Cours : Théorie et Travaux Pratiques de Mathématiques Générales

Ass. Emmanuel Nyandu Kagarabi

17 avril 2023

Introduction

I. Les mathématiques en sciences économiques et commerciales

Parmi les sciences sociales, l'*économie* est celle qui, de loin, utilise le plus les mathématiques. Ce qui s'explique aisément : l'économiste s'intéresse à *la production et à la répartition des ressources dont dispose la société*. D'où de multiples opérations chiffrées, avec des quantités de biens, des prix et des valeurs. L'activité de l'économiste va de calculs relativement simples comme ceux faits en comptabilité et en calcul actuariel à ceux, plus compliqués, qui ont trait à la recherche d'une affectation efficace des ressources. Les mathématiques fournissent alors des outils qui peuvent aider à parvenir à un objectif défini ; le profit de certains ou le bien être de la collectivité, par exemple ou à extraire de l'information à partir des données disponibles, en mobilisant des techniques comme l'analyse factorielle ou l'analyse discriminante.

Le débat à propos du rôle des mathématiques en *économie* ne porte pas, en fait, sur leur utilisation en tant que moyen de gestion efficace des ressources ou de traitement des données, mais sur les théories qui font appel à elles pour expliquer divers aspects de la vie économique et, si possible, faire des prédictions. Les théories donnent lieu alors à des modèles qui prennent la forme d'un ensemble d'hypothèses ou d'axiomes dont sont déduits des théorèmes ou des résultats mathématiques, que l'économiste transcrit dans son langage et interprète. En effet, plusieurs tendances se sont confrontées en *économie* avant d'arriver au stade actuel. C'est à la suite de ce choc d'idées que les mathématiques sont apparues indispensables à l'étude des phénomènes économiques. Des auteurs mathématiciens et économistes comme Pareto et Baron (1830) se sont servis de l'analyse mathématique dans l'explication des phénomènes de formation de prix d'un bien sur un marché donné.

Au regard de ce qui précède, il est demandé aux étudiants des facultés des **sciences économiques et commerciales** de disposer des notions mathématiques suffisantes ; non seulement puisqu'elles sont indispensables dans leur future carrière mais aussi puisqu'elles les préparent à bien assimiler certains cours liés à l'économie et à la gestion moderne basée sur les notions mathématiques ; tel est le cas de l'*économétrie*.

II. Objectifs spécifiques

A la fin de ce cours, l'étudiant sera capable de (d') :

* Effectuer des opérations sur les matrices et les appliquer à la résolution des systèmes d'équations linéaires et d'autres problèmes en économie.
* Etudier et construire dans un répère orthonormé le graphique ou la courbe d'une fonction en respectant les différentes étapes et traiter les cas particuliers des fonctions

logarithmiques et exponentielles, leurs applications et résoudre quelques problèmes liés aux suites numériques.

* Calculer la dérivée d'une fonction à une ou deux variables et l'appliquer à la résolution des problèmes d'optimisation, d'économie et de gestion (concepts marginaux, elasticités,...)
* Appliquer le calcul différentiel et intégral à la résolution de certains problèmes mathématiques et économiques (calcul du surplus du consommateur et du producteur dans une entreprise donnée).

III. Déroulement du cours

Le présent syllabus ne vient pas remplacer la théorie enseignée récemment par le professeur mais plutôt, il s'agit de la completer et l'appliquer via une multitude d'exercices. Le contenu de ce support que nous allons exploiter est celui enseigné au département des sciences commerciales et administratives de l'Isp-bukavu par le Ct Kakulu Djambilay James Pascal à qui nous rendons hommage.

Le cours se déroulera à l'auditoire [1] et son syllabus sera mis gratuitement à la disposition de chacun afin de le photocopier. Néanmoins, pour faciliter l'assimilation, les étudiants seront invités à prendre des notes manuscrites (écrites au Tableau Noir) en complément au syllabus prévu.

Par ailleurs, certains manuels de base figurent dans la bibliographie et sont recommandés à chacun pour une compréhension optimale [2].

Certains passages de ce cours n'ont pas, expressément, été explicités et comportent éventuellement des *trous*. C'est pourquoi nous y travaillerons en grande partie à l'auditoire et je serai reconnaissant à toute personne me signalant une ou des erreurs se trouvant dans ce module. De ce fait, il sied de signaler que la présence aux cours à l'auditoire s'avère obligatoire.

Pour clore, signalons que les séances des travaux pratiques et les évaluations seront faites des exemples et exercices disponibles dans ce syllabus et la bibliographie connexe. A présent, aux studieux et travailleurs, nous disons, au travail et bon courage à tous !!!.

Ass. Emmanuel Nyandu Kagarabi

1. "J'écoute pour oublier, je vois pour me souvenir et je fais pour comprendre". Proverbe Chinois.
2. "En mathématiques, on ne comprend pas les choses, on s'y habitue". John Von Neuman.

BIBLIOGRAPHIE

1. Alphac CHIANG, Fondamental methods of mathematical economics, fourth edition; Mic Graw-Hill, 2005
2. BAIR J & Cie. Applications économiques au service de la mathématique. 1989. SBPM
3. Beaujolais BOFOYA, Mathématiques pour économistes cours et exercices résolus, université de Kinshasa, 2007.
4. Carl P. SIMON, Mathématiques pour économistes. De Boeck, 2014.
5. Edward T., Mathematics for economists, Mc Graw w-Hill, 1972
6. François Collet, Analyse 2 Calcul différentiel, intégrales multiples, séries de Fourier, 2006
7. MUIBUDULU K. Initiation aux modèles, méthodes et pratiques de la recherche opérationnelle, 2e édition. Edition CRSAT 2007
8. Olivier FERRIER, Maths pour économistes. L'analyse en économie. Volume 2 : Fonctions de plusieurs variables. De Boeck 2003.
9. Philippe et Robert, Analyse mathématique pour Gestionnaires et économistes, Presses de l'ACUAC, 2006
10. Quinet J, Cours élémentaire de mathématique supérieures, Dunod, Paris, Tome 3, 1964
11. Stewart, Analyse concepts et contextes. Volume 1 : Fonction d'une variable. De Boeck 2001
12. Stewart, Analyse concepts et contextes. volume 2: Fonctions de plusieurs variables, 2e Edition, De Boeck, 2006.
13. W. Nichdson, Microeconomic theory Basic principles and extensions, Tenth edition, Thomson 2008

Chapitre premier
ELEMENTS DE CALCUL MATRICIEL

1.1 Définition.

Une matrice est, d'une manière générale, un tableau rectangulaire à "m" lignes et "n" colonnes (m et n étant deux entiers positifs arbitraire), comprenant m x n coefficients scalaires. Nous noterons les matrices par des lettres A, B, C. les coefficients de ces matrices seront notés a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, i = 1, 2,...n; j = 1, 2,...n. Pour désigner un élément quelconque d'une matrice A, par exemple, qui se trouve dans la i-ème ligne et j-ième colonne, on écrit a_{ij}. Ainsi, l'élément a_{23} se trouve à la ligne 2 et à la colonne 3.

Exemples 1.1 : $B = [b_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Exemple 1.2 : Matrice des coûts de transport (en $) de Kinshasa à Matadi par Train Express Deuxième classe, 1997.

	Kinshasa	Kisantu	Kwilu-Ngongo	Kimpese	Matadi
Kinshasa	-	5	8	9	15
Kisantu	5	-	3	4	10
Kwilu-Ngongo	8	3	-	2	7
Kimpese	9	4	2	-	6
Matadi	15	10	7	6	-

Source : ONATRA, Département du Chemin de Fer

Le nombre des lignes (*m*) et celui des colonnes (*n*) déterminent le **format** ou la **dimension** de la matrice. S'il y a "m" lignes et "n" colonnes, le format ou la dimension de la matrice est ***m fois n*** qu'on écrit **mxn**. Si le nombre de lignes est égal au nombre de colonnes, la matrice est dite **carrée**. Dans ce cas, m = n. On dira simplement que la matrice est **d'ordre n.** Si le nombre de lignes ***m*** est supérieur au nombre de colonnes ***n***, la matrice est dite **haute** ; dans le cas contraire elle sera dite **large**.

Si la matrice se compose d'une seule ligne et a la dimension ***m x 1***, c'est un **vecteur ligne**. Si elle se compose d'une seule colonne, sa dimension est ***1 x n*** et elle peut être appelée **vecteur colonne**.

La matrice B de l'exemple 1.1 est une matrice large ; celle de l'exemple 1.2 est carrée. La matrice C ci-après est haute. $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Exemple 1.3. :

La Société commerciale de Kinshasa (SCK), propriétaire de 4 magasins a en stock 120 sceaux (S), 110 brouettes (B), 90 Chaises métalliques (C) et 150 fûts en plastic (F) dans le magasin 1, 200 S, 180 B, 200 C et 110 F dans le magasin 2, 175 S, 190 B, 160 C et 80 F dans le magasin 3, 140 S, 170 B, 180 C et 140 F dans le magasin 4. Le tableau ci-après enregistre les stocks (St) des différents produits dans les quatre magasins.

	Produits			
Magasins	S	B	C	F
1	120	110	90	150
2	200	180	200	110
3	175	190	160	140
4	140	170	180	140

Il est également possible de représenter lesdits stocks dans une matrice de la forme :

$$S_0 = \begin{bmatrix} 120 & 110 & 90 & 150 \\ 200 & 180 & 200 & 110 \\ 175 & 190 & 160 & 140 \\ 140 & 170 & 1680 & 140 \end{bmatrix}$$

Le nombre des lignes et celui des colonnes déterminent le **format** ou la **dimension** de la matrice. S'il y a "m" lignes et "n" colonnes, le format ou la dimension de la matrice est ***m fois n*** qu'on écrit **mxn**. Si le nombre de lignes est égal au nombre de colonnes, la matrice est dite **carrée**. Dans ce cas, m = n. On dira simplement que la matrice est **d'ordre n.** Si le nombre de lignes ***m*** est supérieur au nombre de colonnes ***n***, la matrice est dite **haute** ; dans le cas contraire elle sera dite **large**.

La matrice B de l'exemple .1 est une matrice large ; celle de l'exemple 2.2 est carrée. La matrice C ci-après est haute. $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

1.2 Matrices particulières

1.2.1. Matrice diagonale

Une matrice carrée $A = [a_{ij}]$ est dite une matrice diagonale si $a_{ij} = 0$ pour tout $i \neq j$ et $a_{ij} \neq 0$ pour au moins un $i = j$.

Une matrice diagonale est égale à sa transposée.

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

1.2.2. Matrice nulle

Une matrice dont tous les éléments sont nuls est une matrice nulle.

1.2.3. Matrice scalaire

C'est une matrice diagonale dont tous les éléments sur la diagonale principale sont égaux.

$$E = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

1.2.4. Matrice unité ou matrice identité.

C'est une matrice diagonale dont tous ses éléments sur la diagonale principale sont égaux à 1.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.2.5. Matrice symétrique

C'est une matrice égale à sa transposée : $M = (a_{ij}) = M'$ où $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout i, j.
On dit que les éléments symétriques par rapport à la diagonale principale sont égaux.

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

1.2.6. Matrice antisymétrique

C'est une matrice égale à l'opposée de sa transposée : $M = (a_{ij}) = -M'$, où $a_{ij} = -a_{ji}$ pour tout i,j. On dit que les éléments symétriques par rapport à la diagonale principale sont opposés. Cela suppose que les a_{ii} (ou a_{jj}) sont nuls.

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -3 & 0 & 6 \\ 4 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

1.2.7. Matrice triangulaire

Une matrice carrée A est dite **triangulaire** si tous les éléments au dessus ou en dessous de la diagonale principale sont nuls.

- $A = (a_{ij})$ est une matrice ***triangulaire supérieure*** si $a_{ij} = 0$, pour tous les éléments en dessous de la diagonale principale. C'est donc une matrice telle que $a_{ij} = 0$ pour tout $i > j$.
- $B = (b_{ij})$ est une matrice ***triangulaire inférieure*** si $b_{ij} = 0$ pour tous les éléments au dessus de la diagonale principale. C'est donc une matrice telle que $b_{ij} = 0$ pour tout $i < j$.

$$H = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & -8 & 4 \end{bmatrix}$$

H est une matrice triangulaire supérieure et J est une matrice triangulaire inférieure.

1.3 Opérations sur les matrices

1.3.1 Addition ou soustraction des matrices

Soient A et B deux matrices de même dimension, c'est-à-dire, ayant le même nombre de lignes (m) et de colonnes (n). La somme (ou la soustraction) de A et B, écrite A + B (ou A - B), est la matrice obtenue en additionnant (ou soustrayant) deux à deux les éléments occupant les mêmes places dans A et B. Ainsi,

$$A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] = [c_{ij}]$$

$A_{m \times n} + B_{m \times n} = C_{m \times n}$

$A - B = [a_{ij}] - [b_{ij}] = [a_{ij} - b_{ij}] = [c_{ij}]$

L'addition des matrices n'est donc définie que pour des matrices de même format ou ordre.

Exemple 1.4 :

La Société mère de l'exemple 1.3 effectue les livraisons L à ses magasins $L = \begin{bmatrix} 40 & 20 & 50 & 10 \\ 25 & 30 & 10 & 60 \\ 15 & 0 & 40 & 70 \\ 60 & 40 & 10 & 50 \end{bmatrix}$.

Que deviennent les stocks ?

Réponse :

Pour trouver le nouveau stock S_1, nous calculons $S_0 + L$ et obtenons :

$$S_1 = S_0 + L = \begin{bmatrix} 120 & 110 & 90 & 150 \\ 200 & 180 & 210 & 110 \\ 175 & 190 & 160 & 80 \\ 140 & 170 & 180 & 140 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 40 & 20 & 50 & 10 \\ 25 & 30 & 10 & 60 \\ 15 & 0 & 40 & 70 \\ 60 & 40 & 10 & 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 160 & 130 & 140 & 160 \\ 225 & 210 & 220 & 170 \\ 190 & 190 & 200 & 150 \\ 200 & 210 & 190 & 190 \end{bmatrix}.$$

Propriétés de l'addition des matrices.

a) $A + B = B + A$ (l'addition des matrices est commutative).
b) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (l'addition est associative).
c) $A + 0 = 0 + A = A$ (la matrice nulle 0 est l'élément neutre)
d) $A + (-A) = 0 = (-A) + A$ (la matrice opposée est l'élément symétrique)

Un état hebdomadaire des ventes (V) de la SCK de l'exemple 1.3 révèle que

$V = \begin{bmatrix} 100 & 90 & 110 & 60 \\ 125 & 190 & 150 & 80 \\ 10 & 80 & 20 & 30 \\ 70 & 130 & 90 & 80 \end{bmatrix}$. Quel niveau ont les stocks (S_2) en fin de la semaine ?

$$S_2 = S_1 - V = \begin{bmatrix} 160 & 130 & 140 & 160 \\ 225 & 210 & 220 & 170 \\ 190 & 190 & 200 & 150 \\ 200 & 210 & 190 & 190 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 100 & 90 & 110 & 60 \\ 125 & 190 & 150 & 80 \\ 10 & 80 & 20 & 30 \\ 70 & 130 & 90 & 80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 & 40 & 30 & 100 \\ 100 & 20 & 70 & 90 \\ 180 & 110 & 180 & 120 \\ 130 & 80 & 100 & 110 \end{bmatrix}.$$

1.3.2 Multiplication par un scalaire.

Si k est un scalaire (un nombre réel quelconque qui n'est pas considéré comme une matrice ayant une seule ligne et une seule colonne), et A est une matrice de format quelconque, le produit k par A, noté kA, donne une nouvelle matrice obtenue en multipliant par k chaque élément de la matrice A. On a donc : $\mathbf{kA = k[a_{ij}]}$

Exemple 1.5 : Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Si k = 2, alors $kA = 2\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

Propriétés de la multiplication scalaire

a) $kA = Ak$
b) $k(A + B) = kA + kB$
c) $(k + l)A = kA + lA$
d) $(kl)A = k(lA)$
e) $(-1)A = -A$
f) $A + (-1)B = A - B$

1.3.3 Multiplication matricielle

Nous avons vu que pour l'addition des matrices, il faut une condition de possibilité, à savoir que les matrices soient du même ordre. **Si l'on veut calculer le produit de deux matrices A et B, soit AB, il faut que le nombre de colonnes de la première matrice A soit égal au nombre de lignes de la deuxième matrice, B.**

Soient A de dimension *m x n* et B de dimension *n x p*. Le produit AB, qui est possible, est une nouvelle matrice, disons C, de dimension *m x p*. C aura donc le même nombre de lignes que la première matrice et le même nombre de colonnes que la deuxième matrice. Les termes de la matrice $C_{mp} = A_{mn}B_{np}$ où $C = [c_{ij}]$ ($i = 1,2,...., m$; $j = 1, 2,...., p$) s'obtiennent en multipliant les éléments de la ligne i de A par les éléments correspondants de la colonne j de B et en additionnant les résultats (l'élément c_{ij} est le produit scalaire de la ligne de A par la colonne de B). On écrit :

$$[c_{ij}] = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

Exemple 1.6 : Considérons les matrices $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$. Alors

$$AB = \begin{bmatrix} 5(0)+6(1) & 5(2)+6(7) \\ 1(0)+3(1) & 1(2)+3(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 52 \\ 3 & 23 \end{bmatrix} \text{ et BA } = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 12 & 27 \end{bmatrix}.$$

Le produit AB n'est pas égal en général au produit BA en général, même si les deux remplissent la condition de possibilité de l'opération. Il est donc essentiel d'indiquer l'ordre voulu de la multiplication, en utilisant les concepts de **pré-multiplication** et de **post-multiplication**.

Le produit matriciel AB signifie que la matrice A est post-multipliée par la matrice B ou que la matrice B est prémultipliée par A.

Exemple 1.7 :

Trois entreprises industrielles A, B et C doivent acheter deux types de matière première M et N. A commande 7 tonnes de M et 4 tonnes de N. B commande 8 tonnes de M et 6 tonnes de N et C commande 5 tonnes de M et 2 de N. Il est reconnu par les trois entreprises qu'avec une tonne de M, on peut produire 0,75 tonne d'un produit fini P et 0,2 tonnes d'un produit fini Q; de même, une tonne de N permet de fabriquer 0,5 tonne de P et 0,1 tonne de Q.

A l'aide du calcul matriciel, déterminer les quantités de P et Q que les trois entreprises doivent espérer produire à partir de leurs commandes.

Réponse :
Formons une matrice de dimension 3 par 2 avec en colonnes les quantités de M et N et en lignes ce qu'utilisent les trois industriels. Soit A = $\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 8 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$. Multiplions-la ensuite par une matrice 2 par 2, B = $\begin{bmatrix} 0{,}75 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}1 \end{bmatrix}$ où les colonnes représentent les quantités de P et Q et les lignes ce qu'une tonne de M et N permet de produire. Nous obtenons ainsi une matrice de dimension 3 par 2 C nous indiquant les quantités de P et Q que chacune de ces trois entreprises peuvent espérer produire. Matriciellement, cela donne :

$$C = AB = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 8 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}75 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7(0{,}75)+4(0{,}5) & 7(0{,}2)+4(0{,}1) \\ 8(0{,}75)+6(0{,}5) & 8(0{,}2)+6(0{,}1) \\ 5(0{,}75)+2(0{,}5) & 5(0{,}2)+2(0{,}1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5{,}25+2 & 1{,}4+0{,}4 \\ 6+3 & 1{,}6+0{,}6 \\ 3{,}75+1 & 1+0{,}1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7{,}25 & 1{,}8 \\ 9 & 2{,}2 \\ 4{,}75 & 1{,}1 \end{bmatrix}.$$

Ainsi A produit 7,25 tonnes de P et 1,8 tonnes de Q ; B produit 9 tonnes de P et 2,2 tonnes de Q et C produit 4,75 tonnes de P et 1,1 tonne de Q.

Propriétés du produit matriciel

(a) A(B + C) = AB + AC (distributivité à droite par rapport à l'addition).
(A+B)C = AC + BC (distributivité à gauche par rapport à l'addition).
(b) A(BC) = (AB)C (associativité)
(c) AB $\neq$ BA en général (non commutativité)
(d) k(AB) = A(kB)
(e) A0 = 0A = 0 (le produit de A avec une matrice nulle est égal à une matrice nulle)
(f) $I_{n\,x\,n}\,A_{n\,x\,n} = A_{n\,x\,n} = A_{n\,x\,n}\,I_{n\,x\,n}$
(g) II = I
(h) 00 = 0

1.4 Transpositions des matrices

Par définition, la matrice transposée d'une matrice A de format *m x n*, que l'on note A^t ou A', est la matrice de format *n x m* obtenue en permutant les lignes et les colonnes de A.

Exemple 1.8 : Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 6 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, alors $A^t = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Propriétés

1) La transposée de kA est égale à $k(A^t)$:
$(kA)^t = kA^t$
2) La transposée de la transposée d'une matrice est cette matrice elle-même
$(A^t)^t = A$

3) La transposée d'une somme de deux matrices de même dimension est égale à la somme des transposées
   $(A + B)^t = A^t + B^t$
4) La transposée du produit de deux matrices est égale au produit des matrices transposées effectué en ordre inverse
   $(AB)^t = B^t A^t$

Exemple 1.9 : Soient deux matrices A = $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ et B = $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}$

Nous avons d'une part :

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+9 & 0-6 & -4+18 \\ 4-6 & 0+4 & -8-12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -6 & 14 \\ -2 & 4 & -20 \end{bmatrix}$$

D'autre part :

$$B'A' = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+9 & 4-6 \\ 0-6 & 0+4 \\ -4+18 & -8-12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -2 \\ -6 & 4 \\ 14 & -20 \end{bmatrix}$$

Il est clair que $(AB)^t = B^t A^t$.

1.5 Trace d'une matrice

La **trace** d'une matrice carrée A_{nxn} est la somme de tous les éléments de la diagonale principale.

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Exemple 1.10 : Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$, alors sa trace est égale à 2 + 8 = 10

Propriétés

tr(I) = n,
tr(0) = 0
tr(A') = tr(A)
tr(AA') = tr(A'A) = $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$
tr(kA) = k tr(A)
tr(AB) = tr(BA)
tr (A + B) = tr(A) + tr(B)
tr (ABC) = tr (BCA) = tr (CAB)
tr (X'AX) = tr (AXX') = tr (A)

1.6 Matrices écrites sous une forme échelonnée ou canonique en ligne

Une matrice A est dite écrite sous une *forme échelonnée en ligne* ou être *sous forme échelon* si le nombre de zéros qui précèdent le premier élément non nul de chaque ligne augmente de ligne en ligne. Lorsqu'une ligne est composée uniquement de zéros, celles qui suivent le sont également.

En d'autres termes, une matrice A = $[a_{ij}]$ est une *matrice échelonnée* ou une encore une *matrice échelon* si ses éléments $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{rj_r}$ où $j_1 < j_2 \dots < j_r$ sont différents de zéro et si $a_{ij} = 0$

pour i ≤ r (j < j_i) et pour i > r. Les éléments $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \ldots, a_{rj_r}$, qui sont les premiers éléments non nuls de leurs lignes respectives, sont appelés **éléments distingués** ou **pivots de la matrice échelon**.

Une matrice échelon qui, de plus, obéit aux deux conditions suivantes est dite **écrite sous forme canonique en lignes** :

- chaque pivot est égal à 1 ;
- chaque pivot est le seul élément non nul de la colonne où il se trouve.

Exemple 1.11 : Les matrices A, B, C, D, E et F sont des matrices échelon. De plus, F est sous forme canonique en ligne.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{et } F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.7 Transformations élémentaires.

Il y a trois types de transformations élémentaires :

1. l'échange de deux lignes de la matrice (ou de deux colonnes) ;
2. la multiplication de tous les éléments d'une ligne (ou colonne) de la matrice par la même constante (différente de zéro) ;
3. l'addition aux éléments d'une ligne de la matrice d'un multiple quelconque des éléments correspondants d'une autre ligne (de même pour les colonnes).

1.8 Rang des matrices

Considérons une matrice A de dimension (m x n). Le rang-ligne de A est le nombre de vecteurs lignes linéairement indépendants de cette matrice. Le rang-colonne d'une matrice A est le nombre de vecteurs colonnes linéairement indépendants de cette matrice.

Comme le rang ligne d'une matrice est toujours égal à son rang-colonne, on parlera du rang tout court. Pour calculer le rang d'une matrice, il suffit de considérer les vecteurs lignes ou les vecteurs colonnes de A et de calculer le nombre de vecteurs linéairement indépendants par la méthode des vecteurs échelonnés.

Exemple 1.12 : Calculer le rang ligne et le rang colonne de la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -4 & 3 \end{bmatrix}$

Considérons d'abord les vecteurs lignes de A et transformons-les en vecteurs échelonnés. Il vient :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -4 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

L'2 = -2L1+ L2
L'3 = L3 – 3L1

L''3 = 4L'3 – 5L'2

Il y a trois vecteurs lignes linéairement indépendants. Le rang ligne est donc égal à 3.

Considérons à présent les vecteurs colonnes de A et transformons-les en vecteurs échelonnés en utilisant les mêmes combinaisons que précédemment. Il vient :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -3 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Le rang colonne est aussi égal à 3. On observe que le rang ligne est égal au rang colonne.

Exemple 1.13 : Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \\ -3 & -9 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}$. Son rang = 1 car la matrice ne contient qu'une ligne linéairement indépendante. En effet, on peut obtenir une des lignes à partir de trois autres.

Propriétés du rang des matrices

1. Le rang d'une matrice A de format (m x n) est inférieur ou égal à son nombre de lignes m et à son nombre de colonnes n. Si r est le rang de A, on écrit :

   $\mathbf{r(A) \leq \min (m, n)}$

   S'il est égal à ce minimum, le rang sera dit **maximum** ou **complet**.

2. On ne modifie pas le rang d'une matrice en permutant les lignes ou les colonnes de la matrice.

   En effet, permuter les lignes (les colonnes) de A revient à modifier l'ordre des vecteurs lignes (vecteurs colonnes) de A. Ce qui ne modifie pas leur rang.

3. Si A et B sont de même ordre, $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$
4. Si A est diagonale, r(A) est égal au nombre d'éléments non nuls
5. Si A est idempotente, $r(A) = tr(A)$

Une matrice carrée d'ordre 'n' est dite **non-singulière** si son rang est maximum ($r(A) = n$). Dans ce cas, $|A| \neq 0$

1.9 Les déterminants

La notion de déterminant est indispensable pour étudier les matrices, les équations linéaires, l'Algèbre linéaire en général. L'économiste l'utilise notamment pour calculer les valeurs propres d'une matrice, pour chercher les conditions du deuxième ordre relatives à un extremum d'une fonction de plusieurs variables, etc.

1.9.1 Définition

Le déterminant d'une matrice carrée est un scalaire (un nombre) obtenu des éléments d'une matrice en effectuant des opérations spécifiques.

Par définition, un déterminant de la matrice carrée A, que l'on note $|A|$ ou dét A = $|a_{ij}|$ avec i, j = 1,2,…,n, est une somme algébrique de n ! termes, chaque terme étant choisi en faisant le produit de n éléments de la matrice choisis de façon à ce qu'il n'y ait pas deux éléments qui appartiennent à la même ligne ou à la même colonne, le tout affecté d'un signe positif ou négatif selon que le nombre d'inversions dans l'ordre de j (après qu'on ait arrangé l'ordre de i dans les termes des produits de façon ascendante) est pair ou impair.

1.9.2 Méthode de calcul des déterminants

1.9.2.1 Déterminant d'ordre 1

Soit $A = [a_{11}]$. Il est clair que $|A| = a_{11}$.

1.11.2.2. Déterminant d'ordre 2

Soit la matrice d'ordre 2 A= $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$. On a : $\mathbf{|A| = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$.

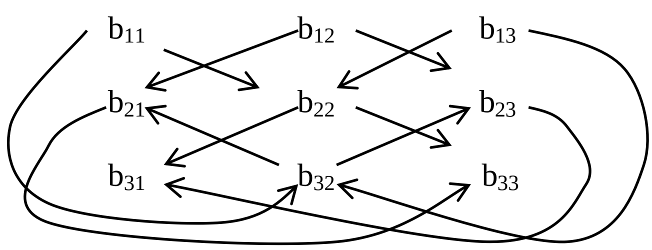
Nous avons bien la somme de 2 ! = 2 termes, chaque terme étant lui-même le produit de 2 éléments de A n'appartenant ni à la même ligne, ni à la même colonne.

La règle de calcul est donc la suivante : on effectue le produit de la diagonale principale dont on retranche le produit de la deuxième diagonale.

1.9.2.3. Déterminant d'ordre 3

Considérons une matrice B de dimension 3x3. B = $\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$. On a :

$$\mathbf{|B| = b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{32}b_{21} - b_{31}b_{22}b_{13} - b_{32}b_{23}b_{11} - b_{33}b_{21}b_{12}}\ .$$



La figure ci-dessus illustre une méthode alternative de calcul d'un déterminant d'ordre 3. Pour trouver le déterminant de A, on multiplie simplement chacun des trois éléments de la première ligne par les éléments auxquels ils sont reliés par la ligne en trait plein et on ajoute leurs produits. On multiplie ensuite chacun de ces trois mêmes éléments de la première ligne par les deux éléments auxquels ils sont connectés par une ligne en pointillé et on soustrait la somme de leurs produits du total précédent.

En utilisant cette règle, on se rend compte que par exemple le déterminant d'une matrice d'ordre 4 est la somme algébrique de 4 ! termes ; celui d'une matrice 5x5 est la somme algébrique de 5 ! =120 termes.

Pour une matrice carrée d'ordre 3, le calcul du déterminant s'effectue par la règle dite **de SARRUS** que nous décrivons ci-après :

- On recopie les deux premières colonnes de A à la droite de A. Les 3 diagonales descendantes donnent lieu aux permutations paires ; les 3 diagonales ascendantes aux permutations impaires.
- La valeur du déterminant est donc égale à la somme du produit des 3 diagonales

descendantes dont on retranche la somme du produit des trois diagonales ascendantes.

- On peut aussi recopier les deux premières lignes de A en dessous de la matrice A et suivre un raisonnement identique pour calculer le déterminant.

Exemples 1.15 :

1. Si A= $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$, alors $|A|$ = 3 + 12 = 15.

2. Si B = $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $|B|$ = 12 + 0 = 12.

3 Avec C = $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, $|C|$ = 5 + 0 + 8 – 3 – 0 – 30 = -20

4. Soit A = $\begin{bmatrix} k & k \\ 4 & 2k \end{bmatrix}$, calculer les valeurs de k telles que $|A| = 0$.

$|A|$ = 2k² - 4k = 2k(k - 2) = 0. D'où k = 0 et k = 2.

1.9.2.4. Déterminant d'ordre n quelconque.

Il n'y a pas de règle particulière pour le calcul des déterminants d'ordre 4 et plus. Ceux-ci doivent être déterminés soit à partir de la définition, soit à partir du développement en cofacteurs d'une ligne ou d'une colonne

Pour une matrice A d'ordre n par exemple, **le déterminant est égal à la somme des produits obtenus en multipliant les éléments d'une ligne (ou d'une colonne) par leurs cofacteurs respectifs notés A_{ij}.** Soit :

$$\textbf{Dét A} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{ij}$$

si l'on développe le déterminant suivant les éléments de ligne i ou

$$\textbf{Dét A} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{1j}A_{ij}$$

si l'on développe le déterminant suivant les éléments de colonne j.

Notez que $A_{ij} = (-1)^{i+j}\ |M_{ij}|$

où $|M_{ij}|$, le mineur de l'élément a_{ij}, est le déterminant de la sous-matrice de dimension n-1 x n-1 obtenue de A en supprimant la ligne i et la colonne j.

Il s'ensuit que les signes + et – interviennent dans le calcul d'une manière alternative. Les cofacteurs associés aux différents éléments a_{ij} forment un échiquier. La diagonale principale est affectée uniquement de signes +.

La méthode des cofacteurs permet de trouver la valeur du déterminant d'ordre n à l'aide de déterminants d'ordre (n -1) . On a toujours intérêt à développer un déterminant des lignes ou des colonnes où apparaissent beaucoup de zéros. On peut toujours se ramener à ce cas en ajoutant à des lignes ou des colonnes des multiples d'une autre ligne ou colonne, ce qui ne change pas la valeur du déterminant.

Exemple 1.16 : Soit à calculer le déterminant de la matrice A = $\begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{bmatrix}$.

Développons $|A|$ selon les éléments de la première ligne. Nous avons :

$$|A| = 2\begin{vmatrix} -3 & 2 & -5 \\ 3 & -2 & 2 \\ -6 & 4 & 3 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} -2 & 2 & -5 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -2 & -3 & -5 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -6 & 3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & -6 & 4 \end{vmatrix}$$

$= 2(0) – 5(8) – 3 (-12) + 2(0) = -4.$

Comme dit plus haut, on peut, en ajoutant à des lignes des multiples d'une autre ligne, une nouvelle matrice contenant beaucoup de zéros dans une colonne et calculer ensuite le déterminant en développant cette dernière.

Ainsi, on a :

$$\left.\begin{matrix} L_1 - 2L_3 \\ L_2 + 2L_3 \\ L_3 \\ L_4 + L_3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -1 & 1 & -6 \\ 3 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1\left[(10+3-36)-(-36+2+15)\right] = -4$$

Par ailleurs, notons que la somme des produits d'une ligne (ou une colonne) par les cofacteurs correspondants d'une autre ligne (ou colonne) est zéro, c'est-à-dire,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = 0, \quad i \neq k.$$

1.9.3 Propriétés des déterminants

1. Soit A une matrice carrée et A' sa transposée. Alors $|A| = |A'|$.
2. Toute matrice carrée A dont une ligne ou une colonne est composée uniquement de zéros admet un déterminant nul, c'est-à-dire, $|A| = 0$.
3. Considérons une matrice carrée A et la matrice B obtenue en permutant deux colonnes (ou deux lignes) de A. Nous avons $|A| = -|B|$.
4. Si une matrice carrée A a deux colonnes (ou deux lignes) identiques ou proportionnelles, c'est-à-dire linéairement dépendantes, $|A| = 0$.
5. Soit A une matrice carrée et B la matrice obtenue en multipliant une ligne ou une colonne de A par un scalaire k, nous avons : $|B| = k\,|A|$.
6. Si l'on multiplie toutes les lignes (ou colonnes) d'une matrice carrée A par un scalaire k, la valeur du déterminant sera multipliée par k^n, soit, $|kA| = k^n\,|A|$.
7. Le déterminant d'une matrice triangulaire ou d'une matrice digonle est égal au produit des

éléments de sa diagonale principale. $|A| = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

8. Le déterminant d'une matrice carrée A ne change pas si on ajoute un multiple quelconque d'une ligne (ou d'une colonne) à une autre ligne (ou colonne). Si B est la matrice obtenue de A en ajoutant un multiple quelconque d'une ligne (ou d'une colonne) à une autre ligne (ou colonne) de A. Alors $|B| = |A|$.
9. Si une matrice carrée A est de rang maximum, alors son déterminant est différent de zéro.
10. Le déterminant du produit de deux matrices A et B est égal au produit des déterminants de A et de B. Soit, $|AB| = |A|\ |B|$.
11. Le déterminant de la somme algébrique de deux matrices A et B **n'est pas généralement** égal à la somme algébrique des déterminants de A et de B. $|A + B| \neq |A| + |B|$ en général..
12. Si une matrice A est idempotente, alors son déterminant est égal à 0 ou 1.
13. La seule matrice idempotente non singulière (dont le déterminant est différent de 0) est la matrice unité I.

Exemples 1.17 :

1. Si A = $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$, $|A|$ = -19 et $|A'| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ = -19.

2. Soit k = 3 et A, la matrice donnée plus haut. Alors, d'après la propriété 5,

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 6 & 0 & -1 \\ -3 & 4 & -2 \end{bmatrix}, |B| = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 6 & 0 & -1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 3\,|A| = -57$$

La première colonne de A a été multipliée par 3.

3. En permutant les lignes 2 et 3 de A, on a, d'après la propriété 3, :

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -1 & 4 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 19 \qquad = -\,|A|$$

4. D'après la propriété 8, on a : $|C| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 8 & -3 \\ -1 & 4 & -2 \end{vmatrix}$ = -19 = $|A|$

La ligne 2 de C est égale à la ligne 2 de A plus deux fois la ligne 3 de A.

5. Si A = $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$, alors $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \end{vmatrix}$ = 0 (Propriété 2).

6. Si A = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$, alors $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0$ (Propriété 4).

7. Si A = $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ et B = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, alors $|AB| = \begin{vmatrix} 5 & -6 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 11 & -8 & -8 \end{vmatrix}$ = -38

$|A|$ = -19 et $|B|$ =2. Il vient $|AB|$ = -38 = $|A|$ $|B|$ = -19(2). (Propriété 10).

8. Si A = $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $|A|$ = -12

Le produit des éléments diagonaux, en vertu de la propriété 7.

9. Soit A = $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\quad alors\ |A| = 8. \quad Mais\ si\ A^* = \begin{bmatrix} 0{,}01 & 0{,}03 & 0{,}02 \\ 0 & 0{,}05 & 0{,}04 \\ 0{,}01 & 0{,}01 & 0{,}02 \end{bmatrix}$,

$|A^*| = \left(\frac{1}{100}\right)^3 |A| = \frac{8}{10^6} = 0{,}000008$ (Propriété 6).

10. Soit A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, $et\ B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. A + B = $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ $|A|$ = 1 ; $|B|$ = 8 et $|A + B|$ = 23.

11. Soit A = $\begin{bmatrix} 3+5 & 3+2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$. Alors $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = (24-9)+(40-6) = 49.$

1.10 Inverse d'une matrice carrée.

1.10.1 *Définition*

Soit Aune matrice carrée et B une autre matrice carrée du même ordre que A. On dit que B est l'inverse de A si AB = BA = I_n.

L'inverse de A, noté $\mathbf{A^{-1}}$, n'existe que si A est une matrice carrée de rang maximum. Cet inverse est unique.

1.10.2 Propriétés des matrices inversibles

1. Si A est une matrice inversible, sa transposée A’ est inversible et on a :
   $(A^{-1})' = (A')^{-1}$
2. Si A et B sont non - singulières (ou régulières) et de même format, leur produit AB est inversible et on a :

   $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
3. L’inverse de l’inverse de A est la matrice A elle-même.
   $(A^{-1})^{-1} = A$ (3.3)

4. Le déterminant de l'inverse d'une matrice est égal à l'inverse de son déterminant.

$$\text{dét}\,(A^{-1}) = \frac{1}{dét\ (A)} \qquad (3.4)$$

1.10.3 Inversion des matrices carrées.

Deux méthodes permettent de calculer l'inverse d'une matrice carrée donnée, à savoir :

- la méthode classique (par l'adjointe) ;
- la méthode itérative (la méthode Gaussienne).

1.10.3.1. Méthode classique (ou méthode par l'adjointe)

Une matrice adjointe est définie comme la transposée de la matrice des cofacteurs de A. Elle sera notée « Adj A » ou « Ã » qui se lit A tilde.

Nous savons déjà que :

$$A\tilde{A} = |A|..I\ .$$

Si $|A|. \neq 0$, la division des deux membres de cette dernière par $|A|$ donne $A.\frac{1}{|A|}.\tilde{A} = I$. Donc :

$$\mathbf{A^{-1}} = \frac{1}{|A|}\tilde{A} \qquad (3.5)$$

La matrice inverse de A est obtenue en multipliant par le nombre $\frac{1}{dét\ (A)}$ ***la matrice adjointe Ã.***

Exemple 1.19 : Calculer l'inverse A^{-1} de la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 11 \end{bmatrix}$

Son déterminant $|A|$ = (55 + 42 + 42) - (45 + 49 + 44) = 1.

