Oblig1
mat1110

Elsie Mestl

February 18, 2015

Oppgave 1:

Gitt:

$$f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$$

a)

Har at lineariseringen $T_{\vec{a}}$ er definert ved:

$$\begin{aligned} T_{\vec{a}}(\vec{f}) &= \vec{f}(\vec{a}) + \vec{f}'(\vec{a})(\vec{x} - \vec{a}) \\ \vec{f}'(\vec{x}) &= (-2x, -2y) \end{aligned}$$

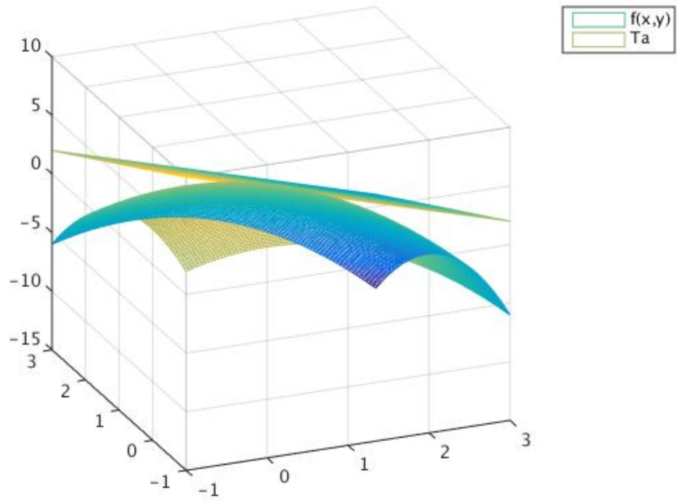
Setter inn for $\vec{a}$. Gir:

$$\begin{aligned} T_{\vec{a}}(\vec{f}) &= (4 - 1 - 1) + (-2a_x, -2a_y)\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}\right) \\ &= (2) + (-2, -2)\begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 1 \end{pmatrix} \\ &= (2) + (-2(x - 1) + -2(y - 1)) \\ &= (2) + (-2x + 2 - 2y + 2) = (-2x - 2y + 6) = -2(x + y - 3) \end{aligned}$$

Ser vi på $T_{\vec{a}}(f) = z$ ser vi at x,y,z alle er i første grad, altså vil $T_{\vec{a}}(f)$ danne et plan i $\mathbb{R}^3$.

b)

Grafen til f(x,y) og $T_{\vec{a}}$



Matlab koden:

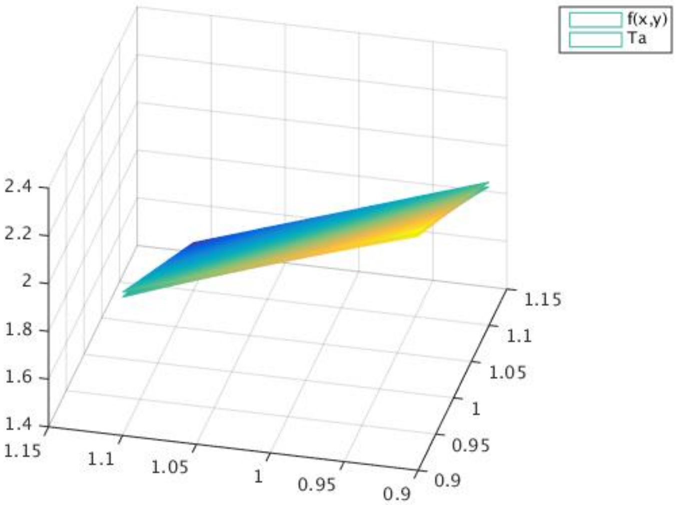
```
x = linspace(-1, 3, 100);
y =x;

[x y] = meshgrid(x, y);
f = inline ('4-x.^2-y.^2');
t = inline ('-2*x-2*y+6');

mesh(x,y,f(x,y))
hold on
mesh (x,y,t(x,y))
legend('f(x,y)', 'Ta')
```

c)

De to grafene har dessverre fått samme fargekode, og jeg kan ikke endre den ene uten å endre den andre (med mindre jeg gjør dem ensfargede, hvor man da ikke lenger får en 3D følelse). Men siden man vanskelig ser forskjellen på dem, skjønner man også at $T_a \approx f(x, y)$ i punktet $\vec{a}$. Dette er fordi lineariseringen $T_{\vec{a}}$ i $f(\vec{a})$ er ekvivalente til tangentplanet i $\vec{a}$.



