Números complejos

Tema 1

Juan. F. Navarro[1]

[1]Departamento de Matemática Aplicada
Universidad de Alicante

Alicante, 2020

Ecuaciones sin solución en $\mathbb{R}$

La ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tiene solución en $\mathbb{R}$.

$x^2 + 1 = 0$

$x^2 = -1$

$x = \pm\sqrt{-1}$

Veamos cómo resolvemos este problema.

Definición formal

Definimos en $\mathbb{R}^2$ una relación de equivalencia y dos operaciones, según las reglas siguientes:

Los pares (a, b) y (c, d) son iguales si, y sólo si, $a = c$ y $b = d$.

Adición: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$.

Producto: $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

Producto por un escalar: $\lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b)$.

El conjunto de pares ordenados dotado de las reglas anteriores tiene estructura de cuerpo y se denomina conjunto de los números complejos, que denotaremos mediante $\mathbb{C}$.

Definición formal

El subconjunto de los números complejos formado por los pares de la forma $(a, 0)$ es isomorfo a $\mathbb{R}$.

Si hacemos $i = (0, 1)$, entonces $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = -1$, de modo que i es la solución a la ecuación $x^2 + 1 = 0$.

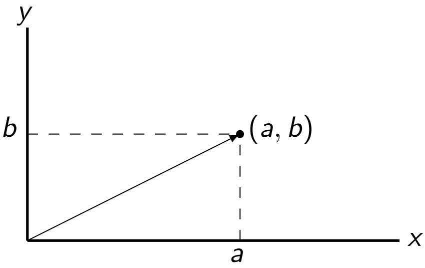
Además, $i(a, 0) = (0, 1) \cdot (a, 0) = (0, a)$, de modo que todo número complejo $z = (a, b)$ puede expresarse en la forma

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + i(b, 0) = a + ib\,.$$

Forma binómica

La forma binómica se basa en la introducción de $i = \sqrt{-1}$.

$z = a + ib \;\; a = \operatorname{Re} z$



Forma binómica

$z = a + ib$

Módulo del número complejo: $\|z\| = +\sqrt{a^2 + b^2}$

El número complejo conjugado de $z = a + ib$ es $\bar{z} = a - ib$

Podemos probar que

$$z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}\,(z)$$

y

$$z \cdot \bar{z} = \|z\|^2$$

Operaciones básicas en forma binómica

$$z_1 = a + ib$$
$$z_2 = c + id$$

$$z_1 + z_2 = (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib) \cdot (c - id)}{(c + id) \cdot (c - id)} = \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2} =$$
$$= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$

Operaciones básicas en forma binómica. Ejemplos

$z_1 = 3 - 2i$
$z_2 = 2 + 3i$
$z_3 = 3 - 4i$

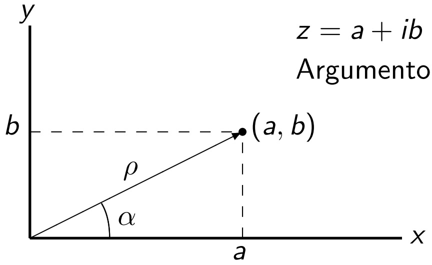
$$z_1 + z_2 = (3 - 2i) + (2 + 3i) = (3 + 2) + i(-2 + 3) = 5 + i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (3 - 2i) \cdot (2 + 3i) = (6 + 6) + i(9 - 4) = 12 + 5i$$

$$\frac{z_1 \cdot z_2}{z_3} = \frac{12 + 5i}{3 - 4i} = \frac{(12 + 5i) \cdot (3 + 4i)}{(3 - 4i) \cdot (3 + 4i)} = \frac{(36 - 20) + i(48 + 15)}{9 + 16} =$$

$$= \frac{16}{25} + i\frac{63}{25}$$

Forma polar y trigonométrica



$z = a + ib$

Argumento principal $\alpha \in [0, 2\pi)$

$a = \rho \cos \alpha$ $\qquad$ $b = \rho \sin \alpha$

$\rho = \|z\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\qquad$ $\tan \alpha = \dfrac{b}{a}$

