Oblig1
mat1120

Elsie Mestl

22. september 2015

Generell antagelse for obligen er at når jeg har vist en matlabkommando, og dens respektive output en gang er det ikke nødvendig å gjøre dette senere i oppgaven. Da er det nok å si “løst via matlab” og så fortsette med oppgaven.

Oppgave 1:

Matlabkoden:

```
P = [1 0.7 0 0 0 ; 0 0 0.5 0 0
    0 0.3 0 0.65 0 ; 0 0 0.5 0 0 ; 0 0 0 0.35 1];
Pn = P;
k = [3 4 40 80];

for n = 1 : 4;
    start = [0; 0; 0; 1; 0]; %only s4 = 1, this is the
        state of intrest
    for a = 1 : k(n); %start a = 1

        Pn = P * Pn;
    end

    prob = Pn*start;

    fprintf('For n = %d\n ', a)
    disp ('P = ')
    disp (Pn)

    fprintf('get the followin matrix with start in s4 \n'
        )
    disp(prob)
    fprintf('probability to go from s4->s2 after n=%d is:
        %f \n',a, prob(2))

end
```

Gir følgende output:

```
diary on
opgv1
For n = 3
 P =
    1.0000    0.8050    0.5162    0.2275         0
         0    0.0713         0    0.1544         0
         0         0    0.2256         0         0
         0    0.0713         0    0.1544         0
         0    0.0525    0.2581    0.4637    1.0000

get the followin matrix with start in s4
    0.2275
    0.1544
         0
    0.1544
    0.4637

probability to go from s4->s2 after n=3 is: 0.154375
For n = 4
 P =
    1.0000    0.8786    0.6327    0.3869         0
         0    0.0161         0    0.0348         0
         0         0    0.0509         0         0
         0    0.0161         0    0.0348         0
         0    0.0893    0.3164    0.5434    1.0000

get the followin matrix with start in s4
    0.3869
    0.0348
         0
    0.0348
    0.5434

probability to go from s4->s2 after n=4 is: 0.034831
For n = 40
 P =
    1.0000    0.9000    0.6667    0.4333         0
         0    0.0000         0    0.0000         0
         0         0    0.0000         0         0
         0    0.0000         0    0.0000         0
         0    0.1000    0.3333    0.5667    1.0000

get the followin matrix with start in s4
    0.4333
    0.0000
         0
    0.0000
    0.5667
```

```
probability to go from s4->s2 after n=40 is: 0.000000
For n = 80
 P =
    1.0000    0.9000    0.6667    0.4333         0
         0    0.0000         0    0.0000         0
         0         0    0.0000         0         0
         0    0.0000         0    0.0000         0
         0    0.1000    0.3333    0.5667    1.0000

get the followin matrix with start in s4
    0.4333
    0.0000
         0
    0.0000
    0.5667

probability to go from s4->s2 after n=80 is: 0.000000
diary off
```

Der hvor det i matlab-outputen viser P = "matrise" tilsvarer det P^n, n gitt linjen før. Vektroen som vises under tilsvarer sansylighetsfordelingen etter n kjøringer. Så sansynligheten for å gå fra s_4 til s_2 er posisjon 2 i vektoren og presisert i teksten under.

Oppgave 2:

En matriser er A regulær hvis alle elementene i A^n for alle n, er strengt større enn 0.
Har

$$P - I = \begin{bmatrix} 0 & 0.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & -1 & 0.65 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.35 & 0 \end{bmatrix}$$

For å finne $Nul(P - I_5)$ løser vi likingssettet:

$$(P - I_5)\vec{x} = \vec{0}$$

Som gir den utvidede matrisen:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & -1 & 0.65 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.35 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Radreduserer denne, via matlab, og får:

```
P = [0  0.7  0  0  0  0;  0  -1  0.5  0  0  0
      0  0.3  -1  0.65  0  0;  0  0  0.5  -1  0  0;  0  0  0  0.35  0  0];

disp('P-I  =')
disp(ref(P))
```

```
diary on
opgv2
P-I  =
        0        1        0        0        0        0
        0        0        1        0        0        0
        0        0        0        1        0        0
        0        0        0        0        0        0
        0        0        0        0        0        0

diary off
```

Tar hensyn til de fri variablene og får følgende likningssytemer:

$$x_2 = 0$$
$$x_3 = 0$$
$$x_4 = 0$$

Som kan skrives som:

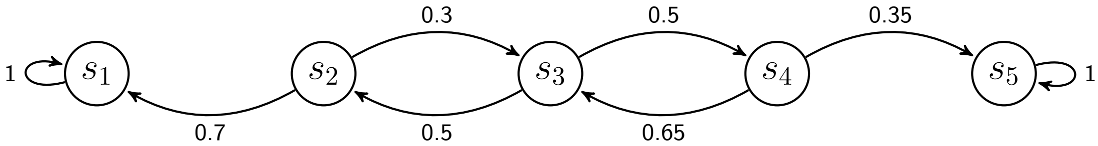
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x_1 \vec{u} + x_5 \vec{v}$$

Hvor x_1 og x_5 er fri variabler. Ser dermed at $\vec{u}$ og $\vec{v}$ spenner $Nul(P - I)$. De er også lineært uavhengige og dermed danner de også en basis for $Nul(P - I)$.

Siden summen av alle elementene i $\vec{u}$ og $\vec{v}$ summeres til 1 så er dette likevektsvektorer for matrisen P. Men siden $\vec{u}$ og $\vec{v}$ ikke er lineært uavhengige er finnes det heller ikke en unik (men to) likevektsvektorer, og P er dermed ikke en regulær matrise.