La matrice des cofacteurs est :

$$C = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 11 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 11 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.\ \tilde{A} = C' = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Alors

$$A^{-1} = \frac{1}{dét\ (A)}\ \tilde{A} = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ car } = |A| = 1.$$

1.10.3.2 Méthode itérative ou la méthode gaussienne

La méthode itérative est très commode pour calculer l'inverse d'une matrice. Elle est basée sur la propriété suivante :

Soient deux matrices A et B ayant toutes les deux le même nombre m de lignes et mises côte à côte en une seule matrice [A, B]. Si l'on multiplie cette matrice par une matrice C ayant m colonnes, le produit étant compatible, on montre aisément que l'on obtient :

$$C[A, B] = [CA, CB]$$

Ainsi, si la matrice carrée A de dimension (*n x n*) doit être inversée, on considère la matrice élargie [A, I]. Si en multipliant cette matrice élargie par une matrice K de dimension (*n x n*) on obtient :

$$K[A, I] = [I, K]$$

Il est clair que KA = I implique que K est la matrice inverse de A; et par conséquent, $K = A^{-1}$.

On obtient la matrice K en opérant sur la matrice élargie [A, I] des transformations telles que A se transforme en la matrice unité, la matrice qui se substitue à I étant la matrice inverse de A.
Schématiquement, nous avons :

$$\begin{array}{l} [A \mid I] \\ \Big\downarrow \quad \text{Transformations} \\ [I \mid A^{-1}] \end{array}$$

Les transformations que l'on utilisera seront les transformations pratiquées pour obtenir des vecteurs échelonnés, tels que le premier élément non nul par ligne soit égal à 1. Ayant obtenu des vecteurs échelonnés lignes, on recommence l'opération pour obtenir simultanément des vecteurs échelonnés colonnes, ce qui permet finalement de substituer la matrice unité à la matrice A.
Si dans le cadre de la matrice A, on obtient des vecteurs échelonnés composés uniquement de 0, cela signifie que A n'est pas de rang maximum et par conséquent A n'est pas inversible.

Exemple 1.21 : Calculer l'inverse A^{-1} de la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 11 \end{bmatrix}$

Composons la matrice élargie $[A/I] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 11 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$. Nous obtenons successivement :

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 3 & 0 & -1 \end{array}\right) \quad \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$L'_1 = L_1$ $\qquad$ $L''_1 = L'_1$
$L'_2 = 2L_1 - L_2$ $\qquad$ $L''_2 = L'_2$
$L'_3 = 3L_1 - L_3$ $\qquad$ $L''_3 = L'_2 - L'_3$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 7 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$L^{iii}_1 = L''_1 + 3L''_2$ $\qquad$ $L^{iv}_1 = L^{iii}_1 - L^{iii}_2$
$L^{iii}_2 = L''_2 + L''_3$ $\qquad$ $L^{iv}_2 = (-1)L^{iii}_2$

$L^{iii}_3 = L''_3$ $\qquad\qquad$ $L^{iv}_3 = L^{iii}_3$

Il en résulte que $A^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

1.11 Systèmes d'équations linéaires

Un énoncé mathématique qui établit une égalité entre deux expressions algébriques est une équation. Cette égalité n'est vérifiée que pour certaines valeurs données aux variables dites inconnues qu'elle contient. Ces valeurs constituent les solutions (racines ou zéros) de l'équation. Pour résoudre une équation, on la remplace par des équations équivalentes de plus en plus simples.

1.11.1Equations linéaires

1.11.1.1 Définition

Par équation linéaire, on entend toute expression de la forme :

$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$

ou encore

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b$$

où les a_i sont des nombres réels appelés « **coefficients de x_i** », b est le **terme constant** et x_i représente les **variables** ou les **inconnues** de l'équation.

Un ensemble des nombres $x_1 = k_1$, $x_2 = k_2$, ..., $x_n = k_n$ ou $X = (k_1, k_2, ..., k_n)$ est une solution de l'équation linéaire si $a_1k_1 + a_2k_2 + ..., a_nk_n = b$.

Exemple 1.23 : Considérons l'équation $2x_1 + x_2 -4x_3 + x_4 = 3$.

X = (2, 3, 1, 0) est une solution de cette équation.
X = (0, 1, 0, 2) est aussi une solution de cette équation.
X = (1, 1, 0, 0) est encore une solution de cette équation.

1.11.1.2 Discussion de la solution d'une équation linéaire

Trois cas sont à envisager :

Cas 1 : Un des coefficients, par exemple a_1, est différent de zéro

Soit $a_1 \neq 0$. Dans ce cas, nous avons :

$$x_1 = \frac{b}{a_1} - \frac{a_2}{a_1}x_2 - \frac{a_3}{a_1}x_3 - ... - \frac{a_n}{a_1}x_n$$

Si l'on fixe arbitrairement une valeur pour les variables x_2, x_3, x_n, on déduit de la dernière relation la valeur de x_1 telle que $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ soit solution de l'équation.

On peut aussi fixer arbitrairement la valeur de (n-1) variables. On convient de dire que l'équation possède ∞^{n-1} solutions.

Remarque :

Si l'équation ne met en jeu qu'une seule variable $a_1x_1 = b$ ($a_1 \neq 0$), alors l'équation linéaire admet une solution unique $x_1 = \frac{b}{a_1}$.

Cas 2 : Tous les coefficients sont nuls, mais b ≠ 0 ($a_1 = a_2 = ... a_n = 0$ et $b \neq 0$)

L'équation linéaire peut s'écrire :

$0x_1 + 0x_2 + ..., + 0x_n = b.$

Il n'existe alors aucune solution.

Cas 3 : Tous les coefficients ainsi que le terme constant b sont nuls ($a_1 = a_2 = ... a_n = b = 0$)

L'expression peut s'écrire :

$0x_1 + 0x_2 + ..., + 0x_n = 0.$

Tout vecteur $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ est alors solution de l'équation. L'équation admet ∞^n solutions.

1.11.2 Systèmes d'équations linéaires

1.11.2.1 Définition

Tout système d'équations linéaires peut s'écrire sous la forme matricielle AX = B. La forme générale d'un système de **m** équations en **n** variables est le suivant :

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2j}x_j + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mj}x_j + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

ou $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad i = 1, 2,..., m.$

Les a_{ij} (i = 1, 2,..., m ; j =1, 2,..., n) sont les coefficients du système ; les b_i (i = 1, 2,..., m) sont les termes constants ; les $x_1, x_2, ..., x_n$ en sont les variables.

Ce système peut aussi s'écrire comme sous la forme matricielle **AX = B** où :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Un vecteur $X = (x_1, x_2, ..., x_n)'$ est solution du système s'il vérifie ou s'il est solution de **m** équations linéaires simultanément.

L'ensemble de toutes les solutions du système est appelé « l'***ensemble solution*** » ou encore « ***la solution générale du système*** ».

Il convient de noter que la solution d'un système d'équations n'est pas nécessairement unique. Un système peut avoir une infinité de solutions ; il se peut aussi qu'il n'ait aucune solution. Dans ce cas, on dit que le système d'équations est ***incompatible*** ou ***impossible*** ou encore ***inconsistant***.

Condition nécessaire et suffisante pour qu'un système AX = B soit compatible

Une condition nécessaire et suffisante pour que AX = B admette au moins une solution est que la matrice des coefficients A et la matrice augmentée (ou élargie) **A/B** soient de même rang, c'est-à-dire,

r(A) = r(A/B)

où la matrice augmentée A/B est la matrice des coefficients A à laquelle on a juxtaposé le vecteur colonne des termes constants B, en les séparant par un trait ou une barre.

1.11.2.2 Résolution des systèmes d'équations linéaires AX = B

Parmi les méthodes élémentaires disponibles aux humanités pour la résolution numérique des systèmes linéaires AX = B, on trouve les méthodes de **substitution, d'égalisation et d'addition**. Sans méconnaître leur efficacité, nous ne les recommandons pas ici étant donné leurs limites lorsqu'il est question notamment de résoudre un système sans second membre ou un système avec un nombre important des variables inconnues.

Ainsi, dans le cadre de ce cours, trois méthodes seront proposées, à savoir :

- la méthode d'élimination de Gauss ;
- la méthode de Cramer et
- la méthode d'inversion matricielle.

La première convient mieux pour un système d'équations quelconque tandis que les deux dernières ne peuvent être utilisées que lorsque le système à résoudre est **cramérien**, c'est-à-dire lorsque la matrice des coefficients A associée est carrée et non singulière.

A. La méthode de Gauss ou méthode d'élimination Gaussienne

Cette méthode aussi connue sous le nom de « **méthode des opérations élémentaires** » fait appel à la triangularisation de la matrice augmentée A/B en faisant apparaître des zéros en dessous de la diagonale (la diagonale étant entendue comme formée par les termes a_{ii} : on parlera de la diagonale même pour une matrice non carrée). La caractéristique de cette méthode est que le système d'équations linéaires obtenu après transformation est équivalent au système initial. Une autre caractéristique principale est que chaque équation contient moins d'inconnues que la précédente.

Soit m = nombre d'équations dans le système initial, n = nombre de variables et r = rang de A (matrice des coefficients a_{ij}). Lorsque la matrice est mise sous sa forme échelonnée en ligne, trois cas sont à envisager.

Premier Cas : r = n = m

A la fin des opérations élémentaires, le système mis sous forme échelonnée en ligne est du type :

$$\begin{array}{lr}
\hat{a}_{11}\, x_1 + \hat{a}_{12}\, x_2 + \ldots + \hat{a}_{1n}\, x_n = b_1 & \hat{a}_{11} \neq 0 \\
\hat{a}_{22}\, x_2 + \ldots + \hat{a}_{2n}\, x_n = b_2 & \hat{a}_{22} \neq 0 \\
\ldots & \\
\hat{a}_{nn}\, x_n = b_n & \hat{a}_{nn} \neq 0
\end{array}$$

On désigne les variables par $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n$ car il se peut qu'il ait été nécessaire de changer l'ordre des variables. De même, on désigne les coefficients par $\hat{a}_{ij}$ devenus maintenant des « pivots » (au lieu de a_{ij}) et les constantes par $\hat{b}_j$ (au lieu de b_j) parce qu'ils représentent les coefficients et les constantes transformés (à la suite de l'échelonnement).

La matrice A du système initial est une matrice carrée de rang maximum. Ce système est alors un système cramérien qui admet une solution unique.

La dernière relation nous donne la valeur de $\hat{x}_n = \frac{\hat{b}_n}{\hat{a}_{nn}}$.

En appliquant la substitution à rebours, l'avant-dernière nous permet d'obtenir x_{n-1} par la formule

$$\hat{x}_{n-1} = \frac{\hat{b}_{n-1}}{\hat{a}_{n-1,\, n-1}} - \frac{\hat{b}_{n-1,\, n}\; \hat{x}_n}{\hat{a}_{n-1,\, n-1}}$$

et ainsi de suite jusqu'à $\hat{x}_1$.

Deuxième Cas : r ≤ n, r ≤ m. Système compatible

A la fin des opérations élémentaires, le système mis sous forme échelonnée est du type :

$$\begin{array}{lr}
\hat{a}_{11}\, \hat{x}_1 + \hat{a}_{12}\, \hat{x}_2 + \ldots + \hat{a}_{1n}\, \hat{x}_n = \hat{b}_1 & \hat{a}_{11} \neq 0 \\
\hat{a}_{22}\, \hat{x}_2 + \ldots + \hat{a}_{2n}\, \hat{x}_n = \hat{b}_2 & \hat{a}_{22} \neq 0 \\
\ldots & \\
\hat{a}_{rjr}\, \hat{x}_{j_r} + \ldots + \hat{a}_{rn}\, \hat{x}_n = \hat{b}_r & \hat{a}_{rn} \neq 0 \\
0\, x_n = 0 &
\end{array}$$

On observe que r (A) = r(A/B). Le système est compatible. Le système initial de m équations donne lieu à un système de « r » équations linéairement indépendantes. Les (m - r) dernières équations sont toujours vérifiées pour toute valeur de x_{jr+1}, ... x_n. Le système de r équations linéairement Indépendantes contient n variables.

Conservons dans le premier membre de ces équations les termes correspondant aux variables x_1, x_{j2}, x_{jr} et faisons passer les termes d'autres variables dans le second membre. Le premier membre contient r variables, appelées **variables de base (VB)**, le second (**n - r**) variables appelées **variables hors base** (**VHB**) ou **variables secondaires**. Les n - r variables du second membre peuvent être fixée arbitrairement ; une fois ces variables fixées, on en déduit les valeurs de premier membre. Le système admet ∞^{n-r} de solutions puisque ***n - r*** variables peuvent être fixées d'une manière arbitraire. L'espace solution est donc de dimension ***n - r***.

Troisième Cas : r ≤ n, r < m. Système incompatible ou inconsistant

Le système initial mis sous forme échelonnée en ligne est du type suivant :

$$\begin{array}{llll} \hat{a}_{11} \; x_1 + \hat{a}_{12}\, x_2 + \dots + \hat{a}_{1n}\, x_n = b_1 & & & \hat{a}_{11} \neq 0 \\ \qquad\qquad \hat{a}_{22}\, x_2 + \dots + \hat{a}_{2n}\, x_n = b_2 & & & \hat{a}_{22} \neq 0 \\ \dots & & & \\ \qquad\qquad \hat{a}_{rjr}\, x_{j_r} + \dots + \hat{a}_{rn}\, x_n = b_{2n} & & & \hat{a}_{rn} \neq 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0\, x_n = b_m & & & \end{array}$$

On obtient m - r équations dont tous les coefficients sont nuls et dont certains termes constants sont différents de zéro. Ces équations n'admettent pas de solutions. Ceci est confirmé par le fait que le rang de A est inférieur au rang de A/B.

Exemple 1.25 :

A l'usine de fabrication des chaises, des tables et des écritoires, le travail a été décomposé en trois étapes : sciage, assemblage et polissage. Le temps disponible dans chaque service est de 109 Heures – hommes à l'atelier de sciage, 164 heures - hommes à l'atelier d'assemblage et 273 heures – hommes à l'atelier de polissage. La production d'une chaise exige 1 heure de sciage, 2 heures d'assemblage et 3 heures de polissage ; la fabrication d'une table nécessite 2 heures de sciage, 2 heures d'assemblage et 4 heures de polissage. Il faut 2 heures de sciage, 3 heures d'assemblage et 5 heures de polissage pour réaliser une écritoire.

a) Déterminez combien il faut produire de chaque bien pour respecter le temps disponible ?

Solution : Soit x_1, le nombre de chaises, x_2, le nombre de tables et x_3, le nombre d'écritoires. On peut résumer les données dans le tableau ci-après :

Différentes étapes De production	x_1	x_2	x_3	Tps Disponible
Sciage	1	2	2	109
Assemblage	2	2	3	164
Sablage	3	4	5	273

On doit résoudre le système

$$\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 109 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 164 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 273 \end{array}, \text{ la matrice augmentée étant : } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 109 \\ 2 & 2 & 3 & 164 \\ 3 & 4 & 5 & 273 \end{array}\right).$$

En résolvant par la méthode de Gauss, on obtient successivement :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 109 \\ 2 & 2 & 3 & 164 \\ 3 & 4 & 5 & 273 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 109 \\ 0 & 2 & 1 & 54 \\ 0 & 2 & 1 & 54 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 109 \\ 0 & 2 & 1 & 54 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Le système devient : $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 109 \\ \quad 2x_2 + x_3 = 54 \end{cases}$. Rang (A) = Rang(A/B) = 2 (rang non complet) car n = 3. La solution est indéterminée. Il y a une infinité simple de solutions et n - r = 1 variable libre. La dernière équation pouvant s'écrire $x_3 = 54 – 2x_2$, la variable libre est donc x_2, laquelle peut prendre n'importe quelle valeur. Si $\mathbf{x_2 = s, x_3 = 54 - 2s}$ **et** $\mathbf{x_1 = 1 + 2s}$, solution multiple dépendant de s.

b) Le responsable des ateliers de fabrication signale que le temps disponible à l'atelier de polissage est erroné. Il le corrige en le faisant passer à 275 heures - hommes. La production de l'entreprise sera-t-elle affectée par cette modification ?

Réponse :

On peut résumer les données dans le tableau ci-après :

Différentes étapes De production	x_1	x_2	x_3	Tps disponible
Sciage	1	2	2	109
Assemblage	2	2	3	164
Sablage	3	4	5	275

On doit résoudre le système

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 109 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 164 . \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 275 \end{aligned}$$

En résolvant par la méthode de Gauss, on obtient successivement :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 109 \\ 2 & 2 & 3 & 164 \\ 3 & 4 & 5 & 275 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 109 \\ 0 & 2 & 1 & 54 \\ 0 & 2 & 1 & 52 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 109 \\ 0 & 2 & 1 & 54 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Rang (A) = 2 $\neq$ rang (A/B) = 3. Le système est donc incompatible. Pas de production.

c) L'administrateur – propriétaire de l'entreprise fait face à l'inconscience de ses employés. En effet, l'ingénieur de production observe que le temps disponible à l'atelier de polissage est de 275 heures – hommes, mais que 2 heures – hommes, et non 3, sont exigées par l'atelier d'assemblage pour produire une écritoire. Combien de chaises, de tables et d'écritoires faudra-t-il produire compte tenu de cette dernière contrainte ?

Réponse :

On peut résumer les données dans le tableau ci-après :

Différentes étapes De production	x_1	x_2	x_3	Tps Disponible
Sciage	1	2	2	109
Assemblage	2	2	2	164
Sablage	3	4	5	275

On doit résoudre le système

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 109 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 164 . \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 275 \end{aligned}$$

En résolvant par la méthode de Gauss, on obtient successivement :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 109 \\ 2 & 2 & 2 & 164 \\ 3 & 4 & 5 & 275 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 109 \\ 0 & 2 & 2 & 54 \\ 0 & 2 & 1 & 52 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 109 \\ 0 & 2 & 2 & 54 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Le système devient : $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 109 \\ 2x_2 + 2x_3 = 54 \\ x_3 = 2 \end{cases}$.

Rang (A) = Rang(A/B) = 3 (rang complet) car n = 3. Le système est consistant et admet une seule solution : $\mathbf{x_1 = 55}$, $\mathbf{x_2 = 25}$ **et** $\mathbf{x_3 = 2}$.

L'usine doit produire 55 chaises, 25 tables et 2 écritoires.

B. Résolution des systèmes cramériens (par la méthode de Cramer)

Soit le système AX = B où A est une matrice carrée d'ordre n, B et X, deux vecteurs de dimension *n x 1*. Par hypothèse, A est de rang maximum. La solution du système est donc unique.

La méthode de Cramer qui s'écrit comme :

$$x_j = \frac{|A_j|}{|A|}$$

où $|A|$ est le déterminant de A et $|Aj|$ est le déterminant de A où la colonne j est remplacée par celle des termes constants.

Exemple 1.27 :

Beltexco doit acquérir 100 appareils de communication cellulaire et peut s'approvisionner soit auprès de Celtel, soit chez Vodacom, soit encore auprès de Tigo. Les coûts unitaires de transport c_j sont : pour Celtel,10 \$, pour Vodacom, 20 \$ et pour Tigo 12 \$. Les prix d'achat peuvent varier en fonction de fournisseurs : 300 \$ chez Celtel, 250 \$ chez Vodacom et 350 \$ chez Tigo. Comment Beltexco va-t-il passer ses commandes sachant que le prix global d'achat s'élève à 30750 \$, tandis que le coût total de transport est de 1330 \$?

Réponse :

Soit xj, la commande passée auprès de Celtel, Vodacom et Tigo respectivement. Le problème consiste à résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 100 \\ 10x_1 + 20x_2 + 12x_3 &= 1330 \\ 300x_1 + 250x_2 + 350x_3 &= 30750 \end{aligned}$$

Soit A = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 20 & 12 \\ 300 & 250 & 350 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} 100 \\ 1330 \\ 30750 \end{bmatrix}$ et $|A| = 600$.

La méthode de Cramer nous donne :

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 100 & 1 & 1 \\ 1330 & 20 & 12 \\ 30750 & 250 & 350 \end{vmatrix}}{600} = \frac{2100}{600} = 35, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 100 & 1 \\ 10 & 1330 & 12 \\ 300 & 30750 & 350 \end{vmatrix}}{600} = \frac{15000}{600} = 25 \text{ et}$$

$$x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 100 \\ 10 & 20 & 1330 \\ 300 & 250 & 30750 \end{vmatrix}}{600} = \frac{24000}{600} = 40.$$

Ainsi, Beltexco va commander 35 portables chez Celtel, 25 chez Vodacom et 40 chez Tigo.

C. La méthode d'inversion matricielle.

Soit le système AX = B. Si A est non singulière, c'est que $|A|$ est différent de zéro. Dans ce cas, la multiplication à gauche de deux membres par A^{-1} donne $A^{-1}.AX = A^{-1}.B$. D'où :

$$X = A^{-1}B.$$

Exemple 1.28 : Avec les données de l'exemple précédent, nous avons :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 100 \\ 10x_1 + 20x_2 + 12x_3 &= 1330 \\ 300x_1 + 250x_2 + 350x_3 &= 30750 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 20 & 12 \\ 300 & 250 & 350 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 1330 \\ 30750 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 20 & 12 \\ 300 & 250 & 350 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 100 \\ 1330 \\ 30750 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6{,}66667 & 0{,}16667 & 0{,}01333 \\ 0{,}16667 & 0{,}08333 & 0{,}00333 \\ 5{,}83333 & 0{,}08333 & 0{,}16667 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 100 \\ 1330 \\ 30750 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \\ 25 \\ 40 \end{bmatrix}.$$

Beltexco va commander 35 portables chez Celtel, 25 chez Vodacom et 40 chez Tigo.

1.12.Systèmes d'inéquations linéaires

Par inéquation linéaire, on entend toute expression de la forme :

$$\mathbf{a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \leq b} = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b$$

ou de la forme

$$\mathbf{a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \geq b} = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \geq b$$

où les a_i sont des nombres réels appelés « **coefficients de x_i** », b est le **terme constant** ou le **second membre** et x_i représente les **variables** ou les **inconnues de l'inéquation**.

La résolution de cette inéquation consiste à déterminer l'ensemble des variables x_j qui satisfait à

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b \text{ ou. } \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \geq b\,.$$

Exemple I.29 : Résoudre l'équation linéaire $2x + 3 \leq 6$.

Réponse :

$2x + 3 \leq 6 \Rightarrow 2x \leq 6 - 3 \Rightarrow 2x \leq 3$

D'où $x \leq \frac{3}{2}$, l'ensemble solution est donc : $s = \{x \backslash x \leq \frac{3}{2}\} =]-\infty, \frac{3}{2}]$.

Exemple I.30 : Résoudre $3x + 7 \leq 5x - 5$

Réponse :

$3x + 7 \leq 5x - 5 \Rightarrow 3x - 5x \leq -5 - 7 \Rightarrow -2x \leq -12$

Ainsi, $x \geq 6$ (en divisant les deux membres de l'inégalité par –2). Par conséquent, l'ensemble solution est donné par : $S = \{x \in \Re \backslash\ x \geq 6\} = [6, +\infty[$

Exemple I.31 : Résoudre et discuter l'inéquation paramétrique du premier ordre à une inconnue suivante : $mx > 5 + 3x \Rightarrow mx - 3x > 5 \Rightarrow (m-3)x > 5$

Réponse :

1. Si **m-3 > 0**, alors : $m > 3 \Rightarrow x > \frac{5}{m-3}$
2. Si **m-3 < 0**, alors $m < 3 \Rightarrow x < \frac{5}{m-3}$
3. Si **m-3 = 0**, alors : $m = 3 \Rightarrow 0x > 5$ et $S = \phi$ (donc si m = 3, l'inéquation devient insoluble).

Dans le cas d'une inéquation linéaire à deux inconnues du type **ax + by ≥ c**, on peut représenter un couple $(x,y) \in \Re^2$ dans un plan repéré par deux axes de coordonnées. Résoudre cette inéquation c'est déterminer la partie du plan correspondant aux points de coordonnées (x, y) tels que

$ac + by \geq c$ entraîne $y \geq \frac{c}{b} - \frac{a}{b}x$.

D'une manière générale, l'inéquation $ax + by \geq c$ est satisfaite dans l'un des demi-plans limité par la droite d'équation $ax + by = c$.

Pour déterminer lequel des deux demi-plans convient il suffit de prendre un point en dehors de la droite (par exemple l'origine si $c \neq 0$) et de constater si $ax + by > c$ (le point appartient au demi-plan qui convient) ou si $ax + by < c$ (le point appartient au demi-plan qui ne convient pas).

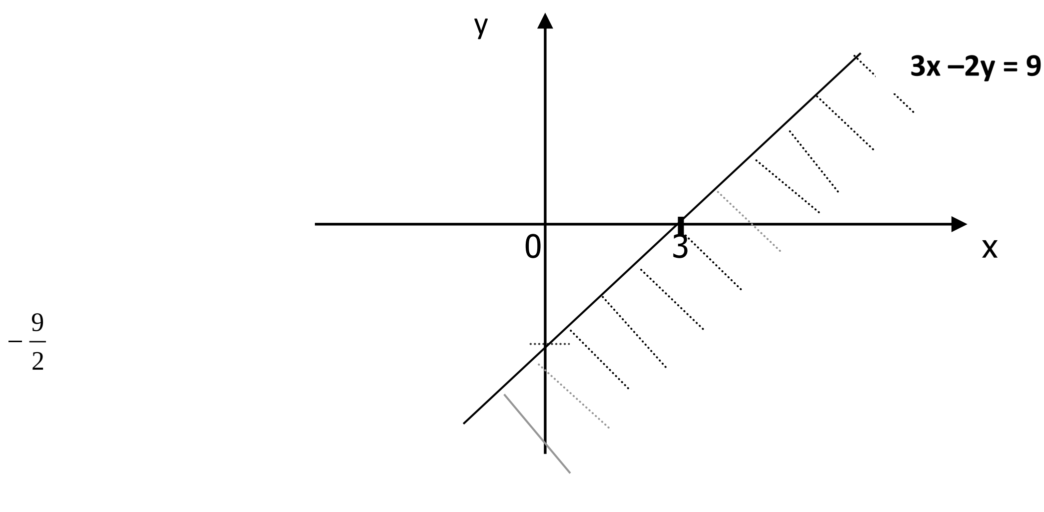
Exemple I.32 :

Représenter graphiquement les solutions de l'inéquation suivante : $3x - 2y < 9$.

Réponse :

Cette inéquation peut s'écrire comme : $y > \frac{3x}{2} - \frac{9}{2}$. D'où :

Le point (0,0) est extérieur à la droite $3x - 2y = 9$ et satisfait bien sûr à l'inéquation ; le demi-plan solution est donc celui qui contient l'origine. Ceci définit l'ensemble **S**.



I.12.2.Systèmes d'inéquations linéaires

Un système d'inéquations linéaires est de la forme

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

ou de la forme

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j \geq b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Pour résoudre un tel système, on cherche, pour chacune des inéquations du système, l'ensemble des couples (x, y) qui satisfont simultanément ces inéquations.Cet ensemble est appelé « ensemble - solution pour une telle inéquation. Il correspondra à une partie du plan, c'est-à-dire à un demi-plan.

On procède alors de la manière suivante :

1. Tracer la droite d'équation $ax + bx + c = 0$ sur un repère orthonormé. Celle-ci divise alors le plan en deux demi - plans.

2. Trouver l'ensemble des solutions de chacune des inéquations. Pour ce faire, on teste un point quelconque non situé sur la droite. En pratique, on choisit le point (0,0) si la droite ne passe pas par l'origine des axes. Si les coordonnées du *point test* vérifient l'inéquation, le demi-plan auquel appartient ce point est la solution de l'inéquation.

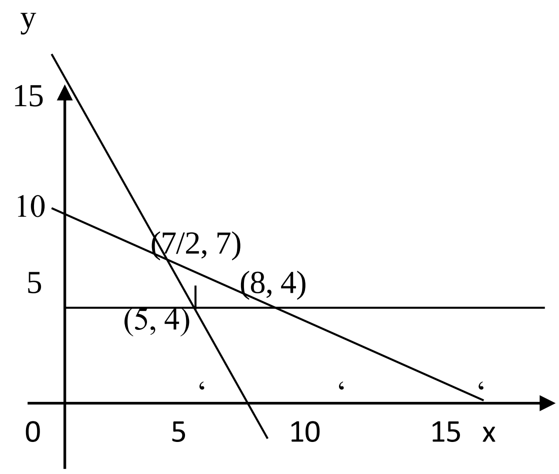
3. Pour chacune, le demi-plan qui ne convient pas (qui ne vérifie pas l'inéquation) est hachuré.

4. Les points de la droite appartiendront au demi-plan si l'inégalité est non stricte.

5. L'ensemble - solution du système d'inéquations correspondra alors à la partie du plan qui reste sans hachures. C'est l'ensemble des points faisant partie de l'ensemble - solution de chacune des inéquations.

Exemple I.33 : Soit à résoudre le système d'inéquations :

$$\begin{aligned} 4x + 2y &\geq 28 \\ y &\geq 4 \\ 2x + 3y &\leq 28 \end{aligned}$$



Solution :

On commence par trouver l'ensemble des solutions de chacune des trois inéquations linéaires. La première est $4x + 2y \geq 28$. Traçons la droite représentée par l'équation $4x + 2y = 28$. On détermine les points d'intersections avec les axes. En posant $x = 0$, on a $2y = 28$, d'où $y = 14$. Ainsi la droite coupe l'axe vertical au point (0, 14). De même, en posant $y = 0$, on a $4x = 28$ et $x = 7$.
La droite coupe l'axe horizontal au point (7, 0).

La droite passant par ces deux points appelée « **frontière de l'ensemble – solution** » divise le plan en deux demi – plans. Le point (0, 0) par exemple détermine de quel côté de la droite se situent les solutions (ici, c'est du côté droit).

On cherche ensuite l'ensemble des solutions de deux autres inéquations. L'ensemble – solution du système est donc la partie du plan délimitée par les couples des points (7/2, 7), (5, 4) et (8, 4).

Nota bene : On obtient le point de rencontre de deux droites frontières en résolvant le système d'équations linéaires concernées. Une des applications de système d'inéquation est la résolution d'un programme linéaire par la méthode graphique ;dans le cadre de ce cours nous allons prendre que deux variables.

1.13.La programmation linéaire

Exemple 1 : Un fabricant produit des tables (x1) et des chaises (x2).
Chaque table nécessite 2 heures pour l'assemblage (A), une heure pour le polissage (P) et 5 heures pour l'emballage (E). Chaque chaise exige une heure pour l'assemblage (A), une heure pour le polissage (P) et 3 heures pour l'emballage (E). La fabrique ne peut disposer, chaque semaine, que de 140 heures pour l'assemblage, de 104 heures pour le polissage et de 360 heures pour l'emballage. Si la marge bénéficiaire est de 7 Fr par table et de 4 Fr par chaise, trouver la combinaison des produits qui maximisera les profits hebdomadaires de la fabrique.

Exemple 2 : Il faut réaliser une alimentation économique pour bétail. Elle doit contenir obligatoirement 4 sortes de composantes nutritifs A, B, C, D.
L'industrie alimentaire produit 2 composés M et N qui contiennent ces composants :
1Kg de M contient : 100gr de A ; 100gr de C et 200gr de D
1Kg de N contient : 100gr de B ; 100gr de C et 100gr de D
Par jour, un animal doit consommer au moins :
0,4Kg de A ; 0,6Kg de B ; 2Kg de C et 1,7Kg de D
M coûte 100F le Kg et N coûte 40F le Kg.

Exemple 3 : Quelles quantités d'aliments M et N doit-on utiliser chaque jour, par animal, pour réaliser l'alimentation convenable mais la moins coûteuse.

1. Un transporteur routier doit livrer chaque jour des tee-shirts de sport en provenance de Chine dans un magasin de sport de la région Parisienne. Cette entreprise possède deux entrepôts. x_1 cartons de tee-shirts sont transportés à partir du premier entrepôt et x_2 à partir du second.
   (1) $x_1 \geq 100$: Le premier entrepôt doit contenir au moins 100 cartons de tee-shirts pour être rentabilisés ;
   (2) $3x_1 + 2x_2 \geq 1200$: Pour pouvoir stocker un carton de tee-shirts, il faut 3 palettes dans le premier entrepôt et 2 palettes dans le second ; il faut se débarrasser d'au moins 1200 palettes pour les deux entrepôts car celle-ci devront être remplacées ;
   (3) $x_1 + x_2 \geq 500$: Le transporteur doit livrer au moins 500 cartons de tee-shirts chaque jour
   (4) $x_1 + 3x_2 \geq 900$: Pour pouvoir charger les cartons de tee-shirts, il faut 1 minute à partir du premier entrepôt et 3 minutes à partir du second, le temps disponible pour le changement total n'est que de 900 minutes ;

(5) $x_2 \geq 100$: Le deuxième entrepôt doit contenir au moins 100 cartons de tee-shirts pour être rentabilisés ;

(6) $x_1, x_2 \geq 0$: Les quantités de cartons de tee-shirts sont positives ou nulles.

L'entreprise a pour objectif de maximiser ses coûts de transport $C(x_1, x_2)$. Le transport d'un carton de tee-shirt lui coute 2€ depuis le premier entrepôt et 8€ depuis le second. Déterminer le nombre de cartons que doit contenir chaque entrepôt pour maximiser ses coûts de transport.

Chapitre deuxième
FONCTIONS NUMERIQUES

La notion de fonction est fondamentale car, elle permet de rendre compte des relations qui existent entre les phénomènes. Le plus souvent, les états des phénomènes ou les grandeurs qui entrent en jeu sont matérialisés par des nombres, résultats des mesures.

Les interactions entre ces phénomènes sont alors traduites par des fonctions reliant des nombres, c'est-à-dire des fonctions numériques.

L'étude des fonctions numériques constitue le premier pas à effectuer dans la voie de l'analyse mathématique dont les thèmes principaux sont : limite, continuité, dérivée et intégrale. Mais, avant de les aborder, il convient de rappeler l'existence d'un lot fondamental des fonctions numériques qu'il faut nécessairement connaître.

2.1. Généralités sur les fonctions numériques d'une variable réelle

2.1.1. Définitions

On appelle fonction numérique d'une variable réelle toute fonction pour laquelle les ensembles de départ et d'arrivée sont des sous-ensembles de $\Re$.

La fonction numérique d'une variable réelle s'écrit symboliquement comme ci-après :

$$f : E \subset \Re \to \Re \big| x \to y = f(x)$$

où

- l'élément y = f(x) est l'image de x par la fonction f (c'est-à-dire la valeur de la fonction associée à x) ;
- l'élément x est un antécédent par f de y (ou l'argument de la fonction).

On lit : « Soit f une fonction de $E \subset \Re$ vers $\Re$ qui, à tout élément x, associe au plus un élément y = f(x) de $\Re$ »

La notation $x \to y = f(x)$ se lit : « x a pour image y = f(x) par la fonction f »

D'après l'écriture y = f(x), on voit que les valeurs de x vont entraîner celles de y. Pour cette raison, on dit que y dépend de x, et on appelle y la variable dépendante (expliquée ou endogène) et x la variable indépendante (explicative ou exogène).

Remarques

1° Une fonction numérique d'une variable réelle est généralement définie à partir de trois éléments :

- un ***ensemble de départ*** (ou source) de la fonction f ;
- un ***ensemble d'arrivée*** (ou but) de f ;
- une fonction f qui est une ***règle*** permettant d'associer à chaque élément x de l'ensemble de départ au plus un élément y = f(x) de l'ensemble d'arrivée.

2° Ne pas confondre la fonction f qui est une application d'une partie de $\Re$ vers $\Re$, avec l'élément y = f(x) qui est un réel et qui représente l'image de x par la fonction f. Cependant, lorsqu'aucune confusion n'est à craindre, il arrive que l'on désigne la fonction f par l'image f(x) d'un élément x laissé quelconque dans l'ensemble de départ.

2.1.2. Ensemble de définition

Une fonction numérique n'est pas forcément définie pour tout x appartenant à $\Re$. L'ensemble formé de tous les réels x pour lesquels le réel f(x) existe est appelé ***ensemble de définition*** ou ***domaine de définition***, et noté D_f ou Dom_f.

Le domaine de définition d'une fonction f peut être restreint pour des raisons mathématiques et pour des raisons économiques :

- Les raisons mathématiques les plus connues qui restreignent le domaine de définition sont découlent notamment du fait qu'on ne peut pas diviser un nombre par zéro ou qu'on ne peut pas prendre la racine carrée ou le logarithme des nombres négatifs.
- Le domaine de définition d'une fonction peut aussi être restreint par l'application dans laquelle la fonction apparaît. En Economie, par exemple, les agrégats sont supposés être des grandeurs positives et le domaine de définition comprend souvent l'ensemble des nombres positifs. Par exemple si C(x) est le coût de production de x machines, x est forcément un entier positif. C serait l'ensemble des entiers positifs.
  De même, un revenu négatif ou une consommation négative n'ont pas de sens.

Si un élément x_0 de $\Re$ appartient au domaine de définition D_f, on dit que la fonction f est définie au point x_0. On dit qu'une fonction f est définie sur l'intervalle I si elle est définie en tout point de cet intervalle. On appelle $f(x_0)$ le nombre obtenu en remplaçant x par x_0 dans la fonction f.

Exemple 2.1 : Soit $f(x) = \frac{1}{x^2}$, une fonction numérique à une variable réelle. Son domaine de définition est Df = $\Re^*$ ou $\Re$-{0}. En effet, la fonction f n'est pas définie au point x = 0. Par conséquent, le réel 0 n'appartient pas à l'ensemble de définition de f. Ce domaine de définition peut aussi s'écrire sous forme d'une réunion de deux intervalles :

$$Df = \left]-\infty, 0\right[\cup \left]0, +\infty\right[$$

Exemple 2.2 : Soit f(x) = $\frac{1}{x^2-1}$. Le D_f est l'ensemble de tous les x réels exceptés {-1, 1}.

Exemple 2. 3 : Soit f : x $\rightarrow f(x) = \sqrt{1-x^2}$

La fonction f est définie lorsque $1- x^2 \geq 0$, c'est-à-dire $-1 \leq x \leq 1$. Donc Df = [-1, +1].

En effet, pour déterminer le domaine de définition d'une fonction du type $f(x) = \sqrt{\psi(x)}$, où $\psi(x)$ est un polynôme en x :

- on pose la condition $\Psi(x) \geq 0$;
- le domaine de définition de f est alors l'ensemble des x tels que $\Psi(x) \geq 0$. D'où : $D_f = \{x \in \Re / \psi(x) \geq 0\}$

Exemple 2. 4 : Soit f : x→$f\ (x) = \sqrt{x^{2} + 5x - 6}$

En posant x^2- 5x + 6 ≥ 0, on obtient : (x + 6) (x - 1) ≥ 0. Ainsi, x^2 - 5x + 6 ≥ 0 si et seulement si x ≤ - 6 ou x ≥ 1. Donc $D_f = \left]-\infty, -6\right] \cup \left[1, +\infty\right[$

On peut également utiliser le tableau de variation de la fonction f pour la détermination du domaine de définition :

x	- ∞		- 6		1		+ ∞
x + 6		-	0	+	+	+	
x -1		-	-	-	0	+	
(x + 6) (x -1)		+	0	-	0	+	

La fonction (x + 6) (x -1) ≥ 0 si x ≤ - 6 ou x ≥ 1. Par conséquent : $D_f = \left]-\infty, -6\right] \cup \left[1, +\infty\right[$

2.1.3. Graphe d'une fonction numérique à une variable réelle

Le graphe d'une fonction permet de visualiser l'allure, les propriétés et le comportement de celle-ci.

