_0^2 + 1/\tau^2} \to \frac{1}{2m\omega_0}\frac{F_0^2\tau^2}{1 + \omega_0^2\tau^2},$$

cuando $t \to \infty$.

3. El formalismo Lippmann-Schwinger puede aplicarse también a un problema unidimensional de transmisión-reflexión con un potencial de alcance finito, $V\left(x\right) \neq 0$ para $0 < |x| < a$.

   (a) Supongamos que tenemos una onda incidente llegando desde la izquierda: $\langle x|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(ikx\right)$. ¿Cómo podemos manejar el operador $1/\left(E - H_0\right)$ si tenemos una onda transmitida solo para $x > a$ y una onda reflejada y la onda original para $x < -a$? ¿es la prescripción $E \to E + i\epsilon$ aún correcta? Obtén una expresión para la función de Green apropiada y escribe una ecuación integral para $\langle x|\psi^{(+)}\rangle$.

   (b) Considera el caso especial para un potencial función-δ atractivo

   $$V = -\frac{\gamma\hbar^2}{2m}\delta\left(x\right)$$

   $\gamma > 0$. Resuelve la ecuación integral para obtener las amplitudes de transición y reflexión.

   (c) El potencial función-δ unidimensional con $\gamma > 0$ admite un y sólo un estado ligado para cualquier valor de γ. Muestra que las amplitudes de reflexión y transmisión que calculaste tienen polos (estados ligados) en la posición esperada cuando k se toma como una variable compleja.

Solución.

(a) Para este problema, lo que tenemos que hacer es resolver la ecuación de Lippman-Schwinger, la cual esta dada por

$$\langle \mathbf{x}|\psi^{(\pm)}\rangle = \langle \mathbf{x}|i\rangle + \int d^3x' \left\langle \mathbf{x}|\frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon}|\mathbf{x}'\right\rangle \langle \mathbf{x}'|V|\psi^{(\pm)}\rangle.$$

Consideremos solo el caso de «scattering forward in time», es decir $\langle \mathbf{x}|\psi^{(+)}\rangle$, y hagamos

$$\psi^{+}(x) = \langle \mathbf{x}|\psi^{(+)}\rangle,$$

con lo cual, se tiene (ya que estamos en 1D)

$$\psi^{+}(x) = \phi(x) + \int dx' \left\langle x|\frac{1}{E-H_0+i\epsilon}|x'\right\rangle \langle x'|V|\psi^{(\pm)}\rangle,$$

donde $\phi(x) = \langle x|i\rangle$, el cual nos fue dado y tiene por expresión

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(ikx),$$

por otra parte, para la integral se tiene que

$$\int dx' \left\langle x|\frac{1}{E-H_0\pm i\epsilon}|x'\right\rangle \langle x'|V|\psi^{(\pm)}\rangle = \frac{2m}{\hbar^2}\int dx' G^{(+)}(x,x')\,V(x')\,\psi^{(\pm)}(x'),$$

donde

$$G^{(+)}(x,x') = \frac{\hbar^2}{2m}\langle x|\frac{1}{E-H_0+i\epsilon}|x'\rangle, \tag{0.2}$$

y con lo cual

$$\psi^{+}(x) = \phi(x) + \frac{2m}{\hbar^2}\int dx' G^{(+)}(x,x')\,V(x')\,\psi^{(\pm)}(x'). \tag{0.3}$$

Ahora bien, para hallar a $G^{(+)}(x,x')$, usemos la definición dada en la ecuación (0.2) e introduzcamos la base de momento

$$G^{(+)}(x,x') = \frac{\hbar^2}{2m}\langle x|\frac{1}{E-H_0+i\epsilon}|x'\rangle = \frac{\hbar^2}{2m}\int dp\int dp'\langle x|p\rangle\langle p|\frac{1}{E-H_0+i\epsilon}|p'\rangle\langle p'|x'\rangle,$$

$$\implies G^{(+)}(x,x') = \frac{\hbar^2}{2m}\int dp\int dp'\langle x|p\rangle\langle p|\frac{1}{E-H_0+i\epsilon}|p'\rangle\langle p'|x'\rangle,$$

