

Oblig2

mat1120

Elsie Mestl

28. oktober 2015

Oppgave 1

i)

Har at:

$$p(t) = a_0 + a_1t + t^2 \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}$$

Regner ut det karakteristiske polynomet til C

$$\begin{aligned} P(\lambda_C) &= \det(C) \\ &= (-\lambda)(-a_1 - \lambda) + a_0 \\ &= a_0 + \lambda a_1 + \lambda^2 \end{aligned}$$

Ser at

$$P(\lambda_C) = p(t), \quad t = \lambda$$

ii)

$$p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + t^3 \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}$$

Regner ut det karakteristiske polynomet til C

$$\begin{aligned} P(\lambda_C) &= \det(C) \\ &= -\lambda(-\lambda(-a_2 - \lambda) + a_1) - a_0(1 - (-\lambda \cdot 0)) \\ &= \lambda^2(-a_2 - \lambda) - \lambda a_1 - a_0 \\ &= -\lambda^3 - \lambda^2 a_2 - \lambda a_1 - a_0 \end{aligned}$$

Ser at

$$P(\lambda_C) = -p(t), \quad t = \lambda$$

Oppgave 2

i)

Har at

$$f'''(t) = 4f(t) + 4f'(t) - f''(t)$$

Vis at $\mathbf{x}(t) = (f(t), f'(t), f''(t))$ er en løsning.

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(t) \\ f'(t) \\ f''(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 + f'(t) + 0 \\ 0 + 0 + f''(t) \\ 4f(t) + 4f'(t) - f''(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} f'(t) \\ f''(t) \\ f'''(t) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

ii)

Vis at $f(t) = x_1(t)$ er en løsning for (*) når $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ er en løsning for (**)

Finner egenverdien og egenvektorene til C. Vha matlab, og får at C har egenvektorene:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0.25 \\ -0.5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

med respektive egenverdier:

$$\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = -2 \quad \lambda_3 = -1$$

Har videre at:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= c_1 \mathbf{v}_1 e^{2t} + c_2 \mathbf{v}_2 e^{-2t} + c_3 \mathbf{v}_3 e^{-t} \\ &= c_1 \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} 0.25 \\ -0.5 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} \\ &= \begin{bmatrix} 0.25c_1 e^{2t} + 0.25c_2 e^{-2t} + c_3 e^{-t} \\ 0.5c_1 e^{2t} - 0.5c_2 e^{-2t} - c_3 e^{-t} \\ c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} + c_3 e^{-t} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Siden:

$$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$$

Har vi:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= 0.25c_1e^{2t} + 0.25c_2e^{-2t} + c_3e^{-t} \\x_2(t) &= 0.5c_1e^{2t} - 0.5c_2e^{-2t} - c_3e^{-t} \\x_3(t) &= c_1e^{2t} + c_2e^{-2t} + c_3e^{-t}\end{aligned}$$

Siden

$$f(t) = x_1(t) = 0.25c_1e^{2t} + 0.25c_2e^{-2t} + c_3e^{-t}$$

Setter vi inn for $f(t)$ i (*) ser vi at:

$$\begin{aligned}f'''(t) + f''(t) - 4f'(t) - 4f(t) \\&= -4(0.25c_1e^{2t} + 0.25c_2e^{-2t} + c_3e^{-t}) - 4(0.5c_1e^{2t} - 0.5c_2e^{-2t} - c_3e^{-t}) \\&\quad + c_1e^{2t} + c_2e^{-2t} + c_3e^{-t} + 2c_1e^{2t} - 2c_2e^{-2t} - c_3e^{-t} \\&= 0 \quad \text{ved enkel algebra}\end{aligned}$$

Dermed har vi at $f(t) = x_1(t)$ er en løsning for (*)

iii)

Regnet ut i oppgave 2ii)

Den generelle løsningen er:

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{v}_1e^{2t} + c_2\mathbf{v}_2e^{-2t} + c_3\mathbf{v}_3e^{-t}$$

Har at

$$\mathbf{x}(0) = (1, 0, -2)$$

Setter inn verdien for $t = 0$ og $\mathbf{x}(0)$ inn i den generelle formelen og radreduserer den utvidede matrisen $[P\mathbf{x}]$ og får at:

$$\mathbf{x}(t) = 0\mathbf{v}_1e^{2t} - 4\mathbf{v}_2e^{-2t} + 2\mathbf{v}_3e^{-t} = -4\mathbf{v}_2e^{-2t} + 2\mathbf{v}_3e^{-t}$$

iv)

