Oblig 2
matinf1100 - Modelering og beregninger

Elsie Mestl

9. november 2016

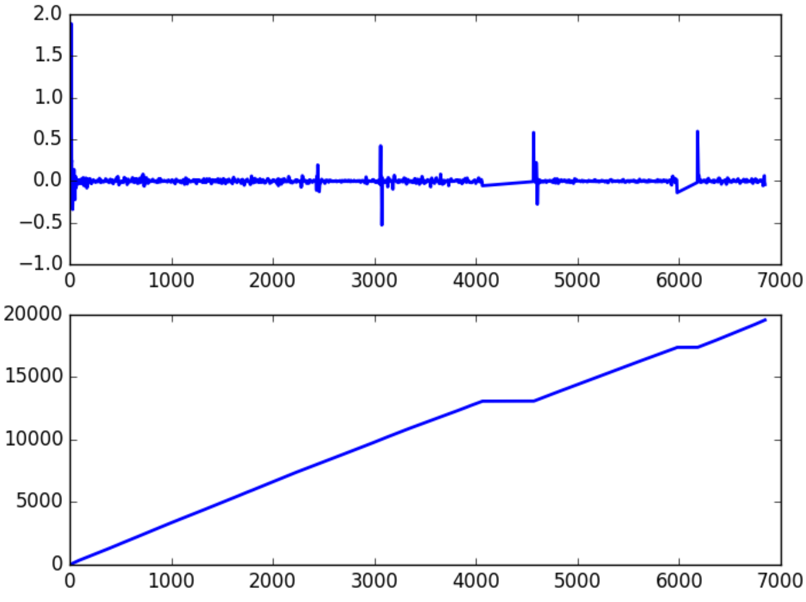
Oppgave 1

```
# *-* encoding: utf-8 *-*
import matplotlib.pyplot as plt

"""
finner en tiln rmet funksjon for akselerasjonen. Hvor hver verdi er gitt ved.
f'(a) = (f(a+h) - f(a))/h
"""
def akselerasjon(t, v):
    a=[0]
    for i in range(1, len(v)):
        h = t[i] - t[i-1]
        a.append((v[i] - v[i-1])/h)

    return a


"""
finner en tiln rmet funksjon for strekningen.
"""
def strekning(t, v):
    s = [0]

    for i in range(1, len(v)):
        h = t[i]-t[i-1]
        s.append(s[i-1] + v[i]*h)

    return s



t = []
v = []
infile = open('running.txt', 'r')
for line in infile:
```

```
    tnext, vnext = line.strip().split(',')
    t.append(float(tnext))
    v.append(float(vnext))

infile.close()


plt.figure(1)

plt.subplot(211)
plt.plot(t, akselerasjon(t, v), lw = 2)

plt.subplot(212)
plt.plot(t, strekning(t, v), lw = 2)

plt.savefig("opgv1")
plt.show()

raw_input()
```

Plot

Figur 1: Top grafen viser akselerasjonen per tid. Den nedre viser avstand fra start per tid.



Oppgave 2

a)

$$x' + x^2 = 1 \qquad\qquad x(0) = 0$$

Hvor x er en funksjon av t og skrives x(t)

$$\begin{aligned}
x'(t) &= 1 - x^2(t) \\
\frac{x'(t)}{1 - x^2(t)} &= 1 \\
\int \frac{x'(t)}{1 - x^2(t)} dt &= \int 1 dt \qquad\qquad \text{substituer for } x = x(t) \\
\int \frac{1}{1 - x^2} dx &= \int \frac{1}{(1-x)(1+x)} dx = \int \frac{1}{2(1-x)} dx + \int \frac{1}{2(1+x)} dx \\
&= \frac{1}{2} \ln(1+x) + C_1 - \frac{1}{2} \ln(1-x) + C_2 = t + C_3 \\
\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) &= 2t + C \\
\frac{1+x}{1-x} &= e^{2t+C} \\
1 + x &= e^{2t+C} - xe^{2t+C} \implies x(e^{2t+C} + 1) = e^{2t+C} - 1 \\
x(t) = x &= \frac{e^{2t}D - 1}{e^{2t}D + 1} \qquad\qquad \text{hvor } D = e^C
\end{aligned}$$

