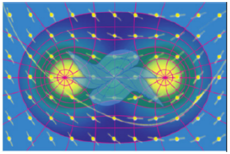
Interpolation polynomiale

Correction-Exercice 3



Analyse Numérique - 3ème année -

Enoncé

(1) Construire le polynôme P d'interpolation de Lagrange aux points $(-1, e); (0, 1)$ et $(1, e)$.

(2) Sans faire de calcul, donner l'expression du polyn$\hat{o}$me de Lagrange Q qui interpole les trois points $(-1, -1); (0, 0)$ et $(1, -1)$.

(3) Trouver le polynôme de l'espace vectoriel Vect$(1, X, X^2)$ qui interpole les trois points $(-1, -1); (0, 0)$ et $(1, -1)$.

Corrigé

1) Le polynôme P d'interpolation de Lagrange de degré n qui interpole $(n+1)$ points $\{(x_i, y_i); i = 0, \dots, n\}$ s'écrit:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x - x_j)$$

avec $\alpha = [x_0, \cdots, x_i]$. Ici $n = 2$ donc on a:
$[x_0, x_1] = 1 - e, \quad [x_1, x_2] = e - 1, \quad [x_0, x_1, x_2] = e - 1$, par suite

$$\begin{array}{rcl} P(x) & = & y_0 + (x - x_0)[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)[x_0, x_1, x_2] \\ & = & = (e-1)x^2 + 1 \end{array}$$

2) Il suffit de changer les coefficients y_i dans l'expression précedente:

$$Q(x) = -\frac{x(x-1)}{2} - \frac{(x+1)x}{2} = -x^2$$

3) Il s'agit de trouver un polynôme $P(x)$ qui soit combinaison linèaire de deux polynômes assigès (ie: $P(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$) et qui interpole les 3 points $(-1,-1); (0,0)$ et $(1,-1)$.

$$\begin{cases} \text{P(-1)=1;} \\ \text{P(0)=0;} \\ \text{P(1)=-1;} \end{cases}$$

ce qui donne $\alpha = 0; \beta = 0$ et $\gamma = -1$
le polyn$\hat{o}$me cherché est donc $P(x) = -x^2$