Mecánica Cuántica. Tarea 8

Grupo CO11 Trimestre 21-I
Profesor: Miguel Angel Bastarrachea Magnani
Ayudante: Yoshua Chávez Bolaños,
Fecha: Miércoles 19 de mayo de 2021.
Fecha de entrega: Miércoles 26 de mayo de 2021.

1. Como probamos en clase, el teorema de proyección es un caso especial del teorema de Wigner-Eckart para cuando los estados inicial y final tienen el mismo momento angular. El teorema dice:

$$\langle \alpha'; jm' | \vec{V} | \alpha; jm \rangle = \frac{\langle \alpha'; j | \vec{J} \cdot \vec{V} | \alpha; j \rangle}{j(j+1)} \langle jm' | \vec{J} | jm \rangle$$

   Donde $\vec{V}$ es un operador vectorial.

   (a) Dar una interpretación geométrica de este teorema en términos de una imagen vectorial (es decir, con flechitas).

   (b) Prueba el teorema usando un método complementario al usado en clase con los siguientes pasos:

      i. Muestra que $\langle \alpha'; jm' | \vec{J} \cdot \vec{V} | \alpha; jm \rangle = \langle \alpha'; j || \vec{J} || \alpha; j \rangle \langle \alpha'; j || \vec{V} || \alpha; j \rangle$ independientemente de m.

      ii. Muestre que $| \langle \alpha'; j || \vec{J} || \alpha; j \rangle |^2 = \hbar^2 j(j+1)$ independientemente de α.

      iii. Muestra que $\langle jm' | 1qjm \rangle = \langle jm' | J_q | jm \rangle / \hbar\sqrt{j(j+1)}$.

2. Considera el problema de dos estados

   (a) Aplicar la teoría de perturbaciones independiente del tiempo para el caso no degenerado para mostrar que la corrección a la energía a segundo orden coincide con el resultado obtenido de aproximar la solución exacta al orden más bajo que consideremos en clase.

   (b) Aplicar la teoría de perturbaciones a primer orden para encontrar los eigenestados del problema perturbado. Encontrar también los eigenestados del problema exacto y comparar los resultados.

3. Un oscilador armónico unidimensional está sujeto a una perturbación

$$\lambda H_1 = bx \tag{1}$$

   donde b es una constante real.

   (a) Calcula el corrimiento de energía del estado base al orden más bajo que sea distinto de cero.

   (b) Resuelve el problema exactamente y compara con tu resultado obtenido en (a).
   Puedes asumir sin probarlo que: $\langle u_{n'} | x | u_n \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(\sqrt{n+1}\delta_{n',n+1} + \sqrt{n}\delta_{n',n-1} \right).$

4. Considera el problema de un oscilador armónico con una perturbación cúbica λx^3. Encuentra explícitamente la corrección a la energía a segundo orden y la corrección a la función de onda del estado n, en teoría de perturbaciones.

5. Considera una partícula sin espín en un pozo cuadrado bidimensional infinito.

$$V = \begin{cases} 0 & \text{for} 0 \le x \le a,\ \ 0 \le y \le a, \\ \infty & \text{de otra manera.} \end{cases} \tag{2}$$

   (a) ¿Cuál son las eigenenergías para los tres estados más bajos? Hay alguna degeneración?

   (b) Ahora añadimos el potencial

$$V_1 = \lambda xy,\ \ 0 \le x \le a,\ \ 0 \le y \le a \tag{3}$$

   (c) Tomando esto como una perturbación responde lo siguiente

      - ¿Es el corrimiento de energía debido a la perturbación linear o a la cuadrática en λ para cada uno de los tres estados?
      - Obtiene expresiones para los corrimientos de energa de los tres niveles de energa ms bajos precisamente a orden λ. (No tienes que evaluar las integrales que puedan aparecer).
      - Dibuja un diagrama de energía con y sin perturbación para los tres eigenestados de energía. Asegúrate de especificar cuáles eigenestados no perturbados están conectados con cuáles eigenestados perturbados.