Table des matières

Première partie

Éléments d'Analyse

Chapitre 1

Variation d'une fonction

Rappels sur la variation d'une fonction réelle

Définition 1.0.1 *:*
Par variation d'une fonction on sous-entend trois choses : la croissance, la décroissance ainsi que les extrema.

Définition 1.0.2 *:*
On dit d'une fonction f qu'elle est croissante sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ si sur ce dernier, les images $f(x)$ varient dans le même sens que ses antécédents x.

Une fonction f est donc croissante sur I si $\forall x_1, x_2 \in I, \quad x_1 \geq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

Il en résulte que pour une telle fonction, sa courbe représentative est ascendante de gauche à droite dans l'intervalle I.

De manière analogue,

Définition 1.0.3 *:*
Une fonction f sera dite décroissante sur I si $\forall x_1, x_2 \in I, \quad x_1 \geq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

Il est évident que dans ce cas, la courbe représentative de la fonction f sera descendante de gauche à droite.

Définition 1.0.4 *:*
Considérons une fonction f.

- *On dit que la fonction f admet un **maximum** au point d'abscisse x_1 si pour tout x appartenant à un certain voisinage de x_1 on a la relation $f(x) \leq f(x_1)$.*

— *On dit que la fonction f admet un **minimum** au point d'abscisse x_2 si pour tout x appartenant à un certain voisinage de x_2 on a la relation*

$$f(x) \geq f(x_2)$$

.

Il convient de souligner le fait que si la fonction f admet un maximum au point x_1 alors elle est croissante à gauche de x_1 et décroissante à sa droite.

Dans le même ordre d'idées, si la fonction f admet un minimum au point x_2 alors elle est décroissante à gauche de x_2 et croissante à sa droite.

Remarque 1.0.1 *:*
Il est très important mais pas suffisant de connaître les définitions ci-dessus. Le plus utile serait de disposer d'un outil permettant de trouver analytiquement la variation d'une fonction donnée. Comme nous l'avons tous appris à l'école secondaire, l'outil le plus puissant pour étudier la variation d'une fonction s'appelle la dérivée.

1.0.1 Dérivation

Rappelons tout d'abord que l'équation de la droite d passant par les points A des coordonnées (x_A, y_A) et le point B des coordonnées (x_B, y_B) est donnée par la relation :

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A)$$

Dans cette relation, la quantité $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_A}{x - x_A}$ est la **pente**, ou encore le **coefficient angulaire** de la droite d de sorte que l'équation de la droite d passant par le point (x_1, y_1) et de pente m est :

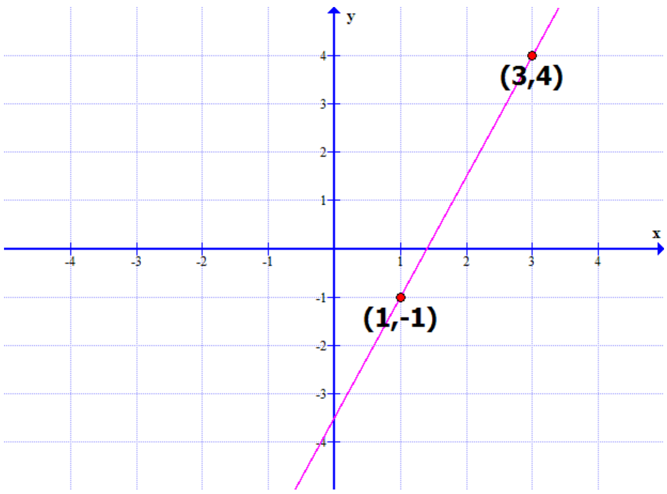
$$y - y_A = m(x - x_A)$$

La première relation permet de déterminer l'équation d'une droite connaissant les deux points par lesquels elle passe tandis que l'utilisation de la seconde n'exige qu'un seul point ainsi que la pente.

Exemple 1.0.1 *L'équation de la droite d passant par $(1, -1)$ et $(3, 4)$ est :*

$$y + 1 = \frac{4+1}{3-1}(x - 1) \equiv y = \frac{5}{2}x - \frac{7}{2}$$

Exemple 1.0.2 *:*
L'équation de la droite d passant par $(1, 2)$ et de pente $m = -1$ est $y - 2 = -1(x - 1) \equiv y = -x + 3$



Définition 1.0.5 *:*
On dit d'une fonction $y = f(x)$ qu'elle est dérivable au point d'abscisse x_0 si la quantité :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \textit{existe et est finie.}$$

*Dans ce cas, le nombre réel $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ est appelée **nombre dérivé** de la fonction f au point d'abscisse x_0 .*

Dans la littérature mathématique, ce nombre dérivé est noté $f^{'}(x_0)$ et il représente le coefficient angulaire de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse x_0 .

Ainsi la tangente passe par le point des coordonnées $M(x_0, f(x_0))$ et a pour pente $f^{'}(x_0)$.

Il en résulte que l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse x_0 est :

$$y - f(x_0) = f^{'}(x_0)(x - x_0)$$

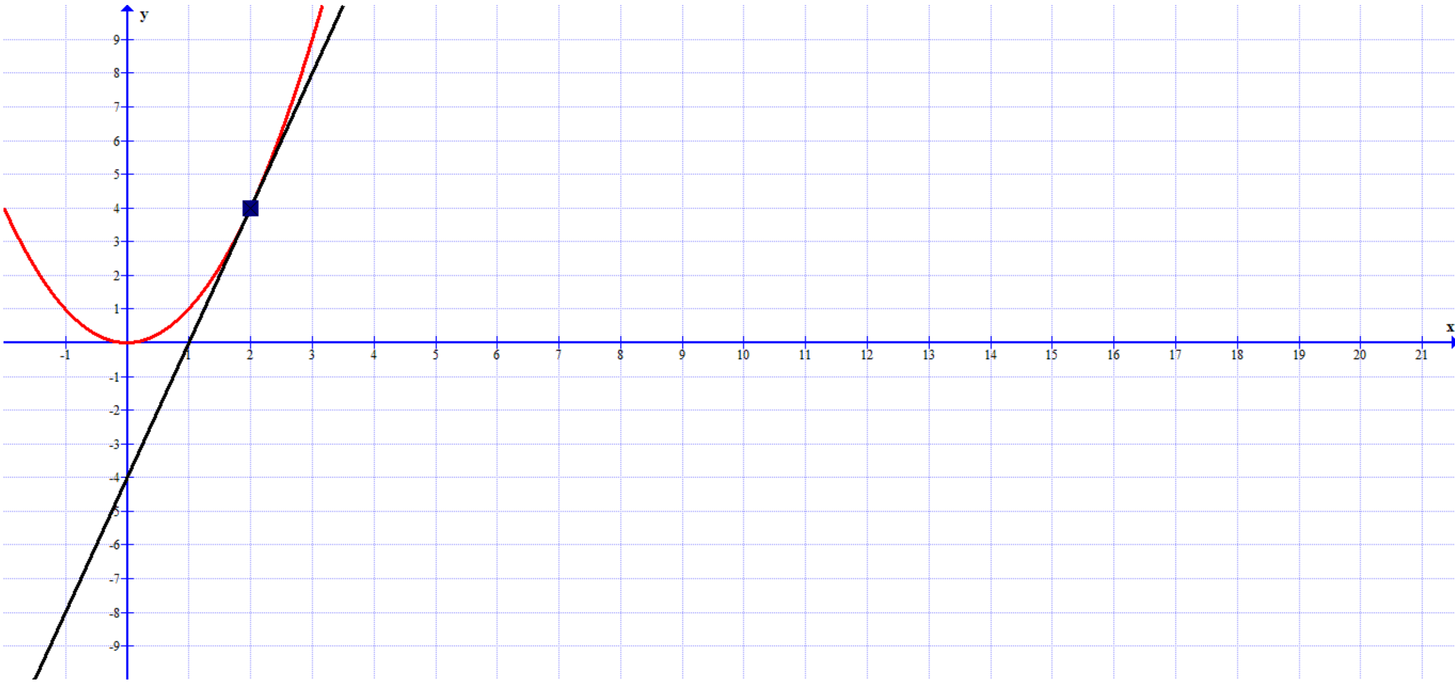
Exemple liminaire 1.0.1 *:*
Considérons la fonction $f(x) = x^2$. En utilisant la définition de la dérivée, déterminer l'équation de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 2.

Solution :

La droite T passe par le point des coordonnées $(2, f(2)) = (2, 4)$ et a pour pente $f^{'}(2)$.

La pente de la tangente vaut $f'(2) = \lim_{h\to 2} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 4$ de sorte que l'équation de la tangente devienne $y - 4 = 4(x-2)$ ou encore $y = 4x - 4$

Illustrons cela en représentant sur un même repère la parabole d'équation $y = x^2$ et la droite $y = 4x - 4$:



Nous remarquons justement sur ce graphique que la droite $y = 4x - 4$ est tangente à la courbe $y = x^2$ et le point de tangence est $M(2, 4)$

Remarque 1.0.2 *:*
Dans la pratique on n'utilise presque jamais la définition de la dérivée pour calculer une dérivée étant donné les difficultés évidentes auxquelles peut conduire la formule $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ *lorsque l'expression de* f *n'est pas simple.*

On contourne cette difficulté en utilisant la notion de **fonction dérivée** qui est la fonction notée f' et dont les images donnent les nombres dérivés aux points considérés.

On obtient la fonction dérivée en utilisant les propriétés de la dérivée :

Propr. 1 *:*
la dérivée d'une fonction constante est toujours nulle : $(5)' = (15)' = (100)' = \cdots = 0$

Propr. 2 *:*
La dérivée d'une somme des fonctions est égale à la somme de leurs dérivées respectives :

$$(f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x))' = f_1'(x) + f_2'(x) + \cdots + f_n'(x)$$

Propr. 3 *:*
Pour ce qui est des puissances de la variable x on utilise la formule :

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

Exemple liminaire 1.0.2 *:*
$(x^5)' = 5x^4, \quad (2x^7)' = 14x^6, \quad (5x^4 + 2x^3 + 4x - 2)' = 20x^3 + 6x^2 + 4$

Propr. 4 *La dérivée d'un produit n'est pas égale au produit des dérivées et la dérivée d'un quotient n'est pas égale au quotient des dérivées :*

$$(u.v)' \neq u'.v' \quad et \quad \left(\frac{u}{v}\right)' \neq \frac{u'}{v'}$$

On utilise plutôt les formules :

$$(u.v) = u'.v + u.v' \quad et \quad \left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$$

Exemple 1.0.3 *:*
Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x^3 + x^2 + 3$
2. $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + 3x^3 - x^2 + 2x$
3. $f(x) = \sqrt{x}$
4. $f(x) = x\sqrt{x}$
5. $f(x) = \frac{x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 2}{x}$

1.0.2 Application de la dérivée à la variation d'une fonction

Etudier la variation d'une fonction revient à déterminer un intervalle dans lequel elle est croissante, un intervalle dans lequel elle est décroissante et éventuellement ses valeurs extrêmes (maximum et minimum).

La dérivée constitue un outil puissant dans ce sens grâce à l'important résultat suivant :

Proposition 1.0.1 *:*
Une fonction f est croissante dans un intervalle I ssi sa dérivée y est positive. Elle y est décroissante dans le cas contraire.

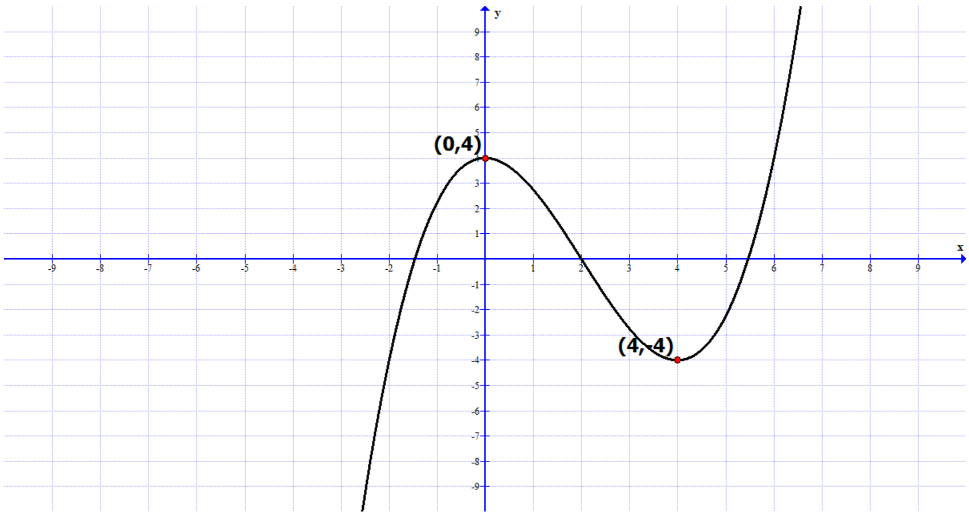
Exemple liminaire 1.0.3 *:*
Etudier la variation de la fonction $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4$

`INDICATION DE SOLUTION` : En calculant la dérivée nous avons

$$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x = x\left(\frac{3}{4}x - 3\right)$$

L'étude des signes de cette dérivée indique que la fonction f est croissante dans $]-\infty, 0[\cup]4, +\infty[$ et croissante dans $]0, 4[$.
Elle admet un maximum relatif pour $x = 0$ et un minimum relatif pour $x = 4$.

La représentation graphique ci-dessous confirme cette variation :



Exemple liminaire 1.0.4 *:*
Etudier la variation de $f(x) = \frac{10}{1+x^2}$

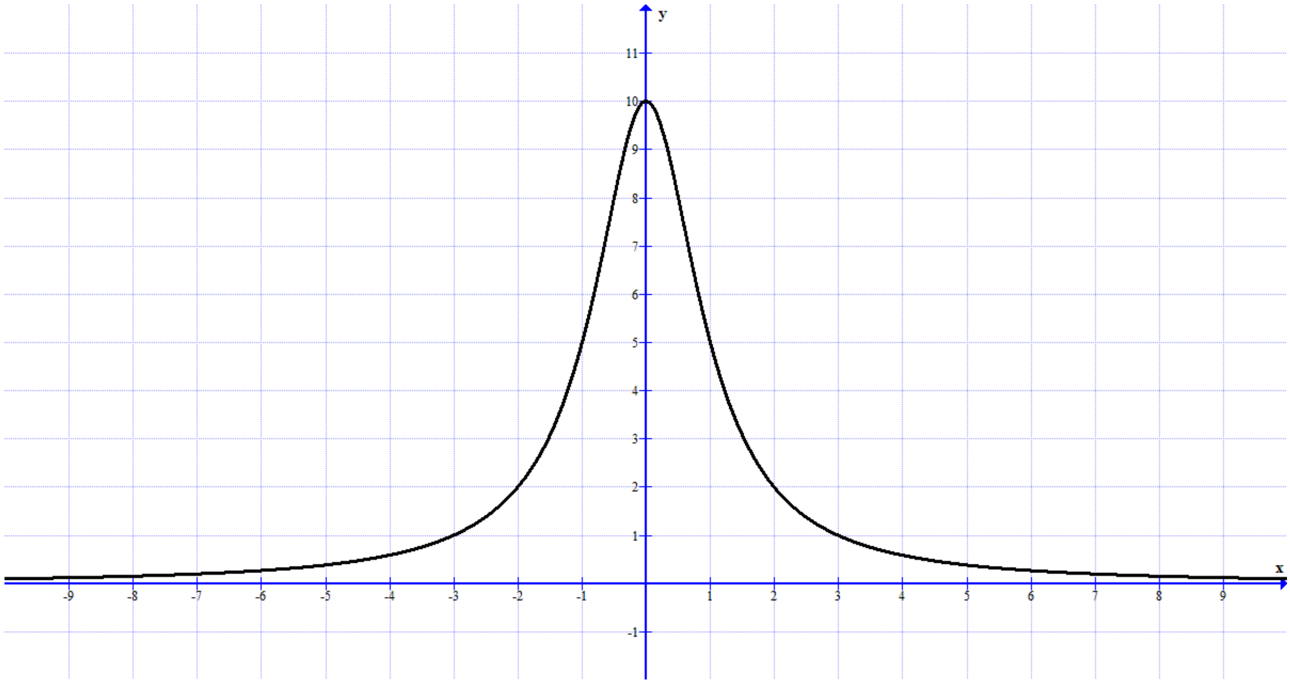
Solution

il est évident que le domaine de f est $\mathbb{R}$ et sa dérivée est

$$f'(x) = \frac{-20x}{(1+x^2)^2}$$

Les signes de cette dérivée étant ceux de $-20x$, il va de soi que cette dérivée est positive dans $]-\infty, 0[$ et négative dans $]0, +\infty[$.

Il en résulte que f est croissante dans $]-\infty, 0[$ et décroissante dans $]0, +\infty[$, le point $(0, 10)$ correspondant à un maximum comme le montre ce graphique :



1.0.3 Cas des fonctions trigonométriques et compléments à la dérivation

Les notions élémentaires de trigonométrie sont *supposées connues*. Il n'est pas inutile d'avoir à l'esprit les formules dites de SIMPSON permettant de factoriser des fonctions trigonométriques élémentaires et qui s'utilisent assez couramment dans diverses situations.

L'objectif est de factoriser chacune des expressions : $\sin p + \cos q, \sin p - \cos q, \cos p + \cos q$ et enfin $\cos p - \cos q$.

Les deux premières expressions n'ayant que des sinus dans le premier membre alors que les deux dernières ont des cosinus il faut retenir que la forme générale des seconds membres est $2f_1\left(\frac{p+q}{2}\right)f_2\left(\frac{p-q}{2}\right)$ sauf pour la dernière formule dont la forme est :

$$\cos p - \cos q = -2f_1\left(\frac{p+q}{2}\right)f_2\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

En ajoutant à cela la double règle suivant laquelle :

1. lorsque le premier membre contient des sinus le second membre contient des fonctions trigonométriques différentes tandis qu'elles sont identiques lorsque le premier membre contient des cosinus,
2. quant aux deux premières formules, si le premier membre est la somme des sinus, alors le sinus se placera à la demi somme dans le second membre et par conséquent le cosinus à la demi différence ; et si le premier membre est la différence des sinus alors le sinus se placera à la demi différence et par conséquent le cosinus à la demi somme.

En appliquant simultanément ces règles on obtient les deux premières formules de SIMPSON :

$$\begin{cases} \sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \sin p - \sin q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \end{cases}$$

Quant aux deux dernières formules, il suffit de considérer qu'on maintient cosinus dans le second membre si le premier membre contient la somme des cosinus et on chasse cosinus (au profit de sinus) le premier membre contient la différence des cosinus. On obtient :

$$\begin{cases} \cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \end{cases}$$

Cas de la dérivée de la fonction $f(x) = \sin x$

Si $f(x) = \sin x$ alors pour tout $x_0 \in Df$ on a :

$$f^{'}(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\cos(x_0+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x_0+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

Il en résulte que

$$\sin^{'}(x_0) = \lim_{h\to 0}\cos(x_0+\frac{h}{2})\times\frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} = \lim_{h\to 0}\cos(x_0+\frac{h}{2})\times\lim_{\frac{h}{2}\to 0}\frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} = \lim_{h\to 0}\cos(x_0+\frac{h}{2})\times 1$$

Ainsi

$$\sin^{'}(x_0) = \lim_{h\to 0}\cos(x_0+\frac{h}{2}) = \cos(x_0)$$

Comme $\forall x_0 \in Df, \quad \sin^{'}(x_0) = \cos(x_0)$ alors

$$\sin^{'}(x) = \cos x$$

En utilisant la formule de la dérivation des fonctions composées on obtient pour toute fonction $u(x)$:

$$(\sin(u(x)))^{'} = u^{'}(x)\cos(u(x))$$

Exemple liminaire 1.0.5 *:*
$(\sin(x^2-3x+1))^{'} = (2x-3)\cos(x^2-3x+1)$

Cas de la fonction $f(x) = \cos x$

En remarquant que (angles complémentaires) $\cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$, on obtient :

$$(\cos(x))^{'} = \Big(\sin(\frac{\pi}{2} - x)\Big)^{'} = (\frac{\pi}{2} - x)' \cos(\frac{\pi}{2} - x) = -\cos(\frac{\pi}{2} - x) = -\sin x$$

Ainsi

$$(\cos(x))^{'} = -\sin x \quad et \quad (\cos(u(x)))^{'} = -u^{'}(x)\sin(u(x))$$

Exemple liminaire 1.0.6 *:*

$$\left(\cos(\frac{1}{x})\right)^{'} = -\frac{1}{x^2}(-\sin(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x^2}\sin(\frac{1}{x})$$

Cas de la fonction $f(x) = \tan x$

En combinant les relations $\left(\frac{u}{v}\right)^{'} = \frac{u^{'}v - uv^{'}}{v^2}$ et $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ on obtient :

$$(\tan x)^{'} = \frac{(\sin x)^{'}\cos x - \sin x(\cos x)^{'}}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

Aussi, si $u(x)$ est une fonction, on obtient :

$$(\tan(u(x)))^{'} = (u(x))^{'}\sec^2(u(x))$$

Exemple liminaire 1.0.7 *:*

$$\big(\tan(-x^2)\big)^{'} = -2x\sec^2(-x^2)$$

Cas de la fonction $f(x) = \sec x$

Comme $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ et $\left(\frac{1}{f(x)}\right)^{'} = \frac{-f^{'}(x)}{(f(x))^2}$, alors

$$(\sec(x))^{'} = \left(\frac{1}{\cos(x)}\right)^{'} = \frac{-\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} \times \frac{\sin x}{\cos x} = \sec x \tan x$$

De manière plus générale,

$$(\sec u)^{'} = u^{'}(x)\sec u \tan u$$

Cas des fonctions trigonométriques inverses

En considérant le fait que les fonctions $\arcsin x, \arccos x, \arctan x \cdots$ sont des fonctions réciproques des fonctions $\sin x, \cos x, \tan x \cdots$ et en tenant compte du fait que $\left(f^{-1}(x)\right)^{'} = \frac{1}{(f)_y^{'}}$ on obtient sans peine les formules :

1. $$(\arcsin x)^{'} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{et} \quad (\arcsin(u))^{'} = \frac{u^{'}(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$$

2. $$(\arccos x)^{'} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{et} \quad (\arccos(u))^{'} = \frac{-u^{'}(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$$

3. $$(\arctan x)^{'} = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{et} \quad (\arctan(u)) = \frac{u^{'}(x)}{1+u^2(x)}$$

4. $\vdots$

1.0.4 Exercices et problèmes

Exercice 1.0.1 *:*
Considérons la parabole $y = -x^2 + 3x - 1$.
Déterminer l'équation de la tangente T à cette parabole au point d'abscisse 3.

Corrigé :

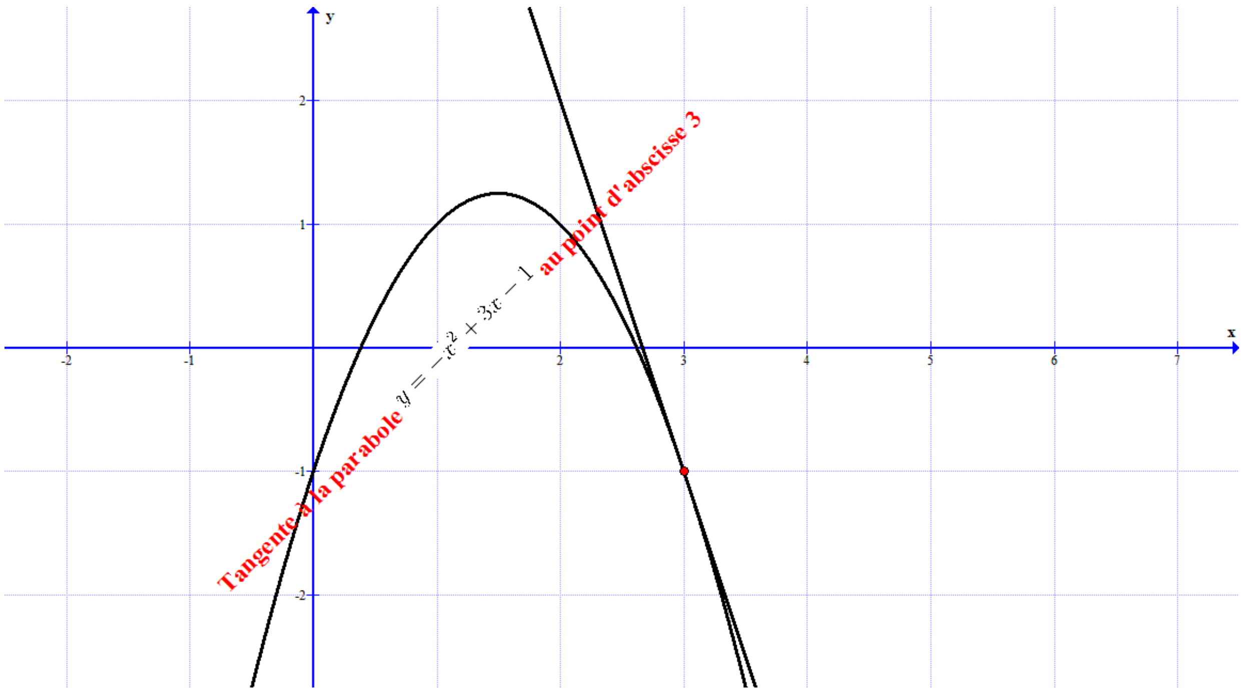
La tangente passe par $(x_0, f(x_0))$ et a pour pente $f^{'}(x_0)$:

$$f(x_0) = f(3) = -3^2 + 3 \times 3 - 1 = -1$$

D'autre part $f^{'}(x) = (-x^2 + 3x - 1)^{'} = -2x + 3$ de sorte que $f^{'}(3) = -2 \times 3 + 3 = -3$.
La tangente à la parabole $y = -x^2 + 3x - 1$ au point d'abscisse $x = 3$ a alors comme équation $y + 1 = -3(x - 3)$ c'est- à dire $y = -3x + 8$.
On peut s'en convaincre en représentant la parabole et la tangente dans un même repère :

Exercice 1.0.2 *:*

En observant soigneusement ce graphique volé 2 ci-dessous, donner les équations des tangentes T_A et T_C aux points A et C.



Exercice 1.0.3 *:*
Etudier la variation de la fonction $f(x) = \cos x + \sin x$ *sur l'intervalle* $[0; 2\pi[$

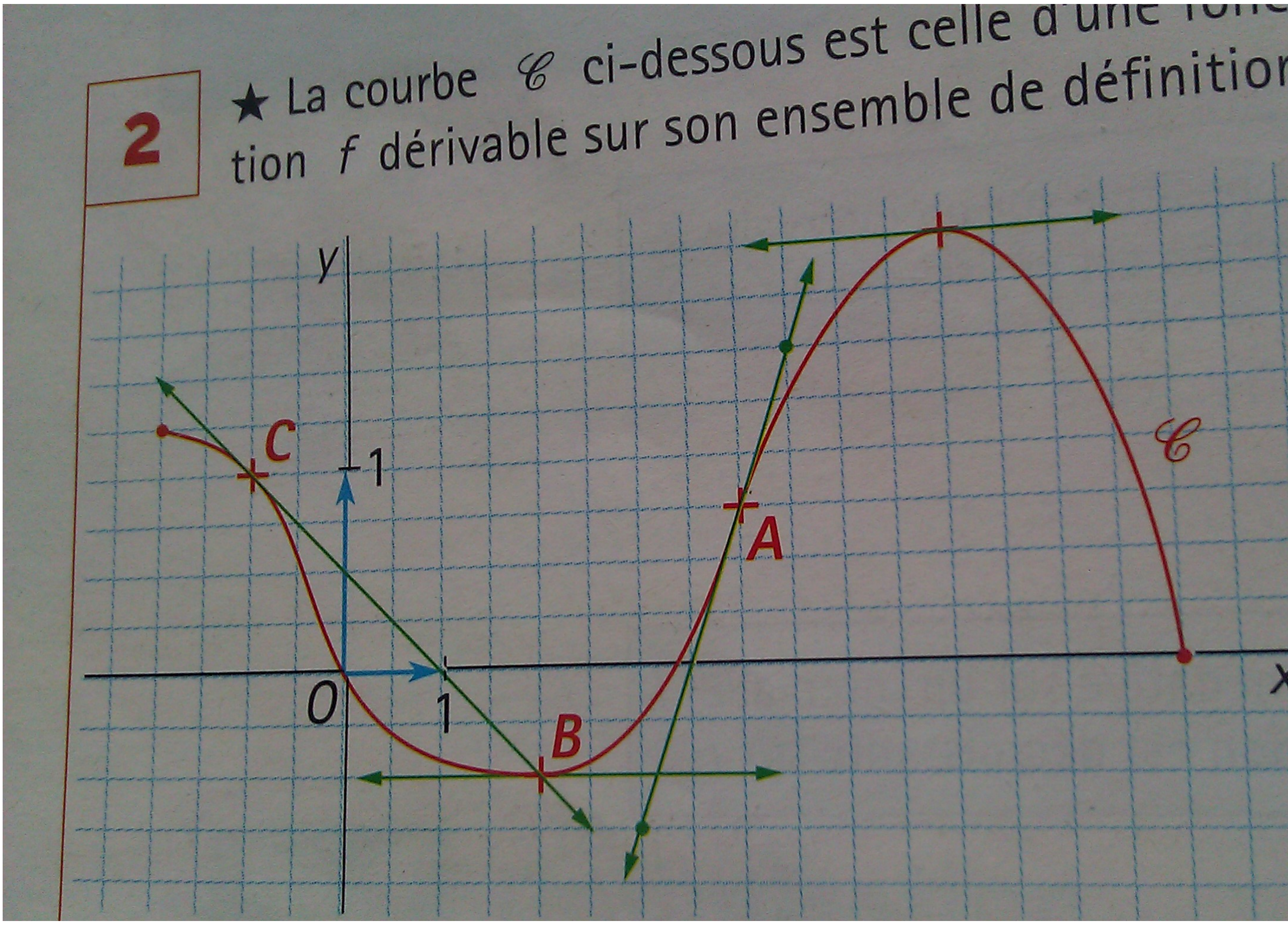
Corrigé :

Le domaine de définition de cette fonction est $\mathbb{R}$ mais comme il s'agit d'une fonction périodique de période 2π, nous pouvons nous limiter à $[0, 2\pi[$ comme domaine d'étude.

$$\begin{aligned} f^{'}(x) &= (\cos x + \sin x)^{'} \\ &= (\cos c)^{'} + (\sin x)^{'} \\ &= -\sin x + \cos x \\ &= \cos x - \sin x \end{aligned}$$

Pour étudier les signes de la dérivée $f^{'}(x) = \cos x - \sin x$, il faut d'une part garder à l'esprit que $\cos x$ est une abcisse (et de ce fait $\cos x$ est positif dans les premier et quatrième quadrant et négatif ailleurs). En d'autres termes, $\cos x \geq 0$ si $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