Matlab koden:

```
x = linspace (0.9, 1.1, 100);
y =x;
[x y] = meshgrid(x,y);

f = inline ('4-x.^2-y.^2');
t = inline ('-2*x-2*y +6');

mesh(x,y,f(x,y))
hold on
mesh(x,y,t(x,y))
legend('f(x,y)','Ta')
```

Oppgave 2:

La $\mathcal{C}$ være en kurve i (x,y)-planet, og la $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ være en kontinuerlig funksjon. Og $\vec{r} = f(\theta)$ er avstanden fra origo til $\mathcal{C}$ hvor θ er en vinkel som står positivt til x-aksen.

a)

Forklar at:

$$\vec{r}(\theta) = f(\theta)\cos(\theta)\vec{i} + f(\theta)\sin(\theta)\vec{j}, \quad \theta \in [a, b]$$

Proof. Kan skrive:

$$\vec{r}(\theta) = f(\theta)\cos(\theta)\vec{i} + f(\theta)\sin(\theta)\vec{j} = [f(\theta)\cos(\theta), f(\theta)\sin(\theta)]$$

La (c,d) være et punkt på $\mathcal{C}$ og anta at $\vec{r}$ går fra origo til (c,d). $\vec{i}$ og $\vec{j}$ er henholdsvis $\vec{e}_1$ og $\vec{e}_2$. Siden vi tar utgangspunkt i origo kan vi lage en enhetssirkel hvor vi per definisjon vet at x verdien er $\cos(\theta)$ og y verdien er $\sin(\theta)$. Dermed har vi parametriseringen $[\cos(\theta), \sin(\theta)]$ som danner en parametrisering av $\vec{r}$. $\vec{r} * f(\theta)$ vil da gi lengden og dermed har vi at:

$$\vec{r}(\theta) = f(\theta)\cos(\theta)\vec{i} + f(\theta)\sin(\theta)\vec{j}$$

$\square$

b)

Anta at f er derriverbar. Finn $\vec{v}(\theta)$ og $v(\theta)$.

$$\begin{aligned}
\text{Har at: } \vec{v}(\theta) &= \vec{r}\,'(\theta) = (f(\theta)\cos(\theta)\vec{i} + f(\theta)\sin(\theta)\vec{j})' \\
&= (f'(\theta)\cos(\theta) - f(\theta)\sin(\theta))\vec{i} + (f'(\theta)\sin(\theta) + f(\theta)\cos(\theta))\vec{j}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v(\theta) = |\vec{v}(\theta)| &= \sqrt{(f'(\theta)\cos(\theta) - f(\theta)\sin(\theta))^2 + (f'(\theta)\sin(\theta) + f(\theta)\cos(\theta))^2} \\
&= \sqrt{(f'(\theta))^2\cos^2(\theta) - 2f'(\theta)f(\theta)\sin(\theta)\cos(\theta) + (f(\theta))^2\sin^2(\theta)} \\
&\quad \overline{+(f'(\theta))^2\sin^2(\theta) + 2f'(\theta)f(\theta)\sin(\theta)\cos(\theta) + (f(\theta))^2\cos^2(\theta)} \\
&= \sqrt{(f'(\theta))^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) + (f(\theta))^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))} \\
&= \sqrt{(f'(\theta))^2 + (f(\theta))^2}
\end{aligned}$$

c)