On le construit en munissant un plan d'un repère **orthogonal** (c'est-à-dire un repère constitué par deux axes perpendiculaires). Si, en plus, les échelles de graduation sont les mêmes sur les deux axes, le repère est dit **orthonormé**. Le plan muni d'un repère orthogonal ou d'un repère orthonormé, et utilisé comme support pour représenter intuitivement la fonction est appelé **plan euclidien**.

Pour chaque x_0 de l'intervalle (a, b), on définit le couple [x_0, $f(x_0)$]. L'ensemble des points P_0 est appelé graphe de la fonction f(x) ; il est représenté en général par une courbe.

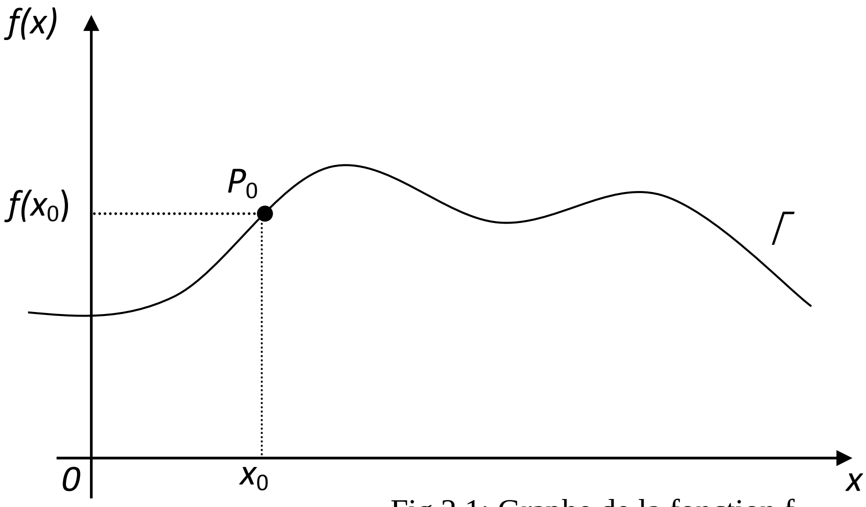


Fig 2.1: Graphe de la fonction f

2.2. Caractéristiques des fonctions numériques

2.2.1. Egalité de deux fonctions

Soit f et g deux fonctions numériques à une variable réelle. On dit que les fonctions f et g sont égales lorsqu'elles ont le même ensemble de définition D_f et que, pour tout élément de D_f, on a : $f(x) = g(x)$.
On écrit alors : f = g

Exemple 2.6 :
Soit f et g deux fonctions de $\Re$ vers $\Re$ définies respectivement par : $f(x) = x^2 - 1$ et $g(x) = (x - 1)(x + 1)$. Pour tout nombre réel x, on trouve f(x) = g(x). Donc, les deux fonctions f et g sont **égales.**

2.2.2. Restriction et prolongement d'une fonction

Soit f une fonction de la variable réelle x dont l'ensemble de définition est D_f et I un intervalle contenu dans D_f. La fonction g, définie sur I par g(x) = f(x), est appelée **restriction** de f à l'intervalle I.
S'il est établi que la fonction g est la restriction de f à l'intervalle I, alors f est un **prolongement** de g à D_f.

Exemple 2.7 : Considérons f, fonction définie sur $\Re$ par $f(x) = |x|$ et g, fonction définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par g(x) = x.
Ces deux fonctions n'ayant pas le même ensemble de définition ne sont pas égales. Toutefois, pour tout élément x de $[0, +\infty[$, on a : $|x| = x$, c'est-à-dire f(x) = g(x). Par conséquent, g est la restriction de f à l'intervalle $[0, +\infty[$, et f est le prolongement de g à $\Re$.

2.2.3. Fonctions monotones

Soit f, une fonction numérique définie sur un sous-ensemble E de $\Re$.

1° La fonction f est dite **croissante au sens large** sur E si, quels que soient les éléments x_1 et x_2 de E, on a : $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.

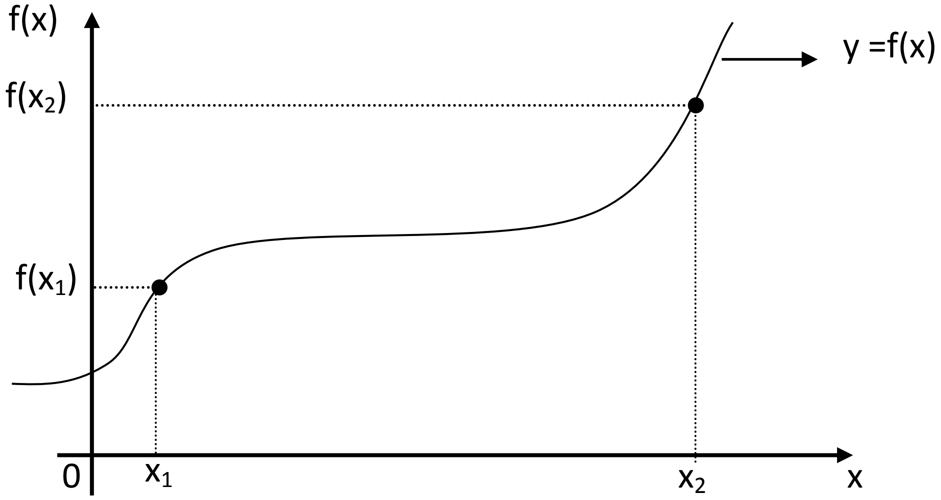


Fig. 2.2 : Fonction croissante au sens large

2° La fonction f est **strictement croissante** sur E si, quels que soient les éléments x_1 et x_2 de E, on a : $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

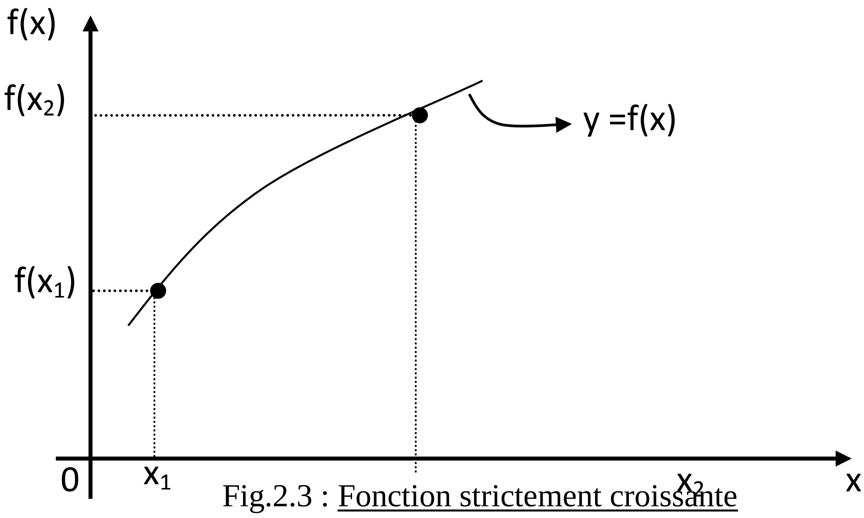


Fig.2.3 : Fonction strictement croissante

3° La fonction f est **décroissante au sens large** sur E si, quels que soient les éléments x_1 et x_2 de E, on a : $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

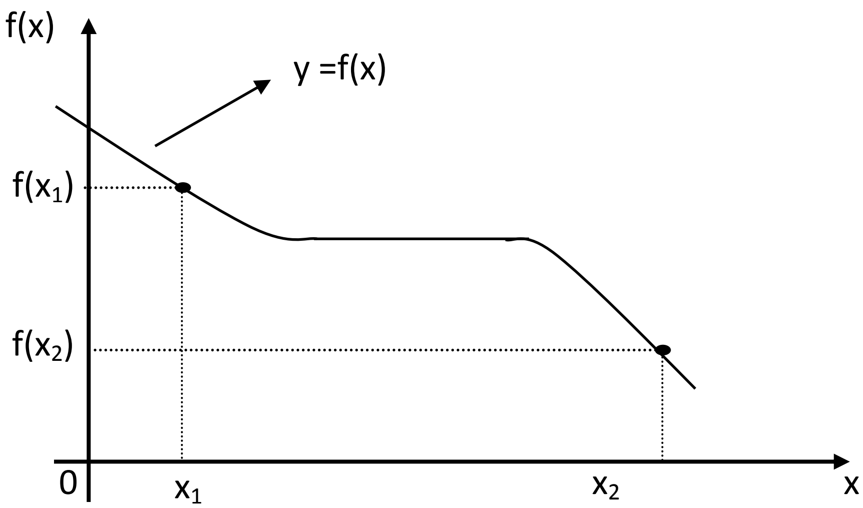


Fig. 2.4: Fonction décroissante au sens large

4° La fonction f est **strictement décroissante** sur E si, quels que soient les éléments x_1 et x_2 de E, on a : $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

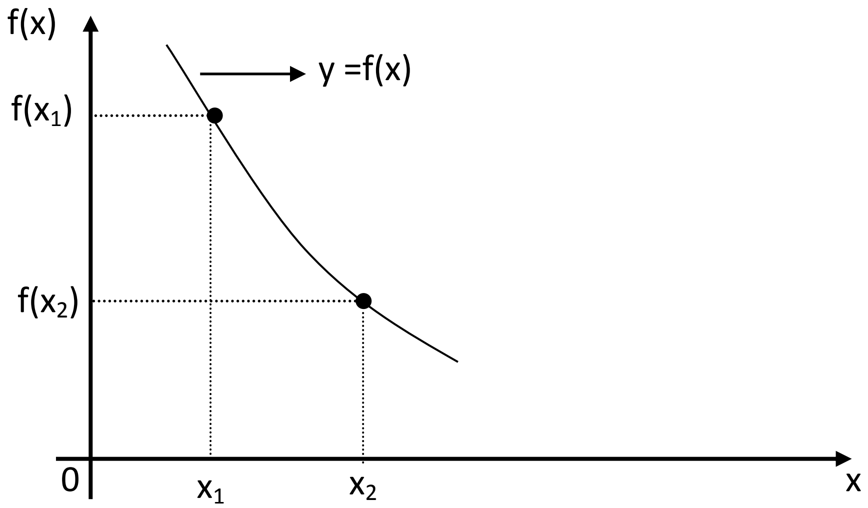


Fig. 2.5 : Graphe d'une fonction strictement décroissante

5° La fonction f est **constante** sur E si, quels que soient les éléments x_1 et x_2 de E, on a : $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

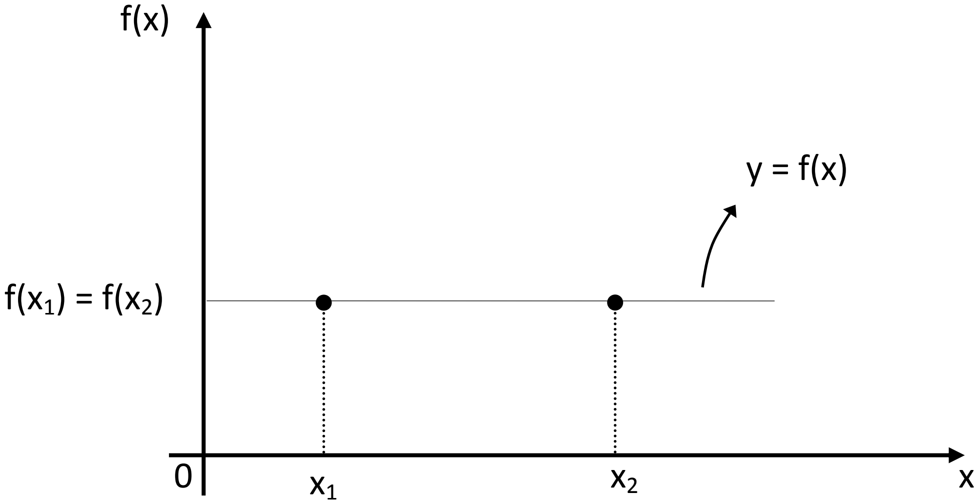


Fig. 2.6 : Graphe d'une fonction constante

6° La fonction f est **monotone** sur E si elle est constamment croissante, décroissante ou constante sur E.

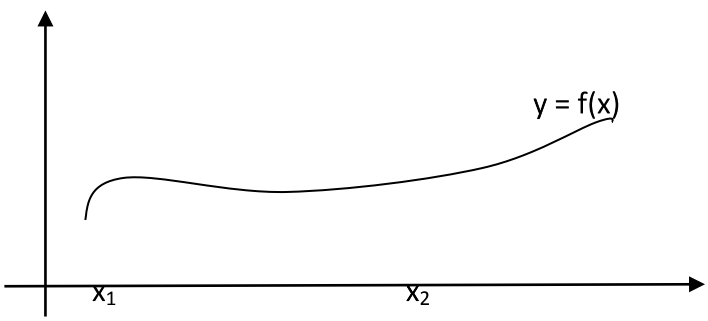


Fig. 2.7 : Graphe d'une fonction monotone

Remarques

On peut aboutir aux résultats similaires en examinant les variations des fonctions sur E. En effet, l'étude des variations d'une fonction se ramène à celle du signe du rapport ci-après :

$$T = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

pour tout $x_1 \neq x_2$

Ce rapport est connu sous le nom de **taux d'accroissement d'une fonction.** Le sens des variations est donné par le taux d'accroissement de la fonction f. Cette fonction sera croissante (resp. décroissante ou constante) sur E si et seulement si le taux d'accroissement est positif (resp. négatif ou nul).

2.2.4. Zéros d'une fonction

Soit f une fonction de la variable réelle x définie sur $\Re$. On dit que x_0 est un **zéro** (réel) de f si : $f(x_0) = 0$

Exemples 2.8 :

1 : Soit $f(x) = ax + b$, où $b \in \Re$ et $a \in \Re^*$. $-\frac{b}{a}$ est un zéro (réel) de la fonction

2 : Soit la fonction quadratique : $f(x) = x^2 - 5x + 4$ définie sur $\Re$. Les zéros de cette fonction sont respectivement 1 et 4.

2.2.5. Fonctions explicite et implicite

Une fonction de deux variables f(x, y) est dite **implicite** lorsque les deux variables de la fonction se trouvent en relation sans qu'on précise celle des deux qui est considérée comme **dépendante** ou comme **indépendante.**

La fonction implicite est généralement définie par l'équation : $F(x, y) = 0$

Exemples 2.9

1. $4x - 2y = 1$ ou $4x - 2y - 1 = 0$
2. $uv = 6$
3. $s = \sin t \cos s + t^2$
4. $y^2 - 5xy + 4x^2 = 0$
5. $x^2 + xy + y^x - \sqrt{xy} = 0$

Une fonction est dite **explicite** lorsqu'on précise l'identité de la variable dépendante et celle de la variable indépendante. Une fonction numérique de la forme : y = f(x) est appelée fonction explicite.

Exemples 2.10 :
Les fonctions suivantes sont des fonctions explicites.

1. y = 2x + 5
2. y = x^2 – 3x+7
3. s = - 4 + 6 t $\Rightarrow$ s = h(t).

Une fonction implicite donnée, F (x, y) = 0, détermine (sous certaines conditions) deux fonctions inverses l'une de l'autre : y = f(x) et x = g(y).

Exemple 2.11 : Soit F (x, y) = 6x - 4y - 8 = 0, on peut tirer :

- y, fonction explicite de x : 4y = 6x – 8 $\Rightarrow$ y = $\frac{3}{2}$ x - 2
- x, fonction explicite de y : 6x = 4y + 8 $\Rightarrow$ x = $\frac{2}{3}$ y + $\frac{4}{3}$

- Il est important de noter qu'une équation sous forme implicite ne peut pas toujours être réécrite sous forme explicite exemple : $y^5 - 5xy + 4x^2 = 0$.

Exemples 2.11 : Donner la forme explicite de chacune des fonctions implicites ci-après :

1° xy = 1

$\Rightarrow$ en considérant y comme variable endogène, on trouve : $y = \frac{1}{x}$

2° $x^2 + y^2 = 9$

$\Rightarrow$ la forme explicite est donc : $y = \pm\sqrt{9 - x^2}$

3° $y^2 - 5xy + 4x^2 = 0$ (un polynôme du second degré en y)

$\Rightarrow$ Etant donné que : Δ = b² - 4ac = (5x)² - 4(1)(4x^2) = 9x², alors :

$$= \frac{5x \pm \sqrt{9x^2}}{2} = \frac{5x \pm 3x}{2} = \left\langle \begin{matrix} 4x \\ x \end{matrix} \right. .$$

4° $xy^2 - 3y - e^x = 0$ (Équation du second degré en y)

$$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4xe^x \text{ et } y = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4xe^x}}{2x} = \left\langle \begin{matrix} \dfrac{3 + \sqrt{9 - 4xe^x}}{2x} \\ \dfrac{3 - \sqrt{9 - 4xe^x}}{2x} \end{matrix} \right. .$$

5° $y^3 - 5xy + x^2 = 7$ (Fonction du 3$^{\text{ème}}$ degré en y)

Cette fonction n'admet pas une forme explicite.

2.3. Les fonctions usuelles en économie

Dans cette section, on analyse les fonctions de base dont la connaissance est indispensable pour des applications économiques.

2.3.1. Fonctions polynômes

On appelle **fonction polynôme** ou **fonction polynomiale** toute fonction obtenue comme une combinaison linéaire des puissantes entières et positives :

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots.. + a_nx^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Les réels **a_0, a_1,….., a_n** s'appellent **les coefficients du polynôme** ; a_0 est **le terme indépendant**, et **n** est le degré du polynôme. On désigne le polynôme de degré n par la notation P_n.

Les différents types des fonctions polynomiales sont :

1° Fonction constante

La fonction constante est de la forme **y = f(x) = a.**
où a est une constante réelle

Exemple 2.20 :
F(x) = 4 est une fonction constante

x	-3	-2	-1	0	1	2
f(x)	4	4	4	4	4	4

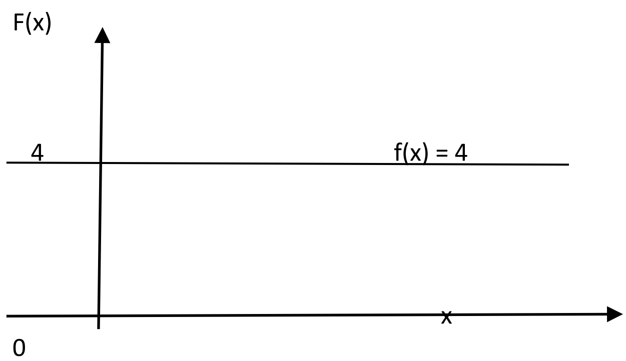


Fig. 2.19 : graphe de la fonction f(x) = 4

2° Fonction en escalier ou fonction constante par intervalles

La fonction f de E ⊂ $\mathfrak{R}$ vers $\mathfrak{R}$ est dite « constante par intervalles » ou « fonction en escalier » s'il existe une subdivision de E en intervalles tels que, sur chaque intervalle de la subdivision, f soit une fonction constante.

Exemples 2.21 :

1 : La fonction « partie entière de x » E(x), est une fonction constante par intervalles. En effet, pour tout $x \in \Re$, on appelle « partie entière de x », et l'on note E(x), le plus grand entier qui soit au plus égal à x. Donc E(x) n'est autre que l'arrondi de x à 1 près par défaut.

Formellement, la fonction « partie entière de x » peut s'écrire comme ci-après :
$f : R \to Z/x \to f(x) = E(x)$

On lit : soit f, une fonction $\Re$ vers Z qui à tout élément x associe au plus f'x) = E(x).

Le graphe de la fonction $f : x \to E(x)$, définie sur $\Re$, en repère orthonormé, se compose d'une infinité des segments parallèles à l'axe des x dont la longueur est égale à 1.

La table des valeurs de la fonction f(x) = E(x) est donnée par :

Valeurs de x	E(x)
$-4 \le x < -3$	-4
$-3 \le x < -2$	-3
$-2 \le x < -1$	-2
$-1 \le x < 0$	-1
$0 \le x < 1$	0
$1 \le x < 2$	1
$2 \le x < 3$	2
$3 \le x < 4$	3

En général, pour $n \le x < n + 1$, on obtient E(x) = n

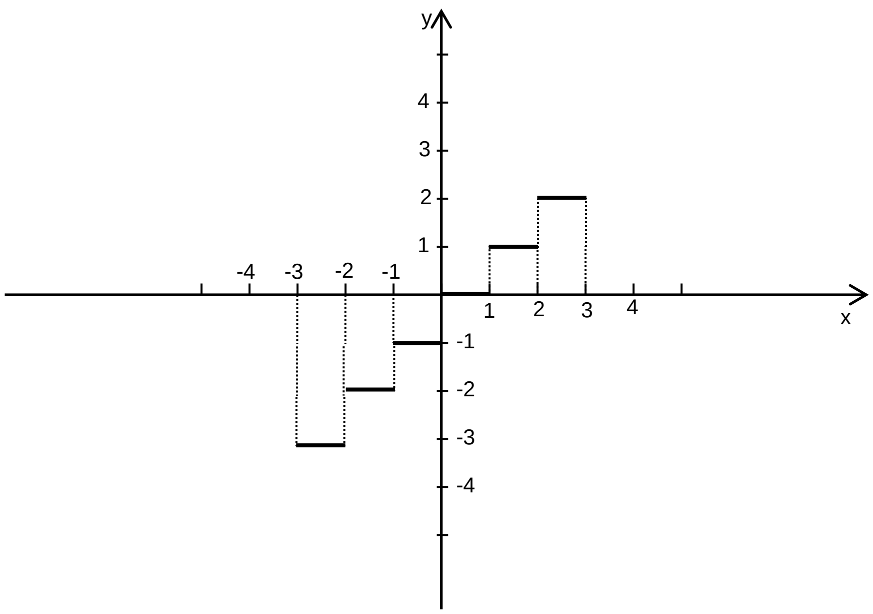


Fig.2.20 : Graphe de la fonction E(x) = n

2 : Soit f, une fonction constante par intervalles définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 2 \text{ si } x < -1 \\ 1 \text{ si } x = -1 \\ -1 \text{ si } -1 < x < 1 \\ 0 \text{ si } 1 \le x \le 2 \\ 2 \text{ si } x = 2 \\ 1 \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

Le graphe de cette fonction en repère orthonormé se présente comme suit :

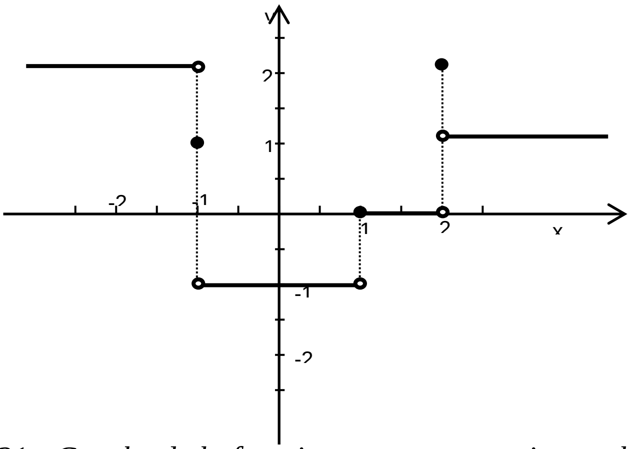


Fig.2.21 : Graphe de la fonction constante par intervalles

3° Fonctions linéaires

A. Définition

La fonction ***f(x) = ax + b***, définie pour toutes les valeurs de $x \in \Re$ et où **a** et ***b*** sont des constantes réelles, est dite « fonction linéaire ». Elle est parfois appelée fonction affine si ***a*** et ***b*** $\in \Re^*$.

B. Représentation graphique

Le graphe d'une fonction linéaire est une droite. Ce graphe est largement influencé par les valeurs des paramètres constants a et b. La direction de la droite de fonction linéaire ***f(x) = ax+b*** dépend uniquement du paramètre constant ***a*** associé à la variable x. Le paramètre constant ***a***, appelé « ***coefficient angulaire*** » ou « ***pente de la droite*** », mesure la variation de y $(\Delta y = y_1 - y_0)$ par rapport à la variation de x $(\Delta x = x_1 - x_0)$. Donc :

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

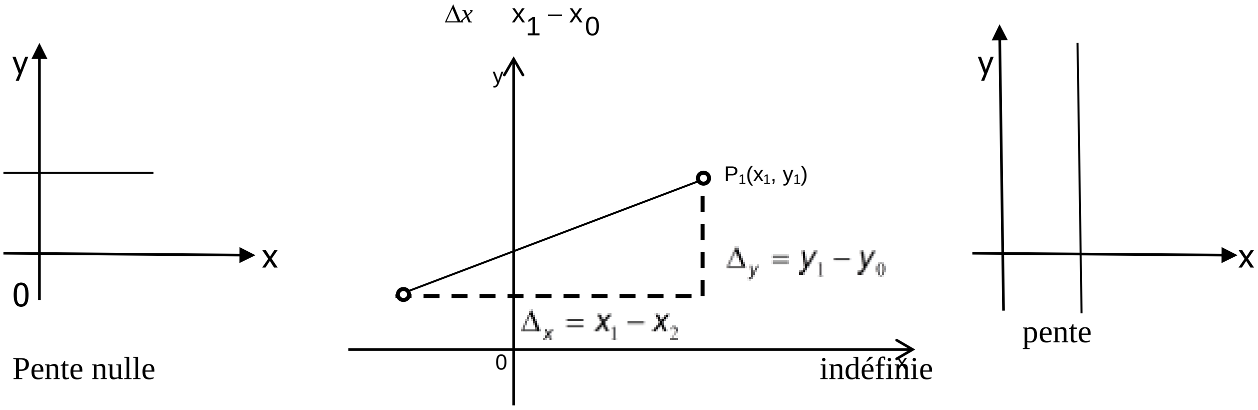


Fig.2.22 : Coefficient angulaire ou pente.

La valeur de la pente indique également le **degré d'inclinaison de la droite**. Plus la valeur absolue de la pente est grande, plus la pente de la droite est inclinée. Une pente positive indique que la droite est dirigée vers le haut, de gauche à droite (droite croissante) ; une pente négative indique que la droite est dirigée vers le bas, de gauche à droite (droite décroissante). Si la pente est égale à zéro, c'est-à-dire $\Delta y = 0$, la droite sera horizontale et parallèle à l'axe des abscisses.

Notons que l'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées (axe des y) indique l'ordonnée à l'origine de cette droite. Tandis que l'intersection de la droite avec l'axe des x désigne l'abscisse à l'origine de cette droite.

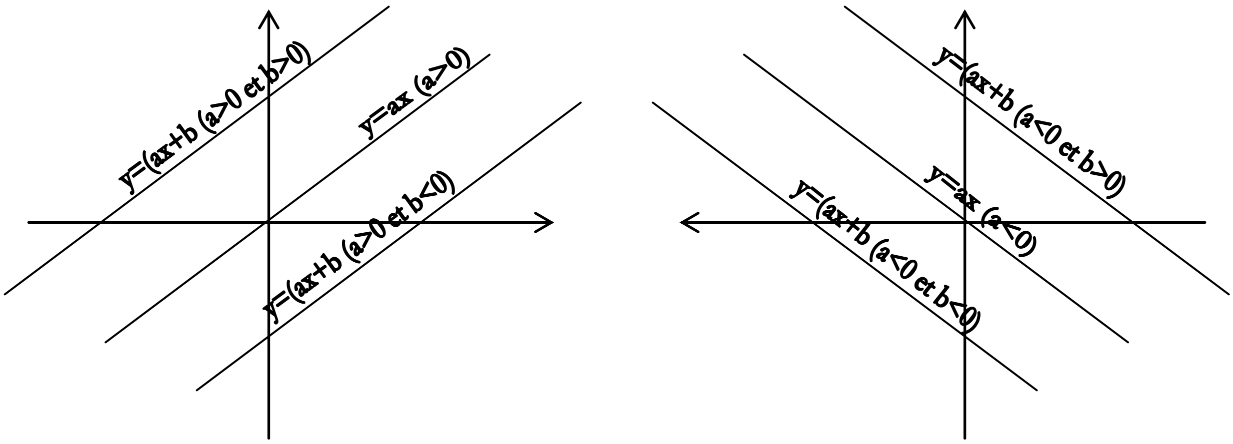


Fig.2.23 : graphes des fonctions linéaires

C. Interprétation de la pente d'une fonction linéaire

La pente d'une droite mesure la variation y quand on se déplace le long de la droite en accroissant x d'une unité. Donc, la pente d'une fonction linéaire mesure l'accroissement ou la variation de f(x) pour chaque unité d'augmentation de x. Elle mesure le taux de croissance ou, plus exactement, le taux de variation de la fonction f(x).
Par exemple, si C = f(Y) est une fonction de consommation qui relie le niveau de consommation (C) au niveau du revenu (Y), alors la pente de cette fonction mesure l'accroissement du niveau de consommation dû à une variation unitaire du revenu.

D. Applications

❖ ***Quelle est l'équation d'une droite passant par le point (x_0, y_0) ?***

Nous savons que l'équation générale d'une droite est : $y = ax + b$ (1)

Si la droite passe par le point (x_0, y_0), on obtient : $y_0 = ax_0+b$ (2)

En soustrayant (2) à (1), il vient : $y - y_0 = a (x - x_0)$ (3)

❖ ***Quelle est l'équation de la droite passant par deux points (x_0, y_0) et (x_1, y_1) ?***

Etant donné que la droite passant par le point (x_0, y_0) est définie par la relation (3) :
$y - y_0 = a (x - x_0)$ et que le coefficient angulaire est donné par :

$$a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0},$$

alors l'équation de la droite cherchée est donc :

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) \qquad (4)$$

Exemple :

Dix appareils cellulaires sont vendus lorsque le prix est de 80 \$. 20 appareils cellulaires sont vendus si le prix est fixé 60 \$. Quelle est la fonction de demande ?

Réponse :

$X_0 = 80$, $y_0 = 10$;

$X_1 = 60$, $y_1 = 20$.

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) = y - 10 = \frac{20 - 10}{60 - 80}(x - 80)$$

$$= y - 10 = \frac{10}{20}(x - 80) \; y = -\frac{1}{2}x + 50$$

❖ ***Equation d'une droite en fonction des coordonnées à l'origine***

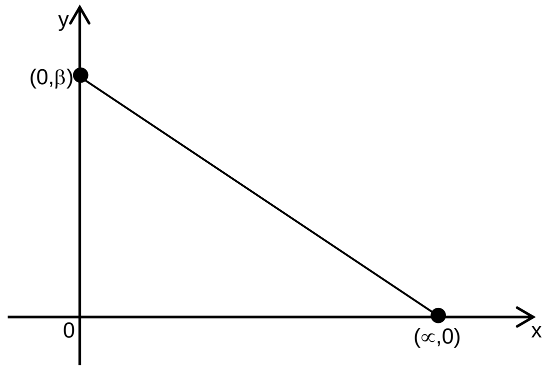


Fig. 2.24 : Graphe d'une fonction linéaire

Comme $(x_1, y_1) = (\alpha, 0)$ et $(x_2, y_2) = (0, \beta)$, et à partir de la relation (4), on obtient :

$$y = -\frac{\beta}{\alpha}(x - \alpha)$$

ou

$$\alpha y + \beta x = \alpha\beta$$

❖ ***Condition de perpendicularité de deux droites***

Deux droites sont perpendiculaires ou orthogonales si le produit de leurs coefficients angulaires est égal à -1.

En effet, si $y = a_1x + b_1$ (6)

et $y = a_2x + b_2$ (7)

alors, les droites (6) et (7) sont orthogonales impliquent que : $a_1a_2 = -1$. (8)

4° Fonction identité

On définit la fonction identité f comme une fonction linéaire qui associe à tout élément x de E le même élément dans l'ensemble d'arrivée.

Formellement, on écrit :

$f : \Re \rightarrow \Re / x \rightarrow f(x) = x$

Donc, la fonction identité est un cas particulier d'une fonction linéaire f(x) = ax+b où a=1 et b=0. Son graphe est donc une droite passant par l'origine.

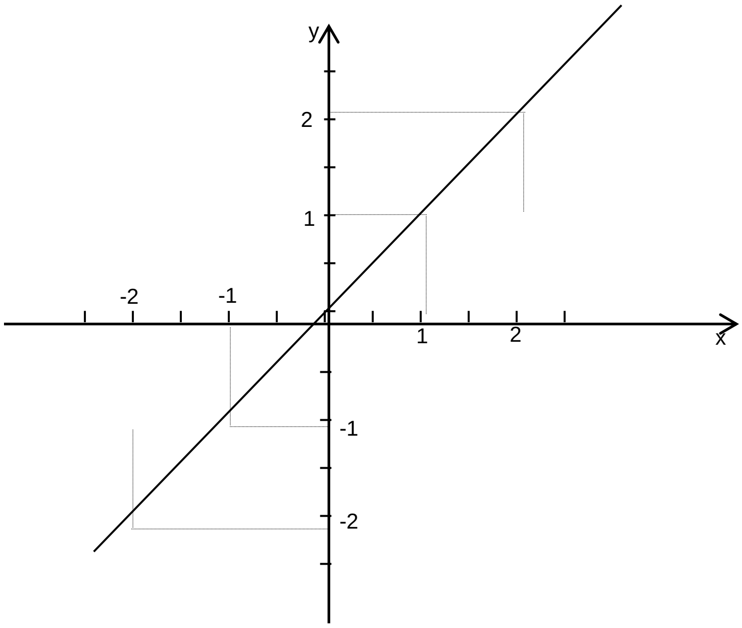


Fig.2.25 : Graphe de la fonction identité.

5° Fonction affine par intervalles

La fonction f de R vers R, définie sur un intervalle I, est dite fonction affine par intervalles sur I si, et seulement si, il existe une partition de I en un nombre fini d'intervalles tels que, sur chaque intervalle de la subdivision, f soit une fonction affine.

Exemple 2.22 :

Soit la fonction affine par intervalles sur R : f(x) = $\begin{cases} -x-1 & si \quad x \leq 0 \\ 2x+1 & si \quad 0 < x < 2 \\ 2x-4 & si \quad x \geq 2 \end{cases}$

Graphiquement, on a :

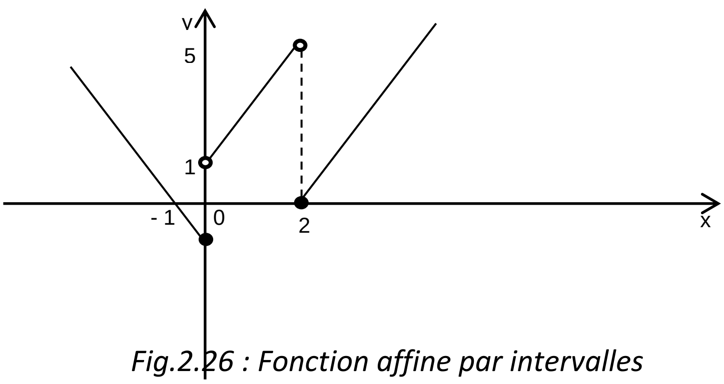


Fig.2.26 : Fonction affine par intervalles

2.4.2. Fonctions rationnelles

Une fonction rationnelle est une fonction de la forme : f(x) = $\frac{P(x)}{Q(x)}$

où P(x) et Q(x) sont des polynômes. Elle est définie en dehors des zéros du dénominateur. Ces zéros du dénominateur s'appellent « les pôles de la fonction rationnelle ».

La forme générale des fonctions rationnelles s'écrit aussi comme :

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0}$$

Trois cas sont alors possibles :

a) m > n : la fonction rationnelle est dite propre ;
b) m < n et
c) m = n.

Si le degré du polynôme P(x) est supérieur ou égal au degré du polynôme Q(x), c'est-à-dire d°(P) $\geq$ d°(Q), la fonction f(x) est dite *fonction rationnelle impropre*.

2.4.3 Fonctions puissances

A. Définition

On appelle fonction puissance d'exposant α toute expression de la forme :

$$y = f(x) = ax^{\alpha}$$

où a et α sont des constantes quelconques. Les paramètres constants a et α donnent à cette fonction sa forme particulière.

On suppose toujours qu'un chiffre ou une variable sans exposant est élevé à la puissance 1 $x = x^1$, $8 = 8^1$.

B. Fonctions puissances particulières

a) Fonctions puissances paires

Une fonction puissance $f(x) = ax^{\alpha}$, où α est un nombre entier positif pair, est appelée « *fonction puissance à exposant entier positif pair* » ou simplement « *fonction puissance paire* ».

Sa courbe représentative est la *parabole* qui a l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

Il convient de souligner que toutes les fonctions puissances paires sont du « type parabolique » ; les branches de leur graphe sont d'autant plus réservées que α est grand.

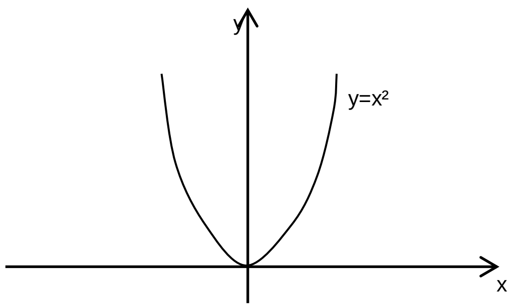


Fig. 2.27 : Graphe de f(x) = x^2
(Parabole standard

b) Fonctions puissances impaires

Si l'exposant α est un entier positif impair, la fonction puissance $y = ax^{\alpha} = ax^{2p+1}$ (où p est un entier positif) est dite « fonction puissance à exposant entier positif impair » ou simplement « fonction puissance d'ordre impair ».

La courbe représentative d'une fonction puissance à exposant entier positif impair est formée de deux branches paraboliques, symétriques par rapport à l'origine. Cette branche parabolique est négative pour toutes les valeurs négatives de son domaine de définition ($-\infty < x < +\infty$), et admet ainsi un point d'inflexion à l'origine.

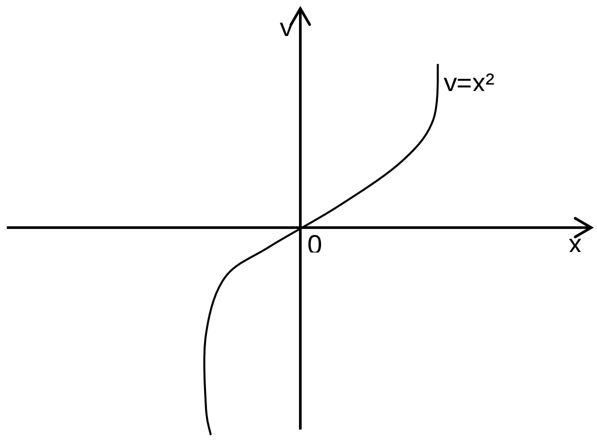


Fig. 2.28 : Graphe de $f(x) = x^3$

Pour les puissances impaires élevées, on aura des graphes semblables à celui de la fonction puissance $f(x) = x^3$, mais plus resserrées, en raison de leur croissance rapide.

c)Fonction puissance à exposant entier négatif

Si l'exposant est un entier négatif, la fonction $y = ax^{\alpha}$ est une fonction puissance à exposant entier négatif.

Selon que l'exposant α de la fonction puissance est pair ou impair, l'on enregistre une différence des formes.

1° L'exposant α est impair

La fonction puissance s'écrit :

$f(x) = ax^{-(2p+1)} = \dfrac{a}{x^{2p+1}}$, où $\alpha = 2p + 1$ et p, entier positif.

La courbe représentative de cette fonction est une hyperbole de la forme.

