

Obliczenia naukowe

Felix Zieliński 272336

Lista 3

Zadanie 1. Funkcja rozwiązująca równanie $f(x) = 0$ metodą bisekcji.

Metoda bisekcji to inaczej metoda równego podziału lub metoda połowienia. Korzysta ona z faktu, że funkcja ciągła w przedziale $[a, b]$, która zmienia w nim swój znak (a więc $f(a) * f(b) < 0$), musi mieć miejsce zerowe w (a, b) .

Jeżeli $f(a) * f(b) < 0$, to wiem, że gdzieś na przedziale jest miejsce zerowe. Obliczam więc takie c , że $c = 1/2 * (a + b)$ (połowa przedziału) i sprawdzam z tego samego warunku, czy jest tam miejsce zerowe. Jeżeli tak, to podstawiam $b = c$, a w przeciwnym razie $a = c$.

Powtarzam to, dopóki nie znajdę zera (bo $f(a) * f(c) = 0$ lub $f(b) * f(c) = 0$).

W ten sposób jednak, otrzymam tylko jedno miejsce zerowe, nawet jeśli jest ich więcej na tym odcinku.

Innym warunkiem zakończenia jest warunek $|f(c)| < \epsilon$ lub $|b - a| < \delta$. Te stałe są podane przy wywołaniu funkcji i decydują o dokładności wyniku, bowiem dla typu zmiennoprzecinkowego *Float64* mogą oczywiście nastąpić błędy przybliżenia. ϵ jest wartością błędu przybliżenia, a δ - pożądaną bliskością otrzymanej wartości iloczynu do zera.

Algorithm 1 Metoda bisekcji

```
1: function MBISEKCI( $f, a, b, \delta, \epsilon$ )
2:    $a\_val \leftarrow f(a)$ 
3:    $b\_val \leftarrow f(b)$ 
4:    $interval \leftarrow b - a$ 
5:    $iterations \leftarrow 0$ 
6:    $c \leftarrow 0$ 
7:    $middle\_val \leftarrow 0$ 
8:
9:   if  $\text{sign}(a\_val) = \text{sign}(b\_val)$  then
10:     return error
11:   end if
12:
13:   while  $interval > \epsilon$  do
14:      $iterations \leftarrow iterations + 1$ 
15:      $interval \leftarrow interval/2$ 
16:      $c \leftarrow a + interval$ 
17:      $middle\_val \leftarrow f(c)$ 
18:
19:     if  $|middle\_val| < \epsilon$  or  $|interval| < \delta$  then
20:       return ( $c, middle\_val, iterations, 0$ )
21:     end if
22:
23:     if  $\text{sign}(middle\_val) = \text{sign}(a\_val)$  then
24:        $a \leftarrow c$ 
25:        $a\_val \leftarrow middle\_val$ 
26:     else
27:        $b \leftarrow c$ 
28:        $b\_val \leftarrow middle\_val$ 
29:     end if
30:   end while
31:
32:   return ( $c, middle\_val, iterations, 0$ )
33:
34: end function
```

Zadanie 2. Funkcja rozwiązująca równanie $f(x) = 0$ metodą Newtona.

To inaczej metoda stycznych. Działa ona dla funkcji, która w przedziale $[a, b]$ ma dokładnie jeden pierwiastek, $f(a) * f(b) < 0$ oraz jej pierwsza i druga pochodna mają stały znak w przedziale $[a, b]$.

Liczę punkty przecięcia stycznych do funkcji z osią OX , zaczynając od prostej stycznej w $f(x_0)$. Współrzędna x , w której styczna przecina oś OX , jest przybliżeniem pierwiastka funkcji. Szukam dalej przybliżeń, aż w końcu któreś spełni dane założenia.

