(Section 2) 벡터공간

(subsection 2.1.) Vector Space

(표기법 2.1.1) F^{n} = \mathfrak{M}\_{n,1}(F).

(정의 2.1.2) F가 위와 같고, 집합 V에 덧셈과 상수곱이 주어져 있을 때, 다음 연산규칙들을 만족하면 V를 F 위의 벡터공간 (vector space over F, 혹은 F-vector space) 라 부른다. 또, V의 원소들을 vector라 부르고, F의 원소를 scalar라 부른다.

u,v,w \in V 이면, (u+v) +w = u + (v + w) (덧셈의 결합법칙)

v, w \in V 이면 , v + w = w + v (덧셈의 교환법칙)

[모든 v \in V 에 대하 v + 0 = v] 인 0 \in V 존재 (덧셈의 항등원)

v \in V 이면, v + (-v) = 0 인 -v \in V 존재. (덧셈의 역원)

a,b \in F , v \in V 이면, (a + b) v = av + bv (분배법칙)

a \in F, v, w \in V 이면, a(v+w) = av + aw (분배법칙)

a, b \in F, v \in V 이면, a(bv) = (ab)v

v \in V 이면, 1v = v

(관찰 2.1.3)

vector space V 의 덧셈의 항등원 0 \in V 는 유일하다.

v \in V 이면, v의 덧셈의 역원 -v \in V 는 유일하다.

(표기법 2.1.4) 유일성이 보장된 0 \in W 를 the zero vector 라 부른다. v \in w 일 때, v -w = v + (-w) 로 쓴다.

(Cancellation law) (관찰 2.1.5) u,v,w \in V 이면, 다음 [u + v = u + w] \implies [v = w] 이 성립한다. 즉, u + v = u + w 양 변에서 u 를 cancel 할 수 있다.

(관찰 2.1.7) v \in V 이고 a \in F 이면,

0v = 0.

a0 = 0 \in V.

-v = (-1) v.

-(av) = (-a) v.

-(av) = a(-v).

(subsection 2.2) Subspace

(정의 2.2.2) W가 F-vector space V 의 subset 일 때 (즉, W \subseteq V 일 때,) V로부터 물려받은 덧셈과 상수곱에 대하여 ,W 자신이 F-vector space 가 되면, 우리는 W를 V의 F-subspace (부분공간, 혹은 간단히 subspace) 라 부르고, W \le V 로 표기한다.

(관찰 2.2.3) F-vector space V 의 non-empty subset W 가 V의 subspace 일 필요충분조건은 다음과 같다. 즉, W가 덧셈과 상수곱에 대해 닫혀있으면 , V의 subspace 가 된다.

w\_{1} , w\_{2} \in W 이면, w\_{1} + w\_{2} \in W.

w \in W 이고 a \in F 이면, aw \in W.

(관찰 2.2.5) U \le W 이고 W \le V 이면, U \le V 이다. (subspace의 subspace는 subspace이다.)

(표기법 2.2.6) W\_{1} , \cdots, W\_{k} \subseteq U 일 때, \sum\_{i = 1}^{k} W\_{i} = W\_{1} + \cdots + W\_{k} = {w\_{1} + \cdots + w\_{k} | w\_{1} \in W\_{1}, \cdots, w\_{k} \in W\_{k}} 로 표기하고 W\_{1} \cdots , W\_{k} 의 합(sum)이라고 부른다.

(subspace 2.4) Isomorphism

(정의 2.4.1) V와 V’ 이 F-vector space 이고, 다음 조건

\phi(v\_{1} + v\_{2}) = \phi(v\_{1}) + \phi(v\_{2}) , (v\_{1}, v\_{2} \in V)

\phi(av) = a \phi(v) (v \in V, a \in F)

을 만족하는 bijection \phi: V \to V’ 이 존재하면, 우리는 F-vector space V 와 V’ 이 isomorphic 하다 말하고, V \approx V’ 혹은 \begin{tikzpicture}\matrix (m) [matrix of math nodes,row sep=3em,column sep=4em,minimum width=2em] {V &V’ \\}; \path[-stealth] (m-1-1) edge node [above] {$\phi$} node [below]{$\approx$} (m-1-2);\end{tikzpicture}

로 표기한다. 이 때, \phi 를 (F-vector space) isomorphism (from V onto V’) 이라고 부른다.

(관찰 2.4.2) \phi : V \to W 가 isomorphism 이면, \phi(0) = 0 이고, 모든 v \in V에 대해 \phi(-v) = -\phi(v) 이다.

(관찰 2.4.4) 위 (정의 2.4.1) 의 relation \approx 는 equivalence relation 이다.

(Section 3) 기저와 차원

(subsection 3.1) Linear Combination

(정의 3.3.1) (가) v\_{1}, \cdots, v\_{n} \in V 일 때, a\_{1}v\_{1} + a\_{2}v\_{2} + \cdots + a\_{n}v\_{n} = \sum\_{i = 1}^{n} a\_{i}v\_{i} , (단, a\_{1}, \cdots, a\_{n} \in F) 꼴의 vector를 우리는 {v\_{1}, \cdots, v\_{n}} 의 일차결합 (F-linear combination) 이라고 부른다.

(나) S \subset V 일 때, (S가 무한집합이라면) v \in V 가 S의 일차결합이라는 말은 v가 [S\_{0} 의 일차결합] 인 유한집합 S\_{0} \subseteq S 가 존재하냐는 뜻이다. (매번 S \neq 0 이라는 조건을 다느니, \empty 의 일차결합 전체의 집합은 {0} 이라고 약속하는 것이 간편하다.)

(관찰 3.1.3) S \subsetqe V 일 때, [S 의 linear combination 전체의 집합] 은 V의 부분공간이 된다.

(정의 3.1.4) S \subseteq V 일 때, S를 포함하는 가장 작은 V의 subspace를 \langle S \rangle 로 표기하고, \langle S \rangle 를 subspace generated by S (혹은 subspace spanned by S, S 가 생성한 부분공간) 이라고 부른다. (여기에서, [S를 포함하는 가장 작은 V의 subspace] 라는 말은 S \subseteq \langle S \rangle \le V 이면서, 만약 S \subseteq W \le V 이면, \langle S \rangle \le W 라는 뜻이다.)

(보조정리 3.1.5) S \subseteq V 이면, \langle S \rangle = \bigcap\_{S \subseteq W \le V} W 이다. 이로부터 \langle S \rangle 의 existence 와 uniqueness 가 얻어진다.

(명제 3.1.6) S \subseteq V 이면, \langle S \rangle 는 [S 의 linear combination 전체의 집합] 과 같다.

(subsection 3.2) 일차독립과 일차종속

(정의 3.2.1) (가) 유한집합 {v\_{1}, \cdots, v\_{n}} \subseteq V 가 다음 조건 a\_{1}v\_{1} + a\_{2}v\_{2} + \cdots + a\_{n}v\_{n} = 0 이면, a\_{1} = \cdots = a\_{n} = 0 (단, a\_{i} \in F ) 를 만족하면, 우리는 {v\_{1}, \cdots, v\_{n}} 을 일차독립 (F-linearly independent) 인 부분집합이라고 부른다.

(나) \empty \neq S \subseteq V 일 때, S가 일차독립이라는 말은 S의 모든 finite subset 이 일차독립이라는 뜻이다.

(다) \empty \neq S \subseteq V 가 일차독립이 아니면 일차종속 (F-linearly dependent) 이라고 말한다.

(관찰 3.2.2) 유한집합 S 가 일차독립이면, S의 모든 non-empty subset 도 일차독립이다.

(관찰 3.2.7) {v\_{1}, \cdots, v\_{n}} \subseteq V 일 때, 다음 세 조건은 동치이다.

{v\_{1}, \cdots, v\_{n}} 는 일차독립이다.

{v\_{1}, \cdots, v\_{n}} 의 일차결합으로 zero vector 0 를 표현하는 방법은 하나 – 즉 0v\_{1} + \cdots, 0v\_{n} = 0 – 뿐이다.

어떤 v \in V 가 {v\_{1}, …, v\_{n}} 의 일차결합으로 표현된다면, 그 표현법은 하나뿐이다.

(subsection 3.3) Vector space 의 Basis

(정의 3.3.1) V가 vector space 이고 \empty \neq \mathfrak{B} \subseteq V 일 때,

\langle \mathfrak{B} \rangle = V (즉 \mathfrak{B} generates V) ,

\mathfrak{B} 는 linearly independent

이면, 우리는 \mathfrak{B} 를 V의 기저 (basis, F-basis) 라고 부른다.

(관찰 3.3.2) 다음 조건은 동치이다.

\mathfrak{B} 는 V의 basis 이다.

V의 모든 vector 는 \mathfrak{B} 의 linear combination 으로 표현할 수 있고, 그 표현법은 하나 뿐이다.

(정의) e\_{i} \in F^{n} 을 i-번째 좌표만 1 이고 나머지 좌표는 0인 표준단위벡터라고 하면, \mathcal{E} = {e\_{1}, …, e\_{n}} 은 F^{n} 의 기저이다. 우리는 \mathcal{E} 를 F^{n} 의 표준기저 (standard basis, Euclidean basis) 라고 부른다.

(정의 3.3.5) 유한집합 \mathfrak{B} = {v\_{1}, …, v\_{n}} 이 V의 F-basis 라고 하자. v \in V 가 v = a\_{1}v\_{1} + a\_{2}v\_{2} + \cdots + a\_{n}v\_{n} 으로 표현될 때 (이러한 표현은 항상 유일한 방법으로 가능하다) 우리는 F^{n} 의 vector (a\_{1}, …, a\_{n}) 을 [basis \mathfrak{B} 에 관한 v의 좌표] 라고 부르고, [v]\_{\mathfrak{B}} = ^{t}(a\_{1}, …, a\_{n}) 으로 표기한다.