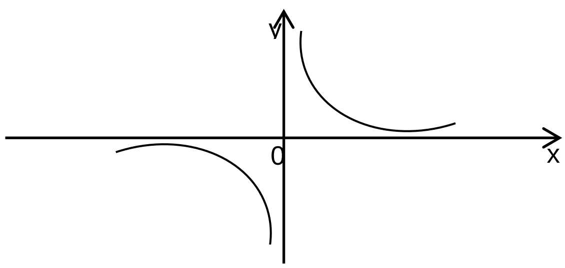


Fig. 2.29 : Graphe de la fonction $f(x) = ax^{-(2p+1)}$

2° L'exposant α est pair

Dans ce cas, la fonction puissance est de la forme :

$$f(x) = ax^{-2p} = \frac{a}{x^{2p}} \text{ (où p est un entier positif).}$$

La fonction puissance à exposant entier négatif pair est une fonction paire dont le graphe admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie. En effet : si

$$f(-x) = a(-x)^{-2p} = \frac{a}{(-x)^{2p}} = \frac{a}{x^{2p}} = f(x)$$

Donc : F(-x) = f(x) → fonction paires

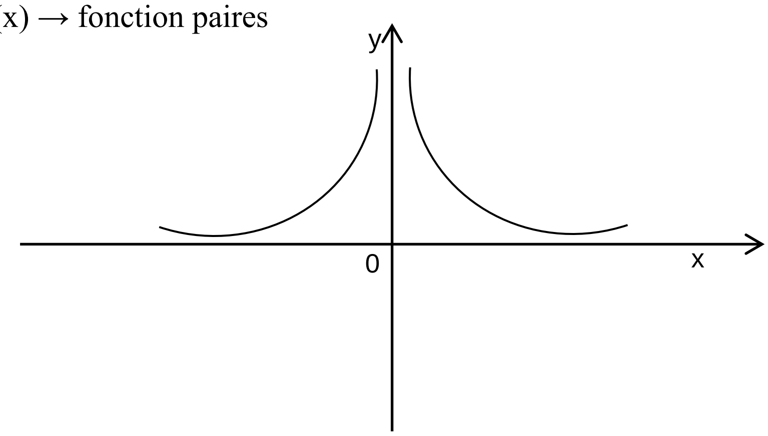


Fig.2.30 : Graphe de la fonction $f(x) = ax^{-2p}$

d) Fonctions puissances non entières

Les fonctions puissances de la forme $f(x) = ax^{\frac{p}{q}}$ où $\alpha = \frac{p}{q}$ et p < q sont appelées « fonctions puissances non entières » ou simplement « fonctions racines ».

a) si p = 1 et q = 2, la fonction racine devient : $f(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$

Sa courbe représentative a une forme parabolique, mais dans le sens horizontal.

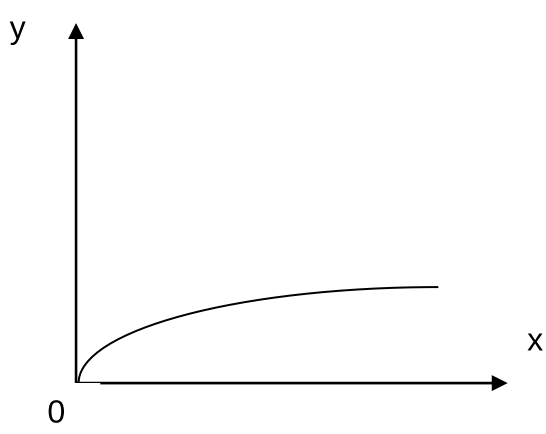


Fig.2.31 : graphe de f(x) = $x^{\frac{1}{2}}$

Il ressort de cette figure que la fonction racine f(x) $= x^{\frac{1}{2}}$ est une fonction strictement croissante mais sa croissance est de plus en plus lente.

b) Si p = 1 et q > 0, on a une fonction racine q^ième^ : $y = x^{\frac{1}{q}}$ ou bien $y = \sqrt[q]{x}$

c) Si l'exposant est négatif, la fonction s'écrit : $y = x^{\frac{-p}{q}}$ ou encore $y = \frac{1}{x^{\frac{p}{q}}}$

C. Propriétés

- $x^{\alpha}\left(x^{\beta}\right) = x^{\alpha+\beta}$
- $\left(x^{\alpha}\right)^{\beta} = x^{\alpha\beta}$
- $(xy)^{\beta} = x^{\beta} y^{\beta}$
- $\left(\frac{x}{y}\right)^{\beta} = \frac{x^{\beta}}{y^{\beta}}$
- $\frac{1}{x^{\beta}} = x^{-\beta}$
- $\frac{x^{\alpha}}{x^{\beta}} x^{\alpha-\beta}$
- $\sqrt{x} = x^{1/2}$
- $\sqrt[\alpha]{x} = x^{1/\alpha}$
- $\sqrt[\beta]{x^{\alpha}} = x^{\alpha/\beta}$

D. Applications économiques de la fonction puissance

Une des applications économiques de la fonction puissance est la loi de Pareto de la distribution du revenu. Selon l'Economiste Vilfredo Pareto, le nombre d'individus N d'une certaine population de taille ***a*** dont le revenu est supérieur à ***x*** est donné par :

$$N = \frac{a}{x^{b}}$$

où b est un paramètre de la population estimé à 1,5 ;

0 < N ≤ ***a*** et 0 < x < Revenu maximum de la population.

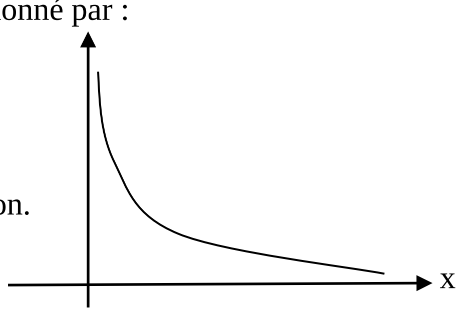


Fig. 2.32 : Loi de Pareto

Exemple :

Si $N = \frac{216x10^{10}}{x^{3/2}}$,

a) Combien d'individus sont des millionnaires ?
b) Combien d'individus gagnent un revenu entre 3600 et 10000 $?
c) Quel est le plus bas revenu des 80 personnes ayant un revenu le plus élevé ?

Réponse :

a) $N = \dfrac{216x10^{10}}{\left(10^6\right)^{3/2}}$ = 216 x 10^{10-9} = 216 x 10 = 2160.

b) Le nombre d'individus ayant un revenu supérieur à 3600 \$ est égal à :

$$N = \frac{216x10^{10}}{(3600)^{3/2}} = \frac{216x10^{10}}{\left(6^2 x10^2\right)^{3/2}} = \frac{216x10^{10}}{6^3\left(10^3\right)} = 10^7$$

Le nombre d'individus ayant un revenu supérieur à 10000 \$ est :

$$N = \frac{216x10^{10}}{(10000)^{3/2}} = \frac{216x10^{10}}{\left(10^4\right)^{3/2}} = \frac{216x10^{10}}{\left(10^6\right)} = 216x10^4$$

Ainsi le nombre d'individus dont le revenu se situe entre 3600\$ et 10000\$ est égal à :

$= 10^7 - 216x10^4$

$= (1000 - 216) \text{ x } 10^4 = 784 \text{ x } 10^4 = 7.840.000$

c) $80 = \dfrac{216x10^{10}}{x^{3/2}} \Rightarrow x^{3/2} = \dfrac{216x10^{10}}{80} = \dfrac{216x10^{10}}{8x10^1} = 27x10^9$

$x = (27 \text{ x } 10^9)^{2/3} = 9 \text{ x } 10^6$ = 9 000 000 \$.

C'est le plus bas revenu des 80 personnes ayant le revenu le plus élevé.

2.3.4 Fonctions exponentielles

A. Définition

La fonction exponentielle en base a est définie par : $f(x) = a^x$

où $a > 0$ et $a \neq 1$.

La base ***a*** est constante et l'exposant ***x*** est variable.

Cette fonction satisfait aux conditions générales ci-après :

1° $f(\alpha + \beta) = f(\alpha)f(\beta)$ où α et β sont fonctions de x.

2° f(1) = a où a est la base constante

3° f(0) = 1, indépendamment de la base.

B. Propriétés

D'après les propriétés des puissances, on a :

1° $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$

2° $a^{x-y} = a^x \cdot a^{-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$

2°' $a^{-x} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^x$

Exemple : $2^{-x} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

$\left(la\ base\ \ a = \dfrac{1}{2}\right)$

3° $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$

4° $(ab)^x = a^x \cdot b^x$

5° $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x} = a^x \cdot b^{-x}$

6° $a^0 = 1$ (toute base à la puissance 0 = 1)

C. Bases des fonctions exponentielles

Théoriquement, tout nombre positif différent de 1 peut servir de base. Cependant, on utilise couramment les nombres ci-après :

1° a = 2 : base largement utilisée dans le traitement de l'information (en informatique). Ainsi, pour caractériser les bytes, on a :

- le kilo-byte (Kb) = 2^{10} bytes = 1024 bytes ;
- le méga-byte (Mb) = 2^{20} bytes = 1 048 576 bytes ;
- le giga-byte (Gb) = 2^{30} bytes = 1 073 741 824 bytes.

2° a = 10 : base décimale.

3° a = e : base naturelle ou népérienne. Le nombre irrationnel e qui vaut 2.718281828 est en réalité la limite de $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ lorsque n tend vers l'infini : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$

D. Tableaux de variation et graphes

Le sens de variation d'une fonction exponentielle, tout comme son graphe, dépend de la valeur de sa base. En effet :

- si a > 1

x	$-\infty$		0		1	$+\infty$
a^x	0 ↗	↗	1	↗	a	∞

- si 0 < a < 1

x	$-\infty$		0		1	$+\infty$
a^x	$+\infty$ ↘	↘	1	↘	a	0

Les courbes représentatives de ces fonctions sont :

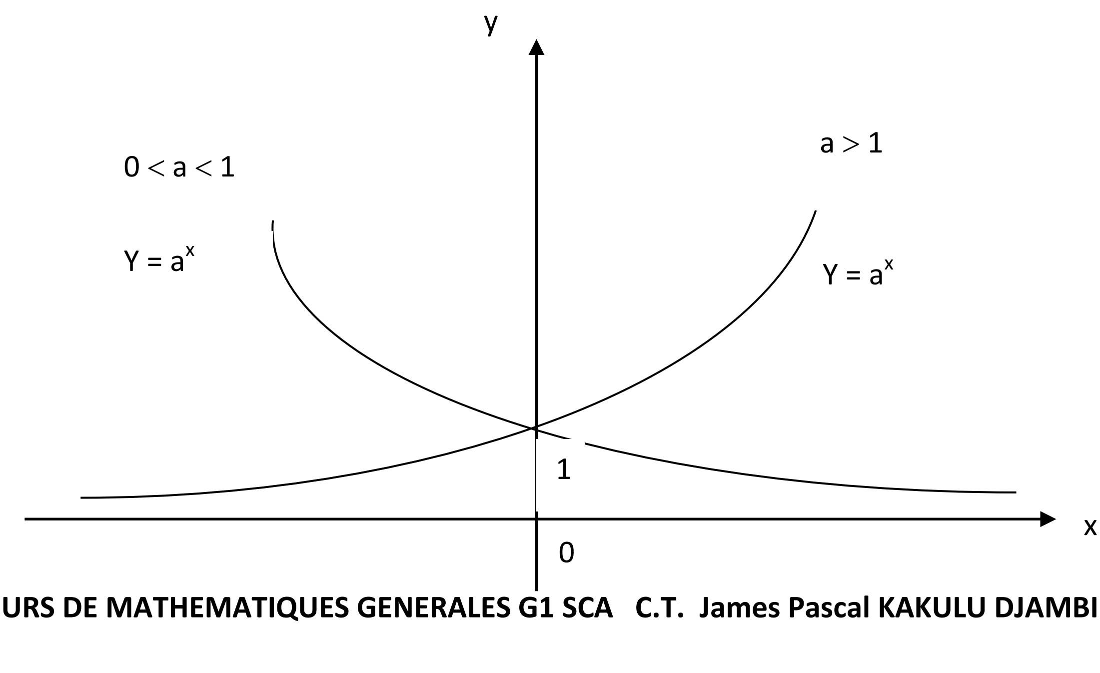


Fig.2.33 : Fonctions exponentielles

E. Applications

1° Densité gaussienne et densité normale

Il s'agit là de deux fonctions exponentielles essentielles de la théorie des probabilités et de la statistique.

a) La densité gaussienne est définie par : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

Il s'agit d'une fonction paire, définie et continue dans R.

Le graphe de cette fonction a la forme ci-après :

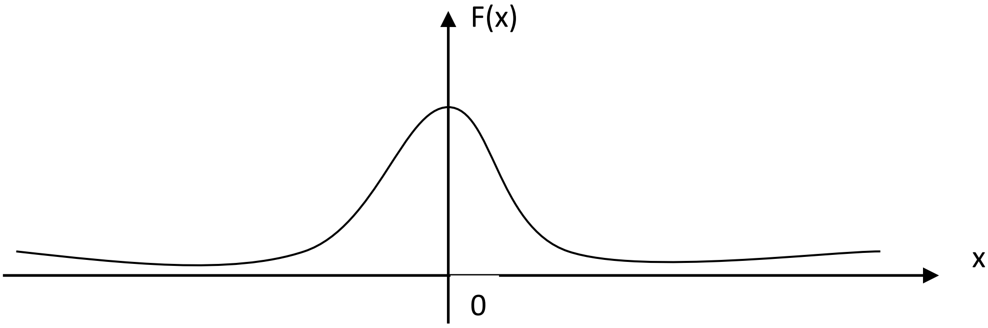


Fig.2.34 : Graphe de densité gaussienne

b) La densité normale des paramètres (μ, τ) est définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\tau}\right)^2} \text{ ou } f(x) = \left(2\pi\tau^2\right)^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\tau^2}\right]$$

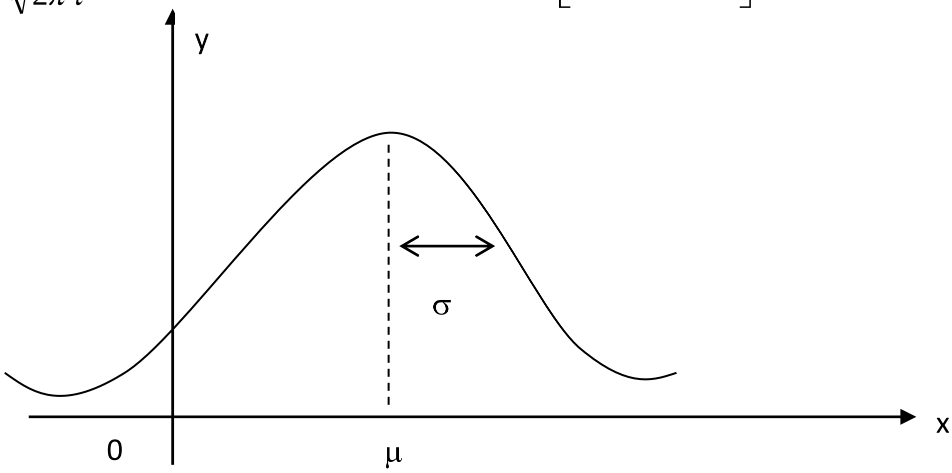


Fig. 2.35 : Graphe de densité normale

La densité normale est la généralisation de la densité gaussienne puisqu'on retrouve cette dernière pour $\mu = 0$ et $\tau = 1$.

2° Fonction logistique

Cette fonction est utilisée en économie pour représenter la croissance d'une grandeur économique, partant de rien, évoluant en accélérant, puis en ralentissant jusqu'à un plafond (exemple, le cycle de vie d'un produit). Elle est parfois utilisée en démographie pour représenter la croissance d'une population au cours du temps dans certaines circonstances.

On appelle **fonction logistique** la fonction : $f(x) = \dfrac{c}{1+be^{-ax}}$

où a, b et c sont des réels strictement positifs.

La fonction logistique, définie dans R, est strictement croissante et comprise entre 0 et c.

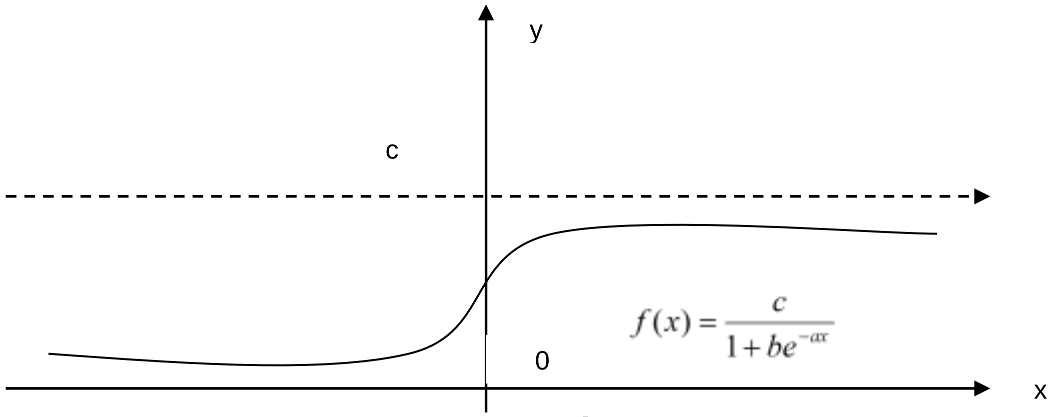


Fig. 2.36 : Fonction logistique

2.3.5 Fonctions logarithmes

A. Notions de logarithme

Le logarithme d'un nombre est la puissance à laquelle une base donnée *a* doit être élevée pour permettre de trouver ce nombre. D'où la notation ci-après : $y = \log_a x$ où la base *a* est un nombre réel strictement positif et différent de 1.

Exemples

1° $\log_{10} 10 = 1$, car $10^1 = 10$

2° $\log_{10} 1 = 0$, car $10^0 = 1$

3° $\log_{10} 0{,}01 = -2$, car $10^{-2} = 0{,}01$

4° $\log_{10} 0{,}1 = -1$, car $10^{-1} = \dfrac{1}{10} = 0{,}1$

4° $\log_2 8 = 3$, car $2^3 = 8$

6° $\log_2 32 = 5$, car $2^5 = 32$

Les logarithmes ordinaires ont une base égale à 10 et s'écrivent log10 ou plus simplement log. Comme $10^2 = 100$, 2 est le logarithme ordinaire de 100. Ainsi, $\log_{10} 1000 = 3$, car $10^3 = 1000$.

B. Définition

En intervertissant les variables d'une fonction exponentielle f, définie par l'expression $y = a^x$, on obtient une nouvelle fonction g définie par $x = a^y$, telle que toute paire ordonnée des nombres dans la fonction f a son correspondant dans g, représentée dans l'ordre inverse.

Exemples

1° Si f(2) = 4, alors g(4) = 2 ;

2° Si f(3) = 1000, alors g(1000) = 3 ;

3° Si f(3) = 8, alors g(8) = 3.

La nouvelle fonction g, l'inverse de la fonction exponentielle f, est appelée **fonction logarithme de base a**.

Généralement, au lieu d'écrire $x = a^y$, la fonction logarithme de base **a** se note :

$y = \log_a x$ où a > 0 et a ≠ 1 ; x > 0

Les fonctions logarithmes se caractérisent par les propriétés suivantes :

- le domaine de définition de la fonction logarithme est l'ensemble de tous les nombres réels positifs (R_+^*)
- quand x = 1 ⇒ y = 0, indépendamment de la base, et lorsque x = a (où a est la base) ⇒ y = 1.

C. Logarithmes de base 10

La fonction logarithme de base 10 est une fonction largement utilisée que l'on écrit : y = log x sans toutefois chercher à préciser la base. Cette fonction est aussi appelée « **fonction logarithme décimal** » :

$y = \log x \Leftrightarrow 10^y = x$ (pour tout x positif).

D. Logarithmes de base e

La fonction réciproque de e^x s'appelle la **fonction logarithme népérien** ou **naturel**, et s'écrit :

$y = \log_e x \quad \Rightarrow \quad e^y = x$

Généralement, on utilise les notations suivantes :

$y = \ln x$ ou encore $y = \log x$

Donc $y = \ln x$ est la puissance à laquelle il faut élever la base e = 2.718281 pour obtenir x.

E. Propriétés

1° $\log(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$

(où x_1 et x_2 sont positifs) ;

2° $\log_a(1/x) = \log_a 1 - \log_a x = -\log_a x$
(car $\log_a 1 = 0$) ;

3° $\log_a(x_1 / x_2) = \log_a x_1 - \log_a x_2$;

4° $\log_a x^n = n \log_a x$

5° $\log_a\left(\sqrt[n]{x^m}\right) = \log_a x^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n}\log_a x$;

6° $\log_a a = 1$;

7° $\log_a 1 = 0$;

8° $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$
(changement de base) ;

9° $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
(changement de base) ;

10° $\log_{\frac{1}{a}} x = \frac{\ln x}{\ln\left(\frac{1}{a}\right)} = -\frac{\ln x}{\ln a} = -\log_a x$

F. Tableaux de variation des fonctions logarithmes

Soit une fonction logarithme : $y = \log_a x$

- Si a > 1 :

X	0		1		a		+ ∞
$\log_e x$	- ∞	↗	0 1	↗	+ ∞	↗	

Pour a > 1, la fonction $f(x) = \log_a x$ est croissante et concave.

- Si 0 < a < 1, la fonction logarithme en base a est strictement décroissante et strictement convexe. Son tableau de variation est donc :

X	0	a	1	+ ∞
$\log_e x$	+ ∞	1 0	- ∞	

G. Lien entre fonction logarithme et fonction exponentielle

Les fonctions logarithmes sont l'inverse de certaines fonctions exponentielles. Il est donc facile d'exprimer une fonction logarithme sous la forme d'une fonction exponentielle, ou certaines fonctions exponentielles sous la forme de fonctions logarithmes. Comme $\log_a y = x$ peut se lire « **x est la puissance à laquelle il faut élever *a* pour obtenir *y*** », $y = a^x$.
Inversement, étant donné $y = a^x$, le logarithme de base a de y doit être égal à x : $\log_a y = x$.
Puisque la fonction logarithme est la réciproque de la fonction exponentielle, on peut établir l'équivalence ci-après :

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$$

De cette équivalence, on déduit les propriétés suivantes :

1° $\forall x \in]0, +\infty]$, $a^{\log_a x} = x$ ou bien $\exp_a(\log_a x) = x$;

2° $\forall x \in \Re$, $\log_a(a^x) = x$ ou bien $\log_a(\exp_a x) = x$;

En particulier :

3° $\forall x \in \Re$, $\ln(e^x) = x$;

4° $\forall x \in \Re_+^*$, $e^{\ln x} = x$

Ainsi : $e^{\ln a} = a$; $e^{\ln x} = x$; $e^{\ln f(x)} = f(x)$

De même : $\ln(e^a) = a$; $\ln(e^x) = x$; $\ln(e^{f(x)}) = f(x)$
(Le logarithme naturel de toute expression en est n (ln e^n = n si n = nombre réel).

Puisque $y = a^x$ et $y = \log_a x$ sont des fonctions inverses, leurs courbes représentatives sont symétriques par rapport à la droite y = x.

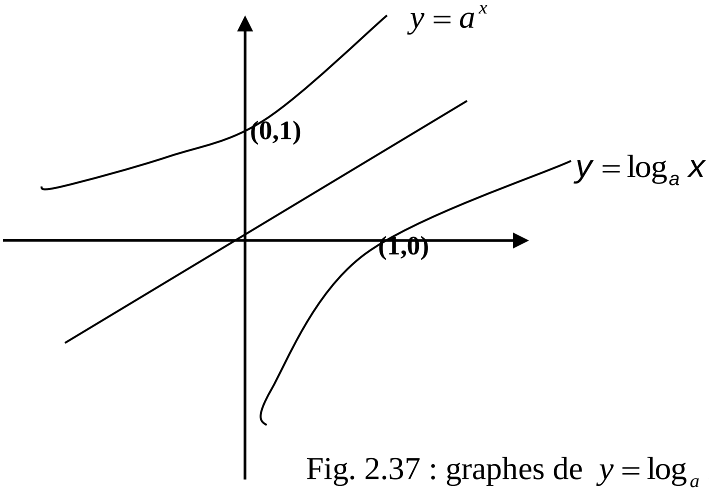


Fig. 2.37 : graphes de $y = \log_a x$ et $y = a^x$

Exemples

Ex. 1 : Transformer les logarithmes suivants en leurs formes exponentielles équivalentes

1° $\log_8 64 = 2 \Rightarrow 64 = 8^2$

2° $\log_7 \frac{1}{7} = -1 \Rightarrow \frac{1}{7} = 7^{-1}$

Ex. 2 : Convertir les logarithmes naturels suivants en fonctions exponentielles naturelles

1° $\ln 20 = 2.99575 \Rightarrow 20 = e^{2.99575}$

2° $\ln 3 = 1.09861 \Rightarrow 3 = e^{1.09861}$

Ex. 3 : Changer les formes exponentielles suivantes en formes logarithmiques.

1° $100 = 10^2 \Rightarrow \log_{10} 100 = 2$

2° $\frac{1}{9} = 3^{-2} \Rightarrow \log_3 \frac{1}{9} = -2$

H. Applications économiques des fonctions exponentielles et logarithmes

Les fonctions exponentielles décrivent des situations de croissance discrète à taux constant, c'est-à-dire de croissance intervenant sur des intervalles discrets tels que l'année ou le trimestre.

On utilise fréquemment les fonctions exponentielles dans les problèmes où interviennent des intérêts composés, une actualisation ou une dépréciation.

Les fonctions exponentielles naturelles y = e^x où e = $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2{,}718281$ décrivent des situations de croissance continue à taux constant, c'est-à-dire des situations où la croissance est permanente plutôt que d'intervenir sur des intervalles discrets. En économie, les fonctions naturelles servent à exprimer des grandeurs telles que des taux de croissance démographique ou la croissance du poids du bétail dans des enclos d'engraissage.

Dans de nombreux problèmes économiques, il faut comparer des sommes d'argent à des dates différentes du temps dans le même calcul. Par exemple, l'analyse coût/avantage de la construction d'une usine doit permettre de comparer, dans la même équation, le coût de construction de cette année avec les coûts de maintenance des années futures de l'usine et avec les bénéfices attendus de l'exploitation de l'usine pour les années futures. Le moyen le plus simple d'effectuer de telles comparaisons est d'utiliser le concept de **valeur présente** ou de **valeur actuelle** en rapportant à la date présente ou actuelle tous les flux d'argent.

H.1 Les intérêts composés

Un principal donné (P) composé annuellement au taux d'intérêt (i) pendant un nombre d'années (t), aura à la fin de la période une valeur acquise (S) exprimée par la fonction exponentielle

$$\mathbf{S = P(1 + i)^t}$$

où 1 + i est la base, t, l'exposant variable, P une constante qui multiplie la base.

Exemples :

- Si P = 100 F, i = 0,10 et t = 2, S = 100 $(1 + 0{,}10)^2 = 100(1{,}10)^2 = 100(1{,}21) = 121$.
- Une personne dépose la somme de 5000 $ au taux d'intérêt de 4 %. Combien gagnera-t-elle après10 ans si l'intérêt est payable annuellement ?

  $\mathbf{S = 5000(1 + 0{,}04)^{10} = 5000(1{,}04)^{10}}$

  Log S = log 5000 + 10 log 1,04
  = 3,699 + 10(0,0170) = 3,8690

  Log S = 3,8690 $\Rightarrow$ S = 7396,67 $

Si le principal est composé m fois par an pendant t années, on aura :

$$\mathbf{S} = P\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mt}.$$

- Si l'intérêt est payable trimestriellement, on a m = 4, t = 10 et mt = 40:

$$S = 5000\left(1+\frac{0{,}04}{4}\right)^{40}.$$

Utilisant les logarithmes, on obtient :

Log S = log 50000 + 40 log 1,01
= 3,699 + 40(0,0043)
= 3,699 + 0,172 = 3,8710

Log S = 3,8710 $\Rightarrow$ S = 7430 $

S'il est composé de façon continue à un taux d'intérêt de 100 % pendant un an, on aura :

$$\mathbf{S} = P\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m} = \mathbf{P(2{,}71828)} \cong \mathbf{Pe.}$$

Dans le cas de taux d'intérêt r différents de 100 % et de période t différentes de l'année, S vaudra :

$$\mathbf{S = P\,e^{rt}}$$

Dans le cas de taux de croissance négatifs, comme des taux de dépréciation ou de déclin ou encore de déflation, les mêmes formules s'appliquent, mais i et r sont négatifs.

Ainsi, la valeur d'une machine de 100 000 F qui se déprécie de 25 % chaque année est donnée par la fonction exponentielle :

$$\mathbf{S = 100000\,(1 - 0{,}25)^{1},}$$

où (1 – 0,25) est la base, 1 l'exposant et 100000 une constante qui multiplie la base. Ainsi :

S = 100000 (0,75) = 75000

H.2 Actualisation

L'actualisation est le processus qui permet de déterminer la valeur actuelle (P) d'une somme d'argent à recevoir plus tard (S). En cas de composition annuelle et si $S = P(1 + i)^t$, alors,

$$\mathbf{P} = \frac{S}{(1+i)^t} = S\,(1+i)^{-t}.$$

De même, si la composition intervient plusieurs fois dans l'année,

$$\mathbf{P} = = S\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-mt}.$$

Si la composition est continue,

$P = Se^{-rt}$

Exemple :

La valeur actuelle d'une obligation à 5 ans, de valeur faciale égale à 1000, offre au taux de 9 % avec une composition annuelle,

P = $S\left(1+i\right)^{-t} = 1000(1{,}09)^{-5}$.

Log P = log 1000 + (-5 log 1,09)

= 3 – 5(0,374) = 2,8130

P = antilog 2,8130 = 650,1 F

H.3 Actualisation d'un flux de revenu futur

Un investissement dans une usine ou un équipement rapporte normalement un flux de revenu pendant une période de plusieurs années.

La valeur actuelle d'un flux de revenu futur est la somme des différentes composantes actualisées et ramenées à leur valeur actuelle. Si chaque composante (S) est égale et si le taux d'intérêt est composé annuellement, la formule d'actualisation est la suivante :

$$\mathbf{P} = S\left(\frac{1}{i}\right)\left[1-\frac{1}{(1+i)^t}\right].$$

Ainsi, la valeur actuelle de 100 F reçus chaque année pendant 8 ans quand le taux d'actualisation social est de 6 % est :

$$P = 100\left(\frac{1}{0{,}06}\right)\left[1-\frac{1}{(1{,}06)^8}\right]$$

$$P = 100\left(\frac{1}{0{,}06}\right)\left(1-0{,}627\right) = 621{,}7$$

H.4 Fonctions de croissance

Ces fonctions fréquemment utilisées en économie et gestion sont de 3 types. Il s'agit de la fonction de croissance biologique, des Courbes de Gompertz et des courbes d'apprentissage.

- **Fonction de croissance biologique**

Elle est représentée par la relation :

$$\mathbf{N = N_0\, R^t}$$

où N est le nombre d'individus d'une population au temps t ;

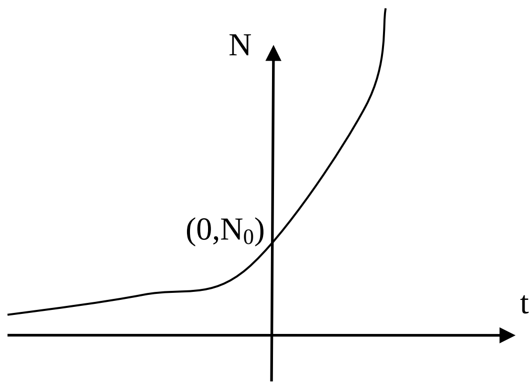
N_0 est le nombre d'individus d'une population au temps 0 (initial) ;

R > 0 est le taux de croissance.

Elle s'applique pour décrire la croissance prématurée d'une organisation se développant à un rythme accéléré.

Exemple :

Considérons une entreprise qui démarre ses activités avec un effectif de 5 personnes. A la fin de chaque année, chaque agent peut drainer 3 assistants. Quel sera l'effectif du personnel de cette entreprise après 10 années d'exercice ?



Réponse :

N = 5(410) = 5(1 048 576)
= 4.242.880 employés après 10 ans

Fig. 2.38 : fonction de croissance biologique

- **Courbes de GOMPERTZ**

Ces courbes sont représentées par une équation de la forme :

$$\mathbf{N = c\, a^{Rt}}$$

Où N = nombre d'individus d'une population au temps t
R = taux de croissance (0< R <1)
a = proportion de la croissance initiale
c = croissance à la maturité

Si t = 0, N = CA qui correspond à N_0 de la fonction de croissance biologique.

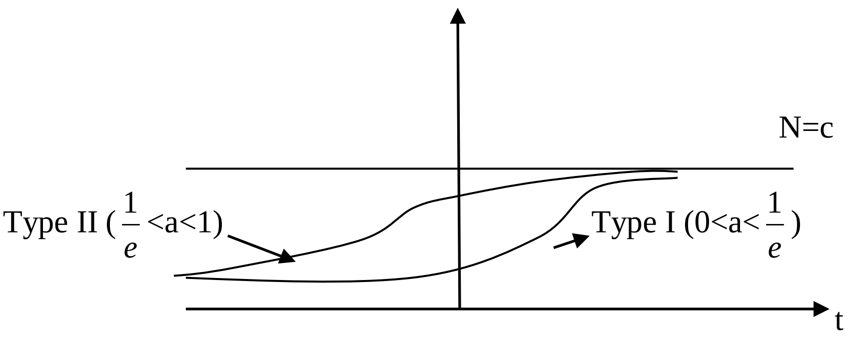


Fig. 2.39 : Courbe de Gompertz

Ces courbes ont été couramment utilisées par les psychologues afin de décrire les aspects variés de croissance et de développement humain. Les théoriciens en organisation s'en sont servi pour brosser la croissance de plusieurs types d'organisation. Les courbes conviennent aussi dans l'analyse des fonctions de production et du revenu en économie et en gestion.

Exemple : Se référant à la prévision des ventes et aux données récoltées après des entreprises de même secteur, le Directeur du personnel d'une grande entreprise de la place estime que les effectifs des employés peuvent être décrits par l'équation $N = 200(0{,}04)^{0{,}5t}$ où N est le nombre d'employés après t années. Quel sera le nombre d'employés après 3 ans ? Quel a été l'effectif au temps t = 0 ?

$$N = 200(0{,}04)^{0{,}5t}$$

Si t = 0, N = 8 agents après 3ans, il sera de :

$$\text{Log } N = \text{Log } 200 + 0{,}5^3 \log 0{,}04$$
$$= 2{,}3010 + 0{,}125\ (1,\ 3979)$$
$$= 2{,}3010 - 0{,}1747375$$
$$= 2{,}1263$$

N = 133,75 = 134 Agents

- **Courbes d'apprentissage**

Ces courbes qui utilisées pour analyser certaines fonctions de coût et de production, sont de la forme :

$$\mathbf{Y = C - a\, e^{-kx}}$$

où C, a et k sont > 0.

Si le nombre d'articles Y produits, jour pour jour, après le démarrage du processus de production, est donné par $\mathbf{Y = 200\ (1 - e^{-0,1x})}$. Combien d'articles seront fabriqués journellement 10 jours après le démarrage ?

Réponse :

$\mathbf{Y = 200\ (1 - e^{-0,1 \times 10}) = 200\ (1 - e^{-1})}$

$\mathbf{= 200\ (1 - 0,368)}$

$\mathbf{= 200\ (0,632)}$

= 126,4 articles,

soit 63,2 % du maximum de 200 articles.

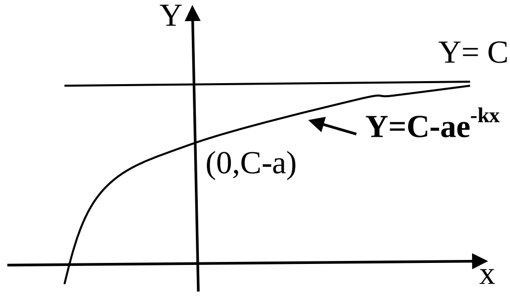


fig. 2.40 : courbe d'apprentissage

2.3.6 Fonctions trigonométriques

En Economie, certains phénomènes tels que les cycles ou les fluctuations économiques suivent des schémas réguliers périodiques. Les fonctions de base pour étudier de tels fonctionnements réguliers et cycliques sont les fonctions **trigonométriques** (ou angulaires) et les fonctions **circulaires** (ou arcs).

Les fonctions trigonométriques (sin, cos, tg et cotg) sont définies comme étant les lois qui, à x, associent le nombre trigonométrique correspondant ; l'angle x est mesuré en radians.

Les fonctions circulaires (arcsin, arcos, arctg, arcotg), appelées aussi **fonctions trigonométriques réciproques**, déterminent la valeur en radians de l'angle pour lequel une fonction trigonométrique prend une valeur donnée.

A. Définitions et notations

Soit le triangle rectangle 0AL dont l'angle en 0 est θ se situant au centre d'un cercle de rayon unité R et étant évalué dans le sens contraire des aiguilles d'une montre :

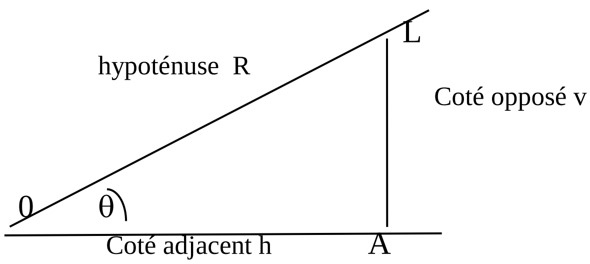


Fig.2.41 : Angle θ dans un triangle rectangle.

Les six fonctions trigonométriques de θ se définissent en prenant le rapport des longueurs de ces trois côtés du triangle rectangle 0AL :

$\sin\theta = \dfrac{côté\ opposé}{hypothénuse} = \dfrac{|AL|}{|OL|} = \dfrac{v}{R}$; $\qquad \cos\theta = \dfrac{côté\ adjacent}{hypothénuse} = \dfrac{|OA|}{|AL|} = \dfrac{h}{R}$;

tangente θ $= tg\ \theta = \dfrac{côté\ opposé}{côté\ adjacent} = \dfrac{|AL|}{|OA|} = \dfrac{v}{h} = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$;

$$\text{cotangente}\theta = \cot g\,\theta = \frac{\textit{côté adjacent}}{\textit{côté opposé}} = \frac{|OA|}{|AL|} = \frac{h}{v} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$\text{sécante } \theta = \sec\theta = \frac{\textit{hypothénuse}}{\textit{côté adjacent}} = \frac{|OL|}{|OA|} = \frac{R}{h} = \frac{1}{\cos\theta};$$

$$\text{cosécante } \theta = \operatorname{cosec}\theta = \frac{\textit{hypothénuse}}{\textit{côté opposé}} = \frac{|OL|}{|AL|} = \frac{R}{v} = \frac{1}{\sin\theta}$$

Où $|OA|$ indique la longueur du segment 0A. Notons que toutes ces fonctions sont des rapports de longueur et, partant, des nombres abstraits.

Les signes des fonctions trigonométriques sont les suivants dans chacun des quatre quadrants :

$$\begin{array}{c|c} + & + \\ \hline - & - \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|c} - & + \\ \hline - & + \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|c} - & + \\ \hline + & - \end{array}$$

sin, csc — cos, sec — tan, cot

Les unités de mesure des angles sont le degré (°), le grade (gr) et le radian (rd). Les deux premières unités représentent respectivement la 360^e et la 400^e partie du tour de la circonférence trigonométrique. Le radian est, quant à lui, l'angle au centre de la circonférence trigonométrique qui intercepte un arc de longueur 1 (égale au rayon). Le degré est lui-même subdivisé en 60 minutes ('), chacune de celles-ci contenant 60 secondes ('').

