Obliczenia naukowe

Felix Zieliński 272336

Lista 2

TESTY STETTY SRESTY wykresy nwm jakies wnioski, czym sie roznia te metody czy cos, nazwy returnowanych w kodzie wykresy do 5, wnioski do 5 metoda DOJEBANEGO Eulera (tak naprawde to nie ale bardzo chcialem to napisac) wykresy do 6 iteracje w 6.2 dla f1??? moze wiecej testow bo nwm w sumie cyz nie za malo + jakies jak sie wysrywa + moze dla innych funkcji formatowanie tych zasranych tabeli umre kiedys tutaj wnioski koncowe idk

---

Zadanie 1. Funkcja rozwiązująca równanie $f(x) = 0$ metodą bisekcji.

Metoda bisekcji to inaczej metoda równego podziału lub metoda połowienia. Korzysta ona z faktu, że funkcja ciągła w przedziale $[a, b]$, która zmienia w nim swój znak (a więc $f(a) * f(b) < 0$), musi mieć miejsce zerowe w (a, b).

Jeżeli $f(a) * f(b) < 0$, to wiem, że gdzieś na przedziale jest miejsce zerowe. Obliczam więc takie c, że $c = 1/2 * (a + b)$ (połowa przedziału) i sprawdzam z tego samego warunku, czy jest tam miejsce zerowe. Jeżeli tak, to podstawiam $b = c$, a w przeciwmym razie $a = c$.

Powtarzam to, dopóki nie znajdę zera (bo $f(a) * f(c) = 0$ lub $f(b) * f(c) = 0$).

W ten sposób jednak, otrzymam tylko jedno miejsce zerowe, nawet jeśli jest ich więcej na tym odcinku.

Innym warunkiem zakończenia jest warunek $|f(c)| < \epsilon$ lub $|b - a| < \delta$. Te stałe są podane przy wywołaniu funkcji i decydują o dokładności wyniku, bowiem dla typu zmennoprzecinkowego $Float64$ mogą oczywiście nastąpić błędy przybliżeń. ϵ jest wartością błędu przybliżenia, a δ - pożądaną bliskością otrzymanej wartości iloczynu do zera.

Zadanie 2. Funkcja rozwiązująca równanie $f(x) = 0$ metodą Newtona.

To inaczej metoda stycznych. Działa ona dla funkcji, która w przedziale $[a, b]$ musi znajdować się dokładnie jeden jej pierwiastek, $f(a) * f(x) < 0$ oraz jej pierwsza i druga pochodna mają stały znak w przedziale $[a, b]$.

Liczę punkty przecięcia stycznych do funkcji z osią OX, zaczynając od prostej stycznej w $f(x_0)$. Współrzędnia x, w której styczna przecina oś OX, jest przybliżeniem pierwiastka funkcji. Szukam dalej przybliżeń, aż w końcu któreś spełni dane założenia.

Zadanie 3. Funkcja rozwiązująca równanie $f(x) = 0$ metodą siecznych.

To inaczej metoda cięciw lub Eulera. Działa ona dla funkcji, która jest dwukrotnie rózniczkowalna na przedziale $[a, b]$ oraz pierwiastek szukany musi być nieparzystej krotności.

W tej metodzie używa się ilorazu różnicowego zamiast pochodnej $f'(x_n) \approx \frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$. Sama metoda siecznych opisana jest wzorem $x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n-x_{n-1}}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$ dla dodatnich n.

Wyznaczam miejsca przecięć siecznych funkcji z osią OX, rozpoczynając od siecznej mającej swój początek w punkcie $(x_0, f(x_0))$ oraz koniec w $(x_1, f(x_1))$. Sieczna ta przecina oś OX w x_2, którego używam do wyznaczenia kolejnej siecznej i jej przecięcia z osią.

Szukanie przybliżenia pierwiastka kończy się, gdy przybliżenie zera będzie odpowiednio małe (zgodne z podanym do funkcji), bądź gdy różnica między kolejnymi przybliżeniami będzie wystarczająco mała (zgodna z podanym do funkcji).

Zadanie 4 W tym zadaniu należało wyznaczyć pierwiastki funkcji $\sin x - \left(\frac{1}{2}x\right)^2$ przy użyciu metod zaprogramowanych w poprzednich zadaniach.

Wyniki dla poszczególnych metod przedstawia poniższa tabela:

Metoda	**x0**	**f(x0)**	**Iteracje**	**Czy błąd**
Medota bisekcji	1.9337539672851562	-2.7027680138402843e-7	16	false
Metoda Newtona	1.933753779789742	-2.2423316314856834e-8	4	0
Metoda siecznych	1.933753644474301	1.564525129449379e-7	4	false

Metoda bisekcji potrzebowała najwiecej iteracji, bo aż 16, podczas gdy pozostałe metody potrzebowały ich tylko 4. Metoda Newtora oraz siecznych mają mniejszą złożoność. Każda z metod obliczyła wartość pierwiastka z podobną dokładnością.

Zadanie 5. Wyznaczenie wartości zmiennej x, dla której wykresy $y = 3x$ oraz $y = e^x$ się przecinają.