Algorithm 2 Metoda stycznych

```
1: function MSTYCZNYCH( $f, pf, x_0, \delta, \epsilon, maxit$ )
2:    $val \leftarrow f(x_0)$ 
3:
4:   if  $|val| < \epsilon$  then
5:     return  $(x_0, val, 0, 0)$ 
6:   end if
7:
8:   if  $|pf(x_0)| < \epsilon$  then
9:     return error
10:  end if
11:
12:   $x \leftarrow 0$ 
13:
14:  for  $i \leftarrow 1$  to  $maxit$  do
15:     $x \leftarrow x_0 - \frac{val}{pf(x_0)}$ 
16:     $val \leftarrow f(x)$ 
17:
18:    if  $|val| < \epsilon$  or  $|x - x_0| < \delta$  then
19:      return  $(x, val, i, 0)$ 
20:    end if
21:
22:     $x_0 \leftarrow x$ 
23:  end for
24:
25:  return error
26:
27: end function
```

Zadanie 3. Funkcja rozwiązująca równanie $f(x) = 0$ metodą siecznych.

To inaczej metoda cięciw lub Eulera. Działa ona dla funkcji, która jest dwukrotnie różniczkowalna na przedziale $[a, b]$ oraz pierwiastek szukany musi być nieparzystej krotności.

W tej metodzie używa się ilorazu różnicowego zamiast pochodnej $f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$. Sama metoda siecznych opisana jest wzorem $x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$ dla dodatnich n .

Wyznaczam miejsca przecięć siecznych funkcji z osią OX , rozpoczynając od siecznej mającej swój początek w punkcie $(x_0, f(x_0))$ oraz koniec w $(x_1, f(x_1))$. Sieczna ta przecina oś OX w x_2 , którego używam do wyznaczenia kolejnej siecznej i jej przecięcia z osią.

Szukanie przybliżenia pierwiastka kończy się, gdy przybliżenie zera będzie odpowiednio małe (zgodne z podanym do funkcji), bądź gdy różnica między kolejnymi przybliżeniami będzie wystarczająco mała (zgodna z podanym do funkcji).

Algorithm 3 Metoda siecznych

```
1: function MSIECZNYCH( $f, x_0, x_1, \delta, \epsilon, maxit$ )
2:    $f_a \leftarrow f(x_0)$ 
3:    $f_b \leftarrow f(x_1)$ 
4:
5:   for  $i \leftarrow 1$  to  $maxit$  do
6:     if  $|f_a| > |f_b|$  then
7:        $(f_a, f_b) \leftarrow (f_b, f_a)$ 
8:        $(x_0, x_1) \leftarrow (x_1, x_0)$ 
9:     end if
10:
11:      $s \leftarrow \frac{x_1 - x_0}{f_b - f_a}$ 
12:      $x_1 \leftarrow x_0$ 
13:      $f_b \leftarrow f_a$ 
14:      $x_0 \leftarrow x_0 - (f_a \cdot s)$ 
15:      $f_a \leftarrow f(x_0)$ 
16:
17:     if  $|x_1 - x_0| < \delta$  or  $|f_a| < \epsilon$  then
18:       return  $(x_0, f_a, i, 0)$ 
19:     end if
20:   end for
21:
22:   return error
23:
24: end function
```

Zadanie 4 W tym zadaniu należało wyznaczyć pierwiastki funkcji $\sin x - \left(\frac{1}{2}x\right)^2$ przy użyciu metod zaprogramowanych w poprzednich zadaniach.

