III) valeur absolsue d'un réel : définition et propriétés – distance

1) Valeur absolue d'un réel

Activité

a) Complete le tableau suivant :

a	2	$-3{,}5$	$0{,}1$	$-0{,}1$	0
$-a$	-2	$3{,}5$	$-0{,}1$	$0{,}1$	0
$\|a\|$	2	$3{,}5$	$0{,}1$	$0{,}1$	0

b) Que remarque-t-on de a et $|a|$? ainsi que –a et $|a|$?

CORRECTION

a) Voir tableau

b) On remarque que $|a| = a\ si\ a \geq 0$ et $|a| = -a\ si\ a \leq 0$

Définition : on appelle valeur absolue d'un réel $\boldsymbol{x}$, le réel noté $|\boldsymbol{x}|$ défini par :

Si $\boldsymbol{x} \geq 0$ alors $|\boldsymbol{x}| = \boldsymbol{x}$

Si $\boldsymbol{x} \leq 0$ alors $|\boldsymbol{x}| = -\boldsymbol{x}$

Propriétés

Pour tout réel $\boldsymbol{x}$:s

$|\boldsymbol{x}| \geq \mathbf{0}$

Si x=0 alors $|\boldsymbol{x}| = \mathbf{0}$

Si $|\boldsymbol{x}| = \mathbf{0}$ alors $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

Pour tous réels $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$

$|\boldsymbol{x}|.|\boldsymbol{y}| = |\boldsymbol{x}.\boldsymbol{y}|$

$\frac{|x|}{|y|} = \left|\frac{x}{y}\right|$

Si $|\boldsymbol{x}|=|\boldsymbol{y}|$ alors $\begin{cases} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{x} = -\boldsymbol{y} \end{cases}$

Exercice

Ecrire sans le symbole de la valeur absolue :

a) $|-5|$ b) $|\pi - 4|$ c) $|x - 2|$ d) $|-x + 1|$

Correction

Ecrivons sans le symbole de la valeur absolue :

a) $\boldsymbol{|-5| = 5}$ $(\boldsymbol{car}\ \ |a| = -a\ si\ a \leq 0\ donc - a = -(-5) = 5)$

b) $\boldsymbol{|\pi - 4| = -\pi + 4}$ $(\ \ car\ \ |a| = -a\ si\ a \leq 0\ donc - a = -(\pi - 4) = -\pi + 4$

c) $|x - 2| = \begin{cases} x - 2\ si\ x - 2 \geq 0 \\ -x + 2\ si\ x - 2 \leq 0 \end{cases}$ $(\ \mathbf{car}\ |\boldsymbol{x}| \begin{cases} \boldsymbol{x\ si\ x \geq 0} \\ \boldsymbol{-x\ si\ x \leq 0} \end{cases})$

c) $\boldsymbol{|x - 2| = \begin{cases} x - 2\ si\ x \geq 2 \\ -x + 2\ si\ x \leq 2 \end{cases}}$ $(\ \mathbf{car}\ |\boldsymbol{x}| \begin{cases} \boldsymbol{x\ si\ x \geq 0} \\ \boldsymbol{-x\ si\ x \leq 0} \end{cases})$

d)$|-x + 1| = \begin{cases} -x + 1\ si - x + 1 \geq 0 \\ x - 1\ si - x + 1 \leq 0 \end{cases}$ $(\ \mathbf{car}\ |\boldsymbol{x}| \begin{cases} \boldsymbol{x\ si\ x \geq 0} \\ \boldsymbol{-x\ si\ x \leq 0} \end{cases}$

$d)\ |\boldsymbol{-x + 1}| = \boldsymbol{\begin{cases} -x + 1\ si\ x \leq 1 \\ x - 1\ si\ x \geq 1 \end{cases}}$ $(\ \mathbf{car}\ |\boldsymbol{x}| \begin{cases} \boldsymbol{x\ si\ x \geq 0} \\ \boldsymbol{-x\ si\ x \leq 0} \end{cases}$

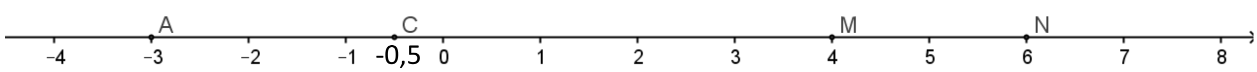
2) Distance de deux réels

Activité

1) Sur une droite graduée de 1cm, place les points A, C, M et N d'abscisses respectives : -3 ; $-0{,}5$; $4\ et\ 6$
2) Calcule les distances AC, AP, PN et CP.

Correction

1) Plaçons les points A, C, M et N sur la droite graduée



2) Calculons les distances :

$AC = \vert -0{,}5 - (-4)\vert$	$AP = \vert 4 - (-3)\vert$	$PN = \vert 6 - 4\vert$	$CM = \vert 4 - (-0{,}5)\vert$
$AC = \vert -0{,}5 + 4\vert$	$AP = \vert 4 + 3\vert$	$PN = \vert 2\vert$	$CM = \vert 4 + 0{,}5\vert$
$AC = \vert 3{,}5\vert$	$AP = \vert 7\vert$	$\boldsymbol{PN = 2cm}$	$CM = \vert 4{,}5\vert$
$\boldsymbol{AC = 3{,}5cm}$	**AP=7cm**		$\boldsymbol{CM = 4{,}5cm}$

Définition : soit **a** et **b** deux réels quelconques on note A et B d'abscisses respectives **a** et **b** sur une droite graduée. On appelle distance des réels a et b, le réel noté : $|b - a|$**.** On le note $d(a\,;b)$ et on a : $d(a; b) = d(b; a) = |b - a| = AB$

Conséquence : pour tous réels a et b :

Si $a = b$ alors d (a ; b) =0

Si $d\,(a\,;b) = 0$ alors $a = b$

$d(a,b) \geq 0$

$d(a\,;b) = d(b\,;a)$

Exercice

Soit S et T deux points sur une droite graduée d'abscisses respectives 5 et x

a) Calculer la distance ST en fonction de x
b) Déterminer la valeur de x sachant que ST=4cm

Correction

a) La distance ST en fonction de x.
   $ST = |x - 5|$
b) La valeur de x
   ST=4cm
   $|x - 5| = 4cm$

$$\begin{cases} x - 5 = 4 \\ x - 5 = -4 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = 4 + 5 \\ x = -4 + 5 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ x = 1 \end{cases}$$

Donc $\boldsymbol{x = 9 \; ou \; x = 1}$