Práctica 01

Emmanuel Isaac Pezo Ramirez

15 de septiembre de 2019

1. Demuestre que $\mathcal{F}$ es una σ - álgebra de subconjuntos de si, y solo si,satisface las siguientes propiedades:

   a) $\phi \in \mathcal{F}$

      Demostración

      $\Omega \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{F}$ colección cerrada

      $\Omega^c = \phi \in \mathcal{F}$

   b) $A \in \mathcal{F} \longrightarrow A^c \in \mathcal{F}$

      Demostración

      Supongamos que $\mathcal{F}$ es una σ - álgebra sobre Ω

      $\Rightarrow \Omega \in \mathcal{F}$ como $\phi \in \mathcal{F}$ a su vez verifica que $\phi = \Omega^c \in \mathcal{F}$

   c) $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F} \longrightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in N$

2. Sea $\mathcal{F}$ una σ álgebra; demuestre que $\mathcal{F}^c$ es una σ - álgebra definida por: $\mathcal{F}^c = \{A^c$: A $\in \mathcal{F}$ $\}$

3. Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de eventos, definida por:

$$A_n = \begin{cases} A & \text{si } n = 1, 3, 5, ... \\ A^c & \text{si } n = 2, 4, 6, ... \end{cases}$$

   Determine el: $\lim_{x\to\infty} A_n$

Solución

$\lim\limits_{n\to\infty} infA_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(A\cap A^c) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\phi = \phi$

$\lim\limits_{n\to\infty} supA_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(A\cap A^c) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\Omega = \Omega$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} infA_n \neq \lim\limits_{n\to\infty} supA_n$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} A_n \nexists$

4. Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de eventos, definida por:

$$A_n = \begin{cases} A & \text{si } [-1/n, 0] \\ \\ A^c & \text{si } [0, 1/n] \end{cases}$$

Determine el: $\lim\limits_{x\to\infty} A_n$

5. Sean $A_1, A_2, ...$ eventos aleatorios, demuestre :

a) $P\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i\right) \geq 1 - \sum\limits_{i=1}^{n} P\left(A_i\right)^c$

Demostración

Si: $P\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i^c\right)^c$

$P\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i^c\right)$

Recuerde: $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} P\left(A_i\right)$

$\Rightarrow P\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i^c\right) \geqslant 1 - \sum\limits_{i=1}^{n} P\left(A_i\right)^c$

b) Si $P\left(A_i\right) \geq 1 - e$ para i=1,2,...,n entonces $P\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n}\right) \geq 1 - ne$

Demostración

tenemos: $P\left(A_i\right) \geqslant 1-e$

$\Rightarrow e \geqslant 1-P\left(A_i\right)$

$$\prod_{i=1}^{n} e \geqslant \prod_{i=1}^{n} P\left(A_i\right)^c$$

$$ne \geqslant \prod_{i=1}^{n}\left(1-P(A_i)\right) \Rightarrow ne \geqslant 1-P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

$$\therefore P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \geqslant 1-ne$$

c) $P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) \geq 1-\sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_k^c\right)$

6. Demuestre las desigualdades de Boole

a) $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P\ (A_n)$

Demostración

Sean $A_1 = B_1 \quad B_n = A_n - \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\ ; n = 1, 2, 3, ...$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

$B_n \cap B_m; si : n \neq m$

$B_n \subseteq An$

Por lo tanto:

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n)$$

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P\ (B_n)$$

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P\ (A_n)$$

b) $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \geq 1 - \sum_{n=1}^{\infty} P\ (A_n^c)$

Demostración:

Por las leyes de De Morgan tenemos:

$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = 1 - (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c)$

De la demostración anterior tenemos que:

$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P\ (A_n)$

Luego:

$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \geq 1 - \sum_{n=1}^{\infty} P\ (A_n^c)$

7. Sea $\{A_n\} n \in N$ una sucesión de eventos. Demuestre que:

a) $\left(\lim_{n \longrightarrow \infty} inf A_n\right)^c = \lim_{n \longrightarrow \infty} sup A_n^c$

Demostración:

$\left(\lim_{n \longrightarrow \infty} inf A_k\right)^c = (\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k)^c$

$(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_k)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_k^c$

Pero:

$\lim_{n \longrightarrow \infty} sup A_n^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k^c$

$\therefore \left(\lim_{n \longrightarrow \infty} inf A_n\right)^c = \lim_{n \longrightarrow \infty} sup A_n^c$

b) $\left(\lim_{n\longrightarrow\infty} infA_n\right)^c = \lim_{n\longrightarrow\infty} infA_n^c$

Demostración:

$$\left(\lim_{n\longrightarrow\infty} infA_n\right)^c = (\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k)^c$$

$$(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c = \lim_{n\longrightarrow\infty} infA_n^c$$

Entonces:

$$\left(\lim_{n\longrightarrow\infty} infA_n\right)^c = \lim_{n\longrightarrow\infty} infA_n^c$$

c) $P\left(\lim_{n\longrightarrow\infty} infA_n\right) = 1 - P\left(\lim_{n\longrightarrow\infty} supA_n^c\right)$

Demostración:

$$P\left(\lim_{n\longrightarrow\infty} infA_n\right) = [P(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k)^c]^c$$

$$[P(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k)^c]^c = 1 - P(\bigcup_{n=1}^{k=n}\bigcap_{n=1}^{k=n} A_k)^c$$

$$1 - P(\bigcup_{n=1}^{k=n}\bigcap_{n=1}^{k=n} A_k)^c = 1 - P(\bigcap_{n=1}^{k=n}\bigcup_{k=n} A_k^c)$$

$$1 - P(\bigcap_{n=1}^{k=n}\bigcup_{k=n} A_k^c) = 1 - P\left(\lim_{n\longrightarrow\infty} supA_n^c\right)$$

$$\therefore P\left(\lim_{n\longrightarrow\infty} infA_n\right) = 1 - P\left(\lim_{n\longrightarrow\infty} supA_n^c\right)$$

8. Encuentre las condiciones sobre los eventos A_1 y A_2 para que la siguiente sucesión sea convergente.

$$A_n = \begin{cases} A_1 & \text{si n es impar} \\ \\ A_2 & \text{si n es par} \end{cases}$$