

# Mecánica Cuántica. Examen 1<sup>\*†</sup>

José Emmanuel Flores Calderón

Fecha: 26/04/2021.

## 1. Preguntas conceptuales. Responde a las siguientes preguntas.

(a) Enuncia los postulados de la mecánica cuántica.

**Sol.**

- A cada sistema físico le corresponde un espacio de Hilbert. Toda la información físicamente accesible está almacenada en vectores de estado, los cuales son elementos del espacio de Hilbert. Y además, un estado puro es representado por un vector unitario en el espacio de Hilbert.
- Los observables físicos están representados por operadores hermitianos en el espacio de Hilbert. Y los eigenvalores de tales operadores corresponden a posibles resultados de cantidades físicamente medibles.
- Dado un sistema de muchas partículas, el espacio de Hilbert de todo el sistema se obtiene mediante el producto tensorial de cada espacio de Hilbert asociado a cada una de las partículas.
- La ecuación de Schrödinger gobierna la evolución dinámica del estado del sistema, y esta última (la evolución), resulta ser determinista, unitaria y lineal.
- Al efectuar la medición de algún observable físico, este acto tiene consecuencias sobre el vector de estado (colapso).

(b) ¿Cuál es la expresión general de la superposición cuántica para un estado cuántico arbitrario en la base de un operador arbitrario?

**Sol.**

Sea  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert, el cual representa a un sistema cuántico arbitrario. Sean  $A$  un operador arbitrario del espacio de Hilbert, y sea  $\{|a\rangle\}$ , la base formada por el conjunto de eigenkets de  $A$ , la cual además, suponemos que es completa.

Dado un estado cuántico arbitrario  $|\alpha\rangle$ , la representación de éste en la base de  $A$  está dada por

$$|\alpha\rangle = \sum_a C_a |a\rangle = \sum_a \langle a|\alpha\rangle |a\rangle.$$

(c) ¿Qué es la incompatibilidad entre observables y cómo se enuncia el principio de incertidumbre entre dos operadores?

**Sol.**

Dados dos observables físicos  $A$  y  $B$ , decimos que son incompatibles si

$$[A, B] \neq 0,$$

es decir, son incompatibles cuando no conmutan entre sí. Sin embargo, desde el punto de vista físico, la incompatibilidad entre observables tiene implicaciones profundas en la medición de cantidades físicas. Físicamente, el que dos operadores sean incompatibles quiere decir que la medición de una de las cantidades físicas representadas por ese operador afecta a las del otro.

Ahora bien, el principio de incertidumbre para los operadores  $A$  y  $B$ , es

$$\langle (\Delta A)^2 \rangle \langle (\Delta B)^2 \rangle \geq \frac{1}{4} |\langle [A, B] \rangle|^2,$$

donde los valores esperados son tomados respecto a un vector de estado arbitrario.

---

<sup>\*</sup>Grupo C011 | Trimestre 21-1

<sup>†</sup>Profesor: Miguel Ángel Bastarrachea Magnani | Ayudante: Yoshua Chávez Bolaños

(d) ¿Cuáles son las diferencias entre las representaciones de Schrödinger y la de Heisenberg?

**Sol.**

- En la representación de Schrödinger lo que evoluciona y cambia con el tiempo son los kets de estado, mientras que en la Heisenberg éstos permanecen estacionarios.
- En la representación de Schrödinger los operadores permanecen estacionarios, mientras que en la de Heisenberg, éstos son los que evolucionan y cambian con el tiempo.
- En la representación de Schrödinger los kets base son estacionarios, mientras que en la de Heisenberg, éstos se mueven en la dirección opuesta (hacia atrás en el tiempo).

(e) ¿Qué significado físico tiene el propagador en la mecánica cuántica?

**Sol.** Supongamos que tenemos un operador  $A$  que conmuta con el Hamiltoniano. En terminos de los eigenkets de  $A$ , el operador propagador esta dado por

$$K(\mathbf{x}'', t; \mathbf{x}', t_0) = \sum_{a'} \langle \mathbf{x}'' | a' \rangle \langle a' | \mathbf{x}' \rangle \exp \left[ \frac{-iE_{a'}(t - t_0)}{\hbar} \right].$$

Si pensamos al propagador como una función de  $\mathbf{x}''$ , éste es la función de onda al tiempo  $t$  de una partícula que estuvo localizada en la posición  $\mathbf{x}'$  en un tiempo anterior  $t_0$ .

2. Pozo unidimensional infinito. Considera una partícula de masa  $m$  bajo la acción del siguiente potencial:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq a \\ +\infty & x < 0 \text{ \& } x > a \end{cases} \quad (0.1)$$

- Encuentra los eigenestados  $|\phi_n\rangle$  y eigenvalores  $E_n$  del sistema.
- Si el estado inicial del sistema es  $|\psi(0)\rangle = a_1 |\phi_1\rangle + a_2 |\phi_2\rangle + a_3 |\phi_3\rangle + a_4 |\phi_4\rangle$ . ¿Cuál es la probabilidad de encontrar un valor de energía menor a  $E = \frac{3\pi^2\hbar^2}{ma^2}$ ?
- ¿Cuál es el valor medio y la desviación cuadrática media de la energía de la partícula en el estado  $|\psi(0)\rangle$ ?
- Calcula el vector de estado al tiempo  $t$ :  $|\psi(t)\rangle$ . ¿Los resultados que encontraste en los incisos b) y c) permanecen válidos al tiempo  $t$ ?
- Cuando la energía es medida, se encuentra el resultado  $E = \frac{8\pi^2\hbar^2}{ma^2}$ . Después de la medición, ¿cuál es el estado del sistema? ¿Cuál es el resultado si se mide de nuevo la energía?