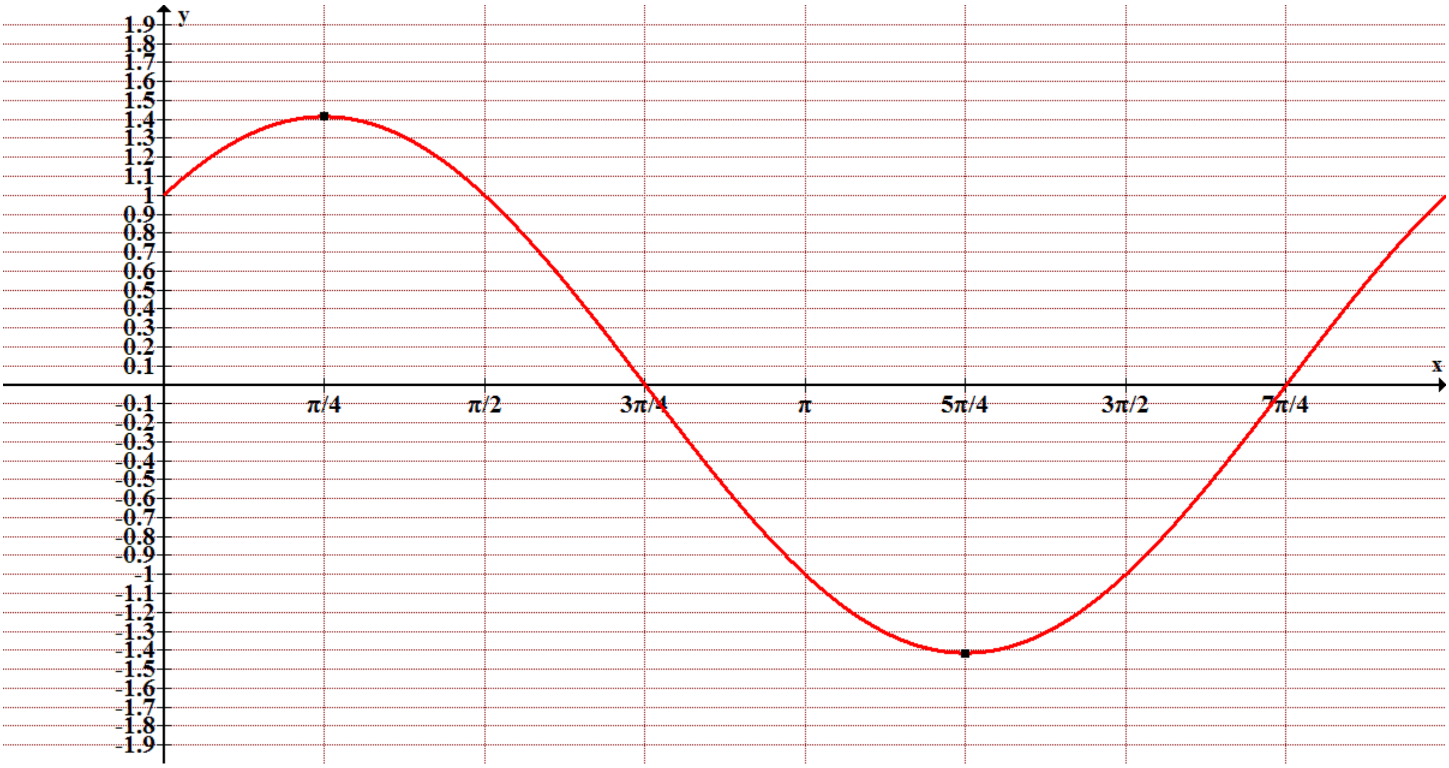
Dans le même ordre d'idées, $\sin x$ est une ordonnée (et de ce fait $\sin x$ est positif dans les premier et deuxième quadrants et négatif ailleurs). En d'autres termes, $\sin x \geq 0$ si $x \in [0, \pi]$

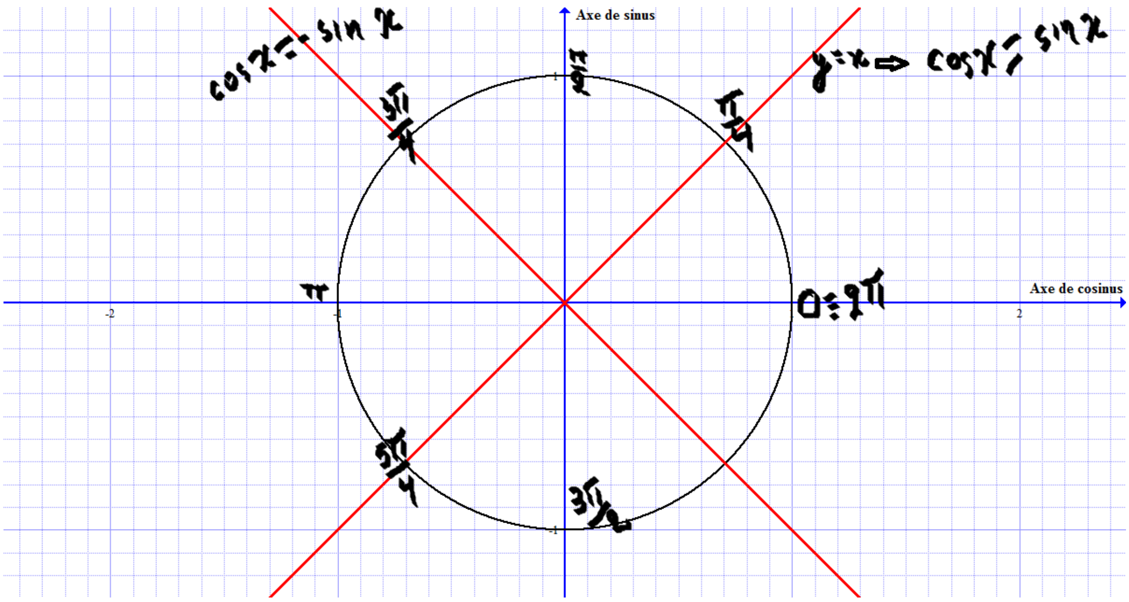


Graphique volé 2

Quant aux signes de la dérivée $f^{'}(x) = \cos x - \sin x$, il est évident que comme il s'agit d'une fonction continue, elle ne peut pas changer de signes sans s'annuler. Cherchons d'abord les endroits où cette dérivée s'annule :

$$
\begin{aligned}
f^{'}(x) &= 0 \\
&\Rightarrow \cos x = \sin x \quad \text{dans l'intervalle d'étude} \quad [0, 2\pi[\\
&\Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \quad \text{ou} \quad x = \frac{5\pi}{4}
\end{aligned}
$$





Ainsi, dans l'intervalle $[0, 2\pi[$, les seuls endroits où $f'(x) = \cos x - \sin x$ peut changer de signes c'est aux points $x_1 = \frac{\pi}{4}$ et $x_2 = \frac{5\pi}{4}$: **il suffit alors de vérifier les signes des valeurs de cette dérivée à des abscisses remarquables dans chacun des trois sous-intervalles du domaine d'étude engendrés par ces deux valeurs** :

Les trois sous-intervalles engendrés par les valeurs $x_1 = \frac{\pi}{4}$ et $x_2 = \frac{5\pi}{4}$ dans $[0, 2\pi[$ sont $I_1 = \left[0, \frac{\pi}{4}\right[$, $I_2 = \left]\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right[$ et $I_3 = \left]\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right[$

— En prenant $\frac{\pi}{6} \in I_1$ on a

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{2} > 0 \end{aligned}$$

Dans ce cas $f'(x) = \cos x - \sin x > 0$ dans $I_1 = \left[0, \frac{\pi}{4}\right[$

— En prenant $\frac{\pi}{2} \in I_2$ on a

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 < 0$$

Dans ce cas $f'(x) = \cos x - \sin x < 0$ dans $I_2 = \left]\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right[$

— En prenant $\frac{3\pi}{2} \in I_3$ on a

$$f'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = +1 > 0$$

Dans ce cas $f'(x) = \cos x - \sin x > 0$ dans $I_3 = \left]\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right[$

La fonction $f(x) = \cos x + \sin x$ est donc

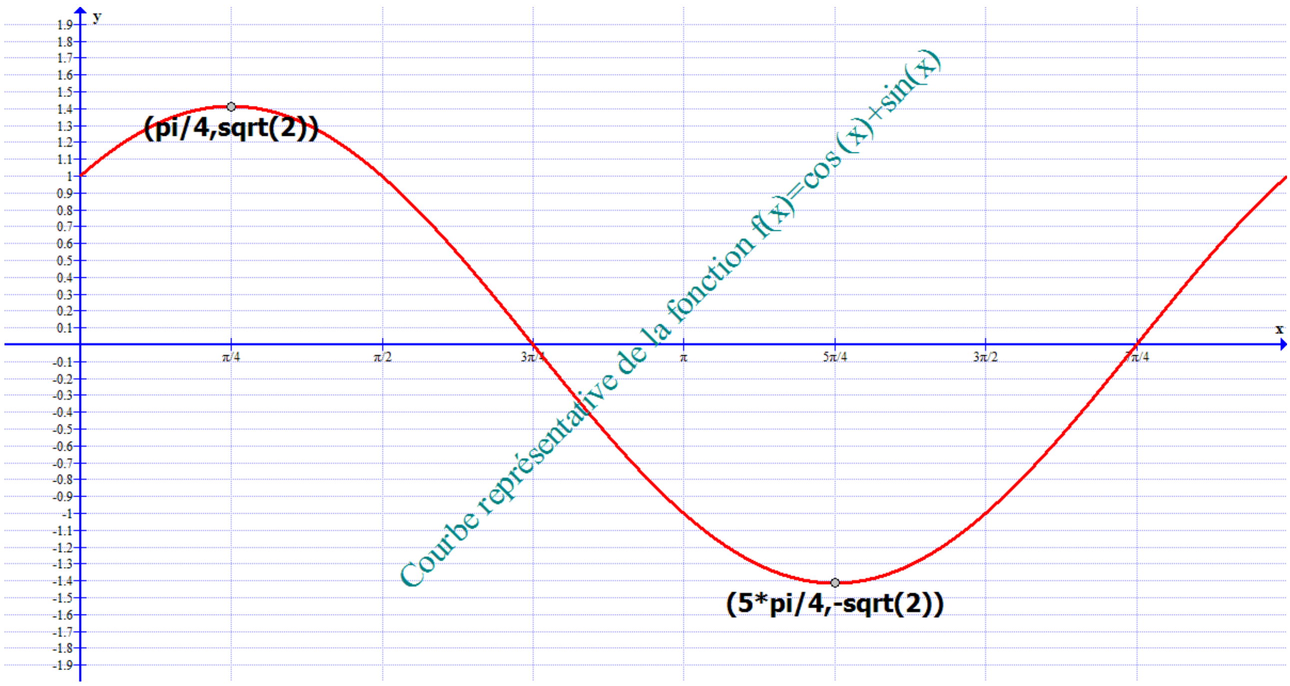
— croissante dans $I_1 \cup I_3 = \left[0, \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{4}\right[$ et

— décroissante dans $I_2 = \left]\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right[$

Comme en $x_1 = \frac{\pi}{4}$ la fonction $f(x) = \cos x + \sin x$ passe de la croissance à la décroissance et en plus $f'(x_1) = 0$ alors le point $(x_1, f(x_1)) = \left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$ est un maximum.

Comme en $x_1 = \frac{5\pi}{4}$ la fonction $f(x) = \cos x + \sin x$ passe de la décroissance à la croissance et en plus $f'(x_2) = 0$ alors le point $(x_2, f(x_2)) = \left(\frac{5\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)$ est un minimum.

On peut s'en convaincre *visuellement* en représentant la fonction $f(x) = \cos x + \sin x$ sur $[0, 2\pi[$:



Exercice 1.0.4 *:*
Trouver les extrema de la fonction f définie par $f(x) = \frac{\sin x}{2+\sin x}$ sur $[0; 2\pi[$

1.1 Continuité

Définition 1.1.1 *:*
On dit d'une fonction f qu'elle est continue au point d'abscisse x_0 si pour des valeurs de x de plus en plus proches de x_0, la fonction f prend des valeurs de plus en plus proches de $f(x_0)$.
Plus formellement, f est continue au point x_0 ssi

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Il convient de noter que cette formulation suppose évidemment que $x \in Df$.

Dans la pratique quotidienne d'étude des fonctions le fait que les fonctions élémentaires (polynômes, rationnelles, irrationnelles, ...) ont généralement leur domaine de continuité confondu avec celui de définition semble justifier le peu d'attention qui est accordé à l'importante notion de continuité.

Quel lien existe-t-il entre la continuité et la dérivabilité ?

Définition 1.1.2 *:*
On dit d'une fonction f qu'elle est continue dans l'intervalle I si elle est continue en tout point $x \in I$.

Dans ce cas, sur tout l'intervalle I, `la courbe représentative de f se dessine sans soulever le crayon !`

1. **Toute fonction dérivable en x_0 y est continue**

   En effet, si f est dérivable en x_0 , alors il existe $k \in \mathbb{R}$ telle que :

   $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k$$

   Dans ce cas,

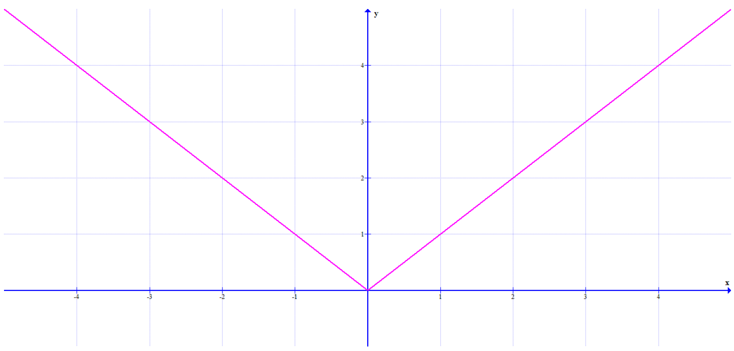
   $$\frac{lim_{x \to x_0}[f(x) - f(x_0)]}{\lim_{x \to x_0}(x - x_0)},$$
   $$\Rightarrow \lim_{x \to x_0}[f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \to x_0} k.(x - x_0),$$
   $$\Rightarrow \lim_{x \to x_0}[f(x) - f(x_0)] = k.0,$$
   $$\Rightarrow \lim_{x \to x_0}[f(x) - f(x_0)] = 0,$$

   $\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ c'est-à-dire la fonction f est continue en x_0 .

2. **Une fonction peut-être dérivable en un point sans y être continue.**

   Montrons, par exemple, que $f(x) = |x|$ est continue en 0 mais n'y est pas dérivable.

   Voici, à titre d'indication, la représentation graphique de $f(x) = |x|$:



$$\lim_{x\to 0} |x| = |0| = 0$$

Comme $\lim_{x\to 0} |x| = |0|$ alors $f(x) = |x|$ est continue en $x = 0$.
Pour ce qui est de la dérivabilité,

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|-0}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$$

Comme $|x| = \begin{cases} x & \text{s} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{s} \quad x \leq 0 \end{cases}$ alors pour calculer $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ il faut distinguer deux cas :

(a)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$$

(b)

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{x} = -1$$

Comme la limite à gauche est différente de celle à droite, alors la limite $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|-0}{x-0}$ n'existe pas et par conséquent, la fonction $f(x) = |x|$ n'est pas dérivable en $x = 0$.

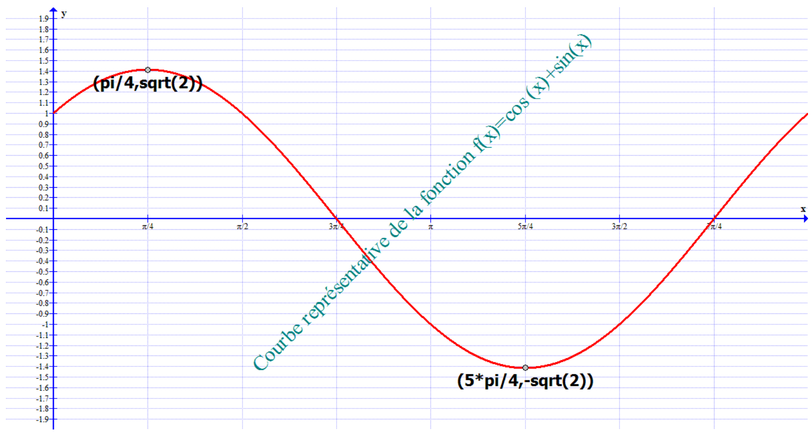
1.2 Théorèmes des valeurs intermédiaires

Il s'agit des théorèmes très intuitifs que nous admettons sans démonstration dont le rôle est crucial dans la recherche des solutions des équations du type $f(x) = k$ pour une fonction continue quelconque f et pour un nombre réel k.

Théorème 1 *:*
Si une fonction f est continue sur un intervalle $I = [a,b]$ et si $m(x_1, f(x_1))$ et $M(x_2, f(x_2))$ sont respectivement le minimum et le maximum locaux de la fonction f sur l'intervalle $I = [a,b]$ alors pour toute valeur $y \in [f(x_1), f(x_2)]$ (c'est-à-dire y est compris entre le minimum et le maximum de f sur $I = [a,b]$) il existe au moins une valeur $c \in I$ telle que $f(c) = y$.

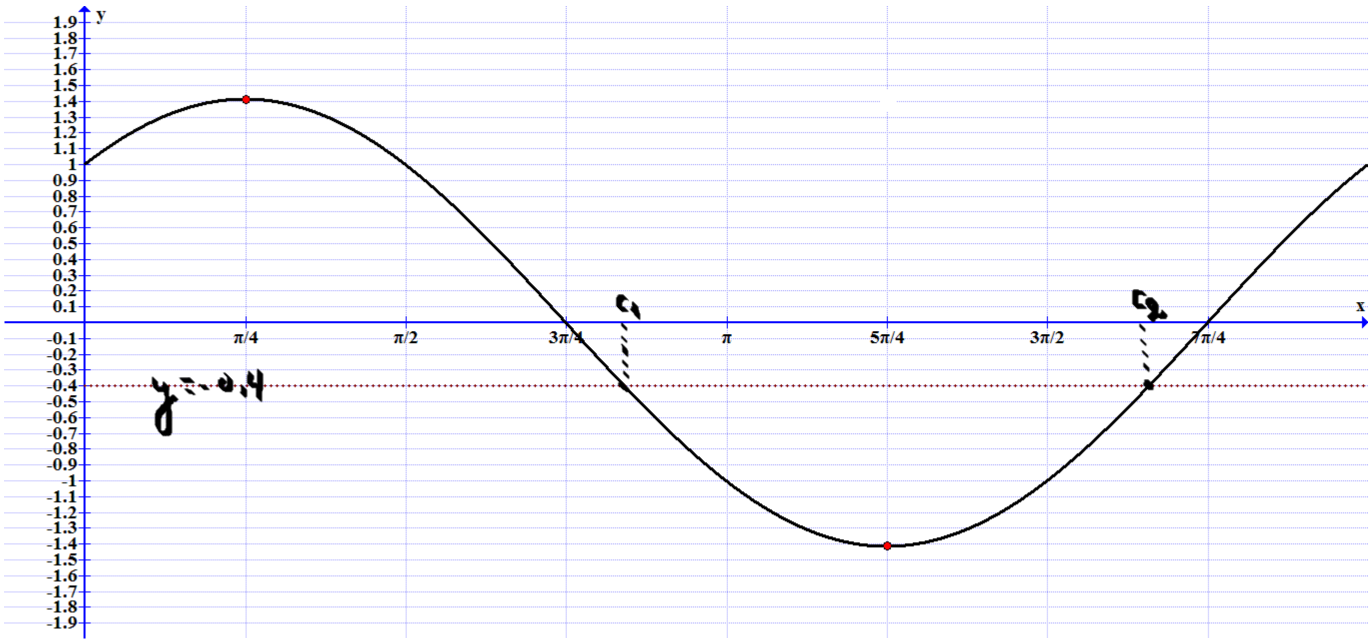
Exemple liminaire 1.2.1 *:*
Observons une fois de plus la représentation graphique de la fonction $f(x) = \cos x + \sin x$ sur $[0, 2\pi[$

Il s'agit d'une fonction continue sur $[0, 2\pi[$ et dont les valeurs extrêmes sur cet intervalle sont $f_{min} = -\sqrt{2}$ et $f_{max} = +\sqrt{2}$.



Le théorème 1.2 implique dans ce cas que pour toute valeur $k \in \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$, l'équation $f(x) = k$ c'est-à-dire $\cos x + \sin x = k$ admet au moins une solution réelle $c \in [0, 2\pi[$.

A titre illustratif, en considérant $k = -0.4 \in k \in \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$, il suffit de tracer la droite horizontale $y = -0.4$ pour *voir* que l'équation $\cos x + \sin x = -0.4$ admet au moins une solution (exactement deux, c_1 et c_2 pour ce cas) conformément au théorème 1.2.



Lorsque la valeur k du théorème 1.2 est nulle, on obtient la version suivante du même résultat :

þ :
Si f est continue sur $I = [a, b]$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont des signes contraires, alors il existe au moins $c \in I$ telle que $f(c) = 0$.

A titre d'exemple, la fonction $f(x) = -2x^3 + x^2 - x + 2$ est définie et continue sur $I = [0, 2]$. Comme $f(0) = 2 \geq 0$ et $f(2) \leq 0$ alors l'équation $-2x^3 + x^2 - x + 2 = 0$ admet au moins une solution c telle que $0 \leq c \leq 2$.

Le but des théorèmes des valeurs intermédiaires étant principalement la préparation à la résolution approchée par des machines des équations de la forme $f(x) = k$ pour une fonction continue quelconque f, les théorèmes 1.2 et 1.2 possèdent la principale lacune suivante : **il permettent de postuler l'existence d'au moins une solution sur un intervalle et ne permettent donc pas de déterminer le nombre exact de solutions d'une équation de la forme** $f(x) = k$.

Pour y arriver, il est nécessaire d'utiliser le résultat suivant :
þ :
Si une fonction f est continue et **monotone** sur un intervalle $I = [a, b]$ et si $m\,(x_1, f(x_1))$ et $M\,(x_2, f(x_2))$ sont respectivement le minimum et le maximum locaux de la fonction f sur l'intervalle $I = [a, b]$ alors pour toute valeur $y \in [f(x_1), f(x_2)]$ (c'est-à-dire y est compris entre le minimum et le maximum de f sur $I = [a, b]$) il existe **exactement** une valeur $c \in I$ telle que $f(c) = y$.
þ :
Si f est continue et monotone sur $I = [a, b]$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont des signes contraires, alors il existe exactement $c \in I$ telle que $f(c) = 0$.

1.2.1 Quelques exercices d'application

Exemple liminaire 1.2.2 *:*
Combien l'équation $x^5 - 5x + 5 = 0$ admet-elle de solution(s) ?

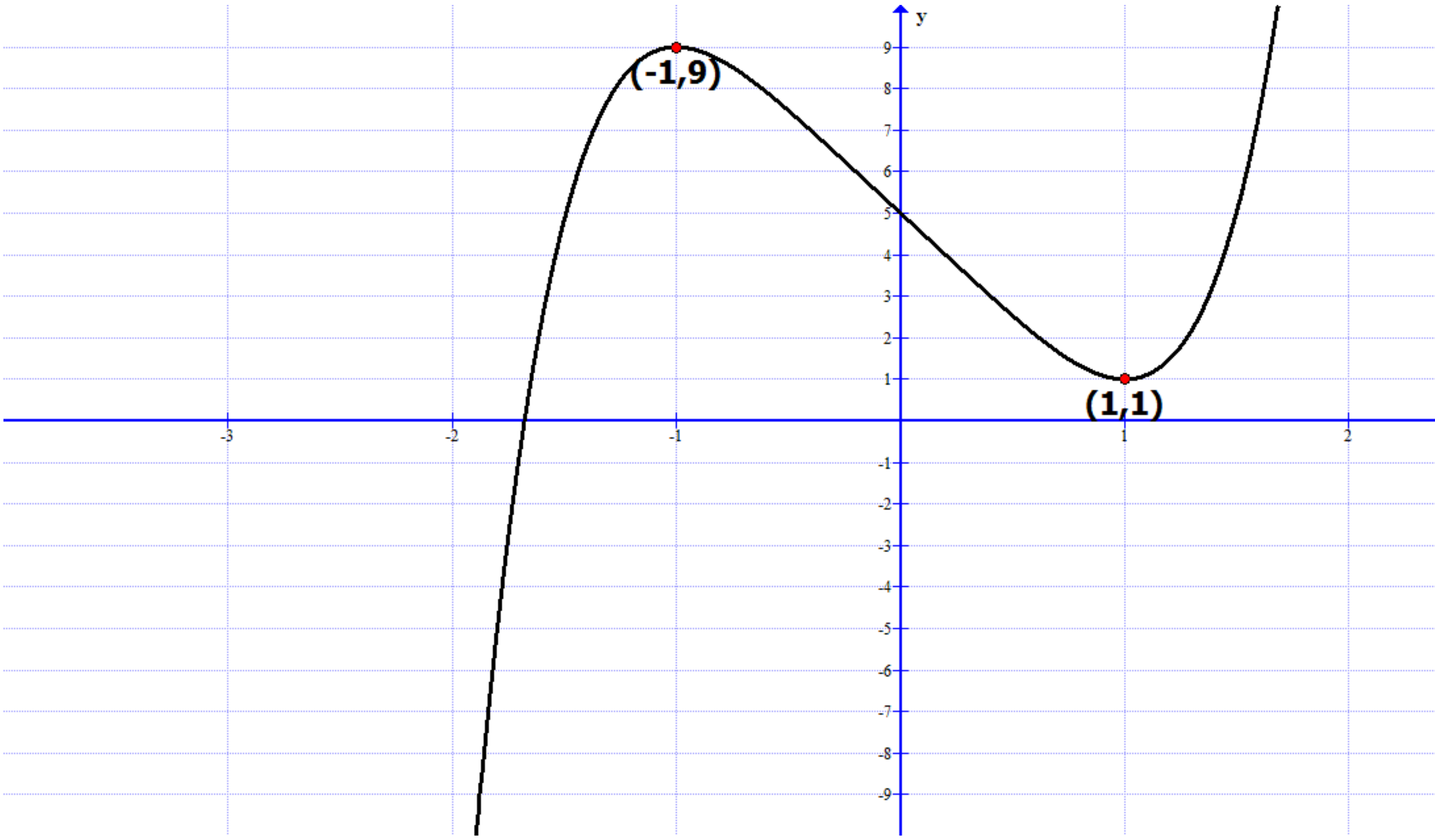
Eléments de Corrigé :

$$f^{'}(x) = 5x^4 - 5 = 5(x^4 - 1) = 5(x^2 - 1)(x^2 + 1)$$

Comme $5(x^2 + 1) > 0$ alors les signes de la dérivée sont ceux de $x^2 - 1$ qui est positif dans $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ et négatif dans $]-1, 1[$

Les intervalles de monotonie sont $I_1 =]-\infty, -1[$, $I_2 =]-1, 1[$ et $I_3 =]1, +\infty[$

1. Sur $I_1 =]-\infty, -1[$ la fonction change de signe (passe de $-\infty$ à 9). D'après le théorème 1.2, l'équation $x^5 - 5x + 5 = 0$ y admet une seule solution $cc \in I_1$
2. Comme sur $I_2 =]-1, 1[$ et $I_3 =]1, +\infty[$ la fonction f ne change pas de signe, alors l'équation $f(x) = k$ n'y admet aucune solution.



Au total l'équation $x^5 - 5x + 5 = 0$ admet exactement une seule solution $c \in I_1$
On peut préciser davantage la localisation de cette solution unique en remarquant sur la courbe que f change de signe entre -2 et -1.
En effet, $f(-2) = (-2)^5 - 5 \times (-2) + 5 = 17 > 0$ alors que $f(-1) = 9$. On en déduit finalement que l'équation $x^5 - 5x + 5 = 0$ admet exactement une seule solution $c \in]-2, -1[$

Exemple liminaire 1.2.3 *:*
Déterminer le nombre de solution de l'équation $x\sqrt{1+x} = \frac{-1}{4}$

Exemple liminaire 1.2.4 *:*
Même question sur l'équation $\cos^3(x) + \sin^3(x) = 0.8$ *sur* $[0, 2\pi[$

`Indication` : cette équation admet exactement 4 solutions x_1, x_2, x_3 et x_4 avec $0 < x_1 < \frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4} < x_2 < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < x_3 < \pi$ et $\frac{3\pi}{2} < x_4 < 2\pi$

Exemple liminaire 1.2.5 *:*
Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = \frac{x}{x^4+3} = \frac{1}{5}$ *sur* $\mathbb{R}$.

Chapitre 2

Fonctions exponentielles et logarithmiques

2.1 Quelques rappels choisis

2.1.1 Logarithmes

Définition 2.1.1 *:*
Soit a un nombre réel strictement positif.
On appelle logarithme d'un réel x dans la base a, le nombre réel noté $\log_a x$ *et défini par la relation :*

$$\log_a x = y \quad ssi \quad a^y = x$$

En d'autres termes, $\log_a x$ est l'exposant que porte une puissance de base a dont la valeur est x .

Exemple 2.1.1 *:*
$\log_2 8 = 3, \quad \log_5 125 = 3, \quad \log_9 3 = 0.5, \quad \log_3 81 = 4 \quad \log_7 1 = 0 \cdots$

Remarque 2.1.1 *:*
Lorsque la base vaut 10, *on parle de logarithme décimal et on écrit tout simplement* $\log x$ *au lieu de* $\log_{10} x$

Propriétés élémentaires des logarithmes

1. $\forall a \in \mathbb{R}_+^\star$, $\log_a(x)$ existe ssi $x > 0$
   (a) Les nombres négatifs n'ont pas de logarithme. C'est ainsi que, par exemple, l'expression $\log_5(-4)$ est dénuée de sens
2. $\forall x, y > 0$, $\log_a(x.y) = \log_a(x) + \log_a(y)$ et si $y \neq 0$ on a $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
3. $\forall n \in \mathbb{R}, \quad \log_a(x^n) = n \log(x)$
4. $\log_a(x) = \log(y) \Rightarrow x = y$ (en d'autres termes la fonction $f(x) = \log_a(x)$ est injective).

Quelques exemples d'illustration des propriétés

Exercice 2.1.1 *:*
Résoudre chacune des équations suivantes :

1. $\log\left[x(x-2)\right]=0$
   (a) ***Indication de réponses:*** $S=\left\{1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}\right\}$
2. $\log_2(x+3)=1$
   (a) ***Indication de réponses:*** $S=\{-1\}$
3. $\log x+\log(x+5)=2\log 2$
   (a) ***Indication de réponses:*** $S=\left\{\frac{-5+\sqrt{41}}{2}\right\}$
4. $\log(x^2-1)=2\log(x-3)$
   (a) ***Indication de réponses:*** $S=\emptyset$

Exercice 2.1.2 *:*
Un capital de 10 000 \$ est placé à intérêts composés au taux de 5% par an.

1. *Quel sera ce capital après 10 ans ?*
2. *Dans combien d'années ce capital doublera-t-il ?*
   (a) ***Indication de réponses:*** $14,27\approx 15ans$

Problème 2.1.1 *:*
Il arrive qu'en calculant des logarithmes, il se pose le besoin de pouvoir passer d'une base à une autre. Comment procéder ?

Solution : il suffit pour cela d'utiliser la formule de changement de base. On démontre à cet effet que pour deux nombres réels a et b strictement positif et $\forall x\in\mathbb{R}^+$:

$$\log_a(x)=\frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

Exemple liminaire 2.1.1 *Résolvons l'équation* $\log_3(x+1)+\log_9(x-2)=\log_9(x^2-1)$

Les contraintes sur l'inconnue sont :

$x+1>0$ et $x-2>0$ et $x^2-1>0$ et il est évident qu'elles se résument en $x>2$

Ainsi pour cette équation, l'ensemble des solutions admissibles est $E=\left]2,+\infty\right[$

$\log_3(x+1) + \log_9(x-2) = \log_9(x^2-1)$

$\Rightarrow \frac{\log_9(x+1)}{\log_9 3} + \log_9(x-2) = \log_9(x^2-1)$

$\Rightarrow \frac{\log_9(x+1)}{\frac{1}{2}} + \log_9(x-2) = \log_9(x^2-1)$

$\Rightarrow 2\log_9(x+1) + \log_9(x-2) = \log_9(x^2-1)$

$\Rightarrow \log_9(x+1)^2 + \log_9(x-2) = \log_9(x^2-1)$

$\Rightarrow \log_9\left[(x+1)^2(x-2)\right] = \log_9(x^2-1)$

$\Rightarrow (x+1)^2(x-2) = (x^2-1) \Rightarrow (x+1)(x-2) = (x-1)$

$\Rightarrow x^2 - 2x - 1 \Rightarrow S\left\{1+\sqrt{2}\right\}$

2.1.2 Courbes et dérivées des fonctions réciproques

Il est établi que si f est une bijection de I vers J telle que pour $a \in I, f(a) = b$, sa réciproque f^{-1} est définie de Jvers I telle que $f^{-1}(b) = a$.