(관습 3.3.6) v\_{1}, …, v\_{n} 의 순서가 고정된 기저 \mathfrak{B} = {v\_{1}, …, v\_{n}} 을 ordered basis 라고 부른다. 더불어 우리가 단순히 basis라 말할 때도 언제나 ordered basis 를 의미하는 것으로 약속한다. 즉, basis = ordered basis 가 우리의 관습이다.

(명제 3.3.11) A = (a\_{ij}) \in \mathfrak{M}\_{n,n} (F) 가 가역이고, {v\_{1}, …, v\_{n}} 이 V의 기저일 때, w\_{j} = \sum\_{i = 1}^{n} a\_{ij} v\_{i} (j = 1,…,n) 이라고 정의하면, {w\_{1}, …, w\_{n}} 도 V의 기저이다.

(따름명제 3.3.12) A = (a\_{ij}) \in \mathfrak{M}\_{n,n} (F) 가 가역이면, {[A]^{1}, …., [A]^{n}} 은 F^{n} 의 기저이다. (단, [A]^{j} 는 행렬 A의 j-th column.)

(subsection 3.4) Basis의 존재

(정리 3.4.3) 모든 non-zero vector space 는 basis 를 갖는다.

(section 3.5) Vector space 의 Dimension

(정리 3.5.1) Vector space V 가 basis \mathfrak{B} 와 \mathfrak{C} 를 가지면, |\mathfrak{B}| = |\mathfrak{C}| 이다.

(보조정리 3.5.2) Vector space V 가 finite basis \mathfrak{B} = {v\_{1}, …, v\_{n}} 를 갖는다고 하자. 이 때, 만약 \mathfrak{C} = {w\_{1}, …, w\_{n}} \subseteq V 이고 n < m 이면, \mathfrak{C} 는 linearly independent 이다.

(정의 3.5.4) 벡터공간 V가 F-basis \mathfrak{B} 를 가질 때, \mathfrak{B} 의 원소수 |\mathfrak{B}| 를 V의 차원(dimension) 이라 부르고, dim\_{F} V = dim V 로 표기한다. (dim 0 = 0) dim V 가 유한이면, 우리는 V를 유한차원 (finite dimensional) 벡터공간이라고 부른다. 무한이면 무한차원 벡터공간이라 부른다.

finite dimensional vector space 를 앞으로 f.d.v.s 라 줄여서 표기한다.

(Basis extension theorem) (정리 3.5.5) S가 V의 linearly independent subset이면, S를 포함하는 V의 basis 가 존재한다.

(Basis extension theorem) (따름정리 3.5.6) V가 f.d.v.s. 이고 W \le V 라고 하자. 만약 {w\_{1}, …, w\_{r}} 이 W의 기저이면 이를 확장하여 V의 기저 {w\_{1}, …, w\_{r}, v\_{1}, …, v\_{s}} 를 찾을 수 있다. (단, s \ge 0)

(따름정리 3.5.8) V가 f.d.v.s. 이고 W \le V 이면,

W도 f.d.v.s. 이고, dim W \le dim V 이다.

만약 dim W = dim V 이면, W = V 이다.

(따름정리 3.5.9) S \subseteq V 이고 |S| = dim V < \infty 이면, 다음 조건은 동치이다.

S는 V의 기저이다.

S는 일차독립이다.

\langle S \rangle = V 이다.

(subsection 3.6) 우리의 철학

(관찰 3.6.6) \phi : V \to W 가 isomorphism 일 때, \mathfrak{B} 가 V의 기저이면, \phi( \mathfrak{B}) 는 W의 기저이고, 따라서 dim V = dim W 이다.

(우리의 철학 1) Isomorphism 의 철학

up to isomorphism 같은 벡터공간은 덧셈과 상수곱에 의해 묘사되는 성질이 같다.

(우리의 철학 2) Identification 의 철학

up to isomorphism 같고 표기법만 다르다면 표기법을 고쳐서 표기법도 같게 만들면 된다.

(Section 4) 선형사상

(subsection 4.1) Linear map

(정의 4.1.1) V,W 가 F-위의 벡터공간일 때, 함수 L : V \to W 가 다음 조건을 만족하면 L을 linear map (선형사상, linear mapping, linear transformation from V into W) 라고 부른다.

L(v\_{1} + v\_{2}) = L(v\_{1}) + L(v\_{2}) (v\_{1}, v\_{2} \in V)

L(av) = aL(v) ( v \in V , a \in F)

(관찰 4.1.2) L : V \to W 가 linear map 일 때,

L(0) = 0

v \in V 이면, L(-v) = -L(v)

u,v \in V 이면, L(u-v) = L(u) – L(v)

(정의 4.1.3) L : V \to W 가 linear map일 때,

L 이 injective (단사) 이면, L을 monomorphism 이라 부른다.

L 이 surjective (전사) 이면, L 을 epimorphism 이라고 부른다.

L 이 bijective (전단사) 이면, L을 isomorphism 이라고 부른다.

V = W 이면, L 을 endomorphism, 혹은 Linear operator, 혹은 간단히 operator 라 부른다.

Bijective endomorphism 은 automorphism 이라고 부른다.

(관찰 4.1.4) L : V \to W 가 linear map 일 때, 다음 조건은 동치이다.

L 은 isomorphism.

[M \bullet L = I\_{V} 이고 L \bullet M = I\_{W} ] 인 linear map M : W \to V 가 존재.

(정의 4.1.5) L : V \to W 가 linear map 일 때,

ker L = L^{-1} (0) = {v \in V | L(v) = 0} 을 L 의 kernel 이라고 부른다.

im L = L(V) = {L(v) | v \in V} 를 L의 image 라고 부른다.

(관찰 4.1.6) L : V \to W 가 linear map 이면, ker L \le V , im L \le W 이다.

(관찰 4.1.8) L : V \to W 가 linear map 일 때, 다음 조건은 동치이다.

L 은 monomorphism 이다.

u,v, \in V 이고 Lu = Lv 이면, u = v 이다.

v \in V 이고 Lv = L0 이면, v = 0 이다.

ker L = 0 이다.

(관찰 4.1.9) L : V \to W 가 linear 이고, S \subseteq V 이면, L\langle S \rangle = \langle LS \rangle 이다.

(관찰 4.1.12) L : V \to W 가 linear map 일 때, 다음 조건은 동치이다.

L 은 isomorphism 이다.

L 은 basis 를 basis 로 옮긴다.

(표기법 4.1.13) U \le V 이고 v \in V 일 때, v + U = {v + u | u \in U} 의 notation 을 쓴다.

(subsection 4.2) Linear map 의 보기

(관찰 4.2.7) 두 선형사상의 합성은 다시 선형사상이다. 즉, M : U \to V 와 L : V \to W 가 linear 이면, L \bullet M : U \to W 도 linear 이다.

(정의 4.2.10) A \in \mathfrak{M}\_{m,n} (F) 일 때, L\_{A} : F^{n} \to F^{m} 을 L\_{A}(X) = AX (X \in F^{n}) 으로 정의하면, L\_{A} 가 linear map 인 것은 자명하다. L\_{A} 를 matrix A 에 대응하는 linear map 이라 부른다.

(subsection 4.3) Dimension Theorem

(Dimension Theorem) (정리 4.3.1) V, W 가 f.d.v.s 이고, L : V \to W 가 linear map 이면, dim V = dim ker L + dim im L 이다.

(따름정리 4.3.2) V,W 가 f.d.v.s. 이고 dim V = dim W 일 때, L : V \to W 가 linear map 이면 다음 세 조건은 동치이다.

L 은 isomorphism. (즉, L은 bijection)

L 은 monomorphism (즉, L 은 injection)

L 은 epimorphism (즉, L 은 surjection)

(Pigeonhole Principle) (정리 4.3.4) X,Y 가 (non-empty) finite set 이고 |X| = |Y| 일 때, f : X \to Y 가 함수이면 다음 세 조건은 동치이다.

f는 bijection.

f 는 injection.

f 는 surjection.

(따름정리 4.3.6) V,W 가 f.d.v.s. 이고 L : V \to W 가 linear map 일 때,

L 이 monomorphism 이면, dim V \le dim W.

L 이 epimorphism 이면, dim V \ge dim W.

(subsection 4.4) Rank Theorem

(정의 4.4.1) A \in \mathfrak{M}\_{m,n} (F) 일 때, A 의 i-번째 row 는 [A]\_{i} 로 표기하고, A의 j-번째 column 은 [A]^{j} 로 표기한다. \mathfrak{M}\_{1,n}(F) 의 부분공간 \langle [A]\_{1}, …, [A]\_{m} \rangle 을 A의 rowspace 라 부른다. A 의 row space 의 dimension 은 A 의 row rank 라 부른다. 마찬가지로, A의 column space 는 F^{m} 의 부분공간 \langle [A]^{1} , …, [A]^{n} \rangle 이고, 그 dimension 은 A의 column rank 라고 부른다.

(관찰 4.4.3) 행렬 A에 elementary row operation 을 수행해도 A의 row space 는 변화하지 않는다. 따라서, [A 로부터 얻어지는 row-reduced echelon form 의 row space] 와 [A 의 row space ] 는 같다.

(Rank Theorem) (정리 4.4.4) A \in \mathfrak{M}\_{m,n} (F) 이면, [row rank of A] = [column rank of A] 이다.

(정의 4.4.5) A \in \mathfrak{M}\_{m,n}(F) 일 때, A의 row rank (혹은 column rank) 를 간단히 A의 rank 라 부르고 rk(A) 로 표기한다.

(따름정리 4.4.6) A \in \mathfrak{M}\_{m,n} (F) 일 때, homogeneous linear equation (\*) AX = 0 의 solution space 의 dimension 은 n – rk(A) 이다.

(따름정리 4.4.7) 행렬 A에 elementary row operation 을 수행해도 (A의 column space 는 변화하지만) A의 column rank 는 변화하지 않는다.