**Solución.**

(a) El problema que tenemos que resolver esta dado por la ecuación

$$H|\phi\rangle = E|\phi\rangle, \quad (0.2)$$

donde  $H$  esta dado por  $H = \frac{p^2}{2m} + V$ , y el cual se traduce en resolver la ecuación diferencial

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2} = E\phi(x) \iff \frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2} = -k^2 \phi(x); \quad k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E$$

cuya solución esta dada por

$$\phi(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx).$$

Usando las condiciones de frontera, tenemos que

$$B = 0 \quad \& \quad k_n = \frac{n\pi}{a},$$

con lo cual

$$\phi_n(x) = A \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right), \quad E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2},$$

sin embargo, falta por calcular  $A$ , la cual se obtiene de la condicion de normalización de la función de onda. Por lo tanto, tenemos que

$$|\phi_n\rangle = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right), \quad E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}.$$

(b) Ahora bien, el estado  $|\psi(0)\rangle$  queda escrito como

$$|\psi(0)\rangle = a_1\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) + a_2\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right) + a_3\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{3\pi}{a}x\right) + a_4\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{4\pi}{a}x\right).$$

Por otra parte, sabemos cuando efectuamos una medición sobre el sistema, el cual, en principio se asume como una superposición de estados cuánticos, colapsa en alguno de los eigenestados del sustema, y esto lo hace con una probabilidad dada por

$$a' = |\langle a'|\alpha\rangle|^2,$$

en donde el ket  $|\alpha\rangle$  representa un estado arbitrario del sistema, el cual además esta normalizado. Por tanto, la probabilidad de que al medir la energía del sistema, encontremos una energía menor a  $E = \frac{3\pi^2\hbar^2}{ma^2}$ , viene dada por la probabilidad de proyectar nuestro estado  $|\psi(0)\rangle$  sobre algun eigenket de energía menor a la considerada en este problema. Las cuales en este caso en particular, serian las de los estados  $|\phi_1\rangle$  y  $|\phi_2\rangle$ . Entonces

$$P_1 = |\langle\phi_1|\psi(0)\rangle|^2 = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}} |\langle\phi_1|(a_1|\phi_1\rangle + a_2|\phi_2\rangle + a_3|\phi_3\rangle + a_4|\phi_4\rangle)|^2 = \frac{|a_1|^2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}},$$

$$\therefore P_1 = \frac{|a_1|^2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}}$$

lo anterior es justamente así por las propiedades de ortogonalidad de los ket base. Mientras que para el otro estado, tenemos

$$P_2 = |\langle\phi_2|\psi(0)\rangle|^2 = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}} |\langle\phi_2|(a_1|\phi_1\rangle + a_2|\phi_2\rangle + a_3|\phi_3\rangle + a_4|\phi_4\rangle)|^2 = \frac{|a_2|^2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}},$$

$$P_2 = \frac{|a_2|^2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}}$$

(c) Para el valor medio y la desviación cuadrática media de la energía, tenemos que calcular

$$\langle\psi(0)|H|\psi(0)\rangle = (a_1\langle\phi_1| + a_2\langle\phi_2| + a_3\langle\phi_3| + a_4\langle\phi_4|)H(a_1|\phi_1\rangle + a_2|\phi_2\rangle + a_3|\phi_3\rangle + a_4|\phi_4\rangle),$$

$$\implies \langle\psi(0)|H|\psi(0)\rangle = a_1E_1\langle\phi_1|\phi_1\rangle + a_2E_2\langle\phi_2|\phi_2\rangle + a_3E_3\langle\phi_3|\phi_3\rangle + a_4E_4\langle\phi_4|\phi_4\rangle,$$

$$\implies \langle H\rangle_{\phi_0} = a_1E_1 + a_2E_2 + a_3E_3 + a_4E_4 = a_1\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} + a_2\frac{4\pi^2\hbar^2}{2ma^2} + a_3\frac{9\pi^2\hbar^2}{2ma^2} + a_4\frac{16\pi^2\hbar^2}{2ma^2},$$

$$\therefore \langle H\rangle_{\phi_0} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} (a_1 + 4a_2 + 9a_3 + 16a_4).$$

Para  $\langle H^2\rangle_{\phi_0}$  es practicamente el mismo procedimiento

$$\langle H^2\rangle_{\phi_0} = a_1E_1^2 + a_2E_2^2 + a_3E_3^2 + a_4E_4^2 = a_1\left(\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\right)^2 + a_2\left(\frac{4\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\right)^2 + a_3\left(\frac{9\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\right)^2 + a_4\left(\frac{16\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\right)^2,$$

$$\implies \langle H^2\rangle_{\phi_0} = \left(\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\right)^2 (a_1 + 16a_2 + 81a_3 + 256a_4),$$

y por lo tanto, la desviación cuadrática media es

$$\begin{aligned}
\langle (\Delta H)^2 \rangle_{\phi_0} &= \langle H^2 \rangle_{\phi_0} - \langle H \rangle_{\phi_0}^2, \\
\Rightarrow \langle (\Delta H)^2 \rangle_{\phi_0} &= \left( \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \right)^2 (a_1 + 16a_2 + 81a_3 + 256a_4) - \left( \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \right)^2 (a_1 + 4a_2 + 9a_3 + 16a_4)^2, \\
\Rightarrow \langle (\Delta H)^2 \rangle_{\phi_0} &= \left( \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \right)^2 (a_1 + 16a_2 + 81a_3 + 256a_4 - (a_1 + 4a_2 + 9a_3 + 16a_4)^2), \\
\therefore \langle (\Delta H)^2 \rangle_{\phi_0} &= \left( \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \right)^2 [ -a_1^2 - 16a_2^2 + 81a_3 - 81a_3^2 + 256a_4 - 288a_3a_4 - 256a_4^2 \\
&\quad - 8a_2(-2 + 9a_3 + 16a_4) - a_1(1 + 8a_2 + 18a_3 + 32a_4) ]
\end{aligned}$$