Comme il y a 2π radians dans un cercle,

$1° = \left(\frac{\pi}{180}\right)$ radians $\cong$ 0,01745 radians

1 tour = 360° = 400 gr = 2π radians

180° = π radians

$90° = \left(\frac{\pi}{2}\right)$ radians

$45° = \left(\frac{\pi}{4}\right)$ radians

1 rd = 57° 17' 45''

B. Valeurs des fonctions trigonométriques

Il existe un certain nombre d'angles particuliers dont on peut trouver facilement leurs valeurs trigonométriques. C'est le cas de 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 180°, 270°, 360°,…

La valeur des fonctions trigonométriques peut être obtenue géométriquement comme suit :

Si θ = 45° = $\left(\frac{\pi}{4}\right)$ radians, h = v et utilisant le théorème de Pythagore[1], $R^2 = h^2 + v^2$ et

R = $\sqrt{h^2 + v^2}$ = v $\sqrt{2}$. Donc :

[1] Le théorème de Pythagore stipule que « dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit »

$$\sin\theta = \frac{v}{v\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}},\ \cos\theta = \frac{v}{v\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\ \text{ et } \tan\theta = \frac{v}{v} = 1.$$

De même, si θ = 90° = $\left(\frac{\pi}{2}\right)$radians, R = v et h = 0. Dans ce cas :

$$\sin\theta = \frac{v}{v} = 1,\ \cos\theta = \frac{0}{v} = 0,\ \tan\theta = \frac{v}{0} \text{ n'est pas définie.}$$

Un moyen mnémotechnique permet de retrouver aisément la première ligne de ce tableau (plus particulièrement les éléments du premier quadrant). Il suffit d'écrire : 0, 1, 2, 3 et 4 ; de prendre la racine carrée de ces nombres (0 ; 1 ; $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; 2) puis de les diviser par 2 : (0 ; $\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 1).

Les autres lignes du tableau se déduisent de la première (en considérant soit les angles supplémentaires, les angles antisupplémentaires, les angles opposés ou les angles complémentaires).

Le tableau des principales valeurs trigonométriques est donc :

	Quadrant I					Quadrant II				Quadrant III				Quadrant IV			
Grade	0	$\frac{100}{3}$	50	$\frac{200}{3}$	100	$\frac{400}{3}$	150	$\frac{500}{3}$	200	$\frac{700}{3}$	250	$\frac{800}{3}$	300	$\frac{1000}{3}$	350	$\frac{1110}{3}$	400
Radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Degré	0	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos α	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	- 1	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$	$-\sqrt{3}$	- 1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{3}$	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	- 1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	0
cotg α	$+\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	- 1	$-\sqrt{3}$	$-\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	- 1	$-\sqrt{3}$	$+\infty$
sec α	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	$+\infty$	- 2	$-\sqrt{2}$	$\frac{-2\sqrt{3}}{3}$	- 1	$\frac{-2\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{2}$	- 2	$+\infty$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1
Cosec α	$+\infty$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	$+\infty$	-2	$-\sqrt{2}$	$\frac{-2\sqrt{3}}{3}$	- 1	$\frac{-2\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{2}$	- 2	$+\infty$

2.4. Les suites numériques réelles

2.4.1. Généralités

a) Définition

Soit B un ensemble quelconque, une suite dans B ou suites des éléments de B est une application d'une partie de ℕ dans B

$f: A \subset \mathbb{N} \to B$

$n \rightsquigarrow f(n)$

- Une suite réelle (numérique) est une suite sur ℝ

En choisissant un entier naturel n et en notant a_n l'image de naturel n et en notant a_n l'image de naturel, la suite s'écrit $(a_{0,}a_1, a_2, \dots a_n)$.

Ou $f: A \subset \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$n \rightsquigarrow f(n) = a_n$

D'une façon simplifier, on note la suite du terme général a_n par : $(a_n)_{n \in A}$

Exemple :

- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^* = \frac{n+1}{n}}$

Peut encore s'écrire $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left(2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \dots; \frac{n+1}{n}\right)$

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^* = \frac{2n+1}{n}}$

b) Suite monotones

On dit qu'une suite réelle :

i) (a_n) est croissante (respectivement strictement croissante) si $\forall\, n \in \mathrm{A}, a_n \leq a_{n+1}$ (respectivement $a_n \leq a_{n+1}$)

ii) On dit qu'une suite réelle (a_n) est décroissante (respectivement strictement décroissante) si $\forall\, n \in \mathrm{A}, a_n \geq a_{n+1}$ (respectivement $a_n > a_{n+1}$)

iii) On dit qu'une suite réelle est monotone (respectivement strictement monotone) lorsqu'elle est croissante ou décroissante (respectivement strictement croissante ou strictement décroissante).

   Exemple :

1) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*=\frac{n+1}{n}}$ est une suite strictement décroissante
2) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}=2\mathrm{n}-3}$ est une suite strictement croissante

2.4.2. Suites arithmétiques

a) Définition

Une suite arithmétique (progression arithmétique) est une suite telle que chaque terme se déduit du précédent par addition d'une constante. La constante s'appelle la raison de la progression arithmétique.

Si la raison est notée r $\forall\, n > 1, u_n \geq u_{n-1} + r$

Exemple : la suite 26, 24, 22, 20, 18, 16, 14, 12, 10, … est arithmétique de raison – 2

b) Calcul du n[ième] terme d'une progression arithmétique

Les termes successifs d'une PA sont $u_{1,}\, u_{2,} \dots \dots u_n$

On a : $u_2 = u_1 + r$

$$u_3 = u_2 + r = u_1 + 2r$$

$$u_4 = u_3 + r = \mu_2 + 2r = u_1 + 3r$$

.
.
.
.
.
.

$$u_n = u_i + (n-i).r \; avec \; (i < n)$$

En particulier pour $i = 1$, on a : $\boxed{u_n = u_1 + (n-1).r}$

Exemple : $u_1 = 20$

$$r = -2$$

$$u_{10} = u_1 + (10-1).r = 20 + 9.(-2) = 20 - 18 = 2$$

c) Somme des termes équidistants des extrêmes

Soient $u_1, u_{2\,,} u_3 \dots \dots u_n$, n termes d'une PA, on dit quelque soit $p < n, u_p \; et \; u_{n-p+1}$car l'un u_p a autant de termes avant lui que l'autre u_{n-p+1} en a après lui.

Propriété : $\forall\, p < n, u_p + u_{n-p+1} = u_1 + u_n$

On dit que dans une P.A, la somme des termes équidistants des extrêmes est égale à une constante **(celle constante égale à la somme des extrêmes).**

d. La somme de n termes d'une PA

Désignons par $u_1, u_2, u_3 \ldots \ldots u_n$,les termes successifs d'une P.A

En prenant : $S_n = u_1, u_2, u_3 \ldots \ldots u_n = \sum_{u=1}^{n} u_i$

On démontre que $S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$

Comme $u_n = u_1 + (n-1).r$ donc $S_n = \frac{n}{2}[(2u_1 + (n-1).r)]$

Exemple : Calculez la somme de 100 premiers termes de la P.A

4, 6, 8, 10, 12, 14, …

Solution : $u_1 = 4$ et $p = 2$

$S_{100} = \frac{100}{2}[(2.4 + (100-2).2)] = 50\,(8 + 198) = 10300$

2.4.3. Suites géométriques

a. Définition

Une suite géométrique (progression géométrique) est une suite telle que chaque terme se déduit du précédent par la multiplication par la constante non nulle. Cette constante s'appelle la raison de la progression géométrique.

Des telles suites sont définies dans les ensembles numériques.

Si q est la raison de la progression géométrique dans $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n = u_{1-1} \,.\, q \iff q = \frac{u_1}{u_{n-1}}$$

Exemple : La suite 5, 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640, … est une suite géométrique du premier terme $u_1 = 5$ et de raison $q = 2$

b. Calcul du n^ième^ terme de PG

Les termes consécutifs d'une PG sont : $u_1\ , u_{1.}q, u_{1.}q^2, \ldots \ldots, u_{1.}q^{n-1}$

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_n = u_1 \,.\, q^{n-i}\ (i < n)$

En particulier si i=1, on a : $\boldsymbol{u_n = u_1 \,.\, q^{n-1}}$

- Dans toute P.G, un terme quelconque est égal au produit du 1er par autant des facteurs égaux à la raison qu'il y a des termes avant lui.

Exemple : Si $u_1 = 2, \quad u_2 = 8 \quad et \quad q = 4; calculez\, u_6$

En effet, $u_6 = u_1 \,.\, q^5 = 2.(4)^5 = \mathbf{2048}$

- Dans une P.G finie, le produit des termes équidistants est égal au produit des extrêmes

c. Somme des termes consécutifs d'une progression géométrique

soit une P.G $u_1, u_2, u_3 \ldots \ldots u_n$ finie de raison q, si on multiplie tous les termes par q, on obtient une nouvelle progression géométrique suivante :

$u_1.q, u_2.q, u_3.q, \ldots \ldots, u_n.q$

$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots \ldots \ldots \ldots + u_n \;(i)$

$qS_n = q.u_1 + q.u_2 + q.u_3 + \cdots \ldots \ldots \ldots + qu_n \;(ii)$

(i) – (ii) : $S_n\,(1-q) = u_1 - u_{n+1} = u_1 - u_1.q^{n+1-1} = \boldsymbol{u_1 - u_1.q^n}$

$\Leftrightarrow S_n = \frac{\boldsymbol{u_1(1-q^n)}}{1-q}\; avec\; (q \neq 1)$

Si $q = 1$ alors $S_n = n\,.\,u_1$

Exemple : Soit la P.G 2, 4, 8, 16, 32, 64,128, … Calculez la somme de 10 premiers termes consécutifs de **cette progression géométrique.**

EXERCICES

1. Mr DUPONT désire acheter une automobile qui au 1er juillet 1993 coûte 90 0000$. N'ayant à sa disposition que 77 000$ et ne voulant pas prendre des crédits, il décide de placer la somme de 77 000$ dont il dispose. Un organisme financier lui assure un placement à intérêt composé annuel de 7%. On se propose de calculer en quelle année Mr DUPONT pourra acheter la voiture dont il rêve.
   Pour tout entier naturel n, on note u_n le capital dont dispose Mr DUPONT au premier juillet de l'année 1993+n.
   1°) Calculer u_1 et u_2
   2°) Montrez que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison. Exprimer u_n en fonction de n.
   3°) On admet que le prix de l'automobile que veut acheter Mr DUPONT augmente régulièrement de 3% au 1er juillet de chaque année. Pour tout entier n, on note V_n le prix de l'automobile au 1er juillet de l'année (1993+n).
   4°) Calculez à partir de quelle année Mr DUPONT pourra acheter cette voiture.

2. Une personne reçoit 200 000$ en héritage le 1er Janvier 1995, elle a placé cette somme à un intérêt composé au taux annuel de 7,25%.

   1°) De quelle somme disposera-t-elle le 1er janvier 1996 ?

   2°) On pose $u_0 = 200\,000\$$, on désigne par u_n la somme dont elle dispose le 1er janvier de l'année (1995+n) et par u_{n+1} celle dont elle disposera l'année suivante.

   a) Etablir une relation entre u_{n+1} et u_n. En déduire que, la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison (q) et le premier terme (u_1).

   b) Expliquer u_n en fonction de n.

      Calculez u_{12}

   3°) Une publicité annonce : « Gagnez de l'argent avec le placement « GENERAUX » qui rapporte 100% en 12 ans »

   a) Ce placement est-il plus ou moins intéressant que le 1er. Justifier votre réponse

   b) Déterminer son taux annuel sachant qu'il s'agit aussi d'un placement

3. Soit la suite (u_n) définie par : $u_1 = \frac{3}{2}$ et pour tout $n \geq 1, u_{n+1} = \frac{3+u_n}{2}$

   1°) Calculez u_2 *et* u_3, la suite (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ? Justifier votre réponse

   2°) Pour tout $n \geq 1$, *on pose* $V_n = 3 - u_n$

   a) Montrez que la suite $V_n = 3 - u_n$ ainsi définie est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

      Exprimez V_n en fonction de n

   b) En déduire u_n en fonction de n

   c) Calculez la limite de la suite (u_n)

Chapitre troisième
DERIVEES ET DIFFERENTIELLES DES FONCTIONS NUMERIQUES

L'économiste est souvent confronté par le problème de la détermination d'une grandeur donnée résultant de la modification d'une ou de plusieurs autres grandeurs. Il suffit de penser, par exemple, aux notions d'utilité marginale, de productivité marginale, du coût marginal, du taux de substitution, d'élasticités,…

De même, la détermination d'un extremum (soit un minimum, soit un maximum) d'une grandeur donnée consiste à établir une relation entre d'une part les modifications des facteurs déterminés et d'autre part les variations subséquentes apparaissant dans les résultants. C'est le cas, par exemple, de la détermination du niveau de la production de telle sorte qu'il entraîne des coûts unitaires minima ou un profit total maximum.

Comme on peut le constater, le calcul différentiel s'occupe de l'étude des variations marginales des grandeurs que lie une relation fonctionnelle.

3.1. Dérivées et différentielles d'une fonction numérique à une variable réelle

3.1.1. Généralités

A. Définition de la dérivée

Soit la fonction définie en un point quelconque x_0 d'un intervalle ouvert]a, b[. On dit que la fonction f(x) est dérivable au point x_0 si :

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - fx_0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

(3.1)

existe et est finie.

La dérivée première mesure le taux de variation et la pente de la fonction.

B. Dérivées à droite et à gauche

1° La dérivée à droite $f'_+(x_0)$ de la fonction f(x) en x_0 est la limite de $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ lorsque x tend vers x_0 par des valeurs supérieures à x_0 (où $x > x_0$). Donc :

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

(3.2)

2° La dérivée à gauche $f'_-(x_0)$ de la fonction f(x) en x_0 est la limite de $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ lorsque x tend vers x_0 par des valeurs inférieures à x_0 (où $x < x_0$) :

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

(3.3)

3° Une fonction f(x) est dérivable en x_0 si et seulement si $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$

C. Dérivabilité sur un intervalle

1° Une fonction f(x) est dérivable sur un intervalle ouvert]a, b[si elle est dérivable en chaque point de cet intervalle.

2° Une fonction f(x) est dérivable sur un intervalle fermé [a, b] si elle est dérivable :

- sur l'intervalle ouvert]a, b[;
- à gauche en b ;
- à droite en a.

3° Si une fonction f(x) est dérivable sur l'intervalle I, alors f'(x) est une fonction de x, appelée « **fonction dérivée** » de f(x) ou simplement la « **dérivée** » de f(x).

D. Différentiabilité et Continuité

La relation entre la dérivabilité et la continuité peut être décrite comme suit : **si une fonction f(x) est dérivable en x_0, alors elle est aussi continue en ce point**. Cependant, la continuité en un point n'implique pas l'existence d'une dérivée. La continuité est donc une condition nécessaire de différentiabilité mais qui est non suffisante, car une fonction f(x) peut être continue et définie en un point x_0 sans toutefois être différentiable en ce point.

Exemple 4.1 :
La fonction f(x) = $|x|$ est continue au point x = 0, mais n'a pas de dérivée au point x = 0 puisque f'(x) = 1 pour x > 0 et f'(x) = -1 pour x < 0.

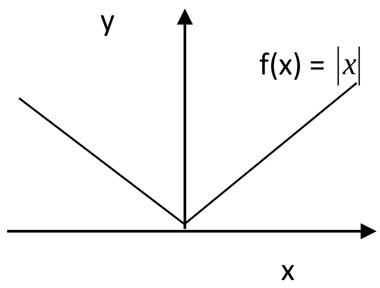


Fig. 3.1 : fonction f(x) = $|x|$

E. Dérivabilité par morceaux

On dit qu'une fonction f(x) est dérivable par morceaux sur [a, b] si f′(x) est continue par morceaux. Rappelons qu'une fonction est continue par morceaux sur un intervalle [a, b] si cet intervalle peut être sous-divisé en un nombre fini d'intervalles, sur lesquels f(x) est continue et possède des limites à droite et à gauche.

F. Différentielles

Soit la dérivée de f(x) :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{4.4}$$

Cette relation peut se mettre sous la forme ci-après :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon \tag{4.5}$$

D'où : $\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \varepsilon.\Delta x$
(3.6)

où $\varepsilon \to 0$, quand $\Delta x \to 0$
On a donc décomposé l'accroissement de y en deux termes. Le premier terme $[f'(x)\Delta x]$ est appelé « **partie principale** » de l'accroissement ou encore « **différentielle** » de y et se note :

$dy = f'(x).\Delta x = f'(x).dx$
(3.7)

car $\Delta x = dx$

Le deuxième terme $[\varepsilon.\Delta x]$, terme correctif, est un infiniment petit d'ordre supérieur, c'est-à-dire qu'il tend vers 0 plus vite que Δx quand $\Delta x \to 0$.

Donc la différentielle de la fonction $y = f(x)$ au point x_0 est donnée par :

$dy = f'(x_0).dx$
(3.8)

Notons que la relation (4.7) justifie la notation fractionnaire pour la dérivée :

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$
(3.9)

3.1.2. Règles de dérivation

Si f, g et h sont des fonctions dérivables, on a les règles de calcul ci-après :

1. $\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x) = f'(x)+g'(x)$

2. $\frac{d}{dx}[f(x)-g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x) = f'(x)-g'(x)$

3. $\frac{d}{dx}[Cf(x)] = C\frac{d}{dx}f(x) = Cf'(x)$

   où C est une constante réelle quelconque.

4. $\frac{d}{dx}[f(x).g(x)] = f(x).\frac{d}{dx}g(x) + g(x).\frac{d}{dx}f(x)$ $= f'(x).g'(x) + g(x).f'(x)$

5. $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x).\frac{d}{dx}f(x) - f(x).\frac{d}{dx}g(x)}{[g(x)]^2} = \frac{g(x).f'(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$, si $g(x) \neq 0$

6. Si $y = f(u)$ et $u = g(x)$, alors : $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = f'(u).g'(x) = f'[g(x)].g'(x)$

   (la règle de la chaîne ou de l'enchaînement)

   De même, si $y = f(u)$ où $u = g(v)$ et $v = h(x)$, alors $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dv}.\frac{dv}{dx}$

7. Si y = f(x), alors x = f^{-1} (y) ; et $\frac{dy}{dx} et \frac{dx}{dy}$ sont liés par la relation : $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy}$

On a les mêmes règles pour les *différentielles*. Ainsi :

8. $d\left[f(x)+g(x)\right]=df(x)+dg(x)= f'(x)dx+g'(x)dx=\left[f'(x)+g'(x)\right]dx$

9. $d\left[f(x).g(x)\right]= f(x).dg(x)+g(x).df(x)=\left[f(x).g'(x)+g(x).f'(x)\right]dx$

A. Dérivées des fonctions élémentaires

Soit u, une fonction dérivable de x. On peut alors définir :

1. $\frac{d}{dx}(C)=0$

où C est une constante réelle quelconque

2. $\frac{d}{dx}(x)=1$
3. $\frac{d}{dx}(x^m)=mx^{m-1}$
4. $\frac{d}{dx}(u^m)=mu^{m-1}\frac{du}{dx}$
5. $\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$
6. $\frac{d}{dx}(\sin u)=\cos u.\frac{du}{dx}$
7. $\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$
8. $\frac{d}{dx}(\cos u)=-\sin u.\frac{du}{dx}$
9. $\frac{d}{dx}(\tan x)=\frac{1}{\cos^2 x}$
10. $\frac{d}{dx}(\tan u)=\frac{1}{\cos^2 u}.\frac{du}{dx}$
11. $\frac{d}{dx}(\cot gx)=-\frac{1}{\sin^2 x}$
12. $\frac{d}{dx}(cogtu)=-\frac{1}{\sin^2 u}.\frac{du}{dx}$
13. $\frac{d}{dx}(\frac{1}{\cos u})=\frac{\tan u}{\cos u}.\frac{du}{dx}$
14. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sin u}\right)=-\frac{\cot u}{\sin u}.\frac{du}{dx}$
15. $\frac{d}{dx}\left[\log_a u\right]=\frac{1}{u}\frac{du}{dx}\log_a e=\frac{1}{u}\frac{du}{dx}\frac{1}{\ln a}$
16. $\frac{d}{dx}\left[\log_e u\right]=\frac{d}{dx}\left[\ln u\right]=\frac{1}{u}.\frac{du}{dx}$

17. $\frac{d}{dx}\left(a^{u}\right)=a^{u}.\ln a.\frac{du}{dx}$

18. $\frac{d}{dx}(e^{u})=e^{u}.\frac{du}{dx}$

19. $\frac{d}{dx}(Arc\sin u)=\frac{1}{\sqrt{1-u^{2}}}.\frac{du}{dx}$

20. $\frac{d}{dx}(Arc\cos u)=-\frac{1}{\sqrt{1-u^{2}}}.\frac{du}{dx}$

21. $\frac{d}{dx}(Arc\tan u)=\frac{1}{1+u^{2}}.\frac{du}{dx}$

22. $\frac{d}{dx}(Arc\cot u)=-\frac{1}{1+u^{2}}.\frac{du}{dx}$

Remarque

_Pour certains types de fonctions, il est plus simple de trouver leurs dérivées en utilisant la « **transformation logarithmique** ». Ainsi :

$$y'=\frac{d}{dx}(y)=y\frac{d}{dx}(\ln y) \text{ avec } y = f(x)$$

Pour des fonctions plus compliquées, il faut utiliser différentes combinaisons des 10 règles exposées précédemment.

B. Dérivées d'ordre supérieur

Si f(x) est dérivable sur un intervalle, sa dérivée est notée $f'(x), y' ou \frac{dy}{dx}$ où y = f(x). Si f′(x) est aussi dérivable dans cet intervalle, sa dérivée se note $f''(x),\ y'' \text{ ou } \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d^2y}{dx^2}$.

De même, la dérivée $n^{ème}$ de f(x), si elle existe, se note $f^{(n)}(x), y^{(n)} ou \frac{d^{n}y}{dx^{n}}$, où n est appelé l'ordre de la dérivation. Les dérivées d'ordre premier, second, troisième…sont notées par $f'(x), f''(x), f'''(x),\ldots$

Le calcul des dérivées d'ordre supérieur se fait par applications successives des règles de dérivation données ci-dessus.

3.2. Dérivées d'une fonction numérique à plusieurs variables réelles

3.2.1. Dérivées partielles d'une fonction

On appelle dérivée partielle d'une fonction de plusieurs variables indépendantes par rapport à l'une d'elles, la dérivée ordinaire de cette fonction par rapport à cette variable, en considérant les autres variables comme des constantes.

Si $z = f(x_1, x_2, \ldots., x_n)$, alors :

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, x_2, ..., x_n) = F(x_i)$$

est la dérivée partielle par rapport à x_i (où i = 1, 2, …n).

Pour z = f(x,y), par exemple :

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y+\Delta y) - f(x_0, y)}{\Delta y} = f_y$$ quand ces limites existent.

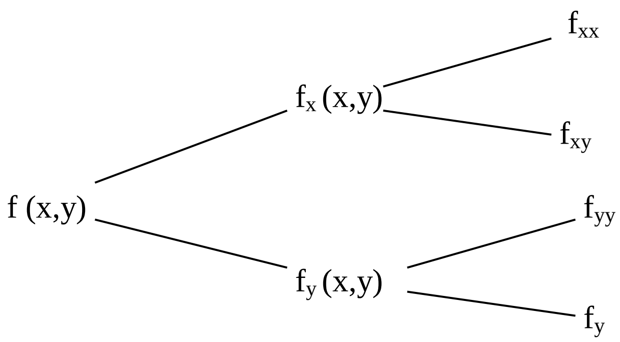
3.2.2. Dérivées partielles secondes et d'ordre supérieur

Si f(x, y) admet des dérivées partielles en tout point (x, y) d'un domaine, alors $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont elles-mêmes des fonctions de x et de y qui peuvent avoir des dérivées partielles. Ces dérivées partielles secondes se notent :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}; \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}; \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy};$$

Les dérivées partielles par rapport à des variables différentes sont appelées « *dérivées mixtes* » ou « *dérivées croisées* ». Les étapes de calcul des dérivées secondes peuvent être résumées à l'aide du schéma ci-après :



Théorème de YOUNG :

Si les dérivées partielles mixtes du second ordre f_{xy} et f_{yx} d'une fonction f(x, y) sont des fonctions continues de x et y dans un domaine D, alors elles sont égales à l'intérieur de ce domaine. Donc :

$$\boxed{f_{xy} = f_{yx}}$$

Le théorème de YOUNG est aussi vrai pour les dérivées partielles d'ordre supérieur à deux et pour les fonctions de plus en plus variables.

Ainsi, pour la fonction

z = f(x,y) : $f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx}$ et $f_{yyx} = f_{yxy} = f_{xyy}$

3.2.3. Différentielle totale

A. Différentielle totale du premier ordre

Si z = f(x,y) est une fonction de deux variables x et y et si ses dérivées partielles du premier ordre f_x et f_y existent, alors la différentielle totale du premier ordre est donnée par :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \qquad \text{ou bien :} \qquad df = f_x dx + f_y dy$$

Si l'on pose z = f(x, y) = 0, alors cette fonction peut être considérée comme la forme implicite d'une fonction variable. Puisque dz = 0, la dérivée $\frac{dy}{dx}$ de la « **fonction implicite »** à une variable est donnée par :

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$$

d'où :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

B. Différentielles d'ordre supérieur

Si les dérivées partielles d'une fonction sont elles-mêmes continues et différentiables, alors on peut former une nouvelle différentielle totale d²f de la différentielle totale df. On l'appelle « **différentielle totale du second ordre** » :

$$\begin{aligned} d(df) = d^2 f &= \frac{\partial}{\partial x}(df)dx + \frac{\partial}{\partial y}(df)dy \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)dy \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}dydx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 \end{aligned}$$

Puisque $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ par le théorème de SCHWARZ, la différentielle totale du second ordre peut s'écrire :

$$d^2f = f_{xx}.dx^2 + 2\, f_{xy}.dx.dy + f_{yy}.dy^2$$

Notons que les coefficients des produits dx et dy sont donnés par la **formule du binôme**. Ainsi, pour la différentielle totale du second ordre, on obtient :

$$d^2 f = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{(2)}.f$$

l'expression entre parenthèse multiplie f au sens d'un opérateur.

De même, la différentielle totale d'ordre 3 est donnée par :

$$d^3 f = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^{(3)} . f$$

$$= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} dx^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} dy^3$$

C. Dérivées des fonctions composées

a. Cas où z = f[x(u), y(u)]

Soit z = f(x, y) où x = g(u), y = h(u) et par conséquent z est une fonction de u :

z = f[x (u), y(u)]

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} .dx + \frac{\partial f}{\partial y} .dy$$

$$\frac{dz}{du} = \frac{\partial f}{\partial x} . \frac{dx}{du} + \frac{\partial f}{\partial y} . \frac{dy}{du}$$

Donc : $\boxed{z'(u) = f'(x) . x'(u) + f'(y) . y'(u)}$

b. Cas où z = f[x(y), y]

Soit z = f(x, y) où x = g(y). Alors :

z = f[x(y), y]

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} .dx + \frac{\partial f}{\partial y} .dy$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{\partial f}{\partial x} . \frac{dx}{dy} + \frac{\partial f}{\partial y}$$

Donc : $\boxed{z'(y) = f'(x) . x'(y) + f'(y)}$

c. ***Cas où z = f(x, y) où x = g(u, v) et y = h(u,v)***

Comme z est une fonction de deux variables u et v par l'intermédiaire de x et y, on calculera les dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial u}$ *et* $\frac{\partial z}{\partial v}$.

Les formules sont les suivantes :

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} . \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} . \frac{\partial y}{\partial u} \quad \text{et} \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial u} . \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} . \frac{\partial y}{\partial v}$$

3.2.4. Fonctions homogènes, Théorème d'Euler, Rendements d'échelle et Loi de Wicksell

Fonctions homogènes de degré p

Une fonction de production est dite homogène si, après avoir multiplié chaque facteur de production par une constante réelle positive k, il est possible de factoriser complètement cette constante. Si l'exposant de la constante mise en facteur est égal à 1, la fonction est homogène de degré 1 ; si l'exposant est supérieur (inférieur) à 1, le degré d'homogénéité de la fonction est supérieur (inférieur) à 1.

Mathématiquement, une fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est dite homogène de degré *p* si $\forall k \in \Re^+$, $f(kx_1, kx_2, \ldots\ldots, kx_n) = k^p f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Exemple 4. :

Rendements d'échelle

Une fonction de production est dite **à rendements d'échelle constants** si, lorsque tous les facteurs de production sont augmentés d'une proportion donnée ***k***, la production augmente de la même proportion.

Si la production augmente d'une proportion **supérieure** (**inférieure**) à k, c'est que les rendements d'échelle sont **croissants** (**décroissants**). En d'autres termes, les rendements d'échelle sont constants, croissants ou décroissants suivant que la fonction de production est homogène de degré supérieur, égal ou inférieur à 1.

Exemple :

Soit la fonction de production de type Cobb-Douglas de la forme $q(K, L) = AK^{\alpha} L^{\beta}$, où $\alpha + \beta = 1$.Cette fonction est à rendements d'échelle constants.

En effet, multiplions chaque facteur de production par la constante k et mettons en facteur,

$$q(kK, kL) = A(kK)^{\alpha} (kL)^{\beta} = Ak^{\alpha} K^{\alpha} k^{\beta} L^{\beta} = k^{\alpha+\beta} AK^{\alpha} L^{\beta} = k^{\alpha+\beta} q.$$

Tous les facteurs de production ainsi que la production sont augmentés de la même proportion ***k***.

Théorème d'EULER

Soit $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, une fonction continûment différentiable homogène de degré p et définie sur $(\Re^+)^n$. Alors pour tout x, on a :

$$x_1 \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} = p.f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Une application économique du théorème d'Euler est connue sous le nom de la **règle d'épuisement du produit**. Si une firme présente une fonction de production $Q = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ homogène de degré 1 (rendement d'échelle constant), alors l'équation plus haut devient :

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = Q$$

La production est égale à la somme sur les facteurs de la quantité utilisée de chaque facteur x_i multipliée par sa productivité marginale $\frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Loi de Wicksell

Posons $Q = Q = f(x_1, x_2)$, une fonction de production qui satisfait les conditions :

- rendements d'échelle constants : f(kx) = kf(x), et
- Productivité marginale de x1 décroissante, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} < 0$

F étant homogène de degré 1, sa dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ est homogène de degré zéro. En appliquant le théorème d'Euler à $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, on obtient :

$$0\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)$$

ou

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = -\frac{x_1}{x_2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$$

qui est positif puisque $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} < 0$.

Ceci signifie que la productivité marginale d'un facteur croît lorsque l'autre facteur croît. Ce résultat est connu sous le nom de Loi de Wicksell.

3.3 Applications des dérivées en Economie et en Gestion

3.3.1 Applications des dérivées des fonctions à une variable

3.3.1.1 Concepts marginaux

Les problèmes fondamentaux en Gestion et en Economie nous mettent souvent en présence des grandeurs déterminées résultant de la modification d'une ou plusieurs autres grandeurs. Ces problèmes ne peuvent être évalués qu'au moyen de la dérivée de fonction portant sur les grandeurs totales.

Ainsi, le coût marginal se définit comme la variation du coût total qui résulte de la production d'une unité supplémentaire de produit. La recette marginale, quant à elle, détermine la variation de la recette totale résultant de la vente d'une unité supplémentaire de produit. En effet, comme le coût total et la recette totale sont tous deux fonctions du volume de production (Q), on peut alors exprimer mathématiquement le coût marginal (Cm) et la recette marginale (Rm) comme étant des dérivés respectives de ces deux fonctions.

Si CT = CT (Q), alors Cm = $\frac{dCT}{dQ}$ et si RT = RT (Q), alors Rm = $\frac{dRT}{dQ}$

En outre, l'analyse marginale en essence dit au gestionnaire opérant en régime de monopole de produire jusqu'au point où les profits dégagés par la dernière unité produite deviennent nuls (les profits marginaux soient égaux à 0). Ce qui veut dire que le niveau optimal de production est déterminé en posant la dérivée première de l'équation des profits égale à zéro :

$$\frac{d\Pi}{dQ} = \frac{d(RT)}{dQ} - \frac{d(CT)}{dQ} = 0 \text{ où } \frac{d\Pi}{dQ} \text{ est le profit marginal.}$$

C'est donc le principe de l'analyse marginale qui permet au gestionnaire de conclure que s'il veut maximiser, il devrait produire de sorte que chaque unité additionnelle ne puisse coûter plus cher que la recette que dégagerait cette unité.

En résumé, la variable marginale associée à n'importe quelle grandeur économique totale (profit marginal, productivité marginale, …) s'obtient en calculant la dérivée de cette grandeur.

Exemples 4.

a) $RT = 75Q - 6Q^2$

(où RT = recette totale et Q = niveau de production)

$\Rightarrow Rm = \dfrac{dRT}{dQ} = 75 - 12Q$ (Rm = recette marginale)

$\Rightarrow RM = \dfrac{RT}{Q} = 75 - 6Q$ (RM = recette moyenne).

Pour $Q = 3 \Rightarrow RM = 75 - 6(3) = 57 \Rightarrow Rm = 75 - 12(5) = 39$

Pour $Q = 5 \Rightarrow RM = 75 - 6(5) = 25 \Rightarrow Rm = 75 - 12(5) = 15$

b) $\pi = Q^2 - 8Q + 30$

(où π représente le profit total)

$\Rightarrow \dfrac{d\pi}{dQ} = 2Q - 8 = \pi_m$ (πm = profit marginal)

$\Rightarrow \pi_M = \dfrac{\pi}{Q} = Q - 8 + \dfrac{30}{Q}$ (π_M = profit moyen)

Pour Q = 3, alors : $\pi_m = 2(3) - 8 = -2$

$\pi_M = (3) - 8 + \dfrac{30}{3} = 5$

3.3.1.2 Elasticités

Il est souvent intéressant pour un gestionnaire de disposer d'une mesure de la sensibilité de la demande ou de l'offre à une variation donnée de n'importe quel déterminant. Bien que l'analyse marginale permet aussi trouver une mesure de sensibilité, elle présente tout de même certains défauts. L'inconvénient majeur de cette mesure est qu'elle dépend des unités dans lesquelles les grandeurs économiques considérées sont mesurées. En effet, si les quantités demandées ou offertes (Q) sont exprimées en unités physiques (litres, kilogrammes, tonnes, grammes, …) et les prix (P) en unités monétaires, le rapport $\dfrac{\Delta Q}{\Delta P}$ aura donc une dimension du type $\dfrac{\text{Litre}}{\text{Franc}}, \dfrac{\text{kg}}{\text{Franc}}$, etc...

Afin de remédier à cet inconvénient majeur, les gestionnaires ont choisi d'utiliser une mesure indépendamment des unités, appelée « élasticité ». L'élasticité d'une variable y par rapport à une variable x, à laquelle elle est liée par une dépendance quelconque, est le rapport des variations relatives de y et de x :

$$\varepsilon_{\frac{y}{x}} = \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}}$$

En réarrangeant les termes, nous obtenons l'expression de l'élasticité la plus couramment utilisée :

$$\varepsilon_{y/x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y} \quad \text{ou bien} \quad \varepsilon_{y/x} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y}$$

Donc l'élasticité de y par rapport à x, ($\varepsilon_{y/x}$) , est définie comme la variation relative (en pourcentage) de y divisée par la variation relative (en pourcentage) de x. Généralement, l'élasticité est exprimée en valeur absolue :

$$\varepsilon_{y/x} = \left| \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} \right|$$

En se reportant a la formule de l'élasticité de y par rapport à x, on observe qu'elle peut également s'écrire sous forme logarithmique comme suit :

$$\varepsilon_{y/x} = \frac{d \ln y}{d \ln x}$$

car $d \ln y = \frac{1}{y} dy$ (cf. différentielle d'une fonction)

et de même $d \ln x = \frac{1}{x} dx$, de sorte que : $\varepsilon_{y/x} = \frac{dy}{y} \cdot \frac{1}{y} = \frac{d \ln y}{d \ln x}$.

<u>Exemple 1</u> : Supposons que pour x = 10, y = 28 et que pour x = 11, y = 26. On a donc :

$$\Delta x = +1 \;;\; \Delta y = -2 \quad \text{et} \quad \varepsilon_{y/x} = (-2/28) : (1/10) = -0.71 \,.$$

L'élasticité de y par rapport à x, sur l'intervalle considéré, est de –0.71. Il faut préciser l'intervalle puisque l'élasticité n'a aucune raison de rester constante. En effet, en supposons que pour x = 12, on ait y = 23 ; l'élasticité sur l'intervalle (11 ;12) sera de :
$\varepsilon_{y/x} = (-3/26) : (1/11) = -1.27$.

Signification de l'élasticité

L'interprétation de l'élasticité est immédiate : $\varepsilon_{y/x} = -0.71$ signifie que, si la variable x augmente de 1%, la variable y diminue de 0,71%. Notons que cette relation s'applique également en cas de baisse de x. Ainsi, si on diminue la variable x de 5%, la variable y va augmenter de 3.55% .

<u>Exemple 2</u> : Soit $y = \frac{x^2}{2} + \frac{17}{2}x - 7$ .On peut vérifier que pour x = 10, 11, 12, on a bien y = 28, 26, 23. Comme x et y sont des variables continues, liées par une liaison fonctionnelle, l'élasticité de y par rapport à x s'exprime, non plus sur l'intervalle Δx comme dans l'exemple précédent, mais au point x_0. Le calcul des élasticités aux points x = 10 et x = 11 donne :

- en x = 10 : $\varepsilon_{y/x} = (-3/2)(10/28) = -0.54$

- en x = 11 : $\varepsilon_{y/x} = (-5/2)(11/26) = -1.06$.

B. Elasticité de la demande par rapport au prix

Pour mesurer comment la demande répond aux variations de ses déterminants, les économistes utilisent la notion d'*élasticité*. On appelle *élasticité de la demande par rapport aux prix (ou encore élasticité prix de la demande)*, la variation relative des quantités demandées par rapport à la variation relative des prix.

Donc :

$$\varepsilon_{D/P} = \frac{\text{Variation de la quantité demandée en \%}}{\text{Variation du prix en \%}} = \frac{\frac{\Delta Q}{\mathrm{Q}}}{\frac{\Delta \mathrm{P}}{\mathrm{P}}} = \frac{\Delta Q}{Q} \times \frac{P}{\Delta P} = \frac{\Delta Q}{\Delta \mathrm{P}} \times \frac{P}{Q}$$

où Q représente la quantité demandée; P, le prix.

Donc, la notion d'élasticité par rapport au prix permet de mesurer *la sensibilité* de la demande aux variations du prix.

Compte tenu de la "*loi de la demande*", l'élasticité de la demande d'un produit par rapport à son prix est normalement négative (variation en sens inverse), puisqu'une hausse du prix provoque une diminution de la demande et inversement.

Exemple : Supposons qu'une augmentation de prix du pain de 10 à 11 Francs Congolais fasse tomber la consommation de 28 à 26. L'augmentation du prix en pourcentage est de :

$$\Delta P = 11 - 10 = 1 \qquad et \qquad \Delta P/P * 100 = 10\ \%.$$

La variation de la quantité demandée est :

$$\Delta Q = 28 - 28 = -1 \qquad et \qquad \Delta Q/Q * 100 = -2/28\ \%.$$

Ainsi, l'élasticité-prix de la demande est : $\varepsilon_{D/P} = \frac{(\frac{-2}{28})}{(\frac{1}{10})} * 100 = -0.71.$

L'interprétation de l'élasticité obtenue est immédiate : $\varepsilon_{D/P} = -0.71$ signifie que, si le prix augmente de $1\ \%$, la quantité demandée du pain diminue de 0.71%.

