Mecánica Cuántica. Tarea 4[*][†]

José Emmanuel Flores Calderón

Fecha: 30/04/2021.

1. Muestra que para un oscilador armónico simple unidimensional

$$\langle 0| \exp[ikx] |0\rangle = \exp\left[\frac{-k^2}{2}\left\langle 0|x^2|0\right\rangle\right]$$

donde x es el operador de posición.

Solución.

En terminos de los operadores de aniquilación y de creación, tenemos que

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(a + a^\dagger\right) \implies x^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}\left(a^2 + aa^\dagger + a^\dagger a + \left(a^\dagger\right)^2\right),$$

de manera que el valor esperado en el estado base, esta dado por

$$\left\langle 0|x^2|0\right\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\left(\left\langle 0|a^2|0\right\rangle + \left\langle 0|aa^\dagger|0\right\rangle + \left\langle 0|a^\dagger a|0\right\rangle + \left\langle 0|\left(a^\dagger\right)^2|0\right\rangle\right),$$

$$\implies \left\langle 0|x^2|0\right\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} \implies \exp\left[\frac{-k^2}{2}\left\langle 0|x^2|0\right\rangle\right] = \exp\left[-\frac{\hbar k^2}{4m\omega}\right].$$

Mientras que para la otra parte, tenemos que

$$\langle 0| \exp[ikx] |0\rangle = \int dx' \langle 0| \exp[ikx] |x'\rangle \langle x'|0\rangle = \int dx' \exp[ikx'] \langle 0|x'\rangle \langle x'|0\rangle,$$

$$\implies \langle 0| \exp[ikx] |0\rangle = \int dx' \exp[ikx'] \left|\langle x'|0\rangle\right|^2.$$

Pero para el oscilador armónico, tenemos que $|\langle x'|0\rangle|^2 = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\exp\left[-m\omega\left(x'\right)^2\right]$, tenemos

$$\langle 0| \exp[ikx] |0\rangle = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\int dx' \exp[ikx'] \exp\left[-m\omega\left(x'\right)^2\right].$$

Si ahora hacemos los siguientes cambios de variable

$$x' = u\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \implies -u^2 + iku\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} = -\left(u - i\frac{k}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\right) - \hbar\frac{k^2}{4m\omega},$$

$$z = u - i\frac{k}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}},$$

tenemos que

$$\langle 0| \exp[ikx] |0\rangle = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\exp\left[\frac{-\hbar k^2}{4m\omega}\right]\int dz \exp\left[-z^2\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left[\frac{-\hbar k^2}{4m\omega}\right]\sqrt{\pi},$$

[*]Grupo C011 | Trimestre 21-1

[†]Profesor: Miguel Angel Bastarrachea Magnani | Ayudante: Yoshua Chávez Bolaños

de manera que

$$\langle 0|\exp[ikx]|0\rangle = \exp\left[\frac{-\hbar k^2}{4m\omega}\right] = \exp\left[\frac{-k^2}{2}\left\langle 0|x^2|0\right\rangle\right]$$

y por lo tanto

$$\langle 0|\exp[ikx]|0\rangle = \exp\left[\frac{-k^2}{2}\left\langle 0|x^2|0\right\rangle\right],$$

justo como se queria demostrar.

2. Un estado coherente de un oscilador armónico simple unidimensional está definido por ser un eigenestado del operador de aniquilación (no Hermitiano) a

$$a|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$$

donde λ es en general, un número complejo.

(a) Demuestra que

$$|\lambda\rangle = \exp\left[-|\lambda|^2\right]\exp\left[\lambda a^\dagger\right]|0\rangle$$

es un estado normalizado coherente.

(b) Muestra la relación de incertidumbre mínima para tal estado.

(c) Escribe $|\lambda\rangle$

$$|\lambda\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)|n\rangle.$$

Muestra que la distribución de $|f(n)|^2$ con respecto a n es de la forma de Poisson. Encuentra el valor más probable de n, por lo tanto de E.

