Mecánica Cuántica. Examen 2*†

José Emmanuel Flores Calderón

Fecha: 24/05/2021.

1. **Preguntas conceptuales.** Responde a las siguientes preguntas.

   (a) ¿Cómo se relacionan las leyes de conservación con las simetrías en mećanica cuántica?
   Sol.
   En física el concepto de simetría es muy importante, no solo en la mecánica cuántica. Sin embargo como es de esperarse hay resultados importantes de la mecánica cuántica que tienen que ver con argumentos de simetría. De manera general, el Teorema de Noether nos dice que si tenemos alguna simetria en nuestro sistema, esto implica una ley de conservación, tal es el caso de la simetria ante traslaciones lineales, la cual nos conduce a la ley de conservación de momento lineal. Si hay simetria ante rotacciones obtenemos la ley de conservación de momento angular y si hay simetria de traslación temporal, obtenemos la conservación de la energía, esto por mencionar algunas.

   (b) ¿Qué es la simetría de traslación discreta y qué son las funciones de Bloch?
   Sol.
   La simetría de traslación discreta aparece cuando tenemos un potencial que es periodico respecto a un parámetro a. Decimos que es V es periodico si

   $$V\left(x+a\right)=V\left(x\right),\quad \forall x.$$

   Cuando tenemos un potencial de este estilo, el Hamiltoniano resulta que satisface

   $$\left[H,\tau\left(a\right)\right]=0,$$

   donde τ es el operador de traslación. Y por lo tanto $\tau\left(a\right)$ y el Hamiltoniano se pueden diagonalizar de manera simultanea. Por otra parte, las funciones de Bloch u_k son funciones periodicas de periodo a (para este caso partícular), es decir

   $$u_k\left(x\right)=u_k\left(x\pm a\right),$$

   las cuales aparecen cuando queremos encontrar las funciones propias del Hamiltoniano.

   (c) ¿Qué es un operador antiunitario y por qué el operador de inversión temporal debe serlo?
   Sol.
   Sean dos kets $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$, junto con un operador θ arbitrario, y sean $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Además, consideremos a los kets$|\tilde{\alpha}\rangle, |\tilde{\beta}\rangle$ dados por

   $$|\tilde{\alpha}\rangle=\theta|\alpha\rangle \quad \& \quad |\tilde{\beta}\rangle=\theta|\beta\rangle.$$

   Decimos que θ es antiunitario si satisface que

   $$\langle\tilde{\beta}|\tilde{\alpha}\rangle=\langle\beta|\alpha\rangle^*,$$

   junto con

   $$\theta\left(c_1|\alpha\rangle+c_2|\beta\rangle\right)=c_1^*\theta|\alpha\rangle+c_2^*\theta|\beta\rangle.$$

   Por otra parte, cuando queremos ver si las soluciones de la ecuación de Schrödinger son invariantes temporales, es decir, permanecen invariantes ante el cambio $t\to -t$, vemos que éstas no son invariantes. Este es el punto de partida para definir a los operadores antiunitarios. Ahora bien, si el operador de inversión temporal no se considera unitario, aparecen inconsistencias con el espectro de energías, incluso para los casos más simples. La única manera de evitar esas incosistencias es si consideramos al operador de inversion temporal antiunitario.

*Grupo C011 | Trimestre 21-1

†Profesor: Miguel Angel Bastarrachea Magnani | Ayudante: Yoshua Chávez Bolaños

(d) ¿Qué son los coeficientes de Clebsch-Gordan?

Sol.

Cuando estamos trabajando en problemas de momento angular que involucran a más de un sistema, es posible escoger dos representaciones diferentes, con las cuales obtenemos la misma información física. Los coeficientes de Clebsch-Gordan nos relacionan una representación con otra, es decir son un análogo a los elementos de una matriz de cambio de base (representación). Por ejemplo, supongamos que tenemos dos sistemas donde definimos

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S} = \mathbf{L} \otimes \mathbf{1}_S + \mathbf{1}_L \otimes \mathbf{S}.$$

En general, podemos escoger como kets base los eigenkets de $\mathbf{J}^2, J_z, \mathbf{L}^2$ y $\mathbf{S}^2$, o bien en términos de los eigenkets de $\mathbf{L^2}, \mathbf{S}^2, L_z$ y S_z. Entonces los coeficientes de Clebsch-Gordan nos relacionan ambas bases.

