Kvantum geometriai tenzor a kvantumállapotok sokaságán

TDK előadás

Emmer Marcell
Konzulens: Dr. Lévay Péter Pál
BME TTK, Elméleti Fizika Tanszék

2023-11-16

Parametrizált kvantum rendszerek 1.

A dolgozatban paraméterektől függő kvantumrendszereket vizsgálunk. $\mathcal{M}$: paramétertér. $\mathcal{P}$: a kvantumrendszer állapottere, a projektív Hilbert tér.

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ & \Cup & & \Cup \\ & X & \longmapsto & |\psi(X)\rangle\langle\psi(X)| \end{array}$$

Figure: f egy leképezés a paramétertér és a projektv Hilbert tér között.

$\mathcal{M}$ és $\mathcal{P}$ sokaságok. A Hilbert-tér egy lineáris tér, $\mathcal{P}$ viszont egy komplex görbült sokaság ellátva egy metrikával. A metrika a kvantummechanika egyik axiómájával kapcsolatos.

Parametrizált kvantum rendszerek 2.

Egy pont a paramétertéren

$$X \in \mathcal{M} \tag{1}$$

Egy projekció a $[\psi] = \left\{ |\tilde{\psi}\rangle \middle| \, |\psi\rangle = \lambda|\tilde{\psi}\rangle, \quad \lambda \in U(1) \right\}$ ekvivalenciaosztályra.

$$P(X) = |\psi(X)\rangle \langle\psi(X)| \in \mathcal{P} \tag{2}$$

Az általunk vizsgált paraméterfüggő állapotokat egy rögzített állapotból az alábbi módon származtatjuk

$$|\psi(X)\rangle = D(X)\,|\psi\rangle_0 \tag{3}$$

ahol $D(X)$ unitér $\forall X \in \mathcal{M}$.

Általánosított koherens állapotok

- $\mathcal{M} = G/H$ egy faktortér, mely egy páros dimenziós klasszikus sokaság. $X \in G/H$, $g \in G$.
- $|\psi(X)\rangle = D(X)\,|\psi\rangle_0$. Neve: általánosított koherens állapot (GCS).
- $D(X) := D(g(X))$ az eltolás/shift operátor. $D(g)$ G-egy unitér ábrázolása.
- $|\psi\rangle_0$ D legmagasabb súlya. Pl: $|\pm j, j\rangle$, $G = SU(2)$ esetén.
- Ekkor $G/H = SU(2)/U(1) \simeq \mathcal{S}^2$ topológiai szempontból ugyanaz.

Leképezés az extra struktúrák között

Az $\mathcal{M}$ és $\mathcal{P}$ sokaságokon lehetnek extra struktúrák, pl: metrika (g) vagy szimplektikus forma (ω).

$$\mathcal{M} \xrightarrow{f} \mathcal{P}$$

$$g^{PV} \xleftarrow{f^*} g^{FS}$$

$$\boxed{g^{PV} = f^* g^{FS}}$$

Figure: f visszahúzottja kapcsolatot teremt a Fubini-Study és a Provost-Vallee metrikák között.

Fubini-Study metrika

Fubini-Study: a metrikus struktúrát $\mathcal{P}$-n a fizikai átmeneti valószínűség definiálja.

$$0 \leq \cos\left(\frac{s([\psi],[\varphi])}{2}\right) := |\langle\psi|\varphi\rangle| \leq 1, \qquad 0 \leq s \leq \pi$$

$$|\langle\psi|\psi + d\psi\rangle| = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{ds}{2}\right)^2 + \dots$$

$$ds^2 = g_{ab}^{FS}(y)dy^a dy^b$$

Provost-Valle metrika: ennek a visszhúzottja!

A kvantum geometriai tenzor

Analóg módon a fidelitás definíciójából ered a kvantum geometriai tenzor $G_{\mu\nu}(X)$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(X, X+dX) &= |\langle\psi(X+dX)|\psi(X)\rangle| \\ &= 1 + \frac{1}{2}G_{\mu\nu}(X)dX^{\mu}dX^{\nu} + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Melynek valós része a Provost-Vallee metrika $g_{\mu\nu}^{PV}(X)$ és képzetes része a Berry görbület $F_{\mu\nu}(X)$.

$$g_{\mu\nu}^{PV}(X) = \mathrm{Re}\{G_{\mu\nu}(X)\} \quad (5a)$$

$$-\frac{1}{2}F_{\mu\nu}(X) = \mathrm{Im}\{G_{\mu\nu}(X)\} \quad (5b)$$

Az SU(1,1) csoport ábrázolásai

Az $\mathfrak{su}(1,1)$ Lie-algebrának 3 lineárisan független generátora van, $K_3, K_\pm$. A kommutációs relációk

$$[K_3, K_\pm] = \pm K_\pm, \qquad [K_-, K_+] = 2K_3 \tag{6}$$

A Casimir-operátor

$$K^2 = K_3^2 - \frac{1}{2}\left(K_+K_- + K_-K_+\right) \tag{7}$$

K_3 és K^2 közös sajátbázisa $|m, k\rangle$, ahol a $\mathcal{D}^+(k)$ ábrázolásban

$$K^2\,|m,k\rangle = k\,(k-1)\,|m,k\rangle \qquad k = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots \tag{8}$$

$$K_3\,|m,k\rangle = (m+k)\,|m,k\rangle \qquad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{9}$$