(subsection 4.5) Linear extension theorem

(관찰 4.5.1) \mathfrak{B} = {v\_{1}, …, v\_{n}} 이 V의 basis 이고 L, M : V \to W 가 linear 일 때, [L(v\_{i}) = M(v\_{i}) for all i] 이면, L = M 이다. 즉, 선형사상은 기저에서의 값이 결정한다.

(Linear extension theorem) (정리 4.5.3) \mathfrak{B} 가 V의 basis 이고 f : \mathfrak{B} \to W 가 함수이면, L|\_{\mathfrak{B}} = f 인 linear map L : V \to W 가 유일하게 존재한다.

(Classification of Vector Spaces) (따름정리 4.5.10) V,W 가 F-vector space 일 때, 다음은 동치이다.

V \approx W

dim V = dim W

(Classification of f.d.v.s) (따름정리 4.5.11) f.d.v.s. V 의 dimension 이 n 이면, V \approx F^{n} 이다.

(Section 5) 기본정리

(subsection 5.1) Vector space of linear maps

(정의 5.1.1) V,W 가 F-vector space 일 때, \mathfrak{L} (V,W) = {L : V \to W | L 은 linear map} 으로 정의한다. 그리고, [L,M \in \mathfrak{L}(V,W) 의 합 L + M ] 과, [scalar a \in F 와 L \in \mathfrak{L}(V,W) 의 상수곱 aL] 을 각각 (L + M) (v) = L(v) + M(v) , (aL)(v) = aL(v) (v \in V) 로 정의하면 \mathfrak{L} (V,W) 도 벡터공간이 된다.

(정의 5.1.5) V가 벡터공간일 때, V^{\*} = \mathfrak{L} (V,F) 로 정의하고, 우리는 V^{\*} 를 V 의 dual space (쌍대공간) 이라고 부른다. 또, V^{\*} 의 원소는 linear functional 이라고 부른다. 뿐만 아니라, 우리는 dual 의 dual , 즉 (V^{\*})^{\*} = V^{\*\*} = \mathfrak{L}(V^{\*} , F) 도 생각하게 된다. V^{\*\*} 는 V의 double dual 이라고 부른다.

(관찰 5.1.7) V가 f.d.v.s. 이면, dim V^{\*} = dim V 이다.

(정의 5.1.8) f.d.v.s V 에 대해 우선 \mathfrak{B} = {v\_{1}, …, v\_{n}} 을 V의 기저라고 하자. v\_{i}^{\*} \in V^{\*} 를 v\_{i}^{\*} (v\_{j}) = \delta\_{ij} (1 \le i,j \le n ) 이라 정의한다. 이제 \mathfrak{B}^{\*} = {v\_{1}^{\*} , …, v\_{n}^{\*}} 가 V^{\*} 의 basis 이다. 이 \mathfrak{B}^{\*} = {v\_{1}^{\*} , …, v\_{n}^{\*}} 를 \mathfrak{B} 의 dual basis 라 부른다.

(관찰 5.1.9) V,W 가 f.d.v.s. 이면, dim \mathfrak{L} (V,W) = (dim V) \cdot (dim W) 이다.

(subsection 5.2.) 기본정리 ; 표준기저의 경우

(표기법 5.2.1) 이 절에서는 다음과 같은 notation 을 사용한다.

V = F^{n} ; dim V = n , [F^{n} 의 표준기저 ] = \mathcal{E} = {e\_{1}, …, e\_{n}} .

W = F^{m} ; dim W = m , [F^{m} 의 표준기저 ] = \mathcal{F} = {f\_{1}, …, f\_{m}} .

U = F^{r} ; dim U = r , [F^{r} 의 표준기저 ] = \mathcal{G} = {g\_{1}, …, g\_{r}} .

(정의 5.2.2) L \in \mathfrak{L}(F^{n} , F^{m}) 일 때,

L(e\_{1}) = \begin{pmatrix}a\_{11} \\ a\_{21} \\ \vdots \\ a\_{m1} \end{pmatrix} , L(e\_{2}) = \begin{pmatrix}a\_{12} \\ a\_{22} \\ \vdots \\ a\_{m2} \end{pmatrix} , \cdots , L(e\_{n}) = \begin{pmatrix}a\_{1n} \\ a\_{2n} \\ \vdots \\ a\_{mn} \end{pmatrix}

이라고 표기하자. (단, a\_{ij} \in F) 이를 한 줄로 줄이면 L(e\_{j}) = \sum\_{i = 1}^{j} a\_{ij} \mathbf{f}\_{i} ( j = 1,…,n) 이 된다. 이때, 우리는

[L]\_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} = [L] = (a\_{ij}) = \begin{pmatrix} a\_{11} & a\_{12} & a\_{13} & \cdots & a\_{1n} \\ a\_{21} & a\_{22} & a\_{23} & \cdots & a\_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a\_{m1} & a\_{m2} & a\_{m3} & \cdots & a\_{mn} \end{pmatrix}

으로 정의하고, [L]\_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} = [L] 를 표준기저 \mathcal{E} 와 \mathcal{F} 에 관한 L 의 행렬(행렬표현) 이라고 부른다. matrix of L with respect to \mathcal{E} and \mathcal{F} 라고 부른다.

(선형대수학의 기본정리) (정리 5.2.3) 함수 \Phi\_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} = \Phi : \mathfrak{M}\_{m,n} (F) \to \mathfrak{L}(F^{n} , F^{m}) 을 \Phi(A) = L\_{A} (A \in \mathfrak{M}\_{m,n} (F)) 으로 정의하자. 또, 함수 \Psi\_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} = \Psi : \mathfrak{L} (F^{n}, F^{m}) \to \mathfrak{M}\_{m,n} (F) 를 \Psi(L) = [L]\_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} = [L], (L \in \mathfrak{L}(F^{n}, F^{m})) 이라고 정의하면,

\Phi 는 isomorphism 이고 \Psi 는 그의 inverse map 이다.

B \in \mathfrak{M}\_{r,m} (F) 이고 A \in \mathfrak{M}\_{m,n}(F) 이면, \Phi\_{\mathcal{G}}^{\mathcal{F}} (B) \bullet \Phi\_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} (A) = \Phi\_{\mathcal{G}}^{\mathcal{E}} (BA) , 즉 L\_{B} \bullet L\_{A} = L\_{BA} 가 성립한다. 또, L \in \mathfrak{L}(F^{n}, F^{m}) 이고 M \in \mathfrak{L}(F^{m} , F^{r}) 이면, \Psi\_{\mathcal{G}}^{\mathcal{F}} (M) \cdot \Psi\_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} (L) = \Psi\_{\mathcal{G}}^{\mathcal{E}} (M \bullet L) , 즉 [M]\_{\mathcal{G}}^{\mathcal{F}} \cdot [L] \_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} = [M \bullet L]\_{\mathcal{G}}^{\mathcal{E}} 가 성립한다.

(따름정리 5.2.5)

모든 linear map L : F^{n} \to F^{m} 은 L\_{A} 의 꼴이고, 이 때, A \in \mathfrak{M}\_{m,n} (F) 는 유일하게 결정된다.

A \in \mathfrak{M}\_{m,n}(F) 이면, [L\_{A}] = A 이다.

L \in \mathfrak{L}(F^{n}, F^{m}) 이면, L\_{[L]} = L 이다. 따라서, L(X) = [L] \cdot X , (X \in F^{n}) 이다.

(subsection 5.3) 기본정리 ; 일반적인 경우

(표기법 5.3.1) 이 절에서는 다음과 같은 notation 을 사용한다.

V; dim V = n , [V 의 기저 ] = \mathfrak{B} = {v\_{1}, …, v\_{n}} .

W; dim W = m , [W 의 기저 ] = \mathfrak{C} = {w\_{1}, …, w\_{m}} .

U; dim U = r , [U 의 기저 ] = \mathfrak{D} = {u\_{1}, …, u\_{r}} .

위의 기저들은 모두 ordered basis 이며 모두 고정된 (fixed) 것으로 생각한다.

(정의 5.3.2) L \in \mathfrak{L} (V,W) 일 때

\begin{cases} L(v\_{1}) = a\_{11}w\_{1} + a\_{21}w\_{2} + \cdots + a\_{m1}w\_{m} \\ L(v\_{2}) = a\_{12}w\_{1} + a\_{22}w\_{2} + \cdots + a\_{m2}w\_{m} \\ \vdots \\ L(v\_{n}) = a\_{1n}w\_{1} + a\_{2n}w\_{2} + \cdots + a\_{mn}w\_{m} \end{cases}

이라고 표기하자. (단, a\_{ij} \in F). 이를 한 줄로 줄이면 L(v\_{j}) = \sum\_{i = 1}^{m} a\_{ij} w\_{i} (j = 1, …, n) 이 된다. 이 때, 우리는

[L]\_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}} = (a\_{ij}) = \begin{pmatrix} a\_{11} & a\_{12} & a\_{13} & \cdots & a\_{1n} \\ a\_{21} & a\_{22} & a\_{23} & \cdots & a\_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a\_{m1} & a\_{m2} & a\_{m3} & \cdots & a\_{mn} \end{pmatrix}

으로 정의하고, [L]\_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}} \in \mathfrak{M}\_{m,n}(F) 를 기저 \mathfrak{C} 와 \mathfrak{B} 에 관한 L 의 행렬(행렬표현) 이라고 부른다. matrix of L with respect to \mathfrak{C} and \mathfrak{B} 라고 부른다.

(선형대수학의 기본정리) (정리 5.3.5) 함수 \Phi\_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}} : \mathfrak{M}\_{m,n} (F) \to \mathfrak{L}( V, W ) 을 [(\Phi\_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}} (A))(v)] \_{\mathfrak{C}} = A \cdot [v]\_{\mathfrak{B}} (A \in \mathfrak{M}\_{m,n} (F) , v \in V) 으로 정의하자. 또, 함수 \Psi\_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}} : \mathfrak{L} (V , W ) \to \mathfrak{M}\_{m,n} (F) 를 \Psi\_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}} (L) = [L] \_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}} (L \in \mathfrak{L}(F^{n}, F^{m})) 이라고 정의하면,

\Phi\_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}} 는 isomorphism 이고 \Psi\_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}} 는 그의 inverse map 이다.

