Oblig2
mat1120

Elsie Mestl

23. oktober 2015

Oppgave 1

i)

Har at:

$$p(t) = a_0 + a_1 t + t^2 \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}$$

Regner ut det karektaristiske polynomet til C

$$\begin{aligned} P(\lambda_C) &= \det(C) \\ &= (-\lambda)(-a_1 - \lambda) + a_0 \\ &= a_0 + \lambda a_1 + \lambda^2 \end{aligned}$$

Ser at

$$P(\lambda_C) = p(t), \quad t = \lambda$$

ii)

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_3 t^2 + t^3 \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}$$

Regner ut det karektaristiske polynomet til C

$$\begin{aligned} P(\lambda_C) &= \det(C) \\ &= -\lambda(-\lambda(-a_2 - \lambda) + a_1) - a_0(1 - (-\lambda \cdot 0)) \\ &= \lambda^2(-a_2 - \lambda) - \lambda a_1 - a_0 \\ &= -\lambda^3 - \lambda^2 a_2 - \lambda a_1 - a_0 \end{aligned}$$

Ser at

$$P(\lambda_C) = -p(t), \quad t = \lambda$$

Oppgave 2

i)

Har at

$$f'''(t) = 4f(t) + 4f'(t) - f''(t)$$

Vis at $\mathbf{x}(t) = (f(t), f'(t), f''(t))$ er en løsning.

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}'(t) &= \mathcal{C}\mathbf{x}(t) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(t) \\ f'(t) \\ f''(t) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 + f'(t) + 0 \\ 0 + 0 + f''(t) \\ 4f(t) + 4f'(t) - f''(t) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} f'(t) \\ f''(t) \\ f'''(t) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

ii)

Vis at $f(t) = x_1(t)$ er en løsning for (*) når $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ er en løsning for (**)
Finner egenverdien og egenvektorene til C. Vha matlab, og får at C har egenvektorene:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0.25 \\ -0.5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

med respektive egenverdier:

$$\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = -2 \quad \lambda_3 = -1$$

Har videre at:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= c_1\mathbf{v}_1 e^{2t} + c_2\mathbf{v}_2 e^{-2t} + c_3\mathbf{v}_3 e^{-t} \\
&= c_1 \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} 0.25 \\ -0.5 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} \\
&= \begin{bmatrix} 0.25c_1e^{2t} + 0.25c_2e^{-2t} + c_3e^{-t} \\ 0.5c_1e^{2t} - 0.5c_2e^{-2t} - c_3e^{-t} \\ c_1e^{2t} + c_2e^{-2t} + c_3e^{-t} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Siden:

$$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$$

Har vi:

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= 0.25c_1e^{2t} + 0.25c_2e^{-2t} + c_3e^{-t} \\
x_2(t) &= 0.5c_1e^{2t} - 0.5c_2e^{-2t} - c_3e^{-t} \\
x_3(t) &= c_1e^{2t} + c_2e^{-2t} + c_3e^{-t}
\end{aligned}$$

Siden

$$f(t) = x_1(t) = 0.25c_1e^{2t} + 0.25c_2e^{-2t} + c_3e^{-t}$$

Setter vi inn for $f(t)$ i (*) ser vi at:

$$\begin{aligned}
&f'''(t) + f''(t) - 4f'(t) - 4f(t) \\
&\qquad = -4(0.25c_1e^{2t} + 0.25c_2e^{-2t} + c_3e^{-t}) - 4(0.5c_1e^{2t} - 0.5c_2e^{-2t} - c_3e^{-t}) \\
&\qquad\quad + c_1e^{2t} + c_2e^{-2t} + c_3e^{-t} + 2c_1e^{2t} - 2c_2e^{-2t} - c_3e^{-t} \\
&\qquad = 0 \quad \text{ved enkel algebra}
\end{aligned}$$

Dermed har vi at $f(t) = x_1(t)$ er en løsning for (*)

iii)

Regnet ut i oppgave 2ii)
Den generelle løsningen er:

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{v}_1e^{2t} + c_2\mathbf{v}_2e^{-2t} + c_3\mathbf{v}_3e^{-t}$$

Har at

$$\mathbf{x}(0) = (1, 0, -2)$$

Setter inn verdien for $t = 0$ og $\mathbf{x}(0)$ inn i den generelle formelen og får:

$$
\begin{aligned}
1 &= 0.25c_1e^0 + 0.25c_2e^0 + c_3e^0 = 0.25c_1 + 0.25c_2 + c_3 && (1)\\
0 &= 0.5c_1e^0 - 0.5c_2e^0 - c_3e^0 = 0.5c_1 - 0.5c_2 - c_3 && (2)\\
-2 &= c_1e^0 + c_2e^0 + c_3e^0 = c_1 + c_2 + c_3 && (3)
\end{aligned}
$$

$$c_3 = 0.5(c_1 - c_2) \qquad (2)$$

$$
\begin{aligned}
1 &= 0.25(c_1 + c_2) + 0.5(c_1 - c_2) = 0.75c_1 - 0.25c_2 && (1+2)\\
-2 &= c_1 + c_2 + 0.5(c_1 - c_2) = 1.5c_1 + 0.5c_2 && (2+3)
\end{aligned}
$$

$$c_2 = -4 - 3c_1 \qquad (2+3)$$

$$1 = 0.75c_1 - 0.25(-4 - 3c_1) = 0.75c_1 + 1 + 0.75c_1 = 1.5c_1 \qquad (1+2+3)$$

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \frac{2}{3}\\
c_2 &= -6\\
c_3 &= \frac{10}{3}
\end{aligned}
$$