(e) ¿Qué enuncia el Teorema de Wigner-Eckart y por qué es importante?

Sol.

El Teorema de Wigner-Eckart dice que los elementos de matriz de un operador tensorial esferico expresados en la base de los eigenestados de momento angular pueden ser expresados como el producto de dos factores, uno de los cuales es independiente de la orientación del momento angular y el otro un factor geometrico que resultan ser los coeficientes de Clebsch-Gordan. La importancia de este teorema reside en que nos dice el comportamiento de operadores tensoriales se comportan es un subespacio. Esto es, dado un subespacio, una componente del operador tensorial se comportará de una forma que es proporcional a la misma componente del operador de momento angular.

2. **Doble pozo rectangular simétrico.** Considera un potencial de doble pozo rectangular simétrico

$$V = \begin{cases} \infty & |x| > a+b \\ 0 & a < |x| < a+b \\ V_0 & |x| < a \end{cases}.$$

Suponiendo que V_0 es muy alto comparado con las energías cuantizadas de los estados bajos, obten una expresión aproximada de la separación de energía entre los dos estados más bajos.

Solución.

Si suponemos que la barrera de potencial es infinitamente grande, entonce recuperamos el caso en el que los niveles de energía son aquellos del caso degenerado. Esto es, los dos niveles más bajos son los del caso degenerado, cuyas eigenfunciones propias son ondas sinusoidales con $\lambda = 2b$. Ahora consideremos la paridad de las funciones de onda. Si ahora suponemos que la barrera es de tamaño finito, consideremos las combinaciones simetríca y antisimétrica dentro de la barrera. Consideremos solamente la solución para $x \geq 0$ y sea la eigenfunción

$$u(x) = A \sin\left[k(x-a-b)\right], \quad a \leq x \leq a+b,$$

con energía propia dada por

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}.$$

La función de onda escrita de esta forma claramente satisface

$$u(a+b) = 0,$$

y es válida tanto para la parte simétrica como para la antisimétrica. Ahora bien, sabemos que

$$u_s(x) = B\cosh(\omega x) \quad \& \quad u_a(x) = B\sinh(\omega x) \quad 0 \leq x \leq a$$

son las soluciones para la parte simétrica y antisimétrica, respectivamente, con eigenenergía dada por

$$V_0 - E = \frac{h^2 \omega_{s,a}^2}{2m},$$

donde el subíndice indica si es para la parte simétrica o antisimétrica. Por otra parte, si calculamos las derivadas de las funciones de onda, tenemos

$$u'(x) = kA\cos\left[k\left(x-a-b\right)\right],$$

$$u_s'(x) = -kB\sinh(\omega x),$$

$$u_a'(x) = kB\cosh(\omega x).$$

Ahora bien, sabemos que la función de onda y su derivada deben ser continuas en $x=a$, de modo que para la parte simétrica, tenemos las siguientes relaciones

$$u(a) + u_s(a) = 0 \implies A_s\sin k_s b + B_s\cosh\omega_s a = 0, \tag{0.1}$$

$$u'(a) + u_s'(a) = 0 \implies k_s A_s\cos k_s b - \omega_s B_s\sinh\omega_s a = 0. \tag{0.2}$$

Mientras que para la parte antisimétrica

$$u(a) + u_a(a) = 0 \implies A_a\sin k_a b + B_a\cosh\omega_a a = 0, \tag{0.3}$$

$$u'(a) + u_a'(a) = 0 \implies -k_a A_a\sin k_a b + \omega_a B_a\sinh\omega_a a = 0. \tag{0.4}$$

Dado que $E \ll V_0$, tenemos que $V_0 - E \approx V_0$, entonces

$$V_0 \approx V_0 - E = \frac{h^2k^2}{2m} \implies V_0 \approx \frac{h^2k^2}{2m} \implies k \approx \frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar}.$$

Ahora bien, dado que el siguiente análisis es el mismo tanto para $\omega_s$como para ω_a, hagamos el siguiente cambio de variable

$$\omega_a = \omega_s = \omega = \frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar}.$$

Ahora bien, de las ecuaciones (0.1) y (0.2), tenemos que

$$A_s\sin k_s b = -B_s\cosh\omega a \quad \& \quad k_s A_s\cos k_s b = k_s B_s\sinh\omega a,$$

con lo cual, si dividimos la primera entre la segunda, tenemos

$$\frac{A_s\sin k_s b}{k_s A_s\cos k_s b} = \frac{-B_s\cosh\omega a}{\omega B_s\sinh\omega a} \implies \frac{1}{k_s}\tan(k_s b) = -\frac{1}{\omega}\coth(\kappa b). \tag{0.5}$$