Lar $\mathcal{C}$ være en slik kurve at $f(\theta) = 1 + \cos(\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi]$ Da får $\mathcal{C}$ paramterisering:

$$\vec{r}(\theta) = [\cos(\theta) + \cos^2(\theta),\ \sin(\theta) + \cos(\theta)\sin(\theta)]$$

Som gir følgende graf:

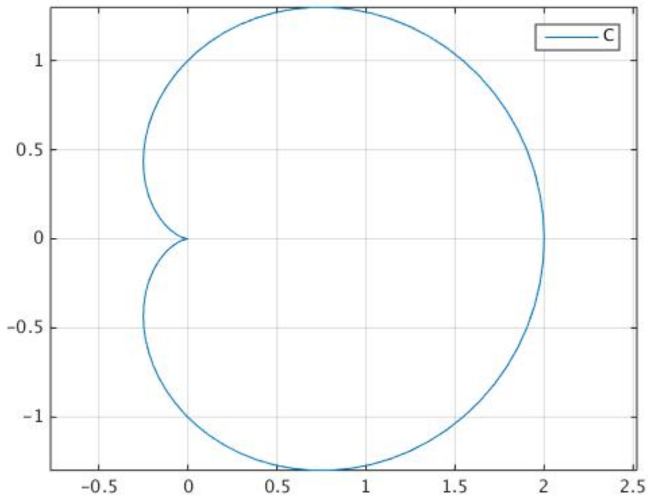


Figure 1: Benevningen på begge aksene er $\in \mathbb{R}$

Matlab kode:

```
theta = linspace (0, 2*pi, 100);
f = inline ('1+cos(x)');
plot (cos(theta).*f(theta), sin(theta).*f(theta))
axis equal
grid on
legend ('C')
```

d)

Har at:

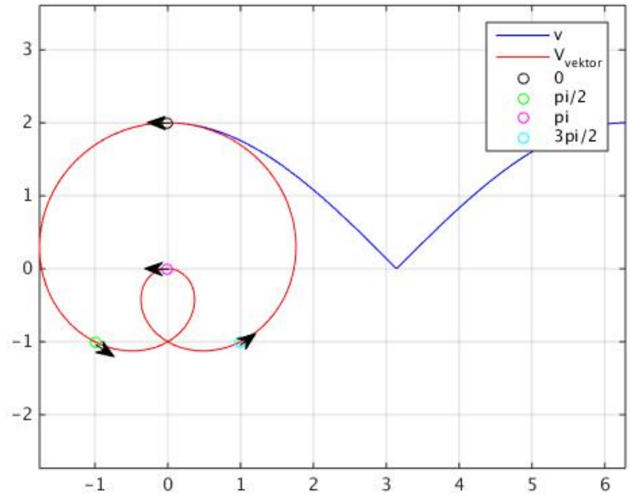
$$f'(\theta) = -\sin(\theta)$$

Bruker formelen vist i Oppgave 2b og setter inn for θ
Gir:

$$\begin{aligned}
\vec{v}(\theta) &= (-\sin(\theta)\cos(\theta) - (1+\cos(\theta))\sin(\theta))\vec{i} + (-\sin^2(\theta) + (1+\cos(\theta))\cos(\theta))\vec{j} \\
&= (-2\sin(\theta)\cos(\theta) - \sin(\theta))\vec{i} + (-\sin^2(\theta) + \cos(\theta) + \cos^2(\theta))\vec{j} \\
&= (-\sin(\theta) - \sin(2\theta))\vec{i} + (\cos(2\theta) + \cos(\theta))\vec{j}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v(\theta) &= \sqrt{(-\sin(\theta))^2 + (1+\cos(\theta))^2} \\
&= \sqrt{\sin^2(\theta) + 1 + 2\cos(\theta) + \cos^2(\theta)} \\
&= \sqrt{1 + 1 + 2\cos(\theta)} = \sqrt{2(1+\cos(\theta))}
\end{aligned}$$