pero para $\langle x|p\rangle$ y $\langle p'|x'\rangle$, tenemos

$$\langle x|p\rangle = \frac{\exp\left(\frac{ipx}{\hbar}\right)}{\sqrt{2\pi\hbar}} \quad \& \quad \langle p'|x'\rangle = \frac{\exp\left(-\frac{ip'x'}{\hbar}\right)}{\sqrt{2\pi\hbar}},$$

$$G^{(+)}(x,x') = \frac{\hbar^2}{2m}\int dp\int dp'\frac{\exp\left(\frac{ipx}{\hbar}\right)}{\sqrt{2\pi\hbar}}\langle p|\frac{1}{E-H_0+i\epsilon}|p'\rangle\frac{\exp\left(-\frac{ip'x'}{\hbar}\right)}{\sqrt{2\pi\hbar}},$$

mientras que para $\langle p|\frac{1}{E-H_0+i\epsilon}|p'\rangle$ se tiene que

$$\langle p|\frac{1}{E-H_0+i\epsilon}|p'\rangle = \frac{\langle p|p'\rangle}{E-(p')^2/2m+i\epsilon},$$

de manera que

$$G^{(+)}(x,x') = \frac{\hbar^2}{2m}\int dp\int dp'\frac{\exp\left(\frac{ipx}{\hbar}\right)}{\sqrt{2\pi\hbar}}\frac{\langle p|p'\rangle}{E-(p')^2/2m+i\epsilon}\frac{\exp\left(-\frac{ip'x'}{\hbar}\right)}{\sqrt{2\pi\hbar}},$$

pero el factor $\langle p|p'\rangle$ colapsa una integral, con lo cual

$$\implies G^{(+)}(x,x') = \frac{1}{2\pi\hbar}\frac{\hbar^2}{2m}\int dp\frac{1}{E-(p')^2/2m+i\epsilon}\exp\left[\frac{ip}{\hbar}(x-x')\right],$$

si ahora recordamos que $E = \hbar^2 k^2/2m$ y hacemos las definiciones $p = \hbar q$ junto con $q_0 = k(1+i\epsilon)$, tenemos que

$$G^{(+)}\left(x,x'\right) = \frac{1}{2\pi\hbar}\frac{\hbar^2}{2m}\int dq \frac{1}{\left(q-q_0\right)\left(q+q_0\right)} \exp\left[iq\left(x-x'\right)\right].$$

Ahora bien, para evaluar la integral anterior, una posible configuración es hacerla sobre un contorno semi infinito sobre el plano complejo. Para $x > x'$, consideremos la parte superior del plano y cerremos el contorno con un semicirculo orientado en la dirección contraria a las manercillas del reloj, lo cual nos da un polo simple en $q = q_0$. Mientras que para $x < x'$ consideramos un semicirculo en el plano inferior orientado en la dirección de las manecillas del reloj, lo cual nos da un polo simple en $q = -q_0$. Usando el teorema del residuo, tenemos que para $x > x'$

$$G^{(+)}\left(x,x'\right) = -\frac{1}{2\pi}\left(2\pi i\right)\frac{\exp\left[ik\left(x-x'\right)\right]}{k+k} = \frac{1}{2ik}\exp\left[ik\left(x-x'\right)\right],$$

$$\implies G^{(+)}\left(x,x'\right) = \frac{1}{2ik}\exp\left[ik\left(x-x'\right)\right],$$

mientras que para $x < x'$, se tiene

$$G^{(+)}\left(x,x'\right) = -\frac{1}{2\pi}\left(-2\pi i\right)\frac{\exp\left[-ik\left(x-x'\right)\right]}{-k-k} = \frac{1}{2ik}\exp\left[-ik\left(x-x'\right)\right],$$

$$\implies G^{(+)}\left(x,x'\right) = \frac{1}{2ik}\exp\left[-ik\left(x-x'\right)\right]$$

.