(d) Muestra que un estado coherente se puede obtener también aplicando el operador de translación $\exp[-ipl/\hbar]$ (desplazamiento finito) (donde p es el operador momento y l la distancia desplazada) al estado base. .

Solución.

(a) Para demostrar que el estado dado es un estado coherente, dedemos demostrar que cumple con la ecuación de eigenvalores. En efecto

$$a|\lambda\rangle = a\exp\left[-|\lambda|^2\right]\exp\left[\lambda a^\dagger\right]|0\rangle = a|\lambda\rangle = \exp\left[-|\lambda|^2\right]a\left(\exp\left[\lambda a^\dagger\right]|0\rangle\right),$$

pero podemos desarrollar en serie de potencias a la exponencial de la siguiente forma

$$\exp\left[\lambda a^\dagger\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\left(a^\dagger\right)^n,$$

entonces

$$a|\lambda\rangle = \exp\left[-\frac{|\lambda|^2}{2}\right]a\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\left(a^\dagger\right)^n|0\rangle\right),$$

pero $\left(a^\dagger\right)^n|0\rangle = \sqrt{n!}\,|n\rangle$, de manera que

$$a|\lambda\rangle = \exp\left[-\frac{|\lambda|^2}{2}\right]a\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\sqrt{n!}\,|n\rangle\right) = \exp\left[-\frac{|\lambda|^2}{2}\right]\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}}a|n\rangle\right),$$

pero $a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$, entonces

$$a|\lambda\rangle = \exp\left[-\frac{|\lambda|^2}{2}\right]a\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\sqrt{n!}\,|n\rangle\right) = \exp\left[-\frac{|\lambda|^2}{2}\right]\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}}\sqrt{n}\,|n-1\rangle\right),$$

$$\Longrightarrow a\left|\lambda\right\rangle = \exp\left[-\frac{|\lambda|^2}{2}\right]\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda\lambda^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}}\left|n-1\right\rangle\right),$$

si ahora hacemos un cambio de variable de $m = n-1$, tenemos que

$$a\left|\lambda\right\rangle = \exp\exp\left[-\frac{|\lambda|^2}{2}\right]\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda\lambda^{m}}{\sqrt{m!}}\left|m\right\rangle\right) = \lambda\exp\exp\left[-\frac{|\lambda|^2}{2}\right]\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^{m}}{\sqrt{m!}}\left|m\right\rangle\right),$$

$$a\left|\lambda\right\rangle = \lambda\exp\left[-\frac{|\lambda|^2}{2}\right]\exp\left[\lambda a^\dagger\right]\left|0\right\rangle$$

por lo tanto, tenemos que

$$a\left|\lambda\right\rangle = \lambda\left|\lambda\right\rangle,$$

es decir, $\left|\lambda\right\rangle$ es un estado coherente. Falta corroborar que efectivamente es un estado normalizado, para lo cual calculamos su norma

$$\left\langle\lambda|\lambda\right\rangle = \left\langle 0\right|\exp\left[-\frac{|\lambda|^2}{2}\right]\exp\left[\lambda^* a\right]\exp\left[-\frac{|\lambda|^2}{2}\right]\exp\left[\lambda a^\dagger\right]\left|0\right\rangle,$$

$$\left\langle\lambda|\lambda\right\rangle = \left\langle 0\right|\exp\left[\lambda^* a\right]\exp\left[-|\lambda|^2\right]\exp\left[\lambda a^\dagger\right]\left|0\right\rangle = \exp\left[-|\lambda|^2\right]\left\langle 0\right|\exp\left[\lambda^* a\right]\exp\left[\lambda a^\dagger\right]\left|0\right\rangle,$$

$$\Longrightarrow \left\langle\lambda|\lambda\right\rangle = \exp\left[-|\lambda|^2\right]\left\langle 0\right|\exp\left[\lambda^*\lambda\right]\left|0\right\rangle = \exp\left[-|\lambda|^2+|\lambda|^2\right] = 1,$$

$$\therefore \left\langle\lambda|\lambda\right\rangle = 1.$$

(b) La incertidumbre minima para tal estado es de la forma

$$\left\langle(\Delta x)^2\right\rangle_\lambda\left\langle(\Delta p)^2\right\rangle_\lambda = \frac{1}{4}\left|\left\langle[x,p]\right\rangle_\lambda\right|^2,$$

donde como sabemos

$$\left\langle(\Delta x)^2\right\rangle_\lambda = \left\langle x^2\right\rangle_\lambda - \left\langle x\right\rangle_\lambda^2 \quad \& \quad \left\langle(\Delta p)^2\right\rangle_\lambda = \left\langle p^2\right\rangle_\lambda - \left\langle p\right\rangle_\lambda^2.$$

