Obliczenia naukowe

Felix Zieliński 272336

Lista 2

nwm jakies wnioski, czym sie roznia te metody czy cos, nazwy returnowanych w kodzie metoda DOJEBANEGO Eulera (tak naprawde to nie ale bardzo chcialem to napisac) iteracje w 6.2 dla f1??? moze wiecej testow bo nwm w sumie cyz nie za malo + jakies jak sie wysrywa + moze dla innych funkcji wnioski koncowe idk

---

Zadanie 1. Funkcja rozwiązująca równanie $f(x) = 0$ metodą bisekcji.

Metoda bisekcji to inaczej metoda równego podziału lub metoda połowienia. Korzysta ona z faktu, że funkcja ciągła w przedziale $[a, b]$, która zmienia w nim swój znak (a więc $f(a) * f(b) < 0$), musi mieć miejsce zerowe w (a, b).

Jeżeli $f(a) * f(b) < 0$, to wiem, że gdzieś na przedziale jest miejsce zerowe. Obliczam więc takie c, że $c = 1/2 * (a + b)$ (połowa przedziału) i sprawdzam z tego samego warunku, czy jest tam miejsce zerowe. Jeżeli tak, to podstawiam $b = c$, a w przeciwmym razie $a = c$.

Powtarzam to, dopóki nie znajdę zera (bo $f(a) * f(c) = 0$ lub $f(b) * f(c) = 0$).

W ten sposób jednak, otrzymam tylko jedno miejsce zerowe, nawet jeśli jest ich więcej na tym odcinku.

Innym warunkiem zakończenia jest warunek $|f(c)| < \epsilon$ lub $|b - a| < \delta$. Te stałe są podane przy wywołaniu funkcji i decydują o dokładności wyniku, bowiem dla typu zmennoprzecinkowego $Float64$ mogą oczywiście nastąpić błędy przybliżeń. ϵ jest wartością błędu przybliżenia, a δ - pożądaną bliskością otrzymanej wartości iloczynu do zera.

Algorithm 1 Metoda bisekcji

```
function MBISEKCJI(f, a, b, δ, ϵ)
    a_val ← f(a)
    b_val ← f(b)
    interval ← b − a
    iterations ← 0
    c ← 0
    middle_val ← 0

    if sign(a_val) = sign(b_val) then
        return error
    end if

    while interval > ϵ do
        iterations ← iterations + 1
        interval ← interval/2
        c ← a + interval
        middle_val ← f(c)

        if |middle_val| < ϵ or |interval| < δ then
            return (c, middle_val, iterations, 0)
        end if

        if sign(middle_val) = sign(a_val) then
            a ← c
            a_val ← middle_val
        else
            b ← c
            b_val ← middle_val
        end if
    end while

    return (c, middle_val, iterations, 0)

end function
```

Zadanie 2. Funkcja rozwiązująca równanie $f(x) = 0$ metodą Newtona.

To inaczej metoda stycznych. Działa ona dla funkcji, która w przedziale $[a, b]$ musi znajdować się dokładnie jeden jej pierwiastek, $f(a) * f(x) < 0$ oraz jej pierwsza i druga pochodna mają stały znak w przedziale $[a, b]$.

Liczę punkty przecięcia stycznych do funkcji z osią OX, zaczynając od prostej stycznej w $f(x_0)$. Współrzędnia x, w której styczna przecina oś OX, jest przybliżeniem pierwiastka funkcji. Szukam dalej przybliżeń, aż w końcu któreś spełni dane założenia.

Algorithm 2 Metoda stycznych

```
function MSTYCZNYCH(f, pf, x_0, δ, ϵ, maxit)
    val ← f(x_0)

    if |val| < ϵ then
        return (x_0, val, 0, 0)
    end if

    if |pf(x_0)| < ϵ then
        return error
    end if

    x ← 0

    for i ← 1 to maxit do
        x ← x_0 − val / pf(x_0)
        val ← f(x)

        if |val| < ϵ or |x − x_0| < δ then
            return (x, val, i, 0)
        end if

        x_0 ← x
    end for

    return error

end function
```

Zadanie 3. Funkcja rozwiązująca równanie $f(x) = 0$ metodą siecznych.

To inaczej metoda cięciw lub Eulera. Działa ona dla funkcji, która jest dwukrotnie rózniczkowalna na przedziale $[a, b]$ oraz pierwiastek szukany musi być nieparzystej krotności.

W tej metodzie używa się ilorazu różnicowego zamiast pochodnej $f'(x_n) \approx \frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$. Sama metoda siecznych opisana jest wzorem $x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n-x_{n-1}}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$ dla dodatnich n.

Wyznaczam miejsca przecięć siecznych funkcji z osią OX, rozpoczynając od siecznej mającej swój początek w punkcie $(x_0, f(x_0))$ oraz koniec w $(x_1, f(x_1))$. Sieczna ta przecina oś OX w x_2, którego używam do wyznaczenia kolejnej siecznej i jej przecięcia z osią.