Considerando ahora las ecuaciones dadas en (0.3) y (0.4), tenemos que

$$A_a\sin k_a b = -B_a\cosh\omega a \quad \& \quad k_a A_a\cos k_a b = \omega B_a\sinh\omega a,$$

nuevamente, si dividimos la primera entre la segunda, tenemos que

$$\frac{A_a\sin k_a b}{k_a A_a\cos k_a b} = \frac{-B_a\sinh\omega a}{\omega B_a\cosh\omega a} \implies \frac{1}{k_a}\tan(k_a b) = -\frac{1}{\omega}\tanh(\kappa a). \tag{0.6}$$

Dado que esperamos que λ sea solo un poco mas grande que $2b$, propongamos

$$\lambda = (1+\epsilon)\,2b \implies kb = \frac{2\pi b}{\lambda} = \frac{2\pi b}{(1+\epsilon)\,2b},$$

$$\implies kb = \frac{\pi}{(1+\epsilon)}.$$

Si ahora aproximamos el término $(1+\epsilon)$ a primer orden, tenemos que

$$kb \approx \pi(1-\epsilon),$$

de modo que

$$\tan(kb) = \frac{\sin(kb)}{\cos(kb)} = kb - \pi,$$

por lo tanto la ecuación dada en (0.5) se aproxima como

$$\frac{k_s b - \pi}{k_s} = -\frac{1}{\omega} \coth(\kappa b), \tag{0.7}$$

mientras que para la ecuación dada en (0.6), se tiene que

$$\frac{k_a b - \pi}{k_a} = -\frac{1}{\omega} \tanh(\kappa b). \tag{0.8}$$

De la ecuación (0.7) tenemos que

$$b - \frac{\pi}{k_s} = -\frac{1}{\omega} \coth(\kappa b) \implies \frac{\pi}{k_s} = b + \frac{1}{\omega} \coth(\kappa b) \implies k_s = \frac{\pi}{b + \frac{1}{\omega} \coth(\kappa b)},$$

$$\implies k_s = \frac{\pi\omega}{(\omega b + \coth(\kappa b))}.$$

Y de manera análoga para k_a

$$k_a = \frac{\pi\omega}{(\omega b + \tanh(\kappa b))}.$$

De modo que las energías quedan escritas como

$$E_S = \frac{\hbar^2 k_s^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2 \omega^2}{2m} \frac{1}{(\omega b + \coth(\kappa b))^2},$$

$$E_a = \frac{\hbar^2 k_a^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2 \omega^2}{2m} \frac{1}{(\omega b + \tanh(\kappa b))^2}.$$

Si ahora definimos a $\Delta E = E_a - E_s$, entonces tenemos que

$$\Delta E = \frac{\hbar^2 \pi^2 \omega^2}{2m} \left[\frac{1}{(\omega b + \tanh(\kappa b))^2} - \frac{1}{(\omega b + \coth(\kappa b))^2} \right],$$

la cual corresponde a la separación entre energías para los estados más bajos.

3. **Cálculo de coeficientes de Clebsch-Gordan.**

   (a) Demostrar la regla de selección tal que

   $$\langle j_1 j_2; 00 | j_1 j_2; j0 \rangle = 0,$$

   cuando $j_1 + j_2 - j$ es un número impar.

   (b) Mostrar que

   $$\langle j1; j0 | j1; jj \rangle = \sqrt{\frac{j}{j+1}}.$$

   (c) Mostrar que

   $$\langle j0; m0 | j0; jm \rangle = \frac{1}{\sqrt{2j+1}}.$$

   (d) Mostrar que

   $$\langle jj; m, -m | jj; 00 \rangle = \frac{(-1)^{j-m}}{\sqrt{2j+1}}.$$

Solución.

