Oblig2
mat1120

Elsie Mestl

23. oktober 2015

Oppgave 1

i)

Har at:

$$p(t) = a_0 + a_1 t + t^2 \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}$$

Regner ut det karektaristiske polynomet til C

$$\begin{aligned} P(\lambda_C) &= \det(C) \\ &= (-\lambda)(-a_1 - \lambda) + a_0 \\ &= a_0 + \lambda a_1 + \lambda^2 \end{aligned}$$

Ser at

$$P(\lambda_C) = p(t), \quad t = \lambda$$

ii)

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_3 t^2 + t^3 \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}$$

Regner ut det karektaristiske polynomet til C

$$\begin{aligned} P(\lambda_C) &= \det(C) \\ &= -\lambda(-\lambda(-a_2 - \lambda) + a_1) - a_0(1 - (-\lambda \cdot 0)) \\ &= \lambda^2(-a_2 - \lambda) - \lambda a_1 - a_0 \\ &= -\lambda^3 - \lambda^2 a_2 - \lambda a_1 - a_0 \end{aligned}$$

Ser at

$$P(\lambda_C) = -p(t), \quad t = \lambda$$

Oppgave 2

i)

Har at

$$f'''(t) = 4f(t) + 4f'(t) - f''(t)$$

Vis at $\mathbf{x}(t) = (f(t), f'(t), f''(t))$ er en løsning.

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}'(t) &= \mathcal{C}\mathbf{x}(t) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(t) \\ f'(t) \\ f''(t) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 + f'(t) + 0 \\ 0 + 0 + f''(t) \\ 4f(t) + 4f'(t) - f''(t) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} f'(t) \\ f''(t) \\ f'''(t) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

ii)

Vis at $f(t) = x_1(t)$ er en løsning for (*) når $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ er en løsning for (**)
Finner egenverdien og egenvektorene til C. Vha matlab, og får at C har egenvektorene:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0.25 \\ -0.5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

med respektive egenverdier:

$$\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = -2 \quad \lambda_3 = -1$$

Har videre at:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= c_1\mathbf{v}_1 e^{2t} + c_2\mathbf{v}_2 e^{-2t} + c_3\mathbf{v}_3 e^{-t} \\
&= c_1 \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} 0.25 \\ -0.5 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} \\
&= \begin{bmatrix} 0.25c_1e^{2t} + 0.25c_2e^{-2t} + c_3e^{-t} \\ 0.5c_1e^{2t} - 0.5c_2e^{-2t} - c_3e^{-t} \\ c_1e^{2t} + c_2e^{-2t} + c_3e^{-t} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Siden:

$$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$$

Har vi:

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= 0.25c_1e^{2t} + 0.25c_2e^{-2t} + c_3e^{-t} \\
x_2(t) &= 0.5c_1e^{2t} - 0.5c_2e^{-2t} - c_3e^{-t} \\
x_3(t) &= c_1e^{2t} + c_2e^{-2t} + c_3e^{-t}
\end{aligned}$$

Siden

$$f(t) = x_1(t) = 0.25c_1e^{2t} + 0.25c_2e^{-2t} + c_3e^{-t}$$

Setter vi inn for $f(t)$ i (*) ser vi at:

$$\begin{aligned}
&f'''(t) + f''(t) - 4f'(t) - 4f(t) \\
&\qquad = -4(0.25c_1e^{2t} + 0.25c_2e^{-2t} + c_3e^{-t}) - 4(0.5c_1e^{2t} - 0.5c_2e^{-2t} - c_3e^{-t}) \\
&\qquad\quad + c_1e^{2t} + c_2e^{-2t} + c_3e^{-t} + 2c_1e^{2t} - 2c_2e^{-2t} - c_3e^{-t} \\
&\qquad = 0 \quad \text{ved enkel algebra}
\end{aligned}$$

Dermed har vi at $f(t) = x_1(t)$ er en løsning for (*)

iii)

Regnet ut i oppgave 2ii)
Den generelle løsningen er:

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{v}_1e^{2t} + c_2\mathbf{v}_2e^{-2t} + c_3\mathbf{v}_3e^{-t}$$