(d) Si ahora consideramos la evolución temporal del sistema, tenemos que hacer

$$\begin{aligned}
|\psi(t)\rangle &= \mathcal{U}(t, t_0 = 0) |\psi(0)\rangle = \exp\left(\frac{-iHt}{\hbar}\right) |\psi(0)\rangle, \\
\Rightarrow |\psi(t)\rangle &= \exp\left(\frac{-iHt}{\hbar}\right) (a_1 |\phi_1\rangle + a_2 |\phi_2\rangle + a_3 |\phi_3\rangle + a_4 |\phi_4\rangle), \\
\Rightarrow |\psi(t)\rangle &= a_1 \exp\left(\frac{-iHt}{\hbar}\right) |\phi_1\rangle + a_2 \exp\left(\frac{-iHt}{\hbar}\right) |\phi_2\rangle + a_3 \exp\left(\frac{-iHt}{\hbar}\right) |\phi_3\rangle + a_4 \exp\left(\frac{-iHt}{\hbar}\right) |\phi_4\rangle, \\
\Rightarrow |\psi(t)\rangle &= a_1 \exp\left(\frac{-iE_1 t}{\hbar}\right) |\phi_1\rangle + a_2 \exp\left(\frac{-iE_2 t}{\hbar}\right) |\phi_2\rangle + a_3 \exp\left(\frac{-iE_3 t}{\hbar}\right) |\phi_3\rangle + a_4 \exp\left(\frac{-iE_4 t}{\hbar}\right) |\phi_4\rangle.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que  $|\psi(t)\rangle$  está dado por

$$\begin{aligned}
|\psi(t)\rangle &= a_1 \sqrt{\frac{2}{a}} \exp\left(\frac{-i\pi^2 \hbar t}{2ma^2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) + a_2 \sqrt{\frac{2}{a}} \exp\left(\frac{-i4\pi^2 \hbar t}{2ma^2}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right) + \\
&\quad + a_3 \sqrt{\frac{2}{a}} \exp\left(\frac{-i9\pi^2 \hbar t}{2ma^2}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{a}x\right) + a_4 \sqrt{\frac{2}{a}} \exp\left(\frac{-i16\pi^2 \hbar t}{2ma^2}\right) \sin\left(\frac{4\pi}{a}x\right).
\end{aligned}$$

Por otra parte, sabemos que los valores esperados no dependen de la evolución temporal, de manera que sí, las mediciones (cálculos) hechas de los incisos anteriores siguen siendo válidos aún cuando el sistema ha evolucionado en el tiempo.

(e) Veamos si la energía medida corresponde a un eigenestado. De manera general, las eigenenergías están dadas por

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2},$$

mientras que nosotros tenemos

$$E = \frac{8\pi^2 \hbar^2}{ma^2},$$

de manera que para ver si es o no eigenenergía, tenemos que resolver

$$\frac{n^2}{2} = 8 \iff n^2 = \sqrt{16} \iff n = 4,$$

el resultado anterior quiere decir que efectivamente, la medición nos dio un eigenestado de energía, de tal manera que si medimos nuevamente la energía obtendremos el mismo resultado, ya que la función de onda colapsa a un eigenestado.

3. **Molécula triatómica.** Considera un electrón formado por tres átomos equidistantes. Usamos  $|\varphi_A\rangle$ ,  $|\varphi_B\rangle$  y  $|\varphi_C\rangle$  para denotar los tres estados ortonormales del electrón que corresponden a las tres funciones de onda que representan la localización alrededor de los núcleos atómicos A, B y C, respectivamente. En este caso, nos estamos confinando a un subespacio de estados que es generado sólo por los estados  $|\varphi_A\rangle$ ,  $|\varphi_B\rangle$  y  $|\varphi_C\rangle$ . Cuando negamos la posibilidad de que el electrón salte de un núcleo atómico a otro, su energía está descrita por el Hamiltoniano  $\hat{H}_0$  cuyos eigenestados son los estados  $|\varphi_A\rangle$ ,  $|\varphi_B\rangle$  y  $|\varphi_C\rangle$ , todos con energía  $E_0$ . El acoplamiento entre los estados  $|\varphi_A\rangle$ ,  $|\varphi_B\rangle$  y  $|\varphi_C\rangle$  está descrito por un Hamiltoniano adicional  $\hat{H}_I$  definido por:

$$\hat{H}_I |\varphi_A\rangle = -a |\varphi_B\rangle, \quad (0.3)$$

$$\hat{H}_I |\varphi_B\rangle = -a |\varphi_A\rangle - a |\varphi_C\rangle, \quad (0.4)$$

$$\hat{H}_I |\varphi_C\rangle = -a |\varphi_B\rangle, \quad (0.5)$$

donde  $a$  es una constante real positiva.

- Calcula los eigenestados y eigenenergías del Hamiltoniano  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_I$ .
- Si el electrón se encuentra en el estado  $|\varphi_A\rangle$  al tiempo  $t = 0$ , discute cualitativamente la localización del electrón a tiempos subsecuentes  $t$ . ¿Hay algún valor de  $t$  para el cual esté perfectamente localizado en alguno de los átomos A, B o C?
- Sea  $\hat{D}$  la observable cuyos eigenestados son  $|\varphi_A\rangle$ ,  $|\varphi_B\rangle$  y  $|\varphi_C\rangle$  con eigenvalores respectivos  $-d$ ,  $0$ ,  $d$ . Si  $D$  es medida al tiempo  $t$ , ¿Qué valores pueden encontrarse y con qué probabilidades?
- Cuando el estado inicial del electrón es arbitrario, ¿cuáles son las frecuencias de Bohr (las diferencias entre las eigenenergías del sistema) que pueden aparecer en la evolución de  $\langle \hat{D} \rangle$ ? Brinda una interpretación física del operador  $D$ . Si se usan ondas electromagnéticas para excitar al electrón, ¿qué frecuencias puede absorber y emitir en la molécula?