(b) Ahora bien, si consideramos al potencial V dado por

$$V(x) = -\frac{\gamma\hbar^2}{2m}\delta(x),$$

tenemos que, de la ecuación (0.3)

$$\psi(x) = \phi(x) + \frac{2m}{\hbar^2}\int dx' G\left(x,x'\right)\left(-\frac{\gamma\hbar^2}{2m}\delta\left(x'\right)\right)\psi\left(x'\right) =,$$

$$\implies \psi(x) = \phi(x) - \gamma\int dx' G\left(x,x'\right)\delta\left(x'\right)\psi\left(x'\right),$$

$$\implies \psi(x) = \phi(x) - \gamma G(x,0)\,\psi(0),$$

pero dado que

$$G(0,0) = \frac{1}{2ik},$$

se tiene como consecuencia

$$\psi(0) = \phi(0) - \gamma G(0,0)\,\psi(0) = \phi(0) - \gamma\frac{1}{2ik}\psi(0),$$

entonces

$$\psi(0) = \frac{\phi(0)}{1+\gamma/2ik},$$

con lo cual, para $x > 0$ se tiene que

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\exp(ikx) - \frac{\gamma}{2ik+\gamma}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2ik}{2ik+\gamma}\exp(ikx),$$

mientras que para $x < 0$, tenemos que

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\exp(ikx) - \frac{\gamma}{2ik+\gamma}\exp(-ikx)\right].$$

De manera que

$$T(k) = \frac{2ik}{2ik+\gamma} \quad \& \quad R(k) = \frac{-\gamma}{2ik+\gamma}.$$

(c) Por otra parte, la energía del único estado ligado para el potencial V dado es

$$E = \frac{-m\nu_0^2}{2\hbar^2},$$

donde $\nu_0 = -\frac{\gamma\hbar^2}{2m}$, de manera que

$$E = \frac{-\hbar^2\gamma^2}{8m},$$

es decir

$$k = \frac{i\gamma}{2},$$

es decir, los polos de $T(k)$ y de $R(k)$.

4. Demuestra

$$\sigma_{tot} \simeq \frac{m^2}{\pi\hbar^4}\int d^3x \int d^3x' V(r)\, V(r') \frac{\sin^2 k\,|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{k^2\,|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2},$$

de las siguientes maneras:

(a) Integrando la sección transversal diferencial calculada usando la aproximación de Born a primer orden.

(b) Aplicando el teorema óptico a la amplitud de esparcimiento adelante (forward-scattering) en la aproximación de Born a segundo orden. [Note que $f(0)$ es real y se usa la aproximación de Born a primer orden.]

Solución.

(a) La aproximación de Born a primer orden nos dice que

$$\langle \mathbf{k}'|V|\psi^{(+)}\rangle = \langle \mathbf{k}'|T|\mathbf{k}\rangle \approx \langle \mathbf{k}'|V|\mathbf{k}\rangle,$$

por otra parte, sabemos que

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left|f(\mathbf{k}',\mathbf{k})\right|^2 \implies \sigma_{tot} = \int d\Omega_{\mathbf{k}'} \left|f(\mathbf{k}',\mathbf{k})\right|^2,$$

pero $f(\mathbf{k}',\mathbf{k})$, viene dado por

$$f(\mathbf{k}',\mathbf{k}) = \frac{-mL^3}{2\pi\hbar^2}\langle \mathbf{k}'|V|\psi^{(+)}\rangle \approx \frac{-mL^3}{2\pi\hbar^2}\langle \mathbf{k}'|V|\mathbf{k}\rangle,$$

donde hemos usado la aproximación a primer orden de Born. Entonces

$$\left|f(\mathbf{k}',\mathbf{k})\right|^2 \approx \left(\frac{mL^3}{2\pi\hbar^2}\right)^2 \langle \mathbf{k}'|V|\mathbf{k}\rangle\langle \mathbf{k}|V|\mathbf{k}'\rangle,$$

de manera que

$$\sigma_{tot} \approx \left(\frac{mL^3}{2\pi\hbar^2}\right)^2 \int d\Omega_{\mathbf{k}'}\langle \mathbf{k}'|V|\mathbf{k}\rangle\langle \mathbf{k}|V|\mathbf{k}'\rangle.$$