Forma polar: $z = \rho_\alpha$

Forma trigonométrica: $z = a + ib = \rho \cos \alpha + i \rho \sin \alpha = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha)$

Propiedades del módulo

$z = a + ib \qquad a = \rho \cos\alpha \qquad b = \rho \sin\alpha$

$\rho = \|z\| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \tan\alpha = \dfrac{b}{a}$

1. $\|z\|^2 = z\bar{z}$
2. $\|z\| \geq 0$
3. $\|z_1 + z_2\| \leq \|z_1\| + \|z_2\|$
4. $\|z_1 z_2\| = \|z_1\| \, \|z_2\|$
5. Si $z_2 \neq 0$, entonces $\left\|\dfrac{z_1}{z_2}\right\| = \dfrac{\|z_1\|}{\|z_2\|}$
6. $\|\bar{z}\| = \|z\|$

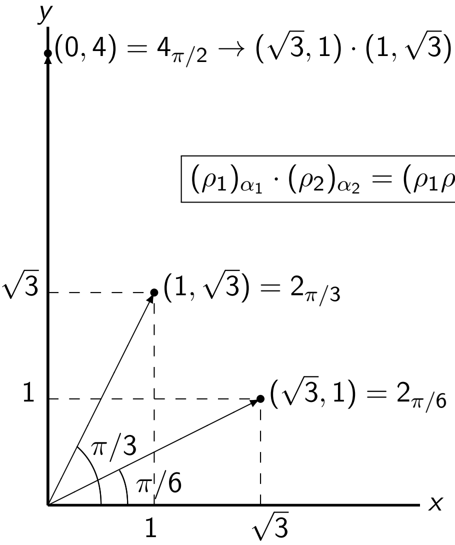
Operaciones en forma trigonométrica

$$z_1 = \rho_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)$$
$$z_2 = \rho_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)\rho_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2) =$$
$$= \rho_1\rho_2\left((\cos\alpha_1\cos\alpha_2 - \sin\alpha_1\sin\alpha_2) + i(\sin\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\alpha_1\sin\alpha_2)\right) =$$
$$= \rho_1\rho_2(\cos(\alpha_1+\alpha_2) + i\sin(\alpha_1+\alpha_2))$$

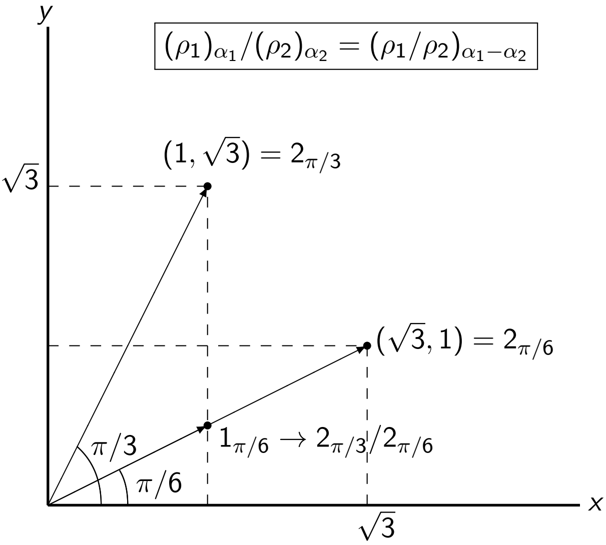
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\alpha_1-\alpha_2) + i\sin(\alpha_1-\alpha_2))$$

Operaciones en forma trigonométrica



$$\boxed{(\rho_1)_{\alpha_1}\cdot(\rho_2)_{\alpha_2} = (\rho_1\rho_2)_{\alpha_1+\alpha_2}}$$