Ja, ser at P^n ikke bare inneholder strengt positive, men også, null elementer, og kan dermed ikke være regulær.

Oppgave 3:



a)

Har at klassene som utgjør S er:

$$K_1 = \{s_1\}$$
$$K_2 = \{s_2, s_3, s_4\}$$
$$K_3 = \{s_5\}$$

Ser at både K_1 og K_3 er lukkede klasser, for de leder ingen noder som er utenfor sin egen klasse. Mens K_2 er en ikke lukket klasse pga $s_2 \rightsquigarrow s_1$ og $s_4 \rightsquigarrow s_5$

Siden K_1 og K_3 er lukkede og inneholder kun et element vil ethvert "signal" som kommer inn i disse klassene aldri komme ut. Ser dermed at s_1 og s_5 er absorberende.

b)

Velger å se veldig generelt på denne oppgaven.

La P være en regulær $n \times n$ matrise. Har at P^k er strengt støre enn 0 for alle $k \in \mathbb{N}$. Elementene i P, p_{ij}, utgjør i hvilken grad tilstadene $s_j \rightsquigarrow s_i$ og siden $p_{ij} \neq 0$ for alle i, j har vi at tilstandene leder hverandre. Kan dermed si at alle elementene kommuniserer med hverandre. Og ugjør dermed en klasse.

Oppgave 4:

Gjør samme regneoperasjon som i Oppgave 1. Men hvor startvektoren vår sitendenfor er: $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Som tilsvarer hendoldsvis $\vec{x_2}$ og $\vec{x_3}$

$x_2^{K_1}$ tilsvarer da det 1. elementet fra vektoren som matrise-vektor multiplikasjonen utgjør: $P^n \cdot \vec{x_2}$

$x_2^{K_3}$ utgjør det 5 elementet i den samme vektoren.

Det tilsvarende stemmer også for $x_3^{K_1}$ og $x_3^{K_3}$ men hvor starttilstanden istedenfor er $\vec{x_3}$

Får:

$$P^{100} \cdot \vec{x_2} = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \quad P^{100} \cdot \vec{x_3} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Altså er:

$$x_2^{K_1} = 0.9 \qquad\qquad x_3^{K_1} = \frac{2}{3}$$

$$x_2^{K_3} = 0.1 \qquad\qquad x_3^{K_3} = \frac{1}{3}$$

Oppgave 5:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & p_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & p_4 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_4 & 1 \end{bmatrix}$$

a)

Tilstanden s_1 tilsvarer kolonne 1 i P. Og ser at det kun er det første elementet som har en verdi, verdien 1. Altså vil alt som kommer inn i s_1 loope tilbake til seg selv. Tilstanden kommuniserer heller ikke med noen andre tilstander så $\{s_1\}$ utgjør en lukket klasse, og s_1 er dermed absorberende.

Det samme ser vi for tilstand s_5, kommuniserer bare med seg selv. Og leder ingen andre tilstander. Altså er også s_5 absorberende.

b)

$x_1 = 1$ fordi s_1 er absorberende og x_1 er et element i s_1
$x_5 = 0$ fordi s_5 er absorberende og x_5 er et element i denne tilstande. Kan dermed ikke "unslippe" og gå over til en annen tilstand.

Har gitt at:

$$x_j^K = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} x_i^K$$

Skriver vi ut likningssettet for n = 1 til n = 5 vha likningen og det beskrevet over får vi:

$$\begin{aligned}
&x_1^2 = 1 \\
&x_2^2 = p_{12}x_1^2 + p_{22}x_2^2 + p_{32}x_3^2 + p_{42}x_4^2 + p_{52}x_5^2 \\
&x_3^2 = p_{13}x_1^2 + p_{23}x_2^2 + p_{33}x_3^2 + p_{43}x_4^2 + p_{53}x_5^2 \\
&x_4^2 = p_{14}x_1^2 + p_{24}x_2^2 + p_{34}x_3^2 + p_{44}x_4^2 + p_{54}x_5^2 \\
&x_5^2 = 0
\end{aligned}$$

Som vi leser ut av matrisen P og ser at blir:

$$
\begin{aligned}
x_1^2 &= 1 \\
x_2^2 &= p_2 + q_2 x_3^2 \\
x_3^2 &= p_3 x_2^2 + q_3 x_4^2 \\
x_4^2 &= p_4 x_3^2 \\
x_5^2 &= 0
\end{aligned}
$$

Flytter vi $x$ene over på en side får vi likningene:

$$
\begin{aligned}
x_2^2 - q_2 x_3^2 &= p_2 \\
x_3^2 - p_3 x_2^2 - q_3 x_4^2 &= 0 \\
x_4^2 - p_4 x_3^2 &= 0
\end{aligned}
$$

Setter inn i en matrise får vi følgende:

$$
\begin{bmatrix}
1 & -q_2 & 0 & p_2 \\
-p_3 & 1 & -q_3 & 0 \\
0 & -p_4 & 1 & 0
\end{bmatrix}
$$

Ser at dette er matrise A, og har at for $\vec{y} = (x_2, x_3, x_4)$ vil svaret $\vec{b}$ tilsvare høyre kolonne, altså $(p_2, 0, 0)$

c

En matrise er definert som øvre trianguler dersom alle elementene under diagonalen er 0.
Utfører operasjonene som ville blitt brukt for å lage pivot søyler av de to første søylene i A, altså:

Legger til p_3RadI til RadII. Da er de to elementene under diagonalen i kolonne en 0.
Legger til p_4RadII til RadIII. Det fjerner det tredje elementet som ligger i kolonne 2.
Altså er A radredusert til en øvre diagonal matrise.