Oblig1
mat1120

Elsie Mestl

22. september 2015

Generell antagelse for obligen er at når jeg har vist en matlabkommando, og dens respektive output en gang er det ikke nødvendig å gjøre dette senere i oppgaven. Da er det nok å si "løst via matlab" og så fortsette med oppgaven.

Oppgave 1:

Matlabkoden:

```
P = [1  0.7  0  0  0  ;  0  0  0.5  0  0
     0  0.3  0  0.65  0  ;  0  0  0.5  0  0  ;  0  0  0  0.35  1];
k = [2  3  4  40  80];

for  n = 1  :  5;
     Pn = P;
     start  = [0;  0;  0;  1;  0]; %only  s4 = 1,  this  is  the
         state  of  intrest
     for  a = 2  :  k(n); %start  a = 1

          Pn = P * Pn;
     end

     prob  = Pn*start;

     fprintf('For  n = %d\n  ',  a)
     disp  ('P = ')
     disp  (Pn)

     fprintf('get  the  followin  matrix  with  start  in  s4  \n'
         )
     disp(prob)
     fprintf('probability  to  go  from  s4->s2  after  n=%d  is:
          %f  \n\n\n',a,  prob(2))

end
```

Gir følgende output:

```
diary  on
opgv1
For  n = 2
 P =
     1.0000      0.7000      0.3500           0           0
          0      0.1500           0      0.3250           0
          0           0      0.4750           0           0
          0      0.1500           0      0.3250           0
          0           0      0.1750      0.3500      1.0000

get  the  followin  matrix  with  start  in  s4
          0
     0.3250
          0
     0.3250
     0.3500

probability  to  go  from  s4->s2  after  n=2  is:  0.325000
```

```
For n = 3
 P =
    1.0000    0.8050    0.3500    0.2275         0
         0         0    0.2375         0         0
         0    0.1425         0    0.3088         0
         0         0    0.2375         0         0
         0    0.0525    0.1750    0.4637    1.0000

get the followin matrix with start in s4
    0.2275
         0
    0.3088
         0
    0.4637

probability to go from s4->s2 after n=3 is: 0.000000


For n = 4
 P =
    1.0000    0.8050    0.5162    0.2275         0
         0    0.0713         0    0.1544         0
         0         0    0.2256         0         0
         0    0.0713         0    0.1544         0
         0    0.0525    0.2581    0.4637    1.0000

get the followin matrix with start in s4
    0.2275
    0.1544
         0
    0.1544
    0.4637

probability to go from s4->s2 after n=4 is: 0.154375


For n = 40
 P =
    1.0000    0.9000    0.6667    0.4333         0
         0    0.0000         0    0.0000         0
         0         0    0.0000         0         0
         0    0.0000         0    0.0000         0
         0    0.1000    0.3333    0.5667    1.0000

get the followin matrix with start in s4
    0.4333
    0.0000
         0
    0.0000
```

```
    0.5667

probability to go from s4->s2 after n=40 is: 0.000000


For n = 80
 P =
    1.0000    0.9000    0.6667    0.4333         0
         0    0.0000         0    0.0000         0
         0         0    0.0000         0         0
         0    0.0000         0    0.0000         0
         0    0.1000    0.3333    0.5667    1.0000

get the followin matrix with start in s4
    0.4333
    0.0000
         0
    0.0000
    0.5667

probability to go from s4->s2 after n=80 is: 0.000000


diary off
```

Der hvor det i matlab-outputen viser P = "matrise" tilsvarer det P^n, n gitt linjen før. Vektroen som vises under tilsvarer sansylighetsfordelingen etter n kjøringer. Så sansynligheten for å gå fra s_4 til s_2 er posisjon 2 i vektoren og presisert i teksten under.

Oppgave 2:

En matriser er A regulær hvis alle elementene i A^n for alle n, er strengt større enn 0.
Har

$$P - I = \begin{bmatrix} 0 & 0.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & -1 & 0.65 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.35 & 0 \end{bmatrix}$$

For å finne $Nul(P - I_5)$ løser vi likingssettet:

$$(P - I_5)\vec{x} = \vec{0}$$

Som gir den utvidede matrisen:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & -1 & 0.65 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.35 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Radreduserer denne, via matlab, og får:

```
P = [0  0.7  0  0  0  0;  0  -1  0.5  0  0  0
     0  0.3  -1  0.65  0  0;  0  0  0.5  -1  0  0;  0  0  0  0.35  0  0];

disp('P-I  =')
disp(ref(P))
```

```
diary on
opgv2
P-I  =
       0         1         0         0         0         0
       0         0         1         0         0         0
       0         0         0         1         0         0
       0         0         0         0         0         0
       0         0         0         0         0         0

diary off
```