#### Solución.

- Tenemos que resolver el problema de eigenvalores dado por

$$H |\alpha\rangle = \lambda |\alpha\rangle,$$

donde  $H$  está dado por  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_I$ , y en general,

$$|\alpha\rangle = \sum_i C_i |\phi_i\rangle, C_i = \langle \phi_i | \alpha \rangle \quad i = A, B, C.$$

Como primer paso, escribamos al operador  $H$  en términos matriciales, para lo cual, hagamos las siguientes identificaciones

$$|\phi_A\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, |\phi_B\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |\phi_C\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Podemos hacer lo anterior porque nos estamos restringiendo a un subespacio generado por los tres estados  $|\phi_A\rangle$ ,  $|\phi_B\rangle$ ,  $|\phi_C\rangle$ . Por otra parte, tenemos que

$$H_0 |\phi_i\rangle = E_0 |\phi_i\rangle \quad \forall i = A, B, C,$$

de manera que la representación matricial de  $H_0$  está dada por

$$H_0 = \begin{pmatrix} E_0 & 0 & 0 \\ 0 & E_0 & 0 \\ 0 & 0 & E_0 \end{pmatrix}. \quad (0.6)$$

Ahora bien, si nos fijamos en las relaciones dadas por las ecuaciones (0.3), (0.4) y (0.5), tenemos las siguientes relaciones

$$H_I \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad H_I \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}, \quad H_I \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix},$$

lo cual nos conduce a la representación matricial de  $H_I$ , la cual esta dada por

$$H_I = \begin{pmatrix} 0 & -a & 0 \\ -a & 0 & -a \\ 0 & -a & 0 \end{pmatrix}, \quad (0.7)$$

y por lo tanto, la representación matricial de  $H$  es

$$H = \begin{pmatrix} E_0 & -a & 0 \\ -a & E_0 & -a \\ 0 & -a & E_0 \end{pmatrix}. \quad (0.8)$$

Ahora encontremos los valores y vectores propios de la ecuación anterior. Para los eigenvalores, tenemos que resolver

$$\det(H - \lambda \mathbb{I}) = 0,$$

el cual se traduce en

$$\det \begin{pmatrix} E_0 - \lambda & -a & 0 \\ -a & E_0 - \lambda & -a \\ 0 & -a & E_0 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \iff (E_0 - \lambda)^3 = 2a^2(E_0 - \lambda),$$

lo que implica que  $\lambda_1 = E_0$ , mientras que para los otros dos valores propios tenemos que resolver

$$(E_0 - \lambda)^2 = 2a^2 \implies \lambda_{2,3} = E_0 \pm \sqrt{2}a,$$

y por lo tanto, los eigenvalores están dados por

$$\lambda = \{E_0, E_0 + \sqrt{2}a, E_0 - \sqrt{2}a\}. \quad (0.9)$$

Ahora bien, para los vectores propios tenemos que resolver el sistema

$$(H - \lambda_i \mathbb{I}) \mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \forall i = 1, 2, 3.$$

Para  $\lambda_1 = E_0$ , tenemos que

$$(H - \lambda_1 \mathbb{I}) \mathbf{x} = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} E_0 - E_0 & -a & 0 \\ -a & E_0 - E_0 & -a \\ 0 & -a & E_0 - E_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dando como resultado el vector propio  $(1, 0, -1)^T$ . Para  $\lambda_2 = E_0 + \sqrt{2}a$ , tenemos que

$$(H - \lambda_2 \mathbb{I}) \mathbf{x} = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} E_0 - E_0 - \sqrt{2}a & -a & 0 \\ -a & E_0 - E_0 - \sqrt{2}a & -a \\ 0 & -a & E_0 - E_0 - \sqrt{2}a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

el cual nos conduce al vector propio  $(1, -\sqrt{2}, 1)^T$ . Finalmente, para  $\lambda_3 = E_0 - \sqrt{2}a$ , tenemos que

$$(H - \lambda_3 \mathbb{I}) \mathbf{x} = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} E_0 - E_0 + \sqrt{2}a & -a & 0 \\ -a & E_0 - E_0 + \sqrt{2}a & -a \\ 0 & -a & E_0 - E_0 + \sqrt{2}a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

cuyo valor propio es  $(1, \sqrt{2}, 1)^T$ . Por lo tanto, los vectores propios estan dados por

$$\lambda_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \lambda_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Escribiendo los eigenkets de  $H$  en términos de la base  $\{|\phi_A\rangle, |\phi_B\rangle, |\phi_C\rangle\}$  y haciendo algunos cambios de notación, tenemos que los respectivos eigenvalores y eigenkets del operador  $H$  están dados por

$$E_1 = E_0 \rightarrow |h_1\rangle = |\phi_A\rangle - |\phi_C\rangle, \quad (0.10)$$

$$E_2 = E_0 + \sqrt{2}a \rightarrow |h_2\rangle = |\phi_A\rangle - \sqrt{2}|\phi_B\rangle + |\phi_C\rangle, \quad (0.11)$$

$$E_3 = E_0 - \sqrt{2}a \rightarrow |h_3\rangle = |\phi_A\rangle + \sqrt{2}|\phi_B\rangle + |\phi_C\rangle, \quad (0.12)$$

$$\therefore H|h_i\rangle = h_i|h_i\rangle, \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (0.13)$$

- (b) Ahora bien para describir el estado del sistema a tiempos posteriores, es necesario saber cómo es que actúa el operador de evolución sobre los kets base. Hasta el momento he calculado los eigenkets de  $H$  en términos de la base  $\{|\phi_A\rangle, |\phi_B\rangle, |\phi_C\rangle\}$ , sin embargo, nada nos impide expresar a la base anterior en términos de los eigenkets de  $H$ , lo único que tenemos que hacer es resolver el sistema de ecuaciones dado en las ecuaciones (0.10), (0.11) y (0.12) para  $\{|\phi_A\rangle, |\phi_B\rangle, |\phi_C\rangle\}$ , lo cual nos da como resultado

$$|\phi_A\rangle = \frac{1}{2}|h_1\rangle + \frac{1}{4}(|h_2\rangle + |h_3\rangle),$$

$$|\phi_B\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-|h_2\rangle + |h_3\rangle),$$

$$|\phi_C\rangle = -\frac{1}{2}|h_1\rangle + \frac{1}{4}(|h_2\rangle + |h_3\rangle).$$