Si ahora introducimos la base de momento, tenemos que

$$\sigma_{tot} \approx \left(\frac{mL^3}{2\pi\hbar^2}\right)^2 \int\int\int d\Omega_{\mathbf{k}'}d^3x d^3x' \langle \mathbf{k}'|V|\mathbf{x}\rangle\langle \mathbf{x}|\mathbf{k}\rangle\langle \mathbf{k}|V|\mathbf{x}'\rangle\langle \mathbf{x}'|\mathbf{k}'\rangle,$$

$$\implies \sigma_{tot} \approx \left(\frac{mL^3}{2\pi\hbar^2}\right)^2 \int\int\int d\Omega_{\mathbf{k}'}d^3x d^3x' V(x)\, V(x')\, \langle \mathbf{k}'|\mathbf{x}\rangle\langle \mathbf{x}|\mathbf{k}\rangle\langle \mathbf{k}|\mathbf{x}'\rangle\langle \mathbf{x}'|\mathbf{k}'\rangle$$

usando que

$$\langle \mathbf{x}|\mathbf{k}\rangle = \frac{1}{L^{3/2}}\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) \quad \& \langle \mathbf{x}'|\mathbf{k}'\rangle = \frac{1}{L^{3/2}}\exp(i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}'),$$

$$\langle \mathbf{k}|\mathbf{x}'\rangle = \frac{1}{L^{3/2}} \exp\left(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'\right) \quad \&\langle \mathbf{k}'|\mathbf{x}\rangle = \frac{1}{L^{3/2}} \exp\left(-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}\right),$$

se tiene

$$\sigma_{tot} \approx \left(\frac{mL^3}{2\pi\hbar^2}\right)^2 \left(\frac{1}{L^3}\right)^2 \int\int\int d\Omega_{\mathbf{k}'} d^3x d^3x' V(x) V(x') \exp\left[i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\right] \exp\left[i\mathbf{k}'\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\right],$$

con lo cual, se tiene que

$$\sigma_{tot} \approx \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^2 \int\int\int d\Omega_{\mathbf{k}'} d^3x d^3x' V(x) V(x') \exp\left[i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\right] \exp\left[i\mathbf{k}'\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\right].$$

Para integrar la ecuación anterior, hacemos lo siguiente: ponemos $\hat{\mathbf{k}}'$ en la dirección de $\mathbf{x}-\mathbf{x}'$, con lo cual tenemos que

$$\hat{\mathbf{k}}'\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = k\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right|\cos\theta_{\mathbf{k}'},$$

con lo cual se tiene que

$$\int d\Omega_{\mathbf{k}'} \exp\left[-i\mathbf{k}'\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\right] = 2\pi \int_{-1}^{1} d\left(\cos\theta_{\mathbf{k}'}\right) \exp\left[-k\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right|\cos\theta_{\mathbf{k}'}\right],$$

$$\Longrightarrow \int d\Omega_{\mathbf{k}'} \exp\left[-i\mathbf{k}'\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\right] = 4\pi\frac{\sin\left(k\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right|\right)}{k\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right|}.$$

Por otra parte, podemos reducir la sección total de dispersiíon si tenemos simetria esférica. En este caso, cada una de las direcciones espaciales $\mathbf{x}-\mathbf{x}'$ contribuye de la misma forma en cada una de las dos integrales de posición. De forma tal que podemos hacer un promedio sobre todas las direcciones $\mathbf{k}$, haciendo

$$\frac{1}{4\pi}\int d\Omega_{\mathbf{k}'} \exp\left[-i\mathbf{k}'\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\right] = \frac{\sin\left(k\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right|\right)}{k\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right|},$$

lo cual nos conduce a

$$\sigma_{tot} \approx \frac{m^2}{\pi\hbar^4}\int d^3x \int d^3x' V(r) V(r') \frac{\sin^2 k\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right|}{k^2\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right|^2},$$

justo como se buscaba.

(b) Ahora bien, el teorema óptico nos dice que

$$Im f(\theta=0) = \mathrm{Im} f(\mathbf{k},\mathbf{k}) = \frac{k\sigma_{tot}}{4\pi},$$

$$\Longrightarrow \sigma_{tot} = \frac{4\pi}{k}\mathrm{Im} f(\mathbf{k},\mathbf{k}),$$

pero

$$f(\mathbf{k},\mathbf{k}) = -\frac{mL^3}{2\pi\hbar^2}\langle\mathbf{k}|V|\psi^{(+)}\rangle,$$

y junto con

$$\langle\mathbf{k}|V|\psi^{(+)}\rangle = \langle\mathbf{k}|T|\mathbf{k}\rangle,$$

de modo que

$$\sigma_{tot} = -\frac{4\pi}{k}\frac{mL^3}{2\pi\hbar^2}\mathrm{Im}\langle\mathbf{k}|T|\mathbf{k}\rangle,$$

$$\Longrightarrow \sigma_{tot} = -\frac{2mL^3}{\hbar^2 k}\mathrm{Im}\langle\mathbf{k}|T|\mathbf{k}\rangle.$$