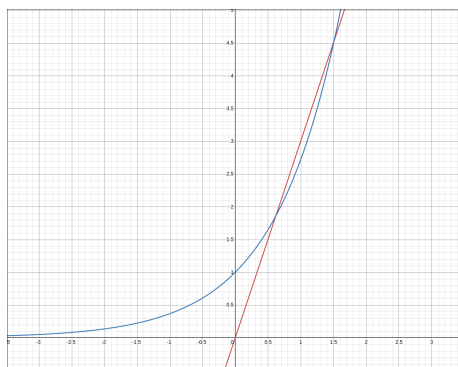
Wyniki dla poszczególnych metod przedstawia poniższa tabela:

Metoda	x0	f(x0)	Iteracje	Czy błąd
Metoda bisekcji	1.9337539672851562	-2.7027680138402843e-7	16	false
Metoda Newtona	1.933753779789742	-2.2423316314856834e-8	4	0
Metoda siecznych	1.933753644474301	1.564525129449379e-7	4	false

Metoda bisekcji potrzebowała najwięcej iteracji, bo aż 16, podczas gdy pozostałe metody potrzebowały ich tylko 4. Metoda Newtona oraz siecznych mają mniejszą złożoność. Każda z metod obliczyła wartość pierwiastka z podobną dokładnością.

Zadanie 5. Wyznaczenie wartości zmiennej x , dla której wykresy $y = 3x$ oraz $y = e^x$ się przecinają.

W zadaniu tym posłużę się faktem, że skoro $3x = e^x$, to $3x - e^x = 0$. Dla takiej też funkcji będę wyszukiwał miejsce zerowe. Aby móc jednak wyznaczyć je tą metodą, muszę poznać, jak przebiega jej zmienność w celu odpowiedniego doboru punktów a oraz b , dlatego też narysowałem wykresy obu funkcji:



Wyniki przedstawia poniższa tabela

Przedział	x0	f(x0)	Iteracje	Czy błąd
[0.0, 1.0]	0.619140625	9.066320343276146e-5	9	false
[1.0, 2.0]	1.5120849609375	7.618578602741621e-5	13	false
[0.0, 2.0]	NaN	NaN	0	true

Jak widać, aby dobrze wyznaczyć punkty przecięcia funkcji (miejsca zerowe) przy użyciu metody bisekcji, powinno się posiadać informacje o przebiegu zmienności funkcji. W przypadku złego doboru przedziału, nie będzie można uzyskać prawidłowego wyniku (jak dla [0.0, 2.0], gdzie na jego krańcach funkcja nie zmienia znaku). W tym zadaniu, prawdopodobnie lepiej byłoby zastosować

metodę Newtona bądź siecznych, gdyż nie wymagają one dokładnej znajomości jej przebiegu.

Zadanie 6. Znalezienie miejsc zerowych funkcji $f_1(x) = e^{1-x} - 1$ oraz $f_2(x) = xe^{-x}$ za pomocą trzech powyższych metod.

W celu wyznaczenia przedziału, zwizualizowałem wykresy tych funkcji:



Z powyższego wykresu można odczytać, że funkcja f_1 ma miejsce zerowe w 1, a f_2 w 0.

Najpierw sprawdziłem, jakie wyniki otrzymam metodą bisekcji. Dobrałem w tym celu różne przedziały.

Wyniki dla f_1 :

Przedział	x0	f(x0)	Iteracje	Czy błąd
[0.0, 1.0]	0.9999923706054688	7.629423635080457e-6	17	false
[-1.0, 1.0]	0.9999923706054688	7.629423635080457e-6	18	false
[-3.0, 3.0]	1.0000076293945312	-7.6293654275305656e-6	18	false
[-0.0, 2.0]	1.0	0.0	1	false

Wyniki dla f_2 :

Przedział	x0	f(x0)	Iteracje	Czy błąd
[0.0, 1.0]	7.62939453125e-6	7.62933632381113e-6	17	false
[-1.0, 1.0]	0.0	0.0	1	false
[-0.4, 0.5]	-1.5258789062623358e-6	-1.5258812345705489e-6	16	false
[-0.5, 0.5]	0.0	0.0	1	false

Można zauważyć, że dobrany przedział wpływa na dokładność wyniku, oraz na liczbę potrzebnych iteracji tej metody.

Dla metody Newtona przyjąłem $maxit = 100$.

