Oblig 11
inf1080

Elsie Mestl

November 3, 2015

Oppgave 19.5:

La

$$\mathcal{M} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

a)

Antall delmengder av $\mathcal{M}$ er (inkl den tomme mengden):

$$\begin{aligned}
&5 + 5 \cdot 4 + 5 \cdot 4 \cdot 3 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 + 5! + 1 && \text{uordet} \\
&\frac{5}{1} + \frac{5 \cdot 4}{2!} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4!} + \frac{5!}{5!} + 1 && \text{ordnet} \\
&= 5 + 5 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 5 + 1 + 1 = 32 && \text{antall delmengder av } \mathcal{M}
\end{aligned}$$

Må nå se på hvor mange av disse mengdene som inneholder enten 1 og/eller 2, gjør dette ved å trekke fra antaller mengder som kan bli laget av $\{3, 4, 5\}$. Dette inkl den tomme mengden.
Ant delmengder av $\{3, 4, 5\}$:

$$3 + \frac{3 \cdot 2}{2!} + \frac{3!}{3!} + 1 = 3 + 3 + 1 + 1 = 8$$

Altså er antall delmengder av $\mathcal{M}$ som inneholder 1 og/eller 2 lik totale antall delmengder av $\mathcal{M}$ minus delmengder av $\{3, 4, 5\}$

$$32 - 8 = 26$$

b)

En funksjon er definert ved at alle elementene i defenisjonsmengden må treffe et og bare et element i verdimengden.

Siden verdimengden ikke trenger å være den minste mengden, kan værdimengden være antallet delmengder av $\mathcal{M}$ minus den tomme mengden. Når det kommer til antall måter å fremstille en funksjon på fra $\mathcal{M}$ til en elmengde av $\mathcal{M}$ ser vi at rekkefølgen spiller en rolle. Ser altså at antall funksjoner $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ tilsvarer et uordent antall av delmengder av $\mathcal{M}$ altså: 325 antall funksjoner

En bijektiv funksjon er når hele verdiområdet blir dekket av f. Ser vi på formelen over for en antall uordnede kombinasjoner. Så er vi kun interessert i det nest siste leddet i formelen (siste er $\emptyset$) for dette er når alle elementene i verdimengden, altså helle $\mathcal{M}$, blir truffet. Det tilsvarer: $5! = 120$ forskjellige funksjoner.

Oppgave 20.10:

For at $\langle G, \bullet \rangle$ skal være en gruppe må:

1. $\bullet$ er assosiativt
2. Det finnes et identitetselement for $\bullet$
3. Alle elemter har en invers

a)

La $\bullet = +$ og $G = \mathbb{Z}$

Har at oppersajonen $+$ er assosiativ og har en identitetselement, 0.
La $x \in G$ da er $x + x^{-1} = 0$. S ser at det inverse elementet til x er $-x$ men for utenom 0 har finnes ikke $-x$ i de naturlige tallene. Altså er $\langle G, \bullet \rangle$ ikke en gruppe.

b)

La $\bullet = +$ og $G = \mathbb{N}$

Har at oppersajonen $+$ er assosiativ og har en identitetselement, 0.
La $x \in G$ da er $x + x^{-1} = 0$. S ser at det inverse elementet til x er $-x$ altså er $\langle G, \bullet \rangle$ en gruppe. Siden $+$ er komutativt så er gruppen en abels gruppe.

c)

La $\bullet = \cdot$ og $G = \mathbb{Z}$

Har at oppersajonen $\cdot$ er assosiativ og har en identitetselement, 1. La $x \in G$ da er $x \cdot x^{-1} = 1$. S ser at det inverse elementet til x er $\frac{1}{x}$ men det inverset ellementet finnes kun for $x = 1$ altså er $\langle G, \bullet \rangle$ ikke en gruppe.

d)

La $\bullet = +$ og $G = \mathbb{R}$

Har at oppersajonen $+$ er assosiativ og har en identitetselement, 0.

La $x \in G$ da er $x + x^{-1} = 0$. S ser at det inverse elementet til x er $-x$ altså er $\langle G, \bullet \rangle$ en gruppe. Siden $+$ er komutativt så er gruppen en abels gruppe.

e)

La $\bullet = \cdot$ og $G = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Har at oppersajonen $\cdot$ er assosiativ og har en identitetselement, 1. La $x \in G$ da er $x \cdot x^{-1} = 1$. S ser at det inverse elementet til x er $\frac{1}{x}$ men det inverset ellementet finnes for alle $x \in G$ altså er $\langle G, \bullet \rangle$ en gruppe.

f)

La $\bullet = /$ og $G = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Har at oppersajonen $/$ er assosiativ men har ikke et identitetselement. Altså er $\langle G, \bullet \rangle$ ikke en gruppe