Szukanie przybliżenia pierwiastka kończy się, gdy przybliżenie zera będzie odpowiednio małe (zgodne z podanym do funkcji), bądź gdy różnica między kolejnymi przybliżeniami będzie wystarczająco mała (zgodna z podanym do funkcji).

Algorithm 3 Metoda siecznych

function MSIECZNYCH(f, x_0, x_1, δ, ϵ, $maxit$)
  $f_a \leftarrow f(x_0)$
  $f_b \leftarrow f(x_1)$

  for $i \leftarrow 1$ **to** $maxit$ **do**
    if $|f_a| > |f_b|$ **then**
      $(f_a, f_b) \leftarrow (f_b, f_a)$
      $(x_0, x_1) \leftarrow (x_1, x_0)$
    end if

    $s \leftarrow \frac{x_1-x_0}{f_b-f_a}$
    $x_1 \leftarrow x_0$
    $f_b \leftarrow f_a$
    $x_0 \leftarrow x_0 - (f_a \cdot s)$
    $f_a \leftarrow f(x_0)$

    if $|x_1 - x_0| < \delta$ **or** $|f_a| < \epsilon$ **then**
      return $(x_0, f_a, i, 0)$
    end if
  end for

  return error

end function

Zadanie 4 W tym zadaniu należało wyznaczyć pierwiastki funkcji $\sin x - \left(\frac{1}{2}x\right)^2$ przy użyciu metod zaprogramowanych w poprzednich zadaniach.

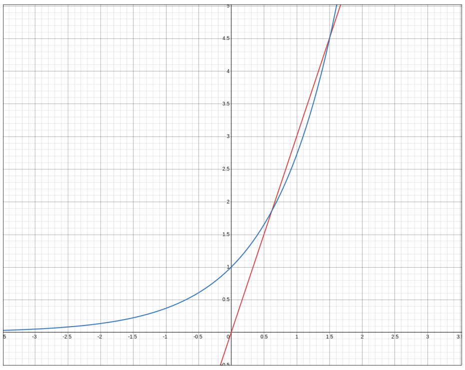
Wyniki dla poszczególnych metod przedstawia poniższa tabela:

Metoda	**x0**	**f(x0)**	**Iteracje**	**Czy błąd**
Medota bisekcji	1.9337539672851562	-2.7027680138402843e-7	16	false
Metoda Newtona	1.933753779789742	-2.2423316314856834e-8	4	0
Metoda siecznych	1.933753644474301	1.564525129449379e-7	4	false

Metoda bisekcji potrzebowała najwiecej iteracji, bo aż 16, podczas gdy pozostałe metody potrzebowały ich tylko 4. Metoda Newtora oraz siecznych mają mniejszą złożoność. Każda z metod obliczyła wartość pierwiastka z podobną dokładnością.

Zadanie 5. Wyznaczenie wartości zmiennej x, dla której wykresy $y = 3x$ oraz $y = e^x$ się przecinają.

W zadaniu tym posłużę się faktem, że skoro $3x = e^x$, to $3x - e^x = 0$. Dla takiej też funkcji będę wyszukiwał miejsce zerowe. Aby móc jednak wyznaczyć je tą metodą, muszę poznać, jak przebiega jej zmienność w celu odpowiedniego dobrania punktów a oraz b, dlatego też narysowałem wykresy obu funkcji:



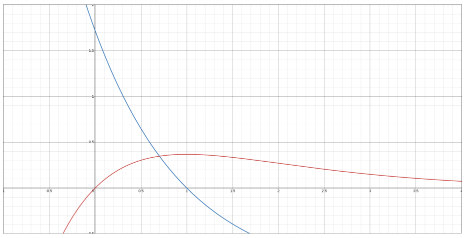
Wyniki przedstawia poniższa tabela

Przedział	**x0**	**f(x0)**	**Iteracje**	**Czy błąd**
[0.0, 1.0]	0.619140625	9.066320343276146e-5	9	false
[1.0, 2.0]	1.5120849609375	7.618578602741621e-5	13	false
[0.0, 2.0]	NaN	NaN	0	true

Jak widać, aby dobrze wyznaczyć punkty przecięcia funkcji (miejsca zerowe) przy użyciu metody bisekcji, powinno się posiadać informacje o przebiegu zmienności funkcji. W przypadku złebo dobrania przedziału, nie będzie można uzyskać prawidłowego wyniku (jak dla [0.0, 2.0], gdzie na jego krańcach funkcja nie zmienia znaku). W tym zadaniu, prawdopodobnie lepiej byłoby zastosować metodę Newtona bądź siecznych, gdyż nie wymagają one dokładnej znajomości jej przebiegu.

Zadanie 6. Znalezienie miejsc zerowych funkcji $f_1(x) = e^{1-x} - 1$ oraz $f_2(x) = xe^{-x}$ za pomocą trzech powyższych metod.

