

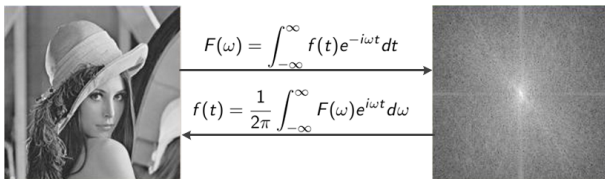
土壤含水量频域分析

April 21, 2015

- 背景知识
- 理论推导
- 理论解释与应用

- 时域与频域
- 噪声以及噪声的颜色
- 降水与土壤水的频域表示

一个信号可以在时域或频域中表示. 虽然两种表示方式等价, 但表达式复杂程度不同.



噪声是一个随机过程，而随机过程有其频域表示函数，其形状则决定了噪声的“颜色”（性质）。

信号的频率特性：

- **频谱 (Spectral)**：时域信号在频域下的表示方式，以振幅及相位为因变量，频率为自变量的函数，包含振幅频谱与相位频谱。
- **频谱密度 (Spectral Density)**：一个能量信号 $f(t)$ 的频域表达式 $F(\omega)$ 。
- **功率/能量谱密度 (Power Spectral Density)**： $\Phi(\omega) = \frac{F(\omega)F^*(\omega)}{2\pi}$

噪声根据其功率谱密度函数决定“颜色”。

噪声功率谱密度为频率的幂律函数：

$$\Phi(\omega) = \frac{F(\omega)F^*(\omega)}{2\pi} \propto \frac{1}{\omega^\beta}$$

- 白噪声 $\beta = 0$
- 粉噪声 $\beta = 1$
- 红噪声 $\beta = 2$
- 蓝噪声 $\beta = -1$
- 紫噪声 $\beta = -2$

土壤水含量 s 的时域频域表示

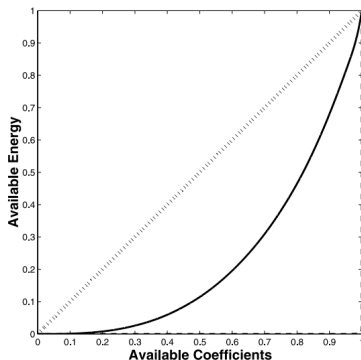


Figure: 土壤水含量 s 时域频域洛伦兹图 (Gabriel et al., 2007)

s 的时域表示分布均衡，频域表示分布不均衡。在频域上需要很少的系数来表示该信号。

土壤水含量s频域特征提取

提取能量最大的0.38% 傅里叶系数，令剩余系数为0，重建信号精度如下：

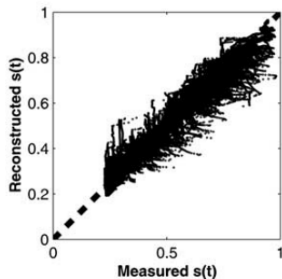
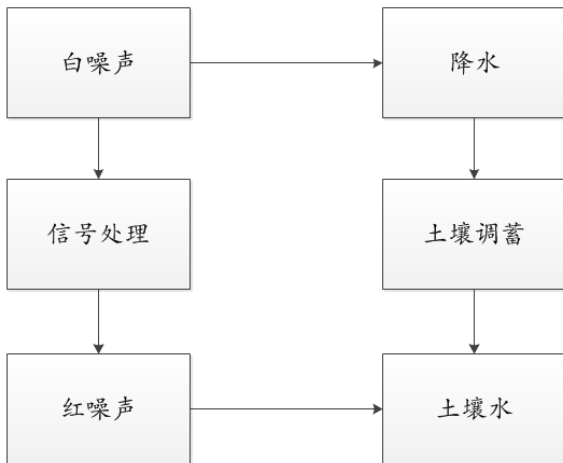


Figure: 频域特征提取土壤水信号 (Gabriel et al., 2007)

回归斜率 = 0.97, 截距 = 0.024, 相关系数你 $r^2 = 0.96$

降水与土壤水的频域表示



$$\frac{ds(t)}{dt} + \frac{L(t)}{\eta R_L} = \frac{p(t)}{\eta R_L}$$

两边同时乘以 e^{-ift} ，由 $-\infty$ 到 ∞ 对 t 积分，得：

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ift} ds(t) + \frac{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ift} L(t) dt}{\eta R_L} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ift} p(t) dt}{\eta R_L}$$

右边等于

$$\frac{P(f)}{\eta R_L}$$

左边第一项等于：

$$\begin{aligned} & s(t)e^{-ift}\Big|_{-\infty}^{\infty} + if \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ift} s(t) dt \\ &= s(t)e^{-ift}\Big|_{-\infty}^{\infty} + ifS(f) \end{aligned}$$

假定为平稳过程，则 $s(t)e^{-ift}\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$ (Priestley, 1981) .

$$\begin{aligned} & s(t)e^{-ift}\Big|_{-\infty}^{\infty} + if \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ift} s(t) dt \\ &= s(t)e^{-ift}\Big|_{-\infty}^{\infty} + ifS(f) \\ &= ifS(f) \end{aligned}$$

假设：

$$L(t) = ET_{max} \times s(t)$$

则右边第二项等于：

$$\frac{ET_{max}}{\eta R_L} S(f)$$

将上述三式带入原方程，移项，得：

$$S(f) = \frac{P(f)}{if\eta R_L + ET_{max}}$$

由

$$E_s(f) = |S(f)|^2$$

得：

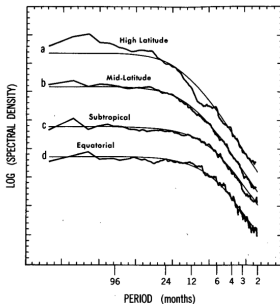
$$E_s(f) = \frac{|P(f)|^2}{\beta^2 + f^2}$$

其中

$$\beta = \frac{ET_{max}}{\eta R_L}$$

水文解释

f/β 决定了土壤水含量为白噪音或红噪音. f 相对 β 较小时, s 为白噪音; f 相对 β 较大时, s 为红噪音.



对某一流域, 若 β 较小, 在较小的模拟时间尺度上(f 较小), 土壤水含量信号 s 即转化为红噪音, 相邻尺度间相关关系显著, 土壤水记忆较长, 必须采用迭代结构的模型求解; 相反, 若 β 较大, 模拟时间尺度 f 必须非常大, s 才会转化为红噪音, 因此, 该类地区土壤水记忆较短, 估计Budyko模型会得到更好的应用.