Har at

$$\mathbf{x}(0) = (1, 0, -2)$$

Setter inn verdien for $t = 0$ og $\mathbf{x}(0)$ inn i den generelle formelen og får:

$$1 = 0.25c_1e^0 + 0.25c_2e^0 + c_3e^0 = 0.25c_1 + 0.25c_2 + c_3 \tag{1}$$
$$0 = 0.5c_1e^0 - 0.5c_2e^0 - c_3e^0 = 0.5c_1 - 0.5c_2 - c_3 \tag{2}$$
$$-2 = c_1e^0 + c_2e^0 + c_3e^0 = c_1 + c_2 + c_3 \tag{3}$$

$$c_3 = 0.5(c_1 - c_2) \tag{2}$$

$$1 = 0.25(c_1 + c_2) + 0.5(c_1 - c_2) = 0.75c_1 - 0.25c_2 \tag{1+2}$$
$$-2 = c_1 + c_2 + 0.5(c_1 - c_2) = 1.5c_1 + 0.5c_2 \tag{2+3}$$

$$c_2 = -4 - 3c_1 \tag{2+3}$$

$$1 = 0.75c_1 - 0.25(-4 - 3c_1) = 0.75c_1 + 1 + 0.75c_1 = 1.5c_1 \tag{1+2+3}$$

$$c_1 = \frac{2}{3}$$
$$c_2 = -6$$
$$c_3 = \frac{10}{3}$$

Altså er:

$$\mathbf{x}(t) = \frac{2}{3}\mathbf{v}_1e^{2t} - 6\mathbf{v}_2e^{-2t} + \frac{10}{3}\mathbf{v}_3e^{-t}$$

iv)

Som vist i oppgave 2ii) så er den generelle løsningen for (*):

$$f(t) = 0.25c_1e^{2t} + 0.25c_2e^{-2t} + c_3e^{-t}$$

Altså for alle reelle verdier av c_1, c_2, c_3 så er $f(t)$ løsning for (*)

$$f(0) = 1 \quad f'(0) = 0 \quad f''(0) = -2, \qquad t = 0$$

Siden vi har fra Oppgave 2i at $\mathbf{x}(t) = (f(t), f'(t), f''(t))$ er en løsning for (**) ser vi at c_1, c_2, c_3 får de samme verdiene som i oppgaven over. Altså blir

$$f(t) = \frac{1}{3}e^{2t} - \frac{3}{2}e^{-2t} + \frac{10}{3}e^{-t}$$

Oppgave 3

i)

Hvis $\mathbf{v}_\lambda$ er en egenvektor for $\mathcal{C}$ med egenverdien λ så er:

$$\mathcal{C}\mathbf{v}_\lambda = \lambda\mathbf{v}_\lambda$$

$$\begin{aligned}\mathcal{C}\mathbf{v}_\lambda &= \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \\ -a_0 - a_1\lambda \cdots - a_{n-1}\lambda^{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-2} \\ \lambda^{n-1} \end{bmatrix} = \lambda\mathbf{v}_\lambda\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= 0 \\ -a_0 - a_1\lambda \cdots - a_{n-1}\lambda^{n-1} &= -p(\lambda) + \lambda^n \\ &= 0 + \lambda^n \end{aligned}$$

ii)

$$E_\lambda = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R} \,|\, \mathcal{C}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}\}$$

Siden $\mathbf{v}_\lambda$ er en egenvektor til $\mathcal{C}$ så er $\mathbf{v}_\lambda \in E_\lambda$
Anta videre at $\mathbf{x} \neq c\mathbf{v}_\lambda$, $c \in \mathbb{R}$ og $\mathbf{x} \in E_\lambda$

$$\mathcal{C}\mathbf{x} = \mathcal{C}\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ -(a_0x_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}x_{x-1}) \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix}$$

Altså har vi at:

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda x_0 \\ x_2 &= \lambda x_1 \\ &\vdots \\ \lambda x_{n-1} &= -(a_0x_0 + a_1x_1 + \cdots + a_{n-1}x_{x-1}) \end{aligned}$$

Setter vi inn x_1 i formelen for x_2 og x_2 for x_3 osv. Ser vi at:

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda x_0 \\ x_2 &= \lambda^2 x_0 \\ &\vdots \\ \lambda^n x_0 &= -(a_0x_0 + \lambda a_1x_0 + \cdots + \lambda^{n-1}a_{n-1}x_0) \implies \lambda^n = -(a_0 + \lambda a_1 + \cdots + \lambda^{n-1}a_{n-1}) \end{aligned}$$