Por otra parte, los operadores de posición y momento, estan dados por

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(a+a^\dagger\right) \quad \& \quad p = p = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(-a+a^\dagger\right),$$

y ademas, tenemos que $a\left|\lambda\right\rangle = \lambda\left|\lambda\right\rangle \Longrightarrow \left\langle\lambda\right|a^\dagger = \left\langle\lambda\right|\lambda^*$, entonces

$$\left\langle x\right\rangle_\lambda = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left\langle\lambda\right|\left(a+a^\dagger\right)\left|\lambda\right\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\left\langle\lambda|a|\lambda\right\rangle + \left\langle\lambda|a^\dagger|\lambda\right\rangle\right),$$

$$\Longrightarrow \left\langle x\right\rangle_\lambda = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\lambda+\lambda^*\right) \Longrightarrow \left\langle x\right\rangle_\lambda^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}\left(\lambda+\lambda^*\right)^2.$$

Ahora bien, para $\left\langle p\right\rangle_\lambda$ es un resultado similar, esto es

$$\left\langle p\right\rangle_\lambda^2 = \frac{m\omega\hbar}{2}\left(-\lambda+\lambda^*\right)^2.$$

Ahora calculemos

$$\left\langle x^2\right\rangle_\lambda = \frac{\hbar}{2m\omega}\left\langle\lambda\right|\left(a^2+aa^\dagger+a^\dagger a+\left(a^\dagger\right)^2\right)\left|\lambda\right\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\left((\lambda)^2+(1+\lambda^*\lambda)+\lambda^*\lambda+(\lambda^*)^2\right)$$

ya que $\left\langle\lambda\right|a^\dagger a\left|\lambda\right\rangle = \lambda^*\lambda$ y $\left\langle\lambda\right|aa^\dagger\left|\lambda\right\rangle = 1+\lambda^*\lambda$. Mientras que para $\left\langle p^2\right\rangle_\lambda$, tenemos

$$\left\langle p^2\right\rangle_\lambda = \frac{\hbar}{2m\omega}\left\langle\lambda\right|\left(a^2-aa^\dagger-a^\dagger a+\left(a^\dagger\right)^2\right)\left|\lambda\right\rangle = -\frac{m\hbar\omega}{2}\left((\lambda)^2-(1+\lambda^*\lambda)-\lambda^*\lambda-(\lambda^*)^2\right).$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\left\langle (\Delta x)^2 \right\rangle_\lambda = \left\langle x^2 \right\rangle_\lambda - \langle x \rangle_\lambda^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}\left((\lambda)^2 + (1+\lambda^*\lambda) + \lambda^*\lambda + (\lambda^*)^2\right) - \frac{\hbar}{2m\omega}(\lambda+\lambda^*)^2$$

$$\Longrightarrow \left\langle (\Delta x)^2 \right\rangle_\lambda = \frac{\hbar}{2m\omega},$$

y para p

$$\left\langle (\Delta p)^2 \right\rangle_\lambda = \left\langle p^2 \right\rangle_\lambda - \langle p \rangle_\lambda^2 = -\frac{m\hbar\omega}{2}\left((\lambda)^2 - (1+\lambda^*\lambda) - \lambda^*\lambda - (\lambda^*)^2\right) - \frac{m\hbar\omega}{2}(-\lambda+\lambda^*)^2,$$

$$\Longrightarrow \left\langle (\Delta x)^2 \right\rangle_\lambda = \frac{m\omega\hbar}{2}.$$

Por otra parte, sabemos que $[x,p] = i\hbar$, de manera que

$$|\langle [x,p] \rangle_\lambda|^2 = \hbar^2.$$

En resumen, tenemos que

$$\left\langle (\Delta x)^2 \right\rangle_\lambda \left\langle (\Delta p)^2 \right\rangle_\lambda = \frac{\hbar^2}{4} \quad \& \quad \frac{1}{4}|\langle [x,p] \rangle_\lambda|^2 = \frac{\hbar^2}{4}$$

Por lo tanto, se satisface la relación de mínima incertidumbre.