B \in \mathfrak{M}\_{r,m} (F) 이고 A \in \mathfrak{M}\_{m,n}(F) 이면, \Phi\_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{C}} (B) \bullet \Phi\_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}} (A) = \Phi\_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{B}} (BA) 가 성립한다. 또, L \in \mathfrak{L}(V, W ) 이고 M \in \mathfrak{L}(W , U ) 이면, \Psi\_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{C}} (M) \cdot \Psi\_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}} (L) = \Psi\_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{B}} (M \bullet L) , 즉 [M]\_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{C}} \cdot [L]\_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}} = [M \bullet L] \_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{B}} 가 성립한다.

(따름정리 5.3.6) L \in \mathfrak{L} (V,W) 이고 v \in V 이면, [L(v)]\_{\mathfrak{C}} = [L]\_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{B}} \cdot [v]\_{\mathfrak{B}} 이다.

(subsection 5.4) 기본정리의 결과와 우리의 철학

(우리의 철학 3) 행렬과 선형사상은 같은 것이다. (단, [곱셈] = [합성])

(따름정리 5.4.12) A \in \mathfrak{M}\_{n,n}(F) 일 때, 다음 조건은 동치이다.

A는 invertible matrix.

L\_{A} : F^{n} \to F^{n} 은 isomorphism.

이 때, (L\_{A})^{-1} = L\_{A^{-1}} 이다.

(총정리 5.4.17) A \in \mathfrak{M}\_{n,n}(F) 일 때, 다음 조건들은 동치이다.

A는 invertible matrix.

A 는 left inverse 를 갖는다. 즉 BA = I 인 B \in \mathfrak{M}\_{n,n}(F) 가 존재.

A 는 right inverse 를 갖는다. 즉 AB = I 인 B \in \mathfrak{M}\_{n,n}(F) 가 존재.

L\_{A} : F^{n} \to F^{n} 은 isomorphism

L\_{A} : F^{n} \to F^{n} 은 monomorphism

L\_{A} : F^{n} \to F^{n} 은 epimorphism

{[A]^{1} , …, [A]^{n}} 은 F^{n} 의 basis.

{[A]^{1}, …, [A]^{n}} 은 일차독립

\langle [A]^{1} , …, [A]^{n} \rangle = F^{n} .

rk(A) = n.

AX = B 는 unique solution 을 갖는다.

AX = 0 은 trivial solution 만을 갖는다.

위 조건들에 A 대신 ^{t}A 를 대입한 모든 조건들.

(우리의 철학 4) 선형사상 L : V \to W 는 L\_{A} : F^{n} \to F^{m} 과 같은 함수이다.

(subsection 5.5) Change of Bases

(표기법 5.5.1) 이 절에서는

V; dim V = n , [V 의 기저 ] = \mathfrak{B} = {v\_{1}, …, v\_{n}}, \mathfrak{B}’ = {v’\_{1}, …, v’\_{n}}

W; dim W = m , [W 의 기저 ] = \mathfrak{C} = {w\_{1}, …, w\_{m}} , \mathfrak{C} = {w’\_{1}, …, w’\_{m}}

U; dim U = r , [U 의 기저 ] = \mathfrak{D} = {u\_{1}, …, u\_{r}} .

(따름정리 5.5.2) L \in \mathfrak{L} (V,W) 이면, [L]\_{\mathfrak{C}’}^{\mathfrak{B}’} = [I\_{W}]\_{\mathfrak{C}’}^{\mathfrak{C}} \cdot [L]\_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}} \cdot [I\_{W}]\_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}’}

(따름정리 5.5.3) 다음이 성립한다.

[L]\_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B’}} = [L]\_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}} \cdot [I]\_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}’}

[L]\_{\mathfrak{C}’}^{\mathfrak{B}} = [I]\_{\mathfrak{C}’}^{\mathfrak{C}} \cdot [L]\_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}}

(정의 5.5.4) V의 기저 \mathfrak{B}, \mathfrak{B}’ 에 대해, [I]\_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}’} 혹은 [I]\_{\mathfrak{B}’}^{\mathfrak{B}} 을 transition matrix (한자 행렬) 라 부른다. Transition matrix 는 기저 변환 (change of bases) 의 정보를 갖고 있다.

(관찰 5.5.5) [I]\_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}’} \cdots [I]\_{\mathfrak{B}’}^{\mathfrak{B}} = I , 즉 transition matrix 는 가역이고 ([I]\_{\mathfrak{B}’}^{\mathfrak{B}})^{-1} = [I]\_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}’}. 역으로, 가역행렬은 항상 transition matrix 로 인식할 수 있다.

(관찰 5.5.6) U \in \mathfrak{M}\_{n,n} (F) 가 가역행렬이고 \mathfrak{B} 가 V의 기저이면, 다음이 성립한다.

U = [I]\_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}’} 인 V 의 기저 \mathfrak{B}’ 가 존재한다.

따라서, U = [I]\_{\mathfrak{B}’’}^{\mathfrak{B}} 인 V 의 기저 \mathfrak{B}’’ 도 존재한다.

(관찰 5.5.7) \mathfrak{B}, \mathfrak{C} 가 각각 F^{n}, F^{m} 의 basis 이고, A \in \mathfrak{M}\_{m,n}(F) 이면, 기본정리에 의해 [L\_{A}]\_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} = A 이므로, [L\_{A}]\_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}} = [I]\_{\mathfrak{C}}^{\mathcal{F}} \cdot A \cdot [I]\_{\mathcal{E}}^{\mathfrak{B}} 가 성립한다.

(명제 5.5.8) A,B \in \mathfrak{M}\_{m,n} (F) 일 때 다음은 동치이다.

QAP = B 인 가역행렬 Q \in \mathfrak{M}\_{m,m}(F) 와 가역행렬 P \in \mathfrak{M}\_{n,n}(F) 가 존재한다.

[L\_{A}]\_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}} = B 인 F^{n} 의 basis \mathfrak{B} 와 F^{m} 의 basis \mathfrak{C} 가 존재한다.

다음 diagram

\begin{tikzpicture} \matrix (m) [matrix of math nodes,row sep=3em,column sep=4em,minimum width=2em] { F^{n} & F^{m} \\F^{n} & F^{m} \\}; \path[-stealth] (m-1-1) edge node [left] {$\alpha\_{\mathcal{E}}^{\mathfrak{B}} $} node [right] {$\approx$} (m-2-1) edge node [above] {$L\_{A}$} (m-1-2) (m-1-2) edge node [right] {$\alpha\_{\mathcal{F}}^{\mathfrak{C}} $} node [left] {$\approx$} (m-2-2) (m-2-1) edge node [below] {$L\_{B}$} (m-2-2);\end{tikzpicture}

이 commute하는 F^{n} 의 basis \mathfrak{B} 와 F^{m} 의 basis \mathfrak{C} 가 존재한다. (따라서, 이 경우에 L\_{A} 와 L\_{B} 는 본질적으로 같은 함수라고 말할 수 있다.)

(관찰 5.5.12)

L \in \mathfrak{L}(V,V) 이고, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} 가 V의 basis 이면, [I]\_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}} \cdot [L]\_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}} \cdot [I]\_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{C}} = [L]\_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{C}}

A \in \mathfrak{M}\_{n,n}(F) 이고, \mathfrak{B} 가 F^{n} 의 basis 이면, [I]\_{\mathfrak{B}}^{\mathcal{E}} \cdot A \cdot [I]\_{\mathcal{E}}^{\mathfrak{B}} = [L\_{A}]\_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}

(정의 5.5.13) A, B \in \mathfrak{M}\_{n,n} (F) 일 때, 만약 U^{-1} A U = B 인 invertible matrix U \in \mathfrak{M}\_{n,n} (F) 가 존재하면, 우리는 A ~ B 로 표기하고, A similar to B 라고 읽는다.

(관찰 5.5.14) 위 정의의 similarity relation 은 \mathfrak{M}\_{n,n} (F) 의 equivalence relation 이다.

(명제 5.5.15) A, B \in \mathfrak{M}\_{n,n}(F) 일 때, 다음은 동치이다.

A ~ B

[L\_{A}]\_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}} = B 인 F^{n} 의 basis \mathfrak{B} 가 존재한다.

다음 diagram

\begin{tikzpicture} \matrix (m) [matrix of math nodes,row sep=3em,column sep=4em,minimum width=2em] { F^{n} & F^{n} \\F^{n} & F^{n} \\}; \path[-stealth] (m-1-1) edge node [left] {$\alpha\_{\mathcal{E}}^{\mathfrak{B}} $} node [right] {$\approx$} (m-2-1) edge node [above] {$L\_{A}$} (m-1-2) (m-1-2) edge node [right] {$\alpha\_{\mathcal{F}}^{\mathfrak{C}} $} node [left] {$\approx$} (m-2-2) (m-2-1) edge node [below] {$L\_{B}$} (m-2-2);\end{tikzpicture}

이 commute 하는 F^{n} 의 basis \mathfrak{B} 가 존재한다. (따라서, 이 경우에 L\_{A} 와 L\_{B} 가 본질적으로 같은 함수라고 말할 수 있다.)

(관찰 5.5.16) A~B \in \mathfrak{M}\_{n,n} (F) 이면, 다음이 성립한다.

dim ker L\_{A} = dim ker L\_{B}.

dim im L\_{A} = dim im L\_{B}.

rk(A) = rk(B).

(subsection 5.6) Row-reduced echelon form

(정리 1.2.3 의 재해석)(정리 5.6.2) A \in \mathfrak{M}\_{m,n}(F) 이면, [L\_{A}]\_{\mathfrak{C}}^{\mathcal{E}} 가 row-reduced echelon form 인 F^{m} 의 기저 \mathfrak{C} 가 존재한다. 이 때, A의 row-reduced echelon form 은 유일하게 결정된다.