Tar hensyn til de fri variablene og får følgende likningssytemer:

$$x_2 = 0$$
$$x_3 = 0$$
$$x_4 = 0$$

Som kan skrives som:

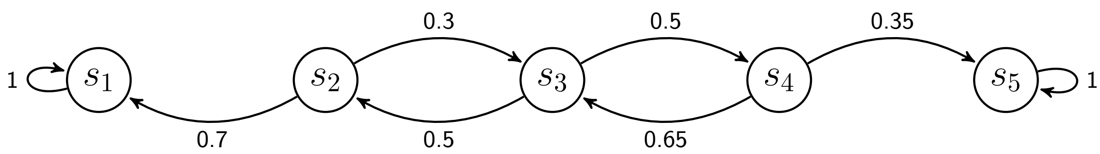
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x_1\vec{u} + x_5\vec{v}$$

Hvor x_1 og x_5 er fri variabler. Ser dermed at $\vec{u}$ og $\vec{v}$ spenner $Nul(P - I)$. De er også lineært uavhengige og dermed danner de også en basis for $Nul(P - I)$.

Siden summen av alle elementene i $\vec{u}$ og $\vec{v}$ summeres til 1 så er dette likevektsvektorer for matrisen P. Men siden $\vec{u}$ og $\vec{v}$ ikke er lineært uavhengige er finnes det heller ikke en unik (men to) likevektsvektorer, og P er dermed ikke en regulær matrise.

Ja, ser at P^n ikke bare inneholder strengt positive, men også, null elementer, og kan dermed ikke være regulær.

Oppgave 3:



a)

Har at klassene som utgjør S er:

$$K_1 = \{s_1\}$$
$$K_2 = \{s_2, s_3, s_4\}$$
$$K_3 = \{s_5\}$$

Ser at både K_1 og K_3 er lukkede klasser, for de leder ingen noder som er utenfor sin egen klasse. Mens K_2 er en ikke lukket klasse pga $s_2 \rightsquigarrow s_1$ og $s_4 \rightsquigarrow s_5$
Siden K_1 og K_3 er lukkede og inneholder kun et element vil ethvert "signal" som kommer inn i disse klassene aldri komme ut. Ser dermed at s_1 og s_5 er absorberende.

b)

Velger å se veldig generelt på denne oppgaven.
La P være en regulær $n \times n$ matrise. Har at P^k er strengt støre enn 0 for alle $k \in \mathbb{N}$. Elementene i P, p_{ij}, utgjør i hvilken grad tilstadene $s_j \rightsquigarrow s_i$ og siden $p_{ij} \neq 0$ for alle i, j har vi at tilstandene leder hverandre. Kan dermed si at alle elementene kommuniserer med hverandre. Og ugjør dermed en klasse.

Oppgave 4:

Gjør samme regneoperasjon som i Oppgave 1. Men hvor startvektoren vår istedenfor er:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{og} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

som tilsvarer hendoldsvis $\vec{x_2}$ og $\vec{x_3}$
$x_2^{K_1}$ tilsvarer da det 1. elementet fra vektoren som matrise-vektor multiplikasjonen utgjør: $P^n \cdot \vec{x_2}$
$x_2^{K_3}$ utgjør det 5 elementet i den samme vektoren.

Det tilsvarende stemmer også for $x_3^{K_1}$ og $x_3^{K_3}$ men hvor starttilstanden istedenfor er $\vec{x_3}$

Får:

$$P^{100} \cdot \vec{x_2} = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \quad P^{100} \cdot \vec{x_3} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Altså er:

$$x_2^{K_1} = 0.9 \qquad x_3^{K_1} = \frac{2}{3}$$

$$x_2^{K_3} = 0.1 \qquad x_3^{K_3} = \frac{1}{3}$$

Oppgave 5:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & p_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & p_4 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_4 & 1 \end{bmatrix}$$

a)

Tilstanden s_1 tilsvarer kolonne 1 i P. Og ser at det kun er det første elementet som har en verdi, verdien 1. Altså vil alt som kommer inn i s_1 loope tilbake til seg selv. Tilstanden kommuniserer heller ikke med noen andre tilstander så $\{s_1\}$ utgjør en lukket klasse, og s_1 er dermed absorberende.

Det samme ser vi for tilstand s_5, kommuniserer bare med seg selv. Og leder ingen andre tilstander. Altså er også s_5 absorberende.

b)

$x_1 = 1$ eller $x_1 = 0$ fordi s_1 er absorberende og x_1 er et element i s_1
$x_5 = 0$ eller $x_5 = 1$ fordi s_5 er absorberende og x_5 er et element i denne tilstande. Kan dermed ikke "unslippe" og gå over til en annen tilstand.