for den spesielle løsningen har vi

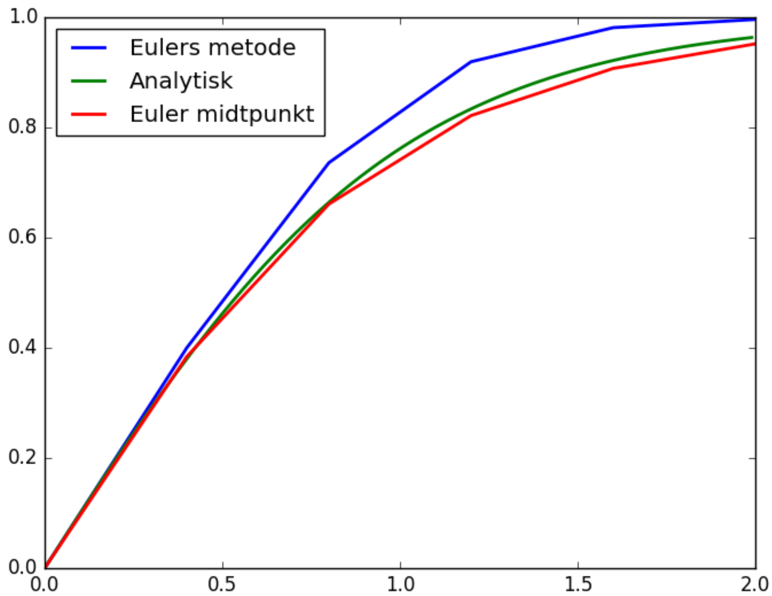
$$\begin{aligned}
x(0) &= \frac{D-1}{D+1} = 0 \implies D - 1 = 0 \implies D = 1 \\
x(t) &= \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1}
\end{aligned}$$

b, c)

```python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from math import sqrt

def euler(a, b, n, x_0): #intervall [a,b], n steg
    h = 1.0*(b-a)/n
    t = [a + i*h for i in range(n+1)]
    x = [x_0*1.0]

    for i in range(n):
        dx = 1 - x[i]**2
        x.append(x[i] + h*dx)
    return t, x
```

```
def analytisk(t):
    e =[(np.exp(2*i) - 1)/(np.exp(2*i) + 1) for i in t]
    return e


def euler_mid(a, b, n, x_0):
    h = 1.0*(b-a)/n
    t = [a + i*h for i in range(n+1)]
    x = [x_0*1.0]

    for i in range(n):
        dx = 1 - x[i]**2
        x_half = x[i] + (h/2)*dx
        dx = 1 - x_half**2
        x.append(x[i] + h*dx)
    return t, x



t,x = euler(0,2,5,0)
eulers, = plt.plot(t,x, label = 'Eulers metode', lw=2)
t = np.arange(0.0, 2.0, 0.01)
analytic, = plt.plot(t, analytisk(t), label = 'Analytisk', lw =2)
t,x = euler_mid(0,2,5,0)
euler_mid, = plt.plot(t,x, label = 'Euler midtpunkt', lw = 2)

plt.legend(handles = [eulers, analytic, euler_mid], loc = 'best')
plt.savefig("opgv2")
plt.show()
raw_input()
```

Plot



d)

Fra (1) har vi at $x' = 1 - x^2$, altså at $x'(t) = 1 - x^2(t)$. Hvis $0 \leq x(t^*) < 1$ har vi at $|x(t^*)| < 1 \implies x^2(t^*) < 1$. Setter vi inn i likningen får vi at $x'(t) > 0$. Siden den deriverte er positiv vil grafen, $x(t^*)$, være voksende.

Hvis $x(t^*) > 1$ eller $x(t^*) = 1$ får vi etter samme argumentasjon respektivt $x'(t^*) < 0$ og $x'(t^*) = 0$ som vil si at $x(t^*)$ respektivt minker og er konstant.

e)

Fra a) har vi at den gennerelle løsningen til difflinkningen er

$$x(t) = \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1}$$

Setter vi inn i linkning (1) får vi.

$$x'(t) = 1 - \left(\frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1}\right)^2$$

For at x skal være voksende må $\frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1} \leq 1$ for $t \geq 0$. Og siden e^{2t} alltid er positiv og større eller lik 1 for $t \geq 0$ har vi at $e^{2t} - 1 \leq e^{2t} + 1 \implies \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1} \leq 1$ for $t \geq 1$. Og vi har at $x(t)$ er voksende for alle t større eller lik 0.