(Section 6) 행렬식

(subsection 6.1) Alternating Multilinear form

(정의 6.1.1) V\_{1}, …, V\_{k} 가 벡터공간일 때, 함수 \mu : V\_{1} \times \cdots \times V\_{k} \to F 가 모든 k-개의 좌표에 대하여 linear 일 때, 즉 임의의 i = 1,2, …, k 에 대하여 \mu(…, au\_{i} + bw\_{i}, …) = a\mu(…, u\_{i},…) + b\mu(…,w\_{i},….) , (u\_{i}, w\_{i} \in V\_{i}, a,b \in F) 일 때, 우리는 \mu 를 k-linear form 이라고 부른다. 특히, k = 2 일 때는 \mu 를 bilinear form 이라고 부른다.

V\_{1} = \cdots = V\_{k} = V 인 경우에는 \mu 를 k-linear form on V 라고 부른다.

(정의 6.1.6) V 가 벡터공간이고 \mu : V \times \cdots \times V \to F 가 k-linear form 이라고 하자. 만약 모든 v \in V 에 대하여 \mu (…, v, …, v , …) = 0 이면 – 즉 두 좌표가 같을 때 \mu 의 함수값이 0 이면 – 우리는 \mu 를 alternating k-linear form on V 라고 부른다.

(관찰 6.1.7) \mu : V \times \cdots \times V \to F 를 alternating k-linear form 이라고 하면, 모든 v, w \in V 에 대해 \mu(…, v, …, w, …) = - \mu(…, w, …, v, …) 이다. 즉, 두 좌표의 위치를 교환하면 부호가 바뀐다.

(표기법 6.1.8) 이 장에서는, \mathfrak{M}\_{n,n} (F) = F^{n} \times \cdots \times F^{n} (n 번 곱) 의 표기법을 사용한다. 즉, A \in \mathfrak{M}\_{n,n} (F) 일 때, A = ([A]^{1}, …, [A]^{n}) (단, [A]^{j} 는 A의 j-th column) 으로 표기한다.

(정리 6.1.9) 조건 [det(I\_{n}) = det (e\_{1}, …, e\_{n}) = 1] 을 만족하는 alternating n-linear form det : F^{n} \times \cdots \times F^{n} \to F 는 존재하고, 단 하나뿐이다. det(A) = |A| 의 표기법도 사용한다.

(subsection 6.2) Symmetric Group

(정의 6.2.1) 함수 \sigma : {1, …, n} \to {1, …, n} 전체의 집합을 T\_{n} 으로 표기하고, S\_{n} = {\sigma \in T\_{n} | \sigma 는 bijection } 으로 정의한다. S\_{n} 은 symmetric group 이라고 부른다. Symmetric group 의 원소는 permutation 이라고 부른다. 우리는 |T\_{n}| = n^{n} , |S\_{n}| = n! 인 것을 잘 알고 있다.

(표기법 6.2.3) \sigma \in S\_{n} 일 때, 우리는 다음의 표기법을 사용한다.

\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}

(Cycle notation) k \le n 이고, i\_{1}, i\_{2}, …, i\_{k} (\le n) 가 서로 다른 k 개의 자연수일 때, \sigma = (i\_{1}, i\_{2}, …, i\_{k}) \in S\_{n} 은 다음과 같이 정의된 permutation 을 의미한다.

\begin{cases} \sigma(i\_{h}) = i\_{h+1} & (h = 1,2, …, k-1) \\ \sigma(i\_{k}) = i\_{1},& \\ \sigma(j) = j & (j \notin {i\_{1}, i\_{2}, …, i\_{k}}) \end{cases}

(i\_{1}, i\_{2}, …, i\_{k}) 는 k-cycle 이라고 부른다. 특별히 k = 2 인 경우 (i\_{1}, i\_{2}) 를 transposition 이라고 부른다. (1-cycle 은 항등사상)

(관찰 6.2.8)

\sigma 와 \tau 가 disjoint cycle 이면, \sigma \bullet \tau = \tau \bullet \sigma 이다.

모든 permutation 은 disjoint cycle 들의 합성으로 나타낼 수 있고, 그 방법은 (합성의 순서를 제외하고) 유일하다.

모든 permutation 은 transposition 들의 합성으로 나타낼 수 있다.

(정의 6.2.9) 함수 sgn : S\_{n} \to {\mp 1} 을 sgn(\sigma) = (-1)^{r} (단, \sigma 는 r-개 transposition 의 합성) 이라고 정의하자. 우리는 sgn 을 signum 혹은 sign 이라고 읽는다.

(명제 6.2.10) 위 (정의 6.2.9) 의 sgn : S\_{n} \to {\mp 1} 은 well-defined 되어있다.

(정의 6.2.11) \sigma \in S\_{n} 일 때, sgn(\sigma) = 1 이면 \sigma 를 even permutation 이라고 부르고, \sgn(\sigma) = -1 이면 \sigma 를 odd permutation 이라고 부른다. 또, A\_{n} = {\sigma \in S\_{n} | sgn(\sigma) = 1} 이라고 표시하고, A\_{n} 을 alternating group 이라고 부른다.

(정의 6.2.15) \mathfrak{B} = {v\_{1}, …. , v\_{n}} 이 V의 ordered basis 이고 \sigma \in S\_{n} 일 때, V의 새로운 ordered basis \mathfrak{B}\_{\sigma} = {v\_{\sigma(1)} , v\_{\sigma(2)}, …, v\_{\sigma(n)}} 을 생각하자. 이때, (n \times n)-transition matrix [I]\_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}\_{\sigma}} 를 \sigma 에 대응하는 permutation matrix 라고 부르고, I\_{\sigma} = [I]\_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}\_{\sigma}} 로 표기한다.

(관찰) \sigma, \tau \in S\_{n} 일 때, 다음이 성립한다.

I\_{\sigma} 의 j-th column 은 e\_{\sigma(j)} . 즉 I\_{\sigma} = (e\_{\sigma(1)}, …, e\_{\sigma(n)})

A \in \mathfrak{M}\_{n,n}(F) 이면, AI\_{\sigma} = ([A]^{\sigma(1)} , …, [A]^{\sigma(n)}) .

I\_{\sigma} \cdot I\_{\tau} = I\_{\sigma \bullet \tau}.

(I\_{\sigma})^{-1} = I\_{(\sigma^{-1})} = ^{t}(I\_{\sigma})

I\_{\sigma} = I\_{\tau} 이면, \sigma = \tau

(정의 6.2.19) \mathfrak{B} = {v\_{1}, …, v\_{n}} 이 V의 고정된 ordered basis 이고 \sigma \in S\_{n} 일 때, Linear extension theorem 을 이용하여 선형사상 P\_{\sigma} : V \to V 를 P\_{\sigma} (v\_{i}) = v\_{\sigma(i)} , (i = 1, …, n) 으로 정의하자.

(표기법 6.2.22) \lambda\_{i} \in F 일 때, (i,i)-성분이 \lambda\_{i} 인 (n \times n)-대각행렬 (diagonal matrix) 를 diag(\lambda\_{1}, …, \lambda\_{n}) 으로 표기한다.

(subsection 6.3) Determinant 의 정의 1

(관찰 6.3.1) 만약 D : \mathfrak{M}\_{n,n} (F) \to F 가 (정리 6.1.9) 의 조건을 만족한다면, A \in \mathfrak{M}\_{n,n}(F) 이고 \sigma \in S\_{n} 일 때, 다음이 성립한다.

D([A]^{\sigma(1)} , …, [A]^{\sigma(n)} ) = sgn(\sigma) \cdot D([A]^{1}, …, [A]^{n}) = sgn(\sigma) \cdot D(A),

D(e\_{\sigma(1)} , … e\_{\sigma(n)}) = sgn(\sigma)

(정리 6.3.2. 정리 6.1.9 의 det : \mathfrak{M}\_{n,n} (F) \to F 는 det(A) = |A| = det(a\_{ij}) = \sum\_{\sigma \in S\_{n}} sgn(\sigma) \cdot a\_{\sigma(1), 1} a\_{\sigma(2), 2} \cdots a\_{\sigma(n), n} 으로 주어진다.

(따름정리 6.3.7) A \in \mathfrak{M}\_{n,n} (F) 이면 det(^{t}A) = det(A) 이다.

(따름정리 6.3.8) det : \mathfrak{M}\_{n,n} (F) \to F 를 n-개의 row들에 관한 함수로 보더라도, det 는 det(I) = 1인 유일한 alternating n-linear form 이다.

(subsection 6.4) Determinant 의 성질

(명제 6.4.1) A, B \in \mathfrak{M}\_{n,n} (F) 이면, det(AB) = det(A)det(B) 가 성립한다.

(따름정리 6.4.2) A가 invertible이면, 물론 det(A) \neq 0 이고, det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)} = det(A)^{-1} 이다.

(관찰 6.4.5) A \in \mathfrak{M}\_{n,n} (F)일 때, 만약 {[A]^{1}, …, [A]^{n}} 이 linearly dependent 이면, det(A) = 0 이다.

(따름정리 6.4.6) 다음은 동치이다.

A는 invertible.

det(A) \neq 0.

(Gaussian Elimination 과 Determinant) (명제 6.4.11) 행렬식은 다음 성질을 갖는다.

어떤 한 column 에 다른 column 의 상수배를 더해주어도, 행렬식은 변하지 않는다. 즉, i \neq j 이고 c \in F 일 때, i-th column 에 [j-th column 의 c-배] 를 더해주면, det(…, [A]^{i} + c[A]^{j}, …, [A]^{j}, …) = det(A) 이다.

위 성질에서 ‘column’ 을 ‘row’로 바꾸어도 성질이 성립한다.