Ahora bien, dado que el Hamiltoniano no depende explícitamente del tiempo, tenemos que el operador de evolución por definición está dado por

$$\mathcal{U}(t, t=0) = \exp\left(\frac{-iH(t-t_0)}{\hbar}\right).$$

Si lo escribimos en términos de la base  $\{|h_1\rangle, |h_2\rangle, |h_3\rangle\}$ , tenemos que

$$\exp\left(\frac{-iHt}{\hbar}\right) = \sum_{i=0}^3 |h_i\rangle \exp\left(\frac{-iE_i(t-t_0)}{\hbar}\right) \langle h_i|.$$

Por lo tanto, si al tiempo  $t = 0$ , el sistema está en el estado  $|\phi_A, t_0 = 0\rangle = |\phi_A\rangle$ , tenemos que

$$|\phi_A, t_0 = 0; t\rangle = \exp\left(\frac{-iHt}{\hbar}\right) |\phi_A, t_0 = 0\rangle = \sum_{i=0}^3 |h_i\rangle \exp\left(\frac{-iE_i t}{\hbar}\right) \langle h_i | \phi_A, t_0 = 0 \rangle,$$

$$\therefore |\phi_A, t_0 = 0; t\rangle = \sum_{i=0}^3 |h_i\rangle \exp\left(\frac{-iE_i t}{\hbar}\right) \phi_i, \quad (0.14)$$

donde  $\langle h_i | \phi_A \rangle = \phi_i$ . Explícitamente tenemos que

$$|\phi_A, t_0 = 0; t\rangle = \frac{1}{2} \exp\left(\frac{-iE_0 t}{\hbar}\right) |h_1\rangle + \frac{1}{4} \exp\left(\frac{-i(E_0 + \sqrt{2}a)t}{\hbar}\right) |h_2\rangle + \frac{1}{4} \exp\left(\frac{-i(E_0 - \sqrt{2}a)t}{\hbar}\right) |h_3\rangle.$$

De la expresión anterior vemos que, en general para ningún tiempo  $t \neq 0$  el sistema se encuentra perfectamente localizado en alguno de los átomos  $A, B$  o  $C$ .

- (c) El operador  $D$  cumple con la ecuación de eigenvalores

$$D|\phi_i\rangle = d_i|\phi_i\rangle, \quad \forall i = A, B, C \quad \& \quad d_1 = -d, d_2 = 0, d_3 = d,$$

pero si escribimos a los kets  $|\phi_i\rangle$ , en términos de la base  $\{|h_1\rangle, |h_2\rangle, |h_3\rangle\}$ , la ecuación anterior, se transforma en

$$\sum_i D|h_i\rangle \phi_i = \sum_i d_i |h_i\rangle \phi_i,$$

por ortogonalidad, tenemos que

$$D|h_i\rangle \phi_i = d_i \phi_i |h_i\rangle. \quad (0.15)$$

La ecuación anterior, nos dice cómo actúa el operador  $D$  sobre los kets base  $\{|h_1\rangle, |h_2\rangle, |h_3\rangle\}$ .

(d) Por otra parte, si  $|\alpha\rangle$  es un estado arbitrario del sistema que estamos estudiando, tenemos que

$$\begin{aligned}\langle\alpha|D|\alpha\rangle &= \sum_m \phi_m^* \langle h_m | \exp\left(\frac{iE_m t}{\hbar}\right) D \sum_n \phi_n \exp\left(\frac{-iE_n t}{\hbar}\right) | h_n \rangle = \sum_m \sum_n \phi_m^* \phi_n \langle h_m | D | h_n \rangle \exp\left(\frac{i(E_m - E_n)t}{\hbar}\right), \\ \therefore \langle\alpha|D|\alpha\rangle &= \sum_m \sum_n \phi_m^* \phi_n \langle h_m | D | h_n \rangle \exp\left(\frac{i(E_m - E_n)t}{\hbar}\right),\end{aligned}\quad (0.16)$$

donde las frecuencias de Bohr están dadas por

$$\omega_{m,n} = \frac{E_m - E_n}{\hbar}.\quad (0.17)$$

Las cuales, explícitamente están dadas por

$$\begin{aligned}\omega_{1,2} &= \frac{E_1 - E_2}{\hbar} = \frac{-\sqrt{2}a}{\hbar}, \\ \omega_{1,3} &= \frac{E_1 - E_3}{\hbar} = \frac{\sqrt{2}a}{\hbar}, \\ \omega_{2,1} &= \frac{E_2 - E_1}{\hbar} = \frac{\sqrt{2}a}{\hbar}, \\ \omega_{2,3} &= \frac{E_2 - E_3}{\hbar} = \frac{2\sqrt{2}a}{\hbar}, \\ \omega_{3,1} &= \frac{E_3 - E_1}{\hbar} = \frac{-\sqrt{2}a}{\hbar}, \\ \omega_{3,2} &= \frac{E_3 - E_2}{\hbar} = -\frac{2\sqrt{2}a}{\hbar}.\end{aligned}$$

4. Polarizador y analizador de átomos. Considera un dispositivo experimental como se muestra en la figura: un haz de átomos de espín  $1/2$  sale de un horno  $E_1$ , es colimado en  $F_1$  y pasa a través de uno de los aparatos  $A_1$  que sirve como “polarizador” en una dirección que hace un ángulo  $\theta$  con el eje  $z$  en el plano  $xz$ , y luego pasa a través de otro aparato  $A_2$ , el “analizador”, que mide la componente  $S_z$  del espín. Asumimos que entre el polarizador y el analizador, un campo magnético  $\mathbf{B}_0$  es aplicado de manera uniforme al eje  $x$  sobre una distancia  $L$  del haz atómico. Llamamos  $v$  a la velocidad de los átomos y  $T = L/v$  al tiempo durante el cual se encuentran bajo la acción del campo aplicado  $\mathbf{B}_0$ . Además, definimos  $\omega_0 = -\gamma B_0$ .

