Algorytmy Optymalizacji Dyskretnej

Felix Zieliński 272336

Lista 2

Zadanie 1. W tym zadaniu należało zminimalizowad koszty zakupu paliwa poprzez wyznaczenie planu zakupu i dostaw paliwa na lotniska.

Uogólnione parametry z zadania:

- L_j - j-te lotnisko
- F_i - i-ta firma
- z_j - zapotrzebowanie j-tego lotniska
- p_i - podaż paliwa z i-tej firmy
- k_{ij} - koszt zakupu galonu paliwa od i-tej firmy przez j-te lotnisko

Zmienne decezyjne:

x_{ij} - ilość paliwa dostarczona przez i-tą firmę na j-te lotnisko.

Ograniczenia:

- $x_{ij} \geq 0$ - ilość paliwa musi być nieujemna
- $\sum_i x_{ij} = z_j$ - suma dostaw do danego lotniska musi zaspokoić jego zapotrzebowanie
- $\sum_j x_{ij} \leq p_i$ - firma nie może dostarczyć więcej paliwa, niż sama produkuje

Funkcja celu:

Koszt wszystkich dostaw: $min \sum_{i,j} x_{ij} * k_{ij}$

Rozwiazanie:

	Firma 1	**Firma 2**	**Firma 3**	**Firma 4**
Lotnisko 1	0.0	110000.0	0.0	110000.0
Lotnisko 2	165000.0	55000.0	0.0	220000.0
Lotnisko 3	0.0	0.0	330000.0	330000.0
Lotnisko 4	110000.0	0.0	330000.0	440000.0
Suma	275000.0	165000.0	660000.0	

Tabela 1: Optymalne dostawy, w galonach

1. Minimalny łączny koszt dostaw wymaganych ilości paliwa wynosi **8525000**
2. Każda z firm dostarcza paliwo
3. 1. oraz 3. firma wyczerpały możliwości swoich dostaw

Zadanie 2. W tym zadaniu należało zmaksymalizować zysk zakładu poprzez wyznaczenie optymalnego tygodniowego planu placy.

Uogólnione parametry z zadania:

- L_i - i-ty wyrób
- M_j - j-ta maszyna
- cp_{ij} - czas (w minutach na kilogram) obróbki i-tego wyroby na j-tej maszynie
- C_j - czas dostępności j-tej maszyny w minutach
- sp_i - cena sprzedaży i-tego wyrobu
- kp_j - koszt za minutę pracy j-tej maszyny
- km_i - koszt materiałowy za kilogram i-tego wyrobu
- z_i - maksymalny tygodniowy popyt na i-ty wyrób

Zmienne decezyjne:

x_i - liczba kilogramów wyprodukowanego i-tego wyrobu.

Ograniczenia:

- $x_{ij} \geq 0$ - ilość wyprodukowanego wyrobu musi być nieujemna
- $\sum_i x_i * cp_{ij} \leq C_j$ - maszyny mają ograniczony czas pracy

- $x_i \leq z_i$ - nie ma sensu produkować więcej wyrobu, niż jest na niego popyt

Funkcja celu:

Zysk, jako różnica między przychodem a kosztami zmiennymi:
$max(x_i * (\sum_i(sp_i - km_i) - \sum_j(kp_j) * \sum_i(cp_{ij})))$

Rozwiazanie:

W celu sprawniejszych obliczeń, dane z zadania zamieniam na minuty.

	Maszyna 1	**Maszyna 2**	**Maszyna 3**
Produkt 1	625.0	1250.0	750.0
Produkt 2	300.0	600.0	400.0
Produkt 3	600.0	750.0	450.0
Produkt 4	2000.0	1000.0	500.0

Tabela 2: Czas na maszynę

	Kilogram wyrobu
Produkt 1	125.0
Produkt 2	100.0
Produkt 3	150.0
Produkt 4	500.0

Tabela 3: Produkcja (w kilogramach) każdego z wyrobów

Zysk wynosi **3632.5** dolarów.

Zadanie 3. W tym zadaniu należało zminimalizować łączny koszt produkcji w firmie poprzez wyznaczenie optymalnego planu produkcji oraz magazynowania.

