

Mecánica Cuántica. Tarea 9

Grupo CO11 Trimestre 21-I

Profesor: Miguel Angel Bastarrachea Magnani

Ayudante: Yoshua Chávez Bolaños,

Fecha: Miércoles 26 de mayo de 2021.

Fecha de entrega: Miércoles 2 de junio de 2021.

1. Considera un oscilador armónico isotrópico en dos dimensiones. El Hamiltoniano está dado por

$$H_0 = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$$

- (a) ¿Cuáles son las energías de los tres estados más bajos? ¿Existe alguna degeneración?
(b) Apliquemos ahora una perturbación

$$V = \delta m\omega^2 xy$$

donde δ es un número real adimensional mucho más chico que la unidad. Encuentra el eigenket de la energía de orden cero y su correspondiente energía a primer orden para cada uno de los tres estados más bajos.

- (c) Resuelva el problema $H + V$ exactamente. Compare con el resultado obtenido en (b).

Hint: Puedes usar que $\langle n' | x | n \rangle = \sqrt{\hbar/2m\omega}(\sqrt{n+1}\delta_{n',n+1} + \sqrt{n}\delta_{n',n-1})$.

2. Un átomo de un electrón cuyo estado base no está degenerado se coloca en un campo eléctrico uniforme que va en la dirección z . Obtén una expresión aproximada para el momento dipolar inducido del estado base considerando el valor esperado de ez con respecto al vector del estado perturbado calculado a primer orden. Muestra que la misma expresión puede obtenerse también del cambio de energía $\Delta = -\alpha|\mathbf{E}|^2/2$ del estado base calculado a segundo orden. (Nota: α es la polarizabilidad). Ignora el espín.

3. Un electrón p-orbital caracterizado por $|n, l=1, m=\pm 1, 0\rangle$ (ignorando el espín) está sujeto a un potencial

$$V = \lambda(x^2 + y^2)$$

con λ constante.

- (a) Obtén el eigenestado de energía de orden cero que diagonaliza la perturbación. No necesitas evaluar el cambio de energía en detalle sino mostrar que la triple degeneración original está ahora completamente removida.
(b) Dado que V es invariante bajo inversión temporal y porque no hay ya degeneración, esperamos que cada uno de los eigenestados obtenidos en (a) se transformen en sí mismos (excepto un factor de fase o signo) bajo inversión temporal. Revisa este punto explícitamente.
4. Utiliza el método variacional para encontrar la energía del estado base del átomo de helio, i.e., del Hamiltoniano

$$H = -\frac{\hbar^2 \nabla_1^2}{2m} - \frac{\hbar^2 \nabla_2^2}{2m} - Z\frac{e^2}{r_1} - Z\frac{e^2}{r_2} + \frac{e^2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

utilizando como funciones de prueba la función hidrogenoide

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{Z'^3}{\pi a_0^3} e^{-Z'(r_1+r_2)/a_0}$$

Con Z' el parámetro variacional y donde los índices 1,2 se refieren a los dos electrones del átomo. Interpreta físicamente el valor óptimo de Z' encontrado.

5. Estima la energía del estado base del átomo de hidrogeno utilizando las funciones variacionales

$$u_1 = \rho e^{-\lambda \rho}$$

$$u_2 = \frac{\rho}{\lambda^2 + \rho^2}$$

$$u_3 = \rho^2 e^{-\lambda \rho}$$

donde $\rho = r/a_0$, $a_0 = \hbar/me^2$, $E_0 = me^4/2\hbar$ y λ es el parámetro variacional. Compara los resultados para discernir cuál de estas funciones de prueba da mejor estimación para la energía del estado base.