(c) Si ahora escribimos a $|\lambda\rangle$ como

$$|\lambda\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\,|n\rangle,$$

tenemos que

$$\langle\lambda| = \sum_{m=0}^{\infty} f^*(m)\,\langle m|,$$

de manera que

$$\langle\lambda|\lambda\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} f^*(m)\,\langle m| \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\,|n\rangle = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} f^*(m)\,f(n)\,\langle m|n\rangle,$$

$$\Longrightarrow \langle\lambda|\lambda\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |f^*(n)|^2.$$

Por otra parte, tenemos que

$$|\lambda\rangle = \exp\left[-\frac{|\lambda|^2}{2}\right]\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle\right),$$

con lo cual

$$\langle\lambda|\lambda\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\exp\left[-|\lambda|^2\right]\left(\frac{\lambda^n(\lambda^*)^m}{\sqrt{n!}\sqrt{m!}}\right)\langle m|n\rangle$$

$$\Longrightarrow \langle\lambda|\lambda\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\exp\left[-|\lambda|^2\right]\left(\frac{\lambda^n(\lambda^*)^n}{\sqrt{n!}\sqrt{n!}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\exp\left[-|\lambda|^2\right]\left(\frac{|\lambda|^{2n}}{n!}\right),$$

por lo tanto

$$|f^*(n)|^2 = \frac{|\lambda|^{2n}}{n!}\exp\left[-|\lambda|^2\right].$$

Por otra parte, la distribución de Poisson está dada por

$$P_n(x) = \frac{x^n}{n!}\exp[-x].$$

Como podemos observar, $|f^*(n)|^2$ tiene la misma forma que la distribución de Poisson.

(d) Ahora bien, para calcular $\exp\left[-ipl/\hbar\right]$ al estado base $|0\rangle$, sabemos que $p = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(-a + a^{\dagger}\right)$, entonces

$$\exp\left[-ipl/\hbar\right]|0\rangle = \exp\left[\frac{l}{\hbar}\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(-a+a^{\dagger}\right)\right]|0\rangle = \exp\left[\frac{l}{\hbar}\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}a^{\dagger}\right]\exp\left[-\frac{l}{\hbar}\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}a\right]|0\rangle .$$

Si ahora definimos $\lambda = \frac{l}{\hbar}\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}$, tenemos que

$$\exp\left[-ipl/\hbar\right]|0\rangle = \exp\left[\lambda a^{\dagger} - \lambda a\right]|0\rangle .$$

Por otra parte, si usamos que $\exp\left[A+B\right] = \exp\left[A\right]\exp\left[B\right]\exp\left(\frac{-[A,B]}{2}\right)$, donde los operadores A, B son tales que conmutan con $[A, B]$. Con lo cual, tenemos que

$$\exp\left[\lambda a^{\dagger} - \lambda a\right]|0\rangle = \exp\left[\lambda a^{\dagger}\right]\exp\left[-\lambda a\right]\exp\left(\frac{\lambda^2\left[a^{\dagger}, a\right]}{2}\right)|0\rangle ,$$

pero $\left[a^{\dagger}, a\right] = -\mathbb{I}$, entonces

$$\exp\left[-ipl/\hbar\right]|0\rangle = \exp\left[\lambda a^{\dagger}\right]\exp\left[-\lambda a\right]\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\right)|0\rangle ,$$

y usando que

$$\exp\left[-\lambda a\right]|0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^n}{n!}a^n|0\rangle = |0\rangle ,$$

tenemos que

$$\exp\left[-ipl/\hbar\right]|0\rangle = \exp\left[\lambda a^{\dagger}\right]\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\right)|0\rangle ,$$

justo como se quería demostrar.