3. Les élasticités croisées de la demande par rapport aux prix

Dans certains cas, les variations des quantités demandées de certains biens dépendent des variations des prix d'autres biens auxquels ils sont substituables ou complémentaires. Dans ce cas, on pourra calculer une élasticité–prix croisée.

Soient deux biens **A** et **B**, l'élasticité croisée de la demande du bien A par rapport au prix du bien B se définit par le rapport :

$$\varepsilon_{D/P} = \frac{\text{Variation en \% de la quantité demandée du bien A}}{\text{Variation en \% du prix du bien B}}$$

$$= \frac{\frac{\Delta Q_A}{Q_A}}{\frac{\Delta P_B}{P_B}} = \frac{\Delta Q_A}{Q_A} \times \frac{P_B}{\Delta P_B}$$

$$= \frac{\Delta Q_A}{\Delta P_B} \times \frac{P_B}{Q_A}$$

où **Q_A** est la quantité demandée du bien **A**;
P_B, le prix du bien **B.**

Les élasticités croisées de la demande par rapport aux prix indiquent :

- soit que les biens considérés n'ont pas de rapport entre eux c'est-à-dire qu'ils sont *indépendants* ($\boldsymbol{\varepsilon_{D_A/P_B} = 0}$);
- soit qu'ils sont *complémentaires* ($\boldsymbol{\varepsilon_{D_A/P_B} < 0}$). Ainsi, la demande du thé s'accroît lorsque baisse le prix du sucre;
- soit qu'ils sont *substituables* ($\boldsymbol{\varepsilon_{D_A/P_B} > 0}$). Par exemple : la demande des poissons de mer progresse lorsque les prix des poissons d'eau douce augmente.

4. Elasticité de la demande par rapport au revenu

Cette notion sert à exprimer la relation existant entre les variations de la demande des biens et les variations du revenu. Cette relation est mesurée par un coefficient appelé "*élasticité - revenu*". Il consiste à faire le rapport de la variation relative de la quantité demandée d'un bien à la variation relative du revenu :

$$\varepsilon_{D/R} = \frac{\text{Variation en \% de la quantité demandée du bien}}{\text{Variation en \% du revenu}}$$

$$= \frac{\frac{\Delta Q}{Q}}{\frac{\Delta R}{R}} = \frac{\Delta Q}{Q} \times \frac{R}{\Delta R}$$

$$= \frac{\Delta Q}{\Delta R} \times \frac{R}{Q}$$

Généralement, l'élasticité - revenu est de signe positif (ce qui exprime une relation directe entre revenu et consommation). Les différentes valeurs qu'elle peut prendre permettent d'opérer une classification des biens :

- si $\varepsilon_{D/R} < 1$, la demande augmente moins vite que le revenu. Ce qui arrive lorsqu'il s'agit des biens de nécessité (alimentation, par exemple) pour lesquels à partir d'un certain montant de revenu le seuil de saturation est atteint;
- si $\varepsilon_{D/R} = 1$, la variation de la demande est strictement proportionnelle à la variation du revenu. Les biens de confort peuvent obéir à un tel comportement;
- si $\varepsilon_{D/R} > 1$, la variation observée de la demande est supérieure à celle du revenu.

Remarquons que pour les *biens inférieurs*, l'élasticité - revenu est exceptionnellement de *signe négatif*, car leur demande diminue avec l'augmentation du revenu. Si $\varepsilon_{D/R} > 1$, il s'agit d'un bien de luxe.

5. Elasticité – publicité ou élasticité promotionnelle

Vu le rôle de la publicité dans une société de consommation, l'élasticité – publicité de la demande est une donnée importante dans le processus décisionnel. Elle mesure le degré de réponse des quantités demandée ou encore des recettes réalisées à une action publicitaire ; ce qui permet d'apprécier la rentabilité des dépenses de publicité.

L'élasticité promotionnelle de la demande est donnée par la formule ci-après :

$$\varepsilon_{D/Pu} = \frac{\text{Variation en \% de la quantité demandée du bien}}{\text{Variation en \% de la publicité}}$$

$$= \frac{\frac{\Delta Q}{\text{Q}}}{\frac{\Delta Pu}{\text{Pu}}} = \frac{\Delta Q}{Q} \times \frac{Pu}{\Delta Pu} = \frac{\Delta RT}{\Delta Pu} \times \frac{Pu}{Q}$$

où **Q** est la quantité demandée ;
Pu, les dépenses de publicité et de promotion ;
RT, les recettes totales.

Généralement, le coefficient $\varepsilon_{D/Pu}$ est supérieur à un, sauf si l'on se trouve dans une région des rendements décroissants de la publicité.

6. Elasticité de l'offre

L'élasticité prix de l'offre permet de trouver comment varie l'offre du bien en fonction des variations relatives de son prix. Elle est définie de façon analogue à l'élasticité de la demande par :

$$\varepsilon_{O/P} = \frac{\textit{Variation} \text{ relative de l'offre d'un produit (en \%)}}{\text{Variation relative du prix de ce produit (en \%)}}$$

$$= \frac{\frac{\Delta Q}{\text{Q}}}{\frac{\Delta \text{P}}{\text{P}}} = \frac{\Delta Q}{Q} . \frac{P}{\Delta P} = \frac{\Delta Q}{\Delta P} . \frac{P}{Q}$$

Pour des variations infinitésimales, la formule de l'élasticité de l'offre par rapport au prix devient :

$$\varepsilon_{O/P} = \frac{\text{dQ}}{\text{dP}} . \frac{\text{P}}{\text{Q}} = \frac{1}{\text{dP}/\text{dQ}} . \frac{\text{P}}{\text{Q}}$$

où Q représente la quantité offerte et non plus demandée.

Les variations des quantités offertes et du prix se faisant dans le même sens, l'élasticité de l'offre est donc toujours positive. La valeur de l'élasticité de l'offre est généralement comprise entre 0 et l'infini :

a) $\varepsilon_{O/P} = 0$: *offre totalement inélastique*, c'est-à-dire le vendeur ne change pas la quantité offerte malgré des variations du prix.

b) $0 < \varepsilon_{O/P} < 1$: *offre relativement inélastique* (donc peu sensible) aux variations de prix. Il s'agit des biens pour lesquels les considérations de prix influent peu sur le volume des quantités offertes. C'est le cas des biens périssables, ceux dont le stockage n'est pas possible. Une baisse de prix ne permet pas le retrait facile du marché (poissons frais, légumes, …). De la même manière, une hausse de prix ne provoque pas, instantanément au moins, une augmentation des quantités offertes.

c) $\varepsilon_{O/P} = 1$: *élasticité unitaire ;* l'offre est dite *parfaitement élastique*, c'est-à-dire la quantité offerte varie en pourcentage comme le prix.

d) $1 < \varepsilon_{O/P} < +\infty$: *offre relativement élastique* (donc sensible) aux variations de prix. C'est le cas des biens qui ne subissent pas l'altération du temps ; donc tous ceux qui peuvent attendre et être stockés. Une légère baisse de prix peut suffire à soustraire du marché une quantité très forte des biens, peut-être à les faire disparaître. Inversement, une légère hausse peut suffire à les faire apparaître ou à en augmenter considérablement la masse.

e) $\varepsilon_{O/P} = +\infty$: *offre totalement élastique*, c'est-à-dire qu'une variation infinitésimale du prix entraîne une variation infinie de l'offre. Donc, pour un prix donné, le vendeur est disposé à offrir n'importe quelle quantité.

<u>Exemple</u> : Soit la fonction de demande linéaire ci après : Q = a – $\frac{\text{a}}{\text{b}}$P. Calculer et discuter l'élasticité-prix de la demande de cette fonction.

<u>Solution</u>

$$\varepsilon_{D/P} = \frac{\text{dQ}}{\text{dP}} . \frac{\text{P}}{\text{Q}} \quad \text{or} \quad \frac{\text{dQ}}{\text{dP}} = \frac{\text{a}}{\text{b}} \; ; \quad \text{d'où :} \quad \varepsilon_{D/P} = -\frac{\text{a}}{\text{b}} . \frac{\text{P}}{\text{Q}}$$

- Si Q = a et P = 0 $\Rightarrow \varepsilon_{D/P} = 0$
- Si Q = 0 et P = b $\Rightarrow \varepsilon_{D/P} = -\infty$
- Si $= \frac{a}{2}$ et $P = \frac{b}{2}$ $\Rightarrow \varepsilon_{D/P} = 1$

3.3.1.3 Optimisation

Considérée comme la gestion optimale des ressources rares, l'Economie se préoccupe au premier chef des problèmes de maximum et de minimum.

A. Maximisation ou minimisation à l'aide de la dérivée première

Les étapes de détermination des valeurs extrémales des fonctions (maximum et/ou minimum relatifs) à l'aide de la dérivée première sont :

1. Prendre la dérivée première de la fonction y = f(x) continue et différentiable dans un intervalle I, l'annuler, et résoudre pour les points critiques. Cette étape correspond à la recherche des conditions du premier ordre, appelées aussi conditions nécessaires.

   Donc : x* extremum $\Rightarrow$ f'(x*) = 0.

2. Etudier les signes de la fonction dérivée aux points critiques pour voir s'ils sont des points extrêmes. En effet, les *conditions suffisantes* ou *conditions du second ordre* stipulent que si la dérivée première change de signe du plus au moins quand on passe de gauche à droite en x*, la fonction admet un maximum en x* ; si la dérivée change de signe du moins au plus quand on passe de gauche à droite en x*, la fonction admet un minimum en x*.

   Les conditions suffisantes ou condition du second ordre (détermination du type d'extremum) peuvent se résumer à l'aide du tableau suivant :

x < x*	x > x*	Nature du point critique
+	–	Maximum
–	+	Minimum
+	+	f(x) est croissante, il n'y a ni maximum ni minimum (point d'inflexion).
–	–	f(x) est décroissante, il n'y a ni maximum ni minimum (point d'inflexion).

Exemple : Trouver les points maximum et minimum de la fonction :

$$y = f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x + 1.$$

<u>Etape 1</u> : calculer la fonction dérivée : $y' = f'(x) = x^2 - 6x + 8$

<u>Etape 2</u> : trouver les points critiques ou les racines réelles

$$y' = f'(x) = x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4) = 0$$
$$\Rightarrow x^* = 2 \text{ et } x^* = 4$$

<u>Etape 3</u> : examiner les points critiques

- pour $x^* < 2 \Rightarrow y' = (-)(-) > 0$;
- pour $x^* > 2 \Rightarrow y' = (+)(-) < 0$.

En passant en $x^* = 2$ de gauche à droite, la dérivée change de signe du (+) au (–). Par conséquent, la fonction atteint son *maximum* lorsque $x^* = 2$;

- pour $x^* < 4 \Rightarrow y' = (+)(-) < 0$;
- pour $x^* > 4 \Rightarrow y' = (+)(+) > 0$.

En passant en $x^* = 4$ de gauche à droite, la dérivée change de signe du (–) au (+). Par conséquent, la fonction atteint son *minimum* quand $x^* = 4$.

<u>Etape 4</u> : elle consiste à trouver des valeurs de f(x) en $x^* = 2$ et en $x^* = 4$.

- si $x^* = 2 \Rightarrow f(x)\big|_{x=2} = \frac{23}{3}$;
- si $x^* = 4 \Rightarrow f(x)\big|_{x=4} = \frac{19}{3}$.

B. Maximisation ou minimisation à l'aide de la dérivée seconde

Si la fonction dérivable $y = f(x)$, appelée *fonction objectif*, a une dérivée première qui s'annule en $x = x^*$ et si la dérivée première de la dérivée première existe et est continue dans un voisinage contenant x^*, l'optimisation peut se faire également à l'aide de la dérivée seconde.

La détermination des valeurs extrémales des fonctions (maximum et/ou minimum relatifs) à l'aide de cette approche exige que les conditions ci-après soient vérifiées :

1° **Conditions nécessaires ou conditions de premier ordre**

Soit une fonction $y = f(x)$ continue et différentiable dans un intervalle I. Si $x^* \in$ I est un extremum (valeur critique ou stationnaire), alors : $f(x) = 0$.

Donc : x^* extremum $\Rightarrow f(x^*) = 0$

2° Conditions suffisantes ou conditions du second ordre (détermination du type d'extremum)

Lorsque, par hypothèse, nous avons $f(x^*) = 0$, alors :

- Si $f''(x^*) > 0$, la fonction atteint un minimum en ce point $x = x^*$
- Si $f''(x^*) < 0$, la fonction atteint un minimum en ce point $x = x^*$
- Si $f''(x^*) = 0$, la fonction ne permet pas de conclure.

Autrement dit, l'étude du point critique (x^*) donne le résultat suivant :

f ' (x*)	f '' (x*)	nature du point critique
0	< 0	maximum en x*
0	> 0	minimum en x*
0	= 0	indéterminée en x*

Remarque :
Quand la nature du point critique x* ne peut pas être identifiée à l'aide de la dérivée seconde, on examine le signe de la dérivée première comme dans la section précédente. Toutefois, si la dérivée seconde est nulle au point x = 0, et que le troisième ne l'est pas, la valeur critique n'est ni un maximum ni un minimum, mais un *point d'inflexion* où le rythme de variation de la fonction se modifie.

Exemple 1 : Reprenons l'exemple précédent consistant à trouver les points critiques de la fonction suivante : $y = f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x + 1.$

Conditions du premier ordre : calculer la dérivée première de la fonction objectif et égaliser la à zéro pour trouver les points critiques (valeurs critiques ou valeurs stationnaires) :

$$y' = f'(x) = x^2 - 6x + 8 = (x - 2)(x - 4) = 0$$

$$\Rightarrow x^* = 2 \text{ et } x^* = 4$$

Conditions du second ordre : calculer la dérivée seconde et examiner les signes de celle-ci aux points critiques :

$$y'' = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = 2x - 6$$

Pour $x^* = 2 \Rightarrow y'' = 4 - 6 = -2 < 0 \Rightarrow$ *maximum* en x = 2 ;

Pour $x^* = 4 \Rightarrow y'' = 8 - 6 = +2 > 0 \Rightarrow$ *minimum* en x = 4.

Exemple 2 : Soit à optimiser la fonction : $y = f(x) = x^4$.

Conditions du premier ordre : $y' = \frac{df(x)}{dx} = 4x^3 = 0$

$$\Rightarrow x^* = 0 \quad \text{(l'unique point critique de la fonction)}$$

Conditions du second ordre : $y'' = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = 12.$

Pour $x^* = 0 \Rightarrow y'' = (0).(12) = 0.$

Dans ce cas, la dérivée seconde ne peut aider à identifier la nature du point critique x* = 0. On peut alors procéder à l'étude du point critique à l'aide des signes de la dérivée première. Ainsi : $y'\big|_{x^* < 0} < 0$ et $y'\big|_{x^* > 0} > 0,$

Ce qui signifie que la dérivée première change de signe du *moins au plus* en passant en $x^* = 0$ de gauche à droite. Par conséquent, la fonction admet un *minimum* au point $x^* = 0$.

3.3.2 Applications des dérivées des fonctions à plusieurs variables

3.3.2.1. Concepts marginaux

Comme nous l'avons souligné plus haut, le calcul des dérivées permet de mesurer l'effet résultant de la modification d'une ou de plusieurs variables expliquées sur une grandeur totale donnée. Pour illustrer son importance en Economie et en Gestion, nous avons retenu une fonction de production à deux variables exogènes.

Le processus de production peut être considérée comme un mécanisme dans lequel entrent des facteurs de production (appelés aussi inputs) et sortent des produits (outputs).

Le lien technologique entre les inputs et les outputs est décrit par une fonction appelée fonction de production. En considérant la production comme fonction des deux facteurs K (capital) et L (travail), on peut écrire :

$$Q = f(K, L).$$

Et lorsqu'on veut calculer la valeur de la production Q, il faut nécessairement connaître la quantité du capital utilisé (K) et la quantité du travail (L). Mais, dans un tel calcul, il est difficile de savoir le degré d'influence spécifique de chaque facteur sur le processus de production.

Si nous ne considérons plus simultanément les deux facteurs de production, mais un seul à la fois, nous serons alors en mesure de déterminer leur rôle respectif dans la production. On dit alors qu'on s'intéresse à la productivité de chaque facteur, c'est-à-dire aux modifications de la production lorsqu'un facteur varie et que l'autre reste fixe. Les différentes formes de productivités sont :

1° ***La productivité totale*** **(PT)** qui décrit, en fonction de la quantité du facteur variable, l'évolution de la production. Ainsi, la productivité totale du travail se définit comme la production résultant de l'utilisation d'un certain nombre d'unités de facteur travail avec une quantité fixe de l'autre de production.

Donc : $PT_L = f(K = K_o, L)$ où PT_L est la productivité totale du travail ;

K_o représente la quantité fixe de K

$PT_K = f(K, L = L_o)$ où PT_K est la productivité totale du travail ;

L_o : la quantité fixe du travail.

2° ***La productivité moyenne physique*** **(PMP)** décrit, en fonction de facteur variable, l'évolution de la contribution moyenne facteur variable à la production. Elle est donc égale au rapport de la production totale sur la quantité du facteur variable. Ainsi, la productivité moyenne physique du travail est égale à :

$$PMP_L = f(L) = \frac{PT_L}{L}$$

et $PMP_K = f(K) = \frac{PT_K}{K}$

3° ***La productivité marginale physique*** **(PmP)** est définie comme l'augmentation de la production due à une unité supplémentaire du facteur variable. Si la productivité marginale est une fonction continue, alors la productivité marginale physique sera la dérivée de la productivité totale par rapport au facteur variable (la dérivée partielle). Ainsi, la productivité marginale physique du travail est donc :

$$PmP_L = \lim_{\Delta L \to 0} \frac{\Delta PT_L}{\Delta L} = \frac{dPT_L}{dL} = \left(\frac{\partial PT}{\partial L}\right)_{K=Ko}.$$

Remarque

Si la quantité du facteur varie de façon discrète, on pourra alors considérer la production totale comme la somme de toutes les productivités marginales.

Donc : $PT = \sum_i PmP$

3.3.2.2 Elasticités partielles

Pour mesurer la sensibilité d'une fonction économique à plusieurs variables par rapport à l'une d'elle, l'on fait rappel aux dérivées partielles. Ainsi, quand $Z = f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, l'élasticité de Z par rapport à X_i est :

$$\varepsilon_{Z/X_i} = \frac{\partial Z}{\partial X_i} \cdot \frac{Xi}{Z} \quad \textit{ou bien} \quad \varepsilon_{Z/X_i} = \frac{\partial \ln Z}{\partial \ln X_i}$$

où $i = 1, 2, \ldots, n$

Comme une fonction à plusieurs variables peut générer plus d'une élasticité, on les qualifie d'élasticités *partielles*. Cette formule d'élasticité partielle s'applique indistinctement à tout problème d'analyse de sensibilité d'une variable expliquée aux variations de n'importe quel déterminant.

3.3.2.3. Optimisation des fonctions à plusieurs variables

3.3.2.3.1. Optimisation sans contrainte ou optimisation libre

A. Cas de deux variables

Soit une fonction z = f(x, y). Pour qu'elle soit en un maximum relatif ou en un minimum relatif, il faut que trois conditions soient remplies.

a) ***Conditions du 1^er^ ordre*** ou ***conditions nécessaires***

Les dérivées partielles d'ordre 1 doivent être simultanément nulles, c'est-à-dire,

$$f_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$f_y = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

La résolution de ce système permet de trouver les valeurs stationnaires : x* et y*

b) ***Conditions du 2^nd^ ordre*** ou ***conditions suffisantes***

Les dérivées secondes partielles directes évaluées aux valeurs critiques doivent être simultanément négatives pour un maximum relatif

$$\mathbf{f_{xx} < 0 \;\; et \;\; f_{yy} < 0}$$

ou simultanément positives pour un minimum relatif

$$\mathbf{f_{xx} > 0 \;\; et \;\; f_{yy} > 0}$$

Cela garantit que, aux valeurs critiques, la fonction est orientée vers le bas par rapport aux axes principaux dans le cas d'un maximum et vers le haut dans le cas d'un minimum.

c) **Le produit des dérivées partielles secondes directes évalué aux valeurs critiques doit être supérieur au carré des dérivées partielles croisées, c'est-à-dire,**

$$\mathbf{f_{xx}.f_{yy} > (f_{xy})^2}$$

ou

$$\mathbf{f_{xx}.f_{yy} - (f_{xy})^2 > 0}$$

Cela garantit que la fonction se situe à un optimum par rapport à toutes les directions, et pas seulement par rapport aux axes principaux.

Quand $f_{xx}.f_{yy} < (f_{xy})^2$ et que la condition de deuxième ordre n'est pas ainsi satisfaite, il se peut que la fonction évaluée aux valeurs critiques passe par un point selle ou point col. Un point selle de la fonction f est un point critique x* en lequel f se situe à un maximum par à l'un des axes et à un minimum par rapport à l'autre axe.
Dans le cas d'un point selle, les dérivées partielles de deuxième ordre f_{xx} et f_{yy} auront des signes différents et la troisième condition $f_{xx}.f_{yy} > (f_{xy})^2$ ne sera pas satisfaite.

Si, le test ne permet pas de conclure.

Une autre façon très commode de déterminer la nature des points stationnaires consiste à recourir à l'utilisation de la matrice Hessienne (H) composée exclusivement des dérivées partielles secondes avec

$$H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

Où $f_{xy}. = f_{xy}$

Ainsi, on parle de :

- **Minimum** si $|H_1| = f_{xx} > 0$ et $|H_2| = |H| > 0$, c'est-à-dire si tous les **mineurs diagonaux principaux sont positifs**. Dans ce cas, la matrice Hessienne H est dite *définie - positive* et les conditions de deuxième ordre nécessaires pour un *minimum* sont satisfaites.
- **Maximum** si $|H_1| < 0$ et $|H_2| = |H| > 0$, c'est-à-dire si les **mineurs diagonaux principaux alternent de signe le premier étant négatif.** Dans ce cas, la matrice Hessienne H est dite *définie- négative* et les conditions de deuxième ordre nécessaire pour un *maximum* sont satisfaites.
- **Ni Maximum ni minimum si la matrice hessienne est indéfinie**

Notons que :

- $|H| = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$ est le *déterminant de la matrice Hessienne* ;
- $|H_1| = f_{xx}$ est le *mineur diagonal principal d'ordre 1* ;
- $|H_2| = |H| = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$ est le *mineur diagonal principal d'ordre 2* .
- le *mineur diagonal principal d'ordre* k d'une matrice carrée A d'ordre n est le déterminant de la sous-matrice d'ordre k extraite de A obtenue en supprimant les (n - k) dernières lignes el les mêmes (n - k) dernières colonnes de A.

Exemples 4a.
Une entreprise qui produit des biens x et y a pour fonction de profit

$$\pi = 64x - 2x^2 + 4xy - 4y^2 + 32y - 14$$

Cherchez le volume de production des deux biens qui maximise le profit et vérifiez que les profits sont bien maximisés.

Solution :

- ***Condition du premier ordre.***

Calculons les dérivées partielles par rapport à x et à y et annulons-les. Il vient :

$\pi_x = 64 - 4x + 4y = 0$
$\pi_y = 32 + x - 8y = 0$

On résout le système $\begin{cases} -4x + 4y = -64 \\ 4x - 8y = -32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^* = 40 \\ y^* = 24 \end{cases}$

- ***Conditions du 2^nd^ ordre*** ou ***conditions suffisantes***

Calculons les dérivées partielles d'ordre 2 et vérifions si $f_{xx}.f_{yy} > (f_{xy})^2$. Il s'ensuit :
$\pi_{xx} = -4$ (< 0), $\pi_{yy} = -8$ (< 0) et $\pi_{xy} = 4$.

Comme $f_{xx}.f_{yy} = 32 > (f_{xy})^2 = 16$ et que f_{xx} et f_{yy} sont toutes les deux négatives, les profits sont donc bien maximisés pour x* = 40 et y* = 24. Le profit maximum π_{max} est 1650.

De plus,

$$H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -8 \end{bmatrix}. \quad |H_1| = -4 < 0 \text{ et } |H_2| = |H| = 32 - 16 = 16 > 0.$$

La matrice Hessienne H est donc *définie- négative* et les conditions de deuxième ordre nécessaires pour un *maximum* sont satisfaites.

Exemples 4b : Soit f(x, y) = $x^2 + xy + 4y^2 - 3x + 2$

Calculons les dérivées partielles par rapport à x et à y et annulons-les. Il vient :

$f_x = 2x + y - 3 = 0$
$f_y = x + 2y = 0$

En résolvant le système $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$ on obtient : $\begin{cases} x^* = 2 \\ y^* = -1 \end{cases}$.

❖ ***Conditions du 2^nd^ ordre*** ou ***conditions suffisantes***

Calculons les dérivées partielles d'ordre 2 et vérifions si $f_{xx}.f_{yy} > (f_{xy})^2$. Il s'ensuit :
$f_{xx} = 2 \ (> 0)$, $f_{yy} = 2 \ (> 0)$ et $f_{xy} = f_{yx} = 1$.

Comme $f_{xx}.f_{yy} = 4 > (f_{xy})^2 = 1$ et que f_{xx} et f_{yy} sont toutes les deux positives, la fonction f est donc bien minimisée pour $x^* = 2$ et $y^* = -1$.

De plus,

$H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. $|H_1| = 2 > 0$ et $|H_2| = |H| = 3 > 0$. La matrice F est donc définie positive et, par conséquent, admet un minimum local.

Exemple 4c. : Soit f(x, y) = $x^3 + 9xy - y^3$.

On a :

$f_x = 3x^2 + 9y = 0$ (1)
$f_y = -3y^2 + 9x = 0$ (2)

De (1), y = $-\frac{1}{3}x^2$ **(3) qui donne dans (2)** $-3\left(-\frac{1}{3}x^2\right)^2 + 9x = -\frac{1}{3}x^4 + 9x = x(27 - x^3)$ **= 0.**

Ainsi les racines sont x = 0 et x = 3. En substituant ces valeurs dans (3), on obtient $y_1 = 0$ et $y_2 = -3$. Les valeurs critiques sont donc $(x^*_1, y^*_1) = (0, 0)$ et $(x^*_2, y^*_2) = (3, -3)$.

$H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x & 9 \\ 9 & -6x \end{bmatrix}$. $|H_1| = 6x$ et $|H_2| = |H| = -36x^2 - 81$. Au point (0, 0), les deux mineurs diagonaux principaux valent respectivement 0 et –81. Le second étant négatif, le point (0, 0) est un point selle de la fonction f, c'est-à-dire ni un maximum, ni un minimum.

D'autre part, puisque les deux mineurs diagonaux principaux valent respectivement 18 et 243, la matrice H est définie positive et la fonction F est minimisée au point (3, –3).

A. Cas de plusieurs variables

Dans le cas d'une fonction de plusieurs variables $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, la matrice hessienne devient :

$$H = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix}$$

La fonction atteint un minimum (ou un maximum) si les dérivées partielles d'ordre 1 s'annulent et si les mineurs diagonaux principaux sont tous positifs, *on dit que H est définie positive* (ou alternent de signe en commençant par le négatif, *on dit alors que H est définie négative*). Ces conditions peuvent être résumées comme suit :

Condition	Maximum	Minimum
1er ordre (Condition nécessaire)	$f_1 = f_2 = \dots f_n = 0$	$f_1 = f_2 = \dots f_n = 0$
2ème ordre (Condition suffisante)	$\lvert H_1 \rvert < 0, \lvert H_2 \rvert > 0 \ \lvert H_3 \rvert < 0 \dots = (-1)n \lvert H_n \rvert > 0$, H est définie négative	$\lvert H_1 \rvert > 0, \lvert H_2 \rvert > 0, \lvert H_3 \rvert > 0 \dots \lvert H_n \rvert > 0$, H est définie positive

Exemple 5a : Soit Z = $2x_1^2 + x_1x_2 + 4\,x_2^2 + x_1x_3 + x_3^2 + 2$

$$f_1 = 4x_1 + x_2 + x_3 = 0$$
$$f_2 = x_1 + 8x_2 \qquad = 0.$$
$$f_3 = x_1 \qquad + 2x_3 = 0$$

Le système $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 8x_2 \qquad = 0 \\ x_1 \qquad + 2x_3 = 0 \end{cases}$ admet une solution triviale $\mathbf{x^*_1 = x^*_2 = x^*_3 = 0}$ **et** $\mathbf{Z^* = 2}$.

D'autre part, H = $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Les mineurs diagonaux principaux $\lvert H_1 \rvert = 4$, $\lvert H_2 \rvert = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}$ =31 et $\lvert H_3 \rvert = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ = 54 étant tous positifs, H est définie positive et Z* = 2 est un minimum.

Exemple 5b : Soit y = $-5x_1^2 + 10x^1 + x_1x_3 - 2\,x_2^2 + 4x^2 + 2x_2x_3 - 4\,x_3^2$

$$y_1 = -10x_1 \quad + x_3 + 10 = 0$$
$$y_2 = \qquad 8x_2 + 2x_3 + 4 = 0.$$
$$y_3 = x_1 + 2x_2 - 8x_3 = 0$$

Avec $\lvert A \rvert$ = -276 $\neq 0$, le système $\begin{cases} -10x_1 \quad + x_3 = -10 \\ x_1 + 8x_2 + 2x_3 = -40 \\ x_1 + 2x_2 - 8x_3 = 0 \end{cases}$ admet une solution unique $\mathbf{x^*_1}$ **= 1,04,** $\mathbf{x^*_2}$ **= 1,62 et** $\mathbf{x^*_3}$ **= 0,43.**

D'autre part, H = $\begin{bmatrix} -10 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$. Les mineurs diagonaux principaux $|H_1|$= -10, $|H_2|$ = $\begin{vmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}$= 40 et $|H_3|$ = $\begin{vmatrix} -10 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$ = -276 alternant de signe, H est définie négative et la fonction y est maximisée pour $\mathbf{x^*_1 = 1,04}$, $\mathbf{x^*_2 = 1,62}$ **et** $\mathbf{x^*_3 = 0,43}$.

3.3.2.3.2. Optimisation liée ou optimisation sous contrainte

3.3.2.3.2.1 Contraintes ayant la forme d'égalité

On peut utiliser le calcul différentiel pour optimiser (maximiser ou minimiser) une *fonction « objectif »* sous contrainte. Soit Z = f(x, y), une fonction « objectif », soumise à une contrainte en égalité de la forme g(x, y) = k, où k est une constante. Selon Johnston, J., (***Méthodes économétriques***, Tome 1, Economica, Paris, 1985, p.329) et Weber, J., (***Mathematical Analysis***, Harper & How Publ., Inc., New York, 1976,), il est possible d'écrire une nouvelle fonction $L(x, y, \lambda)$ imposant la contrainte égale à 0, en multipliant celle-ci par λ, le multiplicateur de Lagrange, et en l'ajoutant à la fonction initiale. On obtient alors la fonction de Lagrange (ou simplement le Lagrangien) :

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda[g(x, y) - k]$$ [2]

Notons que λ fournit une approximation de l'effet d'une variation d'une unité dans la constante (k) de la contrainte sur la fonction « objectif ».

On détermine les extrema de *L*(x, y, λ) comme dans le cas de l'optimisation sans contrainte. Il faut donc chercher les conditions du premier ordre et du second ordre.

a) *Conditions du premier ordre* (détermination des valeurs critiques ou stationnaires)

$$L_x = \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \qquad (1)$$

$$L_y = \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \qquad (2)$$

$$L_\lambda = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \qquad (3)$$

b) *Conditions de second ordre* (détermination du type d'extremum)

[2] On trouve aussi le lagrangien de la forme $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda[k - g(x, y)]$, Dowling, E., ***Mathématiques pour l'Economiste, Cours et Problèmes***, 2ème édition, Mc-Graw Hill, Série Schaum, New York, 1995, p. 146.

Les conditions du second ordre utilisent la matrice Hessienne bordée, notée $\overline{H}$ et représentée sous l'une ou l'autre des deux formes suivantes :

$$\overline{H} = \begin{bmatrix} L_{xx} & L_{xy} & L_{x\lambda} \\ L_{yx} & L_{yy} & L_{y\lambda} \\ L_{\lambda x} & L_{\lambda y} & L_{\lambda\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{xx} & L_{xy} & g_x \\ L_{yx} & L_{yy} & g_y \\ g_x & g_y & 0 \end{bmatrix}$$

où $L_{x\lambda} = g_x = \dfrac{\partial g}{\partial x}$; $L_{y\lambda} = g_y = \dfrac{\partial g}{\partial y}$.

ou bien :

$$\overline{H} = \begin{bmatrix} L_{\lambda\lambda} & L_{\lambda x} & L_{\lambda y} \\ L_{x\lambda} & L_{xx} & L_{xy} \\ L_{y\lambda} & L_{yx} & L_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{bmatrix}$$

Le multiplicateur de Lagrange λ fournit une approximation de l'effet d'une variation d'une unité dans la constante de la contrainte sur la fonction objectif. Si λ est positif, toute augmentation (diminution) d'une unité dans la constante de la contrainte engendrera une diminution (ou augmentation) de la fonction objectif à peu de chose près égale à la valeur de λ. Si λ est négatif, toute augmentation (diminution) d'une unité dans la constante de la contrainte fera augmenter (ou diminuer) la fonction objectif d'une valeur à peu de chose près égale à λ.

Remarques :

- La matrice Hessienne bordée $\overline{H}$ n'est rien d'autre que la Hessienne H elle-même mais bordée par les dérivées premières de la contrainte.
- L'*ordre d'un mineur diagonal principal bordé* est déterminé par *l'ordre du mineur diagonal principal non bordé*. Ainsi :

$$\left|\overline{H}_2\right| = \begin{vmatrix} L_{xx} & L_{xy} & g_x \\ L_{yx} & L_{yy} & g_y \\ g_x & g_y & 0 \end{vmatrix}$$

est un deuxième mineur diagonal principal bordé d'ordre 2 car le mineur diagonal principal à border est de dimension (2 x 2).

Dans le cas d'une fonction à 2 variables, z = f(x, y) soumise à la contrainte g(x, y) = k, les critères de décision *(conditions du second ordre)* sont :

- Si $\left|\overline{H}_2\right| = \left|\overline{H}\right| < 0$, la matrice Hessienne bordée est définie-positive, ce qui est une condition suffisante pour un *minimum*.
- Si $\left|\overline{H}_2\right| = \left|\overline{H}\right| > 0$, la matrice Hessienne bordée est définie-négative et c'est une condition suffisante pour un *maximum*.
- Si ces critères ne sont pas satisfaits, notamment si $\left|\overline{H}\right| = 0$, on ne peut conclure. Le test échoue (c'est peut être le cas d'un point selle).

Il convient de faire remarquer que le vérificateur considère directement $|\overline{H}_2|$ et non $|\overline{H}_1|$.

Dans le cas d'une fonction à n variables, z = f(x_1, x_2,…, x_n) soumise aux contraintes g(x_1, x_2,…x_n) = k, la matrice hessienne $\overline{H}$ est de la forme :

$$\overline{H} = \left[\begin{array}{cccc|c} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} & g_1 \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} & g_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} & g_n \\ \hline g_1 & g_2 & \cdots & g_n & 0 \end{array}\right] \quad \text{ou} \quad \overline{H} = \left[\begin{array}{c|cccc} 0 & g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ \hline g_1 & f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ g_2 & f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ g_n & f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{array}\right]$$

où $|\overline{H}| = |\overline{H}_n|$ en raison de la dimension n x n du mineur principal à border

Les conditions sont les suivantes :

- Condition nécessaire :

  $L_{x_1} = L_{x_2} \ldots L_{x_n} = 0$

- Condition suffisante :
  - Si $|\overline{H}_2| > 0$, $|\overline{H}_3| > 0$, $|\overline{H}_4| > 0$ … $|\overline{H}_n| > 0$, la matrice Hessienne bordée est définie-positive, ce qui est une condition suffisante pour un *minimum*.
  - Si $|\overline{H}_2| < 0$, $|\overline{H}_3| > 0$, $|\overline{H}_4| < 0$ … $|\overline{H}_n| > 0$, la matrice Hessienne bordée est définie-négative et c'est une condition suffisante pour un *maximum*.

Il ne faut pas perdre de vue que la matrice hessienne à border est d'ordre n. Et par conséquent, $|\overline{H}_2|$ est d'ordre n.

Exemple 6a :

Optimiser z = 45x² + 90 xy + 90y² soumise à la contrainte 2x + 3y = 60. Dire s'il y a maximum ou minimum.

Solution :

Soit le lagrangien,

$L = 45x^2 + 90xy + 90y^2 + \lambda(2x + 3y - 60)$

$L_x = 90x + 90y + 2\lambda = 0$

$L_y = 90x + 180y + 3\lambda = 0$

$L_\lambda = 2x + 3y - 60 = 0$

$$\begin{bmatrix} 90 & 90 & 2 \\ 90 & 180 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 60 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90 & 90 & 2 \\ 90 & 180 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 12 \\ -1080 \end{bmatrix}$$

$L_{xx} = 90 \quad L_{xy} = 90 \qquad g_x = 2$
$L_{yx} = 90 \quad L_{yy} = 180 \qquad g_y = 3$

$$\overline{H} = \begin{bmatrix} 90 & 90 & 2 \\ 90 & 180 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$\left|\overline{H}_2\right| = \left|\overline{H}\right|$ = 90(–90) – 90(–6à + 2(270-360)

= –810 + 540 – 180 = -990 + 540 = – 450 < 0

Comme $\left|\overline{H}_2\right| < 0$, $\overline{H}$ est définie positive. C'est donc un minimum

Exemple 6b :

Optimiser l'utilité $u = x^{0,5}y^{0,3}$ sous la contrainte budgétaire 10x + 3y = 140 en utilisant le Hessien Bordé.

Solution :

Soit le lagrangien :

$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda[g(x, y) - k] = L(x, y, \lambda) = x^{0,5}y^{0,3} + \lambda\,[10x + 3y - 140]$

$$L_x = \frac{\partial L}{\partial x} = 0{,}5x^{-0,5}\, y^{0,3} + 10\lambda = 0 \qquad (1)$$

$$L_y = \frac{\partial L}{\partial y} = 0{,}3x^{0,5}\, y^{-0,7} + 3\lambda = 0 \qquad (2)$$

$$L_\lambda = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 10x + 3y - 140 = 0 \qquad (3)$$

Réarrangeons les termes, puis divisons (1) par (2) pour éliminer λ

$$\frac{0{,}5x^{-0,5}y^{0,3}}{0{,}3x^{0,5}y^{-0,7}} = \frac{-10\lambda}{-3\lambda}$$

$$\frac{0{,}5}{0{,}3}\, x^{-0,5+0,5}\, y^{0,3+0,7} = \frac{10}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{0{,}5}{0{,}3}\, x^{-1}\, y^{1} = \frac{10}{3} \Rightarrow \quad \frac{0{,}5}{0{,}3}\frac{y}{x} = \frac{10}{3}$$

0,5y = 10(0,3x)/3 $\Rightarrow$ 0,5 y = x

Substituons x = 0,5y dans (3)

10(0,5y) + 3y =140 $\Rightarrow$ 8y = 140 $\Rightarrow$ 140/8 = 17,5

Puis en substituant y = 17,5 dans (3), nous obtenons :

10x = 140 – 3 (17,5) = 140 – 52,5 = 87,5 $\Rightarrow$ x = 8,75.