Operaciones en forma trigonométrica



$$\boxed{(\rho_1)_{\alpha_1} \cdot (\rho_2)_{\alpha_2} = (\rho_1 \rho_2)_{\alpha_1 + \alpha_2}}$$

$$i = (0, 1) = 1_{\pi/2}$$

$$i^2 = 1_{\pi/2} \cdot 1_{\pi/2} = (1 \cdot 1)_{\pi/2+\pi/2} = 1_{\pi}$$

$$i^2 = -1 = (-1, 0) = 1_{\pi}$$

$$i^0 = 1 = (1, 0) = 1_0$$

$$i^4 = 1 = (1, 0) = 1_{2\pi}$$

$$i^3 = (0, -1) = 1_{3\pi/2}$$

$$i^3 = 1_{\pi/2} \cdot 1_{\pi} = (1 \cdot 1)_{\pi/2+\pi} = 1_{3\pi/2}$$

$$\boxed{i^n = 1_{n\pi/2}, \; n \in \mathbb{N}}$$

En 1833, William Rowan Hamilton da la primera definición algebraica rigurosa de los números complejos como pares de números reales.

Exponencial compleja. Fórmula de Euler

Fórmula de Euler: $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$

$e^{-i\alpha} = \cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha) = \cos\alpha - i\sin\alpha$

$z = a + ib$

Forma exponencial: $z = \rho e^{i\alpha} = \rho e^{i(\alpha+2\pi k)}$, $k \in \mathbb{Z}$

Recordemos que en la forma trigonométrica: $z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

Forma exponencial. Operaciones

$z_1 = \rho_1 e^{i\alpha_1}$

$z_2 = \rho_2 e^{i\alpha_2}$

Producto: $z_1 \cdot z_2 = (\rho_1 \cdot \rho_2) e^{i(\alpha_1+\alpha_2)}$

Ejemplo. Cálculo de $z_1 \cdot \left(e^{i\alpha}\right)$

$z_1 \cdot e^{i\alpha} = \left(\rho_1 e^{i\alpha_1}\right) \cdot \left(e^{i\alpha}\right) = \rho_1 e^{i(\alpha_1+\alpha)}$

Al multiplicar un número complejo por $e^{i\alpha}$
se produce una rotación de ángulo α
en el sentido contrario al de las agujas del reloj

Forma exponencial. Operaciones

$z_1 = \rho_1 e^{i\alpha_1}$

$z_2 = \rho_2 e^{i\alpha_2}$

Cociente: $\dfrac{z_1}{z_2} = \left(\dfrac{\rho_1}{\rho_2}\right) e^{i(\alpha_1-\alpha_2)}$

Ejemplo. Cálculo de $z_1/\left(e^{i\alpha}\right)$

$$\frac{z_1}{e^{i\alpha}} = \frac{\rho_1 e^{i\alpha_1}}{e^{i\alpha}} = \rho_1 e^{i(\alpha_1-\alpha)}$$

Al dividir un número complejo por $e^{i\alpha}$ se produce una rotación de ángulo α en el sentido de las agujas del reloj

Forma exponencial. Operaciones

$z = \rho e^{i\alpha}$

Potencia. Fórmula de Moivre: $z^n = (\rho e^{i\alpha})^n = \rho^n e^{in\alpha}$.

Raíz: $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho e^{i\alpha}} = \sqrt[n]{\rho e^{i(\alpha + 2\pi k)}} = \left(\rho e^{i(\alpha+2\pi k)}\right)^{1/n} = \sqrt[n]{\rho} e^{i(\alpha+2\pi k)/n}$,

con $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Ejemplo. Cálculo de $\sqrt{e^{i(\pi/4)}}$

$\sqrt{e^{i(\pi/4+2\pi k)}} = e^{i(\pi/4+2\pi k)/2} = e^{i(\pi/8+\pi k)}$

$(k=0) \to z_1 = e^{i\pi/8}$

$(k=1) \to z_2 = e^{i(\pi/8+\pi)}$

$(k=2) \to z_2 = e^{i(\pi/8+2\pi)} \to (k=0)$

$(k=3) \to z_2 = e^{i(\pi/8+3\pi)} \to (k=1)$

Forma exponencial. Operaciones

Logaritmo: $\ln z = \ln\left(\rho e^{i\alpha}\right) = \ln\left(\rho e^{i(\alpha+2\pi k)}\right) = \ln\rho + \ln e^{i(\alpha+2\pi k)} == \ln\rho + i(\alpha+2\pi k)$,

$$\text{con } k \in \mathbb{Z}.$$

Potencia compleja: $z^w = e^{w\ln z}$

$$z^w = e^{\ln z^w} = e^{w\ln z}.$$

Forma exponencial. Seno y coseno complejos

Dado un número complejo z, definimos:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Estas funciones cumplen las propiedades siguientes:

1. $\cos(-z) = \cos(z)$.
2. $\sin(-z) = -\sin z$.
3. Si $z = x \in \mathbb{R}$, las expresiones definen el coseno y seno reales.