Som vist i oppgave 2ii) så er den generelle løsningen for (*):

$$f(t) = 0.25c_1e^{2t} + 0.25c_2e^{-2t} + c_3e^{-t}$$

Altså for alle reelle verdier av c_1, c_2, c_3 så er $f(t)$ løsning for (*)

$$f(0) = 1 \quad f'(0) = 0 \quad f''(0) = -2, \quad t = 0$$

Siden vi har fra Oppgave 2i at $\mathbf{x}(t) = (f(t), f'(t), f''(t))$ er en løsning for (**)
ser vi at c_1, c_2, c_3 får de samme verdiene som i oppgaven over. Altså blir

$$f(t) = -4e^{-2t} + 2e^{-t}$$

Oppgave 3

i)

Hvis \mathbf{v}_λ er en egenvektor for \mathcal{C} med egenverdien λ så er:

$$\mathcal{C}\mathbf{v}_\lambda = \lambda\mathbf{v}_\lambda$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}\mathbf{v}_\lambda &= \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \\ -a_0 - a_1\lambda \cdots - a_{n-1}\lambda^{n-1} \end{bmatrix} & \begin{aligned} p(\lambda) &= 0 \\ -a_0 - a_1\lambda \cdots - a_{n-1}\lambda^{n-1} &= -p(\lambda) + \lambda^n \\ &= 0 + \lambda^n \end{aligned} \\ &= \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-2} \\ \lambda^{n-1} \end{bmatrix} = \lambda\mathbf{v}_\lambda \end{aligned}$$

ii)

$$E_\lambda = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R} \mid \mathcal{C}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}\}$$

Siden \mathbf{v}_λ er en egenvektor til \mathcal{C} så er $\mathbf{v}_\lambda \in E_\lambda$

Anta videre at $\mathbf{x} \neq c\mathbf{v}_\lambda$, $c \in \mathbb{R}$ og $\mathbf{x} \in E_\lambda$

$$\mathcal{C}\mathbf{x} = \mathcal{C} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ -(a_0x_0 + a_1x_1 + \cdots + a_{n-1}x_{n-1}) \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix}$$

Altså har vi at:

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda x_0 \\ x_2 &= \lambda x_1 \\ &\vdots \\ \lambda x_{n-1} &= -(a_0x_0 + a_1x_1 + \cdots + a_{n-1}x_{n-1}) \end{aligned}$$

Setter vi inn x_1 i formelen for x_2 og x_2 for x_3 osv. Ser vi at:

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda x_0 \\ x_2 &= \lambda^2 x_0 \\ &\vdots \\ \lambda^n x_0 &= -(a_0 x_0 + \lambda a_1 x_0 + \dots + \lambda^{n-1} a_{n-1} x_0) \implies \lambda^n = -(a_0 + \lambda a_1 + \dots + \lambda^{n-1} a_{n-1}) \end{aligned}$$

Dette kan vi se på som følgende:

$$C\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \lambda x_0 \\ \lambda^2 x_0 \\ \vdots \\ \lambda^n x_0 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda x_0 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} x_0 \end{bmatrix}$$

Her har vi en selvmotsigelse siden vi antokk at $\mathbf{x} \neq c\mathbf{v}_\lambda$, $c \in \mathbb{R}$. Men det er nettopp dette vi har fått i utregningene. Altså kan ikke \mathbf{x} være lineært uavhengig av \mathbf{v}_λ og samtidig være en egenvektor for C med egenverdi λ .

Dermed har vi at E_λ består av alle multipler av \mathbf{v}_λ som videre betyr at $\dim(E) = 1$ og at $E = \text{Span}\{\mathbf{v}_\lambda\}$.

iii)

C er diagonaliserbar, hvis og bare hvis:

$$C = PDP^{-1}$$

Hvis p har n distinkte røtter, betyr det at C har n distinkte egenverdier. Det betyr at det finnes en D som består av egenverdiene. Altså finnes det en matrise P hvor kolumnene er de respektive egenvektorene. Siden det er n distinkte egenverdier er egenvektorene lineært uavhengige. Altså er kolumnene i P lineært uavhengige og P er invertibel. Og vi har at C er diagonaliserbar hvis p har n distinkte røtter.