$-10\lambda = 0{,}5(8{,}75)^{-0,5}(17{,}5)^{0,3} \Rightarrow -10\lambda = 0{,}5(0{,}338)(2{,}36) = 0{,}38084 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -0{,}04$

Avec $L_{xx} = -0{,}25x^{-1,5}y^{0,3}$, $L_{yy} = 0{,}3x^{0,5}\, y^{-1,7}$ et $L_{xy} = L_{yx} = 0{,}15x^{-0,15}\, y^{-0,7}$, $g_x = 10$ et $g_y = 3$

$$\overline{H} = \begin{bmatrix} L_{xx} & L_{xy} & g_x \\ L_{yx} & L_{yy} & g_y \\ g_x & g_y & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,25x^{-1,5}y^{0,3} & 0,15x^{-0,15}y^{-0,7} & 10 \\ 0,15x^{-0,15}y^{-0,7} & 0,3x^{0,5}y^{-1,7} & 3 \\ 10 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left|\overline{H}_2\right| = \begin{vmatrix} -0,25x^{-1,5}y^{0,3} & 0,15x^{-0,15}y^{-0,7} & 10 \\ 0,15x^{-0,15}y^{-0,7} & 0,3x^{0,5}y^{-1,7} & 3 \\ 10 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 0,15x^{-0,15}y^{-0,7} & 10 \\ 0,3x^{0,5}y^{-1,7} & 3 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -0,25x^{-1,5}y^{0,3} & 10 \\ 0,15x^{-0,15}y^{-0,7} & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 21\, x^{0,5}\, y^{-1,7} + 9\, x^{-0,5}\, y^{-0,7} + 2,25\, x^{-1,5}\, y^{0,3} > 0.$$

Où x et y > 0 et ù un nombre positif x élevé à une puissance négative (–n) est égal à $1/x^n$, qui est aussi un nombre positif. Comme $\left|\overline{H}_2\right| > 0$, $\overline{H}$ est définie négative et U est un maximum.

Exemple 6c :

Optimiser f(x, y, z) = $4xyz^2$ sous la contrainte x + y + z = 56.

Réponse :

Le lagrangien est de la forme : L (x, y, z, λ) = $4xyz^2 + \lambda(56 - x + y + z)$.

Les conditions d'ordre 1 sont :

$$L_x = 4yz^2 - \lambda = 0 \qquad (1)$$
$$L_y = 4xz^2 - \lambda = 0 \qquad (2)$$
$$L_y = 8xyz - \lambda = 0 \qquad (3)$$
$$L_\lambda = 56 - x - y - z = 0 \qquad (4)$$

Egalisons les λ de (1) et (2). On a : $4yz^2 = 4xz^2$ $\Rightarrow$ y = z.

Egalisons les λ de (1) et (3). On a : $4yz^2 = 8xyz$ $\Rightarrow$ z = 2x.

Substituons y = x et z = 2x dans (4). Il vient : 56 – x – x – 2x = 0 $\Rightarrow$ 56 = 4x $\Rightarrow$ x* = 14.

Puis par substitution dans l'équation précédente, on trouve :

x* = 14, y* = 14, z* = 28 et λ* = 43904 et F* = 614 656.

Pour les conditions du second ordre, la matrice hessienne bordée est de la forme :

$$\left|\overline{H}\right| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & g_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & g_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & g_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4z^2 & 8yz & 1 \\ 4z^2 & 0 & 8xz & 1 \\ 8yz & 8xz & 8xy & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Débutons avec $\overline{H}_2$, la matrice 3 x 3 comprenant les 3 premières lignes et les 3 premières colonnes, $\overline{H}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 4z^2 & 8yz \\ 4z^2 & 0 & 8xz \\ 8yz & 8xz & 8xy \end{bmatrix}$. Ainsi :

$\left|\overline{H}_2\right| = \begin{vmatrix} 0 & 4z^2 & 8yz \\ 4z^2 & 0 & 8xz \\ 8yz & 8xz & 8xy \end{vmatrix} = 0 - 4z^2 \begin{vmatrix} 4z^2 & 8xz \\ 8yz & 8xy \end{vmatrix} + 8yz \begin{vmatrix} 4z^2 & 0 \\ 8yz & 8xz \end{vmatrix}$ soit située dans le coin gauche

$= 0 - 4z^2\left[(4z^2.8xy) - 64xyz^2\right] + 8yz\,(4z^2\,.\,8xy) = - 4z^2[32z^2xy - 64xyz^2] + 8yz(32xz^3)$

$= - 128\,xyz^4 + 256xyz^4 + 256xyz^4 = 384xyz^4 > 0.$

Calculons ensuite $\left|\overline{H}_3\right|$ qui est ici égal à $\left|\overline{\mathrm{H}}\right|$

$$\left|\overline{H}_3\right| = \begin{vmatrix} 0 & 4z^2 & 8yz & 1 \\ 4z^2 & 0 & 8xz & 1 \\ 8yz & 8xz & 8xy & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 4z^2\begin{vmatrix} 4z^2 & 8yz & 1 \\ 8yz & 8xy & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 8yz\begin{vmatrix} 4z^2 & 0 & 1 \\ 8yz & 8xz & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 4z^2 & 0 & 8xz \\ 8yz & 8xz & 8xy \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 16\,z^4 - 64xz^3 - 64yz^3 - 64xyz^2 + 64x^2z^2.$$

Evalué au point x* = 14, nous obtenons y* = 14 et z* = 28. $\left|\overline{H}_3\right| = -19668992 < 0.$

Avec $\left|\overline{H}_2\right| > 0$ et $\left|\overline{H}_3\right| < 0$, la matrice $\left|\overline{\mathrm{H}}\right|$ est définie négative et la fonction est maximisée.

3.3.2.3.2.2 Contraintes se présentant sous la forme d'inégalité

Jusqu'ici, nous avons considéré des ensembles réalisables définis uniquement par des contraintes en équations. Cependant, la majorité des problèmes d'optimisation sous contraintes en Economie et en Gestion sont caractérisées par des contraintes de la forme d'inéquations.

Soit une fonction *objectif* f(x, y) et une contrainte ayant la forme d'inégalité $g(x, y) \geq 0$ ou $g(x, y) \leq 0$. Il est donc possible d'adapter la méthode de la fonction de Lagrange pour traiter de telles inégalités. Il suffit de supposer avant tout que la contrainte est une égalité et d'utiliser la méthode habituelle de résolution du Lagrangien. Ensuite, le lagrangien étant de la forme $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\left[k - g(x, y)\right]$, il suffira d'appliquer les règles ci-après[3] :

a) Pour maximiser la fonction sous $g(x, y) \geq 0$
   - Si $\lambda < 0$, la contrainte est bien une limite réelle, et l'optimum sous contrainte est bien déterminé.
   - $\lambda \geq 0$, la contrainte n'est pas liante. On néglige la contrainte qui a été imposée sous forme d'égalité et on maximise directement la fonction objective.

b) Pour maximiser la fonction sous $g(x, y) \leq 0$
   - Si $\lambda < 0$, la contrainte ne constitue pas une limite. On maximise alors la fonction objective indépendamment de la contrainte.
   - Si $\lambda \geq 0$, la contrainte opère et l'optimum sous contrainte est bien déterminé.

c) Pour minimiser la fonction sous $g(x, y) \geq 0$
   - Si $\lambda < 0$, la contrainte n'est pas une limite. On la néglige et on minimise directement la fonction objective.

[3] Dowling E., ***Mathématiques pour l'Economiste, Cours et Problèmes***, 2ème édition, Mc-Graw Hill, Série Schaum, New York, 1995, p. 132.

- Si $\lambda \geq 0$, la contrainte soumet la fonction objectif à une limite et le minimum sous contrainte recherché est trouvé.

d) Pour minimiser la fonction sous $g(x, y) \leq 0$
- Si $\lambda < 0$, la contrainte joue et l'optimum sous contrainte est bien déterminé.
- Si $\lambda \geq 0$, la contrainte n'est pas liante. On minimise alors directement la fonction objective.

Exemples 7 :

1. **Soit $\pi = 64x - 2x^2 + 4xy - 4y^2 + 32y - 14$ et la contrainte $x + y \leq 50$.**

Réponse :

Pour maximiser cette fonction, on suppose que la contrainte est $x + y = 50$ et on exprime le lagrangien :

$$L(x, y, \lambda) = 64x - 2x^2 + 4xy - 4y^2 + 32y - 14 + \lambda(50 - x - y)$$

Il vient : $\begin{array}{l} L_x = 64 - 4x + 4y - \lambda = 0 \\ L_y = 32 + 4x - 8y - \lambda = 0 \\ L_\lambda = 50 - x - y = 0 \end{array}$. En résolvant le système $\begin{cases} -4x + 4y - \lambda = -64 \\ 4x - 8y - \lambda = -32 \\ -x - y = -50 \end{cases}$

On obtient = $x^* = 31,6$; $y^* = 18,4$ et $\lambda^* = 11,2$

Comme λ est positif dans le cadre d'une maximisation sous la contrainte $g(x, y) \leq 0$, la contrainte est liante et le maximum sous contrainte recherché a été trouvé = $\pi^* = 1571,6$.

2. **Maximiser la fonction de profit d'une entreprise $\pi = 160x - 3x^2 - 2xy - 2y^2 + 120y - 18$ compte tenu du fait que la firme ne peut produire globalement plus de 50 unités : $x + y \leq 50$.**

Réponse :

Soit le lagrangien

$$L(x, y \lambda) = 160x - 3x^2 - 2xy - 2y^2 + 120y - 18 + \lambda(50 - x - y)$$

Il vient : $\begin{array}{l} L_x = 160 - 6x - 2y - \lambda = 0 \\ L_y = -2x - 4y + 120 - \lambda = 0 \\ L_\lambda = 50 - x - y = 0 \end{array}$. En résolvant le système $\begin{cases} -6x - 2y - \lambda = -160 \\ -2x - 4y - \lambda = -120 \\ -x - y = -50 \end{cases}$

On obtient = $x^* = 23,33$; $y^* = 26,67$ et $\lambda^* = -33,33 < 0$ et $\pi^* = 2615,33$.

Ici, λ < 0. Dans le cas d'une maximisation sous la contrainte g(x, y) ≤ 0, cette contrainte n'est pas une limite. Négligeons-la et maximisons directement la fonction objectif.

3. Minimiser z = $3x^2 - xy - 4x - 7y + 2y^2 + 12$ sous la contrainte x + y ≥ 15.

Réponse :

Soit le lagrangien : L = $3x^2 - xy - 4x - 7y + 2y^2 + 12 + \lambda(15 - x - y)$.

Les conditions du premier ordre donnent :

$$\begin{aligned} L_x &= 6x - y - 4 - \lambda = 0 \\ L_y &= -x + 4y - 7 - \lambda = 0 \\ L_\lambda &= 15 - x - y = 0 \end{aligned} \text{ et } \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ \lambda^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ -15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 23 \end{bmatrix} \text{ et } Z^* = 141\ ;$$

D'après la règle c de la présente section, lorsqu'on minimise une fonction sous la contrainte g(x, y) ≥ 0 et qu'on trouve une valeur λ > 0, c'est que la contrainte est active et que la solution trouvée est bien un minimum sous contrainte.

La matrice hessienne bordée associée est $\overline{H} = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Le lecteur peut vérifier que

$|\overline{H}_2| = -12 < 0$, Ainsi, $\overline{H}$ est définie positive, ce qui confirme que Z* est un minimum.

3.4 Utilisation des déterminants en économie

3.4.1 Le Jacobien

Le Jacobien noté $|J|$, est un déterminant qui permet de vérifier n'importe quelle dépendance fonctionnelle, linéaire et non linéaire. Il se compose de toutes les dérivées partielles de premier ordre d'un système d'équations disposées selon une séquence ordonnée.

Considérons le système d'équations simultanées :

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ &\vdots \\ y_n &= f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{aligned} \text{. Alors } |J| = \left| \frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Si $|J| \neq 0$, les équations sont fonctionnellement indépendantes

Exemple 8 :
Utiliser le Jacobien pour vérifier la dépendance fonctionnelle du système d'équations suivant :

$$\begin{matrix} y_1 = 6x_1 + 4x_2 \\ y_2 = 7x_1 + 9x_2 \end{matrix} . \quad |J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 54 - 28 = 26 \neq 0.$$

Il n'ya donc pas de dépendance fonctionnelle. Notons que $|J| = |A| = 2$. Comme $|A| \neq 0$, A est non singulière. Donc solution unique.

3.4.2 Le Hessien

Le Hessien, noté $|H|$, est le déterminant de la matrice Hessienne (H) composée exclusivement des dérivées partielles secondes d'une fonction de plusieurs variables de la forme :

$$H = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix}.$$

On s'en sert pour la recherche des minima des fonctions soumises ou non à des contraintes en équations ou en inéquations (cfr applications économiques des dérivées, & 3.2.3 du chapitre 4).

3.4.3 Le Wroskien

Le **Wronskien** ou le **déterminant de Wronski** est un déterminant de la forme

$$W(y_1, y_2, ..., y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \cdots & y'_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

où les primes désignent les dérivées partielles d'ordre 1 et où y_1, y_2, ... , y_n , toutes des fonctions de x, sont les n solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre n. Si $W(y_1, y_2, ..., y_n)$ est différent de zéro pour quelques x de l'intervalle $a \leq x \leq b$, c'est que les n fonctions y_1, y_2, ... , y_n sont linéairement indépendantes sur cet intervalle.

Exemple 9 :
Soit $y_1 = e^{-2x}$ et $y_2 = e^{3x}$.

On a : $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{-2x} & e^{3x} \\ -2e^{-2x} & 3e^{3x} \end{vmatrix}$

$$= 3e^{-2x}e^{3x} + 2e^{-2x}e^{3x} = 3e^{-2x+3x} + 2e^{-2x+3x} = 3e^{x} + 2e^{x} = 5e^{x}$$

Ces solutions y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes car $5e^{x} \neq 0$.

EXERCICES

2. Calculez les dérivées premières et seconde de chacun des fonctions suivantes :

   a) xe^{3x} b) e^{x^2+3x-2} c) $\ln(x^4+2)^2$ d) $\frac{x}{e^x}$ e) $\frac{x}{lnx}$ f) $\frac{lnx}{x}$

   f) $ln\left(\frac{\sqrt[4]{x^2-1}}{x^2+1}\right)$

3. La valeur d'une parcelle de terrain achetée dans un but spéculatif croit selon la formule $V = 2000e^{t^{1/4}}$. Si le taux d'intérêt est de 10%, combien de temps faut-il garder la parcelle pour maximer sa valeur présente ?

4. Calculer les dérivées partielles premières des fonctions suivantes :

   a) $4x^2y - 3xy^3 + 6x$ b) xy c) xy^2 d) e^{2x+3y} e) $\frac{x+y}{x-y}$

   f) $3x^2y - 7x\sqrt{y}$ g) $kx_1^{\alpha_1}.x_2^{\alpha_2}$ (où x_1 et x_2 sont les variables)

5. Calculer les dérivées partielles secondes de fonctions suivantes et écrire leurs matrices Hessiennes

   a) $Q = 4K^{3/4}.L^{1/4}$ b) $U(x_1,x_2) = (\alpha_1\, x_1{}^P + \alpha_2\, x_2{}^P)^{\frac{1}{P}}, P \leq 1$

   c) $f(x_1x_2) = ln(x_1x_2) + e^{x_1x_2}$ d) $f(x_1x_2) = (x_1x_2)^2 - x_1x_2$

   e) $\rho(x_1,x_2,x_3) = \frac{x_1}{x_2} + \frac{2x_3^2}{x_1}$ f) $\rho(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2.x_2^2.x_3^4$

   g) $f(K,L) = AK^{\alpha}.L^{\beta}$

6. Maximiser l'utilité du consommateur $U(x_1,x_2) = \sqrt{x_1}\, x_2{}^{1/3}$ sous contrainte budgétaire $40x_1 + 30x_2 = 800$

Chapitre quatrième
ELEMENTS DE CALCUL INTEGRAL

Dans le calcul différentiel vu au chapitre précédent, le problème s'est posé de la manière suivante : étant donné une fonction F(x), trouver sa dérivée, c'est-à-dire la fonction f(x) = F'(x). Ainsi par exemple, si F(x) = x^2, sa différentielle est 2x dx.

A présent, nous effectuons l'opération inverse de la dérivation, c'est-à-dire que , en partant d'une fonction f(x), nous remontons à une ou plusieurs autres fonctions dont la dérivée par rapport à x est donnée par f(x). En nous référant à l'exemple plus haut, le problème se pose de la manière suivante : étant donné f(x) = 2x, trouver F(x) telle que F'(x) = f(x) = 2x. (On verra que F(x) = x^2). On dira que F(x) est une **primitive** de la fonction f(x) pourvu que F'(x) = f(x).

L'intégration est donc une opération inverse de la dérivation. En sciences économiques, l'intégration peut être utilisée pour trouver un fonction de coût total (ou de revenu total, de consommation totale, d'épargne totale) lorsque la fonction de coût marginal (revenu marginal, de consommation marginale, d'épargne totale) est donnée.

L'intégration peut aussi être définie comme l'opération consistant à trouver la surface sous une courbe. En sciences économiques, le revenu total peut être évaluée en tant qu'une surface sous la courbe du revenu marginal, tandis que le surplus des producteurs et celui des consommateurs peuvent être évalués en tant surfaces sous les courbes d'offre et de demande.

4.1 Intégrales indéfinies

4.1.1 Définition des intégrales non définies (indéfinies)

L'opération qui consiste à trouver une fonction F(x) dont on connaît la dérivée f(x) est appelée **intégration** et la fonction obtenue F(x) est appelée **intégrale indéfinie** ou **antidérivée** de la fonction f(x).

Nous écrivons

$$\int f(x)\, dx = \mathbf{F(x) + C} \qquad (4.1)$$

relation dans laquelle C est une **constante arbitraire**, à la condition que F'(x) = f(x).
Le membre de gauche se lit « l'**intégrale de f de x par rapport à x** ». Le symbole $\int$ qui a la forme d'un S allongé est le **signe d'intégration** ou le **signe intégral** et se lit « **somme de ».** » f(x) est la **fonction à intégrer** appelée « **intégrande** », C est la **constante d'intégration** et F(x)+ C est une **intégrale indéfinie**. La constante arbitraire C est utilisée pour donner une formule

généralisée, la dérivée de C étant nulle; de fait, le résultat d'une dérivation n'est pas modifié lorsqu'une constante est ajoutée à la fonction F(x).

L'intégrale indéfinie d'une fonction donnée n'est pas unique : par exemple, x^2, $x^2 + 5$, $x^2 - 4$, $x^2 - \sqrt{11}$ sont des intégrales indéfinies de f(x) = dx car

$$\frac{d(x^2)}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 - 5) = \frac{d}{dx}(x^2 - 4) = \frac{d}{dx}(x^2 - \sqrt{11}) = 2x$$

Toutes les intégrales indéfinies de f(x) = 2x sont décrites par $x^2 + C$ où C est une constante arbitraire dont la valeur peut être spécifiée moyennant une condition initiale ($y = y_0$ quand x = 0) ou une condition limitative ($y = y_0$ quand $x = x_0$).

Enfin, y = F(x) + C représente une famille de courbes parallèles dans la mesure où la pente de la tangente à chacune d'elles en x est f(x).

Il découle de ce qui précède que :

1. Si l'on différentie l'intégrale indéfinie par rapport à x, on obtient la fonction à intégrer f(x). Si F'(x) = f(x), alors

$$\left(\int f(x)\, dx\right)' = (F(x) + C)' = f(x) \qquad (4.2)$$

2. la différentielle d'une intégrale indéfinie est égale à l'expression sous le signe intégral, c'est-à-dire :

$$d\left(\int f(x)\, dx\right) = f(x)\, dx \qquad (4.3)$$

3. L'intégrale indéfinie de la différentielle d'une certaine fonction est égale à la somme de cette fonction et d'une constante arbitraire

$$\int d\, F(x) = F(x) + C \qquad (4.4)$$

4.1.2 Les règles d'intégration

Les règles d'intégration sont identiques à celles de la dérivation, en particulier,

Règle 1. L'intégrale d'une constante k est

$$\int k\, dx = kx + C$$

Règle 2. L'intégrale d'une fonction puissance x^n, où $n \neq -1$, est donnée par

$$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \qquad (n \neq -1)$$

Règle 3. L'intégrale de x^{-1} (ou 1/x) est

$$\int x^{-1}\, dx = \ln x + C, \quad \text{pour } x > 0$$

Règle 4. L'intégrale d'une fonction exponentielle est

$$\int a^{kx}\ dx = \frac{a^{kx}}{k\ \ln a} + C$$

Règle 5. L'intégrale d'une fonction exponentielle naturelle est

$$\int e^{kx}\ dx = \frac{e^{kx}}{k\ \ln e} + C = \frac{e^{kx}}{k} + C$$

puisque ln e = 1.

Règle 6. L'intégrale du produit d'une fonction par une constante est égale au produit de l'intégrale de ladite fonction par cette constante.

$$\int k\ f(x)\ dx = k\int f(x)\ dx$$

Règle 7. L'intégrale de la somme algébrique de deux ou plusieurs fonctions est égale à la somme algébrique de leurs intégrales

$$\int [f_1\ (x) + \ f_2\ (x)]\, dx = \int f_1\ (x)\ dx + \ f_2\ (x)\ dx$$

Lorsque l'on calcule les intégrales indéfinies, il est parfois utile de se rappeler les règles suivantes. Si $\int f(x)\ dx$ = F(x) + C, alors :

Règle 8. $\int f(ax)\ dx = \frac{1}{a}$F(ax) + C

Règle 9. $\int f(x+b)\ dx = F(x+b) + C$

Règle 10. $\int f(ax+b)\ dx = \frac{1}{a}\ F(ax+b) + C$

Exemple 5.1 :

1. $\int 5\ dx = 5x + C$ (Règle 1)

2. $\int x^{-2}\ dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = -\frac{1}{x} + C$ (Règle 2)

3. $\int \frac{dx}{x+8} = \ln |x+8| + C$ (Règle 3)

4. $\int e^{-x}\ dx = = -e^{-x} + C$ (Règle 5)

5 $\int a^{2x}\ dx = \frac{1}{2}\frac{a^{2v}}{\ln a} + C$ (Règle 4)

$$\int \left(\frac{x^3 + 5x^2 - 4}{x^2}\right) dx = \int \left(x + 5 - 4x^{*2}\right) dx = \int x\ dx + \int 5\ dx - \int 4x^{-2}\ dx$$

$$=((\frac{x^2}{2} + C_1) + (5x + C_2) - (\frac{4x^{-2+1}}{-2+1} + C_3)$$

= $x^2/2 + 5x + 4/x + C$ avec $C = C_1 + C_2 + C_3$.

(Règles 1, 2, 6 et 7).

4.1.3 Méthodes spéciales d'intégration

Du fait que l'intégration est une opération inverse de la dérivation, on peut directement intégrer une fonction donnée à partir du calcul différentiel. Cependant pour certaines autres fonctions, l'intégration n'est pas aisée. Il existe alors plusieurs méthodes qui nous permettent de nous en tirer d'affaire.

La première étape dans l'intégration d'une expression donnée consiste tout d'abord à comparer celle-ci avec les différentes règles d'intégration. Si une expression est identique ou ressemble à quelque différence près à l'une des formes courantes, l'intégrale s'obtient aisément en appliquant la règle s'y afférent. Dans le cas contraire, il faudra utiliser une autre méthode. Il existe en effet plusieurs procédés d'intégration ; tout ne dépend que de la forme et du type de l'intégrale. Et surtout, il faudra savoir qu'il n'y a pas de méthode générale pour intégrer. Comme l'a souligné Quinet,[4] je cite, « l'intégration est donc une méthode d'essais, d'essais variés, qui demande une part active, dynamique de l'opérateur ; on y verra très souvent des transformations … extraordinaires et des … astuces admirables, qui donnent à cette partie des mathématiques un attrait si grand … »

Nous débuterons cette section par les méthodes spéciales d'intégration qui sont considérées comme des formes standard . Les plus simples d'entre elles sont obtenues directement à partir de la dérivation. D'autres formes standard sont dérivées à partir d'une dérivation plus compliquée. Lorsque la fonction ne peut être intégrée à l'aide d'une de formes standard, on appliquera les procédés classiques d'intégration les plus utiles et les plus importants en commençant par le plus simple, celui par lequel on doit toujours commencer lorsque l'on doit évaluer une intégrale. S'il ne réussit pas, on en essaie un autres.

4.1.3.1 Formes standard d'intégration

Il est entendu que u = f(x) est une fonction différentiable de x.

1. $\int u^n \, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$
2. $\int \frac{1}{u} \, du = \ln u + C$
3. $\int e^u \, du = e^u + C$
4. $\int a^u \, du = \frac{a^u}{\ln a} + C$
5. $\int \sin u \, du = -\cos u + C$
6. $\int \cos u \, du = \sin u + C$

[4] Quinet, J., ***Cours élémentaire de Mathématiques supérieures***, Dunod, Paris, Tome 3, 1964, pp. 7 – 8.

7. $\int \frac{du}{k^2 - u^2} = \frac{1}{2k} \ln \frac{k+u}{k-u} + C$, $u^2 < k^2$

8. $\int \frac{du}{u^2 - k^2} = \frac{1}{2k} \ln \frac{u-k}{u+k} + C$, $u^2 > k^2$

9. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm k^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm k^2} \right| + C$.

10. $\int \sqrt{u^2 + k^2}\, du = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 + k^2} + \frac{k^2}{2} \ln\left(u + \sqrt{u^2 + k^2}\right) + C$

11. $\int u\, e^u\, du = e^u (u - 1) + C$

12. $\int \ln u\, du = u \ln u - u + C = u\, (\ln u - 1) + C$

13. $\int u^n \ln u\, du = u^{n+1} \left[\frac{\ln u}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \right] + C$

14. $\int \frac{du}{u \ln u} = \ln\, (\ln u) + C$

15. $\int \frac{du}{1 + u^2} = arc\; tg\; u + C$

16. $\int \frac{du}{k^2 + u^2} = \frac{1}{k}\, arc\; tg\; \frac{u}{k} + C$

17. $\int \frac{du}{\sqrt{(1 - u^2)}} = arc \sin u + C$

18. $\int \frac{du}{\sqrt{k^2 - u^2}} = arc \sin \frac{u}{k} + C$

4.1.3.2 Méthode par substitution ou changement de variable

Si le calcul de l'intégrale n'est pas immédiat à l'aide des formules standard reprises ci-haut, on recourt à une des méthodes d'essai, en commençant toujours par la plus simple, à savoir, la **méthode par changement de variable**.

Cette méthode est la mieux indiquée si l'une des trois conditions suivantes est réunie :

- une partie de l'intégrale, sans tenir compte de l'exposant, a pour dérivée l'autre partie comme dans l'exemple 5.2 ci-après : $\int 12x^2(x^3 + 2)\, dx$.
- L'exposant d'une fonction exponentielle a pour dérivée la partie sous exponentielle par exemple : $\int 16x^3\, e^{x^4}\, dx$.
- Le dénominateur, sans tenir compte de l'exposant, a pour dérivée le numérateur. Exemple : $\int \frac{x^4}{(x^5 + 8)^3}\, dx$.

Le principe de la méthode est le suivant :

On divise la fonction à intégrer en deux parties ; on appelle **u** une partie de la fonction et l'on calcule **du**. Mais il faut choisir convenablement ce qu'on appelle **u** de façon que, en calculant **du**, on retrouve l'autre partie de l'intégrande, soit qu'on la retrouve exactement, soit qu'on la trouve à un coefficient près, ou au signe près.

Exemple 4.2 : Soit à calculer $\int 12x^2(x^3+2)\, dx$

Réponse :

On procède de la manière suivante :

a. rechercher une fonction adéquate **u = g(x)** et exprimer **dx** en **du** de sorte que **F(u)** sous le signe intégral soit aussi simple que possible. Pour cela, il faut être sûr que le fonction à intégrer peut être exprimée comme un **multiple constant de u et** $\frac{du}{dx}$**.** Quant à **u**, on choisit généralement la fonction dans laquelle la variable dépendante est élevée à la plus grande puissance.

En supposant $u = x^3 + 2$, on fait $\frac{du}{dx} = 3x^2$ et $dx = \frac{du}{3x^2}$ et puis l'on remplace $u = x^3 + 2$ et $dx = \frac{du}{3x^2}$ dans la fonction à intégrer. Ce qui donne

$$\int 12x^2(x^3+2)\, dx = \int 12x^2\, u\, \frac{du}{3x^2} = \int 4u\, du = 4\int u\, du$$

b. Intégrer ensuite **F(u)du** en utilisant les formules élémentaires.

$$4\int u\, du = 4\left(\frac{u^2}{2}\right) + C = 2u^2 + C$$

c. Dans le résultat, remplacer **u** par **g(x)**.

$\int 12x^2(x^3+2)\, dx = 2u^2 + C$.

Exemple 5.3 : Calculer $\int 4x(x+1)^3\, dx$

Réponse :

Soit $u = (x + 1)$. Alors $\frac{du}{dx} = 1$ et $dx = du$. Après avoir remplacé u et dx dans l'équation à intégrer, nous obtenons : $\int 4x\, u^3\, du = 4\int x\, u^3\, du$.

Puisque x est un multiple variable qui ne peut être écartée, la fonction à intégrer ne peut pas être transformée en un multiple constant de $u.\frac{du}{dx}$. Donc la méthode par changement de variable n'est pas appropriée ici. Il faut alors recourir à la méthode par parties

4.1.3.3 Méthode par parties

Cette méthode est souvent utilisée pour intégrer une expression qui peut être mise sous forme de produits de deux facteurs **u** et **dv**, tels que la recherche de la fonction **v** à partir de sa différentielle **dv** et le calcul de l'intégrale $\int vdu$ constituent un problème plus simple que le calcul direct de l'intégrale $\int udv$.

Ce procédé s'applique pour intégrer :

a. le produit d'un polynôme en x par une exponentielle;
b. le produit d'un polynôme en x par un sinus ou un cosinus;
c. le produit d'un polynôme en x par un logarithme;
d. le produit d'une exponentielle par un sinus ou un cosinus.

La méthode par parties est dérivée en inversant le processus de différentiation d'un produit.

Soient deux fonctions de x, **u(x)** et **v(x)**; on peut alors différentier le produit **uv** par rapport à x. On aura dans ce cas:

$$\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} \qquad (4.5)$$

Après intégration de deux membres de l'égalité, on obtient:

$$uv = \int u\, dv + \int v\, du \qquad (4.6)$$

que l'on peut ramener à

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du \qquad (4.7a)$$

ou

$$\int v\, du = uv - \int u\, dv \qquad (4.7b)$$

C'est l'une de ces expressions que l'on appelle **la formule d'intégration par parties**.

Le principe de la méthode est le suivant :

> on remplace la fonction à intégrer par deux fonctions plus simples de x dont l'une, **dv**, est facile à intégrer et dont l'autre, **u**, donne, par différentiation, une fonction plus simple. On peut alors obtenir sans peine le produit **uv**.

L'utilité de cette formule dépend de l'habilité à choisir u et dv telles que $\int vdu$ et $\int dv$ puissent être calculés même si $\int udv$ ne peut l'être.

Il se peut que $\int v du$ soit plus facile à calculer que $\int u dv$. Si elle est plus difficile, il faut intervertir les rôles de **u** et **dv** (dv devant toujours contenir dx), et recommencer le calcul. Si la nouvelle intégrale est encore plus difficile, ce procédé ne s'applique alors pas.

Exemple 5.4 : Calculer $\int 4x(x+1)^3\ dx$.

Réponse :

a. Séparons la fonction à intégrer en deux parties . Soit u = 4x et dv = $(x + 1)^3$dx.

Si u = 4x, alors $\frac{du}{dx}$ = 4 et du = 4dx. Si dv =$(x + 1)^3$dx, v = $\int (x+1)^3 dx$, qui peut être facilement intégrée. En effet, v = $\int (x+1)^3 dx = \frac{(x+1)^{3+1}}{3+1} = \frac{1}{4}(x+1)^4 + C$.

b. Substituons les valeurs de u, v et du dans la formule d'intégration. Il vient :

$$\int u\ dv = uv - \int v\ du \Rightarrow \int \underbrace{4x}_{u}\ \underbrace{(x+1)^3\ dx}_{dv} = \left[\underbrace{4x}_{u}\ \underbrace{\left(\frac{1}{4}(x+1)^4\right)}_{v}\right] - \int \underbrace{\frac{1}{4}(x+1)^4}_{v}\ \underbrace{4\ dx}_{du}$$

$\int udv$ = x (x + 1)^4.- $\frac{1}{5}(x+1)^5 + C$.

NB. Il peut être nécessaire d'appliquer la formule d'intégration par partie plus d'une fois tel que dans l'exemple ci-après :

Exemple 5.5 : Calculer $\int x^2 e^{-x}\ dx$.

Réponse :

Posons u = x² et dv = e^{-x} dv. Dans ce cas, du = 2x dx et v = $\int e^{-x}\ dx = -e^{-x}$. L'expression à intégrer devient :

$$\int x^2 e^{-x}\ dx = x^2(-e^{-x}) - \int -e^{-x} 2x\ dx = \underbrace{-x^2\ e^{-x}}_{A} + 2\int \underbrace{x}_{u}\ \underbrace{e^{-x}\ dx}_{dv} + C.$$

On pose encore u = x et dv = e^{-x}dx $\Rightarrow$ du = dx et v = $-e^{-x}$.

$$\underbrace{-x^2\ e^{-x}}_{A} + 2\int \underbrace{x}_{u}\ \underbrace{e^{-x}\ dx}_{dv} \mathbf{+C=A+2[x(-e^{x}) -} \int -e^{-x}dx\ \mathbf{]+C=A+2[-xe^{x}+} \int e^{-x}dx\ \mathbf{]+C}$$

$$= -x^2e^{-x} + 2[-xe^{-x} + e^{-x}] = = -x^2e^{-x} - 2[xe^{-x} - e^{-x}]$$

$$= -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + C.$$

4.2 Intégrales définies

Toutes les intégrales étudiées jusqu'ici sont d'une variété indéfinie dans le sens que chacune d'elles est une fonction d'une variable et, par conséquent, ne possède aucune valeur numérique définie.

4.2.1 Définition

Considérons l'intégrale indéfinie de f(x) qui est continue. Nous avons par la relation (5.1) :

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C$$

Si nous choisissons deux valeurs quelconques de x sur l'intervalle [a, b] avec a < b et que nous les substituons successivement dans le deuxième membre droit de l'équation, nous obtenons, après avoir effectué la différence,

F(b) + C - [F(a) + C] = F(b) - F(a).

Nous obtenons ainsi une valeur numérique indépendante de la constante arbitraire C.

Cette valeur est appelée **intégrale définie de f(x) entre a et b** qui s'écrit :

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) \qquad (4.8)$$

C'est la formule de Newton-Leibniz

Les nombres **a et b** sont appelés **limites** ou **bornes** respectivement **inférieure** et **supérieure d'intégration**. Le segment **[a, b]** est le **domaine** ou **l'intervalle d'intégration**.

En introduisant pour la différence la notation F(b) – F(a) = $F(x)]_a^b$, on peut mettre la formule (4.8) sous la forme

$$\int_a^b f(x)\, dx = [F(x)]_a^b \qquad (4.9)$$

Par $F(x)]_a^b$, on entend que l'on doit d'abord calculer l'intégrale indéfinie de y = f(x), c'est-à-dire, F(x) + C, ensuite y substituer respectivement x = b et x = a et retrancher enfin la deuxième valeur de la première (selon le ***théorème de calcul fondamental***).

Le symbole $\Big|_a^b,\ \Big]_a^b\ ou\ [\cdots]_a^b$ indique qu'il faut remplacer x successivement par b et par a.

Exemple 5.6 : Calculer les intégrales définies des fonctions suivantes :

1. $\int_a^b ke^x\, dx = [ke^x\ ]_a^b$ = k($e^b - e^a$)
2. $\int_0^4 \left(\frac{1}{1+x} + 2x\right) dx = \ln|1+x| + x^2]_0^4$ =(ln 5 + 16) – (ln 1 + 0) = ln 5 + 16.

4.2.2 Propriétés principales des intégrales définies

Ces propriétés que nous divisons en quatre groupes seront établies à partir de la formule de Newton-Leibniz $\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$.

Propriétés générales

1. La valeur de l'intégrale définie ne dépend pas de la désignation de la valeur d'intégration, c'est-à-dire que,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt \tag{4.10}$$

où x, t sont des lettres quelconques.

Exemple 5.7 : $\int_0^4 6x\,dx = \int_0^4 6t\,dt = 3x^2]_0^4 = 3t^2]_0^4 = 48.$

2. La valeur de l'intégrale définie ayant ses bornes supérieure et inférieure identiques est nulle.

$$\int_a^a f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0 \tag{4.11}$$

Exemple 5.8 : $\int_5^5 (2x+3)\,dx = (x^2+3x]_5^5 = 0$

3. Si l'on intervertit les deux bornes d'une intégrale définie, elle prend la valeur opposée.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(a) - F(b) = -[F(b) - F(a)] = -\int_a^b f(x)\,dx \tag{4.12}$$

Exemple 5.10 : $\int_1^3 2x^3 = \frac{1}{2}x^4\Big]_1^3 = \frac{81}{2} - \frac{1}{2} = 40$

Mais $\int_3^1 2x^3 = \frac{1}{2}x^4\Big]_3^1 = \frac{1}{2} - \frac{81}{2} = -40$

4. Etant donné u(x) et v(x),

$$\int_a^b udv = uv\,]_a^b - \int_a^b vdu \tag{4.12}$$

5. Si x = g(t),

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{t_0}^{t_1} f[g(t)]g'(t)dt \tag{4.13}$$

où t_0, t_1 sont les limites de variation de t telles que $g(t_0) = x_0$ et $g(t_1) = x_1$, les fonctions g et g' étant d'habitude supposées continues sur $[t_0, t_1]$.

Propriétés d'additivité

6. **Fractionnement de l'intervalle**. Si l'intervalle d'intégration [a, b] est divisé en un nombre fini d'intervalles partiels, l'intégrale définie prise sur l'intervalle [a, b] est égale à la somme des intégrales définies prises sur tous les intervalles partiels. Soit par exemple $[a, b] = [a, c]\cup[c, b]$ où $a \le c \le b$. Alors, en posant F'(x) = f(x), on obtient :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \tag{4.14}$$

Exemple 5.11 : $\int_0^4 6x\,dx = \int_0^3 6x\,dx + \int_3^4 6x\,dx = 3x^2]_0^3 + 3x^2]_3^4 = 27 + 21 = 48.$

Propriétés de Linéarité :

7. On peut faire sortir un facteur constant du signe de l'intégrale définie

$$\int_a^b k\ f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx = k\ F(x)\Big]_a^b = kF(b) - kF(a) \qquad (4.15)$$

Exemple 5.12 : $\int_0^4 6x\,dx = 6\int_0^4 x\,dx = (6)\frac{1}{2}x^2\Big]_0^4 = 3x^2\Big]_0^4 = 48 - 0 = 48.$

8. L'intégrale définie d'une somme algébrique d'un nombre fini des fonctions continues est égale à la somme algébrique des intégrales définies de ces fonctions.

$$\int_a^b [f(x) + g(x) - h(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b h(x)\,dx \qquad (4.16)$$

Propriétés de Monotonie

9. Si la fonction sous le signe d'une intégrale définie est continue et non négative et que la borne supérieure soit au moins égale à la borne inférieure, cette intégrale définie est, elle aussi, non négative. En effet, soit $f(x) \geq 0$ pour $a \leq x \leq b$, pour $b \geq a$, on a :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \geq 0 \qquad (4.17)$$

10. Etant donné une inégalité des fonctions continues on peut l'intégrer membre à membre à condition que la borne d'intégration supérieure soit plus grande que la borne inférieure.

Soit $f(x) \leq g(x)$ pour $a \leq x \leq b$ où les fonctions f(x) et g(x) sont continues sur le segment [a, b] ; puisque $g(x) - f(x) \geq 0$, on a :

$$\int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx = \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \geq 0 \qquad (4.18)$$

d'où :

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx \qquad (4.19)$$

Remarque :

Il est important de souligner que lorsque l'on évalue une intégrale définie par la méthode de changement de variable, il faudra tenir compte du fait qu'à cause de la substitution, les limites d'intégration en termes de x peuvent être différentes de celles exprimées en termes de u.