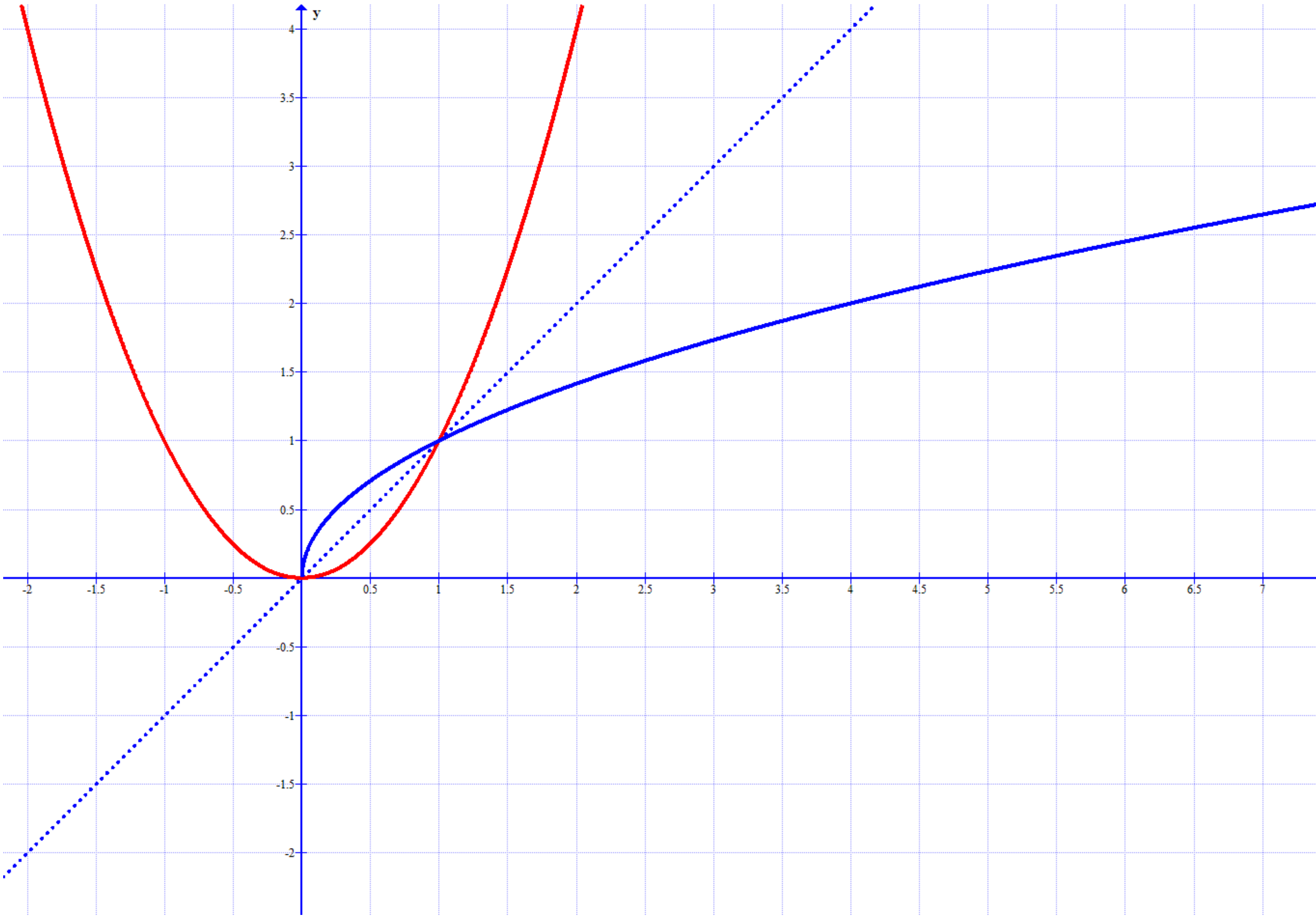
Ainsi par exemple, $f(x) = x^2$ est une bijection de $[0, +\infty[$ vers $[0, +\infty[$ et sa réciproque est la fonction $g(x) = \sqrt{x}$ définie de $[0, +\infty[$ vers $[0, +\infty[$.

En représentant f et g dans un repère orthonormé ainsi que la première bissectrice des axes on obtient :

Nous remarquons que les courbes représentatives respectives de f et g sont symétriques par rapport à la première bissectrice des axes.

Cette propriété est générale : **les courbes représentatives de deux fonctions réciproques respectives sont toujours symétriques par rapport à la droite** $y = x$.

Pour ce qui est de la dérivée, on démontre que si f est une bijection alors la dérivée de sa réciproque f^{-1} est égale à l'inverse de la dérivée de la fonction directe sous réserve d'interchanger le rôle des variables :



$$\left[f^{-1}\right]_x' = \frac{1}{[f]_y'} \tag{2.1}$$

2.2 Allure des courbes $y = a^x$ et $y = \log_a(x)$

La relation $\log_a(x) = y \Rightarrow a^y = x$ signifie clairement que la fonction exponentielle de base a et la fonction logarithmique de même base sont réciproques l'une de l'autre.
Dans un premier temps nous allons, d'une manière intuitive dégager l'allure générale des courbes de ces deux importantes fonctions.

Pour cela il faut distinguer le cas $a > 1$ du cas $0 < a < 1$ qui conduisent chacun, comme on le verra par la suite, à des fonctions aux propriétés opposées en ce qui concerne le sens de variation.

2.2.1 Fonctions exponentielle et logarithmique de base a avec $a > 1$ (ex : $a = 10$)

Pour la fonction $f(x) = 10^x$ il est évident qu'elle est définie sur tout l'ensemble $\mathbb{R}$.

Il convient aussi de remarquer que cette fonction est monotone croissante étant donné que $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \geq x_2 \Rightarrow 10^{x_1} \geq 10^{x_2}$.

L'inégalité $10^x \geq x$ implique que $\lim_{x\to+\infty} 10^x = +\infty$ et par conséquent (en faisant le changement de variable $x = -t$) on obtient :

$$\lim_{x\to-\infty} 10^x = \lim_{t\to+\infty} 10^{-t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{10^t} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

En bref, la fonction $f(x) = 10^x$ est définie et croissante sur $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ avec comme limites aux bornes :

$$\lim_{x\to-\infty} 10^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} 10^x = +\infty$$

Il en résulte alors que sa courbe représentative est entièrement au-dessus de l'axe des abscisses qui est en fait une asymptote horizontale à cette courbe du côté gauche :

La réciprocité de $f(x) = 10^x$ et $g(x) = \log(x)$ nous permet directement d'obtenir les propriétés de la fonction logarithme décimal en vertu des rappels ci-dessus :

Il résulte de cette représentation graphique que la fonction $f(x) = \log(x)$ est définie dans $]0, +\infty[$, y est croissante et en termes de limites aux bornes on a :

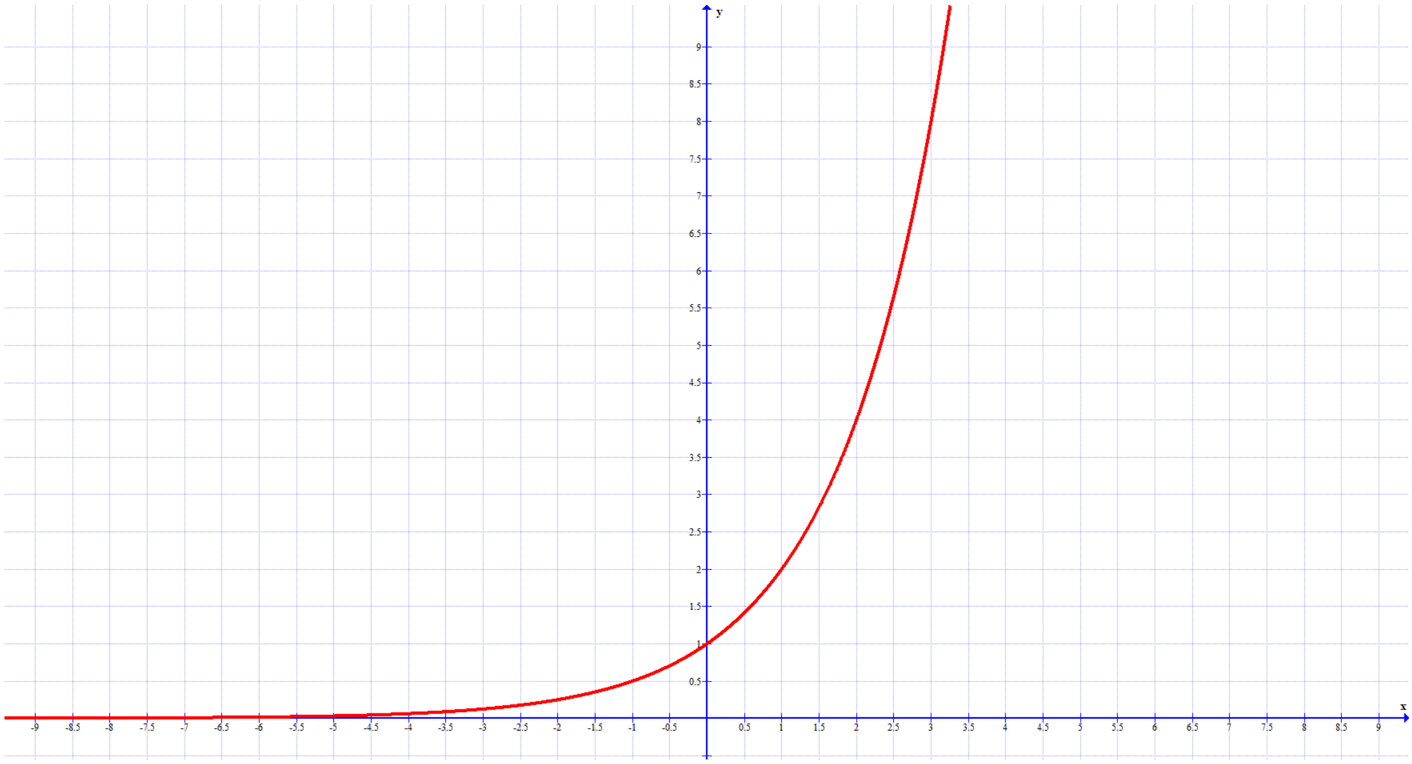
$$\lim_{x\to0^+} \log(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \log(x) = +\infty$$

De manière générale, pour $a > 1$, les fonctions $f(x) = a^x$ et $g(x) = \log_a(x)$ sont croissantes, la première sur $\mathbb{R}$ et la seconde sur $\mathbb{R}_+^\star$ et on a d'une part :

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$$

D'autre part on a :

$$\lim_{x\to0^+} \log_a(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \log_a(x) = +\infty$$



2.2.2 Fonctions exponentielle et logarithmique de base a avec $0 < a < 1$ (ex : $a = 0.5$)

Pour la fonction $f(x) = 0.5^x$ il convient de remarquer qu'elle est définie sur tout l'ensemble $\mathbb{R}$ et la relation $x_1 \geq x_2 \Rightarrow 0.5^{x_1} \leq 0.5^{x_2}$ implique qu'il s'agit d'une fonction décroissante.

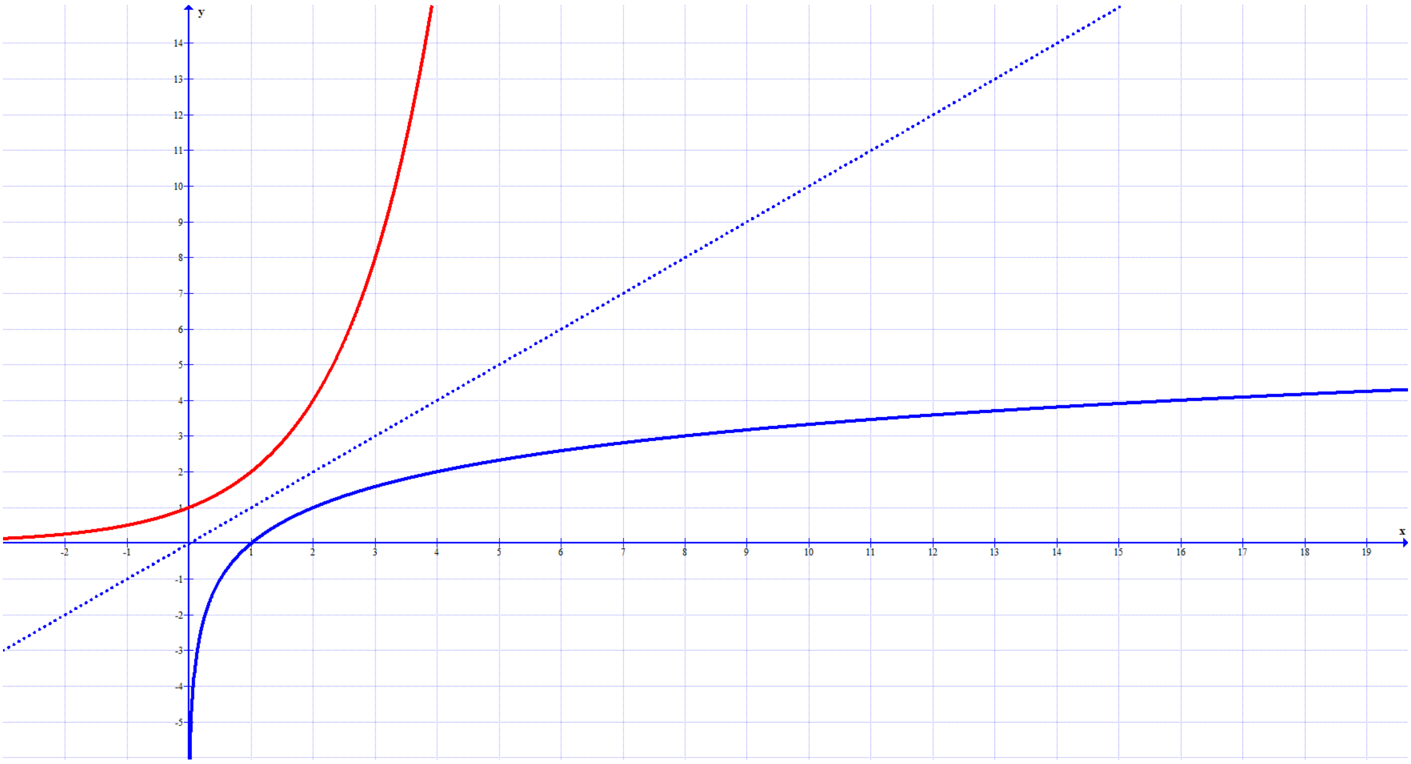
Il résulte de cette représentation graphique, en termes des limites aux bornes, que :

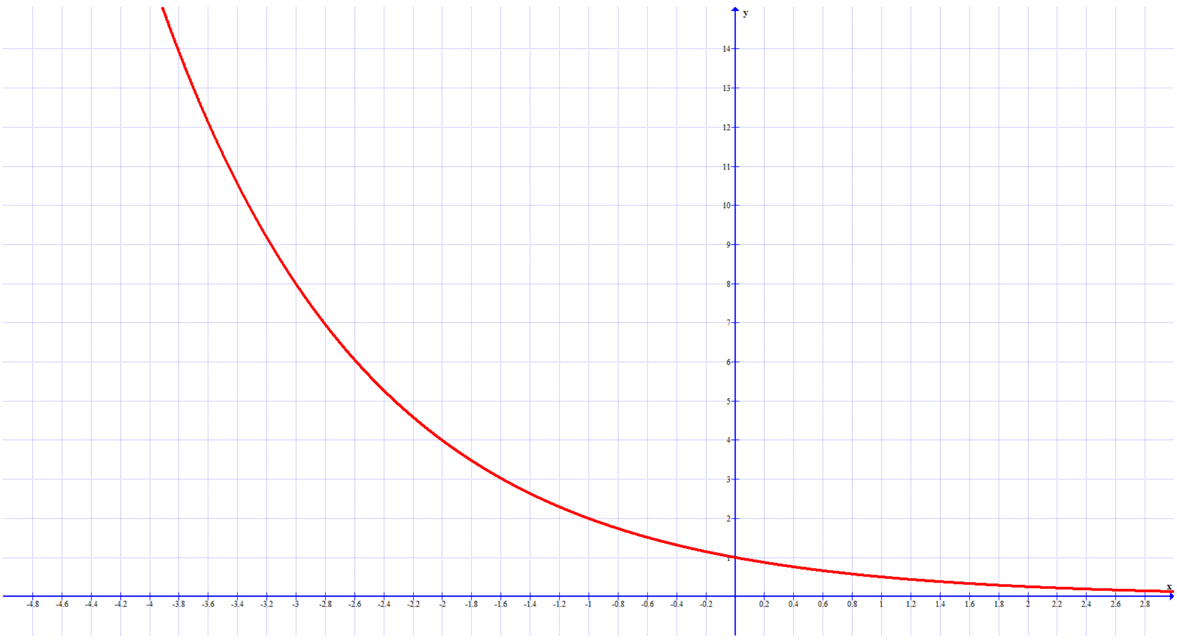
$$\lim_{x\to-\infty} (0.5)^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} (0.5)^x = 0$$

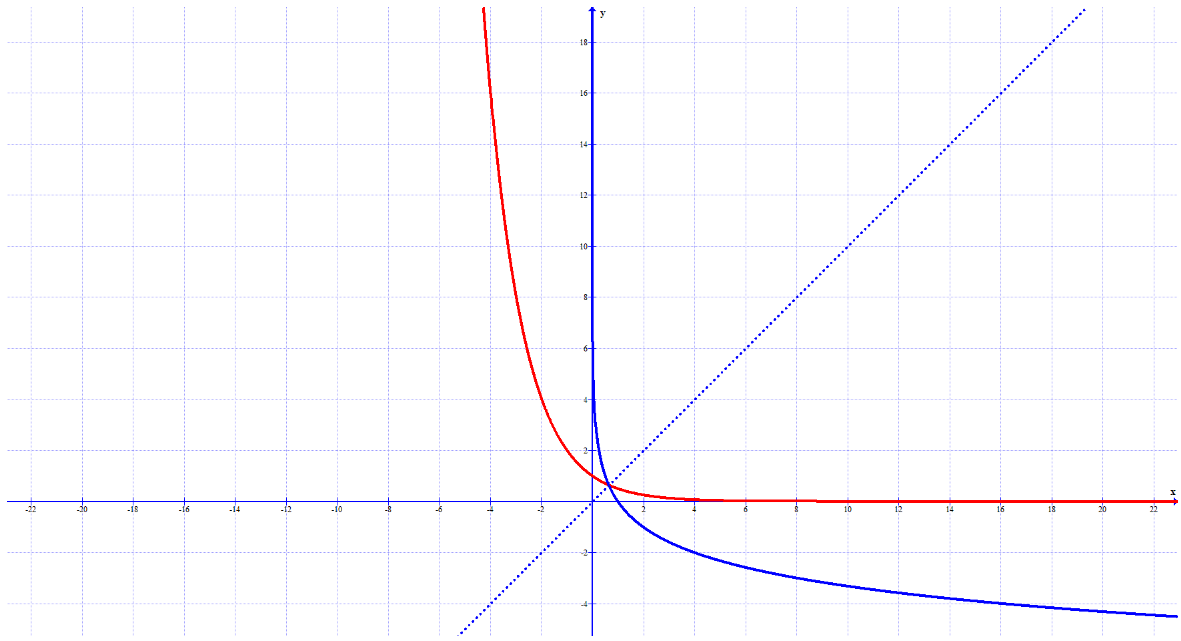
En utilisant les propriétés de réciprocités, on peut déduire de ce graphique les propriétés de $g(x) = \log_{0.5}(x) = \frac{\log(x)}{\log(0.5)}$:

Il résulte, sans surprise, de ce graphique que la fonction logarithmique de base $a = 0.5$ est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$ et en termes des limites aux bornes nous avons :

$$\lim_{x\to0^+} \log_{0.5}(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \log_{0.5}(x) = -\infty$$


y
x


y
x



2.3 Fonction exponentielle népérienne

Pour divers modèle de croissance il se pose le besoin de fonctions f qui sont telles que $f^{'}(x) = kf(x)$. Bien entendu le cas le plus simple correspondra au cas $k = 1$.

Définition 2.3.1 *il existe une seule fonction f vérifiant la relation $f^{'}(x) = f(x)$ avec $f(0) = 1$. On l'appelle* ***fonction exponentielle népérienne*** *et son expression mathématique est $f(x) = e^x$ où la base spéciale e est définie par l'expression :*

$$e = \lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

Définition 2.3.2 *On appelle logarithme népérien le logarithme en base e . Ce logarithme spécial se note $\ln(x)$ au lieu de $\log_e(x)$.*

Pour dégager les propriétés de ces fonctions, il nous suffit de trouver la valeur approchée de e .

Considérons la fonction g définie par $g(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

Pour trouver une valeur approchée de e , il suffit de donner à x des valeurs successivement proches de 0 et *voir* de quelle valeur $g(x)$ s'approche progressivement.

x	0.5	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001
$g(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$	2.25	2.5937	2.7048	2.7169	2.7181	2.7183

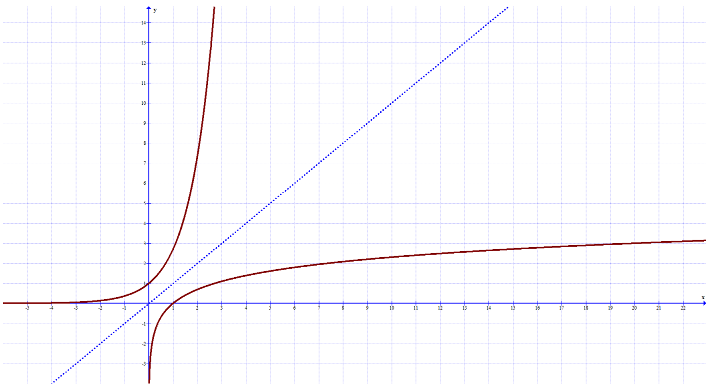
Il ressort de ce tableau qu'à mesure que la variable x s'approche de zéro, la quantité $g(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ s'approche approximativement de 2.718..

Symboliquement on écrit

$$e = \lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} \approx 2.72$$

Comme la base du logarithme népérien est supérieure à il en résulte les propriétés suivantes sur les fonctions exponentielle et logarithmique népériennes :

1. La fonction $f_1(x) = e^x$ est définie et croissante sur $\mathbb{R}$ tandis que la fonction $f_2(x) = \ln(x)$ est définie et croissante sur $\mathbb{R}_+^\star$.
2. Leurs courbes représentatives respectives sont symétriques par rapport à la première bissectrice des axes :



3. En termes des limites aux bornes on a les relations suivantes :

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty, \quad \lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$$

4. De manière générale on établit que la dérivée de la fonction réciproque f^{-1} s'obtient à partir de celle de f par la relation :

$$(f^{-1})'_x = \frac{1}{(f)'_y}$$

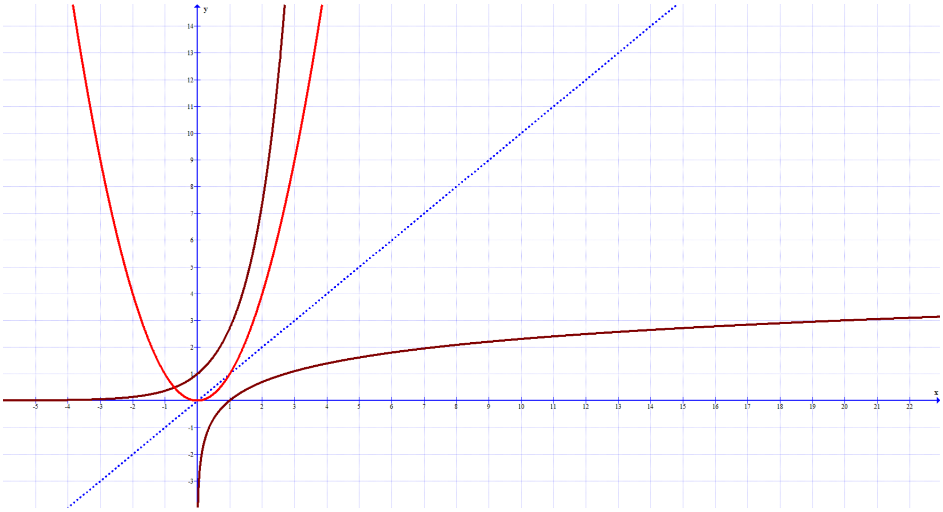
D'une part, $(e^x)' = e^x$ et d'autre part $g(x) = \ln(x)$ est la réciproque de $f(x) = e^x$. Il en résulte que :

$$(\ln(x))' = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

En considérant la formule de dérivation des fonctions composées $(f(u(x)))^{'} = f^{'}(u).u^{'}(x)$ on résume les formules de dérivation suivante :

$$(e^x)^{'} = e^x, \quad \left(e^{u(x)}\right)^{'} = [u(x)]^{'}.e^{u(x)}, \quad (\ln(x))^{'} = \frac{1}{x}, \quad (\ln u(x))^{'} = \frac{u^{'}(x)}{u(x)}$$

5. En observant de nouveau les graphiques :



On remarque certes que les fonctions $f(x) = e^x$, $g(x) = x$ et $g(x) = \ln(x)$ sont toutes croissantes mais il est évident que $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star$,$\ln(x) < x < e^x$. On démontre même que $\forall n \in \mathbb{R}$, $\ln(x) < x^n < e^x$.

Il découle de cette inégalité les limites classiques suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\ln x} = +\infty$$

2.4 Première série d'exercices

1. Résolvons chacune des équations suivantes :
   (a) $e^{2x} + e^x - 2 = 0$
      i. `Indication de solution` : $S = \{0\}$
   (b) $e^{x^2+8} = e^{2x}$
      i. `Indication de solution` : $S = \{\}$

2. Calculer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes :
   (a) $f(x) = e^{x^2}$
   (b) $f(x) = x^2 e^x$
   (c) $f(x) = \ln(-2x + 4)$
   (d) $f(x) = \ln(\cos x)$
3. Calculer les limites suivantes :
   (a) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+3}{x+2}\right)^{x+2}$, `Indication de solution` : e
   (b) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x+3}{2x+5}\right)^{3x+1}$, `Indication de solution` : e^{-3}
   (c) $\lim_{x \to 0} \frac{x}{e^x - 1}$, `Indication de solution` : 1
4. Etudier la variation de la fonction $f(x) = xe^x$

   Corrigé :

   Le domaine de définition est évidemment $\mathbb{R}$

$$f^{'}(x) = e^x + xe^x = (1 + x)e^x$$

Comme la quantité e^x est strictement positive, alors les signes de cette dérivée ne dépendent que de $1 + x$ dont il est clair qu'elle est positive à droite de -1 et négative à gauche.
Il en résulte que la fonction f est décroissante à gauche de -1 et croissante à droite.
Les limites aux bornes sont :

$$\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} xe^x = +\infty$$

Par ailleurs, le minimum est atteint à $x = -1$ et vaut $f_{min} = f(-1) = \frac{1}{e}$

2.5 Problèmes d'applications sur les fonctions exponentielles et logarithmiques

Problème 2.5.1 *D'après les données statistique de Mai 1997, le taux d'équipement des français en téléphones mobiles semble pouvoir être calculé à l'aide de la formule*

$$f(t) = \frac{20}{1 + k^{-at}}$$

Dans cette expression, $f(t)$ est exprimé en pourcentage et t en années , la date 0 étant fixée à la fin 1995. Les réels k et a sont à déterminer.

1. *Sachant que le taux était de 2.4% à la fin 1995 et de 4.3% à la fin 1996, déterminer les réels k et a. Donnez-en une valeur approchée à 10^{-1} près qu'on utilisera par la suite.*
   (a) *Vérifier la prévision faite alors, pour fin 1997, d'un taux voisin de 7%*
   (b) *Donner une valeur arrondie à 10^{-1} près du taux prévisionnel pour la fin 2000 et la fin 2005.*
2. *En considérant la fonction f obtenue,*
   (a) *Etudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.*
   (b) *En déduire au cours de quelle année ce taux dépassera 15%*
   (c) *Déterminer la limite de f en $+\infty$. En donner une interprétation économique et estimer la pertinence à long terme de la formule obtenue. .*

Problème 2.5.2 1. *Considérons la fonction f définie sur $[0; 2.1]$ par :*

$$f(x) = 3 + (x-2)e^x$$

   (a) *Etablir le tableau de variation de f et en déduire ses signes.*

2. *Considérons la fonction F définie sur $[0; 2.1]$ par :*

$$F(x) = 3x + 3 + (x-3)e^x$$

   (a) *Utiliser les résultats de la partie 1 pour établir la variation de F*

3. ***Application*** *: Un laboratoire fabrique un produit pharmaceutique et sa capacité de production ne peut pas excéder 2.1 tonnes de produit. On note x la masse, en tonnes, de produit fabriqué.*

   Une étude a montré que le coût de fabrication en millions d'euros, de x tonnes de produit est égal à $F(x)$, F étant la fonction définie dans la partie 2.

   Si l'on note k le prix de vente, en millions d'euros, d'une tonne de produit, il est évident que $P(x) = kx - F(x)$ donne le profit (ou la perte), en millions d'euros, réalisé(e) après la fabrication et la vente de x tonnes de produit.
   Considérons $k = 3$.

   (a) *Si vous étiez responsable de ce laboratoire, combien produiriez-vous de tonnes pour réaliser un profit maximal ?*

2.6 Complément théorique sur les fonctions exponentielles et logarithmiques

Notons que s'agissant de la dérivation des fonctions exponentielles et logarithmiques de base quelconque il est avantageux de passer par la base e .

Ainsi, pour dériver l'expression a^x il suffit de remarquer que $a^x = e^{a^x} = e^{x\ln a}$ de sorte qu'en appliquant la formule $(e^u)^{'} = u^{'}e^u$ on obtient :

$$(a^x)^{'} = (e^{x\ln a})^{'} = \ln(a)e^{x\ln a} = \ln a(a^x)$$

Ainsi,

$$(a^x)^{'} = a^x\ln a \quad \text{et} \quad (a^u)^{'} = u^{'}a^u\ln a$$

Exemple liminaire 2.6.1 $(3^x)^{'} = 3^x\ln 3$

Quant à la dérivée de $g(x) = \log_a(x)$, la formule de changement de base donne :

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \Rightarrow (\log_a x)^{'} = \frac{1}{\ln a}\frac{1}{x} \Rightarrow (\log_a x)^{'} = \frac{1}{x\ln a}$$

Qu'arrive-t-il si la base est elle-même une fonction ?

Soient u et v deux fonctions. Cherchons l'expression de la dérivée de u^v :
Soit $y = u^v \Rightarrow \ln y = v\ln u$

$\Rightarrow \frac{y^{'}}{y} = v^{'}\ln u + v\frac{u^{'}}{u}$

$\Rightarrow \frac{y^{'}}{y} = \frac{uv^{'}\ln u + vu^{'}}{u}$

$\Rightarrow y^{'} = y\frac{uv^{'}\ln u + vu^{'}}{u}$

En remplaçant y par u^v on obtient en définitive :

$$(u^v)^{'} = u^v\left(\frac{uv^{'}\ln u + vu^{'}}{u}\right)$$

Exemple liminaire 2.6.2 *Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :*

$$f_1(x) = x^x \quad f_2(x) = (2x)^{3x} \quad f_3(x) = (\cos x)^{\sin x}$$

Problème 2.6.1 *Le nombre d'habitants d'une région ayant un fort taux de natalité est donné par la fonction exponentielle $f(t) = 12.e^{0.05.t}$ où $f(t)$ est la population exprimée en millions d'habitants pour l'année $1990 + t$.*

1. *A partir de quelle année cette population aura-t-elle plus que triplé(si cette croissance se maintient) ?*
2. *Cette région ne peut pas nourrir plus de 20 millions de personnes. Pendant combien d'années après 1990 la nourriture sera-t-elle suffisante ?*

Chapitre 3

Intégrales Simples

3.1 Différentielle : premières notions

Soit f une fonction de domaine de définition Df et $x_o \in Df$.