Altså er:

$$\mathbf{x}(t) = \frac{2}{3}\mathbf{v}_1e^{2t} - 6\mathbf{v}_2e^{-2t} + \frac{10}{3}\mathbf{v}_3e^{-t}$$

iv)

Som vist i oppgave 2ii) så er den generelle løsningen for (*):

$$f(t) = 0.25c_1e^{2t} + 0.25c_2e^{-2t} + c_3e^{-t}$$

Altså for alle reelle verdier av c_1, c_2, c_3 så er $f(t)$ løsning for (*)

$$f(0) = 1 \quad f'(0) = 0 \quad f''(0) = -2, \qquad t = 0$$

Siden vi har fra Oppgave 2i at $\mathbf{x}(t) = (f(t), f'(t), f''(t))$ er en løsning for (**) ser vi at c_1, c_2, c_3 får de samme verdiene som i oppgaven over. Altså blir

$$f(t) = \frac{1}{3}e^{2t} - \frac{3}{2}e^{-2t} + \frac{10}{3}e^{-t}$$

Oppgave 3

i)

Hvis $\mathbf{v}_\lambda$ er en egenvektor for $\mathcal{C}$ med egenverdien λ så er:

$$\mathcal{C}\mathbf{v}_\lambda = \lambda\mathbf{v}_\lambda$$

$$\mathcal{C}\mathbf{v}_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \\ -a_0 - a_1\lambda \cdots - a_{n-1}\lambda^{n-1} \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} p(\lambda) &= 0 \\ -a_0 - a_1\lambda \cdots - a_{n-1}\lambda^{n-1} &= -p(\lambda) + \lambda^n \\ &= 0 + \lambda^n \end{aligned}$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-2} \\ \lambda^{n-1} \end{bmatrix} = \lambda\mathbf{v}_\lambda$$

ii)

$$E_\lambda = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R} \,|\, \mathcal{C}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}\}$$

Siden $\mathbf{v}_\lambda$ er en egenvektor til $\mathcal{C}$ så er $\mathbf{v}_\lambda \in E_\lambda$
Anta videre at $\mathbf{x} \neq c\mathbf{v}_\lambda$, $c \in \mathbb{R}$ og $\mathbf{x} \in E_\lambda$

$$\mathcal{C}\mathbf{x} = \mathcal{C}\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ -(a_0x_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}x_{x-1}) \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix}$$

Altså har vi at:

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda x_0 \\ x_2 &= \lambda x_1 \\ &\vdots \\ \lambda x_{n-1} &= -(a_0x_0 + a_1x_1 + \cdots + a_{n-1}x_{x-1}) \end{aligned}$$

Setter vi inn x_1 i formelen for x_2 og x_2 for x_3 osv. Ser vi at:

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda x_0 \\ x_2 &= \lambda^2 x_0 \\ &\vdots \\ \lambda^n x_0 &= -(a_0x_0 + \lambda a_1x_0 + \cdots + \lambda^{n-1}a_{n-1}x_0) \implies \lambda^n = -(a_0 + \lambda a_1 + \cdots + \lambda^{n-1}a_{n-1}) \end{aligned}$$

Dette kan vi se på som følgende:

$$\mathcal{C}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \lambda x_0 \\ \lambda^2 x_0 \\ \vdots \\ \lambda^n x_0 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda x_0 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} x_0 \end{bmatrix}$$

Her har vi en selvmotsigelse siden vi antokk at $\mathbf{x} \neq c\mathbf{v}_\lambda$, $c \in \mathbb{R}$. Men det er nettopp dette vi har fått i utregningene. Altså kan ikke $\mathbf{x}$ være lineært uavhengig av $\mathbf{v}_\lambda$ og samtidig være en egenvektor for $\mathcal{C}$ med egnverdi λ

Dermed har vi at E_λ består av alle multipler av $\mathbf{v}_\lambda$ som videre betyr at $dim(E) = 1$ og at $E = \text{Span}\{\mathbf{v}_\lambda\}$.

iii)

$\mathcal{C}$ er diagonaliserbar, hvis og bare hvis:

$$\mathcal{C} = PDP^{-1}$$

Hvis p har n distinkte røtter, betyr det at $\mathcal{C}$ har n distinkte egenverdier. Det betyr at det finnes en D som består av egenverdiene. Altså finnes det en matrise P hvor kollonnene er de respektive egenvektorene. Siden det er n distinke egenverdier er egenvektorene lineært uavhengide. Altså er kollonnene i P lineærtuavhengige og P er invertibel. Og vi har at $\mathcal{C}$ er diagonaliserbar hvis p har n distikte røtter.

Hvis $\mathcal{C}$ er diagonaliserbar vet vi det finne sen diagonalmatrise D som består av alle egenverdiene til $\mathcal{C}$. I oppgave 3ii) viste vi at $dim(E_\lambda) = 1$ og dette gjelder for alle lamba. Altså for at P skal være invertibel må den bestå av n lineærtuavhengide kolonner. Altså har $\mathcal{C}$ n lineært uavhnegige egenvektorer, og dermed også egenverdir. Siden $p = p(t)$ og p har verdien til λ så er løsningen til $p(t)$ lik alle verdiene til λ altså n distinkte røtter.

$$P = [\mathbf{v}_0\, \mathbf{v}_1\, (\cdots)\, \mathbf{v}_{n-1}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_{n-1} \\ & & \ddots & \\ \lambda_0^{n-1} & \lambda_1^{n-1} & \cdots & \lambda_{n-1}^{n-a} \end{bmatrix}$$