Wyniki dla f1:

Początkowe x0	x0	f(x0)	Iteracje	Czy błąd
0.0	0.9999984358892101	1.5641120130194253e-6	4	0
0.5	0.999999998878352	1.1216494399945987e-10	4	0
0.9999	0.999999950001667	4.999833436158951e-9	1	0
1.0	1.0	0.0	0	0
2.0	0.999999810061002	1.8993900008368314e-8	5	0
10.0	NaN	NaN	-	1

Wyniki dla f2:

Początkowe x0	x0	f(x0)	Iteracje	Czy błąd
-1.0	-3.0642493416461764e-7	-3.0642502806087233e-7	5	0
-1.0e-5	-9.99990000100624e-11	-9.999900002006219e-11	1	0
0.0	0.0	0.0	0	0
0.5	-3.0642493416461764e-7	-3.0642502806087233e-7	5	0
1.0	NaN	NaN	-	2
10.0	14.380524159896261	8.173205649825554e-6	4	0

W tej metodzie również odpowiednio dobrana wartość początkowa x_0 pozwala na ograniczenie liczby iteracji, oraz w ogóle na poprawność wyniku.

W przypadku wybrania $x_0 = 1$ dla $f2$ nie udało się uzyskać wyniku, gdyż wartość pochodnej w tym punkcie wynosi 0, a więc styczna jest równoległa do osi OX , co uniemożliwia wyznaczenie kolejnego punktu przecięcia, i tym samym - poprawnego obliczenia wyniku.

Metoda Newtona dla $f2$, w przypadku dobrania nieodpowiedniej wartości początkowej (np $x_0 > 1$) szuka miejsca zerowego zmierzając w kierunku zbiegania funkcji do 0 (bowiem, jak widać na wykresie, funkcja ta jest zbieżna do 0 w nieskończoności), co skutkuje nieprawidłowym wynikiem.

Dla metody siecznych przyjąłem taką samą wartość maxit.

Wyniki dla f1:

Początkowe x0	Początkowe x1	x	f(x)	Iteracje	Czy błąd
0.0	0.5	0.9999998133327657	1.8666725165594755e-7	5	false
0.5	0.6	0.9999946034580037	5.396556557624166e-6	4	false
0.9999	0.999999	0.9999999999500008	4.9999338003203775e-11	1	false
1.0	1.05	1.0	0.0	1	false
2.0	1.5	1.0000034269838276	-3.4269779555229363e-6	5	false
10.0	14.0	10.0	-0.9998765901959134	2	false

Wyniki dla f2:

Początkowe x0	Początkowe x1	x	f(x)	Iteracje	Czy błąd
-1.0	-0.5	-1.2229958402039555e-7	-1.2229959897758473e-7	6	false
-1.0e-5	-1.0e-7	-9.999949500039373e-13	-9.999949500049373e-13	1	false
0.0	0.5	0.0	0.0	1	false
0.5	0.3	-1.1876245840531925e-7	-1.187624725098416e-7	6	false
1.0	0.0	0.0	0.0	1	false
10.0	15.0	15.05105056651027	4.375005536508203e-6	1	false

Wybór odpowiednich wartości początkowych również i przy tej metodzie ma wpływ na ilość iteracji. Niepoprawne dobranie ich dla funkcji $f2$ również i tutaj powoduje pojawienie się skrajnie niepoprawnych wyników przez jej zbieżność do 0 w nieskończoności.

Dla metody bisekcji, przydatna jest znajomość przebiegu funkcji, aby odpowiednio dobrać przedział. Najlepsze wyniki są wtedy, gdy przedział jest odpowiednio wąski, a miejsce zerowe znajduje się na jego środku.

Dla metody Newtona oraz siecznych wpływ wartości początkowych x_0 oraz x_1 jest znaczny. Im są one lepszymi przybliżeniami faktycznego miejsca zerowego, tym dokładniejszy będzie wynik.