D'après la théorie relative à l'équation de la tangente, l'approximation linéaire de la fonction f au voisinage de x_0 est :

$$f(x) \approx f(x_0) + f^{'}(x_0)(x - x_0) = f(x_0) + f^{'}(x_0)\Delta x$$

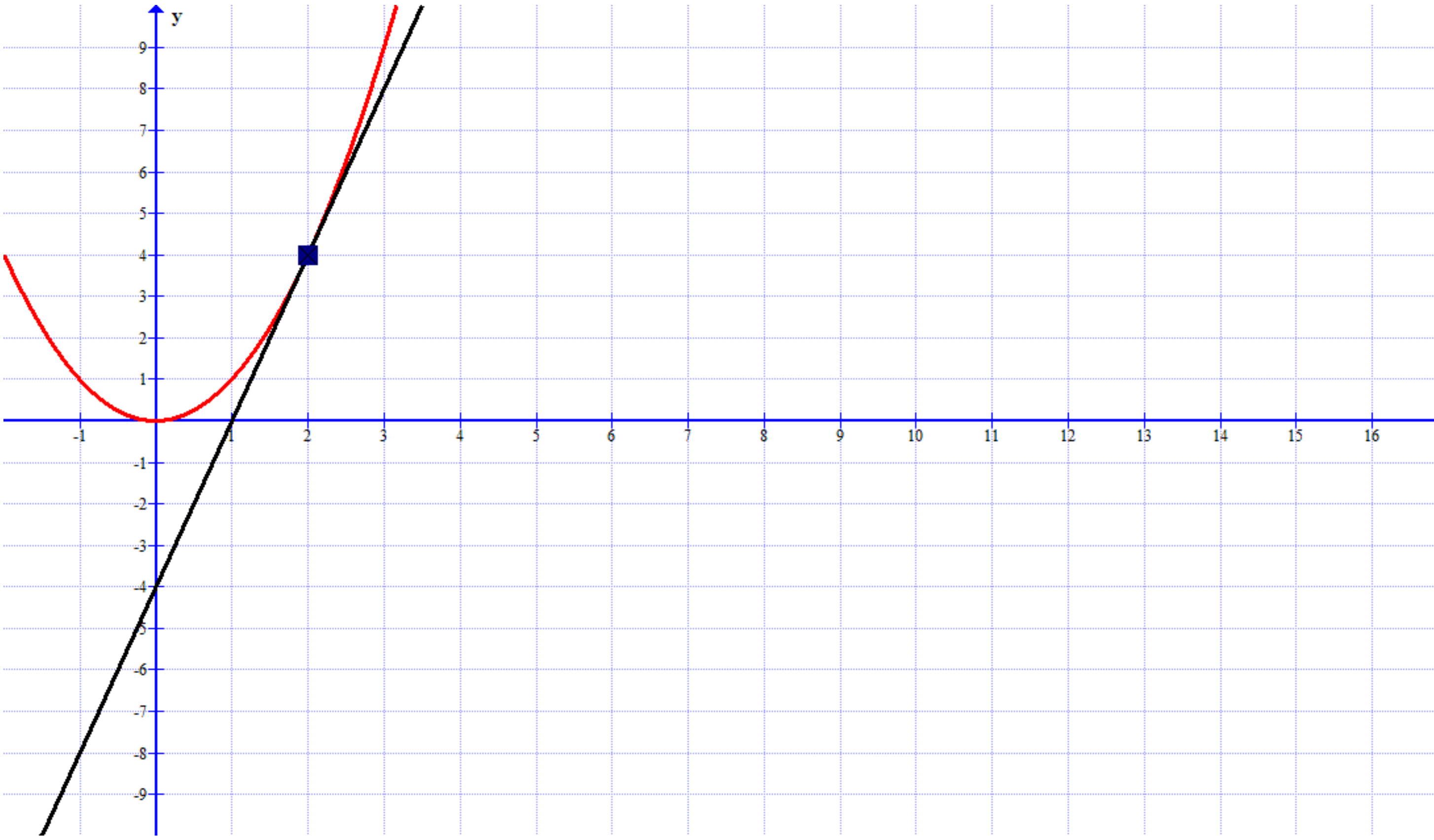
Cette droite représente la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0 .

La différentielle de f est la fonction qui associe à chaque accroissement $\Delta x = x - x_0$ la quantité $dy = (f(x_0) + f^{'}(x_0)(x - x_0)) - f(x_0) = t(x) - t(x_0)$ où $t = t(x)$ est l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse x_0 .

Remarque 3.1.1 *En langage purement géométrique, la différentielle df est l'application linéaire qui associe à tout vecteur $\Delta x = x - x_0$ de la droite vectorielle $\mathcal{D}_{x_0}$ tangente à l'axe des abscisses au point x_0 le vecteur $dy = t(x) - t(x_0) = t(x) - f(x_0)$ de la droite vectorielle $\mathcal{D}_{f(x_0)}$ tangente à la courbe représentative de f au point d'ordonnée $f(x_0)$.*

Ainsi, en considérant la droite vectorielle $\mathcal{D}_{x_0}$ tangente à l'axe des abscisses au point x_0 ainsi que la droite vectorielle $\mathcal{D}_{f(x_0)}$ tangente à la courbe représentative de f au point d'ordonnée $f(x_0)$, la différentielle df_{x_0} est l'application linéaire $df_{x_0} : \mathcal{D}_{x_0} \longrightarrow \mathcal{D}_{f(x_0)}$ qui associe à chaque vecteur $\Delta x \in \mathcal{D}_{x_0}$, le vecteur $dy \in \mathcal{D}_{f(x_0)}$ défini par :

$$\begin{aligned} df_{x_0}(\Delta x) &= dy \\ &= \Delta x . \tan \alpha \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &= \Delta x.\frac{dy}{dx} \\ &= \Delta x.f^{'}(x_0) \end{aligned}$$

Comme $\forall x_0 \in D_f$ et $\forall \Delta x \in \mathcal{D}_{x_0}$ on a $df_{x_0}(\Delta x) = f^{'}(x_0).\Delta x$ alors on écrit pour tout accroissement Δx de la variable x,

$$df = f^{'}(x).\Delta x$$

Remarquons que la quantité $df = f^{'}(x).\Delta x$ constitue alors une approximation de l'accroissement Δf qu'a subi la fonction f lorsque la variable x subit l'accroissement Δx et que cette approximation est d'autant plus meilleure que la quantité Δx est proche de zéro.

Si $\Delta x \to 0$ on écrit tout simplement dx au lieu de Δx et dans ce cas $dy = y^{'}dx$ constitue la variation (qui tend, par conséquent vers zéro aussi) de la fonction f consécutivement à celle dx de la variable x. On qualifie souvent d'**infinitésimales** les variations dx et $dy = y^{'}dx$ pour exprimer le fait qu'elles sont négligeables (tendent vers zéro).

Ces considérations sont justement utilisées pour calculer l'accroissement négligeable provoqué sur une fonction par un accroissement jugé aussi négligeable de sa variable au voisinage d'un point précis.

Exemple liminaire 3.1.1 *Considérons une grosse sphère métallique de rayon* $r = 10m$ *.Suite à une augmentation de la température du milieu ambiant, son rayon passe de 10m à 10,001m.*
Utiliser la notion de différentielle pour trouver, approximativement, l'accroissement du volume de la sphère qui en résultera.

INDICATION DE SOLUTION :

Il est connu que le volume V d'une sphère est une fonction de son rayon r exprimée par la relation $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Dans cette illustration l'accroissement du rayon est $dr = 0.001$ au point $r_0 = 10$. La question consiste alors à exprimer $dV =$
On obtient alors :

$$dV = V_r' dr = (4\pi r^2)_{10} 0.001 = 4 \times 3.14 \times 10^2 \times 0.001 \approx 1.256 m^3$$

Remarque 3.1.2 *La différentielle en tant que notion théorique est très subtile mais pour la suite de cet exposé, la simple relation* $dy = y' dx$ *nous suffira...*

3.2 Notion d'intégrale : définition et première illustration

Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $I = [a, b]$.

Qu'appelle-t-on intégrale de f sur l'intervalle $I = [a, b]$?

Commençons par subdiviser l'intervalle I en n sous-intervalles en prenant une suite $a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$ et dans chaque sous-intervalle $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ appelons respectivement M_k et m_k le maximum et le minimum local.

Définition 3.2.1 *On appelle* ***somme de Riemann supérieure***[1] *la quantité :*

$$S_n = (x_1 - x_0)M_1 + (x_2 - x_1)M_2 + \cdots (x_n - x_{n-1})M_n = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})M_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i M_i$$

Définition 3.2.2 *On appelle* ***somme de Riemann inférieure***[2] *la quantité :*

$$s_n = (x_1 - x_0)m_1 + (x_2 - x_1)m_2 + \cdots (x_n - x_{n-1})m_n = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})m_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i m_i$$

1. Ou encore Somme de Darboux supérieure
2. Ou encore Somme de Darboux supérieure

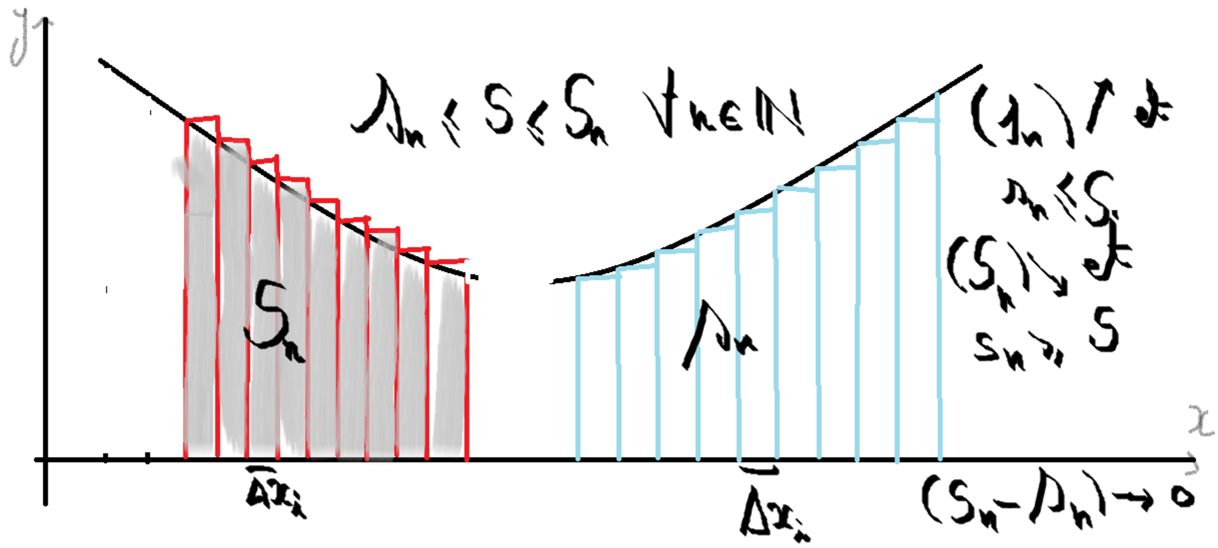
Quelle signification géométrique pouvons-nous donner aux quantités S_n et s_n ?

En notant S la surface limitée par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses ainsi que les droites verticales $x = a$ et $x = b$ on démontre aisément que :

1. La suite (S_n) est telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_{n+1} \leq S_n$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n \leq S$
3. On résume ces deux propriétés en disant que la suite (S_n) des sommes supérieures de Riemann est décroissante et majorée par S

Dans le même ordre d'idées, on démontre que :

1. La suite (s_n) est telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad s_{n+1} \geq S_n$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n \geq S$
3. On résume ces deux propriétés en disant que la suite (S_n) des sommes inférieures de Riemann est croissante et minorée par S



Ainsi, pour toute fonction f et tout intervalle $I = [a, b]$,

1. la suite (s_n) est convergente car elle est à la fois croissante et majorée (par S),

2. la suite (S_n) est convergente car elle est à la fois décroissante et minorée (par S),

Définition 3.2.3 *On dit d'une fonction f qu'elle est intégrable sur un intervalle I si les suites (S_n) et (s_n) des sommes supérieures et inférieures de Riemann convergent vers une limite commune S appelée* ***intégrale de la fonction f sur l'intervalle*** $I = [a, b]$.

On démontre que si f est une fonction continue sur un intervalle $I = [a, b]$, alors elle y est intégrable.

En remarquant que lorsque $n \to \infty$, la quantité Δx tend vers dx et dans ce cas, chacun des intervalles $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ se réduit (à la limite) en un point de sorte qu'il n'est plus possible de distinguer M_k de m_k que l'on note tout simplement par $f(x)$.

En nous convenant de remplacer alors le signe $\sum$ de sommation discrète par celui $\int$ de sommation continue on écrit :

$$\begin{aligned} S &= \lim_{n\to\infty} s_n \\ &= \lim_{n\to\infty} S_n \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} M_i \times \Delta x \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x)dx \\ &= \int_a^b f(x)dx \end{aligned}$$

Ce formalisme justifie le symbole $\int_a^b f(x)dx$ qui provient de $\sum_{i=1}^n M_i\Delta x$ ou $\sum_{i=1}^n m_i\Delta x$ en remarquant que lorsque n tend vers $+\infty$, chacun des sous-intervalles $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ se réduisant en un point,

1. M_i ou m_i est remplacé par $f(x)$,
2. Δx est remplacé par dx
3. $\sum$ est remplacé par $\int$

Ainsi la quantité $\int_a^b f(x)dx$ représente l'aire de la surface S comprise entre la courbe représentative de f, l'axe des abscisses ainsi que les droites verticales $x = a$ et $x = b$.

Remarque 3.2.1 *Il généralement difficile d'utiliser cette définition pour calculer une intégrale. On contourne cet obstacle grâce à la* **formule de Newton-Leibniz** *d'après laquelle :*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Dans cette expression, F est une ***primitive*** *de f c'est-à-dire une fonction dont la dérivée est f.*

Avant de parcourir en les illustrant les différentes techniques d'intégration qui permettent de contourner l'utilisation de cette définition, illustrons cette dernière par un exemple simple.

Exemple liminaire 3.2.1 *Soit à calculer, en utilisant la définition,*

$$I = \int_0^a x dx$$

La fonction à intégrer est $f(x) = x$ sur l'intervalle $I = [0, a]$

En subdivisant ce dernier en n sous intervalle de même longueur (par conséquent $\Delta x = \frac{a}{n}$), on obtient successivement $x_0 = 0, x_1 = \frac{a}{n}, x_2 = \frac{2a}{n} \cdots, x_k = \frac{ka}{n}, \cdots, x_n = \frac{na}{n} = a$ et dans ce cas la somme de Riemann inférieure vaut :

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i.\Delta x_i = \frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i = \frac{a}{n}\left(f(\frac{a}{n}) + f(\frac{2a}{n}) + \cdots + f(\frac{(n-1)a}{n})\right)$$

$$\Rightarrow s_n = \frac{a}{n}\left(\frac{a}{n} + \frac{2a}{n} + \cdots + \frac{(n-1)a}{n} +\right) = \frac{a}{n} \times \frac{a}{n}\left(1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)\right)$$

En tenant compte du fait que $1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$,on obtient :

$$s_n = \frac{a}{n} \times \frac{a}{n}\left(1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)\right) = \frac{a^2}{n^2}\frac{n(n-1)}{2} = \frac{a^2}{n^2} \times \frac{n^2 - n}{2} = \frac{a^2n^2 - na^2}{2n^2}$$

En définitive,

$$\int_0^a x dx = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{a^2n^2 - na^2}{2n^2} = \frac{a^2}{2}$$

Cet exemple simple illustre assez bien combien il peut être fastidieux de se servir de la définition d'une intégrale comme limite d'une des sommes de Riemann et permet d'apprécier à sa juste valeur l'importante formule de Newton-Leibniz. Dans l'esprit de cette dernière (remarque 3.2.1), remarquons que la fonction $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ est une primitive de la fonction $f(x) = x$ étant donné que $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^2\right) = x$.

Il en résulte que

$$\int_0^a x dx = F(a) - F(0) = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}.0^2 = \frac{a^2}{2}$$

Exercice 3.2.1 *En utilisant la définition, calculer*

$$\int_0^b x^2 dx$$

3.2.1 Intégrale et primitive

Nous savons que l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ d'une fonction positive f sur l'intervalle $I = [a, b]$, en tant que limite communes des sommes de Riemann, représente l'aire de la surface limitée par la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f, l'axe Ox ainsi que les droites verticales $x = a$ et $x = b$.

Définition 3.2.4 (Primitive d'une fonction) *:*
on dit que la fonction F est une primitive de la fonction f si $F^{'}(x) = f(x)$.

Remarquons que si F_1 et F_2 sont deux primitives de la même fonction f alors leur différence $F_1 - F_2$ est forcément une constante C.

En effet,

$$\begin{aligned} [(F_1 - F_2)(x)]^{'} &= F_1^{'}(x) - F_2^{'}(x) \\ &= f(x) - f(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Comme $[(F_1 - F_2)(x)]^{'} = 0$ alors $[(F_1 - F_2)(x)] = C \in \mathbb{R}$ et dans ce cas il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $F_1(x) = F_2(x) + C$

Remarque 3.2.2 *:*
on déduit de ce qui précède que si F est une primitive de la fonction f alors toute autre primitive de f est de la forme $F(x) + C$.

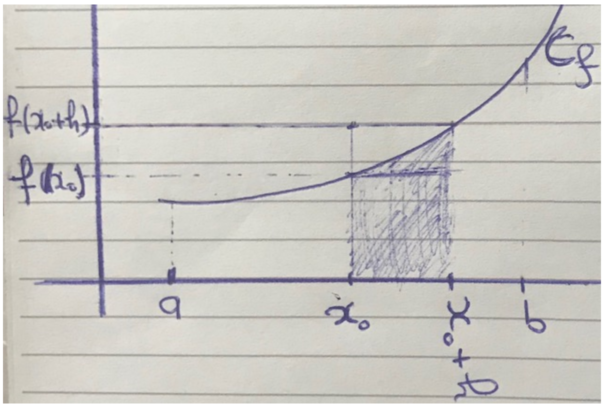
Problème 3.2.1 *:*
quel lien existe-t-il entre une primitive de f sur l'intervalle $I = [a, b]$ et l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$?

Considérons, pour commencer, une fonction positive et croissante f sur un intervalle $I = [a, b]$ et notons $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

Considérons alors la fonction $\mathcal{A} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie $\forall \quad x \in I = [a, b]$ par $\mathcal{A}(x) = \int_a^x f(t)dt$ et fixons x_0 dans $[a, b]$.

Vérifions la dérivabilité sur I de la fonction $\mathcal{A} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ainsi définie.

1. Il est évident que $\mathcal{A}(a) = 0$.
   En effet, $\mathcal{A}(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$.



2. Notons h un réel strictement positif tel que $x_0 + h \in I$
Remarquons que $\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt$ représente l'aire de la surface limitée par l'axe Ox, la courbe C_f ainsi que les droites verticales $x = x_0$ et $x = x_0 + h$.

Comme f est croissante sur $[x_0, x_0 + h]$ il va de soi que :

$$h \times f(x_0) \leq \mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0) \leq h \times f(x_0 + h) \tag{3.1}$$

La quantité h étant positive, on déduit de la relation 3.1 que :

$$f(x_0) \leq \frac{\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)}{h} \leq f(x_0 + h) \tag{3.2}$$

Comme $\lim_{h\to 0^+} f(x_0) = \lim_{h\to 0^+} f(x_0 + h) = f(x_0)$ alors :

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)}{h} = f(x_0) \tag{3.3}$$

3. Remarquons qu'en considérant h un réel strictement négatif tel que $x0 + h$ appartienne à l'intervalle $I = [a, b]$:
   (a) $x_0 + h$ se trouve à gauche de x_0 et $f(x_0 + h) \leq f(x_0)$;
   (b) $\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)$ est une quantité négative.

   Dans ce cas on obtient :

$$h \times f(x_0) \leq \mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0) \leq h \times f(x_0 + h)$$

   En divisant cette dernière inégalité par h (qui est négatif) on obtient :

$$f(x_0 + h) \leq \frac{\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)}{h} \leq f(x_0)$$

On déduit de cette dernière relation que :

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{\mathcal{A}(x_0+h)-\mathcal{A}(x_0)}{h} = f(x_0) \tag{3.4}$$

Les relation 3.3 et 3.4 entraine que

$$\mathcal{A}'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathcal{A}(x_0+h)-\mathcal{A}(x_0)}{h} = f(x_0)$$

La fonction $\mathcal{A} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, est donc dérivable en x_0 et a $f(x_0)$ comme nombre dérivé en x_0.

En définitive, la fonction $\mathcal{A} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout élément $x \in I = [a,b]$ par $\mathcal{A}(x) = \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f s'annulant en a.

Remarque 3.2.3 (Formule de Newton-Leibniz) *:*
si une fonction f est intégrable sur l'intervalle $I = [a,b]$ et si F est une primitive quelconque de f alors :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

En effet, comme la fonction $\mathcal{A} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie $\forall \quad x \in I = [a,b]$ par $\mathcal{A}(x) = \int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f alors si $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une autre primitive de f on a nécessairement (en vertu de la remarque 3.2.2 , page 44) $F(x) = \mathcal{A}(x) + C$. Dans ce cas :

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= [\mathcal{A}(b) + C] - [\mathcal{A}(a) + C] \\ &= \mathcal{A}(b) - \mathcal{A}(a) \\ &= \mathcal{A}(b) - 0 \\ &= \int_a^b f(t)dt \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Exemple liminaire 3.2.2 *:*
La résolution de l'illustration 3.2.1 ainsi que celle de l'exercice 3.2.1 montrent à quel point la formule de Newton-Leibniz facilite le calcul d'intégrales.

Ainsi, par exemple, si l'on doit calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$, il suffit de remarquer que $(\sin x)' = \cos x$ pour avoir :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin(\frac{\pi}{2}) - \sin(0) = 1 - 0 = 1$$

Avant d'entrer dans le vif des méthodes d'intégration, il est important de garder à l'esprit les principales propriétés de l'intégrale.

3.3 Calcul d'intégrales

3.3.1 Propriétés de l'intégrale

1. **Relation de CHASLES :** si f est une fonction intégrable sur un intervalle K contenant les valeurs a, b et c alors :
$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$
En effet, si F est une primitive de f sur I alors :
$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx &= [F(b) - F(a)] + [F(c) - F(a)] \\ &= F(c) - F(a) \\ &= \int_a^c f(x)dx\end{aligned}$$
En particulier :
$$\int_a^b f(x)dx + \int_b f(x)dx = \int_a^a f(x)dx = 0 \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

2. **Linéarité de l'intégrale :**
Si λ_1 et λ_2 sont des constantes et f_1, f_2 sont des fonctions alors :
$$\int_a^b [\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)]\, dx = \lambda_1 \int_a^b f_1(x) + \lambda_2 \int_a^b f_2(x)dx$$

3. **Signes de l'intégrale :**
Considérons f une fonction continue sur un intervalle I et a et b sont deux éléments de I avec $a \leq b$.
Si f est positive sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

Cette propriété résulte de la définition de l'intégrale, pour une fonction positive, comme aire de la surface située sous la courbe représentative de f sur $[a, b]$.

   (a) si $f \geq 0$ sur I alors :

      i. $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ si $a \leq b$,

      ii. $\int_a^b f(x)dx \leq 0$ si $a \geq b$

   (b) si $f \leq 0$ sur I alors :

(a) $\int_a^b f(x)dx \leq 0$ si $a \leq b$,

(b) $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ si $a \geq b$

Exemple liminaire 3.3.1 *:*
sans faire de calcul, déterminer le signe de chacune des intégrales suivantes :

$$J = \int_{-2}^{0} \left(1 + \sin^2 x\right) dx, K = \int_{-2}^{1} \sqrt{x} dx \quad et \quad L = \int_{0.5}^{0.8} \ln x dx$$

4. **Comparaison d'intégrales :**
Si f et g sont des fonctions intégrables sur $k = [a, b]$ telles que $\forall x \in K, \quad f(x) \geq g(x)$ alors

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

En particulier si $f \geq 0$ sur $k = [a, b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

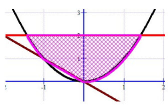
Exemple liminaire 3.3.2 *En utilisant une comparaison d'intégrales, montrons que* $\ln x \leq x - 1$,

Solution :

$\forall t \in [1, +\infty[$ on a :

$$\frac{1}{t} \leq 1 \Rightarrow \int_1^x \frac{1}{t} dt \leq \int_1^x 1 dt \Rightarrow \ln x - \ln 1 \leq x - 1 \Rightarrow \ln x \leq x - 1$$

Remarque 3.3.1 *On peut, évidemment* ***voir*** *(figure ci-dessous) qu'en représentant graphiquement les fonctions* $y_1 = \ln x$ *et* $y_2 = x - 1$ *la courbe représentative de* y_1 *est en -dessous de la droite représentative de* y_2 *sur* $[0, +\infty[$



5. **Inégalité de la moyenne :**
Soit f une fonction définie et intégrable sur $K = [a, b]$.
Si m et M sont respectivement le minimum et le maximum de f sur K, alors :

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a)$$

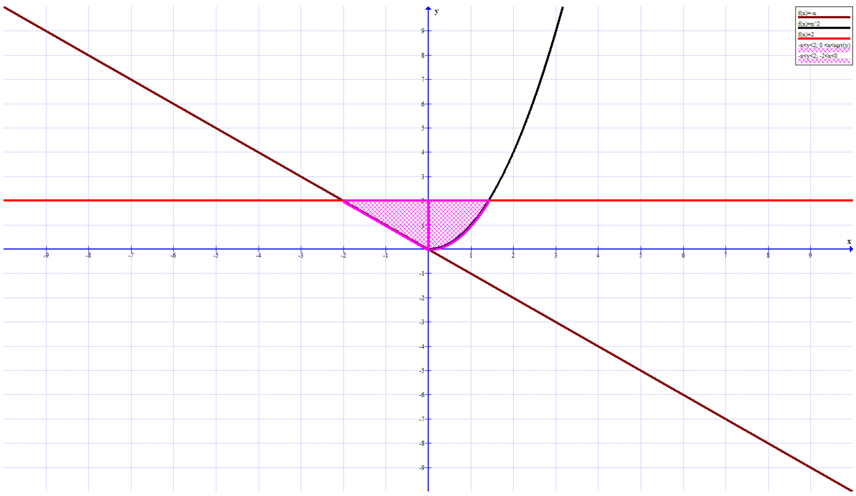
(a) En particulier, il existe $c \in [a,b]$ telle que $\int_a^b f(x)dx = (b-a).f(c)$ et dans ce cas la quantité $f(c)$ s'appelle **valeur moyenne** de la fonction f sur l'intervalle $K = [a,b]$.

(b) L'expression **valeur moyenne** de f sur K signifie aussi que la fonction constante $g(x) = f(c)$ possède la même intégrale que f sur K.

Exemple liminaire 3.3.3 *La valeur moyenne de* $f(x) = \cos x$ *sur* $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *est :*

$$\mu = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \frac{2}{\pi} \left(\sin(\frac{\pi}{2}) - \sin(0) \right) = \frac{2}{\pi}$$

Ainsi donc, l'intégrale de la fonction constante (représentée par une droite horizontale) $y = \frac{2}{\pi} \approx 0.6366198$ sur l'intervalle $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ est égale à celle de la fonction $f(x) = \cos x$ sur $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.



3.3.2 Intégrations immédiates

Il convient de remarquer que le calcul d'une intégrale est directement lié à la recherche des primitives.

C'est pour cette raison que les primitives sont appelées **intégrales indéfinies**.

En lisant *de droite à gauche* les formules de dérivation on obtient une première série **d'intégrales immédiates** :

1. $$\int 0 dx = c$$

2. $$\int c dx = cx + c^{'}$$

3. $$\int x dx = \frac{1}{2}x^2 + c$$

   Plus généralement,
   $$\int x^m dx = \frac{1}{m+1}x^{m+1} + c \quad \text{si} \quad m \neq -1$$

   Exemple liminaire 3.3.4
   $$\int x^9 dx = \frac{1}{10}x^{10} + c$$

4. $$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$$

5. $$\int \cos x dx = \sin x + c$$

6. $$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

7. $$\int \sec^2 x dx = \tan x + c$$

8. $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$$

9. $$\int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos x + c$$

10. $$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c$$

11. $$\int e^x dx = e^x + c$$

12. $$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + c$$

Exemple liminaire 3.3.5 *Calculer chacune des primitives suivantes*

1. $\int (2x^3 - 5x^2 + 7x - 3)dx$
   — ***Indication:*** $\frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 + 3x + c$
2. $\int \left(\sqrt{x} + x^{-\frac{1}{3}}\right)^2 dx$
   — ***Indication:*** $\frac{1}{2}x^2 + \frac{12}{7}x^{\frac{7}{6}} + 3x^{\frac{1}{3}} + c$
3. $\int 2^x.3^{2x}.5^{3x}dx$
   — ***Indication:*** $\frac{1}{\ln 2250}2250^x + c$
4. $\int \tan^2 x dx$
   — ***Indication:*** $\tan x - x + c$
5. $\int x\sqrt{x}dx$
   — ***Indication:*** $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + c$
6. $\int \frac{2-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx$
   — ***Indication:*** $2\arcsin x - x + c$

En considérant la dérivation des fonctions hyperboliques, on peut compléter davantage le tableau des intégrales immédiates :

1. $\int \cosh x dx = \sinh x + c$

2. $\int \sinh x dx = \cosh x + C$

3. $\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \int \left(1 - \tanh^2 x\right) dx = \tanh x + c$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = Argsinhx + c$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = Argcoshx + c$

6. $\int \frac{dx}{1-x^2} = Argtanhx + c$

3.3.3 Intégrations par changement de variable

Notions

Soit à calculer, par exemple,

$$I = \int (2x^2 + 6x + 2)^7(4x + 6)dx$$

Il est vrai que cette intégrale n'est pas immédiate mais si nous posons $t = 2x^2 + 6x + 2$ nous obtenons par différentiation $dt = (4x+6)dx$ de sorte que l'intégrale initiale devienne :

$$I = \int (2x^2 + 6x + 2)^7 (4x+6)dx = \int t^7 dt = \frac{1}{8} t^8 + c$$

A ce stade il suffit de remplacer t par sa valeur pour obtenir :

$$\int (2x^2 + 6x + 2)^7 (4x+6)dx = \frac{1}{8}(2x^2 + 6x + 2)^8 + c$$

Une première version de l'intégration par changement de variable s'obtient en généralisant cet exemple simple.

Il arrive en effet que l'intégrale $\int f(x)dx$ ne soit pas immédiate mais en remarquant que la fonction f sous le signe d'intégration peut se mettre sous la forme $f(x) = g\left(\phi(x)\right) d\phi(x)$ avec $\int g(t)dt$ une intégrale immédiate, il suffit alors d'opérer **le changement de variable** $\phi(x) = t$ pour que l'on obtienne

$$\int f(x)dx = \int g(\phi)d\phi$$

qui est immédiate.

Pour l'exemple liminaire ci-dessus, $\phi(x) = 2x^2 + 6x + 2$ et $g(x) = x^7$.

Il est alors facile de voir que $g \circ \phi = g\left(\phi(x)\right) = g(2x^2 + 6x + 2) = (2x^2 + 6x + 2)^7$
et $d\phi = (4x+6)dx$ de sorte que

$$\int g(\phi)d\phi = \int f(x)dx$$

avec comme **avantage notable** que l'intégrale de la fonction g (avec comme nouvelle variable ϕ) est immédiate contrairement à la première intégrale (de f avec comme variable x).

A première vue, un tel formalisme peut sembler flou pour certains mais avec un peu d'effort et d'exercices les choses deviennent progressivement limpides.