Calcule $\sqrt[3]{-1-i}$

Forma polar de $z = -1 - i$:

$\rho = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\alpha = \arctan(-1/-1) = 5\pi/4$

$z = \sqrt{2}e^{i5\pi/4}$

$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{\sqrt{2}e^{i5\pi/4}} = \sqrt[3]{\sqrt{2}}e^{i(5\pi/4+2\pi k)/3}$, con $k = 0, 1, 2$.

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \sqrt[6]{2}e^{i5\pi/12} \\
z_2 &= \sqrt[6]{2}e^{i(5\pi/4+2\pi)/3} = \sqrt[6]{2}e^{i13\pi/12} \\
z_3 &= \sqrt[6]{2}e^{i(5\pi/4+4\pi)/3} = \sqrt[6]{2}e^{i21\pi/12}
\end{aligned}
$$

Calcule $\ln(1+i\sqrt{3})$

Forma polar de $z = (1+i\sqrt{3})$:

$\rho = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$\tan\alpha = \sqrt{3}$, de donde $\alpha = \pi/3$

$z = 1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3}$.

$$\ln z = \ln(1+i\sqrt{3}) = \ln(2e^{i\pi/3}) = \ln 2 + i\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right),\ k \in \mathbb{Z}.$$

Calcule $(1+i\sqrt{3})^i$

$(1+i\sqrt{3})^i = e^{\ln(1+i\sqrt{3})^i} = e^{i\ln(1+i\sqrt{3})}$.

Ahora, obtenemos la forma polar de $1+i\sqrt{3}$ para calcular su logaritmo: $\rho = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$, $\tan\alpha = \sqrt{3}$, de donde $\alpha = \pi/3$. Por consiguiente, $1+i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3}$.

$e^{i\ln(1+i\sqrt{3})} = e^{i\ln 2e^{i\pi/3}} = e^{i\left(\ln 2 + i\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)\right)}$.

Operando,

$e^{i\left(\ln 2 + i\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)\right)} = e^{i\ln 2 - \left(\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)} = e^{-\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)}e^{i\ln 2}$, donde $k \in \mathbb{Z}$.

Fórmula para la raíz cuadrada de un número complejo en forma binómica

$$\sqrt{z} = \sqrt{x+iy} = \pm\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}(\|z\|+x)} + i(\operatorname{sign} y)\sqrt{\tfrac{1}{2}(\|z\|-x)}\right)$$

$\sqrt{i}$

$z = i$

$x = 0$

$y = 1$

$\|z\| = 1$

$$\sqrt{z} = \pm\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}(1)} + i\sqrt{\tfrac{1}{2}(1)}\right) = \pm\tfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$$

Resuelva la ecuación compleja $z^2-(1+7i)z-10+5i=0$

$$z=\frac{(1+7i)\pm\sqrt{(-1-7i)^2-4(-10+5i)}}{2}=\frac{(1+7i)\pm\sqrt{-8-6i}}{2}.$$

Usando la fórmula

$$\sqrt{z}=\sqrt{x+iy}=\pm\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}(\|z\|+x)}+i(\operatorname{sign} y)\sqrt{\tfrac{1}{2}(\|z\|-x)}\right),$$

obtenemos

$$\pm\sqrt{-8-6i}=\pm\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}(10-8)}-i\sqrt{\tfrac{1}{2}(10+8)}\right)=\pm(1-3i).$$

De este modo,

$$z=\frac{(1+7i)\pm\sqrt{-8-6i}}{2}=\frac{(1+7i)\pm(1-3i)}{2}=\left\{\begin{array}{l}1+2i\\ 5i\end{array}\right..$$