Mecánica Cuántica. Tarea 7

Grupo CO11 Trimestre 21-I
Profesor: Miguel Angel Bastarrachea Magnani
Ayudante: Yoshua Chávez Bolaños,
Fecha: Miércoles 12 de mayo de 2021.
Fecha de entrega: Miércoles 19 de mayo de 2021.

1. Partiendo de que $Y_l^m(\theta,\varphi) = \langle\theta,\varphi|l,m\rangle$ muestre que la forma general de los armónicos esféricos está dada por:

$$Y_{jm} = (-1)^m \left(\frac{2j+1}{4\pi}\frac{(j-m)!}{(j+m)!}\right)^{1/2} P_j^m(\cos\theta)e^{im\varphi}$$

donde $P_j^m(u) = (-1)^{j+m}\dfrac{(j+m)!}{(j-m)!}\dfrac{(1-u^2)^{-m/2}}{2^j j!}\left(\dfrac{d}{du}\right)^{j-m}(1-u^2)^j$ son los polinomios asociados de Legendre.
Hint: Calcule los valores $\langle\theta,\varphi|\,J_z\,|j,m\rangle$ *y* $\langle\theta,\varphi|\,J_\pm\,|j,m\rangle$ *remplazando a* J_z *y* $J_\pm$ *en coordenadas esféricas.*

2. Considera una partícula sin espín ligada a un centro fijo por un potencial de fuerza central.

   (a) Relaciona, tanto como sea posible, las matrices de elementos

$$\langle n',l',m'|\mp\frac{1}{\sqrt{2}}(x+\mathrm{i}y)\,|n,l,m\rangle, \qquad \langle n',l',m'|\,z\,|n,l,m\rangle$$

   usando *sólo* el teorema de Wigner-Eckart. Asegúrate de establecer bajo qué condiciones la matriz de elementos es no nula.

   (b) Haz el mismo problema usando la función de onda $\psi(\mathbf{x}) = R_{nl}(r)Y_l^m(\theta,\phi)$. Donde asumimos que la función de onda $\psi_{nlm}(\vec{x}) = \langle\vec{x}|n,l,m\rangle = R_{nl}(r)Y_l^m(\theta,\varphi)$ es separable, donde $R_{nl}(r)$ es la función radial y n el nmero cuántico radial.

3. Utiliza el teorema de Wigner-Eckart para encontrar el valor de la integral

$$\int Y_l^{m*}(\theta,\phi)Y_{l_1}^{m_1*}(\theta,\phi)Y_{l_2}^{m_2*}(\theta,\phi)d\Omega$$

4. Dos partículas tienen momentos angulares $l_1 = 1$ y $l_2 = 2$. Obtener explícitamente los coeficientes del desarrollo del estado $|l_1,l_2;L=1,M=1\rangle$ como combinación lineal de los estados $|l_1,m_1\rangle\,|l_2,m_2\rangle$.

5. Un núcleo de espín 3/2 situado en el origen está sujeto a un campo eléctrio inhomogeneo externo. La interacción de cuadrupolo eléctrico básica pueden ser tomada como

$$H_{int} = \frac{eQ}{2s(s-1)\hbar^2}\left[\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)_0 S_x^2 + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)_0 S_y^2 + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right)_0 S_z^2\right]$$

donde ϕ es un potencial electrostático que satisface la ecuación de Laplace y los ejes coordenados son tales que

$$\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}\right)_0 = \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z}\right)_0 = \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z}\right)_0 = 0.$$

Muestra que la energía de interacción puede ser escrita como

$$A(3S_z^2 - \mathbf{S}^2) + B(S_x^2 - S_y^2) + B(S_+^2 + S_-^2)$$

y expresa A y B en términos de $(\partial^2\phi/\partial x^2)_0$ y así sucesivamente. Determine los eigenkets de energía (en términos de $|m\rangle$, donde $m = \pm 3/2, \pm 1/2$) y sus correspondientes eigenvalores. ¿Existe alguna degeneración?