Exemple liminaire 3.3.6 *Calculons l'intégrale*

$$I = \int \frac{(\ln t)^4}{t} dt$$

En posant $s = \ln t$ on obtient par différentiation $ds = \frac{dt}{t}$ de sorte que l'intégrale initiale devienne

$$I = \int \frac{(\ln t)^4}{t} dt = \int (\ln t)^4 \frac{dt}{t} = \int s^4 ds = \frac{1}{5} s^5 + c = \frac{1}{5}(\ln t)^5 + c$$

Exemple liminaire 3.3.7 *Calciler*

$$I = \int x^2\sqrt{x^3+5}dx$$

En posant $t = x^3+5$ on obtient $dt = 3x^2dx$ ou encore $x^2dx = \frac{1}{3}dt$ de sorte que l'on obtient :

$$I = \frac{1}{3}\int \sqrt{t}dt = \frac{2}{9}(x^3+5)\sqrt{x^3+5}+c$$

Remarque 3.3.2 *Supposons que* $\int f(x)dx = F(x)+c$ *. Pour calculer* $I = \int f(ax+b)dx$ *il suffit de faire le changement de variable* $t = ax+b$ *c'est-à-dire* $dx = \frac{1}{t}dt$ *pour obtenir*

$$I = \frac{1}{a}\int f(t)dx = F(t)+c$$

Ainsi, de façon définitive si $\int f(x)dx = F(x)+c$ *alors*

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+c$$

Exemple liminaire 3.3.8 *En appliquant la remarque 3.3.2 on obtient par exemple,*

1. $\int \cos x dx = \sin x + c \Rightarrow \int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}sin(ax+b)+c$
2. $\int e^x dx = e^x + c \Rightarrow \int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b}+c$
3. $\int \sec^2 x dx = \tan x + c \Rightarrow \int \sec(ax+b)dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b)+c$
   (a) *Ainsi par exemple* $\int \sec^2(7x-2)dx = \frac{1}{7}\tan(7x-2)+c$

Remarque 3.3.3 *:*
la remarque 3.3.2 ci-dessus entraine, par exemple que $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b|+c$
Ainsi, il est avantageux, lorsque cela est possible (discriminant $\Delta = b^2-4ac > 0$ *), de transformer les fonctions à intégrer, de la forme* $\frac{c}{ax^2+bx+c}$ *en une somme* $\frac{c+1}{x-x_1}+\frac{c_2}{x-x_2}$ *afin d'appliquer directement la formule.*

Exercice 3.3.1 *:*
À titre d'exemple, calculons $I = \frac{dx}{x^2-a^2}$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \int \frac{dx}{(x-a)(x+a)}$$

En mettant l'expression $\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{(x-A)(x+a)}$ *sous la forme* $\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x+a}$*, trouvons les constantes A et B :*

Si $\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x+a} = \frac{1}{(x-a)(x+a)}$ *alors* $\frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{(A+B)x+aA-aB}{(x-a)(x+a)}$*. Dans ce cas :*

$$\left\{\begin{array}{l} A+B=0 \\ aA-aB=1 \end{array}\right. \Rightarrow A=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & -a \end{vmatrix}}=\frac{1}{2a} \quad et \quad B=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & -a \end{vmatrix}}=-\frac{1}{2a}$$

Au final ;

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2-a^2} &= \int \left(\frac{\frac{1}{2a}}{x-a}-\frac{\frac{1}{2a}}{x+a}\right) dx \\ &= \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x-a}-\frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x+a} \\ &= \frac{1}{2a}\left[\ln|x-a|-\ln|x+a|\right] \\ &= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+c \end{aligned}$$

Exercice 3.3.2 *Faites le changement de variable le mieux indiqué pour calculer*

$$I_1=\int e^{3\cos x}\sin x dx \quad et \quad I_2=\int \frac{x^4dx}{\sqrt{x^{10}-2}}$$

Il existe une autre version de changement de variable qu'on peut appréhender grâce à l'exemple suivant :

Soit à calculer

$$I=\int \frac{dx}{81+x^2}$$

Si nous posons $x=9\tan t$ c'est-à-dire $\frac{x}{9}=\tan t$ ou encore $t=\arctan\frac{x}{9}$ nous obtenons en différentiant $dx=9\sec^2 tdt$ et

$$81+x^2=81+81+(9\tan t)^2=81+81\tan^2 t=81(1+\tan^2 t)=81\sec^2 t$$

Nous avons

$$I=\int \frac{dx}{81+x^2}=\int \frac{9\sec^2 tdt}{81\sec^2 t}=\frac{1}{9}\int dt=\frac{1}{9}t+c=\frac{1}{9}\arctan\frac{x}{9}+c$$

En généralisant ce schéma on montre sans difficulté que que pour des intégrales de la forme $I=\frac{dx}{x^2+a^2}$ il suffit de poser $x=a\tan t$ pour avoir

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+c$$

A la lumière de cet exemple, notons qu'il arrive aussi que l'intégrale $I = \int f(x)dx$ ne soit pas immédiate mais si on constate qu'en posant $x = \psi(t)$ l'intégrale $I = \int f(\psi(t))\, \psi'(t)dt$ devient immédiate on parle aussi d'un changement de variable.

Remarque 3.3.4 *L'expérience montre justement, à ce sujet, que pour des intégrales contenant l'expression de la forme :*

1. $a^2 + x^2$ *il est avisé d'essayer le changement de variable* $x = a\tan t$
2. $x^2 - a^2$ *il est avisé d'essayer le changement de variable* $x = a\sec t$
3. $a^2 - x^2$ *il est avisé d'essayer le changement de variable* $x = a\sin t$

Beaucoup d'autres astuces existent et se maîtrisent en faisant beaucoup d'exercices et il est bien entendu important de noter que contrairement aux efforts de dérivation, pour l'apprentissage des intégrales ***il n'existe pas de formule passe-partout et rien ne remplace donc l'habitude de beaucoup s'exercer...***

Intégration utilisant la fonction sec

1. Soit à calculer la dérivée de la fonction $f(x) = \ln(\sec x + \tan x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\sec x + \tan x)'}{\sec x + \tan x} \\ &= \frac{\sec x \tan x + \sec^2 x}{\sec x + \tan x} \\ &= \frac{\sec x\,(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} \\ &= \sec x \times \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} \\ &= \sec x \end{aligned}$$

Le calcul ci-dessus nous permet de compléter le tableau des intégrales immédiates par :

$$\int \sec x dx = \ln(\sec x + \tan x) + c \tag{3.5}$$

2. Soit à calculer $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$

   (a) Pour $I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$, faisons, en vertu de la remarque 3.3.4, le changement de variable $x = a\tan t \Rightarrow \begin{cases} \tan t = \frac{x}{a} \\ dx = a\sec^2 t dt \end{cases}$

Dans ce cas,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int \frac{a\sec^2 t dt}{\sqrt{a^2\tan^2 t + a^2}} \\
&= \int \frac{a\sec^2 t dt}{\sqrt{a^2(\tan^2 + 1)}} \\
&= \int \frac{a\sec^2 t dt}{\sqrt{a^2\sec^2 t}} \\
&= \int \frac{a\sec^2 t dt}{a\sec t} \\
&= \int \sec t dt \\
&= \ln|\sec t + \tan t| + c \\
&= \ln\left|\sqrt{1+\tan^2 t} + \tan t\right| + c \\
&= \ln\left|\sqrt{1+\tan^2 t} + \tan t\right| + c \\
&= \ln\left|\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}} + \frac{x}{a}\right| + c \\
&= \ln\left|\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a} + \frac{x}{a}\right| + c \\
&= \ln\left|\frac{\sqrt{a^2+x^2}+x}{a}\right| + c \\
&= \ln\left|\sqrt{a^2+x^2}+x\right| - \ln a + c \\
&= \ln\left|\sqrt{a^2+x^2}+x\right| + c
\end{aligned}$$

(b) Pour $I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$, faisons le changement de variable (remarque 3.3.4) $x = a\sec t \Rightarrow$ $\begin{cases} \sec t = \frac{x}{a} \\ dx = a\sec t\tan t dt \end{cases}$

Dans ce cas,

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int \frac{a\sec t\tan t dt}{a\sec^2 t - a^2} \\
&= \int \frac{a\sec t\tan t dt}{\sqrt{a^2(\sec^2 t - 1)}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{a \sec t \tan t dt}{\sqrt{a^2 \tan^2 t}} \\
&= \int \sec t dt \\
&= \ln |\sec t + \tan t| + c \\
&= \ln \left|\sec t + \sqrt{\sec^2 t - 1}\right| + c \\
&= \ln \left|\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}\right| + c \\
&= \ln \left|\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right| + c \\
&= \ln \left|\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right| + c \\
&= \ln \left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| - \ln a + c \\
&= \ln \left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + c
\end{aligned}$$

En définitive , nous obtenions :

$$\begin{cases} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln \left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + c \\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln \left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + c \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c \tag{3.6}$$

3.3.4 Intégration des fonctions rationnelles

Cas de certaines expressions contenant le trinôme $ax^2 + bx + c$

Il existe une approche générale et simple pour aborder des intégrations contenant le trinôme du second degré sous l'une des formes :

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}, \quad \int \frac{(cx + d)\, dx}{ax^2 + bx + c}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \quad \text{ou encore} \quad \int \frac{(cx + d)\, dx}{\sqrt{ax^2 + bx = c}}$$

1. S'agissant de $I_1 = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$

   Il est judicieux, ici, de transformer le dénominateur en l'écrivant sous la forme d'une somme (ou une différence) des deux carrés :

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)\\
&= a\left[x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]\\
&= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right]\\
&= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\mp\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]
\end{aligned}$$

En prenant $k^2+\pm\frac{b^2-4ac}{4a^2}$, on obtient :

$$I_1=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\pm k^2\right]} \tag{3.7}$$

dans la relation 3.7, il suffit de faire le changement de variable $x+\frac{b}{2a}=t$ i.e. $dx=dt$ pour obtenir la forme

$$I_1=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\pm k^2\right]}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2\pm k^2}$$ qui est est d'une des deux formes im

Exercice 3.3.3 *: Calculons* $I=\int\frac{dx}{2x^2+8x+20}$

Remarquons que :

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+4x+10}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x^2+4x+4)+6}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+2)^2+6}$$

En posant $x+2=t$ on obtient $dx=dt$. Ainsi

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+6}=\frac{1}{2\sqrt{6}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right)=\frac{\sqrt{6}}{12}\arctan\left[\frac{\sqrt{6}t}{6}\right]+c$$

En définitive,

$$\int\frac{dx}{2x^2+8x+20}=\frac{\sqrt{6}}{12}\arctan\left[\frac{\sqrt{6}\,(x+2)}{6}\right]+c$$

2. Intégrale de la forme $\int\frac{(cx+d)dx}{ax^2+bx+c}$

Pour ce type d'intégrales, il suffit de créer la dérivée du dénominateur au numérateur pour décomposer l'intégrale initiale en une somme des deux intégrales :

$$\frac{cx+d}{ax^2+bx+c} = \frac{\frac{c}{2a}(2ax+b)+\left(d-\frac{cb}{2a}\right)}{ax^2+bx+c}$$

Ainsi,

$$I = \frac{c}{2a}\int \frac{(2ax+b)\,dx}{ax^2+bx+c} + \left(d-\frac{cb}{2a}\right)\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

En posant $t = ax^2+bx+c$ i.e. $dt = (2ax+b)\,dx$, le premier terme vaut $\frac{c}{2a}\int \frac{dt}{t} = \frac{c}{2a}\ln t + c = \frac{c}{2a}\ln|ax^2+bx+c| + c$ tandis que le second est une intégrale du type précédent.

Exercice 3.3.4 *: Calculons* $I = \int \frac{(x+3)dx}{x^2-2x-5}$

En appliquant la démarche ci-haut on obtient :

$$\begin{aligned}
\int \frac{(x+3)dx}{x^2-2x-5} &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-2)+(3-1)}{x^2-2x-5}dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{(2x-2)}{x^2-2x-5}dx + 4\int \frac{dx}{(x-1)^2-6} \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x-5\right| + 4\int \frac{dt}{t^2-6} \quad \text{avec} \quad t = x-1 \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x-5\right| + \frac{4}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{6}-(x-1)}{\sqrt{6+(x-10}}\right| + c
\end{aligned}$$

3. Intégrale de la forme $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

   Remarquons que l'expression $\frac{1}{\sqrt{ax^2=bx+c}}$ peut se mettre sous la forme :

$$\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx=c}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{1}{\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2}}$$

4. Intégrale de la forme $\int \frac{(cx+d)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

   Ainsi,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{1}{\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2}}dx$$

En posant $t = x+\frac{b}{2a}$ on obtient une intégrale de la forme $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm a^2}}$ dont on sait qu'elle vaut $\ln\left|x+\sqrt{t\pm a^2}\right| + c$

5. intégrale de la forme $\int \frac{(cx+d)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

   Cette intégrale se ramène facilement aux formes précédentes. En effet,

$$\begin{aligned}
\int \frac{(cx+d)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} &= \int \frac{\frac{c}{2a}(2ax+b)+\left(d-\frac{cb}{2a}\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx \\
&= \frac{c}{2a}\int \frac{(2ax+b)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + \left(d-\frac{cb}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \\
&= \frac{c}{2a}\int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + \left(d-\frac{cb}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \\
&= I_1 + I_2
\end{aligned}$$

   Un changement de variable $t = ax^2+bx+c$ permet de calculer aisément la première intégrale I_1 tandis que la seconde I_2 est déjà traitée . . .

Exercice 3.3.5 *: Calculer* $\int \frac{5x-3}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx$

$$\begin{aligned}
\int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx &= \int \frac{\frac{5}{2}(2x+4)+(3-10)}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx \\
&= \frac{5}{2}\int \frac{(2x+4)\,dx}{\sqrt{x^2+4x+10}} - 7\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+10}} \\
&= 5\sqrt{x^2+4x+10} - 7\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+6}} \\
&= 5\sqrt{x^2+4x+10} - 7\ln\left|x+2+\sqrt{(x+2)^2+6}\right| + c
\end{aligned}$$

Fonctions rationnelles proprement dites

Nous savons qu'une fonction f est dite rationnelle si elle s'écrit comme quotient $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ de deux polynômes P et Q.

Dans leur forme générale, les polynômes P et Q n'ont pas de racine commune. Autrement, si a est une racine commune à P et Q, on en déduirait qu'il existe P' et Q' tels que $P(x) = (x-a)P'(x)$ et $Q(x) = (x-a)Q'(x)$. Dans ce cas l'expression $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ de f serait $f(x) = \frac{P'(x)}{Q'(x)}$.

Définition 3.3.1 *: Considérons* $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ *une fonction rationnelle.*

— *On dit que la fraction* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *est régulière si le degré du numérateur est inférieur à celui du dénominateur.*

— *Dans le cas contraire la fraction* f *est dite irrégulière .*

À titre d]exemple, la fraction $\frac{x^4-3x}{x^2+2x+3}$ est irrégulière.
En opérant la division euclidienne du numérateur x^4-3x par le dénominateur x^2+2x+3, on obtient x^2-2x+1 comme quotient et $x-3$ comme reste. Il en résulte que :

$$\frac{x^4-3x}{x^2+2x+3} = \left(x^2-2x+1\right) + \frac{x-3}{x^2+2x+3}$$

De façon générale, si $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ est une fraction irrégulière, la division euclidienne de $P(x)$ par $Q(x)$ conduit à un quotient $p(x)$ et un reste $r(x)$ dont le degré est inférieur à celui du dénominateur $Q(x)$.

Ainsi, une fraction rationnelle irrégulière $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ peut toujours s'écrire comme la somme $f(x) = p(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}$ d'un polynôme $p(x)$ et d'une fonction rationnelle régulière $\frac{r(x)}{Q(x)}$.

Comme les fonctions polynômes $p(x)$ constituent la catégorie des fonctions les plus faciles à intégrer, on retient que les méthodes d'intégration des fonctions rationnelles $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ se doivent de se concentrer sur les fonctions rationnelles régulières.

Définition 3.3.2 (Elements simples) *:*
Considérons les fonctions rationnelles régulières suivantes :

1. $\frac{c}{c-a}$;

2. $\frac{c}{(x-a)^n}$, *avec* $n \geq 2$;

3. $\frac{ax+b}{x^2+px+q}$ *avec* $n \geq 2$ *et* $\Delta = p^2 - 4q^2 < 0$;

4. $\frac{ax+b}{(x^2+px+c)^n}$ *avec* $n \geq 2$ *et* $\Delta = p^2 - 4q^2 < 0$

Elles sont appelées, respectivement, ***éléments simples de type I, II, III et IV***.

1. **Intégration des éléments simples de type I**

$$\int \frac{cdx}{x-a} = c\ln|x-a| + c$$

2. **Intégration des éléments simples de type II**

$$\int \frac{cdx}{(x-a)^n} = \int c\,(x-a)^{-n}\,dx$$

Il suffit de remarquer que le changement de variable $t = x - a$ i.e. $dx = dt$ permet d'obtenir $\int \frac{cdx}{(x-a)^n} = \int ct^{-n}dt = \frac{c}{1-n}t^{1-n} + c^{'}$

Au final on obtient :

$$\int \frac{cdx}{(x-a)^n} = \frac{c}{1-n}(x-a)^{1-n} + c^{'} = \frac{c}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + c^{'}$$

Exemple 3.3.1 *:*

$$\int \frac{3dx}{(x+4)^7} = \frac{3}{(1-7)(x+4)^6} + c = \frac{-1}{2(x+4)^6} + c$$

3. **Intégration des éléments simples de type III**

Soit à calculer $\frac{ax+b}{x^2+px+q}$ avec $n \geq 2$ et $\Delta = p^2 - 4q^2 < 0$

En créant, comme précédemment, au numérateur, la dérivée du trinôme $x^2 + px + q$, on obtient évidemment :

$$\begin{aligned}
\int \frac{(cx+d)dx}{x^2+px+q} &= \int \frac{\frac{c}{2}(2x+p) + \left(d - \frac{cp}{2}\right)}{x^2+px+q}dx \\
&= \frac{c}{2}\int \frac{(2x+p)}{x^2+px+q}dx + \left(d - \frac{cp}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} \\
&= \frac{c}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \left(d - \frac{cp}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} \\
&= \frac{c}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \left(d - \frac{cp}{2}\right) I^{'}
\end{aligned}$$

Moyennant le changement de variable habituel $x + \frac{p}{2} = t$, la dernière intégrale $I^{'} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)}$ est de la forme $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$

Exemple 3.3.2 *: Soit à calculer* $I = \int \frac{(3x+5)dx}{x^2+5x+9}$

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{3x+5}{x^2+5x+9}dx \\
&= \int \frac{\frac{3}{2}(2x+5)+\left(5-\frac{15}{2}\right)}{x^2+5x+9}dx \\
&= \int \frac{\frac{3}{2}(2x+5)-\frac{5}{2}}{x^2+5x+9}dx \\
&= \frac{3}{2}\int \frac{(2x+5)\,dx}{x^2+5x+9}dx - \frac{5}{2}\int \frac{dx}{x^2+5x+9} \\
&= \frac{3}{2}\ln\left|x^2+5x+9\right| - \frac{5}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{11}{4}}
\end{aligned}$$

En posant $t = x + \frac{5}{2}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{11}{4}} &= \int \frac{dt}{t^2+\frac{11}{4}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{11}}\arctan\left(\frac{2t}{\sqrt{11}}\right)+c \\
&= \frac{2}{\sqrt{11}}\arctan\left(\frac{2\sqrt{11}t}{11}\right)+c
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x+5}{x^2+5x+9}dx &= \frac{3}{2}\ln\left|x^2+5x+9\right| - \frac{5}{2}\times\frac{2\sqrt{11}}{11}\arctan\left[\frac{2\sqrt{11}\left(\frac{2x+5}{2}\right)}{11}\right]+c \\
&= \frac{3}{2}\ln\left|x^2+5x+9\right| - \frac{5\sqrt{11}}{11}\arctan\left[\frac{\sqrt{11}\,(2x+5)}{11}\right]+c
\end{aligned}$$

4. **S'agissant de l'intégration des éléments simples de type IV, i.e.** $\int \frac{(cx+d)dx}{(x^2+px+q)^n}$, un petit rappel s'impose sur le rapport de la différentielle d'une fonction sur sa paissance :

Nous savons que pour toute fonction dérivable $u(x)$ on a :

$$\left(\frac{1}{u^n}\right)' = \frac{-\left(u^n\right)'}{\left(u^n\right)^2} = \frac{-nu^{n-1}u'}{u^{2n}} = \frac{-nu'}{u^{n+1}}$$

Comme $\left(\frac{1}{u^n}\right)' = \frac{-nu'}{u^{n+1}}$ alors on a :

$$\frac{u'}{u^{n+1}} = -\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{n^{n-1}}\right)' \quad i.e. \quad \frac{u'}{u^n} = \frac{1}{(n-1)}\left(\frac{1}{u^{n-1}}\right)'$$

Ainsi, pour toute fonction dérivable $u(x)$ on a :

$$\frac{du}{u^n} = \left(\frac{-1}{n-1}\right) d\left(\frac{1}{u^{n-1}}\right) \tag{3.8}$$

Le calcul de l'intégration des éléments simples de type IV utilise une importante formule de réduction des intégrales de la forme $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ dont la plus simple est $I_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$.

$$\begin{aligned} I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} &= \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2)-x^2}{(x^2+a^2)^n} dx \\ &= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^n} \\ &= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x.xdx}{(x^2+a^2)^n} \\ &= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x.\frac{1}{2}(2xdx)}{(x^2+a^2)^n} \\ &= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x.\frac{1}{2}d\left(a^2+x^2\right)}{(x^2+a^2)^n} \\ &= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2a^2}\int x.\frac{d\left(a^2+x^2\right)}{(x^2+a^2)^n} \end{aligned}$$

Or, en vertu de la relation 3.8 , $\frac{d\left(x^2+a^2\right)}{(x^2+a^2)^n} = \frac{-1}{n-1} d\left(\frac{1}{u^{n-1}}\right)$. Il en résulte alors que :

$$\begin{aligned} I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} &= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2a^2}\int x.\frac{d\left(a^2+x^2\right)}{(x^2+a^2)^n} \\ &= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2a^2(n-1)}\int x.d\left[\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}\right] \end{aligned}$$

En utilisant la formule d'intégration par parties ($\int \triangle d\square = \triangle\square - \int \square d\triangle$) on remarque que :

$$\int x.d\left[\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}\right] = \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} = \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} - I_{n-1}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
I_n = \int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n} &= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}} + \frac{1}{2a^2(n-1)}\int x.d\left[\frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}\right] \\
&= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}} + \frac{1}{2a^2(n-1)}\left[\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}} - I_{n-1}\right] \\
&= \frac{1}{a^2}I_{n-1} + \frac{1}{2a^2(n-1)}\left[\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}} - I_{n-1}\right] \\
&= \frac{x}{2a^2(n-1)\left(x^2+a^2\right)^{n-1}} + \left[\frac{1}{a^2} - \frac{1}{2a^2(n-1)}\right] I_{n-1} \\
&= \frac{x}{2a^2(n-1)\left(x^2+a^2\right)^{n-1}} + \left[\frac{2(n-1)-1}{2a^2(n-1)}\right] I_{n-1} \\
&= \frac{x}{2a^2(n-1)\left(x^2+a^2\right)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)} I_{n-1}
\end{aligned}$$

On obtient en définitive l'importante formule de réduction des intégrales de la forme $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ qui sont très utiles, comme on va le voir, dans la dernière étape de l'intégration des éléments simples de type IV :

$$I_n = \int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n} = \frac{x}{2a^2(n-1)\left(x^2+a^2\right)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)} I_{n-1} \tag{3.9}$$

Exemple 3.3.3 *: Soit à calculer* $I_3 = \int \frac{dx}{(x^2+25)^3}$

En utilisant la formule 3.9 on a :

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^3} &= \frac{x}{50.2\left(x^2+25\right)^2} + \frac{3}{50.2} I_2 \\
&= \frac{x}{100\left(x^2+25\right)^2} + \frac{3}{100}\left[\frac{x}{50\left(x^2+25\right)} + \frac{1}{50} I_1\right] \\
&= \frac{x}{100\left(x^2+25\right)^2} + \frac{3x}{5000\left(x^2+25\right)} + \frac{3}{5000} I_1
\end{aligned}$$

Comme $I_1 = \int \frac{dx}{x^2+25} = \frac{1}{5}\arctan\left(\frac{x}{5}\right) + c$, alors au final,

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^3} = \frac{x}{100\left(x^2+25\right)^2} + \frac{3x}{5000\left(x^2+25\right)} + \frac{3}{5000} \times \frac{1}{5}\arctan\left(\frac{x}{5}\right) + c$$

En revenant à l'intégration des éléments simples de type IV on a :

$$\begin{aligned}
\int \frac{(cx+d)\,dx}{(x^2+px+q)^n} &= \int \frac{\frac{c}{2}(2x+p)+\left(d-\frac{cp}{2}\right)}{(x^2+px+q)^n}dx \\
&= \frac{c}{2}\int \frac{(2x+p)\,dx}{(x^2+px+q)^n} + \left(d-\frac{cp}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} \\
&= I^{'} + I^{''}
\end{aligned}$$

Pour $I^{'} = \frac{c}{2}\int \frac{(2x+p)dx}{(x^2+px+q)^n}$, le changement de variable $t = x^2+px+q$ donne :

$$\begin{aligned}
I^{'} &= \frac{c}{2}\int \frac{dt}{t^n} \\
&= \frac{c}{2}\int t^{-n}dt \\
&= \frac{c}{2}\frac{1}{(1-n)}t^{1-n} + c \\
&= \frac{c}{2(1-n)t^{n-1}} + c \\
&= \frac{c}{2(1-n)\,(x^2+px+q)^{n-1}} + c
\end{aligned}$$

S'agissant de l'intégrale $I^{''}$ on a :

$$\begin{aligned}
I^{''} &= \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} \\
&= \int \frac{dx}{\left[\left(x^2+2x\frac{p}{2}+\frac{p^2}{4}\right)+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^n} \\
&= \int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^n}
\end{aligned}$$

En posant $t = x + \frac{p}{2}$ on obtient :

$$I^{''} = \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} = \int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^n} = \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^n} \equiv I_n \quad \text{voir} \quad 3.9$$

Ainsi, la dernière étape de calcul de l'intégrale $I^{''}$ utilisera nécessairement la formule de réduction 3.9 .

Exemple 3.3.4 *: Calculer* $I = \int \frac{(x-1)dx}{(x^2+2x+3)^2}$.

$$\begin{aligned}
I=\int \frac{(x-1)\,dx}{\left(x^2+2x+3\right)^2} &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)+(-1-1)}{\left(x^2+2x+3\right)^2}dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{(2x+2)dx}{\left(x^2+2x+3\right)^2}-2\int \frac{dx}{\left(x^2+2x+3\right)^2} \\
&= I^{'}+I^{''}
\end{aligned}$$

Pour $I^{'}=\frac{1}{2}\int \frac{(2x+2)dx}{\left(x^2+2x+3\right)^2}$, posons $t=x^2+2x+3$, i.e. $dt=(2x+2)dx$. Nous obtenons :

$$\begin{aligned}
I^{'} &= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{1}{t} \\
&= \frac{-1}{2t} \\
&= \frac{-1}{2\left(x^2+2x+3\right)}
\end{aligned}$$

Pour $I^{''}=-2\int \frac{dx}{\left(x^2+2x+3\right)^2}$, en transformant le dénominateur on obtient :

$$\begin{aligned}
I^{''} &= -2\int \frac{dx}{\left(x^2+2x+3\right)^2} \\
&= -2\int \frac{dx}{\left[\left(x+1\right)^2+2\right]^2} \\
&= -2\int \frac{dt}{\left(t^2+2\right)^2} \quad \text{en posant} \quad t=x+1
\end{aligned}$$

En vertu de la relation 3.9 ci-haut, ($I_n=\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}=\frac{x}{2a^2(n-1)\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2a^2(n-1)}I_{n-1}$) on a :

$$\begin{aligned}
I^{''} &= -2\int \frac{dt}{\left(t^2+2\right)^2} \\
&= -2I_2 \\
&= -2\left[\frac{t}{4.1\left(t^2+2\right)+\frac{1}{4.1}I_1}\right] \\
&= \frac{-t}{2\left(t^2+2\right)}-\frac{1}{2}I_1 \\
&= \frac{-t}{2\left(t^2+2\right)}-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)+c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{-t}{2\left(t^2+2\right)} - \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left(\frac{t\sqrt{2}}{2}\right) + c \\ &= \frac{-\left(x+1\right)}{2\left(x^2+2x+3\right)} - \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left[\frac{\sqrt{2}\left(x+1\right)}{2}\right] + c \end{aligned}$$

Au final :

$$\begin{aligned} I &= I^{'} + I^{''} \\ &= \frac{-1}{2\left(x^2+2x+3\right)} + \frac{-\left(x+1\right)}{2\left(x^2+2x+3\right)} - \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left[\frac{\sqrt{2}\left(x+1\right)}{2}\right] + c \\ &= \frac{-x-2}{2\left(x^2+2x+3\right)} - \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left[\frac{\sqrt{2}\left(x+1\right)}{2}\right] + c \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\int \frac{(x-1)dx}{\left(x^2+2x+3\right)^2} = \frac{-x-2}{2\left(x^2+2x+3\right)} - \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left[\frac{\sqrt{2}\left(x+1\right)}{2}\right] + c$$

3.3.5 Changement de variable dans une intégrale définie

Lorsqu'on change la variable d'intégration dans une intégrale définie, il convient de trouver les valeurs des bornes pour la nouvelle variable :

Soit à calculer l'intégrale

$$I = \int_0^1 (3x^2+4x+2)^7(6x+4)dx$$

En posant $3x^2+4x+2 = t \Rightarrow (6x+4)dx = dt$

En ce qui concerne les bornes, $x = 0$ sera remplacée par $t = 3.0^2+4.0+2 = 2$ et $x = 1$ sera remplacée par $t = 3.1^2+4.1+2 = 9$

Dans ce cas

$$I = \int_0^1 (3x^2+4x+2)^7(6x+4)dx = \int_2^9 t^7 dt = \frac{1}{8}.9^8 - \frac{1}{8}.2^8 = \frac{9^8-2^8}{8}$$

Exercice 3.3.6 *Calculons l'intégrale*

$$I = \int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx$$

Posons $x = 2\sin t$ (voir remarque 3.3.4 page 55)
$\Rightarrow dx = 2\cos t dt$

$x = 0 \Rightarrow 0 = 2\sin t \Rightarrow t = 0$ et $x = 2 \Rightarrow 2 = 2\sin t \Rightarrow 1 = \sin t \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$

$$I = \int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\sin^2 t}(2\cos t)dt = \int_1^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4(1-\sin^2 t)}(2\cos t)dt$$

$$\Rightarrow I = \int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^2 t dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt = (\pi - 0) + (0-0) = \pi$$

3.4 Autres exercices

Calculer chacune des primitives suivantes :

1. $I = \int \frac{dx}{x^2-a^2}$
   — Indication de réponse : $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$
2. $I = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$
   — Indication de réponse :$\arcsin(\frac{x}{a}) + c$
3. $I = \int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{3-\cos^4 x}}$
   — Indication de réponse : $-\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}\cos^2 x}{3}\right) + c$
4. $I = \int \frac{x dx}{x^4+2x^2+5}$
   — Indication de réponse : $\frac{1}{4}\arctan\left(\frac{1+x^2}{2}\right) + c$
5. $I = \int x^2 e^x dx$
   — Indication de réponse : $e^x(x^2-2x+2) + c$
6. $I = \int \sqrt{a^2-x^2}dx$
   — Indication de réponse : $\frac{a}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + c$

3.5 Calcul des surfaces

L'utilisation du calcul intégral dans la recherche des aires des surfaces limitées par des courbes s'appelle *quadrature* et elle est basée sur le principe selon lequel,

— si l'aire A est limitée par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses ainsi que les droites verticales $x = a$ et $x = b$ alors :

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

— si sur l'intervalle concerné, $f(x) \leq g(x)$ alors la surface limitée par les courbes représentatives respectives de ces fonctions est :

$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)]\, dx$$

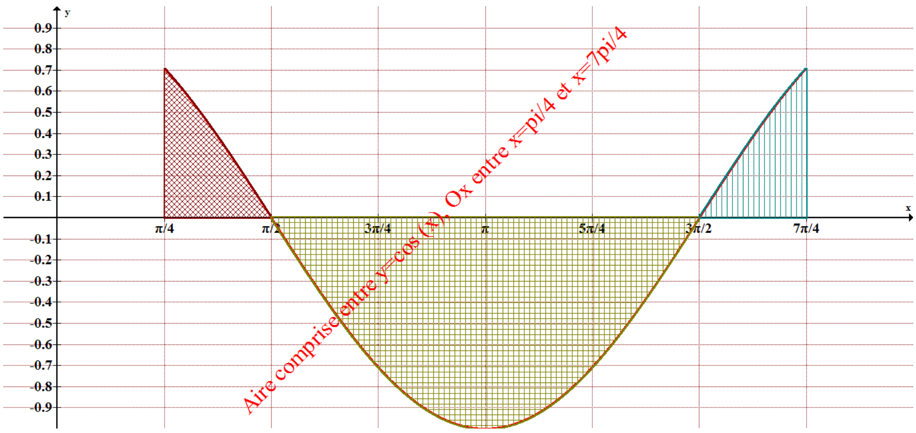
— il convient de noter que pour le calcul d'aire la valeur trouvée doit être positive. C'est pourquoi on ne doit pas perdre de vue le fait que l'intégrale d'une fonction sur un intervalle où la courbe est en dessous de l'axes des abscisses est négative et positive dans le cas contraire.