- (a) ¿Cuál es el vector de estado  $|\psi_1\rangle$  del espín en el momento en el que entra al analizador.  
(b) Muestra que cuando la medición ocurre en el analizador hay una probabilidad igual a  $\frac{1}{2}(1 + \cos(\theta) \cos(\omega_0 T))$  de encontrar el estado con  $\hbar/2$  y  $\frac{1}{2}(1 - \cos(\theta) \cos(\omega_0 T))$  de encontrar el estado con  $-\hbar/2$ . Brinda una interpretación física de este resultado.  
(c) Muestra que la matriz de densidad  $\rho_1$  de una partícula que entra en el analizador está dada, en la base de  $S_z$  por:

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos(\theta) \cos(\omega_0 T) & 1 + i \cos(\theta) \sin(\omega_0 T) \\ 1 - i \cos(\theta) \sin(\omega_0 T) & 1 - \cos(\theta) \cos(\omega_0 T) \end{pmatrix} \quad (0.18)$$

- (d) Calcula  $\text{Tr}(\rho_1 S_z)$ ,  $\text{Tr}(\rho_1 S_x)$  y  $\text{Tr}(\rho_1 S_y)$ .  
(e) Asume que la velocidad de los átomos es una variable aleatoria y que en consecuencia el tiempo  $T$  se conoce con cierta incertidumbre  $\Delta T$ . Además, asume que el campo  $B$  es lo suficientemente fuerte como para que  $\omega_0 \Delta T \gg 1$ . Los posibles valores del producto de  $\omega_0 T$  son entonces (módulo  $2\pi$ ) todos los valores entre  $0$  y  $2\pi$  y todos son igualmente probables. En este caso, ¿cuál es el operador de densidad  $\rho_2$  de un átomo en el momento que entra en el analizador? ¿Es  $\rho_2$  un estado puro?  
(f) Calcula  $\text{Tr}(\rho_2 S_z)$ ,  $\text{Tr}(\rho_2 S_x)$  y  $\text{Tr}(\rho_2 S_y)$ . ¿Cuál es tu interpretación? En qué caso el operador de espín describe un espín completamente polarizado? En qué caso se describe un espín completamente no polarizado?



- (g) Describe cualitativamente el fenómeno observado en la salida del analizador cuando  $\omega_0$  varía de cero a un valor donde la condición  $\omega_0 \Delta T \gg 1$  se satisface.

**Solución.**

- (a) Basicamente tenemos dos momentos importantes a considerar en el experimento. Por una parte, cuando el haz de átomos pasa por el polarizador y después cuando para por el analizador. El punto más esencial de este problema es la aplicación del campo magnetico uniforme  $\mathbf{B}_0$  a lo largo del eje  $x$  a lo largo de una distancia  $L$ . Cuando pasa por el polarizador, el vector de estado esta dado, de manera general por

$$|\psi, t_0 = 0\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |+\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \exp(i\alpha) |-\rangle, \quad (0.19)$$

el cual esta representado en la base de  $S_z$ . Cuando el haz de átomos viaja en la zona donde esta el campo magnetico  $\mathbf{B}_0$ , tenemos que resolver un problema de evolución temporal para el ket  $|\psi, t_0 = 0\rangle$ , cuyo Hamiltoniano, está dado por

$$H = \omega_0 S_x, \quad S_x = \mathbf{S} \cdot \hat{x}, \\ \implies H = \omega_0 S_x,$$

y cuya ecuación de eigenvalores está dada por

$$H |\alpha\rangle = E |\alpha\rangle \iff \omega S_x |S_x; \pm\rangle = \pm \omega_0 \frac{\hbar}{2} |S_x \pm\rangle,$$

de manera que el operador de evolución temporal está dado por

$$\mathcal{U}(t, 0) = \exp\left(\frac{-i\omega_0 S_x t}{\hbar}\right).$$

Ahora bien, para resolver el problema de evolución temporal, tenemos que aplicar el operador anterior al ket de estado dado por la ecuación (0.19). Sin embargo, lo que debemos de hacer primero es expresar esa misma ecuación en terminos de la base de  $S_x$ , esto es así porque en esa base sí sabemos el efecto del operador de evolución temporal sobre los kets. Sabemos que la base de  $S_x$  esta dada por

$$|S_x; \pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle \pm \frac{1}{\sqrt{2}} |-\rangle.$$

Si ahora invertimos las ecuaciones, tenemos que

$$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |S_x; +\rangle \pm \frac{1}{\sqrt{2}} |S_x; -\rangle,$$

con lo cual tenemos que el ket dado por la ecuación 0.19 toma la forma

$$|\psi, t_0 = 0\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} |S_x; +\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |S_x; -\rangle\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} |S_x; +\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |S_x; -\rangle\right), \\ \implies |\psi, t_0 = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) |S_x; +\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) |S_x; -\rangle.$$

Por lo tanto, el operador de evolución temporal, aplicado al ket anterior nos da

$$|\psi; t\rangle = \mathcal{U}(t, 0) |\psi, t_0 = 0\rangle = \exp\left(\frac{-i\omega_0 S_x t}{\hbar}\right) \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) |S_x; +\rangle + \\ + \exp\left(\frac{-i\omega_0 S_x t}{\hbar}\right) \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) |S_x; -\rangle,$$

pero ya sabemos cuál es el efecto del operador de evolución temporal sobre los kets base, de manera que

$$\implies |\psi; t\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \exp\left(\frac{-i\omega_0 t}{\hbar}\right) |S_x; +\rangle +$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) - \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \right) \exp \left( \frac{-i\omega_0 t}{\hbar} \right) |S_x; -\rangle$$