3. Una partícula en una dimensión ligada a un centro fijo por un potencial función-δ de la forma

$$V(x) = -v_0\delta(x)$$

con v_0 real positivo.

(a) Encuentra la función de onda y la energía ligada del estado base. ¿Existen estados excitados?

(b) En $t = 0$, el potencial es repentinamente apagado, esto es, $V = 0$ para $t > 0$. Encuentra la función de onda para $t > 0$ (sé cuantitativo pero no intentes evaluar la integral que podría aparecer).

Solución.

(a) La ecuación de Schrödinger para este problema esta dada por

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u}{dx^2} - \delta(x)v_0u = -Eu.$$

Es claro que debemos tener cuidado en el punto $x = 0$, de momento dividamos el problema en tres regiones $x < 0$, $x > 0$ y $x = 0$. Para $x < 0$, y $x > 0$, tenemos la misma ecuación, la cual resulta ser

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u}{dx^2} = -Eu \implies \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{2mE}{\hbar^2}u \implies u(x) = A\exp\left[\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}x\right].$$

Donde A es una constante de normalización. Ahora bien, la solución en las dos regiones esta dada por,

$$u(x) = \begin{cases} A\exp\left[\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}x\right] & x < 0 \\ A\exp\left[-\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}|x|\right] & x > 0 \end{cases}.$$

De las ecuaciones anteriores, tenemos que

$$\frac{du}{dx} = \mp\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}u(x).$$

Ahora veámos qué es lo que pasa cerca del punto $x = 0$. Para lo cual integremos la ecuación de Schrödinger, es decir

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} dx\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u}{dx^2} - \delta(x)v_0u\right) = -\frac{\hbar^2}{2m}\left.\frac{du}{dx}\right|_{-\epsilon}^{\epsilon} - v_0u(0),$$

$$\Longrightarrow \lim_{\epsilon\to 0}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\left.\frac{du}{dx}\right|_{-\epsilon}^{\epsilon}\right) - v_0u(0) = \lim_{\epsilon\to 0}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}\left(-u(\epsilon) - u(-\epsilon)\right)\right) - v_0u(0) = 0,$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\hbar^2}{m}\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}u(0) - v_0u(0) = 0 \Longleftrightarrow \frac{\hbar^2}{m}\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} - v_0 = 0,$$

de la última cadena de implicaciones, tenemos que

$$E = \frac{mv_0^2}{2\hbar^2},$$

la cual es la energía de estado base y además es la única.

4. El propagador en el espacio de momento análogo a $\langle x'', t; x', t_0\rangle$ está dado por $\langle p'', t; p', t_0\rangle$. Encuentra una expresión explícita para $\langle p'', t; p', t_0\rangle$ para el caso de la partícula libre.

Solución.

Una de las formas en las que es posible representar al propagador es la siguiente

$$K(x'', t; x', t_0) = \left\langle x''\right|\exp\left[\frac{-iH(t-t_0)}{\hbar}\right]\left|x'\right\rangle.$$

De manera que si el propagador de momento análogo a la expresión anterior esta dado por $\langle p'', t; p', t_0\rangle$, entonces tenemos que

$$K(p'', t; x', t_0) = \left\langle p''\right|\exp\left[\frac{-iH(t-t_0)}{\hbar}\right]\left|p'\right\rangle.$$

Ahora bien, para el caso de una partícula libre tenenmos el siguiente Hamiltoniano

$$H = \frac{p^2}{2m},$$

de manera que

$$K(p'', t; x', t_0) = \left\langle p''\right|\exp\left[\frac{-ip^2(t-t_0)}{2m\hbar}\right]\left|p'\right\rangle = \exp\left[\frac{-i(p')^2(t-t_0)}{2m\hbar}\right]\left\langle p''|p'\right\rangle,$$

$$\therefore K(p'', t; x', t_0) = \exp\left[\frac{-i(p')^2(t-t_0)}{2m\hbar}\right]\delta(p''-p').$$