Exemple liminaire 3.5.1 *Calculer l'aire A limitée par la courbe représentative de $f(x) = \cos x$, l'axe des abscisses ainsi que les droites verticales $x = \frac{\pi}{4}$ et $x = \frac{7\pi}{4}$.*

Solution :

`Première phase: un graphique`

En représentant la courbe de $y = \cos(x)$ entre les abscisses $x = \frac{\pi}{4}$ et $x = \frac{7\pi}{4}$ on obtient :



`Seconde phase: choix judicieux des bornes et calculs`

L'aire totale comporte trois parties A_1, A_2 et A_3 et comme le montre le graphique, A_1 et A_3 sont positives tandis que A_2 est négative.

Pour s'assurer de la positivité de chacune des aires prises en compte on aura :

$$A = A_1 - A_2 + A_3 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A_1 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx = [\sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ A_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos(x)dx = [\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = -1 - 1 = -2 \\ A_3 = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{4}} \cos(x)dx = [\sin x]_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} A &= A_1 - A_2 + A_3 \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos(x)dx + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{4}} \cos(x)dx \\ &= \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right) \\ &= 4 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

Exercice 3.5.1 *Calculer l'aire de la surface comprise entre la courbe $y = -x^2$ et $y + x + 2 = 0$.*

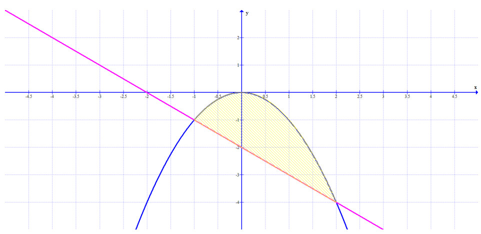
Solution :

`Recherche des bornes d'intégration`

Les coordonnées des points d'intersection entre la parabole $y = -x^2$ et la droite $y + x + 2 = 0$ sont solutions du système

$$\begin{cases} y = -x^2 \\ y = -x - 2 \end{cases}$$

En résolvant ce système on obtient $x = -1$ et $x = 2$ comme le montre le graphique suivant :



Comme sur l'intervalle $[-1, 2[$ la parabole $y = -x^2$ est au-dessus de la droite $y = -x - 2$ alors l'aire A comprise entre les deux vaut :

$$A = \int_{-1}^{2} \left[-x^2 - (-x - 2)\right] dx = \int_{-1}^{2} (-x^2 + x + 2)dx = \frac{9}{2}$$

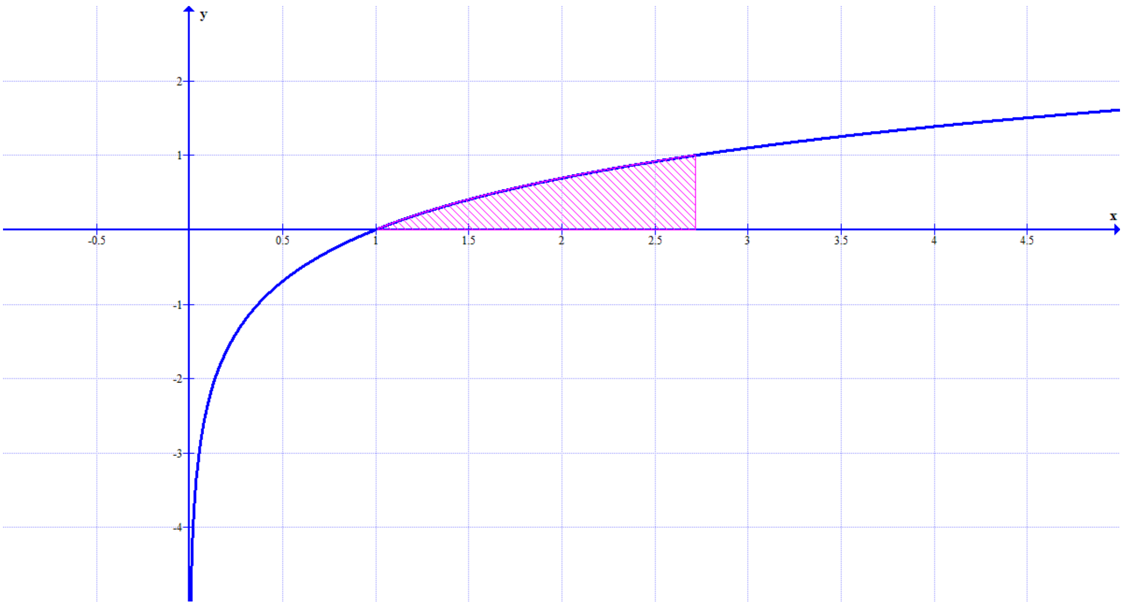
Exercice 3.5.2 *Soit $f(x) = x + 2, \quad g(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{13}{2} \quad$ et $\quad h(x) = \frac{1}{4}x + \frac{11}{4}$*
Calculer l'aire comprise entre les représentations graphiques des fonctions $f, g \quad$ et $\quad h$

Indication : $A = \int_1^3 \left((x+2) - (\frac{1}{4}x + \frac{11}{4})\right) dx + \int_3^5 \left((-\frac{1}{2}x + \frac{13}{4}) - (\frac{1}{4}x + \frac{11}{4})\right) dx = 3$

Exercice 3.5.3 *Calculons l'aire A limitée par la courbe représentative de $y = \ln x \quad x = 1 \quad$ et $\quad x = e$*

Solution :

En représentant la fonction $f(x) = \ln x$ entre $x = 1$ et $x = e$ on a :



Il en ressort clairement que l'aire A cherchée vaut :

$$A = \int_1^e \ln x dx = ?$$

La méthode d'intégration par parties donne :

$$\begin{cases} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{cases}$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned}
A &= \int_1^e \ln x dx \\
&= [uv]_1^e - \int_1^e v du \\
&= [x \ln x]_1^e - \int_1^e x \frac{dx}{x} \\
&= [x \ln x]_1^e - [x]_1^e \\
&= (e. \ln e - 1. \ln 1) - (e - 1) \\
&= (e - 0) - (e - 1) \\
&= 1
\end{aligned}$$

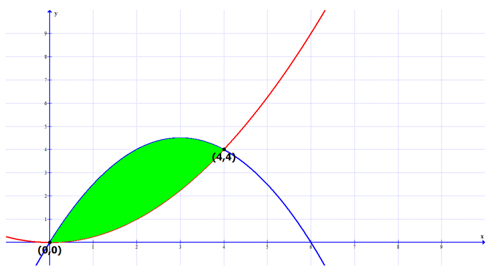
Exercice 3.5.4 *Calculer l'aire limitée par* $y = \frac{16}{x^2}$ *et* $y = 17 - x^2$ *(premier quadrant).*

$$A = \int_1^4 \left((17 - x^2) - \frac{16}{x^2} \right) dx = 18$$

Exercice 3.5.5 *Calculer l'aire de la surface limitée par les courbes* $y = 0.25x^2$ *et* $y = 3x - 0.5x^2$

Solution :

la résolution du système $\left\{ \begin{array}{l} y = 0.025x^2 \\ y^2 = 3x - 0.5x^2 \end{array} \right.$ donne $x_1 = 0$ et $x_2 = 4$ comme le confirme la représentation graphique :



Il résulte de cette représentation graphique que l'aire cherchée vaut :

$$A = \int_0^4 \left(3x - 0.5x^2 - 0.25x^2\right) dx = 8$$

Deuxième partie

Éléments d'Algèbre

Chapitre 4

Ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

4.1 Notes introductives

4.1.1 Une simple équation du troisième degré.

Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie $\forall x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 15x - 4$.

En étudiant les signes de sa dérivée $f^{'}(x) = 3x^2 - 15 = 3(x^2 - 5)$ on obtient son tableau de variation :

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}$		$+\sqrt{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$			$10\sqrt{5}-4$				$+\infty$
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$				$-10\sqrt{5}-4$		

Comme la fonction f est monotone croissante sur $I = \left]\sqrt{5}, +\infty\right[$ et y varie de $-\left(10\sqrt{5}+4\right)$ à $+\infty$ alors l'équation $f(x) = 0$ c'est-à dire l'équation $x^3 = 15x + 4 = 0$ admet une seule solution positive $a \in \left]\sqrt{5}, +\infty\right[$.

En remarquant que $f(4) = 4^3 - 15 \times 4 - 4 = 0$ on gagne en précision en remarquant que $x = 4$ est la seule solution de l'équation $x^3 = 15x + 4$ sur $\left]\sqrt{5}, +\infty\right[$.

Cette équation ainsi que d'autres équations du troisième degré ont fait l'objet d'étude des travaux des mathématiciens italiens de la Renaissance comme **Jérôme Cardan, Nicolo Tartaglia, Raphaël Bombelli** et tant d'autres.

4.1.2 Jérôme Cardan (Girolamo Cardano)

Remarquons que pour toute équation $ax^3+bx^2+cx+d=0$ du troisième degré, $a \neq 0$, la division par a conduit à la forme :

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0 \tag{4.1}$$

En posant $x = z - \frac{b}{3a}$ dans l'équation 4.1 on obtient :

$$\left(z - \frac{b}{3a}\right)^3 + \frac{b}{a}\left(z - \frac{b}{3a}\right)^2 + \frac{c}{a}\left(z - \frac{b}{3a}\right) + \frac{d}{a} = 0 \tag{4.2}$$

Remarquons en développant la forme 4.2, les termes en z^2 donnent : $-3.z^2.\frac{b}{3a} + \frac{b}{a}.z^2 = -z^2.\frac{b}{a} + \frac{b}{a}z^2 = 0$.

Ainsi, le changement de variable $x = z - \frac{b}{3a}$ permet de mettre toute équation du troisième degré sous la forme :

$$x^3 = px + q \tag{4.3}$$

Pour la petite histoire, c'est vers 1535 qu'on proposa, à l'occasion d'un concours, trente équations du type à **Niccolo Fontana** dit **Tartaglia** et à cette époque ce genre d'équations ne pouvait se résoudre que par tâtonnements.

Au cours de la nuit du 12 au 13 Février 1535, veille de la date limite pour le concours, Tartaglia aurait mis au point une formule générale qui lui permit de résoudre les trente équations en quelques heures.

Dans le but d'utiliser sa formule générale à d'autres concours, Niccolo Fontana dit Tartaglia décida de cacher sa formule générale !

Au cours d'une rencontre entre Tartaglia et **Jérôme Cardan (Girodamo Cardano)** à Milan, Cardan convainquit Tartaglia de lui révéler la formule et jura de ne jamais la dévoiler et moins encore la publier.

Plus tard, Cardan apprit que **Scipione der Ferro**, un mathématicien italien qui enseignait l'arithmétique et la Géométrie à l'Université de Bologne vers 1496, possédait la même formule bien avant Tartaglia. Il se sentit alors peu lié par le serment qu'il avait fait à Tartaglia et décida alors d'améliorer la méthode et de la publier.

En 1545, Jérôme Cardan publia l'*Ars Magna* dans lequel il développe les méthodes de Tartaglia.

Considérons l'équation :

$$x^3 = px + q \tag{4.4}$$

En posant $x = u + v$ l'équation devient :

$$(u+v)^3 = p\,(u+v) + q \Leftrightarrow u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 = p(u+v) + q \tag{4.5}$$

En développant cette dernière équation on obtient :

$$u^3 + v^3 + 3uv(u+v) - p(u+v) - q = 0 \Leftrightarrow u^3 + v^3 + (3uv - p)\,(u+v) - q = 0 \tag{4.6}$$

Une des façons de trouver une solution particulière de l'équation 4.6 est d'imposer à u et v les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} u^3 + v^3 - q = 0 \\ 3uv - p = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 + v^3 = q \\ uv = \frac{p}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 + v^3 = q \\ u^3.v^3 = \frac{p^3}{27} \end{cases} \tag{4.7}$$

Ainsi, u^3 et v^3 sont solutions de l'équation du second degré :

$$t^2 - qt + \frac{p^3}{27} = 0 \tag{4.8}$$

Pour que l'équation admette des solutions u^3 et v^3 réelles, il faut que :

$$\Delta = q^2 - 4\frac{p^3}{27} = \frac{27q^2 - 4p^3}{27} \quad \text{soit supérieur ou égal à zéro} \tag{4.9}$$

Dans ce cas :

$$u^3 = \frac{q + \sqrt{\frac{27q^2-4p^3}{27}}}{2} = \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{27q^2 - 4p^3}{108}} \tag{4.10}$$

$$v^3 = \frac{q - \sqrt{\frac{27q^2-4p^3}{27}}}{2} = \frac{q}{2} - \sqrt{\frac{27q^2 - 4p^3}{108}} \tag{4.11}$$

Une solution particulière de l'équation $x^3 = px + q$ est alors :

$$x = u + v = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{27q^2 - 4p^3}{108}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{27q^2 - 4p^3}{108}}} \tag{4.12}$$

De ce qui précède on déduit le résultat suivant :

Proposition 4.1.1 (Théorème de Cardan-Tartaglia) *:*

Si $27q^2 - 4p^3 \geq 0$ *alors* $x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{27q^2-4p^3}{108}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{27q^2-4p^3}{108}}}$ *est une solution particulière de l'équation* $x^3 = px + q$.

Exemple 4.1.1 *:*
Résolvons l'équation du troisième degré $x^3 - 3x + 2 = 0$

L'équation ci-dessus peut se noter :

$$x^3 = 3x - 2 \tag{4.13}$$

En appliquant le théorème de Cardan-Tartaglia on obtient la solution particulière :

$$x = \sqrt[3]{-1 + \sqrt{\frac{27 \times 4 - 4 \times 2}{108}}} + \sqrt[3]{-1 - \sqrt{\frac{27 \times 4 - 4 \times 2}{108}}} = 2$$

Exemple 4.1.2 *:*
Résolvons l'équation $x^3 = 27x + 54$

En appliquant le théorème de CARDAN-TARTAGLIA on obtient :

$$\begin{aligned}
x &= \sqrt[3]{\frac{54}{2} + \sqrt{\frac{27 \times 54^2 - 4 \times 27^3}{108}}} + \sqrt[3]{\frac{54}{2} - \sqrt{\frac{27 \times 54^2 - 4 \times 27^3}{108}}} \\
&= \sqrt[3]{\frac{54}{2} + \sqrt{\frac{27 \times (27 \times 2)^2 - 4 \times 27^3}{108}}} + \sqrt[3]{\frac{54}{2} - \sqrt{\frac{27 \times (27 \times 2)^2 - 4 \times 27^3}{108}}} \\
&= \sqrt[3]{27 + \sqrt{\frac{27^3 \times 4 - 4 \times 27^3}{108}}} + \sqrt[3]{27 - \sqrt{\frac{27^3 \times 4 - 4 \times 27^3}{108}}} \\
&= \sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{27} \\
&= 6
\end{aligned}$$

Exemple 4.1.3 *:*
Pour l'équation $x^3 = 15x + 4$ *remarquons que la méthode de Cardan-Tartaglia ne fonctionne pas étant donné que* $27q^2 - 4p^3 = 27 \times 16 - 4 \times 15^3 = -13068$ *est inférieur à zéro. Toutefois, il est facile de vérifier que* $x = 4$ *est une solution réelle de l'équation* $x^3 = 15x + 4$ *en dépit du fait que la méthode de Cardan ne peut pas la trouver.*

4.1.3 Une idée audacieuse de Raphaël Bombelli

Pour résoudre les équations comme celles de l'exemple 4.1.3 par la méthode de Cardan-Tartaglia, Bombelli obtint ($p = 15$ et $q = 4$) :

$$x = \sqrt[2]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{27q^2 - 4p^3}{108}}} + \sqrt[2]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{27q^2 - 4p^3}{108}}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt[3]{2+\sqrt{\frac{2\times 16-4\times 15^3}{108}}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{\frac{2\times 16-4\times 15^3}{108}}}\\
&= \sqrt[3]{2+\sqrt{\frac{-13068}{108}}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{\frac{-13068}{108}}}\\
&= \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}
\end{aligned}
$$

Au lieu de *s'avouer vaincu* par l'impossibilité de calculer $\sqrt{-121}$, Raphaël Bombelli eut l'idée, folle à l'époque, d'imaginer l'existence d'un nombre i tel que $i^2=-1$. Dans ces conditions,

$$\sqrt{-121}=\sqrt{11^2\times i^2}=11i \tag{4.14}$$

De la relation $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ on déduit alors que l'équation $x^3=15x+4$ admet une solution :

$$x=\sqrt[3]{2+11i}+\sqrt[3]{2-11i} \tag{4.15}$$

Pour achever la solution fournie par la relation 4.15, Bombelli imagina l'existence d'un nombre $x+iy$ qui soit racine cubique de $2\pm 11i$.

Dans ce cas, $(x+iy)^3=2+11i \Rightarrow x^3+3x^2iy-3xy^2-iy=2+11i$. En groupant les termes semblables dans cette dernière relation on obtient :

$$\left(x^3-3xy^2\right)+i\left(3x^2y-y^3\right)=2+11i \tag{4.16}$$

La relation 4.16 conduit naturellement au système :

$$\begin{cases} x^3-3xy^2=2\\ 3x^2y-y^3=11\end{cases} \tag{4.17}$$

En résolvant le système 4.17, Bombelli obtient $x=2$ et $y=1$. Il en déduit alors que $\sqrt[3]{2+11i}=2+i$.

En procédant de la même manière pour $2-11i$ il obtint que $\sqrt[3]{2-11i}=2-i$

En plaçant ces valeurs dans la relation 4.15, Bombelli obtint qu'en définitive, l'équation $x^3=15x+4$ admet une solution

$$\sqrt[3]{2+11i}+\sqrt[3]{2-11i}=(2+i)+(2-i)=4$$

Quoique les nombres nouveaux (contenant i avec $i^2=-1$) défiaient le bon sens réel, ils permirent tout de même l'obtention d'une solution bien réelle $x=4$.

Grâce à **Raphaël Bombelli**, on pouvait recourir à ces nouveaux nombres et résoudre des équations du type $x^3 = px + q$ quel que soit le signe de $27q^2 - 4p^3$.

L'utilisation de ces nouveaux nombre entraina de vives polémiques au sein de la communauté mathématique et vers 1637, **René Descartes** les qualifia d'*imaginaires.*

Ce n'est que deux siècles plus tard que la communauté mathématique leur reconnut un statut sérieux grâce à une construction algébrique rigoureuse de leur ensemble, l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes est un corps commutatif, extension du corps $\mathbb{R}$ des nombres réels.

Rappelons que lorsque l'on dispose d'un ensemble E muni d'une loi de composition interne $*$, la structure $(E, *)$ est un *groupe* si la loi $*$ est associative, admet un élément neutre unique e et chaque élément $a \in E$ possède un élément symétrique unique $a^{'}$.

Si en plus de ces trois propriétés, la loi $*$ est commutative, on dit que le groupe $(E, *)$ est commutatif (ou encore abélien).

Dans un groupe $(E, *)$ l'équation de la forme $a*x = b$ est toujours résoluble et possède $S = \left\{a^{'} * b\right\}$ comme ensemble des solutions.

L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels ne dispose pas de structure de groupe lorsque l'on y considère l'addition usuelle qui y est une loi de composition interne. L'une des conséquences de cette lacune de structure est que les équations du type $a + x = b$ ne sont pas toujours résolubles dans $\mathbb{N}$.

Comme nous l'avons souligné plus haut, ce genre d'équations sont toujours résolubles dans $\mathbb{Z}$ suite au fait que $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe (abélien).

C'est ainsi que l'équation $5 + x = 3$ est impossible dans $\mathbb{N}$ mais elle admet $S = \{-2\}$ comme ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$.

En plus de la structure de groupe que possède $(\mathbb{Z}, +)$, rappelons que la multiplication dans $\mathbb{Z}$ est associative et distributive par rapport à l'addition et admet 1 comme élément neutre.

Rappelons que lorsque l'on dispose d'un ensemble E muni de deux lois de composition internes $*$ et $\top$, on dit que $(E, *, \top)$ est un **anneau** si :

1. $(E, *)$ est unroupe abélien,
2. $\top$ est associative et distributive par rapport à $*$

Si en plus de ces deux conditions, la loi $\top$ admet un élément neutre , on dit que $(E, *, \top)$ est un **anneau unitaire**.

De manière générale, la première loi d'un anneau est notée additivement tandis que la seconde est notée multiplicativement. Il en résulte que l'élément neutre de la première loi d'un anneau est souvent appelé **l'élément nul** (noté 0) tandis que celui de la seconde loi est **l'élément unité** (noté 1).

Pour un anneau $(E, +, \times)$ on note $E^\star = E \setminus \{0\}$ l'ensemble d'éléments non nuls.

Rappelons qu'un ensemble E muni d'une addition $(+)$ et d'une multiplication $(\times)$ internes est un **corps** si les conditions suivantes sont remplies :

1. $(E, +, \times)$ est un anneau
2. $(E^\star, \times)$ est un groupe

Si en plus de ces conditions, la multiplication est commutative, le corps $(E, +, \times)$ est un corps commutatif.

Une partie non vide F d'un corps $(K, +, \times)$ en est un sous-corps si la restriction à F de l'addition et de la multiplication internes de K fait de $(F, +, \times)$ un corps.

L'ensemble $\mathbb{Z}$ possède donc une structure d'anneau unitaire lorsque l'on y considère les lois d'addition et de multiplication usuelle.
Toutefois, il convient de souligner le fait que l'anneau $(\mathbb{Z}, +, \times)$ n'est pas un **corps**.
En effet, la structure $(\mathbb{Z}^\star, \times)$ n'est pas un groupe pour la simple raisons que dans $\mathbb{Z}^\star$ seuls -1 et 1 sont inversibles.

Une des conséquences de cette lacune de la structure $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est que les équations de la forme $a \times x = b$ (avec $a \neq 0$) ne sont pas toujours résolubles dans $\mathbb{Z}$.

Nous savons que les structures $(\mathbb{Q}, +, \times)$ et $(\mathbb{R}, +, \times)$ sont des corps commutatifs. Toute équation de la forme $ax = b$ (avec $a \neq 0$) admet $S = \{a^{-1} \times b\}$ comme ensemble des solutions dans $\mathbb{Q}$ ou dans $\mathbb{R}$. Point n'est besoin, à ce stade, de revenir sur la différence [1] entre ces deux corps.

S'agissant du corps $\mathbb{R}$ des nombres réels, nous savons l'équation $x^2 + 1 = 0$ y est impossible étant donné que seuls les réels positifs ou nuls possèdent une racine carrée réelle.

L'ensemle noté $\mathbb{C}$ des nombres complexes, répond au besoin de construire un sur-ensemble de $\mathbb{R}$ muni d'une addition $(+)$ et d'une multiplication $(\times)$ prolongeant celles définies dans $\mathbb{R}$ tel que :

1. $(\mathbb{C}, +, \times)$ soit un corps commutatif,

1. $\mathbb{R}$ est complet mais $\mathbb{Q}$ ne l'et pas ...

2. tout élément $z \in \mathbb{C}$ possède au moins une racine carrée.

4.2 Construction de l'ensemble $\mathbb{C}$

4.2.1 Morphismes de corps

Définition 4.2.1 *:*
Soit $f : K_1 \longrightarrow K_2$ une application entre les corps $(K_1, +, \times)$ et $(K_2, +, \times)$. On dit que f est un ***morphisme*** *de corps si $\forall a, b \in K_1$,*

1. $f(a+b) = f(a) + f(b)$,
2. $f(a \times b) = f(a) \times f(b)$

Si un morphisme de corps $f : K_1 \longrightarrow K_2$ est bijectif, on dit qu'il s'agit d'un **isomorphisme** de corps et dans ce cas, les structures de corps $(K_1, +, \times)$ et $(K_2, +, \times)$ sont identiques.

On démontre aisément que pour un morphisme de corps $f : K_1 \longrightarrow K_2$, l'ensemble image $f(K_1)$ est nécessairement un sous corps de K_2.

Remarque 4.2.1 *:*
Il résulte de ce qui précède que s'il existe un morphisme de corps $f : K_1 \longrightarrow K_2$ qui soit injectif, alors le corps K_1 est isomorphe au sous corps $f(K_1)$ de K_2 et , de ce point de vue, le corps K_2 contient le corps K_1.

4.2.2 Une structure de corps sur $\mathbb{R}^2$

Considérons sur l'ensemble $\mathbb{R}^2 = \{(a, b) : a \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad b \in \mathbb{R}\}$ l'addition $(+)$ et la multiplication $(\times)$ définies $\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$, respectivement par

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \quad \text{et} \quad (a, b) \times (c, d) = (ac - bd, ad + bc) \tag{4.18}$$

Proposition 4.2.1 *:*
En considérant l'addition et la multiplication définies par la relation 4.18, la structure $(\mathbb{R}^2, +, \times)$ est un corps commutatif.

En effet,

1. $(\mathbb{R}^2, +)$ est un groupe abélien.
   (a) **Associativité** :

   Soient $(a, b), (c, d)$ et (e, f) ans $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}((a,b)+(c,d))+(e,f) &= (a+c,b+d)+(e,f)\\ &= ((a+c)+e,(b+d)+f)\\ &= (a+(c+e),b+(d+f))\\ &= (a,b)+(c+e,d+f)\\ &= (a,b)+((c,d)+(e,f))\end{aligned}$$

(b) **Elément nul** :

Si dans $\mathbb{R}^2$ l'élément $e=((x,y)$ est tel que $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2$ on a $(a,b)+(x,y)=(a,b)$ alors $(a+x,b+y)=(a,b)$

Il en résulte que $\left\{\begin{array}{l} a+x=a\\ b+y=b\end{array}\right. \Rightarrow (x,y)=(0,0)$.

Ainsi, $e=(0,0)$ est l'élément neutre de $(\mathbb{R}^2,+)$

(c) **Symétrisation :**

Il est évident qu'à tout élément $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ on peut associer son opposé $(-a,-b)$ de sorte que $(a,b)+(-a,-b)=(0,0)$.

(d) **Commutativité** :
Il est également évident que $\forall(a,b),(c,d)\in\mathbb{R}^2$ on a :

$$(a,b)+(c,d)=(c,d)+(a,b)$$

2. **La multiplication est distributive par rapport à l'addition dans** $\mathbb{R}^2$.
En effet,

$$\begin{aligned}(a,b)\times((c,d)+(e,f)) &= (a,b)\times(c+e,d+f)\\ &= (a(c+e)-b(d+f),a(d+f)+b(c+e))\\ &= (ac+ae-bd-bf,ad+af+bc+be)\\ &= (ac-bd,ad+bc)+(ae-bf,af+be)\\ &= ((a,b)\times(c,d))+((a,b)\times(e,f))\end{aligned}$$

3. En notant $\mathbb{C}^\star=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, $(\mathbb{C}^\star,\times)$ est un groupe abélien.

(a) **Associativité :**

Considérons $(a,b),(c,d)$ et (e,f) dans $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}((a,b)\times(c,d))\times(e,f) &= (ac-bd, ad+bc)\times(e,f)\\ &= ((ac-bd)e-(ad+bc)f, (ac-bd)f+(ad+bc)e)\\ &= (ace-bde-adf-bcf, acf-bdf+ade+bce)\\ &= (a(ce-df)-b(cf+de), a(cf+de)+b(ce-df))\\ &= (a,b)\times(ce-df, cf+de)\\ &= (a,b)\times((c,d)\times(e,f))\end{aligned}$$

Comme $\forall (a,b),(c,d),(e,f)\in\mathbb{R}^2$ on a : $((a,b)\times(c,d))\times(e,f) = (a,b)\times((c,d)\times(e,f))$ alors la multiplication dans $\mathbb{R}^2$ est associative.

(b) **Elément unité**
Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $(a,b)\times(x,y)=(a,b)\quad\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

$(a,b)\times(x,y)=(a,b)\Rightarrow(ax-by, ay+bx)=(a,b)$

On en déduit le système $\begin{cases} ax-by=a\\ bx+ay=b\end{cases}$

Le déterminant de ce système d'équations est $\Delta = \begin{vmatrix} a & -b\\ b & a\end{vmatrix} = a^2+b^2\neq 0$ car $(a,b)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

Le déterminant de l'inconnue x est $\Delta_x = \begin{vmatrix} a & -b\\ b & a\end{vmatrix} = a^2+b^2$

Le déterminant de l'inconnue y est $\Delta_y = \begin{vmatrix} a & a\\ b & b\end{vmatrix} = 0$

Nous obtenons alors que

$$(x,y)=\left(\frac{\Delta_x}{\Delta},\frac{\Delta_y}{\Delta}\right)=\left(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2},\frac{0}{a^2+b^2}\right)=(1,0)$$

(c) **Inversion**

Considérons (a,b) un élément quelconque de $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0))$ et cherchons son inverse (x,y).

Comme $(a,b)^{-1}=(x,y)$ alors alors

$$(a, b) \times (x, y) = (1, 0) \Leftrightarrow (ax - by, ay + bx) = (1, 0) \tag{4.19}$$

Il résulte de la relation 4.19 que $\begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases}$

En résolvant ce système on obtient :

$$(a, b)^{-1} = (x, y) = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) \tag{4.20}$$

(d) **Commutativité**

Remarquons enfin que $\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\begin{array}{rcl} (a, b) \times (c, d) & = & (ac - bd, ad + bc) \\ & = & (ca - db, cb + da) \\ & = & (c, d) \times (a, b) \end{array}$$

4.2.3 Inclusion du corps $(\mathbb{R}, +, \times)$ dans le corps $\left(\mathbb{R}^2, +, \times\right)$

Considérons l'application $\varphi : (\mathbb{R}, +, \times) \to (\mathbb{R}^2, +\times)$ définie $\forall a \in \mathbb{R}$ par $\varphi(a) = (a, 0)$.

1. l'application $\varphi : (\mathbb{R}, +, \times) \to (\mathbb{R}^2, +\times)$ est un morphisme des corps.

   En effet, $\forall \quad a, b \in \mathbb{R}$ on a :

   $$\varphi(a + b) = (a + b, 0) = (a, 0) + (b, 0) = \varphi(a) + \varphi(b)$$

   ,

   $$\varphi(ab) = (ab, 0) = (a.b - 0.0, a.0 + 0.b) = (a, 0) \times (b, 0) = \varphi(a) \times \varphi(b)$$

2. le morphisme des corps $\varphi : (\mathbb{R}, +, \times) \to (\mathbb{R}^2, +\times)$ est injectif.

   En effet, soient a et b deux réels tels que $\varphi(a) = \varphi(b)$. Il en résulte alors que :

   $\varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow (a, 0) = (b, 0) \Rightarrow a = b$

Il résulte de la remarque 4.2.1 ci-dessus que le morphisme injectif $\varphi : (\mathbb{R}, +, \times) \to (\mathbb{R}^2, +\times)$ définit une inclusion du corps $(\mathbb{R}, +, \times)$ dans le corps $(\mathbb{R}^2, +, \times)$ de sorte que dans le corps $(\mathbb{R}^2, +, \times)$

chaque élément de la forme $(a, 0)$ est identifié au réel a.