(a) La manera usual en la que se construyen los coeficientes de Clebsch-Gordan $|j_1 j_2; jm\rangle$ es aplicando el operador J_- a los kets $|j_1 j_2; jj\rangle$. Aunque tambien es posible comenzar con los kets $|j_1 j_2; j-j\rangle$ y aplicarle el operador J_+, el razonamiento es el mismo y se encuentra que para kets $|j_1 j_2; j-m\rangle$ tienen los mismos coeficientes de expansión que $|j_1 j_2; -m_1 - m_2\rangle$ justo como en el caso anterior. La única diferencia aparece esta relacionada con las convenciones de fase para los kets $|j_1 j_2; jm\rangle$. Dado que se quiere que $\langle j_1 j_2; -j_1 - j + j_1 | j_1 j_2; j - j\rangle$ sea real y positivo, de manera que se tiene que cumplir la siguiente relación

$$\langle j_2 j_1; -m_1 m_2 | j_1 j_1; j-m\rangle = (-1)^{j_1+j_2-j} \langle j_2 j_1; m_1 m_2 | j_1 j_1; jm\rangle.$$

Ahora bien, si de la ecuación anterior, tomamos que $m_1 = m_2 = 0 \implies m = 0$, con lo cual

$$\langle j_2 j_1; 00 | j_1 j_1; j0\rangle = (-1)^{j_1+j_2-j} \langle j_2 j_1; 00 | j_1 j_1; j0\rangle,$$

recordemos que los coeficientes deben ser reales y positivos, de manera que aquellos para los cuales $(-1)^{j_1+j_2-j}$ sea negativo, por construcción son cero, y lo anterior pasa siempre que $j_1 + j_2 - j$ es impar.

(b) Una de las relaciones de recurrencia para los simbolos de Clebsch-Gordan nos dice que

$$\sqrt{j(j+1) - m(m-1)}\langle j_1 j_2; m_1 m_2 | jm\rangle = \sqrt{j_1(j_1+1) - m_1(m_1+1)}\langle j_1 j_2; m_1 + 1 m_2 | jm\rangle$$
$$+\sqrt{j_2(j_2+1) - m_2(m_2+1)}\langle j_1 j_2; m_1 m_2 + 1 | jm\rangle.$$

Si en la expresión anterior, hacemos $j_1 = j, j_2 = 1, m_1 = j, m_2 = 0$ y $m = j$, tenemos que

$$\sqrt{2j}\langle j1; j0 | jj\rangle = \sqrt{2}\langle j1; j1 | jj\rangle,$$
$$\implies \sqrt{j}\langle j1; j0 | jj\rangle = \langle j1; j1 | jj\rangle.$$

La ecuación anterior es un caso particular de las relaciones de recurrencia, de modo que todos los coeficientes tienen la misma estructura. Si ahora usamos las relaciones de ortogonalidad para los coeficientes, tenemos que se debe cumplir

$$\sum_j \left(\frac{\langle j1; j1 | jj\rangle}{\sqrt{j}}\right)^2 = 1$$

, pero

$$\sum_j \left(\frac{\langle j1; j1 | jj\rangle}{\sqrt{j}}\right)^2 = (j+1)\left(\frac{\langle j1; j1 | jj\rangle}{\sqrt{j}}\right)^2,$$

de modo que

$$\langle j1; j0 | jj\rangle = \sqrt{\frac{j}{j+1}},$$

justo como se queria demostrar.

(c) Ahora bien, para esta demostración, hacemos uso de la siguiente relación de recursión para los simbolos de Clebsch-Gordan

$$\sqrt{j(j+1) - m(m+1)}\langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; jm\rangle = \sqrt{j_1(j_1+1) - m_1(m_1-1)}\langle j_1 j_2; m_1 - 1 m_2 | j_1 j_2; jm\rangle$$
$$+\sqrt{j_2(j_2+1) - m_2(m_2-1)}\langle j_1 j_2; m_1 m_2 - 2 | j_1 j_2; jm\rangle.$$

Si hacemos que $j_2 = m_2 = 0$, tenemos que

$$\sqrt{j(j+1) - m(m+1)}\langle j_1 0; m_1 0 | j_1 0; jm\rangle = \sqrt{j_1(j_1+1) - m_1(m_1-1)}\langle j_1 0; m_1 - 10 | j_1 0; jm\rangle,$$

si ahora hacemos que $j_1 = j$ y $m_1 = m$, tenemos

$$\sqrt{j(j+1) - m(m+1)}\langle j0; m0 | j0; jm\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m-1)}\langle j0; m - 10 | j0; jm\rangle,$$

$$\Longrightarrow \langle j0; m0|j0; jm\rangle = \langle j0; m-10|j0; jm\rangle.$$

De la relación anterior, se sigue que todos los coeficientes de Clebsch-Gordan tienen esa forma y son iguales, de modo que, si usamos la ortogonalidad de éstos, tenemos que

$$\sum_j \langle j0; m0|j0; jm\rangle^2 = 1,$$

pero como todos son iguales y la suma va de $-j$ a j, tenemos que

$$\sum_j \langle j0; m0|j0; jm\rangle^2 = (2j+1)\,\langle j0; m0|j0; jm\rangle^2 = 1,$$

$$\Longrightarrow \langle j0; m0|j0; jm\rangle^2 = \frac{1}{(2j+1)}.$$

Y por lo tanto, tenemos que

$$\langle j0; m0|j0; jm\rangle = \frac{1}{(2j+1)},$$

justo como se quería demostrar.