Uogólnione parametry z zadania:

- m_j - maksymalna produkcja towaru w j-tym okresie (w jednostkach)
- k_j - j-ty okres (w którym wytwarzane jest maksymalnie 100 jednostek towaru)
- c_j - koszt produkcji jednej jednostki towaru w j-tym okresie
- a_j - maksymalna wielkość (w jednostkach) opcjonalnej produkcji ponadwymiarowej w j-tym okresie
- o_j - koszt jednostkowy w j-tej opcjonalnej produkcji ponadwymiarowej
- d_j - zapotrzebowanie na towar w j-tym okresie

- s - maksymalna ilość jednostek możliwa do przechowania z jednego okresu na kolejny
- sm_j - stan magazynu na początku okresu
- km - koszt magazynowania za jednostkę
- mp - początkowa ilość jednostek w magazynie

Zmienne decezyjne:

- x_j - ilość jednostek wyprodukowanych w j-tym okresie
- y_j - ilość jednostek wyprodukowanych w j-tym okresie w produkcji opcjonalnej
- z_j - ilość jednostek do przechowania na koniec j-tego okresu

Ograniczenia:

- $x_j \geq 0$ - ilość jednostek wyprodukowanych w j-tym okresie musi być nieujemna
- $y_j \geq 0$ - ilość jednostek wyprodukowanych w j-tym okresie w produkcji opcjonalnej musi być nieujemna
- $z_j \geq 0$ - ilość jednostek do przechowania na koniec j-tego okresu musi być nieujemna
- $x_j \leq m_j$ - nie można wyprodukować jednostek ponad maksymalną produkcję towaru w j-tym okresie
- $y_j \leq a_j$ - nie można wyprodukować jednostek dodatkowych ponad maksymalną opcjonalną produkcję towaru w j-tym okresie
- $z_j \leq s$ - nie można przechowywać jednostek ponad maksymalną ilość jednostek możliwą do przechowania z jednego okresu na kolejny
- koszt produkcji jednostek opcjonalnych przewyższa koszt produkcji podstawowej, a więc nie ma potrzeby ograniczania wykorzystania wszystkich jednostek przed rozpoczęciem produkcji opcjonalnej
- $sm_1 = mp$ - na początku pierwszego okresu stan magazynu jest równy stanowi początkowemu
- $s_K + 1 = 0$ - na koniec nie powinno zostać jednostek w magazynie
- $x_j + y_j + z_j - d_j = z_{j+1}$ - zapotrzebowanie na towar musi zostać spełnione

Funkcja celu:

Koszt produkcji oraz magazynowania: $min \sum_{j=1}^{K}(x_j * c_j + y_j * o_j + z_j * km)$

Rozwiazanie:

	Produkcja normalna	**Produkcja dodatkowa**	**Stan magazynu**
Okres 1	100.0	15.0	15.0
Okres 2	100.0	50.0	0.0
Okres 3	100.0	0.0	70.0
Okres 4	100.0	50.0	45.0
Okres 5			0.0

Tabela 4: Produkcja (w kilogramach) każdego z wyrobów

1. Minimalny łączny koszt produkcji oraz magazynowania wynosi **3842500**
2. Firma musi zaplanować produkcję ponadwymiarową w okresach: 1., 2., 4.
3. Możliwości magazynowania są wyczerpane w okresie 2. na 3.

Zadanie 4. W tym zadaniu należało zminimalizować koszt podróży z miasta i° do miasta j° poprzez znalezienie połączenia, które nie przekracza z góry zadanego czasu.

Uogólnione parametry z zadania:

- T - zadany czas T, którego całkowity czas przejazdu nie może przekroczyć
- $G = (N, A)$ - skierowany graf połączeń między miastami
- N - zbiór miast
- A - zbiór połączeń
- c_{ij} - koszt przejazdu z miasta i do j
- t_{ij} - czas przejazdu z miasta i do j
- i° - miasto początkowe
- j° - miasto końcowe

Zmienne decezyjne:

x_{ij} - zmienna boolowska oznaczająca, czy dane połączenie między miastem i oraz j jest używane.

Ograniczenia:

- $x_{ij} \in \{0, 1\}$
- $\sum_j x_{i^\circ j} = 1$ - należy zacząć ścieżkę w mieście początkowym
- $\sum_j x_{ij^\circ} = 1$ - należy zakończyć ścieżkę w mieście końcowym

- $\sum_j x_{ij} * t_{ij} \leq T$ - nie można przekroczyć maksymalnego czasu przejazdu
- $\sum x_{kj} = \sum x_{ik}$ - każde miasto (nie licząc miasta początkowego oraz końcowego) musi mieć tyle samo połączeń wchodzących, co wychodzących

Funkcja celu:

Koszt przejazdu: $min \sum_{i,j} c_{ij} * x_{ij}$

Rozwiazanie:

egzemplarz prowadzącego

Miasto i	Miasto j	Koszt	Czas
1	2	3.0	4.0
2	3	2.0	3.0
3	5	2.0	2.0
5	7	3.0	3.0
7	9	1.0	1.0
9	10	2.0	2.0

Tabela 5: Optymalne połączenia

Łączny czas wyniósł 15, a koszt - 13.