A titre d'exemple, $(5, 0) = 5, \quad (-7, 0) = -7$ et $(-1, 0) = -1$

4.2.4 Existence d'un élément i dans $\left(\mathbb{R}^2, +, \times\right)$ tel que $i^2 = -1$

Notons $i = (0, 1)$ dans $\mathbb{R}^2$ et remarquons que :

$$\begin{aligned} i^2 &= (0,1) \times (0,1) \\ &= (0.0 - 1.1, 0.1 + 1.0) \\ &= (-1, 0) \\ &= -1 \end{aligned}$$

4.2.5 Forme algébrique d'un nombre complexe

Proposition 4.2.2 (Forme algébrique d'un nombre complexe) *:*
tout élément $z = (a, b)$ du corps $(\mathbb{R}^2, +, \times)$ peut se mettre sous la forme $z = a + bi$ avec $i^2 = -1$.

En effet, soit $z = (a, b) \in (\mathbb{R}^2, +, \times)$.

$$\begin{aligned} a + bi &= (a, 0) + [(b, 0) \times (0, 1)] \\ &= (a, 0) + (b.0 - 0.1, b.1 + 0.0) \\ &= (a, 0) + (0, b) \\ &= (a + 0, 0 + b) \\ &= (a, b) \end{aligned}$$

On obtient en définitive que $(\mathbb{R}^2, +, \times)$ est un corps commutatif contenant le $(\mathbb{R}, +, \times)$ des nombres réels et tout élément $(a, b) \in (\mathbb{R}^2, +, \times)$ peut se mettre sous la forme $(a, b) = z = a + bi$ avec $i^2 = -1$.

On note alors :

$$\mathbb{C} = \left\{a + bi, \quad \text{avec} \quad i^2 = 1\right\} \quad \text{le corps des nombres complexes.}$$

Remarque 4.2.2 *:*
Dans le corps $(\mathbb{C}, +, \times)$ des nombres complexes,

— *le réel a est appelée **partie réelle** du nombre complexe $z = a + bi$ tandis que b en est la partie imaginaire. On note $\Re(z) = a$ et $\Im(z) = b$,*

— *il résulte du fait que dans le corps* $(\mathbb{R}^2, +, \times)$ *l'inverse d'un élément* $(a,b) \neq (0,0)$ *est* $(a,b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$ *que si* $z = a + bi$ *alors*

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$$

— *un nombre complexe* $z = a + bi$ *est* ***réel*** *si sa partie imaginaire est nulle et* ***imaginaire pur*** *si sa partie réelle est nulle. En d'autres termes :*

$$z = a + bi \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \Im(z) = b = 0 \quad et \quad z = a + bi \in i\mathbb{R} \Longleftrightarrow \Re(z) = a = 0$$

Définition 4.2.2 (Conjugué) *on appelle* ***conjugué*** *du nombre complexe* $z = a + bi$ *le nombre complexe noté :* $\bar{z}$ *et défini par* $\bar{z} = a - bi$

Remarque 4.2.3 (propriétés du conjugué) *:*
On démontre aisément que l'application $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *qui associe à tout nombre complexe* z *son conjugué* $f(z) = \bar{z}$ *possède les propriétés suivantes :*

1. *le conjugué du conjugué d'un nombre complexe* z *est égal à* z *:*

$$\forall \quad z \in \mathbb{C}, \quad \bar{\bar{z}} = z$$

2. *Pour tout nombre complexe* z*, de partie réelle* $\Re(z) = a$ *et de partie imaginaire* $\Im(z) = b$ *on a :*

$$\Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad et \quad \Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

3. *Pour tout nombre complexe* z*,*

$$\bar{z} = z \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

4. *le conjugué de l'opposé est égale à l'opposé du conjugué :*

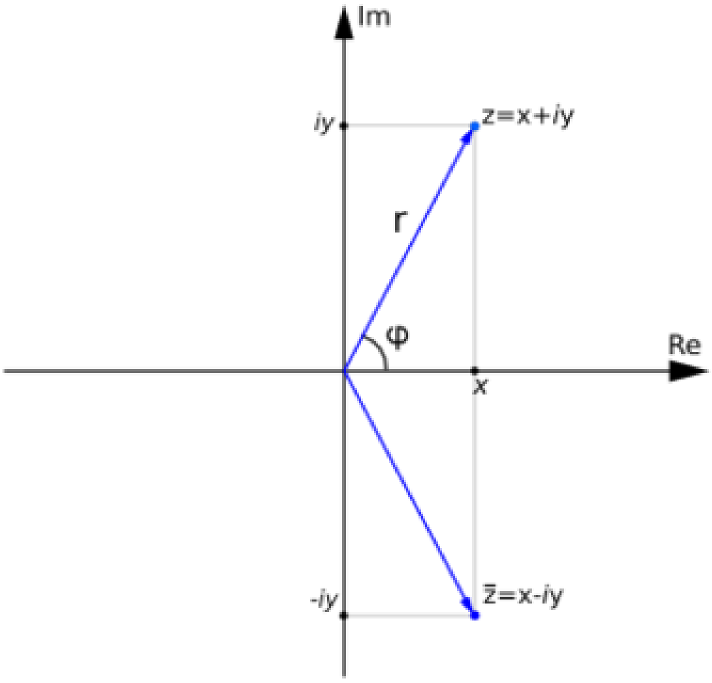
$$\overline{(-z)} = -\bar{z}$$

5. *le conjugué du produit est égal au produit du conjugué. Le conjugué du quotient est égal au quotient des conjugués (sous réserve que le dénominateur est non nul) :*

$$\forall \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C} : \overline{(z_1 \times z_2)} = \bar{z}_1 \times \bar{z}_2 \quad et \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad avec \quad z_2 \neq 0$$

6. *le conjugué de l'inverse d'un nombre complexe non nul est égal à l'inverse de son conjugué :*

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$$



Exercice 4.2.1 *:*
Démontrer les six propriétés ci-dessus du conjugué d'un nombre complexe.

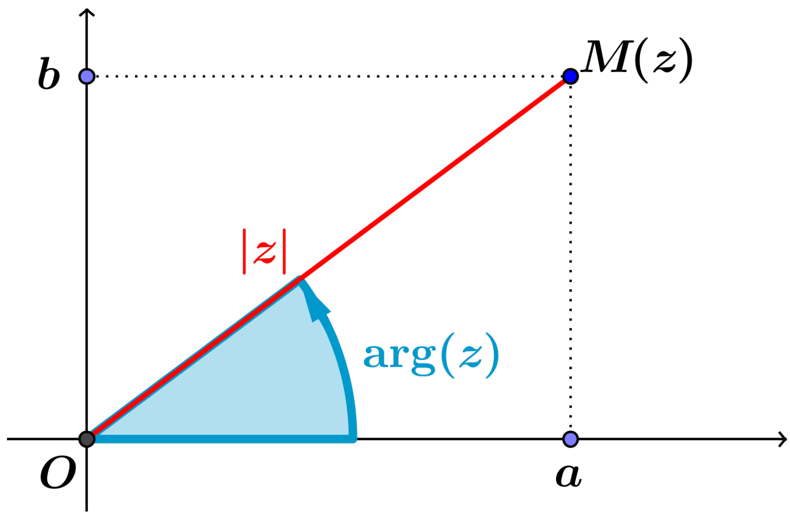
Exercice 4.2.2 *:*
Mettre sous forme algébrique

1. $z_1 = 4(-2+3i) + 3(-5-8i)$,
2. $z_2 = (2-i)(3+8i)$,
3. $z_3 = \frac{-4}{1+i\sqrt{3}}$,
4. $z_4 = \frac{(3+5i)^2}{1-2i}$,
5. $z_5 = (1+i)^3$,
6. $z_6 = \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i}$

4.2.6 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Considérons un nombre complexe $z = a + bi \in \mathbb{C}$
Suite à la bijection évidente $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ permettant d'associer au nombre complèxe $z = a + bi \in \mathbb{C}$ le point $M(a, b)$ des coordonnées (a, b) dans le plan $\mathbb{R}^2$, notons $M(z)$ l'image M de z.

Définition 4.2.3 *:*
On dit que le point $M(z)$ est le ***point image*** *du nombre complexe z tandis que $z = a + bi$ est appelé* ***affixe*** *du point M.*



Définition 4.2.4 *:*
Le module $r = |z|$ du nombre complexe z est, par définition le module du vecteur $\overrightarrow{OM}$

Il résulte de la définition 4.2.2 que le module $r = |z|$ du nombre complexe z vaut :

$$\begin{aligned} r = |z| &= \left\|\overrightarrow{OM}\right\| \\ &= \left\|\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right\| \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ &= \sqrt{z \times \bar{z}} \end{aligned}$$

Exercice 4.2.3 *Determiner l'ensemble des points M d'affixe z tels que :*

1. $|z - 3 + i| = 5,$

2. $|z - 4 - 5i| = |z + 2|$

Solution

1. Considérons A le point d'affixe $3 - i$ (c'est-à-dire le point des coordonnées $(3, -1)$:

$$|z - 3 + i| = 5 \Longleftrightarrow \left\|\overrightarrow{AM}\right\| = 5$$

L'ensemble cherché est donc le cercle de centre A et de rayon 5 (voir figure à la page 90 ci-dessous) :

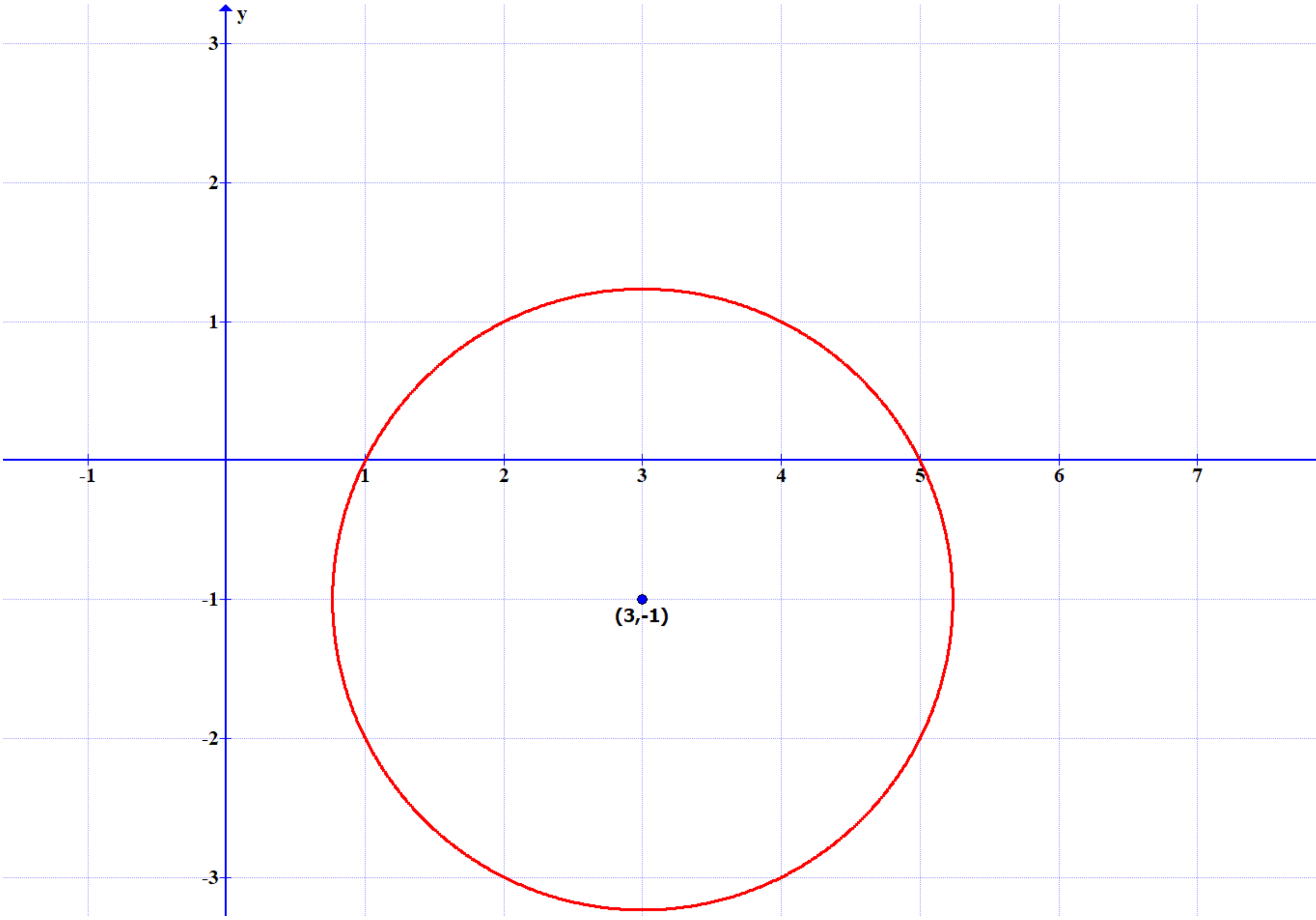


Illustration de la solution 1 de l'exercice 4.2.3

2. Soient B et C les points d'affixes $z_B = 4 + 5i$ et $z_C = -2$.

$$|z - 4 - 5i| = |z + 2| \Leftrightarrow d(B, M) = d(CM)$$

L'ensemble cherché est donc le *lieux géométrique* des points équidistants des points B et C : concrètement c'est la médiatrice du segment $[BC]$ (voir image à la page 96)

Remarque 4.2.4 (Propriétés du module) *:*
l'application $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ qui associe à chaque nombre complexe son module remplit les propriétés suivantes :

1. *pour tous z_1 et z_2, éléments de $\mathbb{C}$ on a :*
   (a) $|z_1| = 0 \Longleftrightarrow z_1 = 0$;

   (b) $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$ *le module d'un produit est égal au produit des modules*
2. *pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et z_1, z_2 dans $\mathbb{C}$ on a :*
   (a) $|z_1^n| = |z_1|^n$;

   (b) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ *avec* $(z_1 \neq 0)$;

   (c) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

En notant $\theta = arg(z)$ l'argument d'un nombre complexe z et $r = |z|$ son module, il ressort des relations dans le triangle rectangle de la figure de la page 89 que :

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{r} \\ \sin\theta = \frac{b}{r} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = r\cos\theta \\ b = r\sin\theta \end{cases} \tag{4.21}$$

En plaçant les relations 4.21 dans la forme algébrique $z = a + bi$ on obtient :

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \quad \text{la forme trigonométrique d'un nombre complexe} \quad z \tag{4.22}$$

4.2.7 Forme exponentielle d'un nombre complexe

En analyse mathématique, le dévellopement de la fonction e^{ix} ainsi que celui des fonctions $\cos x$ et $\sin x$ permettent de démontrer aisément que :

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x \quad \forall \quad x \in \mathbb{R} \tag{4.23}$$

Il résule alors de la forme trigonométrique ci-dessus que tout nombre complexe de module $r = |z|$ et d'argument $\theta = \arccos\left(\frac{a}{r}\right) = \arcsin\left(\frac{b}{r}\right) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ peut se mettre sous la forme :

$$z = re^{i\theta}, \quad \text{la forme exponentielle d'un nombre complexe}$$

Proposition 4.2.3 (Formules de Euler) *:*
pour tout nombre réel θ on a

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{cases}$$

En effet,
- on a d'une part,

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta) + (\cos\theta - i\sin\theta) = 2\cos\theta \Longrightarrow \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \blacksquare$$

- d'autre part on a,

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta) - (\cos\theta - i\sin\theta) = 2i\sin\theta \Longrightarrow \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad \blacksquare$$

4.2.8 Retour sur l'argument d'un nombre complexe

Remarque 4.2.5 (propriétés de l'argument) *:*
on démontre que pour tous z_1 et z_2 nombres complexes non nuls on a :

1. $\arg(z_1 \times z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ *à $2k\pi$ près, $k \in \mathbb{Z}$;*
2. $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$ *à $2k\pi$ près, $k \in \mathbb{Z}$;*
3. $\arg(-z_1) = \arg(z_1) + \pi$ *à $2k\pi$ près, $k \in \mathbb{Z}$;*
4. $\arg(z_1^n) = n\arg(z_1)$ *à $2k\pi$ près, $k \in \mathbb{Z}$;*

Il résulte de la propriété 4. ci-dessus que si $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ alors

$$z^n = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)] = re^{in\theta}$$

En particulier,

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) \quad \text{(formule de Moivre)}$$

Exercice 4.2.4 *:*
Mettre chacun des nombres complexes suivants sous forme trigonométrique puis sous forme exponentielle :

1. $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$,
2. $z_2 = 9i$,
3. $z_3 = \frac{-i\sqrt{2}}{1+i}$,
4. $z_4 = -3$,
5. $z_5 = \frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^3}{(1-i)^5}$,

6. $z_6 = \sin x + i \cos x$

Exercice 4.2.5 *:*
Determiner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = (2+2i)^6$
2. $z_2 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$
3. $z_3 = \frac{(1+i)^{2000}}{\left(i-\sqrt{3}\right)^{1000}}$

Exercice 4.2.6 *:*
Trouver les entiers $n \in \mathbb{N}$ *tels que* $\left(1+i\sqrt{3}\right)^n$ *soit un réel positif.*

***Indication* 1** *Écrire* $1+i\sqrt{3}$ *sous forme exponentielle.*

Exercice 4.2.7 *:*
Soient $a, b \in]0, \pi[$. *Ecrire sous forme trigonométrique les complexes suivants :*

1. $z_1 = 1 + e^{ia}$,
2. $z_2 = 1 - e^{ia}$,
3. $z_3 = e^{ia} + e^{ib}$,
4. $z_4 = \frac{1+e^{ia}}{1+e^{ib}}$

***Indication* 2** *:*
Dans une somme ou une différence de deux complexes de module 1, $e^{ix} \pm e^{iy}$ *mettre en facteur* $e^{i\frac{x+y}{2}}$ *puis utiiser les formules d'Euler.*

4.2.9 Autres exercices

Exercice 4.2.8 *:*
Résoudre les équations suivantes :

1. $(4-2i)\, z^2 = (1+5i)\, z$,
2. $2z + \bar{z} = 2 + 3i$,
3. $2z + 2\bar{z} = 2 + 3i$

Exercice 4.2.9 *:*
Résoudre $e^z = 3\sqrt{3} - 3i$

***Indication* 3** *Les solutions de l'équation sont de la forme* $z = \ln 6 + i\left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}$

Exercice 4.2.10 *:*
Déterminer les nombres complexes z tels que $z^2 = 15 - 8i$

***Indication* 4** *:*
les solutions sont $4 - i$ et $-4 + i$

Exercice 4.2.11 *:*
Determiner les racines carrées de $z = \sqrt{3}+i$ sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique. En déduire la valeur de $\cos\frac{\pi}{12}$

4.2.10 Racines n-ième d'un nombre complexe

Les fonctions $\sin x$ et $\cos x$ étant périodiques de période 2π, la forme trigonométrique d'un nombre z de module r et d'argument θ peut alors s'écrire :

$$z = r\left[\cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi)\right], \quad k \in \mathbb{Z}$$

Si $z_j = r_j\left(\cos\theta_j + i\sin\theta_j\right)$ est une racine n-ième de $z = r\left[\cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi)\right]$ alors $(z_j)^n = z$.

Dans ce cas :

$$(z_j)^n = z \Leftrightarrow r_j^n\left[\cos(n\theta_j) + i\sin(n\theta_j)\right] = r\left[\cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi)\right]$$

On en déduit que :

$$\begin{cases} r_j^n = r \\ n\theta_j = \theta + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_j = \sqrt[n]{r} \\ \theta_j = \frac{\theta+2k\pi}{n} \end{cases}$$

Ainsi une racine n-ième $z_j = r_j\left(\cos\theta_j + i\sin\theta_j\right)$ d'un nombre complexe $z = r\left[\cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\right.$
est de la forme :

$$z_j = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{(\theta + 2k\pi)}{n}\right) + i\sin\left(\frac{(\theta + 2k\pi)}{n}\right)\right], \quad k \in \mathbb{Z}$$

Combien existe-t-il de telles racines ?
En attribuant au paramètre k des valeurs entières successives, remarquons que :

- pour $k = 0$ on a $z_0 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right)$;
- pour $k = 1$ on a $z_1 = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta+2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2\pi}{n}\right)\right]$;
- pour $k = 2$ on a $z_2 = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta+4\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+4\pi}{n}\right)\right]$;
- pour $k = 3$ on a $z_3 = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta+6\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+6\pi}{n}\right)\right]$;

— $\vdots$

— pour $k = n-1$ on a $z_{n-1} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta+2n\pi-2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2n\pi-2\pi}{n}\right)\right]$;

— pour $k = n$ on a $z_n = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta+2n\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2n\pi}{n}\right)\right] = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right) = z_0$;

— ainsi, $z_{n+1} = z_1, \quad z_{n+2} = z_2, \cdots$

De ce qui précède on déduit que tout nombre complexe z admet exactement n racines n-ième z_j qu'on obtient en faisant varier k de 0 à $n-1$ dans la formule :

$$z_j = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{(\theta+2k\pi)}{n}\right) + i\sin\left(\frac{(\theta+2k\pi)}{n}\right)\right], \quad k \in \mathbb{Z}$$

Exercice 4.2.12 (Racines n-ièmes) *:*
Résoudre les équations suivantes

1. $z^5 = -1$,
2. $z^6 = \frac{-4}{1+i\sqrt{3}}$,
3. $z^5 = \frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^4}{(1+i)^2}$

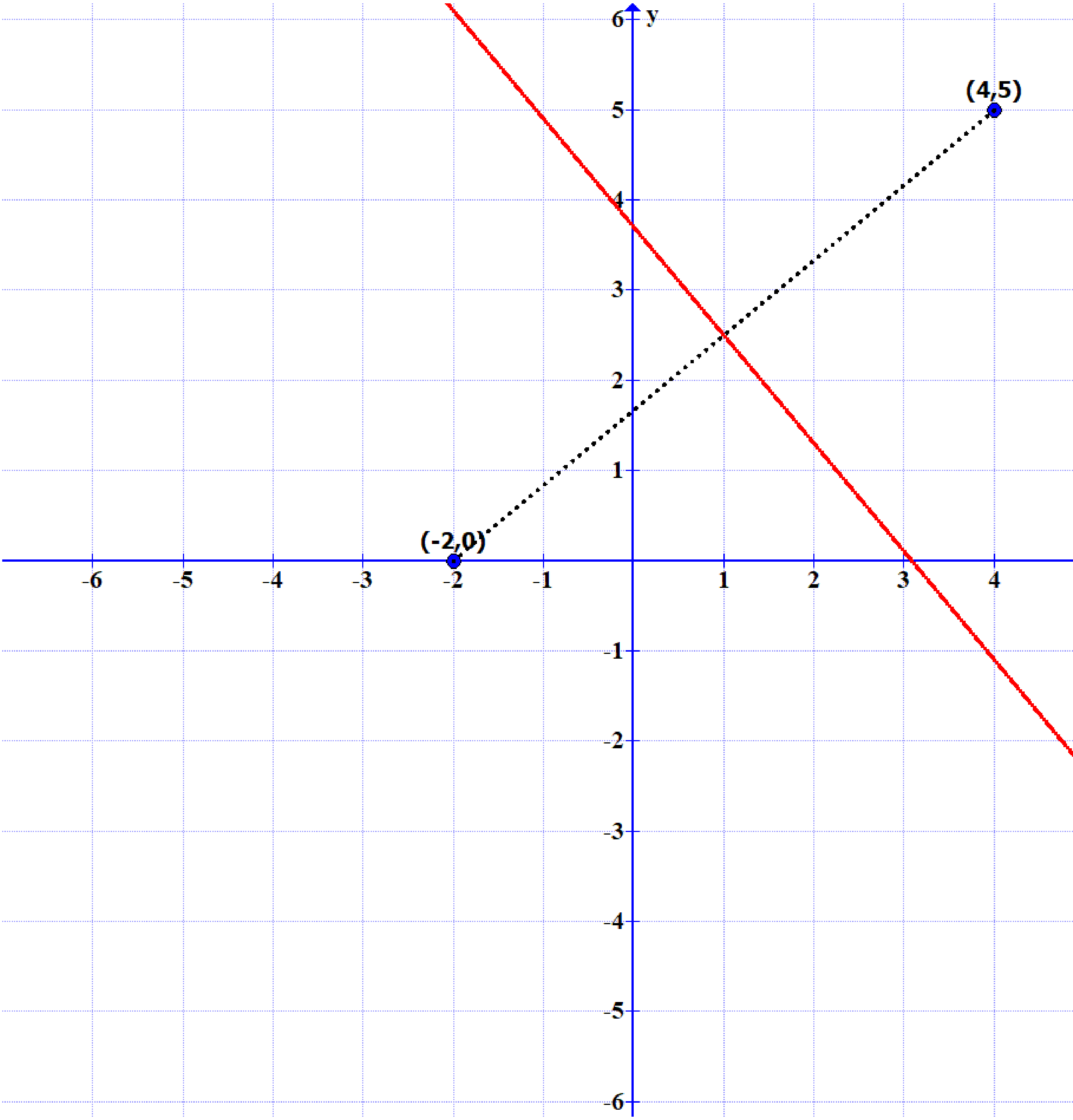


Illustration de la solution 2 de l'exercice 4.2.3

Chapitre 5

Axe 2 : Espaces vectoriels

5.1 Notions

Dans les sciences physiques, on désigne par grandeur, tout ce qui est mesurable et on distingue les **grandeurs scalaires** des **grandeurs vectorielles**.

Sont vectorielles, les grandeurs (comme la force, le champ magnétique, la vitesse ...) pour lesquelles la description complète nécessite la connaissance de la **direction**,du **sens**, du **module** et du **point d'application**.

S'agissant des grandeurs scalaires (comme la masse, la longueur. . .) un seul paramètre suffit pour leur description.

De façon générale, on peut considérer que la structure de Corps est celle qui est la mieux adaptée pour les ensembles des scalaires tandis que le cadre naturel pour la description des grandeurs vectorielles nécessite la structure dite d'**espace vectoriel**.

Quelle que soit l'idée intuitive que l'on se fait d'un vecteur, il est connu que :

1. la somme des deux vecteurs est un vecteur;
2. la multiplication d'un réel α par un vecteur $\vec{u}$ est un vecteur $\alpha\vec{u}$

Ainsi, en notant $\mathcal{V}$ l'ensemble de tous les vecteurs,

1. $+$ est une loi de composition interne possédant les propriétés suivantes :
   (a) l'addition vectorielle est associative : $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})\,, \quad \forall\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in\mathcal{V}$;

   (b) l'addition dans $\mathcal{V}$ admet un élément neutre unique noté $\vec{o}$ et appelé **vecteur nul**;

(c) tout vecteur $\vec{u} \in \mathcal{V}$ admet $-\vec{u} \in \mathcal{V}$ comme opposé ;

(d) l'addition vectorielle est commutative :

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} \quad \forall \quad \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$$

On peut résumer ces 4 propriétés en disant que $(\mathcal{V}, +)$ est un groupe abélien.

2. la multiplication d'un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$ par un vecteur $\vec{u} \in \mathcal{V}$ définit une application $\times$: $\mathbb{R} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ associant le vecteur $\alpha\vec{u} \in \mathcal{V}$ au couple $(\alpha, \vec{u}) \in \mathbb{R} \times \mathcal{V}$.
Cette multiplication est dite **externe** car elle compose des éléments des natures différentes (un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$ et un vecteur $\vec{u} \in \mathcal{V}$ pour trouver un élément $\alpha\vec{u} \in \mathcal{V}$.

Cette multiplication externe possède les 4 propriétés suivantes :

(a) $\forall \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall \quad \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$ on a :

$\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$ (*distributivité* de la multiplication externe par rapport à l'addition dans

(b) $\forall \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall \quad \vec{u} \in \mathcal{V}$ on a :

$(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$ (*distributivité* de la multiplication externe par rapport à l'addition dans

(c) $\forall \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall \quad \vec{u} \in \mathcal{V}$ on a :

$$\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u} \quad (\textit{associativité mixte})$$

(d) $1\vec{u} = \vec{u}$

Ces propriétés sont généralisées pour définir la structure d'**espace vectoriel** qui est le cadre naturel pour les notions d'Algèbre linéaire.

5.2 Définition et exemples

Définition 5.2.1 (Espace vectoriel) *:*
Considérons $\mathbb{K}$ un corps (pouvant être $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et E un ensemble non vide.
On dit que $(E, +, \times)$ est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$, ou encore que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , ou encore que E est un espace vectoriel à operateurs dans $\mathbb{K}$ si les conditions suivantes sont remplies :

1. *$+ : E \times E \to E$ est une addition interne faisant de $(E, +)$ un groupe abélien dont l'élément neutre s'appelle **vecteur nul**, souvent noté $\vec{o}$;*

2. $\times : \mathbb{K} \times E \to E$ *est une multiplication externe associant le vecteur* $\alpha \times \vec{u}$, *généralement noté* $\alpha\vec{u}$, *à tout élément* $(\alpha, \vec{u}) \in \mathbb{K} \times E$. *Cette multiplication externe remplit les quatre propriétés ci-dessous :*

   (a) ***Distributivité de la multiplication externe par rapport à l'addition interne vectorielle :***
   $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in E$ *on a :*
   $$\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$$

   (b) ***Distributivité de la multiplication externe par rapport à l'addition interne des scalaires :***
   $\forall \alpha\ , \beta \in \mathbb{K}, \quad \forall \vec{u} \in E$ *on a :*
   $$(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$$

   (c) ***Associativité mixte :*** $\forall \alpha\ , \beta \in \mathbb{K}, \quad \forall \vec{u} \in E$ *on a :*
   $$(\alpha.\beta).\vec{u} = \alpha(\beta.\vec{u})$$

   (d) *L'élément unité 1 du corps* $\mathbb{K}$ *est l'opérateur unité :*
   $$\forall \vec{u} \in E, \quad 1.\vec{u} = \vec{u}$$

À titres d'exemples, citons :

1. $\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$ est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$.
   L'addition interne et la multiplication externe de $(\mathbb{R}^2, +, \times)$ sont définies par :
   (a) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}, \quad \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2;$
   (b) $\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{pmatrix}; \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ et $\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

   Pour l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^2, +, \times)$, le vecteur nul est $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, l'opposé de tout vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ est le vecteur $-\vec{u} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$.

2. $\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$ est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$.

   L'addition interne et la multiplication externe de $(\mathbb{R}^3, +, \times)$ sont définies par :

(a) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \end{pmatrix}, \quad \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3;$

(b) $\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \end{pmatrix}; \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ et $\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

Pour l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^3, +, \times)$, le vecteur nul est $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, l'opposé de tout vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ est le vecteur $-\vec{u} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}$.

3. En général, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R} \right\}$ est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$.

L'addition interne et la multiplication externe de $(\mathbb{R}^n, +, \times)$ sont définies par :

(a) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}, \quad \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n;$

(b) $\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}; \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ et $\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

Pour l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^n, +, \times)$, le vecteur nul est $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, l'opposé de tout vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est le vecteur $-\vec{u} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}$.

Les ensembles $\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R} \right\}$ constituent les exemples les plus intuitifs d'espaces vectoriels.
Nous verrons plus loin que chacun des ensembles $\mathbb{R}^n$ jouit d'un double statut :

(a) Celui d'espace vectoriel $\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R} \right\}$ sur le corps $\mathbb{R}$ dont les éléments $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ sont des vecteurs qu'on peut additionner entre eux et qu'on peut multiplier par un scalaire α ;

(b) celui d'ensemble des points $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n), \quad x_i \in \mathbb{R}\}$ dont les éléments sont des points $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ pour lesquels il n'y a pas d'addition interne.
Dans un contexte bien précis, la donnée d'un espace vectoriel E pourra permettre de translater les points de $\mathbb{R}^n$ par les vecteurs de E et définir ainsi la structure la plus adaptée à la géométrie analytique.

(c) L'ensemble $\mathcal{F}_c([a,b], \mathbb{R})$ des fonctions continues $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ d'un intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est également un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$.

L'addition interne et la multiplication externe y sont définies par :

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\alpha.f)(x) = \alpha.f(x)$$

L'application constante nulle $\mathcal{O}$ définie $\forall x \in [a,b]$ par $\mathcal{O}(x) = 0$ est le vecteur nul et l'opposée $-f$ de tout vecteur f est défini par $-(f)(x) = -f(x)$.

