Mecánica Cuántica. Tarea 6

Grupo CO11 Trimestre 21-I
Profesor: Miguel Angel Bastarrachea Magnani
Ayudante: Yoshua Chávez Bolaños,
Fecha: Miércoles 5 de mayo de 2021.
Fecha de entrega: Miércoles 12 de mayo de 2021.

1. Considera una matriz 2×2 definida por

$$U = \frac{a_0 + \mathrm{i}\sigma \cdot \mathbf{a}}{a_0 - \mathrm{i}\sigma \cdot \mathbf{a}}$$

donde a_0 es un número real y $\mathbf{a}$ es un vector tridimensional con componentes reales.

(a) Demuestra que U es unitario y unimodular ($\det U = \pm 1$).

(b) En general, una matriz unimodular unitaria 2×2 representa una rotación en 3 dimensiones. Encuentra el eje y el ángulo de rotación apropiado para U en términos de a_0, a_1, a_2 y a_3.

2. Considera una partícula de espín 1. Evalua los elementos de la matriz

$$S_z(S_z + \hbar)(S_z - \hbar), \qquad\qquad S_x(S_x + \hbar)(S_x - \hbar)$$

Hint: ahora el operador $\hat{S}_z$ posee tres estados eigenestados $|+\rangle$, $|-\rangle$ y $|0\rangle$.

3. Considera una secuencia de rotaciones de Euler representadas por

$$A = e^{\frac{-\mathrm{i}\sigma_3 \alpha}{2}} e^{\frac{-\mathrm{i}\sigma_2 \beta}{2}} e^{\frac{-\mathrm{i}\sigma_3 \gamma}{2}} = \begin{pmatrix} e^{-\mathrm{i}(\alpha+\gamma)/2} \cos\frac{\beta}{2} & -e^{-\mathrm{i}(\alpha-\gamma)/2} \sin\frac{\beta}{2} \\ e^{\mathrm{i}(\alpha-\gamma)/2} \sin\frac{\beta}{2} & e^{\mathrm{i}(\alpha+\gamma)/2} \cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$$

Debido al grupo de propiedades de rotación, esperamos que esta secuencia de operaciones sea equivalente a una única rotación alrededor de uno de los ejes por un ángulo θ. Encuentra θ.

4. Un eigenestado de momento angular $|j, m = m_{max} = j\rangle$ se rota un ángulo infinitesimal ϵ alrededor del eje y. Sin usar la forma explícita de la función $d^{(j)}_{m'm}$, obten una expresión para la probabilidad de que el nuevo estado rotado se encuentre en el estado original hasta términos de orden ϵ^2.

5. Prueba que

(a) Si el momento angular cumple que $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ entonces

$$[\hat{\pi}, \vec{L}] = 0$$

donde $\hat{\pi}$ es el operador de paridad.

(b) Si $[J_i, J_j] = \mathrm{i}\hbar\epsilon_{ijk} J_k$ se quiere preservar, entonces $\Theta \vec{L} \Theta^{-1} = -\vec{L}$, donde Θ es el operador de inversión temporal.