5. Escribe la expression de la acción clásica del oscilador armónico simple para un intervalo de tiempo finito. Luego, construye el propagador $\langle x_n, t|x_{n-1}, t_{n-1}\rangle$ para el oscilador armónico cuántico usando la prescripción de Feynman para $\Delta t = t_n - t_{n-1}$ pequeño. Manteniendo términos sólo de orden $(\Delta t)^2$, muestra que está completamente de acuerdo con el límite $t - t_0 \to 0$ del propagador $\langle x'', t|x', t_0\rangle$.

   Solución.

   Por definición, la accción clásica esta dada por

$$S\left(n, n-1\right) = \int_{t_{n-1}}^{t_n} dt \mathcal{L}\left(x, \dot{x}\right),$$

   donde en este caso

$$\mathcal{L}\left(x, \dot{x}\right) = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega^2 x^2}{2},$$

   de manera que

$$S\left(n, n-1\right) = \int_{t_{n-1}}^{t_n} dt \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega^2 x^2}{2}\right).$$

   Por otra parte, sabemos que para un potencial arbitrario $V\left(x\right)$ y un intervalo de tiempo finito $\Delta t = t_n - t_{n-1}$, podemos aproximar la acción como

$$S\left(n, n-1\right) = \Delta t \left\{\left(\frac{m}{2}\right)\left[\frac{x_n - x_{n-1}}{\Delta t}\right]^2 - V\left(\frac{x_n + x_{n-1}}{2}\right)\right\},$$

   en nuestro caso, tenemos que

$$S\left(n, n-1\right) = \Delta t \left\{\left(\frac{m}{2}\right)\left[\frac{x_n - x_{n-1}}{\Delta t}\right]^2 - \frac{m\omega^2}{2}\left(\frac{x_n + x_{n-1}}{2}\right)^2\right\},$$

   si definimos $\Delta x = x_n - x_{n-1}$, tenemos que $x_n + x_{n-1} = \Delta x + 2x_{n-1}$, con lo cual

$$S\left(n, n-1\right) = \Delta t \left\{\frac{m}{2}\left[\frac{\Delta x}{\Delta t}\right]^2 - \frac{m\omega^2}{2}\left(\frac{\Delta x + 2x_{n-1}}{2}\right)^2\right\},$$

$$\Longrightarrow S\left(n, n-1\right) = \Delta t \left\{\frac{m}{2}\left[\frac{\Delta x}{\Delta t}\right]^2 - \frac{m\omega^2}{2}\left(\frac{\Delta x}{2} + x_{n-1}\right)^2\right\},$$

$$\Longrightarrow S\left(n, n-1\right) = \frac{m}{2}\left[\frac{\Delta x}{\Delta t}\right]\Delta x - \frac{m\omega^2}{2}\left(\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2 + x_{n-1}\Delta x + \left(x_{n-1}\right)^2\right)\Delta t,$$

   pero $x_{n-1}\Delta x = x_n x_{n-1} - x_{n-1}^2$.

   Si además, despreciamos el término que va como $(\Delta x)^2$, tenemos que

$$\Longrightarrow S\left(n, n-1\right) \approx \frac{m}{2}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)\Delta x - \frac{m\omega^2}{2} x_n x_{n-1}\Delta t.$$

   Por otra parte, sabemos que el producto interno $\langle x'', t|x', t_0\rangle$, esta dado por

$$\left\langle x'', t|x', t_0\right\rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar\Delta t}} \exp\left[\frac{i}{\hbar} S\left(n, n-1\right)\right],$$

   que en nuestro caso queda escrito como

$$\left\langle x'', t|x', t_0\right\rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar\Delta t}} \exp\left[\left(\frac{i}{\hbar}\right)\left\{\frac{m}{2}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)\Delta x - \frac{m\omega^2}{2} x_n x_{n-1}\Delta t\right\}\right] \tag{0.1}$$