Har gitt at:

$$x_j^K = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} x_i^K$$

Skriver vi ut likningssettet for n = 1 til n = 5 vha likningen og det beskrevet over får vi:

$$
\begin{aligned}
x_1^1 &= 1 \\
x_2^1 &= p_{12}x_1^1 + p_{22}x_2^1 + p_{32}x_3^1 + p_{42}x_4^1 + p_{52}x_5^1 \\
x_3^1 &= p_{13}x_1^1 + p_{23}x_2^1 + p_{33}x_3^1 + p_{43}x_4^1 + p_{53}x_5^1 \\
x_4^1 &= p_{14}x_1^1 + p_{24}x_2^1 + p_{34}x_3^1 + p_{44}x_4^1 + p_{54}x_5^1 \\
x_5^1 &= 0
\end{aligned}
$$

og

$$
\begin{aligned}
x_1^3 &= 0 \\
x_2^3 &= p_{12}x_1^3 + p_{22}x_2^3 + p_{32}x_3^3 + p_{42}x_4^3 + p_{52}x_5^3 \\
x_3^3 &= p_{13}x_1^3 + p_{23}x_2^3 + p_{33}x_3^3 + p_{43}x_4^3 + p_{53}x_5^3 \\
x_4^3 &= p_{14}x_1^3 + p_{24}x_2^3 + p_{34}x_3^3 + p_{44}x_4^3 + p_{54}x_5^3 \\
x_5^3 &= 1
\end{aligned}
$$

Som vi leser ut av matrisen P og ser at blir:

$$
\begin{aligned}
x_2^K &= p_2 + q_2x_3^K \\
x_3^K &= p_3x_2^K + q_3x_4^K \\
x_4^K &= p_4x_3^K + q_4x_5
\end{aligned}
$$

Flytter vi $x$ene over på en side får vi likningene:
For K_1

$$
\begin{aligned}
x_2^1 - q_2x_3^1 &= p_2 \\
x_3^1 - p_3x_2^1 - q_3x_4^1 &= 0 \\
x_4^1 - p_4x_3^1 &= 0
\end{aligned}
$$

For K_3

$$
\begin{aligned}
x_2^3 - q_2x_3^1 &= 0 \\
x_3^3 - p_3x_2^1 - q_3x_4^1 &= 0 \\
x_4^3 - p_4x_3^1 &= q_4
\end{aligned}
$$

Setter inn i en matrise får vi følgende:
For K_1:

$$
\begin{bmatrix}
1 & -q_2 & 0 & p_2 \\
-p_3 & 1 & -q_3 & 0 \\
0 & -p_4 & 1 & 0
\end{bmatrix}
$$

For K_3

$$\begin{bmatrix} 1 & -q_2 & 0 & 0 \\ -p_3 & 1 & -q_3 & 0 \\ 0 & -p_4 & 1 & q_4 \end{bmatrix}$$

Ser at dette er matrise A, og har at for $\vec{y} = (x_2, x_3, x_4)$ vil svaret $\vec{b}$ tilsvare høyre kolonne, altså $(p_2, 0, 0)$ for K_1 og $(0, 0, q_4)$ for K_3

c

En matrise er definert som øvre trianguler dersom alle elementene under diagonalen er 0.
Utfører operasjonene som ville blitt brukt for å lage pivot søyler av de to første søylene i A, altså:

Legger til p_3RadI til RadII. Da er de to elementene under diagonalen i kolonne en 0.
Legger til $\frac{p_4}{1-q_2p_3}$RadII til RadIII. Det fjerner det tredje elementet som ligger i kolonne 2.
Altså er A radredusert til en øvre diagonal matrise.

d

Walk.m:

```
function [y] = Walk(p2, p3, p4)
    P = [p2, p3, p4];

    for n = 1: 3
        if(P(n) > 1 || P(n) < 0)
            printf('Illeagal input value')
            return
        end
    end

    Q = [];
    for n = 1: 3
        Q(n) = 1 - P(n);
    end


    A = [1 -Q(1) 0 ; -P(2) 1 Q(2) ; 0 -P(3) 1];
    b = [P(1); 0 ; 0];

    extendedA = ref([A b]);
    y = extendedA(:,4);

end
```

Gir følgende output:

```
diary on
Walk(0.2, 0.5, 0.3)

ans =

    0.3067
    0.1333
    0.0400

diary off
```

Som tilsvarer verdien til $\vec{y}$