(subsection 6.5) Determinant 의 정의 2

(표기법 6.5.1) A = (a\_{ij}) \in \mathfrak{M}\_{n,n}(F) 일 때, M\_{ij} 를 [A에서 i-th row 와 j-th column 을 제거한] ((n-1) \times (n-1))-행렬이라 하고, \hat{A}\_{ij} = det(M\_{ij}) 로 표기한다. 우리는 \hat{A}\_{ij} 를 A 의 (i,j)-minor 라 부른다.

(정의 6.5.2) j-th column 에 관한 전개(expansion) D^{j} : \mathfrak{M}\_{n,n} (F) \to F 를 D^{j}(A) = \sum\_{i =1}^{n} (-1)^{i+j} a\_{ij}\hat{A}\_{ij} , (j = 1,…,n) 로 정의하고, 마찬가지로 i-th row 에 관한 expansion D\_{i} : \mathfrak{M}\_{n,n} (F) \to F 를 D\_{i}(A) = \sum\_{j =1}^{n} (-1)^{i+j} a\_{ij}\hat{A}\_{ij} , (j = 1,…,n) 로 정의한다.

(정리 6.5.6) (정의 6.5.2) 에서 정의된 2n-개의 함수 D\_{i}, D^{j} : \mathfrak{M}\_{n,n}(F) \to F 는 모두 alternating n-linear form 이고, I\_{n} 에서의 값이 1이다. 따라서, 이 2n-개의 함수가 모두 det : \mathfrak{M}\_{n,n}(F) \to F 와 같은 함수이다.

(subsection 6.6) Cramer’s Rule

(Cramer’s Rule) (정리 6.6.1) A \in \mathfrak{M}\_{n,n}(F) 일 때, X = ^{t}(x\_{1}, …, x\_{n}) \in F^{n} 이 연립방정식 AX = B 의 solution이면, det(A)x\_{i} = det([A]^{1}, …, B, …, [A]^{n}) (i = 1, …, n) 이어야 한다. 이 식에서 ([A]^{1}, …, B, …, [A]^{n}) 은 A의 i-tho column 을 B로 바꿔치기한 행렬을 뜻한다.

(명제 6.6.4) A = (a\_{ij}) \in \mathfrak{M}\_{n,n}(F) 가 invertible matrix 이면, A^{-1} = ^{t} (\frac{(-1)^{i+j} \hat{A}\_{ij}}{det(A)} ) 이다. 즉, A^{-1} 의 (i,j)-좌표는 \frac{(-1)^{i+j} \hat{A}\_{ji}}{det(A)} 이다.

(subsection 6.7) Adjoint Matrix

(정의 6.7.1) A \in \mathfrak{M}\_{n,n}(F) 일 때, adj(A) = ^{t}((-1)^{i+j} \hat{A}\_{ij}) (즉 , adj(A) 의 (i,j)-좌표는 (-1)^{i+j} \hat{A}\_{ji}) 라고 표기하고, adj(A) 를 A의 adjoint matrix 라 부른다.

(정리 6.7.2) A \in \mathfrak{M}\_{n,n} (F) 이면, A \cdot adj(A) = det(A) \cdot I\_{n} = adj(A) \cdot A 이다. (A 가 가역일 필요는 없다.)

(따름정리 6.7.3) A = (a\_{ij}) \in \mathfrak{M}\_{n,n}(F) 이면, \sum\_{k = 1}^{n} (-1)^{k+j} a\_{ik} \hat{A}\_{jk} = \delta\_{ij} \cdot det(A) = \sum\_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a\_{ki} \hat{A}\_{kj}

(section 7) 특성다항식과 대각화

(subsection 7.1) Eigen-vector 와 Eigen-value

(정의 7.1.1) A \in \mathfrak{M}\_{n,n}(F) 일 때, AX = \lambda X 인 \lambda \in F 와 0 \neq X \in F^{n} 이 존재하면, 우리는 X를 eigen-value \lambda 를 갖는 (\lambda 에 대응하는) A의 eigenvector라 부른다. 마찬가지로, L \in \mathfrak{L}(V,V) 이고, Lv = \lambda v 인 \lambda \in F 와 0 \neq v \in V 가 존재할 때, 우리는 v 를 eigen-value \lambda 를 갖는 L의 eigen-vector 라 부른다.

(표기법 7.1.2) 앞으로 [T \in \mathfrak{L}\mathfrak{M}] 이라고 하면, 항상 [T \in \mathfrak{L}(V,V) 또는 T \in \mathfrak{M}\_{n,n}(F)] 를 뜻하기로 약속한다. 이 때, dim V = n 이고, vector들은 u,v,w 등으로 표기하며, I\_{V} = I\_{n} = I 는 혼동하기로 한다. 물론 T가 행렬이면 V = F^{n} 으로 이해하고, T = L\_{T} 로 혼동한다. (따라서, A \in \mathfrak{M}\_{n,n}(F)) 일 때, ker A = ker L\_{A} 의 표기법도 가능.) 또, 혹시 모르니, V \neq 0 이라고 가정.

(재정의 7.1.3) T \in \mathfrak{L} \mathfrak{M} 일 때, Tv = \lambda v 인 \lambda \in F 와 0 \neq v \in V 가 존재하면, 우리는 v를 eigen-value \lambda 를 갖는 T의 eigen-vector 라고 부른다.

(정의 7.1.7) L \in \mathfrak{L} (V,V) 일 때, V의 임의의 기저 \mathfrak{B} 를 골라 det(L) = det([L]\_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}) 로 정의하자.

(관찰 7.1.8) (정의 7.1.7) 의 det(L) 은 well-defined 되어있다.

(정의 7.1.9) T \in \mathfrak{L} \mathfrak{M} 이고, [T 혹은 [T]\_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}} 의 좌표] 를 a\_{ij} 로 표기할 때, T 의 characteristic polynomial (특성다항식) \phi\_{T}(t) \in F[t] 를 \phi\_{T}(t) = det(tI – T) = \begin{vmatrix} t-a\_{11} & -a\_{12} & -a\_{13} & \cdots & -a\_{1n} \\ -a\_{21} & t-a\_{22} & -a\_{23} & \cdots & -a\_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a\_{n1} & -a\_{n2} & -a\_{n3} & \cdots & t-a\_{nn} \\ \end{vmatrix}

으로 정의한다. (이 때, tI – T 의 t는 마치 scalar 인 것처럼 생각한다.)

(관찰 7.1.10) Characteristic polynomial 은 similar matrix 의 invariant 이다. 따라서, T \in \mathfrak{L} \mathfrak{M}일 때, \phi\_{T}(t) 는 well-defined 된다.

(명제 7.1.11) T \in \mathfrak{L} \mathfrak{M} 일 때, \lambda \in F 가 T의 eigen-value 이기 위한 필요충분조건은 \phi\_{T}(\lambda) = 0 인 것이다.

(관찰 7.1.12) Trace, rank, determinant, characteristic 및 eigen-value 는 similar matrix 의 invariant 이다.

(정리 7.1.18) 모든 다항식 f(t) \in \mathbb{C}[t] 는 (\mathbb{C} 에서) 근 (root) 를 갖는다. (즉, 인수정리에 의해, f(t) \in \mathbb{C}[t] 는 \mathbb{C} 위의 일차식들의 곱으로 인수분해된다.)

(subsection 7.2.) Diagonalization

(정의 7.2.1) A \in \mathfrak{M}\_{n,n} (F) 일 때, A ~ D 인 diagonal matrix D \in \mathfrak{M}\_{n,n} (F) 가 존재하면, A를 diagonalizable matrix 라 부른다.

(관찰 7.2.2) A \in \mathfrak{M}\_{n,n}(F) 일 때, 다음 조건들은 동치이다.

A는 diagonalizable.

A 의 eigen-vector 들로 이루어진 F^{n} 의 basis 가 존재.

(정의 7.2.3) Linear operator L \in \mathfrak{L}(V,V) 의 (V의 임의의 기저 \mathfrak{B} 에 대한) 행렬 [L]\_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}} 가 diagonalizable 이면, L 도 diagonalizable 이라고 말한다.

(관찰 7.2.4) Linear operator L \in \mathfrak{L} (V,V) 가 diagonalizable 이기 위한 필요충분조건은 [L]\_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}} 가 diagonalizable matrix 인 V의 기저 \mathfrak{B} 가 존재하는 것이다.

(재정의 7.2.5) T \in \mathfrak{L} \mathfrak{M} 일 때, [T]\_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}} 가 diagonal matrix 인 V 의 기저 \mathfrak{B} 가 존재하면 – 즉, T의 eigen-vector 들로 이루어진 V의 기저 \mathfrak{B} 가 존재한다면 – T는 diagonalizable 이라 말한다.

(명제 7.2.6) T \in \mathfrak{L} \mathfrak{M} 일 때, \phi\_{T}(t) 가 F에서 서로 다른 n-개의 root 를 가지면, T 는 diagonalizable이다. (물론, dim V = n)

(보조정리 7.2.7) T \in \mathfrak{L} \mathfrak{M} 일 때, v\_{1}, …, v\_{k} 가 T의 eigen-vector 라고 하자. 만약, v\_{i} 의 eigen-value \lambda\_{i} 들이 mutually distinct (즉, \lambda\_{i} \neq \lambda\_{j} if i \neq j) 이면, {v\_{1}, …, v\_{k}} 는 일차독립이다.

(subsection 7.3.) Caley-Hamilton Theorem

(정의 7.3.2) T \in \mathfrak{L} \mathfrak{M} 일 때, \mathcal{I}\_{T} = {f(t) \in F[t] | f(T) = 0} 라고 정의하자.

(명제 7.3.4) T \in \mathfrak{L} \mathfrak{M} 이면, \mathcal{I}\_{T} \neq 0 이다.

(Cayley-Hamilton Theorem) (정리 7.3.5) T \in \mathfrak{L} \mathfrak{M} 이면, \phi\_{T}(T) = 0 이다. 즉, \phi\_{T}(t) \in \mathcal{I}\_{T} 이다.