Exemple 5.13 : Soit à évaluer $\int_0^2 \frac{3x^2}{(x^3+1)^2}\,dx$.

Réponse :

Posons $u = x^3 + 1$. Alors $du/dx = 3x^2$ et $dx = du/3x^2$. Notre intégrale définie devient, en ignorant les limites d'intégration, :

$$\int \frac{3x^2}{(x^3+1)^2}\,dx = \int \frac{3x^2}{u^2}.\frac{du}{3x^2} = \int \frac{du}{u^2} = \int u^{-2}du = -u^{-1} + C.$$

Remplaçons u par $\boldsymbol{x^3 + 1}$ et retenons les bornes initiales. Il vient :

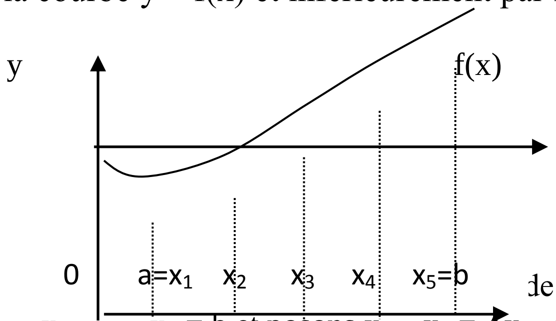
$$\int_0^2 \frac{3x^2}{(x^3+1)^2}\,dx = -(x^3+1)^{-1}\Big]_0^2 = \left(\frac{-1}{2^3+1}\right) - \left(\frac{-1}{0^3+1}\right) = -\frac{1}{9} + 1 = \frac{8}{9}.$$

Mais comme ***u = x³ +1*** et que les bornes supérieure et inférieure de x sont respectivement 0 et 2, celles de u sont u = $[(0)^3 + 1] = 1$ et u = $[(2)^3 + 1] = 9$. Alors :

$$\int_1^9 u^{-2}\ du = -u^{-1}\Big]_1^9 = \left(-\frac{1}{9}\right) - \left(-\frac{1}{1}\right) = \frac{8}{9}$$

4.2.3 Intégrale définie comme surface sous une courbe

Considérons un problème qui consiste à calculer l'aire délimitée supérieurement par la courbe y = f(x) et inférieurement par l'axe des abscisses, sur l'intervalle [a, b].



de a à b en n parties. Désignons les points a = x_1, x_2, …, x_{n-1}, …, x_n = b et posons $x_2 - x_1 = \Delta x_1$, $x_3 - x_2 = \Delta x_2$, et, plus généralement. $X_{i+1} - x_i = \Delta x_i$ pour i = 1, 2, …, n. Puisque chacun de ces intervalles représente une variation de x, nous pouvons les désigner par Δx_1, Δx_2, …Δx_n.

Construisons maintenant sur les sous-intervalles trois blocs rectangulaires tels que la hauteur de chacun de ces blocs soit égale à la valeur de la fonction la plus élevée atteinte dans ce bloc. Pour le premier rectangle, la hauteur est $f(x_1)$, tandis que la largeur est Δx_1. Le ième bloc rectangulaire aura une hauteur de $f(x_i)$ et une largeur de Δx_i. Les aires de ces rectangles sont respectivement, $f(x_1)\Delta x_1$, $f(x_2)\Delta x_2$,…, $f(x_i)\Delta x_i$. , …, $f(x_n)\Delta x_n$.

Ainsi, l'aire totale A* de ces rectangles est la somme des $f(x_i)\Delta x_i$. que .nous représentons par

$$A^* = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i \tag{4.21}$$

Ceci n'est évidemment pas l'aire exacte sous la courbe, mais plutôt son approximation très grossière. La différence entre A* et la vraie valeur de A est la portion non hachurée des blocs rectangulaires. Cette approximation est d'autant meilleure que nous aurons des rectangles de plus en plus nombreux dans l'intervalle [a, b], c'est-à-dire que n tendra vers l'infini. Notons que plus n tend vers l'infini, plus le maximum de la différence entre deux points adjacents quelconques tend vers zéro.

A la limite, pour n → ∞, nous aurons :

$$A = \lim_{n \xrightarrow[\max \Delta x_i = 0]{} \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i \tag{4.22}$$

pourvu que cette limite existe

Nous poserons par définition :

$$\int_a^b f(x)\,dx = Aire\ A = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i \qquad (4.23)$$

C'est dernière expression que l'on appelle intégrale définie.
Dans le cas où l'intervalle de a à b est subdivisé en n parts égales correspondant à d'égales valeurs de Δx, $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, cette dernière formule appelée aussi *formule des rectangles* à cause de la forme des blocs rectangulaires obtenus devient :

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left[y_1 + y_2 + \ldots + y_n\right] = \Delta x \sum_{i=1}^{n} y_i \qquad (4.24)$$

où y_i représente la valeur de la fonction y = f(x) au point i (i = 1, 2, …, n).

En prenant en compte la plus petite valeur de la fonction atteinte dans chacun des blocs rectangulaires, la formule des rectangles s'écrit :

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left[y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1}\right] = \Delta x \sum_{i=0}^{n-1} y_i \qquad (4.25)$$

Pour mieux approcher la valeur de l'intégrale définie, on peut remplacer la courbe y = f(x) non plus par une courbe en escalier comme le fait la formule des rectangles, mais bien par une ligne brisée inscrite. On obtient alors une suite des trapèzes dont la surface totale est mesurée par la formule

$$S = \frac{b-a}{n}\left[\frac{1}{2}y_0 + \sum_{i=1}^{n-1} y_i + \frac{1}{2}y_n\right] = \Delta x\left[\frac{1}{2}y_0 + \sum_{i=1}^{n-1} y_i + \frac{1}{2}y_n\right]$$

La *formule des trapèzes* est donc :

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left[\frac{1}{2}\left(y_0 + y_n\right) + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right] \qquad (4.26)$$

Plus n est grand, plus petits seront les segments partiels Δx et plus précise sera l'approximation fournie par cette méthode.

On pourra également approcher la vraie valeur de l'intégrale définie par la méthode de Simpson ci-après :

La méthode de Simpson **:**

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}\left[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\right] \qquad (4.27)$$

La **formule des rectangles**, la **méthode des trapèzes**, la **formule de Simpson,** sont considérées comme des **méthodes numériques de calcul des intégrales,** méthodes qui seront approfondies lors des travaux pratiques.

Exemples 5.14 : Evaluer l'intégrale de la fonction $y = x(16 - x^2)^{1/2}$ entre 2 et 4 si n = 4.

Solution : Si n = 4, Δx = (4 – 2)/4 = 0,5

I	0	1	2	3	4
x_i	2	2,5	3	3,5	4
$f(x_i) = y_i$	6,93	7,81	7,94	6,78	0

Par la règle des rectangles, on a :

$$\int_2^4 x\sqrt{16-x^2}\ dx \approx \Delta x\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{4-2}{4}\left[7{,}81+7{,}94+6{,}78+0\right] = 0{,}5[22{,}53] = 11{,}265$$

ou

$$\int_2^4 x\sqrt{16-x^2}\ dx \approx \Delta x\sum_{i=0}^{n-1} y_i = \frac{4-2}{4}\left[6{,}93+7{,}81+7{,}94+6{,}78\right] = 0{,}5[29{,}51] = 14{,}755$$

Par la formule des trapèzes on trouve :

$$\int_2^4 x\sqrt{16-x^2}\ dx \approx \Delta x\left[\frac{1}{2}(6{,}93+0)+\sum_{i=1}^{n-1} y_i\right] = 0{,}5\left[0{,}5(6{,}93)+22{,}53\right]$$

$$= 0{,}5\,[3{,}465+22{,}53] = 0{,}5(25{,}995) = 12{,}997$$

La méthode de Simpson donne :

$$\int_2^4 x\sqrt{16-x^2}\ dx \approx \frac{\Delta x}{3}\left[y_0+4(y_1+y_3)+2y_2+y_4\right] = \frac{0{,}5}{3}\left[6{,}93+4(7{,}81+6{,}78)+2(7{,}94)+0\right]$$

$$= \frac{0{,}5}{3}\left[6{,}93+58{,}76+15{,}88\right] = \frac{0{,}5}{3}(81{,}57) = 13{,}60$$

4.3 Intégrales impropres

4.3.1 Définition

En définissant l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$, on supposait que :

1) l'intervalle d'intégration, [a, b] était borné ;
2) la fonction à intégrer f(x) était définie et continue sur le segment [a, b]. Une telle intégrale est dite propre (on omet généralement le mot « propre »)

Il arrive que l'une au moins des limites d'intégration soit une infinité ou que l'intégrande possède un point de discontinuité soit à l'une des limites d'intégration, soit encore à une valeur sur l'intervalle séparant a de b.

Ainsi, l'intégrale définie $\int_a^b f(x)dx$ est dite impropre si :

a. l'une au moins des limites ou bornes d'intégration est infinie: ou

b. la fonction f(x) possède un ou plusieurs points de discontinuité sur l'intervalle $a \le x \le b$.

Les intégrales impropres peuvent être définies comme des limites d'autres intégrales lorsque la limite a et/ou la limite b tendent, selon le cas, soit vers l'infini, soit vers un point de discontinuité.

4.3.1 Cas où au moins l'une des bornes est indéfinie

Les intégrales définies de la forme

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx,\quad \int_{a}^{+\infty} f(x)dx \;\; ou \;\; \int_{\infty}^{+\infty} f(x)dx \tag{4.29}$$

c'est-à-dire dont la borne supérieure et/ou inférieure d'intégration est égale à l'infini, sont des intégrales impropres car ∞ n'est pas un nombre et ne peut donc être substitué pour x dans la fonction F(x). Toutefois, elles peuvent être définies comme des limites d'autres intégrales. Ainsi :

a. Si f(x) est une fonction continue sur l'intervalle $a \le x \le u$, on définit

$$\int_{a}^{+\infty} f(x\, dx = \lim_{u\to\infty}\int_{a}^{u} f(x)\, dx = \lim_{u\to\infty} F(x)\,]_{a}^{u} \tag{4.30}$$

pourvu que cette limite existe.

b. Si la fonction f(x) est continue sur l'intervalle $u' \le x \le b$, on définit

$$\int_{-\infty}^{b} f(x\, dx = \lim_{u'\to-\infty}\int_{u'}^{b} f(x)\, dx = \lim_{u'\to-\infty} F(x)\,]_{u'}^{b} \tag{4.31}$$

pourvu que cette limite existe.

c. Si f(x) est une fonction continue sur l'intervalle $u' \le x \le u$, on définit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x\, dx = \lim_{u\to\infty}\int_{a}^{u} f(x)\, dx + \lim_{u'\to-\infty}\int_{u'}^{a} f(x)\, dx = \lim_{u\to+\infty} F(x)\Big]_{a}^{u} + \lim_{u'\to-\infty} F(x)\Big]_{u'}^{a} \tag{4.32}$$

pourvu que cette limite existe.

Si la limite dans chacun de ces trois cas existe, on dira que l'intégrale impropre **converge** et que l'intégrale possède une valeur définie. Si la limite n'existe pas, l'intégrale impropre est dite **divergente.**

Exemples 4.14 : Evaluer $\int_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$.

$$\int_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{u\to\infty}\int_{a}^{u} x^{-2}\, dx = \lim_{u\to\infty}\left(\frac{x^{-1}}{-1}\right)\Bigg]_{a}^{u} = \lim_{u\to\infty}\left(-\frac{1}{u}+\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a}.$$

L'intégrale impropre converge et est égale à 1/a.

Exemple 5.15 : Evaluer $\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\, dx$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\, dx = \lim_{u'\to-\infty}\int_{u'}^{0} e^{2x}\, dx = \lim_{u'\to-\infty}\frac{1}{2}e^{2x}\,]_{u'}^{0} = \frac{1}{2}(1) - \lim_{u'\to-\infty}\frac{1}{2}e^{2u'} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

L'intégrale impropre converge et a la valeur de 1/2.

4.3.2 Cas où f(x) est discontinue sur l'intervalle a ≤x ≤b

Une intégrale définie dont les bornes d'intégration sont finies peut aussi être impropre si la fonction à intégrer devient infinie à l'intérieur de l'intervalle d'intégration. Pour évaluer cette intégrale, on recourt également aux limites comme dans le paragraphe précédent.

Exemple 5.16 : L'intégrale $\int_0^{27} x^{-2/3}\, dx$ est impropre.

En effet, lorsque x approche de zéro par la droite (on écrit $x\to 0^+$), $x^{-2/3} \to \infty$. On calcule :

$$\int_0^{27} x^{-2/3}\, dx = \lim_{u'\to 0+} \int_a^u x^{-2/3}\, dx = \lim_{u'\to 0+} 3x^{1/3}\Big]_{u'}^{27} = 3\sqrt[3]{27} - 3\sqrt[3]{u'}\ .$$

Quand u' tend vers l'infini, l'intégrale converge vers 9.

Exemple 5.17 : L'intégrale $\int_{-1}^{0} 5/x\, dx$ est impropre car 5/x tend vers l'infini lorsque x approche de zéro vers la gauche (on écrit $x \to 0-$).

On calcule :

$$\int_{-1}^{0} 5/x\, dx = \lim_{u\to 0-} \int_{-1}^{0} 5/x\, dx = \lim_{u\to 0-} 5\ln x\Big]_{-1}^{u} = 5\ln 0 - \ln 1 = -\infty$$

Il peut arriver que l'intégrande soit infinie non plus au point x= a ou x = b de l'intervalle, mais dans l'intervalle même. Dans ce cas, on utilise la propriété de l'additivité des intégrales définies et l'on décompose l'intégrale donnée en sous intégrales.

Supposons que f(x) tende vers l'infini au point x = *p*, avec *p* se situant sur l'intervalle [a, b] : alors , en vertu de la propriété de l'additivité des intégrales définies, nous pouvons écrire :

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^p f(x)\, dx + \int_p^b f(x)\, dx \qquad (4.33)$$

L'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ converge si et seulement si chacune des sous intégrales qui la composent possède une limite.

Exemple 5.18 : L'intégrale $\int_{-1}^{1} x^{-3}\, dx$ est impropre parce que, lorsque x approche de zéro, lequel point se situe sur l'intervalle d'intégration, $x^{-3} \to \infty$. Dans ce cas, se basant sur la propriété de l'additivité des intégrales définies, on évalue l'intégrale de la manière ci-après :

$$\int_{-1}^{1} x^{-3}\, dx = \int_0^1 x^{-3}\, dx + \int_{-1}^{0} x^{-3}\, dx$$

Ceci nous ramène au cas précédent. Dans le cas d'espèce, on a :

$$\int_{-1}^{0} x^{-3}\,dx = \lim_{b\to 0-}\int_{-1}^{b} x^{-3}\,dx = \lim_{b\to 0-} -\frac{1}{2}x^{-3}\Big]_{-1}^{b} = \lim_{b\to 0-}\left(-\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}\right) = -\infty\,.$$

Comme cette sous intégrale diverge, on conclut que l'intégrale donnée l'est aussi.

4.4. Intégration partielle

Jusqu'ici, nous avons traité seulement de l'intégration des fonctions d'une seule variable. Il est cependant possible de définir les intégrales des fonctions de deux ou plusieurs variables indépendantes.

Supposons que nous avons Z = f(x, y) et que nous cherchons à obtenir deux fonctions F(x, y) et G(x, y) telles que $\partial F/\partial x = f$ et $\partial G/\partial y = f$. F et G peuvent s'obtenir par intégration de f par rapport à x et y.

Ainsi, F(x, y) + C = ∫ f(x, y) dx et ∫f(x, y) dy = G(x, y) + C.

Lorsque l'on intègre f par rapport à x, la variable y est considérée provisoirement comme une constante et vice-versa.

Exemple 5.19 : Soit $Z = 5xy^2+3x^2y + y$.

Alors $\int (5xy^2+3x^2y+y)dx = y^2\int 5xdx + y\int 3x^2dx + y\int dx$

et $\int (5xy^2+3x^2y+y)dy = x\int 5y^2dy + 3x^2\int ydy + \int ydy$

4.4. Application économiques des intégrales

4.4.1 Applications économiques des intégrales indéfinies

En Sciences Economiques, la variation d'une quantité *y* par rapport à une autre quantité *x* est souvent présentée en termes de deux concepts : **variation moyenne** et **variation marginale**. Si la variation marginale peut être obtenue en dérivant une fonction, la fonction totale elle-même est obtenue en intégrant sa variation marginale. Cette application économique de l'intégrale indéfinie sera illustrée pour les fonctions de coût, revenu et consommation.

Coût marginal, coût total, coût moyen

Du fait que le coût marginal est obtenu en dérivant le coût total par rapport à la quantité produite, c'est-à-dire Cm' = $\frac{dC}{dQ}$, nous avons :

CT = $\int Cm\ dQ$.

Ainsi, le coût total (CT) n'est rien d'autre que l'intégrale du coût marginal par rapport à la quantité produite Q.

On obtiendra la coût moyen en rapportant le coût total à la quantité (CM = $\frac{C}{Q}$).

Exemple 4.23 :

Si pour un certain bien, la fonction de coût marginal est C' = 1 + 2Q + 6Q², la fonction de coût total sachant que C(0) = 100 est obtenue en intégrant C'. On obtient dans ce cas :

CT = $\int (1+2Q+6Q^2)\, dQ$ = $Q + Q^2 + 2Q^3 + C$.

C est une constante arbitraire à définir moyennant une condition initiale, laquelle est souvent spécifiée en termes de coût fixe.

Substituant q par 0, on obtient C(0) = C = 100. D'où l'on tire C = 100.

La fonction de coût total est donc :

$$CT = Q + Q^2 + 2Q^3 + 100.$$

La fonction de coût moyen est :

CM = C/Q = = 1 + Q + 2Q² + 100/Q.

Revenu marginal, Revenu total, Revenu moyen

De même, on peut calculer par une intégrale le revenu total, la consommation totale ou l'épargne totale en intégrant respectivement le revenu marginal, la consommation marginale (la propension marginale à consommer, PmC) ou l'épargne marginale (la propension marginale à épargner, PmS).

Investissement net.

Par définition, l'investissement net I est le taux de variation du stock de capital K au fil du temps t. Si le processus de formation de capital est continu, I(t) = $\frac{dK(t)}{dt} = K'(t)$. On peut alors déduire du niveau d'investissement celui du stock de capital. C'est l'intégrale de l'investissement net par rapport au temps. Nous écrivons :

$$K = \int I(t)dt = K(t) + C = K(t) + K_0$$

où C = stock de capital initial K_0.

Exemple 4.24 :

Le niveau de l'investissement net est I = 60 $t^{1/3}$ et le stock de capital en t = 1 est de 85. Trouver la fonction du capital K.

Solution : $K = \int 60\, t^{1/3} dt = 45\, t^{1/3} + C$

Si t = 1 et K = 85, on a : 85 = 45(1) + C et C = 40.

Donc, $K = 45t^{4/3} + 40$.

4.4.2 Applications économiques des intégrales définies

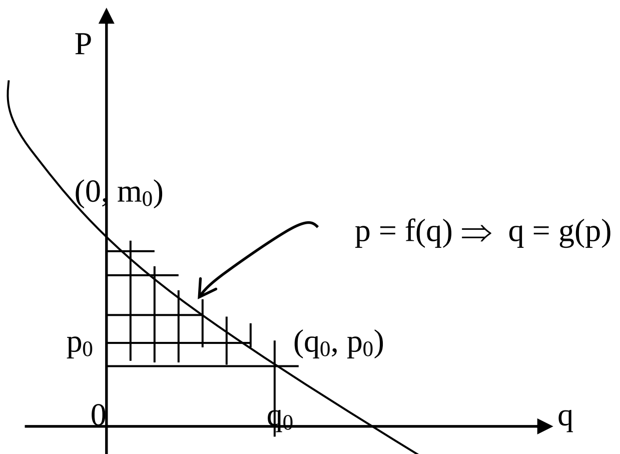
Les applications économiques de l'intégrale définie sont nombreuses notamment dans la détermination du surplus des consommateurs, du surplus des producteurs, de la valeur actuelle de flux de liquidité et de l'accumulation du capital au cours d'un intervalle de temps donné.

Surplus des Consommateurs

Une fonction de demande P = f(Q) représente les différents prix que les consommateurs sont prêts à payer pour différentes quantités d'un bien. Soit P_0, ce prix du marché. A ce prix de marché P_0, Q_0 unités sont vendues. Dans ces conditions les acheteurs qui auraient accepté de payer plus que P_0 obtiennent un avantage, du fait que le prix est limité à P_0, par rapport à ce qu'ils auraient payé dans un marché de parfaite discrimination. L'avantage total des consommateurs est qualifié de surplus des consommateurs. En termes mathématiques, il a pour expression

$$\textbf{Surplus des Consommateurs (SC)} = \int_0^{Q_0} f(Q)dQ \; - \; Q_0 P_0 \qquad (4.42)$$

C'est l'aire sous la courbe de demande, diminuée du revenu total.



En prenant la fonction de demande inverse $Q_d = g(P)$, le surplus des Consommateurs s'évalue par

$$SC = \int_{P_0}^{m_0} g(p)dP \qquad (4.43)$$

où m_0 est la valeur de P = f(Q) si Q = 0.

Exemple 4.25 :

Soit la fonction de demande P = $\sqrt{9 - Q}$. Si la quantité d'équilibre est égal à 5, le surplus des consommateurs peut être évalué comme suit :

Pour Q_0 = 5, on a : $P_0 = \sqrt{9 - 5} = \sqrt{4} = 2$. Ainsi,

$$\textbf{S.C.} = \int_0^5 \sqrt{(9-Q)}\, dQ - (2)(5) = -\frac{16}{3} + 18 - 10 = \frac{8}{3}$$

On sait aussi que si P = $\sqrt{9 - Q}$, c'est que Q = 9 - P².

Si Q = 0, m_0 = P = 3. Donc, en se référant à la fonction de demande inverse, le surplus des consommateurs s'évalue comme suit :

$$\textbf{S. C.} = \int_{P_0}^{m_0} g(P)\, dP = \int_2^3 \left(9 - P^2\right) dP = \left[9P - \frac{P^3}{3}\right]_2^3 = (27-9) - \left(18 - \frac{8}{3}\right) = \frac{8}{3}$$

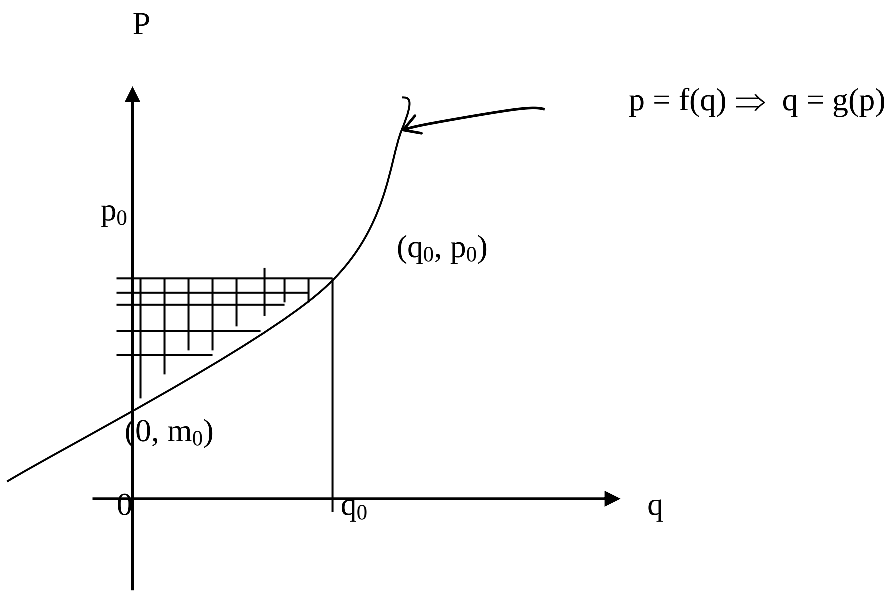
Surplus des Producteurs

Une fonction d'offre représente les prix auxquels différentes quantités d'un bien seront offertes. Si le marché est en équilibre au point (Q_0, P_0), les producteurs qui seraient prêts à exiger un prix inférieur à P_0 obtiennent un avantage. Le gain total des producteurs est qualifié de surplus des producteurs et s'exprime en termes mathématiques comme suit :

$$S.P. = Q_0 P_0 - \int_0^{q_0} f(Q) dQ \tag{4.44}$$

ou, dans le cas d'une fonction d'offre inverse de la forme Q_s = g(P),

$$S.P. = \int_{m_0}^{p_0} g(P) dP \tag{4.45}$$



Exemple 4.26 :

Si P = (Q + 2)² et que le prix d'équilibre P_0 est 25, le surplus des producteurs s'évalue comme suit :

$$\text{S.P.} = Q_0\,P_0 \ - \int_0^{Q_0} f(Q)dQ \ = (3)(25) - \int_0^3 (Q+2)^2\,)\,dQ = 75 - \frac{1}{3}(Q+2\,)^3\Big]_0^3 = 36$$

ou

$$S.P = \int_{m_0}^{P_0} g(P)\ dP = \int_4^{25}\left(2P^{\frac{1}{2}} - 2\right) dP \ = \left[2P^{\frac{3}{2}} - 2\right]_4^{25} = \frac{108}{3} = 36.$$

La valeur actuelle de flux de liquidité

Soit P = Se^{rt}, la valeur actuelle d'une somme d'argent à recevoir dans le futur quand le taux d'intérêt est composé de façon continue. La valeur actuelle d'un flux de revenu futur (une somme d'argent à recevoir chaque année pendant n années) est donc donnée par l'intégrale

$$P_n = \int_0^n Se^{-rt}dt = S\int_0^n e^{-rt}dt = S\left[-\frac{1}{e^{-rt}}\right]_0^n = \frac{S}{r}\left(1 - e^{-rn}\right) \qquad (4.46)$$

Exemple 5.27 :

La valeur actuelle de 1.000 fr à payer chaque année pendant trois ans, quand le taux d'intérêt, égal à 5 %, est composé de façon continue, est obtenue comme suit :

$$P_n = \int_0^n 1000e^{-(0,05)(30}dt = 1000\int_0^n e^{-(0,05)(3)}dt = 1000\left[-\frac{1}{e^{-0,15}}\right]_0^n =$$

$$P_n = \frac{1000}{0,05}\left(1 - e^{-0,15}\right) = 20000(1 - 0,8607) = 2786\,fr$$

TRAVAUX PRATIQUES DE MATH GENERALE EN G1 SCA 2018-2019

CALCUL MATRICIEL ET SYSTEMES D'EQUATIONS LINEAIRES

1) En considérant les matrices A et B qui suivent, trouver $a) AB$ $b) t_A$ $c) A + 2B$ $d) BA$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 \\ 8 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 8 \end{pmatrix} \quad et\ B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 5 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

1) A) Trouver $A^{-1}\ si\ A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, B) Trouver $A^{-1}\ si\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 & 7 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ -5 & -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

C) Trouver Inversez la matrice $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

3) Résoudre les systèmes suivants par la méthode de Gauss, Cramer et inversion matricielle si possible :

a) $\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ x - y + 3z = 2 \\ 3x + 2y - 4z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \\ 6x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$

4) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. A) Trouver son rang B) calculer $A^2, A^3;\ A^4\ et\ A^n\ (n \in \mathbb{N}^*)$

5) $Max(x_1, x_2) = 150x_1 + 450x_2$

s/c $\begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1 \leq 120 \\ x_2 \leq 70 \\ x_1 + x_2 \leq 140 \\ x_1 + 2x_2 \leq 180 \end{cases}$

6) Pour qu'elle se maintienne en bonne santé, le diététicien d'une étudiante de sciences économiques lui a dit qu'elle devait remplir un certain nombre de conditions journalières relatives à l'ingestion d'un certain nombre d'aliments satisfaisant ses besoins. Supposons, pour simplifier, que seuls trois de ces besoins soient considérés : le calcium, les protéines et les vitamines A. supposons de plus que le régime de cette étudiante ne consiste qu'en deux

types d'aliments I et II dont les prix et les propriété nutritives sont données dans le tableau 1, où sont également listées les quantités nécessaires minimales de chaque aliment. Quelle est alors la combinaison de deux aliments qui satisfait les besoins nutritifs journaliers et coûte le moins cher ?.

Tableau 1 : les aliments pour le régime

	Aliment I(0.6$)	Aliment II(1$)	Minimum requis par jour
Calcium	10	4	20
Protéines	5	5	20
Vitamine A	2	6	12

7) un atelier spécialisé en produit des tables et des chaises lesquels passent par deux départements lors de processus, notamment celui d'assemblage et de finissage. Le temps disponible pour le département d'assemblage est de 60 heures de travail tandis que le département de finissage n'en dispose que 48 heures de travail. La table nécessite 4 heures d'assemblage et 2 heures de finissage. Quant à la chaise ; elle nécessite 2 heures en assemblage et 4 heures en finissage.

Le profit net tiré de chacune des unités vendues s'élève à 8$ pat table et de 6$ par chaise. Déterminer la combinaison optimale des tables et chaises que l'atelier peut produire afin de réaliser le bénéfice optimal. Après avoir déterminé la production ; évaluer le bénéfice y afférent.

8) Un opérateur économique désire investir une somme de 100$ divisée en trois parties qui peuvent être placées à des taux différents. S'il investit la première partie à 10%, la deuxième à 20% et la troisième à 12% ; l'intérêt annuel est de 11.60$. Par contre s'il place la première partie à 30% ; la deuxième à 20% et la troisième à 35% ; l'intérêt est de 33.30$. trouver l'intérêt qu'il obtiendrait en plaçant la première partie à 5%, la deuxième à 6% et la troisième à 4%.

9) Une compagnie désire livrer trois types de pièce d'équipement. Pour ce faire, elle doit louer des camions. Après avoir pris des renseignements auprès des compagnies de location ; il y a trois types de camions possibles. Cependant, il ya des contraintes d'espèce et des poids pour chacun des camions, qui déterminent le nombre de pièces d'équipement que chaque camion peut transporter. Les données portant sur le nombre de pièces de chaque sorte que les camions peuvent transporter sont consignées dans le tableau suivant :

	C1	C2	C3
E1	5	3	4
E2	3	4	2
E3	2	4	3

a) Déterminer le nombre de camions de chaque type qui doit être loués sachant qu'il faut livrer 43 pièces de E1, 29 pièces de E2 et 27 pièces de E3

b) La compagnie reçoit une autre commande pour 58 pièces de E1, 50 pièces de E2 et 54 pièces de E3, combien devra –t –elle louer de chaque type dans ce cas ?

10) Une entreprise fait un bénéfice avant impôts de 100000$. Elle s'est engagée à verser 10% de son bénéfice net d'impôt à la caisse de secours de la croix rouge. Elle doit payer un impôt local pour la taxe professionnel égal à 5% de son bénéfice (après donation à la croix rouge) et un impôt national sur les sociétés de 40% de son bénéfice (après que la donation et impôt local aient été prélevés. Quels sont les montants de l'impôt local, de l'impôt national et de la donation à la croix rouge versés par l'entreprise ?

FONCTIONS NUMERIQUES.

1) Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$

$$a)\ 3^{(x+2)(4-x)} = 1 \quad b)\ 6^x + \frac{1}{6^x} - 2 = 0 \quad c)\ x^{\log_3(x+4)} = x^{\log_3 2x} \quad d) 8^{2x} - 3.8^x = 4$$

e) $3^{x^2-2x+5} = 27$

2) La population de MANZASAY est de 1000 habitats. Elle croît de 6% chaque année. A) quelle sera cette population la 3^e année ; la 10^e année ?

B) quand atteindra –t –elle le nombre de 1500, de 2000 ?

3) Une entreprise de confection produit 20000 chemises le premier mois après sa mise en activité. Elle diminue sa production de 500 unités par mois.

a) Déterminer le nombre des chemises confectionnées les douze premiers mois

b) Après combien de mois sa production sera –t –elle nulle ?

c) Calculer le nombre total d'unités produites depuis la mise en activité jusqu'à l'arrêt de la production

4) Dilu voudrait acheter à crédit un appartement de 3000000$ remboursables en vingt ans. Le banquier lui propose deux formules !

Formule 1	Formule 2
Chaque année, il faudra rembourser 2.5% de plus que l'année précédente	Chaque année, il faudra rembourser 10000$ de plus que l'année précédente

a) Quel sera dans chaque cas le premier montant à rembourser ?

b) Calculer le montant proposé dans chaque formule. Quelle est la formule la plus intéressante ?

5) Une somme a été placée à intérêts composés de 4% puis, encours de placement le taux est passé à 5%. Au bout de dix ans, le capital s'est accru de 50% de sa valeur initiale. Déterminer au bout de combien de temps le taux de placement a été modifié ?

6) Une personne lègue un capital de 240000$ à ses trois héritiers âgés lors de son décès de 14 ans et demi, de 11 ans et 3mois et de 6 ans. Chaque héritier entrera en possession de sa part à 21 ans.

a) Le capital est partagé également le jour du décès, quelle somme recevra chaque héritier à 21 ans. Le placement étant à intérêts composés de 4% l'an.

b) Quelle somme doit –on donner à chaque héritier si son veut qu'à 21 ans chacun perçoive le même montant ? capitalisation 4% l'an.

DERIVEES ET DIFFERENTIELLES

1) Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

$$a)\ f(x)=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1 \quad b)\ \ f(x)=x+\sqrt{1-x}+(x^2-1)^2+5$$

$$c)\ \ f(x)=\frac{2x^3-3x^2}{x^3-1} \quad d)\ h(x)=(x^2+x-2)(x+1) \quad e)\ y=e^{x^2+2x+1}$$

$$f)\ y=sin3x-3sinx \quad g)\ \ y=\ln(x^2+2x+1) \quad h)\ k(x)=e^{Arctan(2x+3)}$$

$$i)\ k(x)=3^{tan^2x}$$

2) Calculer les dérivées partielles premières de la fonction :

a) $f(x;y)=3x-2y^4$ $b)\ f(x,y)=ylnx$ $c)\ z=Arctan(x\sqrt{y})$

$$d)\ z=xe^{-t}sin\theta \quad e)\ \ f(x,y)=x^5+3x^2y^3+3xy^4$$

3) Démontrez que la fonction de production de Cobb –Douglas $Q=bL^{\alpha}K^{\beta}$ satisfait à l'équation $L\frac{\partial Q}{\partial L}+K\frac{\partial Q}{\partial K}=(\alpha+\beta).Q$

4) La fonction de la demande d'un bien Q_1 est donnée par $Q_1={P_1}^{-0.3}{P_2}^{0.1}R^{0.4}$. quelle sera la modification en pourcentage enregistrée dans la demande du bien Q_1 si :

a) P_1 augmente de 10% ; P_2 et R restant constant
b) P_2 augmente de 5%, P_1 et R restant constant
c) R augmente de 100%, toute chose restante égale par ailleurs.

5) Soit $Q = 400 - 8P + 0.05Y \; avec \; P = 15 \; et \; Y = 1200; où$ P= prix et Y = revenu. Trouver :

a) L'élasticité partielle revenu de la demande
b) Le taux de croissance de la production sachant que le taux de croissance du revenu national est de 5%par an.

6) La fonction de coût total d'une firme produisant deux bien x et y est donnée par : $c(x;y) = 8x^2 + 6y^2 - 2xy - 40x - 42y + 180$. Trouver les quantités de x et y qui permettant de minimiser cette fonction ainsi que la valeur de coût total minimal.
7) Les fonctions de demande pour les biens Q_1 et Q_2 sont données par :

$$Q_1 = 25 - 0.5P_1 \;\; et \;\; Q_2 = 30 - P_2$$

Si la fonction de coût joint est donnée par $c(Q_1, Q_2) = {Q_1}^2 + 2Q_1Q_2 + {Q_2}^2 + 20$, trouver les quantités et Prix qui maximise le profit du monopoleur ainsi que le profit maximum.

8) Les fonctions de demande du courant électrique de la SNEL sont données par

$x = 72 - 0.5P_x$ = pour le courant à usage domestique
$y = 120 - 0.5P_y$ = pour le courant à usage industriel.

Sachant que la fonction de coût lié est $c = x^2 + xy + y^2 + 35$ et que la production jointe maximum est de 40, trouver le profit maximum attendu par la SNEL dans sa nouvelle politique de discrimination des prix.

9) $Max \; Q = K^{0.5}.L^{0.5}$

$$S/C \;\; 103 = 3K + 4L$$

10) La société vodacom peut établir une distinction entre trois fonctions de demande par ses services comme suit :

Jours ouvrables : $q_1 = 90 - 0.5p_1$
Jours fériés : $q_2 = 35 - 0.25p_2$
Services nocturnes : $q_3 = 30 - 0.2p_3$

Si la fonction de coût total est donnée par $CT = 25 + 20q$ où $q = q_1 + q_2 + q_3$, démontrer que dans une situation de monopole discriminant, vodacom peut maximiser ses profits en appliquant le prix le plus élevé sur le marché pour lequel l'élasticité –prix de la demande est plus faible.

11) Maximiser l'utilité d'un consommateur $u(x;y;z) = x^{\alpha}y^{\beta}z^{\delta}$ sous une contrainte budgétaire $2x + 3y + 10z = 100$

ELEMENTS DE CALCUL INTEGRAL

1) La fonction de demande inverse d'un produit en euros est $p = 1200 - 0.2q - 0.0001q^2$. calculer le surplus du consommateur quand le niveau de vente est à 500.
2) Calculer l'intégrale:

$$a)\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx \quad b)\int_1^2 x^3 lnx dx \quad c)\int_0^1 (1-x^9)dx \quad d)\int_0^1 e^{\pi t}dt \quad e)\int_{-2}^1 x^{2e^{-3x}}dx$$

$$f)\int_0^3 (x^2+2x+1)dx \quad g)\int_{-\pi}^{\pi} cos\frac{t}{2}dt \quad h)\int_1^3 \frac{dx}{x(1+lnx)^3} \quad i)\int_3^7 \frac{dx}{3x-5}$$

$$j)\int \frac{e^x}{e^x+1}dx \quad k)\int \frac{\cos(lnx)}{x}dx \quad l)\int e^x cosx\, dx \quad m)\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$$

3) Un fabricant a vendu 1000 postes de télévision par semaine à 450 euros chacun. Un sondage montre qu'un rabais de 10 euros aurait comme effet d'en faire vendre 100 de plus chaque semaine. Déterminer la fonction de demande inverse et calculer le surplus du consommateur si le prix de vente est fixé à 400euros.
4) Si $c_m(q) = 0.006q^2 - 1.5q + 8$ est la fonction du coût marginal de la fabrication d'un produit (mesuré en euros par unité) et si c(0)=1500000euros est le coût fixe de mise en production, alors calculer le coût de production des 2000 premières unités.
5) Le coût marginal de la production de q unités d'un certain produit est donné par $c_m(q) = 140 - 0.5q + 0.012q^2$. Quelle augmentation de coût entraine le passage d'un niveau de production de 3000 à 5000 ?
6) Si la loi d'offre est donnée par $p = (q+2)^2$ et si le prix est fixé à $P_0 = 25$, calculer le surplus du producteur.
7) Sur un marché d'équilibre sur l'intervalle $[0,3]$ le prix est déterminé par les équations d'offre et de demande $q^0 = p^2 \ et\, q^0 = \frac{1}{3}p^2 - 2p + \frac{8}{3}$. Calculer les surplus du consommateur et producteur.
8) Dans un marché en équilibre, le prix unitaire p définie par l'équation d'offre et de demande à savoir respectivement $p = 4 + q \ \ et\, p = 16 - q^2$. Calculer le surplus du producteur.