W celu wyznaczenia przedziału, zwizualizowałem wykresy tych funkcji:



Z powyższego wykresu można odczytać, że funkcja f_1 ma miejce zerowe w 1, a f_2 w 0.

Najpierw sprawdziłem, jakie wyniki otrzymam metodą bisekcji. Dobrałem w tym celu rózne przedziały.

Wyniki dla f1:

Przedział	x0	f(x0)	Iteracje	Czy błąd
[0.0, 1.0]	0.9999923706054688	7.629423635080457e-6	17	false
[-1.0, 1.0]	0.9999923706054688	7.629423635080457e-6	18	false
[-3.0, 3.0]	1.0000076293945312	-7.6293654275305656e-6	18	false
[-0.0, 2.0]	1.0	0.0	1	false

Wyniki dla f2:

Przedział	x0	f(x0)	Iteracje	Czy błąd
[0.0, 1.0]	7.62939453125e-6	7.62933632381113e-6	17	false
[-1.0, 1.0]	0.0	0.0	1	false
[-0.4, 0.5]	-1.5258789062623358e-6	-1.5258812345705489e-6	16	false
[-0.5, 0.5]	0.0	0.0	1	false

Można zauważyć, że dobrany przedział wpływa na dokładność wyniku, oraz na liczbę potrzebnych iteracji tej metody.

Dla metody Newtona przyjąłem $maxit = 100$.

Wyniki dla f1:

Początkowe x0	**x0**	**f(x0)**	**Iteracje**	**Czy błąd**
0.0	0.9999984358892101	1.5641120130194253e-6	4	0
0.5	0.9999999998878352	1.1216494399945987e-10	4	0
0.9999	0.9999999950001667	4.999833436158951e-9	1	0
1.0	1.0	0.0	0	0
2.0	0.9999999810061002	1.8993900008368314e-8	5	0
10.0	NaN	NaN	-	1

Wyniki dla f2:

Początkowe x0	**x0**	**f(x0)**	**Iteracje**	**Czy błąd**
-1.0	-3.0642493416461764e-7	-3.0642502806087233e-7	5	0
-1.0e-5	-9.99990000100624e-11	-9.999900002006219e-11	1	0
0.0	0.0	0.0	0	0
0.5	-3.0642493416461764e-7	-3.0642502806087233e-7	5	0
1.0	NaN	NaN	-	2
10.0	14.380524159896261	8.173205649825554e-6	4	0

W tej metodzie również odpowiednio dobrana wartość początkowa x_0 pozwala na ograniczenie liczby iteracji, oraz w ogóle na poprawność wyniku.

Metoda Newtona dla $f2$, w przypadku dobrania nieodpowiedniej wartości początkowej (np $x_0 > 1$) szuka miejsca zerowego zmierzając w kierunku zbiegania funkcji do 0 (bowiem, jak widać na wykresie, funkcja ta jest zbieżna do 0 w nieskończoności), co skutkuje nieprawidłowym wynikiem.

Dla metody siecznych przyjąłem taką samą wartość maxit.
Wyniki dla f1:

Początkowe x0	**Początkowe x1**	**x**	**f(x)**	**Iteracje**	**Czy błąd**
0.0	0.5	0.9999998133327657	1.8666725165594755e-7	5	false
0.5	0.6	0.9999946034580037	5.396556557624166e-6	4	false
0.9999	0.999999	0.9999999999500008	4.9999338003203775e-11	1	false
1.0	1.05	1.0	0.0	1	false
2.0	1.5	1.0000034269838276	-3.4269779555229363e-6	5	false
10.0	14.0	10.0	-0.9998765901959134	2	false

Wyniki dla f2:

Początkowe x0	**Początkowe x1**	**x**	**f(x)**	**Iteracje**	**Czy błąd**
-1.0	-0.5	-1.2229958402039555e-7	-1.2229959897758473e-7	6	false
-1.0e-5	-1.0e-7	-9.999949500039373e-13	-9.999949500049373e-13	1	false
0.0	0.5	0.0	0.0	1	false
0.5	0.3	-1.1876245840531925e-7	-1.187624725098416e-7	6	false
1.0	0.0	0.0	0.0	1	false
10.0	15.0	15.05105056651027	4.375005536508203e-6	1	false

Wybór odpowiednich wartości początkowych również i przy tej metodzie ma wpływ na ilość iteracji. Niepoprawne dobranie ich dla funkcji $f2$ również i tutaj powoduje pojawienie się skrajnie niepoprawnych wyników przez jej zbieżność do 0 w nieskończoności.

Dla metody bisekcji, przydatna jest znajomość przebiegu funkcji, aby odpowiednio dobrać przedział. Najlepsze wyniki są wtedy, gdy przedział jest odpowiednio wąski, a miejsce zerowe znajduje się na jego środku.

Dla metody Newtona oraz siecznych wpływ wartości początkowych x_0 oraz x_1 jest znaczny. Im są one lepszymi przybliżeniami faktycznego miejsca zerowego, tym dokładniejszy będzie wynik.