(subsection 7.4) Minimal Polynomial

(정의 7.4.1) T \in \mathfrak{L} \mathfrak{M} 일 때, \mathcal{I}\_{T} 의 non-zero polynomial 중에서 [최소의 degree 를 갖는 monic polynomial] 을 T의 minimal polynomial 이라고 부르고, m\_{\tau}(t) 로 표기한다.

(관찰 7.4.2) A, B \in \mathfrak{M}\_{n,n}(F) 이고 A ~ B 이면, m\_{A}(t) = m\_{b}(t) 이다. 즉, minimal polynomial 은 similar matrix 의 invariant 이다.

(정리 7.4.3) T \in \mathfrak{L}\mathfrak{M} 일 때, T의 minimal polynomial 은 존재하고 하나뿐이다.

(따름정리 7.4.4) T \in \mathfrak{L}\mathfrak{M} 일 때, f(t) \in \mathcal{I}\_{T} 이면, f(t) 는 m\_{T}(t) 의 배수이다.

특별히 , \phi\_{T}(t) 도 m\_{T}(t) 의 배수이다.

(subsection 7.5) Direct sum 과 Eigen-space Decomposition

(정의 7.5.1) V가 벡터공간이고 U,W 가 V의 부분공간이라고 하자. 이 때, U \cap W 이면, U + W = U \oplus W 로 표기하고, “U+W 는 U,W 의 direct sum이다” 라고 말한다.

(관찰 7.5.2) V가 vector space 이고, U,W 가 V 의 subspace 라고 할 때, 다음 조건은 동치이다.

V = U \oplus W,

V = U + W 이고 U \cap W = 0

이 떄, U 를 W의 direct complement 라고 부른다.

(관찰 7.5.3) V가 vector space 이고, U,W 가 V의 subspace 라고 할 때, 다음은 동치이다.

V = U \oplus W

V 의 모든 vector v 는 u + w (단, u \in U, w \in W) 의 꼴로 쓸 수 있고, 그 방법은 하나뿐이다.

V = U + W 이고, V의 zero vector 0 를 u + w (단, u \in U, w \in W ) 의 꼴로 쓰는 방법은 하나뿐이다.

(관찰 7.5.4.) V가 f.d.v.s. 이고, U, W \le V 일 때, 다음 조건은 동치이다.

V = U \oplus W,

dim V = dim U + dim W 이고, U \cap W = 0.

(관찰 7.5.6.) V가 벡터공간이고 \mathfrak{B}\_{1}, \mathfrak{B}\_{2} 가 각각 V의 subspace W\_{1}, W\_{2} 의 기저라고 하면, 다음 조건은 동치이다.

V = W\_{1} \oplus W\_{2}.

\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\_{1} \mathfrak{U} \mathfrak{B}\_{2} 는 V의 basis. (단, \mathfrak{U} 는 disjoint union 을 의미한다.)

(정의 7.5.7) V가 vector space 이고, W\_{1}, …, W\_{k} 가 V의 subspace 라고 하자. 이 때, W\_{1} + \cdots + W\_{k} 의 vector v를 w\_{1}, + \cdots + w\_{k} (단, w\_{i} \in W\_{i}) 의 꼴로 표현하는 방법이 하나뿐이면, \sum\_{i = 1}^{k} W\_{i} = W\_{1} + \cdots + W\_{k} = W\_{1} \oplus \cdots \oplus W\_{k} = \bigoplus\_{i = 1}^{k} W\_{i} 로 표기하고, 이런 경우에 “\sum\_{i = 1}^{k} W\_{i} 는 W\_{1}, …, W\_{k} 의 direct sum 이다” 라고 말한다. 또, 각각의 W\_{1}, …, W\_{k} 는 \oplus\_{i=1}^{k} 의 direct summand 라고 말한다.

(관찰 7.5.9) V가 vector space 이고 W\_{1}, …, W\_{k} 가 V의 subspace 라고 할 때, 다음은 동치이다.

V = W\_{1} \oplus \cdots \oplus W\_{k} .

V 의 모든 vector v 는 w\_{1} + \cdots + w\_{k} (단, w\_{i} \in W\_{i}) 의 꼴로 쓸 수 있고, 그 방법은 하나뿐이다.

V = W\_{1} + \cdots + W\_{k} 이고, V의 zero vector 0 을 w\_{1} + \cdots + w\_{k} (단, w\_{i} \in W\_{i}) 의 꼴로 쓰는 방법은 하나 뿐이다.

(관찰 7.5.11) \mathfrak{B}\_{i} 가 각각 V의 subspace W\_{i} (단, i = 1,…,k) 의 기저라고 할 때, 다음 조건은 동치이다.

V = W\_{1} \oplus \cdots \oplus W\_{k}

\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\_{1} \mathfrak{U} \cdots \mathfrak{U} \mathfrak{B}\_{k} 는 V의 basis. (이 때, \mathfrak{U} 는 mutually disjoint union 을 의미한다. 즉 \mathfrak{B}\_{i} \cap \mathfrak{B}\_{j} = \empty if i \neq j 인 union 이라는 뜻이다.)

(정의 7.5.15.) T \in \mathfrak{L}\mathfrak{M}이고, \lambda \in F 일 때, V\_{\lambda} = V\_{T,\lambda} = {v \in V | Tv = \lambda v} 로 표기하고, V\_{\lambda} = V\_{T,\lambda} 를 \lambda 에 대응하는 T의 eigen-space 라고 부른다.

(관찰 7.5.17) T \in \mathfrak{L}\mathfrak{M} 일 때, 다음은 동치이다.

T는 diagonalizable.

V = V\_{\lambda\_{1}} \oplus \cdots \oplus V\_{\lambda\_{k}} 인, T의 (서로 다른) eigen-value \lambda\_{1}, …, \lambda\_{k} 존재.

(정의 7.5.18) 위 (관찰 7.5.17) 의 V = V\_{\lambda\_{1}} \oplus \cdots \oplus V\_{\lambda\_{k}} 를 diagonalizable T 에 관한 (V의) eigen-space decomposition 이라고 부른다.

(Section 8) 분해정리

(subsection 8.1) polynomial

(명제 8.1.4) F[t] 의 polynomial f\_{1}(t), f\_{2}(t), … , f\_{k}(t) 의 최대공약수를 d(t) 라고 하면, d(t) = g\_{1}(t) f\_{1}(t) g\_{2}(t) f\_{2}(t) + \cdots + g\_{k}(t) f\_{k}(t) 가 성립하는 F[t] 의 polynomial g\_{1}(t), g\_{2}(t), … , g\_{k}(t) 가 존재한다.

(명제 8.1.5) T \in \mathfrak{L}\mathfrak{M} 의 characteristic polynomial \phi\_{T}(t) 와 minimal polynomial m\_{T}(t) 의 [F-위의 monic irreducible divisor 의 집합] 은 같다.

(표기법 8.1.10) f(t) \in \mathbb{C} [t] 가 f(t) = \alpha\_{n}t^{n} + \alpha\_{n-1}t^{n-1} + \cdots + \alpha\_{1}t + \alpha\_{0} (단, \alpha\_{0} , …, \alpha\_{n} \in \mathbb{C}) 로 주어졌을 때, \hat{F}(t) \in \mathbb{C} [t] 를 \hat{f}(t) = \hat{\alpha\_{n}} t^{n} + \hat{\alpha\_{n-1}} t^{n-1} + \cdots + \hat{\alpha\_{1}} t + \hat{\alpha\_{0}} 으로 정의한다. 또, A = (\alpha\_{ij}) \in \mathfrak{M}\_{m,n}(\mathbb{C}) 일 때, \hat{A} = (\hat{\alpha\_{ij}}) \in \mathfrak{M}\_{m,n} (\mathbb{C}) 로 정의한다.

(관찰 8.1.14.) A \in \mathfrak{M}\_{n,n}(\mathbb{R}) 을 real matrix 로 생각하나 complex matrix 로 생각하나 characteristic polynomial 과 minimal polynomial 은 변함이 없다.

(subsection 8.2) T -invariant Subspace

(정의 8.2.1) T \in \mathfrak{L}\mathfrak{M} 이고 W \le V 일 때, T(W) \le W 이면 – 즉 T |\_{W} : W \to W 가 의미가 있으면 – 우리는 W를 V의 T-invatiant subspace 라고 부른다. 혹은, W 는 “T-stable” 이다 라고 말한다. (만약, T \in \mathfrak{M}\_{n,n}(F) 이면, T = L\_{T}, V = F^{n}으로 이해한다.)

(관찰 8.2.9) T \in \mathfrak{L}\mathfrak{M} 이고 f(t) \in F[t] 라고 하면 다음이 성립한다.

ker T 와 im T 는 T-invariant.

ker f(T) 와 im f(T) 는 T-invariant.

(subsection 8.3) Primary Decomposition Theorem

(표기법 8.3.3) T \in \mathfrak{L}\mathfrak{M} 일 때, \phi\_{T}(t) = p\_{1}(t)^{e\_{1}} p\_{2}(t)^{e\_{2}} \cdots p\_{k}(t)^{e\_{k}}, m\_{T}(t) = p\_{1}(t)^{f\_{1}} p\_{2}(t)^{f\_{2}} \cdots p\_{k}(t)^{f\_{k}} 로 (F-위에서) 인수분해된다고 하자. 이 때 p\_{i}(t) 들은 F[t] 의 relatively prime monic irreducible polynomial 이고 1 \le f\_{i} \le e\_{i} 이다. 또, W\_{i} = ker p\_{i}(T)^{e\_{i}} , T\_{i} = T|\_{W\_{i}} , (i = 1,…,k) 로 간단히 표기하기로 한다. W\_{i} 가 T-invariant subspace 이다.

(Primary Decomposition Theorem) (정리 8.3.4) T \in \mathfrak{L}\mathfrak{M} 이면, V = ker p\_{1}(T)^{e\_{1}} \oplus ker p\_{2} (T)^{e\_{2}} \oplus \cdots \oplus ker p\_{k}(T)^{e\_{k}} = ker p\_{1}(T)^{f\_{1}} \oplus ker p\_{2}(T)^{f\_{2}} \oplus \cdots \oplus ker p\_{k}(T)^{f\_{k}} 로 분해할 수 있다. 그리고 모든 i = 1, …, k 에 대해, 다음이 성립한다.