(d) En mécanique quantique, l'ensemble $\mathcal{H} = \{\Psi\}$ des états quantiques Ψ de toute particule élémentaire est également un espace vectoriel sur lequel sont ajoutées d'autres contraintes algébriques et analytiques afin d'en faire une structure plus riche appelée **espace de Hilbert**.

Des axiomes de définition 5.2.1, d'un espace vectoriel $(E, +, \times)$ résultent les conséquences ci-dessous :

Conséquence 5.2.1 *Tout élément $\vec{u}$ d'un espace vectoriel $(E, +, \times)$ est régulier (simplifiable) pour l'addition interne :*

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in E, \quad \vec{u} + \vec{v} = \vec{u} + \vec{w} \Rightarrow \vec{v} = \vec{w}$$

Cette propriété n'est qu'une conséquence de la structure de groupe abélien $(E, +)$.
En effet, en partant de la relation $\vec{u}+\vec{v} = \vec{u}+\vec{w}$, il suffit d'additionner $-\vec{u}$ à chacun des deux membres et d'utiliser l'associativité de l'addition interne pour avoir :

$$\begin{aligned}
-\vec{u} + (\vec{u} + \vec{v}) &= -\vec{u} + (\vec{u} + \vec{w}) \\
&\Rightarrow (-\vec{u} + \vec{u}) + \vec{v} = (-\vec{u} + \vec{u}) + \vec{w} \\
&\Rightarrow \vec{o} + \vec{v} = \vec{o} + \vec{w} \\
&\Rightarrow \vec{v} = \vec{w}
\end{aligned}$$

Conséquence 5.2.2 *quel que soit le vecteur $\vec{u} \in E$, $0.\vec{u} = \vec{o}$.*

En effet, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ et $\forall \vec{u} \in E$, $\alpha + 0 = \alpha$ et $(\alpha + 0)\,\vec{u} = \alpha\vec{u} + 0.\vec{u}$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
(\alpha + 0)\,\vec{u} = \alpha\vec{u} &\Rightarrow \alpha\vec{u} + 0.\vec{u} = \alpha\vec{u} \\
&\Rightarrow \alpha\vec{u} + 0\vec{u} = \alpha\vec{u} + \vec{o} \\
&\Rightarrow 0\vec{u} = \vec{o} \quad \text{car} \quad \alpha\vec{u} \quad \text{est simplifiable.}
\end{aligned}$$

Conséquence 5.2.3 *quel que soit $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\lambda.\vec{o} = \vec{o}$*

En effet, soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\vec{u} \in E$. Comme $\vec{u} + \vec{o} = \vec{u}$, alors :

$$\begin{aligned}
\alpha\,(\vec{u} + \vec{o}) &= \alpha\vec{u} \\
&\Rightarrow \alpha\vec{u} + \alpha\vec{o} = \alpha\vec{u} \\
&\Rightarrow \alpha\vec{u} + \alpha\vec{o} = \alpha\vec{u} + \vec{o} \\
&\Rightarrow \alpha\vec{o} = \vec{o} \quad \text{Par régularité de } \alpha\vec{u} \text{ pour l'addition vectorielle}
\end{aligned}$$

Conséquence 5.2.4 $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ *et* $\forall \vec{u} \in E$,

$$\alpha\vec{u} = \vec{o} \Rightarrow \alpha = 0 \quad ou \quad \vec{u} = \vec{o}$$

En effet, supposons que $\alpha\vec{u} = \vec{o}$:

— si $\alpha = 0$ alors l'implication est vérifiée ;

— si $\alpha \neq 0$ alors α est inversible dans le corps $\mathbb{K}$ et on a :

$$\begin{aligned} \alpha\vec{u} = 0 &\Rightarrow \alpha^{-1}(\alpha\vec{u}) = \alpha^{-1}\vec{o} \\ &\Rightarrow \left(\alpha^{-1}\alpha\right)\vec{u} = \vec{o} \\ &\Rightarrow \vec{u} = \vec{o} \end{aligned}$$

5.3 Sous-espaces vectoriels

De toutes les parties non vides d'un espace vectoriel $(E, +, \times)$, les plus importantes sont celles qui disposent également d'une structure d'espace vectoriel lorsque l'on y restreint l'addition interne et la multiplication externe de E.

5.3.1 Définitions

Définition 5.3.1 *:*
Considérons $(E, +, \times)$ un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ et F une partie non vide de E.
On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si $(F, +, \times)$ est également un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de $(E, +, \times)$ si :

1. $F \subset E$ et $F \neq \emptyset$;
2. $(F, +)$ est un groupe abélien ;
3. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ et $\forall x, y \in F$;
4. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta y$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $\forall x \in F$;
5. $(\alpha.\beta).x = \alpha.(\beta.x)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $\forall x \in F$;
6. $1.x = x$, $\forall x \in F$.

5.3.2 Propriétés caractéristiques

Remarque 5.3.1 *:*
il convient de noter que l'énumération des six conditions ci-haut que doit satisfaire une partie non vide F de l'espace vectoriel E pour qu'elle soit un sous-espace vectoriel, comporte plusieurs redondances dans la mesure où la satisfaction de certaines de ces conditions entraine celle de certaines autres.

La proposition ci-dessous permet d'identifier un sous-espace vectoriel avec une *économie d'arguments* :

Proposition 5.3.1 (Propriétés caractéristiques d'un sous-espace vectoriel) *:*
Si $(E, +, \times)$ *est un espace vectoriel sur un corps* $\mathbb{K}$ *et* F *est une partie non vide de* E *telle que* $x + y \in F, \forall x, y \in F$ *et* $\alpha x \in F, \forall \alpha \in \mathbb{K}$ *et* $\forall x \in F$*, alors* F *est nécessairement un sous-espace vectoriel de* E*.*

Considérons en effet $(E, +, \times)$ un espace vectoriel et F une partie non vide de E satisfaisant les deux conditions ci-dessous :

1. Stabilité par rapport à l'addition interne :

$$(\vec{u} + \vec{v}) \in F \quad \forall \vec{u}; \forall \vec{v} \in F$$

;

2. Stabilité par rapport à la multiplication externe :

$$\alpha \vec{u} \in F, \quad \forall \vec{u} \in F, \forall \alpha \in \mathbb{K}$$

La partie F contient nécessairement le vecteur nul $\vec{O}$.
En effet, comme $F \neq \emptyset$ alors il existe au moins $\vec{u} \in F$. Il résulte de la stabilité de F par rapport à la multiplication externe que $-1 \times \vec{u} = -\vec{u} \in F$ et, compte tenu de la stabilité de F par rapport à l'addition interne on a $-\vec{u} + \vec{u} = \mathcal{O}$.

Ainsi F contient le vecteur nul $\mathcal{O} = \vec{u} + (-\vec{u}) \in F$ et tout élément de $\vec{u}$ possède son opposé $-\vec{u}$ dans F.
Comme la commutativité et l'associativité de $+$ dans E sont vérifiées dans chacune des partie de E, on retient que :

1. $(F, +)$ est un groupe commutatif;

2. Quant aux propriétés de la multiplication externe dans l'espace vectoriel E, elles sont conservées par la restriction de la multiplication externe dans F :

   (a) $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$, $\forall \vec{u}, \vec{v} \in F$ et $\forall \alpha \in \mathbb{K}$;

   (b) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $\forall \vec{u} \in F$ on a :

      i. $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$;

      ii. $(\alpha.\beta)\vec{u} = \alpha(\beta.\vec{u})$

(c) $1.\vec{u} = \vec{u}, \forall \vec{u} \in F$.

Des propriétés a), b), et c) ci-dessous nous déduisons que toute partie non vide F d'un espace vectoriel $(E, +, \times)$ en est un sous espace vectoriel dès qu'elle est stable pour l'addition interne et pour la multiplication externe.

Pour un espace vectoriel donné $(E, +, \times)$, la stabilité d'une partie non vide $F \subset E$ par rapport à l'addition interne et celle par rapport à la multiplication externe sont donc suffisantes pour que F soit un sous-espace vectoriel de E. Ces deux conditions sont appelées, pour cette raison, **propriétés caractéristiques** d'un sous-espace vectoriels.

Exercice 5.3.1 *:*
Lesquels des sous-ensembles ci-dessous sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ *?*

1. $A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0 \right\}$,
2. $B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y + z = 0 \right\}$,
3. $C = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x = 2y \right\}$,
4. $D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 10 \right\}$

Étant donné deux sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 d'un espace vectoriel E, il est toujours possible de construire d'autres sous-espaces vectoriels de E et de façon particulière, on peut trouver d'une part, le plus grand (du point de vue de l'inclusion) sous-espace vectoriel de E qui est à fois inclus dans F_1 et F_2 et d'autre part, on peut trouver le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient à la fois F_1 et F_2.

Proposition 5.3.2 *:*
Si F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E, alors $F_1 \cap F_2$ est également un sous-espace vectoriel de E

En effet, $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$ car le vecteur nul $\vec{O}_E$ de l'espace vectoriel E appartient à F_1 et à F_2. On a donc $\vec{O}_E \in F_1 \cap F_2$.

— Montrons que $F_1 \cap F_2$ est stable pour l'addition vectorielle :

soient $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ deux vecteurs de $F_1 \cap F_2$.

$$\begin{aligned}
\vec{u}_1 \in F_1 \cap F_2 \quad \text{et} \quad \vec{u}_2 \in F_1 \cap F_2 \;&\Rightarrow \left\{\begin{array}{lll} \vec{u}_1 \in F_1 & \text{et} & \vec{u}_2 \in F_1 \\ \vec{u}_1 \in F_2 & \text{et} & \vec{u}_2 \in F_2 \end{array}\right. \\
&\Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} (\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \in F_1 & \text{car } F_1 \text{ est stable pour l'addition interne,} \\ (\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \in F_2 & \text{car } F_2 \text{ est stable pour l'addition interne,} \end{array}\right. \\
&\Rightarrow (\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \in F_1 \cap F_2
\end{aligned}$$

— Montrons que $F_1 \cap F_2$ est stable pour la multiplication externe :

soient $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\vec{u} \in F_1 \cap F_2$.

$$\begin{aligned}
\vec{u} \in F_1 \cap F_2 \;&\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \vec{u} \in F_1 \\ \vec{u} \in F_2 \end{array}\right. \\
&\Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} \alpha\vec{u} \in F_1 & \text{car } F_1 \text{ est stable pour la multipkicatio externe,} \\ \alpha\vec{u} \in F_2 & \text{car } F_2 \text{ est stable pour la multipkicatio externe,} \end{array}\right. \\
&\Rightarrow \alpha\vec{u} \in F_1 \cap F_2
\end{aligned}$$

Remarque 5.3.2 *:*
pour deux sous-espaces vectoriels quelconques F_1 et F_2 de E, l'ensemble $F_1 \cap F_2$ est le plus grand (du point de vue de l'inclusion) sous-espace vectoriel de E qui soit à la fois contenu dans F_1 et dans F_2.

En effet, considérons F un autre sous-espace vectoriel de E vérifiant $\left\{\begin{array}{l} F \subset F_1 \\ F \subset F_2 \end{array}\right.$

Quel que soit l'élément $\vec{u} \in F$ on a :

$$\left\{\begin{array}{lll} \vec{u} \in F_1 & \text{car} & F \subset F_1 \\ \vec{u} \in F_2 & \text{car} & F \subset F_2 \end{array}\right. \Rightarrow \vec{u} \in (F_1 \cap F_2) \Rightarrow F \subset (F_1 \cap F_2)$$

Comme tout sous-espace vectoriel F de E vérifiant la condition $\left\{\begin{array}{l} F \subset F_1 \\ F \subset F_2 \end{array}\right.$ est nécessairement inclus dans $F_1 \cap F_2$, alors l'ensemble $F_1 \cap F_2$ est le plus grand sous-espace vectoriel de E contenu à la fois dans F_1 et dans F_2.

Définition 5.3.2 *:*
Considérons F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E.
*L'ensemble $F = \{\vec{u} \in E : \exists \vec{u}_1 \in F_1 \quad \text{et} \quad \exists \vec{u}_2 \in F_2 \quad \text{avec} \quad \vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2\}$ s'appelle **somme** des sous-espaces vectoriels F_1 et F_2. Il se note souvent $F_1 + F_2$.*

Ainsi,

$$F = \{\vec{u} \in E : \exists \vec{u}_1 \in F_1 \quad \text{et} \quad \exists \vec{u}_2 \in F_2 \quad \text{avec} \quad \vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2\}$$

Proposition 5.3.3 *:*
Étant donnés deux sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 de E. La somme $F_1 + F_2$ est un sous espace vectoriel de E .
Le sous-espace vectoriel $F_1 + F_2$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant à la fois F_1 et F_2.

L'ensemble $F_1 + F_2 = \{\vec{u} \in E : \exists \vec{u}_1 \in F_1 \quad \text{et} \quad \exists \vec{u}_2 \in F_2 \quad \text{avec} \quad \vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2\}$ est évidemment non vide car
$\begin{cases} F_1 \subset (F_1 + F_2) \\ F_2 \subset (F_1 + F_2) \end{cases}$ On peut s'en convaincre en remarquant que tout vecteur $\vec{u}_1 \in F_1$ (ou $\vec{u}_2 \in F_2$) peut s'écrire $u_1 = u_1 + \vec{O}_E$ (ou $u_2 = u_2 + \vec{O}_E$) avec $\vec{u}_1 \in F_1$ et $\vec{O}_E \in F_2$ (ou $\vec{u}_2 \in F_2$ et $\vec{O}_E \in F_1$) compte tenu du fait que le vecteur nul $\vec{O}_E$ de $(E, +, \times)$ appartient à tout sous-espace vectoriel de E.

— Montrons que $F_1 + F_2$ est stable pour l'addition interne :

Considérons $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux éléments quelconques de $F_1 + F_2$. Il existe donc $\vec{u}_1 \in F_1, \vec{u}_2 \in F_2, \vec{v}_1 \in F_1$ et $\vec{v}_2 \in F_2$ tels que $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ et $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$.

$$\begin{aligned} \vec{u} + \vec{v} &= (\vec{u}_1 + \vec{u}_2) + (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \\ &= (\vec{u}_1 + \vec{v}_1) + (\vec{u}_2 + \vec{v}_2) \end{aligned}$$

Comme $(\vec{u}_1 + \vec{v}_1) \in F_1$ et $(\vec{u}_2 + \vec{v}_2) \in F_2$ alors la relation $\vec{u}+\vec{v} = (\vec{u}_1 + \vec{v}_1)+(\vec{u}_2 + \vec{v}_2)$ implique que $(\vec{u} + \vec{v}) \in (F_1 + F_2)$ et donc $(F_1 + F_2)$ est stable pour l'addition interne.

— Montrons que $F_1 + F_2$ est stable pour la multiplication externe :

quel que soit $\vec{u} \in F_1 \cap F_2$, il existe $\vec{u}_1 \in F_1$ et $\vec{u}_2 \in F_2$ tels que $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ on a :

$$\begin{aligned} \alpha\vec{u} &= \alpha\,(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \\ &= \alpha\vec{u}_1 + \alpha\vec{u}_2 \end{aligned}$$

$\alpha\vec{u}_1 + \alpha\vec{u}_2 = \alpha\vec{u} \in F_1 + F_2$ car $\alpha\vec{u}_1 \in F_1$ et $\alpha\vec{u}_2 \in F_2$

Comme $F_1 + F_2$ est stable pour l'addition interne et pour la multiplication externe, alors $F_1 + F_2$ est un sous-espace vectoriel de E.

Nous savons d'une part que $\begin{cases} F_1 \subset (F_1 + F_2) \\ F_2 \subset (F_1 + F_2) \end{cases}$;

Considérons d'autre part, F un autre sous-espace vectoriel de E qui contient simultanément F_1 et F_2.
Si $\vec{u} \in (F_1 \cap F_2)$, il existe, par définition , $\vec{u}_1 \in F_1$ et $\vec{u}_2 \in F_2$ tels que $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$.
Comme $F_1 \subset F$ et $F_2 \subset F$ alors $\begin{cases} \vec{u}_1 \in F \\ \vec{u}_2 \in F \end{cases}$

En combinant la stabilité de F par rapport à l'addition vectorielle avec la relation $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ ($vecu_1 \in F$ et $\vec{u}_2 \in F$), on en déduit que $\vec{u} \in F$.
Comme $\forall \vec{u} \in (F_1 + F_2)$ on a $\vec{u} \in F$ alors $(F_1 + F_2) \subset F$.

Ainsi, tout sous-espace vectoriel F de E contenant à la fois F_1 et F_2 contient nécessairement le sous-espace vectoriel $F_1 + F_2$. Ce dernier est donc le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant simultanément F_1 et F_2.

5.3.3 Sous-espaces supplémentaires

Définition 5.3.3 (Somme directe) *:*
*si les sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 sont tels que $F_1 \cap F_2 = \left\{\vec{O}_E\right\}$, alors la somme de F_1 et F_2 est dite **directe** et se note $F_1 \oplus F_2$.*
Ainsi,

$$K = F_1 \oplus F_2 \quad si \quad \begin{cases} K = F_1 + F_2 \\ F_1 \cap F_2 = \left\{\vec{O}_E\right\} \end{cases}$$

Définition 5.3.4 (Sous-espaces supplémentaires) *:*
On dit des deux sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 de E qu'ils sont supplémentaires dans E si $E = F_1 \oplus F_2$.

Exemple 5.3.1 *:*
dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad avec \quad x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$ *les sous-espaces vectoriels* $\mathcal{P} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a\right.$
et $\mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, \quad avec \quad z \in \mathbb{R} \right\}$ *sont supplémentaires .*

En effet, $\mathcal{P}$ est l'espace vectoriel correspondant au plan Oxy tandis que $\mathcal{D}$ est l'espace vectoriel correspondant à l'axe Oz.

Il est évident que tout vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ peut sous la forme $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$, avec $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{P}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{D}$ et par ailleurs $\mathcal{P} \cap \mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Dès que l'on dispose d'une décomposition d'un espace vectoriel E en somme directe de certains de ses sous-espaces vectoriels, on peut en déduire d'intéressantes décompositions des vecteurs $\vec{u} \in E$ en somme des vecteurs de certains de ses sous-espaces vectoriels. Le résultat ci-dessous garantit l'absence d'équivoques dans la décomposition des éléments d'un espace vectoriel E comme somme des vecteurs de ses sous-espaces supplémentaires.

Proposition 5.3.4 *:*
si le sous-espace vectoriel F est somme directe des sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 alors l'écriture de tout vecteur $\vec{u} \in F$ comme somme d'un vecteur de F_1 et d'un vecteur de F_2 est unique

Soient, en effet, trois sous-espaces vectoriels K, F_1 et F_2 de E tels que $K = F_1 \oplus F_2$.

Si $\vec{u} \in K$, il existe un vecteur $\vec{u}_1 \in F_1$ et $\vec{u}_2 \in F_2$ tels que :

$$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \tag{5.1}$$

Pour montrer que l'écriture 5.1 est unique, supposons qu'il existe un autre vecteur $\vec{u}_1'$ dans F_1 et un autre $\vec{u}_2'$ dans F_2 tels que :

$$\vec{u} = \vec{u}_1' + \vec{u}_2' \tag{5.2}$$

En combinant les relations 5.1 et 5.2 on obtient :

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{u}_1 + \vec{u}_2 = \vec{u}_1' + \vec{u}_2' \\ &\Rightarrow \vec{u}_1 - \vec{u}_1' = \vec{u}_2' - \vec{u}_2 \end{aligned}$$

Comme $\vec{u}_1 - \vec{u}_1' = \vec{u}_2' - \vec{u}_2$ et $\left\{ \begin{array}{l} (\vec{u}_1 - \vec{u}_1') \in F_1 \\ (\vec{u}_2' - \vec{u}_2) \in F_2 \end{array} \right.$ alors $(\vec{u}_1 - \vec{u}_1') \in F_1 \cap F_2 = \left\{ \vec{O}_E \right\}$ et $(\vec{u}_2' - \vec{u}_2) \in F_1 \cap F_2 = \left\{ \vec{O}_E \right\}$.

Des relations $(\vec{u}_1 - \vec{u}_1') \in \left\{ \vec{O}_E \right\}$ et $(\vec{u}_2' - \vec{u}_2) \in \left\{ \vec{O}_E \right\}$ on déduit que $\left\{ \begin{array}{l} \vec{u}_1' = \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2' = \vec{u}_2 \end{array} \right.$ et par conséquent tout vecteur $\vec{u} \in K$ s'écrit de façon unique comme somme d'un vecteur $\vec{u}_1 \in F_1$ et d'un vecteur $\vec{u}_2 \in F_2$ dès que $K = F_1 \oplus F_2$.

Exercice 5.3.2 *:*
Notons $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dont nous admettons la structure d'espace vectoriel $(\mathcal{F}, +, \times)$ sur le corps $\mathbb{R}$ avec

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad \forall f, g \in \mathcal{F} \quad et \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

,

$$(\alpha f)(x) = \alpha . f(x) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad et \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

.

Considérons $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ les sous-ensembles de $\mathcal{F}$ définis par :

— *$\mathcal{P}$ est l'ensemble des fonctions paires :*

$$\mathcal{P} = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : \quad f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$$

— *$\mathcal{I}$ est l'ensemble des fonctions impaires :*

$$\mathcal{I} = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : \quad f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$$

1. *$\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}$?*

2. *Pour tout **vecteur** $f \in \mathcal{F}$, on définit les fonctions $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par les relations :*

$$p(x) = \frac{1}{2} \times [f(x) + f(-x)], \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad et \quad i(x) = \frac{1}{2} \times [f(x) - f(-x)]$$

   (a) *Montrer que p est paire et i est impaire ;*

   (b) *que constatez-vous en calculant $p + i$?*

3. *Déduire de ce qui précède que $\mathcal{F} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$*

5.4 Bases et dimension

5.4.1 Combinaison linéaire

Considérons $(E, +, \times)$ un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ et $\mathcal{F} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n\}$ une famille de n vecteurs de E.

Définition 5.4.1 *:*
on dit qu'un vecteur $\vec{v}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n$ s'il existe n scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ tels que :

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \cdots + \alpha_n \vec{u}_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{u}_i$$

Définition 5.4.2 *:*
on dit que $\mathcal{F} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n\}$ est une ***famille génératrice*** *de l'espace vectoriel E si chaque élément de $\vec{v} \in E$ est une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}$.*

En d'autres termes, $\mathcal{F} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n\}$ est une famille génératrice de E si :

$$\forall \vec{v} \in E, \quad \exists \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in E : \quad \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{u}_i$$

Proposition 5.4.1 *:*
considérons $\mathcal{F} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n\}$ une famille des vecteurs de E.
L'ensemble $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ des toutes les combinaisons linéaires $\sum_i \alpha_i \vec{u}_i$ des éléments $\vec{u}_i$ de $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de E.

En effet,

1. $\mathcal{L}(\mathcal{F}) \neq \emptyset$ car $\vec{O}_E = 0\vec{u}_1 + 0\vec{u}_2 + \cdots + 0\vec{u}_n = \sum_{i=1}^{n} 0.\vec{u}_i \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$;

2. $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ est stable pour l'addition vectoriel. En effet. soient $\vec{u}$ et $\vec{v} \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$. Il existe alors $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ et $\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que
$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{u}_i \quad \text{et} \quad \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \vec{u}_i$$
$$\begin{aligned} \vec{u} + \vec{v} &= (\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \cdots + \alpha_n \vec{u}_n) + (\beta_1 \vec{u}_1 + \beta_2 \vec{u}_2 + \cdots + \beta_n \vec{u}_n) \\ &= (\alpha_1 + \beta_1)\vec{u}_1 + (\alpha_2 + \beta_2)\vec{u}_2 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)\vec{u}_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i)\vec{u}_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \vec{u}_i \quad \text{avec} \quad \gamma_i = \alpha_i + \beta_i \end{aligned}$$
Comme $\forall \vec{u} = \sum_i \alpha_i \vec{u}_i, \vec{v} = \sum_i \beta_i \vec{u}_i$ on a $\vec{u} + \vec{v} = \sum_i \gamma_i \vec{u}_i$, avec $\gamma_i = \alpha_i + \beta_i$ alors $\vec{u} + \vec{v}$ est également une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}_i$ de $\mathcal{L}(\mathcal{F})$.
La somme $\vec{u} + \vec{v}$ est donc un élément de $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ et donc $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ est stable pour l'addition interne.

3. $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ est stable pour la multiplication externe.

   Considérons, en effet, $\beta \in \mathbb{K}$ et $\vec{u} = \sum_i \alpha_i \vec{u}_i \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$.
$$\beta \vec{u} = \beta \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{u}_i = \sum_{i=1}^{n} (\beta \alpha_i)\vec{u}_i \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$$

Il va de soi que $\mathcal{F} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n\} \subset \mathcal{L}(\mathcal{F})$ car chaque $\vec{u}_i \in \mathcal{F}$ peut s'écrire $\vec{u}_i = 1.\vec{u}_i + 0.\vec{u}_2 + \cdots + 0.\vec{u}_n$.
Considérons $F \supset \mathcal{F}$ un autre sous-espace vectoriel de E contenant $\mathcal{F}$.
Comme F est stable pour l'addition interne et pour la multiplication externe, alors, quels que soient les scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ on a :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{u}_i \in F$$

Ainsi, l'espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ de toutes les combinaisons linéaires des éléments de $\mathcal{F}$ est inclus dans tout sous-espace vectoriel F contenant $\mathcal{F}$.

L'espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ est donc le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $\mathcal{F}$. On l'appelle **sous-espace vectoriel engendré par** $\mathcal{F}$ et on le note souvent par $Vect(\mathcal{F})$ (ou en anglais *span* $(\mathcal{L}(\mathcal{F}))$ pour abréger *subspace spanned by* $(\mathcal{F})$).

Remarque 5.4.1 ($Vect$ **ou** *span*) *:*
Quelle que soit la partie A d'un espace vectoriel E, l'espace vectoriel $Vect(A) = span(A)$ engendré par A est le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient A. Des manières équivalentes, $Vect(A) = span(A)$ peut être conçu par l'une des deux approches suivantes :

1. *$Vect(A) = span(A)$ est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs de A ;*

2. *$Vect(A) = span(A)$ est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E qui contiennent A.*

5.4.2 Familles libres

Considérons $(E, +, \times)$ un espace vectoriel et $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n$ des vecteurs de E.

Si $\vec{u}_{n+1} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \cdots + \vec{u}_n$, il va de soi que :

$$1.\vec{u}_1 + 1.\vec{u}_2 + \cdots + 1\vec{u}_n - 1.\vec{u}_{n+1} = \vec{O}_E \tag{5.3}$$

La relation 5.3 traduit le fait que les scalaires $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \cdots, \alpha_n = 1$ et $\alpha_{n+1} = -1$ permettent d'écrire le vecteur nul $\vec{O}_E$ comme une combinaison linéaire $\vec{O}_E = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{u}_n + \alpha_{n+1}\vec{u}_{n+1}$ des vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n$ et $\vec{u}_{n+1}$.

Le fait d'obtenir une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n$ et $\vec{u}_{n+1}$ qui soit égale au vecteur nul traduit une certaine *dépendance linéaire* des vecteurs $\vec{u}_i$; dépendance qu'on peut exprimer en disant que **la famille** $\mathcal{F} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n, \vec{u}_{n+1}\}$ **est liée** .

En fait, pour des vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n, \vec{u}_{n+1}$ linéairement indépendants, il devrait être impossible d'écrire le vecteur nul $\vec{O}_E$ comme une combinaison linéaire $\vec{O}_E = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \vec{u}_i$ des vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n$ et $\vec{u}_{n+1}$ sauf la combinaison linéaire triviale $\vec{O}_E = 0.\vec{u}_1 + 0.\vec{u}_2 + \cdots + 0.\vec{u}_n + 0.\vec{u}_{n+1}$ pour laquelle tous les scalaires α_i sont nuls .

En formalisant les considérations ci-dessus, on obtient les importantes définitions suivantes :

Définition 5.4.3 *:*
Considérons $\mathcal{F} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n\}$ une famille des vecteurs de E.
*On dit que $\mathcal{F}$ est une **famille libre** ou encore que **les vecteurs** $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n$ **sont linéairement indépendants** si la seule combinaison linéaire $\sum_i \alpha_i \vec{u}_i$ des vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n$ qui est nulle est celle dont tous les scalaires α_i sont nuls.*

En d'autres termes, la famille $\mathcal{F} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n\}$ est libre si :

$$\forall \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}, \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{u}_i = \vec{O}_E \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$

Définition 5.4.4 *:*
*si une famille $\mathcal{F} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n\}$ n'est pas libre, alors elle est dite **liée**. Dans ce cas :*

$$\exists \alpha_i \neq 0 : \quad \sum i = 1^n \alpha_i \vec{u}_i = \vec{O}_E$$

Remarque 5.4.2 (Relation linéaire et relation linéaire triviale) *:*
Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E,
- *toute relation de la forme $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{u}_i = \vec{O}_E$ avec $\alpha_i \in \mathbb{K}$ et $\vec{u}_i \in E$ est appelée **relation linéaire** entre les vecteurs $\vec{u}_i$;*
- *de manière particulière , la relation $0.\vec{u}_1 + 0.\vec{u}_2 + \cdots + 0.\vec{u}_n = \vec{O}_E$ est appelée **relation linéaire triviale**.*

De ce point de vue,

1. *une famille $\mathcal{F} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n\}$ des vecteurs est dite libre s'il n'existe pas, entre les éléments de $\mathcal{F}$, d'autrs relations linéaires à part la relation linéaire triviale.*

2. *Une famille $\mathcal{F} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n\}$ est alors liée s'il existe, entre éléments de $\mathcal{F}$, une relation linéaire non triviale.*

Propriété 5.4.1 *:*
Dans un espace vectoriel E, le système $\mathcal{F} = \{\vec{u}\}$ est :
- *libre si et seulement si $\vec{u}$ est non nul;*
- *liée si et seulement si $\vec{u} = \vec{O}_E$*

En effet, rappelons qu'il résulte des axiomes de définition d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E(voir conséquence 5.2.4 page 102) que quels que soient $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\vec{u} \in E$,

$$\alpha\vec{u} = \vec{O}_E \Rightarrow \alpha = 0 \quad \text{ou} \quad \vec{u} = \vec{O}_E$$

1. Montrons que $\mathcal{F}$ est libre si et seulement si $\vec{u}$ est non nul.
   (a) si $\{\vec{u}\}$ est libre, alors $\forall\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha\vec{u} = \vec{O}_E \Rightarrow \alpha = 0$.

   Comme $\alpha\vec{u} = \vec{O}_E \Rightarrow \alpha = 0$ alors $\vec{u} \neq \vec{O}_E$.

   (b) si $\vec{u} \neq \vec{O}_E$ alors, quel que soit $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha\vec{u} = \vec{O}_E \Rightarrow \alpha = 0$
2. Montrons que $\mathcal{F}$ est liée si et seulement si $\vec{u} = \vec{O}_E$.

   Rappelons d'abord que d'un point de vue logique, les propositions $(p \Longrightarrow q)$ et $(\rceil q \Longrightarrow \rceil p)$ sont équivalentes (principe de contraposition).

   En 1 il est établi que si $\{\vec{u}\}$ est libre alors $\vec{u} \neq \vec{O}_E$. Il en résulte, par contraposition, que
   (a) si $\vec{u} = \vec{O}_E$ alors $\mathcal{F} = \{\vec{u}\}$ est liée.

   Comme en 1 il est également établi que si $\vec{u} \neq \vec{O}_E$ alors $\mathcal{F} = \{\vec{u}\}$ est libre, la contraposition donne également :
   (b) Si $\mathcal{F} = \{\vec{u}\}$ est liée alors $\vec{u} = \vec{O}_E$

Propriété 5.4.2 *: toute famille $\mathcal{F}$ contenant le vecteur nul $\vec{O}_E$ est liée .*

Propriété 5.4.3 *: toute famille $\mathcal{F}'$ contenant une famille liée $\mathcal{F}$ est liée.*

5.4.3 Bases

Définition 5.4.5 *:*
On appelle base d'un espace vectoriel E, toute famille β qui est simultanément libre et génératrice de E

Chapitre 6

Applications linéaires et matrices

Chapitre 7

Systèmes d'équations linéaires