Si ahora usamos la aproximación de Born a primer orden, tenemos que

$$\sigma_{tot} = -\frac{2mL^3}{\hbar^2 k}\mathrm{Im}\langle\mathbf{k}|V\frac{1}{E-H_0+i\epsilon}V|\mathbf{k}\rangle,$$

haciendo un procedimiento análogo an caso anterior, tenemos que

$$\Longrightarrow \sigma_{tot} = -\frac{2mL^3}{\hbar^2 k}\mathrm{Im}\int d^3x d^3x' \langle \mathbf{k}|x\rangle\langle x|V\frac{1}{E-H_0+i\epsilon}|\mathbf{x}'\rangle\langle\mathbf{x}'|V|\mathbf{k}\rangle,$$

$$\Longrightarrow \sigma_{tot} = -\frac{2mL^3}{\hbar^2 k}\mathrm{Im}\int d^3x d^3x' V\left(r\right)V\left(r'\right)\exp\left[-i\mathbf{k}\cdot\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right)\right]\frac{2m}{\hbar^2}G_+\left(\mathbf{x},\mathbf{x}'\right),$$

$$\Longrightarrow \sigma_{tot} = -\frac{4m^2}{\hbar^2 k}\mathrm{Im}\int d^3x d^3x' V\left(r\right)V\left(r'\right)\frac{\sin\left(k\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right|\right)}{k\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right|}\frac{\exp\left[k\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right|\right]}{4\pi\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right|},$$

$$\Longrightarrow \sigma_{tot} = \frac{m^2}{\hbar^2 k}\int d^3x d^3x' V\left(r\right)V\left(r'\right)\frac{\sin^2\left(k\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right|\right)}{k^2\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right|^2},$$

justo como se pedía.

5. Considera el potencial

$$V=0, r>R, \quad V=V_0, r<R$$

donde V_0 puede ser positivo o negativo. Usando el método de ondas parciales, muestra que para $|V_0| \ll E = \hbar^2k^2/2m$ y $kR \gg 1$ la sección diferencial transversal es isotrópica y la sección transversal total está dada por

$$\sigma_{tot} = \frac{16\pi}{9}\frac{m^2V_0^2R^6}{\hbar^4}.$$

Suponga que la energía se eleva ligeramente. Muestra que la distribución angular puede ser escrita como

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = A + B\cos\theta.$$

Obtén una expresión aproximada para B/A.

Solución.

Para este problema, necesitamos resolver la ecuación radial de Schrödinger, esto es

$$\frac{d^2u_l}{dr^2} + \left(k^2 - \frac{2m}{\hbar^2}V - \frac{l\left(l+1\right)}{r^2}\right)u_l = 0,$$

cuando $u_l\left(r\right) = rA_l\left(r\right)$ en la región $r \leq R$, donde $V = V_0$. Dado que $E - V_0 = \hbar^2\kappa^2/2m$, esto implica que

$$A_l\left(r\right) = j_l\left(r\right),$$

y esto a su vez, que la derivada logaritmica en $r = R$, sea

$$\beta_l = \frac{\kappa R j_l'\left(\kappa R\right)}{j_l\left(\kappa R\right)}.$$

Por otra parte, notemos que $|V_0| \ll E$, con lo cual $k \sim \kappa$ y $kR \ll 1$ implica que $\kappa R \ll 1$. Lo anterior significa que estamos expandiendo ambos al término mas bajo. Ahora bien, si usamos la siguiente identidad

$$f_l'\left(x\right) = \frac{l}{x}f_l\left(x\right) - f_{l+1}\left(x\right),$$

donde $f_l\left(x\right)$ es cualqueir función de Bessel, tenemos que la derivada logaritmica se convierte en

$$\beta_l = \frac{\kappa R}{j_l\left(\kappa R\right)}j_l'\left(\kappa R\right) = \frac{\kappa}{j_l\left(\kappa R\right)}\left[\frac{l}{\kappa R}j_l\left(\kappa R\right) - j_{l+1}\left(\kappa R\right)\right] = l - \kappa R\frac{j_{l+1}\left(\kappa R\right)}{j_l\left(\kappa R\right)},$$