e)




```
theta = linspace (0, 2*pi, 500);

vx= inline ('-sin(x)-sin(2.*x)');
vy= inline ('cos(x)+cos(2.*x)');

v = inline ('sqrt(2+2.*cos(x))');

plot (theta, v(theta), 'b', vx(theta), vy(theta), 'r')
hold on
grid on
axis equal
%plotter inn noen punkter
plot (vx(0), vy(0), 'ko');
plot (vx(pi/2), vy(pi/2), 'go');
plot (vx(pi), vy(pi), 'mo');
plot (vx(3*pi/2), vy(3*pi/2), 'co');
hold on
legend ('v', 'V_{vektor}','0', 'pi/2', 'pi', '3pi/2')
```

f)

Vis at:

$$\mathcal{L}(0, 2\pi) = 2\sqrt{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{1-\cos(\theta)}}\,\mathrm{d}\theta$$

Proof. Har:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(0,2\pi) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(r_1'(\theta))^2 + (r_2'(\theta))^2}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} v(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1+\cos(\theta))}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos(\theta)}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos(\theta) * \frac{1-\cos(\theta)}{1-\cos(\theta)}}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1-\cos^2(\theta)}{1-\cos(\theta)}}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{|\sin^2(\theta)|}{1-\cos(\theta)}}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \sqrt{2}\left(\int_0^{\pi} \sqrt{\frac{|\sin^2(\theta)|}{1-\cos(\theta)}}\,\mathrm{d}\theta + \int_{\pi}^{2\pi} \sqrt{\frac{|\sin^2(\theta)|}{1-\cos(\theta)}}\,\mathrm{d}\theta\right)
\end{aligned}$$

Har at: $\sin(\theta) \leq 0$, når $\theta \in [0,\pi]$ og $\sin(\theta) \geq 0$, når $\theta \in [\pi, 2\pi]$. Og har at $\cos(\theta)$ går fra [1, -1] og [-1, 1] i de respektive intervallene har vi at fortegnet til $\cos(\theta)$ ikke vil spille en rolle, siden [1, -1] $\equiv$ [-1, 1]. Dermed har vi at kun fortegnet til $\sin(\theta)$ vil intre, men siden vi har $|\sin(\theta)|$ får vi:

$$sin(\theta) \in [0,\pi] \equiv \sin(\theta) \in [\pi, 2\pi], \quad \sin(\theta) \in [0,\pi] = |\sin(\theta)|$$

Altså har vi:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(0,2\pi) &= \sqrt{2}\left(\int_0^{\pi} \sqrt{\frac{|\sin^2(\theta)|}{1-\cos(\theta)}}\,\mathrm{d}\theta + \int_{\pi}^{2\pi} \sqrt{\frac{|\sin^2(\theta)|}{1-\cos(\theta)}}\,\mathrm{d}\theta\right) \\
&= 2\sqrt{2}\int_0^{\pi} \sqrt{\frac{|\sin^2(\theta)|}{1-\cos(\theta)}}\,\mathrm{d}\theta \\
&= 2\sqrt{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{1-\cos(\theta)}}\,\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

□

g)

$$\mathcal{L}(0,2\pi) = 2\sqrt{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{1-\cos(\theta)}}\,\mathrm{d}\theta$$

Substitusjon:

$$\begin{aligned}
u &= 1-\cos(\theta) \qquad & u &= 1-\cos(0) = 0 \\
u' &= \sin(\theta) & u &= 1-\cos(\pi) = 2
\end{aligned}$$

Gir:

$$2\sqrt{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{u}\,\sin(\theta)}\,\mathrm{d}\theta = 2\sqrt{2}\int_0^{2} \frac{1}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = 2\sqrt{2}\big[2\sqrt{u}\big]_0^2 = 4\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-\sqrt{0}\right) = 8$$

Altså

$$\mathcal{L}(0, 2\pi) = 8$$