(d) Las relaciones de recurrencia para los coeficientes de Clebsch-Gordan nos dicen que

$$\sqrt{(j\mp m)\,(j\pm m+1)}\langle j_1 j_2; m_1 m_2|j_1 j_2; j, m\pm 1\rangle = \sqrt{(j_1\pm m_1+1)\,(j_1\pm m_1)}\langle j_1 j_2; m\mp 1, m_2|j_1 j_2; jm\rangle$$
$$+\sqrt{(j_2\mp m_2+1)\,(j_2\pm m_2)}\langle j_1 j_2; m1, m_2\mp 1|j_1 j_2; jm\rangle.$$

Una forma más «natural», de escribir las raices es la siguiente

$$\sqrt{(j\mp m)\,(j\pm m+1)} = \sqrt{j^2\pm jm+j\mp mj-m^2\mp m} = \sqrt{j\,(j+1)-m\,(m\pm 1)},$$

y como las demás raíces tienen la misma estructura, se sigue que podemos escribir la relación de recurrencia como

$$\sqrt{j\,(j+1)-m\,(m\pm 1)}\langle j_1 j_2; m_1 m_2|j_1 j_2; j, m\pm 1\rangle = \sqrt{j_1\,(j_1+1)-m_1\,(m_1\pm 1)}\langle j_1 j_2; m\mp 1, m_2|j_1 j_2; jm\rangle$$
$$+\sqrt{j_2\,(j_2+1)-m_2\,(m_2\pm 1)}\langle j_1 j_2; m1, m_2\mp 1|j_1 j_2; jm\rangle$$

Si ahora tomamos la relación de recurrencia para $\langle j_1 j_2; m_1 m_2|j_1 j_2; j, m+1\rangle$, esta tiene la forma

$$\sqrt{j\,(j+1)-m\,(m+1)}\langle j_1 j_2; m_1 m_2|j_1 j_2; j, m+1\rangle = \sqrt{j_1\,(j_1+1)-m_1\,(m_1-1)}\langle j_1 j_2; m-1, m_2|j_1 j_2; jm\rangle$$
$$+\sqrt{j_2\,(j_2+1)-m_2\,(m_2\pm 1)}\langle j_1 j_2; m1, m_2-1|j_1 j_2; jm\rangle. \tag{0.9}$$

Si ahora hacemos $m=j$, tenemos que

$$0 = \sqrt{j_1\,(j_1+1)-m_1\,(m_1-1)}\langle j_1 j_2; m-1, m_2|j_1 j_2; jj\rangle + \sqrt{j_2\,(j_2+1)-m_2\,(m_2\pm 1)}\langle j_1 j_2; m1, m_2-1|j_1 j_2; jj\rangle,$$

entonces

$$\langle j_1 j_2; m_1-1, m_2|j_1 j_2; jj\rangle = -\frac{\sqrt{j_2\,(j_2+1)-m_2\,(m_2\pm 1)}}{\sqrt{j_1\,(j_1+1)-m_1\,(m_1-1)}}\langle j_1 j_2; m_1, m_2-1|j_1 j_2; jj\rangle. \tag{0.10}$$

