

Oblig2

mat1110

Elsie Mestl

April 22, 2015

Oppgave 1:

a)

Siden hverken \vec{v}_1 eller \vec{v}_2 er $\vec{0}$ holder det å vise at det finnes en λ_i slik at:

$$A\vec{v}_1 = \lambda_i \vec{v}_1, \quad \lambda_i \in \mathbb{R} \setminus 0$$

Har at:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Gir:

$$\begin{aligned} A\vec{v}_1 &= \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 + 12 \\ 8 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 16 \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 8\vec{v}_1 \\ A\vec{v}_2 &= \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 - 18 \\ 12 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 15 \end{pmatrix} = -5 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = -5\vec{v}_2 \end{aligned}$$

Altså har vi at \vec{v}_1 og \vec{v}_2 er egenvektorer for A og at A henholdsvis har egenverdiene $\lambda_1 = 8$ og $\lambda_2 = -5$

b)

Proof. La

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}, \quad c \in \mathbb{R} \setminus 0$$

Siden vi har at $c\vec{v}$ og \vec{v} er to paralelle vektorer, hvor $c \neq 0$ Siden en egenvektor er en vektor som kan ganges med en matrise A og få ut en parallelvektor. Og siden en vektor ganget med et tall gir ut en vektor parallel med den originale kan vi dermed anse at $c\vec{v}$ til å være det samme som \vec{v} bare forskjøvet c i alle retninger. Altså har vi:

$$A(c\vec{v}) = cA\vec{v} = c\lambda\vec{v} = \lambda(c\vec{v})$$

□

c)

Antar når det står 'matrisene' fra oppgaven over menes det matrisen A.

Matlabkoden:

```
A = [4 6; 6 -1];  
[U, V] = eig(A)
```

Output:

Opgv1c

U =

```
0.5547    -0.8321  
-0.8321    -0.5547
```

V =

```
-5     0  
0      8
```

Siden vi vet at matlab gir ut egenvektorer som har lengde 1 så må vi endre vektorene vi fikk i Oppgave1a) til også å ha lengde 1 for å kunne sammenlikne.

Har at lengden de to forskjellige egenvektorene er:

$$|\vec{v}_1| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

$$|\vec{v}_2| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$$

Tar vi så å deler alle komponentene i \vec{v}_i med lengden vil vi få ut egenvektoren med lengde 1. (Siden en lengde delt på seg selv er lik 1). Da vi egenvektorverdiene:

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,83 \\ 0,55 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,55 \\ -0,83 \end{pmatrix}$$

Dette ser vi er de samme egenvektorene (søylene i U) som matlab gir, bare at de har latt \vec{v}_1 ha negative fortegn, men det betyr kun at de sier den går motsatt vei. Diagonalen i V gir egenverdien til A gikk en egenvektor, vet fra Oppgave1a) at egenverdien til A når vi bruker egenvektoren \vec{v}_1 er 8 og -5 når egenvektoren er \vec{v}_2 . Dette stemmer også overens med det matlab gir.

Legg merke til at -5 er egenverdien i søyle 1 og det samme er \vec{v}_2 .

d)

La

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Matlabkoden:

```
A = [2 -1 3 ; -1 -2 1; 3 1 -2];
[U,V] = eig(A)
```

Output:

Opgv1d

U =

```
    0.4317    0.1706   -0.8857
    0.4973   -0.8643    0.0759
   -0.7526   -0.4732   -0.4579
```

V =

```
   -4.3816         0         0
         0   -1.2551         0
         0         0    3.6367
```

Proof. For at en en mengde vektorer $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m)$ skal være en basis for \mathbb{R}^m så må matrisen med søylene $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m)$. Er matisen radekvivalent med identitetsmatrisen utgjør søylene en basis for \mathbb{R}^m

La B være matrisen som består av egenvektorene til A:

$$B = \begin{pmatrix} 0.4327 & 0.1706 & -0.8857 \\ 0.4973 & -0.8643 & 0.0759 \\ -0.7526 & -0.4732 & -0.4579 \end{pmatrix}$$

Radreduserer vi B får vi:

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} 0.4327 & 0.1706 & -0.8857 \\ 0.4973 & -0.8643 & 0.0759 \\ -0.7526 & -0.4732 & -0.4579 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1706}{4327} & \frac{-8857}{4327} \\ -0.5027 & -0.8643 & 0.0759 \\ -0.7526 & -0.4732 & -0.4579 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1706}{4327} & \frac{-8857}{4327} \\ 0 & -1.060 & 1.094 \\ 0 & -0.1765 & -1.9984 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1706}{4327} & \frac{-8857}{4327} \\ 0 & 1 & -1.032 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1706}{4327} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Og siden B kan radreduseres til identitesmatrisen vet vi at vektorene som utgjør B, altså egenvektorene til A er en basis for \mathbb{R}^3 \square

e)

La

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Matlabkoden:

```
A=[4 0 1 ; 2 3 2; -1 0 2];
[U,V] = eig(A)
rref(U)
```

Output:

Opgv1e

U =

```

      0      0.6708     -0.4802
1.0000     -0.3162     -0.7340
      0     -0.6708      0.4802
```

V =

```

      3      0      0
      0      3      0
      0      0      3
```

ans =

```

1.0000      0     -0.9604
      0     1.0000     -0.7158
      0      0      0
```