egzemplarz własny

Dane:

- N - 10
- i° - 1
- j° - 5
- T - 9
- krawędzie - [1, 2, 10, 2], [2, 3, 15, 3], [3, 4, 20, 5], [4, 5, 10, 2], [1, 6, 25, 4], [6, 7, 15, 3], [7, 5, 10, 2], [1, 8, 30, 6], [8, 9, 20, 3], [9, 10, 25, 4], [10, 5, 15, 3]

Miasto i	Miasto j	Koszt	Czas
1	6	25.0	4.0
6	7	15.0	3.0
7	5	10.0	2.0

Tabela 6: Optymalne połączenia - egzemplarz własny

Łączny czas wyniósł 9, a koszt - 50.

Ograniczenie na całkowitoliczbowość zmiennych decyzyjnych jest potrzebne. Gdy optymalne rozwiązanie nie będzie spełniać ograniczeń czasowych, zmienne decyzyjne będą przyjmować wartości niecałkowite. Poniższe dane spowodują pojawienie się takich rozwiazań:

- N - 11
- i° - 2
- j° - 11
- T - 6
- krawędzie - [2, 3, 1, 6], [3, 11, 1, 2], [2, 11, 1, 9]

Koszt po usunięciu ograniczeń: **1.75**

W przypadku usunięciu ograniczenia na czasy przejazdu w modelu bez ograniczeń, otrzymane połączenie nie zawsze jest akceptowalne, bo solver może wyznaczyć rozwiązanie bez uwzględnienia maksymalnego czasu.

Zadanie 5. W tym zadaniu należało zminimalizować całkowitą liczbę radiowozów poprzez wyznaczenie przydziału radiowozów spełniających zadane wymagania.

Uogólnione parametry z zadania:

- p_i - i-ta dzielnica
- z_j - j-ta zmiana
- min_{ij} - minimalna liczba radiowozów dla i-tej dzielnicy i j-tej zmiany
- max_{ij} - maksymalna liczba radiowozów dla i-tej dzielnicy i j-tej zmiany
- $zmin_j$ - minimalna liczba radiowozów dla j-tej zmiany
- $dmin_i$ - minimalna liczba radiowozów dla i-tej dzielnicy

Zmienne decezyjne:

x_{ij} - liczba radiowozów przydzielona dzielnicy i podczas zmiany j

Ograniczenia:

- $x_{ij} \geq 0$ - liczba radiowozów musi być nieujemna
- $x_{ij} \leq max_{ij}$ - liczba radiowozów musi być mniejsza od maksymalnej
- $x_{ij} \geq min_{ij}$ - liczba radiowozów musi być większa od minimalnej
- $\sum_i x_{ij} \geq zmin_j$ - liczba radiowozów musi spełniać minimalną liczbę dla j-tej zmiany

- $\sum_j x_{ij} \geq dmin_i$ - liczba radiowozów musi spełniać minimalną liczbę dla i-tej dzielnicy

Funkcja celu:

Liczba radiowozów: $min \sum_i \sum_j x_{ij}$

Rozwiazanie:

	Zmiana 1	**Zmiana 2**	**Zmiana 3**
Dzielnica 1	2.0	5.0	3.0
Dzielnica 2	3.0	7.0	5.0
Dzielnica 3	5.0	8.0	10.0

Tabela 7: Optymalne rozłożenie radiowozów

Całkowita liczba wykorzystanych radiowozów wynosi 48.

Zadanie 6. W tym zadaniu należało zminimalizować liczbę kamer poprzez odpowiednie ich rozmieszczenie.

Uogólnione parametry z zadania:

- m - szerokość terenu (w kwadratach)
- n - wysokość terenu (w kwadratach)
- k - zasięg kamery (w kwadratach)
- r_{ij} - zmienna boolowska, rozmieszczenie kamer

Zmienne decezyjne:

x_{ij} - zmienna boolowska oznaczająca, czy w kwadracie ij umieszczona jest kamera.

Ograniczenia:

- $x_{ij} \in \{0, 1\}$
- $x_{ij} + r_{ij} \leq 1$ - nie można postawić kamery tam, gdzie jest kontener
- $\sum_{l=max(i-k,1)}^{min(i+k,m)} x_{lj} + \sum_{s=max(j-k,1)}^{min(i+k,m)} x_{is} \geq 1$ - każdy kontener musi być obserwowany

Funkcja celu:

Liczba kamer: $min \sum_i \sum_j x_{ij}$

Rozwiazanie:

egzemplarz 1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zasięg $= 2$

Rozwiązanie:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Postawiono 4 kamery.

egzemplarz 2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zasięg $= 4$

Rozwiązanie:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Postawiono 3 kamery.