El radical del lado derecho de la ecuación, nos dice que la relación nunca es cero ni infinito, esto es así debido a los posibles valores que pueden tomar las m_1 y las m_2. Por lo tanto la ecuación anterior implica que si $\langle j_1 j_2; j_1, j-j_1|j_1 j_2; jj\rangle$ fuera cero, entonces $\langle j_1 j_2; j_1-1, j-j_1+1|j_1 j_2; jj\rangle$ tambien seria cero. Pero esto es imposible dado que el ket $|j_1 j_2, jj\rangle$ esta normalizado y no puede ser cero. Por lo tanto, todos los coeficientes $\langle j_1 j_2; m_1, J-m_1|j_1 j_2; jj\rangle$ con $j_1 \geq m_1 \geq j-j_2$ son diferentes de cero. Ahora bien, de manera partícular, el coeficiente $\langle j_1 j_2; j_1, j - j_1 | j_1 j_2; jj\rangle$, en el cual m_1 toma su valor máximo, no es cero. Para fijar la fase del ket $|j_1 j_2, jj\rangle$ es necesario que este coeficiente satisfaga la siguiente condición

$$\langle j_1 j_2; j_1, j - j_1 | j_1 j_2; jj\rangle \in \mathbb{R}^+,$$

es decir, sea real y positivo. Por lo tanto la ecuación (0.10) implica que los coeficientes

$$\langle j_1 j_2; m_1, j - m_1 | j_1 j_2; jj\rangle$$

son reales, y el signo de cada uno esta dado por $(-1)^{j_1 - m_1}$. Si ahora consideramos la relación de recurrencia para $\langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; j, m-1\rangle$, tenemos que

$$\sqrt{j\,(j+1) - m\,(m-1)}\langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; j, m-1\rangle = \sqrt{j_1\,(j_1+1) - m_1\,(m_1+1)}\langle j_1 j_2; m_1+1, m_2 | j_1 j_2; jm\rangle$$
$$+\sqrt{(j_2 + m_2 + 1)\,(j_2 + m_2)}\langle j_1 j_2; m1, m_2+1 | j_1 j_2; jm\rangle$$

y si hacemos que $j_1 = j_2 = j, m_1 = m, m_2 = -m-1$ y $j = m = 0$, tenemos que

$$0 = \sqrt{j\,(j+1) - m\,(m+1)}\langle jj; m+1, -m-1 | j_1 j_2; 00\rangle + \sqrt{j\,(j+1) - (-m-1)\,(-m-1\pm 1)}\langle jj; m, -m | jj; 00\rangle,$$
$$\implies \langle jj; m+1, -\,(m+1)\,| j_1 j_2; 00\rangle = -\langle jj; m, -m | jj; 00\rangle.$$

La relación anterior quiere decir que todos los simbolos de Clebsch-Gordan son de la misma forma que $\langle jj; m, -m | jj; 00\rangle$ e iguales en modulo. Por la discusión anterior, sabemos que los coeficientes cambian de signo cuando m cambia, de manera que el signo esta dado por $(-1)^{j-m}$. Si ahora consideramos las relaciones de ortogonalidad, tenemos que

$$\sum_{m=-j}^{j} \langle jj; m, -m | jj; 00\rangle^2 = 1,$$

pero como todos tienen la misma forma, tenemos una suma de la siguiente forma

$$\sum_{m=-j}^{j} \alpha = (2j+1)\,\alpha,$$

ya que estamos de $-j$ a j hay $2j+1$ pasos, por lo tanto

$$\sum_{m=-j}^{j} \langle jj; m, -m | jj; 00\rangle^2 = (2j+1)\,\langle jj; m, -m | jj; 00\rangle^2 = 1,$$

$$\implies \langle jj; m, -m | jj; 00\rangle^2 = \frac{1}{(2j+1)},$$

si ahora consideramos el signo de cada uno de los coeficientes, tenemos que

$$\langle jj; m, -m | jj; 00\rangle = \frac{(-1)^{j-m}}{\sqrt{2j+1}},$$

justo como se queria demostrar.

4. **Interacción Zeeman.** Como una aplicación del teorema de proyección, considera la interacción Zeeman debida al momento dipolar magnético en el átomo de hidrogeno

$$H_{int} = -\overrightarrow{\mu}\cdot\mathbf{B},$$

donde el operador de momento dipolar magnético es

$$\overrightarrow{\mu} = -\mu_B\,(g_l\mathbf{L} + g_s\mathbf{S})\,,$$

con $g_l = 1$ y $g_s = 2$.

(a) Si la acción del anterior Hamiltoniano es pequeña comparada con la interacción de estructura fina e ignorando la estructura hiperfina, usa el teorema de proyección para mostrar que en un estado (n, l, j), el momento magnético tiene la forma

$$\overrightarrow{\mu} = -g_J \mu_B \mathbf{J},$$

donde

$$g_J = \frac{3}{2} + \frac{S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)},$$

se conoce como el factor g de Landé.