A faktortér mint paramétertér

- Minden irrep esetén a $\mathcal{D}^+(k)$ pozitív diszkrét sorozatban, $|0,k\rangle$ az extremális állapot.
- A stabilitás csoport: $\mathfrak{h} = \{K_3\} \implies H = U(1) = \left\{e^{iK_3}\right\}$.
- Tehát a faktortér $G/H = SU(1,1)/U(1) \equiv \mathbb{H}$ megfelel egy hiperboloidnak amit (ρ, φ)-vel paraméterezhetünk.

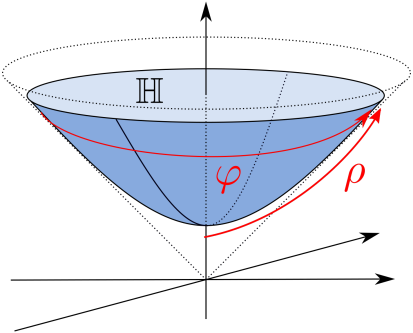

Figure: Az $SU(1,1)$ csoport faktortere egy hiperboloid.

Az SU(1,1) koherens állapotok

The $SU(1{,}1)$ koherens állapotok az eltolás operátorral állíthatóak elő.

$$\begin{aligned} |k,\eta\rangle &= D(\alpha)\,|0{,}k\rangle && \text{(10a)} \\ D(\alpha) &= \exp\left[\alpha K_+ - \overline{\alpha} K_-\right] \\ &= \exp\left[\eta K_+\right]\exp\left[\log\left(1-|\eta|^2\right)K_3\right]\exp\left[-\overline{\eta}K_-\right] && \text{(10b)} \end{aligned}$$

Ahol $\alpha = -\frac{\rho}{2}e^{-i\varphi}$ és $\eta = -\tanh\frac{\rho}{2}e^{-i\varphi}$.

$$|k,\eta\rangle = (1-|\eta|)^k \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{\frac{\Gamma(m+2k)}{m!\Gamma(2k)}}\,\eta^m\,|m{,}k\rangle \tag{11}$$

A kvantumgeometriai tenzor számolása 1

$$G_{\mu\nu}^{(k)}(\rho,\varphi) = \sum_{l\neq k} \left(\partial_\mu \langle k,\eta|\right) |l,\eta\rangle\langle l,\eta| \left(\partial_\nu |k,\eta\rangle\right) \tag{12}$$

Ahol $\mu,\nu = \rho,\varphi$. A skalárszorzatban megjelenik az ún. Mauer-Cartan forma

$$\langle l,\eta| \left(\partial_\nu |k,\eta\rangle\right) = \langle 0,l| D^{-1}(\rho,\varphi)\partial_\nu D(\rho,\varphi) |0,k\rangle \tag{13}$$

Melyet felírhatunk a Lie-algebra bázisán: $\{K_i\}$.

$$D^{-1}(\rho,\varphi)\partial_\nu D(\rho,\varphi) = E_\nu^1(\rho,\varphi)K_1 + E_\nu^2(\rho,\varphi)K_2 + A_\nu^3(\rho,\varphi)K_3 \tag{14}$$

A E_ν^1, E_ν^2 és A_ν^3 együtthatók reprezentáció függetlenek.

A kvantum geometriai tenzor számolása 2

Az összegzést elvégezve megkapjuk, hogy:

$$g_{\mu\nu}^{PV\,(k)}(\rho,\varphi) = (\Delta K_1)_0^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sinh^2\rho \end{bmatrix} \tag{15a}$$

$$(\Delta K_1)_0^2 = (\Delta K_2)_0^2 = \langle k,0|\, K_1^2 \,|k,0\rangle - \langle k,0|\, K_1 \,|k,0\rangle^2 \tag{15b}$$

$$-\frac{1}{2}F_{\mu\nu}^{(k)}(\rho,\varphi) = \langle K_3\rangle_0 \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\sinh\rho \\ \frac{1}{2}\sinh\rho & 0 \end{bmatrix} \tag{16a}$$

$$\langle K_3\rangle_0 = \langle k,0|\, K_3 \,|k,0\rangle \tag{16b}$$

A determináns kapcsolata fluktuációkkal

$$\det G_{\mu\nu}^{(k)}(\rho,\varphi) = \left[(\Delta K_1)_0^2(\Delta K_2)_0^2 - \left|\frac{1}{2}\langle K_3\rangle_0\right|^2\right]\sinh^2\rho \qquad (17)$$

A deteminánsban megjelenik a Heisenberg-határozatlansági reláció.

$$(\Delta K_1)_0(\Delta K_2)_0 \geq \frac{1}{2}\left|\langle K_3\rangle_0\right| \qquad (18)$$