Dette kan vi se på som følgende:

$$\mathcal{C}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \lambda x_0 \\ \lambda^2 x_0 \\ \vdots \\ \lambda^n x_0 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda x_0 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} x_0 \end{bmatrix}$$

Her har vi en selvmotsigelse siden vi antokk at $\mathbf{x} \neq c\mathbf{v}_\lambda$, $c \in \mathbb{R}$. Men det er nettopp dette vi har fått i utregningene. Altså kan ikke $\mathbf{x}$ være lineært uavhengig av $\mathbf{v}_\lambda$ og samtidig være en egenvektor for $\mathcal{C}$ med egnverdi λ

Dermed har vi at E_λ består av alle multipler av $\mathbf{v}_\lambda$ som videre betyr at $dim(E) = 1$ og at $E = \text{Span}\{\mathbf{v}_\lambda\}$.

iii)

$\mathcal{C}$ er diagonaliserbar, hvis og bare hvis:

$$\mathcal{C} = PDP^{-1}$$

Hvis p har n distinkte røtter, betyr det at $\mathcal{C}$ har n distinkte egenverdier. Det betyr at det finnes en D som består av egenverdiene. Altså finnes det en matrise P hvor kollonnene er de respektive egenvektorene. Siden det er n distinke egenverdier er egenvektorene lineært uavhengide. Altså er kollonnene i P lineærtuavhengige og P er invertibel. Og vi har at $\mathcal{C}$ er diagonaliserbar hvis p har n distikte røtter.

Hvis $\mathcal{C}$ er diagonaliserbar vet vi det finne sen diagonalmatrise D som består av alle egenverdiene til $\mathcal{C}$. I oppgave 3ii) viste vi at $dim(E_\lambda) = 1$ og dette gjelder for alle lamba. Altså for at P skal være invertibel må den bestå av n lineærtuavhengide kolonner. Altså har $\mathcal{C}$ n lineært uavhnegige egenvektorer, og dermed også egenverdir. Siden $p = p(t)$ og p har verdien til λ så er løsningen til $p(t)$ lik alle verdiene til λ altså n distinkte røtter.

$$P = [\mathbf{v}_0\, \mathbf{v}_1\, (\cdots)\, \mathbf{v}_{n-1}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_{n-1} \\ & & \ddots & \\ \lambda_0^{n-1} & \lambda_1^{n-1} & \cdots & \lambda_{n-1}^{n-a} \end{bmatrix}$$

Oppgave 4

i)

```
function rot = stdrot(p)
    numtimes = 3000;
    tol = 0.5 * 10^(-6);
    x = ones(max(size(p))-1); %start columarray
    x = x(:, 1);
    rot = 0; %to stop matlab for complaining

    C = zeros(max(size(p))- 1, max(size(p)) - 1);

    %going form polynom to matrix
    for n = 1: max(size(p))-1
        if n == max(size(p))-1
            for m = 2: max(size(p))
                C(n, max(size(p))-(m) +1) = - p(m);
            end
        else
            C(n, n+1) = 1;
        end
    end


    %using the code given but changing the output
    for n = 1: numtimes
        x = C*x;
        rot = max(abs(x));
        x = (1/rot)*x;
        error = max(abs(C*x-rot*x));

        if error < tol
            break;
        end
    end

    if error > tol
        disp('there is no dominant root in p')
    end
end
```

ii)

```
diary on
p1

p1 =

     1    -1    -3    -1     2     1

p2

p2 =

     1    -2     4    -6

stdrot(p1)

ans =

    2.2954

roots(p1)

ans =

   2.2954 + 0.0000i
   0.8593 + 0.0000i
  -0.8172 + 0.5539i
  -0.8172 - 0.5539i
  -0.5202 + 0.0000i

stdrot(p2)
there is no dominant root in p

ans =

    1.0000

roots(p2)

ans =

   0.1443 + 1.8669i
   0.1443 - 1.8669i
   1.7113 + 0.0000i

diary off
```

Kommentarer:
Ser at programmet finner den dominante roten for p1, (største av de røttene root(p1) gir ut). Men finner ikke for p2. Dette er fordi selv om det ved første øyenkast kanskje ser slik ut, så har ikke p2 en reell rot, absolutt verdien til de to komplekse er noe, men svært lite større.