(b) Estimar la intensidad del campo magnético para la cual la interacción de Zeeman se vuelve del orden de la separación debida a la estructura fina entre los estados $2p_{1/2}$ y $2p_{3/2}$.

Sol.

(a) Supongamos que $\mathbf{B}$ apunta en la dirección de z, de modo que

$$H_{int} = -\mu_B (g_l \mathbf{L} + g_s \mathbf{S}) \cdot \mathbf{B} = -\mu_B B (L_z + 2S_z),$$
$$\implies H_{int} = -\mu_B (\mathbf{L} \cdot \mathbf{B} + 2\mathbf{S} \cdot \mathbf{B}). \tag{0.11}$$

Para calcular el efecto del campo magnetico sobre los niveles de energía del átomo, solo consideraremos los elementos de la matriz H_1 dentro del subespacio $\mathcal{E}(E_0, L, S, J)$, dentro del cual se tiene (en virtud del teorema de proyección)

$$\mathbf{L} = \frac{\langle \mathbf{L} \cdot \mathbf{J} \rangle_{E_0,L,S,J}}{J(J+1)\hbar^2}\mathbf{J} \quad \& \quad \mathbf{S} = \frac{\langle \mathbf{S} \cdot \mathbf{J} \rangle_{E_0,L,S,J}}{J(J+1)\hbar^2}\mathbf{J}, \tag{0.12}$$

donde $\langle \mathbf{L} \cdot \mathbf{J} \rangle_{E_0,L,S,J}$ y $\langle \mathbf{L} \cdot \mathbf{J} \rangle_{E_0,L,S,J}$ denotan los valores promedios de los operadores $\mathbf{L} \cdot \mathbf{J}$ y $\mathbf{S} \cdot \mathbf{J}$ para los estados del sistema que pertenecen al subespacio $\mathcal{E}(E_0, L, S, J)$. Recordemos que $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$, entonces

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{J} = \mathbf{L} \cdot (\mathbf{L} + \mathbf{S}) = \mathbf{L}^2 + \frac{1}{2}\left(\mathbf{J}^2 - \mathbf{L}^2 - \mathbf{S}^2\right),$$

junto con

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{J} = \mathbf{L} \cdot (\mathbf{L} + \mathbf{S}) = \mathbf{S}^2 + \frac{1}{2}\left(\mathbf{J}^2 - \mathbf{L}^2 - \mathbf{S}^2\right),$$

de manera que

$$\langle \mathbf{L} \cdot \mathbf{J} \rangle_{E_0,L,S,J} = L(L+1)\hbar^2 + \frac{\hbar^2}{2}\left[J(J+1) - L(L+1) - S(S+1)\right], \tag{0.13}$$

junto con

$$\langle \mathbf{S} \cdot \mathbf{J} \rangle_{E_0,L,S,J} = S(L+1)\hbar^2 + \frac{\hbar^2}{2}\left[J(J+1) - L(L+1) - S(S+1)\right]. \tag{0.14}$$

Si ahora sustituimos la ecuación (0.13) en la primera de las ecuaciones dadas en (0.12), tenemos que

$$\mathbf{L} = \frac{\langle \mathbf{L} \cdot \mathbf{J} \rangle_{E_0,L,S,J}}{J(J+1)\hbar^2}\mathbf{J} = \frac{\mathbf{J}}{J(J+1)\hbar^2}\left(L(L+1)\hbar^2 + \frac{\hbar^2}{2}\left[J(J+1) - L(L+1) - S(S+1)\right]\right),$$
$$\implies \mathbf{L} = \left(\frac{L(L+1)}{J(J+1)} + \frac{1}{2J(J+1)}\left[J(J+1) - L(L+1) - S(S+1)\right]\right)\mathbf{J}. \tag{0.15}$$

Si ahora sustituimos la ecuación (0.14) en la segunda de las ecuaciones dadas en (0.12), tenemos que

$$\mathbf{S} = \frac{\langle \mathbf{S} \cdot \mathbf{J} \rangle_{E_0,L,S,J}}{J(J+1)\hbar^2}\mathbf{J} = \frac{\mathbf{J}}{J(J+1)\hbar^2}\left(S(L+1)\hbar^2 + \frac{\hbar^2}{2}\left[J(J+1) - L(L+1) - S(S+1)\right]\right),$$
$$\mathbf{L} = \left(\frac{S(L+1)}{J(J+1)} + \frac{1}{2J(J+1)}\left[J(J+1) - L(L+1) - S(S+1)\right]\right)\mathbf{J}. \tag{0.16}$$