Ennek alapján látható, hogy $G_{\mu\nu}^{(k)}(\rho,\varphi)$ egy pozitív szemidefinit mátrix.

$$\det G_{\mu\nu}^{(k)}(\rho,\varphi) = \frac{1}{4}m\,(m+1)\,(m+2k-1)\,(m+2k)\sinh^2\rho \qquad (19)$$

Az SU(1,1) csoport két oszcillátoros realizációja

Az algebra elemek egy lehetséges reprezentációja bozonikus keltő és eltüntető operátorokkal

$$K_+ = a^\dagger b^\dagger, \qquad K_- = ab, \qquad K_3 = \frac{1}{2}\left(a^\dagger a + b^\dagger b + 1\right) \tag{20a}$$

$$K^2 = \frac{1}{4}\left(\Delta^2 - 1\right) \tag{20b}$$

Ahol $\Delta = a^\dagger a - b^\dagger b$

$$|m, k\rangle \equiv |n_1\rangle_a \otimes |n_2\rangle_b \tag{21}$$

$$\det G_{\mu\nu}^{(n_1,n_2)}(\rho, \varphi) = \frac{1}{4} n_1 n_2 \left(n_1 n_2 + n_1 + n_2 + 1\right) \sinh^2 \rho \tag{22}$$

Az általánosított kvantumgeometriai tenzor 1

A $|n_1, n_2, \eta\rangle$ koherens állapot egy sajátállapota egy $H(\rho, \varphi) = D^\dagger(\rho, \varphi) K_3 D(\rho, \varphi)$ Hamiltoninak. Ekkor beláthatjuk, hogy a kvantumgemetriai tenzor az alábbi alakra hozható:

$$G_{\mu\nu}^{(n_1,n_2)} = \sum_{m_i \neq n_i} \frac{\langle n_1,n_2|\partial_\mu H|m_1,m_2\rangle\langle m_1,m_2|\partial_\nu H|n_1,n_2\rangle}{\left(E_{m_1,m_2} - E_{n_1,n_2}\right)^2} \tag{23}$$

Az általánosított tenzorunkban a deriválás a kanonikus operátorok szerint értendő

$$G_{\mu\nu}^{(n_1,n_2)} \mapsto G_{\alpha,\beta}^{(n_1,n_2)}, \quad \xi_\alpha = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & p_1 & p_2 \end{bmatrix}^T \tag{24}$$

Az általánosított kvantum geometriai tenzor 2

Ekkor a Provost-Valle metrika általánosítása a korreláció mátrixot adja. Pl:

$$g_{q_k q_l}^{(n_1,n_2)} = \frac{1}{2}\left(\langle p_k p_l\rangle_{(n_1,n_2)} + \langle p_l p_k\rangle_{(n_1,n_2)}\right) - \langle p_k\rangle_n \langle p_l\rangle_{(n_1,n_2)} \tag{25}$$

Az ún. Gauss állapotok korreláció mátrixából kiszámolható az összefonódottsági entrópia:

$$S = \sum_{i=1}^{n_{\text{sub}}}\left[\left(\sigma_i + \frac{1}{2}\right)\log\left(\sigma_i + \frac{1}{2}\right) - \left(\sigma_i - \frac{1}{2}\right)\log\left(\sigma_i - \frac{1}{2}\right)\right] \tag{26}$$

Ahol $\{\sigma_i\}$ jelöli a szimplektikus sajátértékeket, melyeket egy $S \in Sp(4,\mathbb{R})$ szimplektikus mátrix-szal történő diagonalizálás útján kapunk.

$$SCS^T = C_w \tag{27a}$$

$$C_w = \operatorname{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_1, \sigma_2,) \tag{27b}$$

Az általánosított kvantumgeometriai tenzor 3

$|0,0,\eta\rangle = D(\rho,\varphi)\,|0\rangle_a \otimes |0\rangle_b$ egy Gauss állapot mivel $H(\rho,\varphi)$ alapállapota. Az összefonódottsági entrópia ekkor

$$S(\rho,\varphi) = 2\left[\cosh^2\frac{\rho}{2}\log\left(\cosh\frac{\rho}{2}\right) - \sinh^2\frac{\rho}{2}\log\left(\sinh\frac{\rho}{2}\right)\right] \tag{28}$$

Monoton növő függvénye ρ-nak.

Konklúzió

1. A dolgozatban összefoglaltam a kvantum geometriai tenzor elemeinek (Provost-Vallee metrika, Berry görbület) fizikai jelentését. Tisztáztam ezen elemek kapcsolatát a projektív Hilbert téren élő strúktúrákkal.
2. $SU(2)$ és $SU(1{,}1)$ koherens állapotokra meghatároztam a tenzor explicit alakját.
3. A kvantumgeometriai tenzor általánosításából eredően meghatároztam az $SU(1{,}1)$ koherens állapotok összefonódottsági entrópiáját.
4. A későbbiekben az itt felhasznált módszerek segítségével holografikus térelméletekben szeretnénk az ott megjelenő fidelitás-szuszceptibilitás és komplexitás mennyiségek geometriai jelentését tisztázni.

Köszönöm

Köszönöm a figyelmet!