Ahora bien, sabemos que el propagador para el oscilador armonico está dado por

$$K\left(x'',t;x',t_0\right)=\sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin\left[\omega\left(t-t_0\right)\right]}}\exp\left[\left\{\frac{im\omega}{2\hbar\sin\left[\omega\left(t-t_0\right)\right]}\right\}\left\{\left(\left(x''\right)^2+\left(x'\right)^2\right)\cos\left[\omega\left(t-t_0\right)\right]-2x'x''\right\}\right],$$

si ahora hacemos que $t-t_0=\Delta t\to 0$, tenemos que $\sin\left[\omega\Delta t\right]\to\omega\Delta t$ y $\cos\left[\omega\Delta t\right]=1-\frac{(\omega\Delta t)^2}{2}$, entonces

$$K\left(x'',t;x',t_0\right)\approx K\left(x'';x'\right)=\sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\omega\Delta t}}\exp\left[\left(\frac{im\omega}{2\hbar\omega\Delta t}\right)\left\{\left(\left(x''\right)^2+\left(x'\right)^2\right)\left(1-\frac{(\omega\Delta t)^2}{2}\right)-2x'x''\right\}\right],$$

si ahora hacemos el cambio de variables $x''\to x_n$ y $x'\to x_{n-1}$, tenemos que

$$K\left(x_n;x_{n-1}\right)=\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta t}}\exp\left[\left(\frac{im}{2\hbar\Delta t}\right)\left\{\left(\left(x_n\right)^2+\left(x_{n-1}\right)^2\right)\left(1-\frac{(\omega\Delta t)^2}{2}\right)-2x_nx_{n-1}\right\}\right],$$

con lo cual

$$K\left(x_n;x_{n-1}\right)=\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta t}}\exp\left[\left(\frac{im}{2\hbar\Delta t}\right)\left\{-\left(\left(x_n\right)^2+\left(x_{n-1}\right)^2\right)\frac{(\omega\Delta t)^2}{2}+\left(x_n\right)^2+\left(x_{n-1}\right)^2-2x_nx_{n-1}\right\}\right],$$

$$\implies K\left(x_n;x_{n-1}\right)=\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta t}}\exp\left[\left(\frac{im}{2\hbar\Delta t}\right)\left\{-\left(\left(x_n\right)^2+\left(x_{n-1}\right)^2\right)\frac{(\omega\Delta t)^2}{2}+\left(\Delta x\right)^2\right\}\right],$$

donde se ha definido $\Delta x=x_n-x_{n-1}$. Ahora bien, notando que $\left(x_n\right)^2+\left(x_{n-1}\right)^2=\left(\Delta x\right)^2+2x_nx_{n-1}$, tenemos

$$K\left(x_n;x_{n-1}\right)=\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta t}}\exp\left[\left(\frac{im}{2\hbar\Delta t}\right)\left\{-\left(\left(\Delta x\right)^2+2x_nx_{n-1}\right)\frac{(\omega\Delta t)^2}{2}+\left(\Delta x\right)^2\right\}\right],$$

reordenando los terminos dentro de la exponencial, tenemos

$$K\left(x_n;x_{n-1}\right)=\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta t}}\exp\left[\left(\frac{i}{\hbar}\right)\left\{\frac{m}{2}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)\Delta x-\frac{m}{2\Delta t}\left(\Delta x\right)^2\frac{(\omega\Delta t)^2}{2}-\frac{m\omega^2}{2\Delta t}x_nx_{n-1}\left(\Delta t\right)^2\right\}\right].$$

Si ahora despreciamos los términos $\left(\Delta x\right)^2\left(\Delta t\right)^2$, tenemos que

$$K\left(x_n;x_{n-1}\right)=\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta t}}\exp\left[\left(\frac{i}{\hbar}\right)\left\{\frac{m}{2}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)\Delta x-\frac{m\omega^2}{2}x_nx_{n-1}\Delta t\right\}\right].$$

Si ahora comparamos la ecuación anterior con la ecuación dada por (0.1), vemos que es la misma expresión, con lo cual hemos demostrado lo que se pedia en el problema.