Hvis C er diagonaliserbar vet vi det finnes en diagonalmatrise D som består av alle egenverdiene til C . I oppgave 3ii) viste vi at $\dim(E_\lambda) = 1$ og dette gjelder for alle λ . Altså for at P skal være invertibel må den bestå av n lineært uavhengige kolonner. Altså har C n lineært uavhengige egenvektorer, og dermed også egenverdir. Siden $p = p(t)$ og p har verdien til λ så er løsningen til $p(t)$ lik alle verdiene til λ altså n distinkte røtter.

$$P = [\mathbf{v}_0 \mathbf{v}_1 (\dots) \mathbf{v}_{n-1}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \dots & \lambda_{n-1} \\ & & \ddots & \\ \lambda_0^{n-1} & \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_{n-1}^{n-1} \end{bmatrix}$$

Oppgave 4

i)

```
function rot = stdrot(p)
    numtimes = 30;
    tol = 0.5 * 10^(-6);
    x = zeros(max(size(p))-1); %start columarray
    x = x(:, 1);
    x(1) = 1;

    rot = 0; %to stop matlab for complaining

    C = zeros(max(size(p))- 1, max(size(p)) - 1);

    %going form polynom to matrix
    for n = 1: max(size(p))-1
        if n == max(size(p))-1
            for m = 2: max(size(p))
                C(n, max(size(p))-(m) +1) = - p(m);
            end
        else
            C(n, n+1) = 1;
        end
    end

    %using the code given but changing the output
    for n = 1: numtimes
        x = C*x;
        rot = max(abs(x));
        x = (1/rot)*x;
        error = max(abs(C*x-rot*x));

        if error < tol
            break;
        end
    end

    if error > tol
        disp('there is no dominant root in p')
    end
end
```

ii)

```
diary on
p1 = [1 -1 -3 -1 2 1]

p1 =

    1    -1    -3    -1     2     1

stdrot(p1)

ans =

    2.2954

roots(p1)

ans =

    2.2954 + 0.0000i
    0.8593 + 0.0000i
   -0.8172 + 0.5539i
   -0.8172 - 0.5539i
   -0.5202 + 0.0000i

p2 = [1 -2 4 -6]

p2 =

    1    -2     4    -6

stdrot(p2)
there is no dominant root in p

ans =

    1

roots(p2)

ans =

    0.1443 + 1.8669i
    0.1443 - 1.8669i
    1.7113 + 0.0000i

diary off
```

Kommentarer:

Ser at programmet finner den dominante roten for p1, (største av de røttene `root(p1)` gir ut). Men finner ikke for p2. Dette er fordi selv om det ved første øyekast kanskje ser slik ut, så har ikke p2 en reell rot, absolutt verdien til de to komplekse er noe, men svært lite større.

Oppgave 5

```
diary on
A= pascal(5)

A =

     1     1     1     1     1
     1     2     3     4     5
     1     3     6    10    15
     1     4    10    20    35
     1     5    15    35    70

stdrot(poly(A))

ans =

    92.2904

eig(A)

ans =

    0.0108
    0.1812
    1.0000
    5.5175
    92.2904

diary off
```

Ser at `stdrot()` finner den største roten til A! OSB: hadde vi i `stdrot()` satt `x` til å være en så ville vi fått ut 1, og dette har med at vi finner roten med en gang, og den sjekker ikke for andre verdier...

Oppgave 6

```
diary on
A
A =

     1     1     1     1     1
     1     2     3     4     5
     1     3     6    10    15
     1     4    10    20    35
     1     5    15    35    70

An = A;
for n= 1: 8
    [Q R] = qr(An);
    An = R*Q;
end
An

An =

    92.2904   -0.0000   -0.0000    0.0000   -0.0000
   -0.0000    5.5175    0.0000    0.0000    0.0000
   -0.0000    0.0000    1.0000    0.0000    0.0000
   -0.0000    0.0000    0.0000    0.1812    0.0000
   -0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0108

eig(A)

ans =

    0.0108
    0.1812
    1.0000
    5.5175
    92.2904

diary off
```

Printer ikke ut A_1 til A_7 men kun den siste. Er for å forhindre en oversvømmelse av unødvendig utskrift. Ser at diagonalen i A_8 tilsvarer egenverdiene til A altså er A_8 en diagonalmatrise for A