Si ahora multiplicamos las ecuaciones (0.15) y (0.16) por $\mathbf{B}$, tenemos que

$$\mathbf{L}\cdot\mathbf{B}=\left(\frac{L\left(L+1\right)}{J\left(J+1\right)}+\frac{1}{2J\left(J+1\right)}\left[J\left(J+1\right)-L\left(L+1\right)-S\left(S+1\right)\right]\right)BJ_z, \tag{0.17}$$

junto con

$$\mathbf{S}\cdot\mathbf{B}=\left(\frac{S\left(L+1\right)}{J\left(J+1\right)}+\frac{1}{2J\left(J+1\right)}\left[J\left(J+1\right)-L\left(L+1\right)-S\left(S+1\right)\right]\right)BJ_z. \tag{0.18}$$

Si ahora sustituimos las ecuaciones (0.17) y (0.18) en (0.11), tenemos

$$\frac{H_{int}}{-\mu_B}=\left(\mathbf{L}\cdot\mathbf{B}+2\mathbf{S}\cdot\mathbf{B}\right)=\left(\frac{L\left(L+1\right)}{J\left(J+1\right)}+\frac{1}{2J\left(J+1\right)}\left[J\left(J+1\right)-L\left(L+1\right)-S\left(S+1\right)\right]\right)BJ_z$$
$$+2\left(\frac{S\left(L+1\right)}{J\left(J+1\right)}+\frac{1}{2J\left(J+1\right)}\left[J\left(J+1\right)-L\left(L+1\right)-S\left(S+1\right)\right]\right)BJ_z,$$

entonces

$$\frac{H_{int}}{-\mu_B}=\left(\frac{L\left(L+1\right)}{J\left(J+1\right)}+2\frac{S\left(L+1\right)}{J\left(J+1\right)}\right)BL_z+\left(\frac{3}{2J\left(J+1\right)}\left[J\left(J+1\right)-L\left(L+1\right)-S\left(S+1\right)\right]\right)BJ_z,$$

agrupando terminos semejantes

$$\Longrightarrow\ \frac{H_{int}}{-\mu_B}=\left(\frac{L\left(L+1\right)}{J\left(J+1\right)}+2\frac{S\left(L+1\right)}{J\left(J+1\right)}\right)BL_z+\left(\frac{3}{2}\left[1-\frac{L\left(L+1\right)}{J\left(J+1\right)}-\frac{S\left(S+1\right)}{J\left(J+1\right)}\right]\right)BJ_z,$$

desarrollando un poco

$$\Longrightarrow\ \frac{H_{int}}{-\mu_B}=\left(\frac{3}{2}+\frac{L\left(L+1\right)}{J\left(J+1\right)}\left(1-\frac{3}{2}\right)+\frac{S\left(L+1\right)}{J\left(J+1\right)}\left(2-\frac{3}{2}\right)\right)BJ_z,$$

ahora agrupando nuevamente por términos semejantes

$$\Longrightarrow\ \frac{H_{int}}{-\mu_B BJ_z}=\frac{3}{2}+\frac{L\left(L+1\right)}{J\left(J+1\right)}\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{S\left(L+1\right)}{J\left(J+1\right)}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{S\left(L+1\right)}{J\left(J+1\right)}-\frac{L\left(L+1\right)}{J\left(J+1\right)}\right),$$

$$\Longrightarrow\ \frac{H_{int}}{-\mu_B BJ_z}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{S\left(L+1\right)J\left(J+1\right)-J\left(J+1\right)L\left(L+1\right)}{J^2\left(J+1\right)^2}\right),$$

que finalmente, da como resultado

$$\frac{H_{int}}{-\mu_B BJ_z}=\frac{3}{2}+\frac{S\left(L+1\right)-L\left(L+1\right)}{2J\left(J+1\right)}.$$

De manera que

$$H_{int}=-\mu_B\left(\frac{3}{2}+\frac{S\left(L+1\right)-L\left(L+1\right)}{2J\left(J+1\right)}\right)\mathbf{J}\cdot\mathbf{B},$$

si ahora definimos a

$$g=\frac{3}{2}+\frac{S\left(L+1\right)-L\left(L+1\right)}{2J\left(J+1\right)},$$

vemos que podemos hacer

$$\overrightarrow{\mu}=-g_j\mu_B\mathbf{J},$$

justo como se pedia.