Har gjort det samme som i Oppgave1d men har lagt til en ekstra kommando som radreduserer U til redusert trappeform. Siden U er en matrise av egenvektorene til A ser vi at siden og matlab ikke klarer å radredusere denne til identitesmatrisen så vet vi at egenvektorene til A ikke danner en basis for \mathbb{R}^3

f)

La

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

```
A = [3 1 0 0 ; -1 1 0 0 ; 0 0 1 4; 0 0 1 4];  
[U, V] = eig(sym(A))  
rref(U)
```

Output:

Opgv1f

U =

```
[ 0, 0, -1]  
[ 0, 0, 1]  
[-4, 1, 0]  
[ 1, 1, 0]
```

V =

```
[ 0, 0, 0, 0]  
[ 0, 5, 0, 0]  
[ 0, 0, 2, 0]  
[ 0, 0, 0, 2]
```

ans =

```
[ 1, 0, 0]  
[ 0, 1, 0]  
[ 0, 0, 1]  
[ 0, 0, 0]
```

Har gjort det samme som over og ser at egenvektorene danner ikke en basis i \mathbb{R}^4

g)

Matlabkoden:

```
A = [3 1 0 0 ; -1 1 0 0 ; 0 0 1 4; 0 0 1 4];  
[U, V] = eig(A)  
rref(U)
```

Output:

Opgv1g

U =

0.7071	-0.7071	0	0
-0.7071	0.7071	0	0
0	0	-0.9701	-0.7071
0	0	0.2425	-0.7071

V =

2.0000	0	0	0
0	2.0000	0	0
0	0	0	0
0	0	0	5.0000

ans =

1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1

Hvis man forkorter de to første søylene på hverandre ser man at allerede de to første radene kanselerer hverandre, altså danner ikke søylene i matrisen til en basis. Men grunne til at matlab tror det er muligens fordi søyle en og søyle to ikke er identiske men har forskjellige fortegn. Altså er de etter matlabs definisjon ikke identiske, selv om de 'egentlig' er det kun motsatt rettet.

Oppgave 2:

$$f : [0, \pi] \rightarrow [0, \pi]$$
$$f(x) = a \sin x, \quad a \in [0, \pi]$$

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad x_1 \in [0, \pi]$$
$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n \geq 1$$

a)

Matlabkoden:

```
function y = opgv2a(a, x, N)
    y = a*sin(x);
    for i = 2: N
        y(i) = a*sin(y(i-1));
    end
end
```

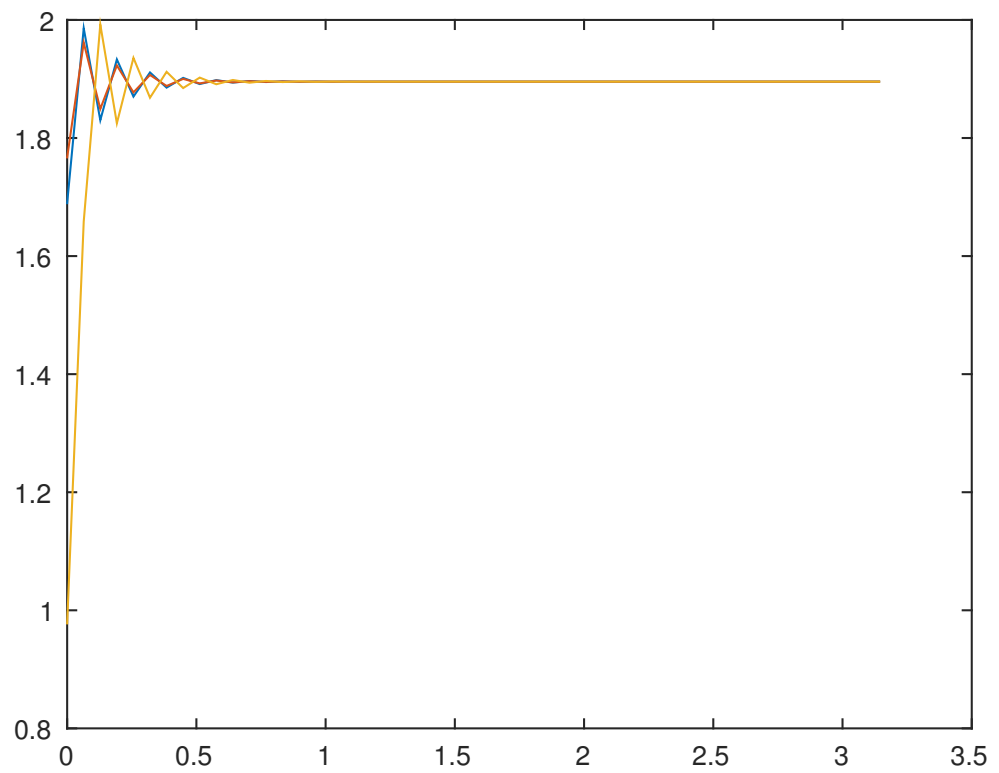
b)

Matlabkoden:

```
x = linspace (0, pi, 50);
y1 = opgv2a(2, pi*rand, 50);
y2 = opgv2a(2, pi*rand, 50);
y3 = opgv2a(2, pi*rand, 50);

plot(x, y1)
hold on
plot(x, y2)
hold on
plot(x, y3)

print -depsc opgv2bFig
```



Ser at alle tre grafene begynner med å svinge, men at de de etterhvert gjevner seg ut samme punkt, $y = 1.8955$

c)

d)

e)

f)