De manera que para saber el vector de estado al momento de entrar al analizador, basta con evaluar la expresi3n anterior al tiempo  $T$ , el cual es el tiempo que estuvo bajo la influencia del campo magnetico. Esto es

$$|\psi; T\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) + \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \right) \exp \left( \frac{-i\omega_0 T}{2} \right) |S_x; +\rangle + \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) - \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \right) \exp \left( \frac{-i\omega_0 T}{2} \right) |S_x; -\rangle.$$

Por comodidad en los c3culos siguientes, expresemos el ket anterior en terminos de la base de  $S_z$ ,

$$|\psi; T\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) + \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \right) \exp \left( \frac{-i\omega_0 T}{2} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |-\rangle \right) + \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) - \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \right) \exp \left( \frac{-i\omega_0 T}{2} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |-\rangle \right), \\ \Rightarrow |\psi; T\rangle = \frac{1}{2} \left( \left( \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) + \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \right) \exp \left( \frac{-i\omega_0 T}{2} \right) + \left( \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) - \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \right) \exp \left( \frac{i\omega_0 T}{2} \right) \right) |+\rangle + \\ \frac{1}{2} \left( \left( \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) + \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \right) \exp \left( \frac{-i\omega_0 T}{2} \right) - \left( \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) - \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \right) \exp \left( \frac{i\omega_0 T}{2} \right) \right) |-\rangle.$$

Si ahora definimos  $\eta_1 = \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) + \sin \left( \frac{\theta}{2} \right)$  y  $\eta_2 = \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) - \sin \left( \frac{\theta}{2} \right)$ , tenemos que la ecuaci3n anterior se reescribe como

$$|\psi; T\rangle = \frac{1}{2} \left( \eta_1 \exp \left( \frac{-i\omega_0 T}{2} \right) + \eta_2 \exp \left( \frac{i\omega_0 T}{2} \right) \right) |+\rangle + \frac{1}{2} \left( \eta_1 \exp \left( \frac{-i\omega_0 T}{2} \right) - \eta_2 \exp \left( \frac{i\omega_0 T}{2} \right) \right) |-\rangle$$

- (b) Recordemos que el analizador, lo que hace es determinar la componente de esp3n  $S_z$ , de manera de encontrar al estado con  $\frac{\hbar}{2}$  viene dada por la expresi3n

$$\mathcal{P} \left( \frac{\hbar}{2} \right) = |\langle + | \psi; T \rangle|^2,$$

entonces

$$|\langle + | \psi; T \rangle|^2 = \left| \frac{1}{2} \left( \eta_1 \exp \left( \frac{-i\omega_0 T}{2} \right) + \eta_2 \exp \left( \frac{i\omega_0 T}{2} \right) \right) \right|^2, \\ \Rightarrow \mathcal{P} \left( \frac{\hbar}{2} \right) = \frac{1}{4} \left( \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_1 \eta_2 (\exp(-i\omega_0 T) + \exp(i\omega_0 T)) \right), \\ \Rightarrow \mathcal{P} \left( \frac{\hbar}{2} \right) = \frac{1}{4} \left( \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_1 \eta_2 \cos(\omega_0 T) \right),$$

pero  $\eta_1^2 + \eta_2^2 = 2$  y  $\eta_1 \eta_2 = 2 \cos(\theta)$ , de manera que

$$\mathcal{P} \left( \frac{\hbar}{2} \right) = \frac{1}{4} (2 + 2 \cos(\theta) \cos(\omega_0 T)), \\ \therefore \mathcal{P} \left( \frac{\hbar}{2} \right) = \frac{1}{2} (1 + \cos(\theta) \cos(\omega_0 T)).$$

Para  $\mathcal{P} \left( -\frac{\hbar}{2} \right)$  el procedimiento es el mismo, de manera que

$$\mathcal{P} \left( -\frac{\hbar}{2} \right) = |\langle - | \psi; T \rangle|^2, \\ \Rightarrow \mathcal{P} \left( -\frac{\hbar}{2} \right) = \left| \frac{1}{2} \left( \eta_1 \exp \left( \frac{-i\omega_0 T}{2} \right) - \eta_2 \exp \left( \frac{i\omega_0 T}{2} \right) \right) \right|^2,$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \mathcal{P}\left(-\frac{\hbar}{2}\right) &= \frac{1}{4} \left( \eta_1^2 + \eta_2^2 - \eta_1 \eta_2 (\exp(-i\omega_0 T) + \exp(i\omega_0 T)) \right), \\
\Rightarrow \mathcal{P}\left(-\frac{\hbar}{2}\right) &= \frac{1}{4} (2 - 2 \cos(\theta) \cos(\omega_0 T)), \\
\therefore \mathcal{P}\left(-\frac{\hbar}{2}\right) &= \frac{1}{2} (1 - \cos(\theta) \cos(\omega_0 T)).
\end{aligned}$$

(c) Para esta parte, por definición, tenemos que el operador de densidad esta dado por

$$\rho = |\psi; T\rangle \langle \psi; T|.$$

Antes de escribir al operador en la base de  $S_z$ , hagamos los siguientes cambios de variable

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{1}{2} \left( \eta_1 \exp\left(\frac{-i\omega_0 T}{2}\right) + \eta_2 \exp\left(\frac{i\omega_0 T}{2}\right) \right), \\
\beta &= \frac{1}{2} \left( \eta_1 \exp\left(\frac{-i\omega_0 T}{2}\right) - \eta_2 \exp\left(\frac{i\omega_0 T}{2}\right) \right).
\end{aligned}$$

Ahora bien, el operador de densidad, escrito en la base de  $S_z$  está dado por

$$\begin{aligned}
\rho &= (\alpha |+\rangle + \beta |-\rangle) (\alpha^* \langle +| + \beta^* \langle -|), \\
\Rightarrow \rho &= \alpha \alpha^* |+\rangle \langle +| + \alpha \beta^* |+\rangle \langle -| + \beta \alpha^* |-\rangle \langle +| + \beta \beta^* |-\rangle \langle -|,
\end{aligned}$$

o en forma matricial

$$\rho = \begin{pmatrix} \alpha \alpha^* & \alpha \beta^* \\ \beta \alpha^* & \beta \beta^* \end{pmatrix}.$$

