Języki formalne i techniki translacji

Felix Zieliński 272336

Zadanie 5 lista 2

Zadanie 5. Czy język $\{\omega\omega^R x : \omega, x \in \{0,1\}^* \wedge \omega, x \neq \varepsilon\}$, gdzie ω^R oznacza odwrócenie kolejności liter w słowie ω, jest regularny?

Rozwiązanie

Lemat o pompowaniu Niech L będzie językiem regularnym. Wtedy istnieje stała n taka, że jeśli z jest dowolnym słowem z L oraz $|z| \geq n$, to z możemy przedstawić w postaci $z = uvw$, gdzie $|uv| \leq n$ i $|v| \geq 1$ oraz uv^iw należy do L dla każdego $i \geq 0$. n w tym lemacie jest nie większe niż liczba stanów najmniejszego DFA akceptującego L.

Technicznie rzecz biorąc, słowa z języka L spełniają lemat o pompowaniu. Dlaczego? Dla założeń z polecenia:

gdy $|\omega| = 1$

Skoro ω jest długości 1, to ω^R - jego odwrócenie - również będzie tej długości, i w dodatku $\omega = \omega^R$. Wtedy $z = \omega\omega x$, w którym $|x| \geq n - 1$. Biorąc z z lematu, mamy $u = \omega\omega$ oraz $|vw| = x$, gdzie dowolne v spełnia $1 \leq |v| \leq n - 2$. Pompujemy wtedy v: dla dowolnego i, $z' = uv^iw = \omega'\omega'^R x'$ w L, gdzie $\omega' = \omega$ oraz $x' = v^iw$. Lemat jest spełniony.

gdy $|\omega| \geq 2$

Niech ω to będzie ab i $|a| = 1$. Ciąg więc zaczyna się palindromem złożonym z dwóch różnych znaków: $z = abb^Rax$. Biorąc z z lematu, mamy: $u = \varepsilon$, $v = a$ i $w = bb^Rax$. Pompując v, otrzymujemy:
dla $i = 0$, $z' = uv^0w = uw = w$, a w z wyżej poczynionych założeń było równe bb^Rax, dalej $bb^Rax = \omega'\omega'^R x'$ w L, gdzie $\omega' = b$ oraz $x' = ax$.
dla $i = 1$, $z' = uv^1w = uvw = z$ w L.
dla $i \geq 2$, $z' = uv^iw = v^iw = a^ibb^Rax = aaa^{i-2}bb^Rax$, jak widać aa to palindrom, więc dalej $aaa^{i-2}bb^Rax = \omega'\omega'^R x'$ w L, gdzie $\omega' = a$ oraz $x' = a^{i-2}bb^Rax$.
Lemat jest więc spełniony.

Mimo powyższych rozważań, twierdzę, że ten język **nie jest regularny**. Dowiodę tego używając **uogólnionej wersji lematu o pompowaniu**:

Wersja ogólna lematu o pompowaniu Niech L będzie językiem regularnym. Wtedy istnieje takie stałe $n \geq 1$, że dla dowolnego słowa z z L, gdzie $|z| \geq n$, istnieje przedstawienie w postaci $z = yuvw$ dla każdych y pozwalających spełnić warunki: $|uvw| \geq n$, $|uv| \leq n$ oraz $|v| \geq 1$, gdzie yuw^iw będzie należeć do L dla każdego $i \geq 0$.

Ta wersja lematu o pompowaniu pozwala na udowadnianie nieregularności języków, gdy zwykły lemat o pompowaniu zawodzi. Dzięki niemu mogę pompować słowo w dowolnym jego miejscu.

Dowód Zakładam, że język L jest językiem regularnym. n, z biorę z wersji ogólnej lematu o pompowaniu. Niech $z = (10)^n(01)^n1$ - spełnia to założenia z polecenia.
Widać też, że $|z| = 4n + 1$ oraz że dla każdego podziału spełniającego warunki lematu z $y = (10)^n0$, $|uvw| = 2n$.
Weźmy $i = 0$. Wtedy $z' = yuv^0w$. Zakładamy, że z' jest w L - wtedy $z' = \omega'\omega'^Rx'$, gdzie w' oraz x' są niepuste.
Skoro $\omega\omega^R$ tworzą palindrom, to „w środku” muszą pojawić się dwa takie same znaki. W naszym przypadku to dwa ostatnie znaki w y: $1(01)^{n-1}00$, więc $|w'| \geq 2n$, z czego wynika, że $|z'| = |\omega'\omega'^Rx'| = 2|\omega'| + |x'| \geq 4n + 1$. A wiemy, że $|z'| = |yuv^0w| = |yuvw| - |v| = |z| - |v| \leq 4n + 1 - 1 = 4n$. A więc sprzeczność!