W zadaniu tym posłużę się faktem, że skoro $3x = e^x$, to $3x - e^x = 0$. Dla takiej też funkcji będę wyszukiwał miejsce zerowe. Aby móc jednak wyznaczyć je tą metodą, muszę poznać, jak przebiega jej zmienność, aby wyznaczyć punkty a oraz b, dlatego też narysowałem jej wykres:

Wyniki przedstawia poniższa tabela

Przedział	**x0**	**f(x0)**	**Iteracje**	**Czy błąd**
[0.0, 1.0]	0.619140625	9.066320343276146e-5	9	false
[1.0, 2.0]	1.5120849609375	7.618578602741621e-5	13	false

Zadanie 6. Znalezienie miejsc zerowych funkcji $f_1(x) = e^{1-x} - 1$ oraz $f_2(x) = xe^(- x)$ za pomocą trzech powyższych metod.

W celu wyznaczenia przedziału, zwizualizowałem wykresy tych funkcji:

Z powyższego wykresu można odczytać, że funkcja f_1 ma miejce zerowe w 1, a f_2 w 0.
Najpierw sprawdziłem, jakie wyniki otrzymam metodą bisekcji. Dobrałem w tym celu rózne przedziały.

Przedział	**x0**	**f(x0)**	**Iteracje**	**Czy błąd**
[0.0, 1.0]	0.9999923706054688	7.629423635080457e-6	17	false
[-1.0, 1.0]	0.9999923706054688	7.629423635080457e-6	18	false
[-3.0, 3.0]	1.0000076293945312	-7.6293654275305656e-6	18	false
[-0.0, 2.0]	1.0	0.0	1	false

Tabela 3: Wyniki dla f1

Przedział	**x0**	**f(x0)**	**Iteracje**	**Czy błąd**
[0.0, 1.0]	7.62939453125e-6	7.62933632381113e-6	17	false
[-1.0, 1.0]	0.0	0.0	1	false
[-0.4, 0.5]	-1.5258789062623358e-6	-1.5258812345705489e-6	16	false
[-0.5, 0.5]	0.0	0.0	1	false

Tabela 4: Wyniki dla f2

Można zauważyć, że dobrany przedział wpływa na dokładność wyniku, oraz na liczbę potrzebnych iteracji tej metody.

Dla metody Newtona przyjąłem $maxit = 100$.

Początkowe x0	x0	f(x0)	Iteracje	Czy błąd
0.0	0.9999984358892101	1.5641120130194253e-6	4	0
0.5	0.9999999998878352	1.1216494399945987e-10	4	0
0.9999	0.9999999950001667	4.999833436158951e-9	1	0
1.0	1.0	0.0	0	0
2.0	0.9999999810061002	1.8993900008368314e-8	5	0
10.0	NaN	NaN	-	1

Tabela 5: Wyniki dla f1

Początkowe x0	x0	f(x0)	Iteracje	Czy błąd
-1.0	-3.0642493416461764e-7	-3.0642502806087233e-7	5	0
-1.0e-5	-9.99990000100624e-11	-9.999900002006219e-11	1	0
0.0	0.0	0.0	0	0
0.5	-3.0642493416461764e-7	-3.0642502806087233e-7	5	0
1.0	NaN	NaN	-	2
10.0	14.380524159896261	8.173205649825554e-6	4	0

Tabela 6: Wyniki dla f2

W tej metodzie również odpowiednio dobrana wartość początkowa x_0 pozwala na ograniczenie liczby iteracji, oraz w ogóle na poprawność wyniku.

Metoda Newtona dla $f2$, w przypadku dobrania nieodpowiedniej wartości początkowej (np $x_0 > 1$) szuka miejsca zerowego zmierzając w kierunku zbiegania funkcji do 0 (bowiem, jak widać na wykresie, funkcja ta jest zbieżna do 0 w nieskończoności), co skutkuje nieprawidłowym wynikiem.
Dla metody siecznych przyjąłem taką samą wartość maxit.

Początkowe x0	Początkowe x1	x	f(x)	Iteracje	Czy b
0.0	0.5	0.9999998133327657	1.8666725165594755e-7	5	fals
0.5	0.6	0.9999946034580037	5.396556557624166e-6	4	fals
0.9999	0.999999	0.9999999999500008	4.9999338003203775e-11	1	fals
1.0	1.05	1.0	0.0	1	fals
2.0	1.5	1.0000034269838276	-3.4269779555229363e-6	5	fals
10.0	14.0	10.0	-0.9998765901959134	2	fals

Tabela 7: Wyniki dla f1

Początkowe x0	Początkowe x1	x	f(x)	Iteracje	Cz
-1.0	-0.5	-1.2229958402039555e-7	-1.2229959897758473e-7	6	
-1.0e-5	-1.0e-7	-9.999949500039373e-13	-9.999949500049373e-13	1	
0.0	0.5	0.0	0.0	1	
0.5	0.3	-1.1876245840531925e-7	-1.187624725098416e-7	6	
1.0	0.0	0.0	0.0	1	
10.0	15.0	15.05105056651027	4.375005536508203e-6	1	

Tabela 8: Wyniki dla f2

Wybór odpowiednich wartości początkowych również i przy tej metodzie ma wpływ na ilość iteracji. Niepoprawne dobranie ich dla funkcji $f2$ również i tutaj powoduje pojawienie się skrajnie niepoprawnych wyników przez jej zbieżność do 0 w nieskończoności.
Dla metody bisekcji, przydatna jest znajomość przebiegu funkcji, aby odpowiednio dobrać przedział. Najlepsze wyniki są wtedy, gdy przedział jest odpowiednio wąski, a miejsce zerowe znajduje się na jego środku.
Dla metody Newtona oraz siecznych wpływ wartości początkowych x_0 oraz x_1 jest znaczny. Im są one lepszymi przybliżeniami faktycznego miejsca zerowego, tym dokładniejszy będzie wynik.