Notemos que  $\mathcal{P}\left(\frac{\hbar}{2}\right) = \alpha \alpha^*$  y  $\mathcal{P}\left(-\frac{\hbar}{2}\right) = \beta \beta^*$ , tenemos que

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (1 + \cos(\theta) \cos(\omega_0 T)) & \alpha \beta^* \\ \beta \alpha^* & \frac{1}{2} (1 - \cos(\theta) \cos(\omega_0 T)) \end{pmatrix},$$

si ahora trabajamos con los productos,  $\alpha \beta^*$  y  $\beta \alpha^*$ , tenemos que

$$\begin{aligned}
\alpha \beta^* &= \frac{1}{4} \left( \eta_1 \exp\left(\frac{-i\omega_0 T}{2}\right) + \eta_2 \exp\left(\frac{i\omega_0 T}{2}\right) \right) \left( \eta_1 \exp\left(\frac{i\omega_0 T}{2}\right) - \eta_2 \exp\left(\frac{-i\omega_0 T}{2}\right) \right), \\
\Rightarrow \alpha \beta^* &= \frac{1}{4} \left( \eta_1^2 + \eta_2^2 - \eta_1 \eta_2 (\exp(i\omega_0 T) - \exp(-i\omega_0 T)) \right), \\
\Rightarrow \alpha \beta^* &= \frac{1}{4} (2 - 2 \cos(\theta) (-i \sin(\omega_0 T))), \\
\therefore \alpha \beta^* &= \frac{1}{2} (1 + i \cos(\theta) \sin(\omega_0 T)).
\end{aligned}$$

Por otra parte, es claro que  $\beta \alpha^* = (\alpha \beta^*)^*$ , ya que estos conmutan entre sí, de manera que

$$\beta \alpha^* = \frac{1}{2} (1 - i \cos(\theta) \sin(\omega_0 T)).$$

Si reunimos todos los resultados, tenemos que

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (1 + \cos(\theta) \cos(\omega_0 T)) & \frac{1}{2} (1 + i \cos(\theta) \sin(\omega_0 T)) \\ \frac{1}{2} (1 - i \cos(\theta) \sin(\omega_0 T)) & \frac{1}{2} (1 - \cos(\theta) \cos(\omega_0 T)) \end{pmatrix},$$

o bien

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos(\theta) \cos(\omega_0 T) & 1 + i \cos(\theta) \sin(\omega_0 T) \\ 1 - i \cos(\theta) \sin(\omega_0 T) & 1 - \cos(\theta) \cos(\omega_0 T) \end{pmatrix},$$

justo como queríamos demostrar.

(d) Sabemos que  $S_x, S_y$  y  $S_z$  están dadas por

$$S_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, S_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, S_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ahora bien, para  $Tr(\rho_1 S_z)$ , tenemos

$$\begin{aligned} Tr(\rho_1 S_z) &= Tr \left( \begin{pmatrix} 1 + \cos(\theta) \cos(\omega_0 T) & \sin(\theta) + i \cos(\theta) \sin(\omega_0 T) \\ \sin(\theta) - i \cos(\theta) \cos(\omega_0 T) & 1 + \cos(\theta) \cos(\omega_0 T) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right), \\ \implies Tr(\rho_1 S_z) &= Tr \left( \begin{pmatrix} 1 + \cos(\theta) \cos(\omega_0 T) & -\sin(\theta) - i \cos(\theta) \sin(\omega_0 T) \\ \sin(\theta) - i \cos(\theta) \cos(\omega_0 T) & -1 - \cos(\theta) \cos(\omega_0 T) \end{pmatrix} \right), \\ &\therefore Tr(\rho_1 S_z) = 0. \end{aligned} \quad (0.20)$$

Para  $Tr(\rho_1 S_x)$ , tenemos

$$\begin{aligned} Tr(\rho_1 S_x) &= Tr \left( \begin{pmatrix} 1 + \cos(\theta) \cos(\omega_0 T) & \sin(\theta) + i \cos(\theta) \sin(\omega_0 T) \\ \sin(\theta) - i \cos(\theta) \cos(\omega_0 T) & 1 + \cos(\theta) \cos(\omega_0 T) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right), \\ \implies Tr(\rho_1 S_x) &= Tr \left( \begin{pmatrix} \sin(\theta) + i \cos(\theta) \sin(\omega_0 T) & 1 + \cos(\theta) \cos(\omega_0 T) \\ 1 + \cos(\theta) \cos(\omega_0 T) & \sin(\theta) - i \cos(\theta) \cos(\omega_0 T) \end{pmatrix} \right), \\ &\therefore Tr(\rho_1 S_x) = 2 \sin(\theta). \end{aligned} \quad (0.21)$$

Finalmente, para  $Tr(\rho_1 S_y)$ , tenemos

$$\begin{aligned} Tr(\rho_1 S_y) &= Tr \left( \begin{pmatrix} 1 + \cos(\theta) \cos(\omega_0 T) & \sin(\theta) + i \cos(\theta) \sin(\omega_0 T) \\ \sin(\theta) - i \cos(\theta) \cos(\omega_0 T) & 1 + \cos(\theta) \cos(\omega_0 T) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right), \\ \implies Tr(\rho_1 S_y) &= Tr \left( \begin{pmatrix} i \sin(\theta) - \cos(\theta) \sin(\omega_0 T) & -i \sin(\theta) + \cos(\theta) \sin(\omega_0 T) \\ i + i \cos(\theta) \cos(\omega_0 T) & -i \sin(\theta) - \cos(\theta) \cos(\omega_0 T) \end{pmatrix} \right), \\ &\therefore Tr(\rho_1 S_y) = -2 \cos(\theta) \sin(\omega_0 T) \end{aligned} \quad (0.22)$$