mientras que

$$kRf_l'\left(kR\right) - \beta_l f_l\left(kR\right) = kR\left[\frac{l}{kR}f_l\left(kR\right) - f_{l+1}\left(kR\right)\right] - \left[l - \kappa R\frac{j_{l+1}\left(\kappa R\right)}{j_l\left(\kappa R\right)}\right]f_l\left(kR\right),$$

$$\implies kRf_l'(kR) - \beta_l f_l(kR) = \kappa R \frac{j_{l+1}(\kappa R)}{j_l(\kappa R)} f_l(\kappa R) - kRf_{l+1}(kR).$$

Ahora bien, hagamos

$$j_l(x) \approx \frac{x^l}{(2l+1)!!}, \quad x \ll 1,$$

lo cual implica que

$$\frac{j_{l+1}(\kappa R)}{j_l(\kappa R)} = \frac{\kappa R}{2l+3},$$

hasta el termino dominante. Por otra parte, sabemos que

$$n_l(x) = -\frac{(2l-1)!!}{x^{l+1}}, \quad x \ll 1,$$

de manera que el cambio de fase, dado por

$$\tan \delta_l = \frac{kRj_l'(kR) - \beta_l j_l(kR)}{kRn_l'(kR) - \beta_l n_l(kR)},$$

se convierte en

$$\tan \delta_l = \frac{(\kappa R)^2 j_l(kR) / (2l+3) - kRj_{l+1}(kR)}{(\kappa R)^2 n_l(kR) / (2l+3) - kRn_{l+1}(kR)},$$

$$\implies \tan \delta_l = \frac{(\kappa R)^2 (kR)^l / (2l+3)!! - (kR)^{l+2} / (2l+3)!!}{-(2l-1)!! (\kappa R)^2 / \left[(2l+3)(kR)^{l+1}\right] + (2l+1)!! / (kR)^{l+1}},$$

$$\implies \tan \delta_l \approx (kR)^{2l+1} \frac{(\kappa R)^2 - kR^2}{(2l+3)!!(2l+1)!!} = \frac{(kR)^{2l+3}}{(2l+3)!!(2l+1)!!} \left[\frac{\kappa^2}{k^2} - 1\right],$$

donde hemos ignorado el primer termino en el denominador para $kR \ll 1$. Como sabemos, el término dominante es $l = 0$, de manera que

$$\tan \delta_0 = \frac{1}{3}(kR)^3 \left[\frac{E - V_0}{E} - 1\right] = -\frac{1}{3}(kR)^3 \frac{V_0}{E} = -\frac{1}{3} k \frac{2mV_0 R^3}{\hbar^2} \approx \delta_0 \approx \sin \delta_0.$$

Mientras que para la seccción total de dispersión, tenemos que

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{k^2} \sin \delta_0 = \frac{16\pi}{9} \frac{m^2 V_0^2 R^6}{\hbar^4}.$$

El siguiente término más importante es cuando $l = 1$, esto es, cuando tenemos una onda-p, con el cambio de fase dado por

$$\tan \delta_1 = -\frac{1}{45}(kR)^5 \frac{V_0}{E} \approx \delta_1 \approx \sin \delta_1 \ll \sin \delta_0.$$

Con estas dos ondas, la sección de dispersion viene dada por

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{k^2} \left| e^{i\delta_0} \sin \delta_0 + 3e^{i\delta_1} \sin \delta_1 \cos \theta \right|^2 \approx \frac{1}{k^2} \left[\sin^2 \delta_0 + 6 \cos(\delta_0 - \delta_1) \sin \delta_0 \sin \delta_1 \cos \theta\right],$$

el cual es de la forma

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = A + B \cos \theta.$$

Pero, dado que $\delta_1 \ll \delta_0 \ll 1$, se tiene que $\cos(\delta_0 - \delta_1) \approx 1$, y con lo cual, tenemos que

$$\frac{B}{A} = \frac{6 \sin \delta_1}{\sin \delta_0} = \frac{6 \cdot 3}{45}(kR)^2 = \frac{2}{5}(kR)^2.$$