

Języki formalne i techniki translacji

Felix Zieliński 272336

Zadanie 5 lista 2

Zadanie 5. Czy język $\{\omega\omega^R x : \omega, x \in \{0,1\}^* \wedge \omega, x \neq \varepsilon\}$, gdzie ω^R oznacza odwrócenie kolejności liter w słowie ω , jest regularny?

Rozwiązanie

Lemat o pompowaniu Niech L będzie językiem regularnym. Wtedy istnieje stała n taka, że jeśli z jest dowolnym słowem z L oraz $|z| \geq n$, to z możemy przedstawić w postaci $z = uvw$, gdzie $|uv| \leq n$ i $|v| \geq 1$ oraz $uv^i w$ należy do L dla każdego $i \geq 0$. n w tym lemacie jest nie większe niż liczba stanów najmniejszego DFA akceptującego L .

Technicznie rzecz biorąc, słowa z języka L spełniają lemat o pompowaniu. Dlaczego? Dla założeń z polecenia:

gdy $|\omega| = 1$

Skoro ω jest długości 1, to ω^R - jego odwrócenie - również będzie tej długości, i w dodatku $\omega = \omega^R$. Wtedy $z = \omega\omega x$, w którym $|x| \geq n - 1$. Biorąc z z lematu, mamy $u = \omega\omega$ oraz $|vw| = x$, gdzie dowolne v spełnia $1 \leq |v| \leq n - 2$. Pompujemy wtedy v : dla dowolnego i , $z' = uv^i w = \omega'\omega'^R x'$ w L , gdzie $\omega' = \omega$ oraz $x' = v^i w$. Lemat jest spełniony.

gdy $|\omega| \geq 2$

Niech ω to będzie ab i $|a| = 1$. Ciąg więc zaczyna się palindromem złożonym z dwóch różnych znaków: $z = abb^R ax$. Biorąc z z lematu, mamy: $u = \varepsilon$, $v = a$ i $w = bb^R ax$. Pompując v , otrzymujemy:

dla $i = 0$, $z' = uv^0 w = uw = w$, a w z wyżej poczynionych założeń było równe $bb^R ax$, dalej $bb^R ax = \omega'\omega'^R x'$ w L , gdzie $\omega' = b$ oraz $x' = ax$.

dla $i = 1$, $z' = uv^1 w = uvw = z$ w L .

dla $i \geq 2$, $z' = uv^i w = v^i w = a^i bb^R ax = aa^{i-2} bb^R ax$, jak widać aa to palindrom, więc dalej $aa^{i-2} bb^R ax = \omega'\omega'^R x'$ w L , gdzie $\omega' = a$ oraz $x' = a^{i-1} bb^R ax$.

Lemat jest więc spełniony.

Mimo powyższych rozważań, twierdzę, że ten język **nie jest regularny**. Dowiodę tego używając **uogólnionej wersji lematu o pompowaniu**:

Wersja ogólna lematu o pompowaniu Niech L będzie językiem regularnym. Wtedy istnieje takie $p \geq 1$, że każde uvw , gdzie $|w| \geq p$, należące do L może zostać zapisane w postaci $uvw = uxyzv$, gdzie $|xy| \leq p$ i $|y| \geq 1$ oraz $uxy^i zv$ jest w L dla każdego $i \geq 0$.

Ta wersja lematu o pompowaniu pozwala na udowadnianie nieregularności języków, gdy zwykły lemat o pompowaniu zawodzi, gdyż jego założenia są bardziej rygorystyczne - mogą pompować słowo w jego dowolnym miejscu.