Mecánica Cuántica. Tarea 3

Grupo CO11 Trimestre 21-I
Profesor: Miguel Angel Bastarrachea Magnani
Ayudante: Yoshua Chávez Bolaños,
Fecha: Miércoles 14 de abril de 2021.
Fecha de entrega: Miércoles 21 de abril de 2021.

1. Considera una partícula en una dimensión cuyo Hamiltoniano está dado por

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

Calculando $[[H, x], x]$, pruebe que

$$\sum_{a'} |\langle a''| x |a'\rangle|^2 (E_{a'} - E_{a''}) = \frac{\hbar^2}{2m}$$

donde $|a'\rangle$ es un eigenket de energía con un eigenvalor $E_{a'}$.

2. Considera una partícula en 3 dimensiones cuyo Hamiltoniano está dado por

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{x})$$

Calcula $[\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}, H]$ para obtener

$$\frac{d}{dt}\langle \mathbf{x} \cdot \mathbf{p} \rangle = \left\langle \frac{\mathbf{p}^2}{m} \right\rangle - \langle \mathbf{x} \cdot \nabla V \rangle$$

Para identificar la relación anterior con su análogo mecanico-cuántico del teorema del virial, es esencial que el lado izquierdo se anule. ¿Bajo qué condiciones pasaría esto?

3. Sean $|a'\rangle$ y $|a''\rangle$ eigenestados de un operador Hermitiano A con eigenvalores a' y a'', respectivamente ($a' \neq a''$). El operador Hamiltoniano está dado por

$$H = |a'\rangle \delta \langle a''| + |a''\rangle \delta \langle a'|$$

donde δ es un número real.

   (a) Claramente $|a'\rangle$ y $|a''\rangle$ no son eigenestados del Hamiltoniano. Escribe los eigenestados del Hamiltoniano y sus respectivos eigenvalores de energía.

   (b) Supóngase que el sistema es conocido por estar en el estado $|a'\rangle$ a $t = 0$. Escribe el vector de estado en la representación de Schrödinger para $t > 0$.

   (c) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar el sistema en $|a''\rangle$ para $t > 0$ si se sabe que el sistema está en $|a'\rangle$ cuando $t = 0$?

   (d) ¿Puede imaginar alguna situación física correspondiente a este problema?

4. Una caja que contiene una partícula se divide en dos compartimentos, derecho e izquierdo por una pared delgada. Si la partćula se sabe que está en el lado derecho (izquierdo), el estado es representado por el eigenestado $|R\rangle$ ($|L\rangle$), donde hemos ignorado las variaciones espaciales dentro de cada mitad de caja. El vector de estado más general puede ser escrito como

$$|\alpha\rangle = |R\rangle \langle R| |\alpha\rangle + |L\rangle \langle L| |\alpha\rangle$$

Donde $\langle R|\alpha\rangle$ y $\langle L|\alpha\rangle$ pueden ser consideradas como funciones de onda. La partícula puede atravesar la pared de separación. Este efecto túnel se caracteriza por el Hamiltoniano

$$H = \Delta(|L\rangle \langle R| + |R\rangle \langle L|)$$

donde Δ es un número real con dimensiones de energía.

(a) Encuentra los autoestados (eigenkets) de energía normalizados. ¿Cuáles son los correspondientes autovalores de energía?

(b) En el esquema de Schrödinger la base $|R\rangle$ y $|L\rangle$ está fija y el vector de estado se mueve con el tiempo. Suponga que el sistema está representado por $|\alpha\rangle$ dado anteriormente para $t = 0$. Encuentra el vector de estado $|\alpha, t_0 = 0; t\rangle$ para $t > 0$ aplicando el operador de evolución temporal a $|\alpha\rangle$.

(c) Suponga para $t = 0$ que la partícula está del lado derecho. ¿Cuál es la probabilidad de observar la partícula en el lado izquierdo como una función del tiempo?

(d) Escribe las ecuaciones de Schrödinger para la función de onda $\langle R|\alpha, t_0 = 0; t\rangle$ y $\langle L|\alpha, t_0 = 0; t\rangle$. Muestra que las ecuaciones de Schrödinger son las que se esperaban del inciso (b).

(e) Suponga que la edición tiene un error y el Hamiltoniano se escribe

$$H = \Delta |L\rangle \langle R|$$

Resuelva explícitamente el problema de evolución temporal más general con este Hamiltoniano y muestre que la conservación de la probabilidad se viola. ¿Por qué sucede esto?