W\_{i} = ker p\_{i}(T)^{e\_{i}} = ker p\_{i}(T)^{f\_{i}}.

m\_{T\_{i}}(t) = p\_{i}(t)^{f\_{i}} .

\phi\_{T\_{i}}(t) = p\_{i}(t)^{e\_{i}} . (따라서, dim W\_{i} = e\_{i} \cdot deg(p\_{i}).)

(보조정리 8.3.5.) T \in \mathfrak{L}\mathfrak{M} 일 때, f(t), g(t) \in F[t] 는 monic 이고 relatively prime 이라고 하자. 만약 \xi(t) = f(t) g(t) \in \mathcal{I}\_{T} 이면, V = ker f(T) \oplus ker g(T) 로 쓸 수 있다. 이때, U = ker f(T), W = ker g(T) 로 간단히 표기하면,

\xi(t) = m\_{T} (t) 일 때에는, m\_{T|v}(t) = f(t) 이고 m\_{T|w} (t) = g(t)  
\xi(t) = \phi\_{T}(t) 일 때에는, \phi\_{T|v} (t) = f(t) 이고 \phi\_{T|w} (t) = g(t) .

(subsection 8.4.) Diagonalizability

(따름정리 8.4.1.) T \in \mathfrak{L}\mathfrak{M} 이 diagonalizable일 필요충분조건은 T의 minimal polynomial m\_{T}(t) 가 (F-위에서) 일차식들로 인수분해되고 multiple root 을 갖지 않는 것이다. (즉, 모든 i = 1,…,k 에 대하여, deg(p\_{i}) = 1 이고, f\_{i} = 1 인 것이다.)

(따름정리 8.4.2.) T \in \mathfrak{L}\mathfrak{M} 이 diagonalizable 이고 W가 V의 T-invariant sub-space 이면, T|\_{W} 도 diagonalizable 이다.

(정의 8.4.3.) T , S \in \mathfrak{L}\mathfrak{M} 일 때, V의 하나의 기저 \mathfrak{B} 에 관해 [T]\_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}} 와 [S]\_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}} 가 모두 대각행렬이면, 우리는 T와 S가 simultaneously diagonalizable 하다고 말한다. 여러 개의 linear operator 의 경우에도 마찬가지로 정의한다.

(명제 8.4.4.) T , S \in \mathfrak{L}\mathfrak{M}이고, 조건 TS = ST 를 만족한다고 하자. 이 때, T와 S가 각각 diagonalizable 이면 T,S 는 simultaneously diagonalizable 이다.

(subsection 8.5) T-Cyclic Subspace

(정의 8.5.1.) T \in \mathfrak{L}\mathfrak{M} 일 때, V = {f(T) v | f(t) \in F[t] 인 v \in V 가 존재하면, V를 T-cyclic space 라 부르고, V = F[t] v = {f(T) v | f(t) \in F[t]} 로 표기한다.

(명제 8.5.4.) T \in \mathfrak{L}\mathfrak{M} V = F[t] v 가 T-cyclic 이면, 다음이 성립한다.

\phi\_{T}(t) = m\_{T}(t).

\mathfrak{B} = {v, Tv, T^{2}v, …, T^{n-1} v} 는 V의 기저. 단, n = dim V = deg (m\_{T}) .

[T]\_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}} 는 m\_{T}(t) 에 대응하는 companion matrix.

(정의 8.5.7.) T \in \mathfrak{L}\mathfrak{M} 이고, W는 V의 T-invariant subspace 라고 하자. 이 때 W가 (T|\_{W})-cyclic 이면 , W 를 V의 T\_cyclic subspace 라고 부른다.

(정의 8.5.9.) T \in \mathfrak{L}\mathfrak{M} 이고, 0 \neq w \in V 일 때, F[t] w = {f(T) w | f(t) \in F[t]} = \langle w , Tw , T^{2}w, … \rangle 로 표기하고, F[t] w 를 [T-cyclic subspace of V generaged by w] 라고 부른다.

W = F[t] w 로 놓을 때, m\_{w}(t) = m\_{(T|\_{W})} (t) 로 간략히 표기하고, m\_{w}(t) 를 [minimal polynomial of w in V] 라고 부른다.

(관찰 8.5.11.) T \in \mathfrak{L}\mathfrak{M} 이고, 0 \neq w \in V 일 때, W = F[t]w 라고 놓으면, 다음이 성립한다.

m\_{w}(T) = \phi\_{T|w} (t).

\mathfrak{C} = {w, Tw, …, T^{m-1} w} 는 W의 기저. 단, m = dim W = deg(m\_{w}) .

[T|\_{W}]\_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{C}} 는 m\_{w}(t) 에 대응하는 companion matrix.

m\_{T} (t) 는 m\_{w} (t) 의 배수.

(subsection 8.6) Cyclic Decomposition Theorem  
(Cyclic Decomposition Theorem) (정리 8.6.1.) T \in \mathfrak{L}\mathfrak{M} 일 때, m\_{T} (t) = p(t)^{f} 라고 가정하자. 이 때 p(t) 는 F[t] 의 monic irreducible polynomial 이다. 그러면, V = U\_{1} \oplus U\_{2} \oplus \cdots \oplus U\_{h} 인 V의 (T-invariant) T-cyclic subspace U\_{1}, …, U\_{h} 가 존재한다. 그리고, \phi\_{T|\_{U\_{j}}}(t) = m\_{T|\_{U\_{j}}}(t) = p(t)^{r\_{j}} (j = 1,…,h) 로 표기할 떄, 다음 조건 f = r\_{1} \ge r\_{2} \ge \cdots \ge r\_{h} \ge 1 을 만족하는 자연수 h 와 r\_{1} , … , r\_{h} 는 유일하게 결정된다.

(따름정리 8.6.2) 두 square matrix A, B \in \mathfrak{M}\_{n,n}(F) 에 대해, A ~ B 인지 여부를 결정해주는 invariant 들의 집합은 {p\_{i}(t), h\_{i}, r\_{ij}} 이다.

(Section 9) \mathbb{R}^{n} 의 Rigid Motion

(subsection 9.1) \mathbb{R}^{n} -공간의 Dot product 와 Euclidean norm

(정의 9.1.1) X = ^{t}(a\_{1} , …, a\_{n}) , Y = ^{t}(b\_{1}, …, b\_{n}) \in \mathbb{R}^{n} 일 때, \langle X , Y \rangel = ^{t} X \cdot Y = \sum\_{i = 1}^{n} a\_{i}b\_{i} 로 정의하고 이를 \mathbb{R}^{n} 의 dot product 라고 부른다. 그리고 dot product 가 주어진 \mathbb{R}^{n}-공간을 Euclidean space 라고 부른다.

(정의 9.1.4) X \in \mathbb{R}^{n} 일 때, \Vert X \Vert = \sqrt{\langle X , X \rangle} 로 표기하고, \Vert X \Vert 를 X의 (Euclidean) norm 이라고 부른다. Norm 은 vector 의 길이(크기)로 해석한다.

(정의 9.1.9.) X,Y \in \mathbb{R}^{n} 일 때, \langle X, Y \rangle = 0 이면, X \perp Y 로 표기하고 X 와 Y는 서로 수직 (perpendicular, 또는 orthogonal) 이라고 말한다.

S, T \subseteq \mathbb{R}^{n} 일 때, [\langle X , Y \rangle = 0 for all X \in S , Y \in T ] 이면, S \perp T 로 표기하고 S와 T는 서로 수직이라고 말한다.

(정의 9.1.11) \mathbb{R}^{n} 의 non-zero vector 들 X\_{1}, …, X\_{m} 이 mutually perpendicular 이면 – 즉 , [X\_{i} \perp X\_{j} for all 1 \le i \neq j \le m] 이면 – {X\_{1}, …, X\_{m}} 을 \mathbb{R}^{n} 의 orthogonal subset 이라고 부른다. 이 때, [\Vert X\_{k} \Vert = 1 for all 1 \le k \le m] 의 조건도 만족하면, {X\_{1}, …, X\_{m}} 을 \mathbb{R}^{n} 의 orthonormal subset 이라고 부른다.

\mathbb{R}^{n} 의 basis \mathfrak{B} 가 orthogonal subset 이면, \mathfrak{B} 를 \mathbb{R}^{n} 의 orthogonal basis 라고 부르고, orthonormal subset 이면 \mathfrak{B} 를 \mathbb{R}^{n} 의 orthonormal basis 라고 부른다.

(정의 9.1.14) S \subseteq \mathbb{R}^{n} 일 때, S^{\perp} = {X \in \mathbb{R}^{n} | X \perp Y for all Y \in S } 로 표기하고, “S perp” 로 읽는다. 특히 W \le \mathbb{R}^{n} 일 때에는 W^{\perp} 를 W의 orthogonal complement 라고 부른다.

(관찰 9.1.15) S \subseteq \mathbb{R}^{n} , W \le \mathbb{R}^{n} 이고 \mathfrak{C} 가 W의 basis이면, 다음이 성립한다.

S^{\perp} 는 \mathbb{R}^{n} 의 subspace.

S^{\perp} = \langle S \rangle^{\perp}.

W^{\perp} = \mathfrak{C}^{\perp}.

(subsection 9.2.) \mathbb{R}^{n} -공간의 Rigid Motion  
(정의 9.2.1.) 함수 M : \mathbb{R}^{n} \to \mathbb{R}^{n} 이 조건 \Vert M(X) – M(Y) \Vert = \Vert X – Y \Vert (X,Y \in \mathbb{R}^{n}) 을 만족하면 M을 \mathbb{R}^{n} 의 rigid motion 또는 isometry 라고 부른다.

(관찰 9.2.5) 함수 M : \mathbb{R}^{n} \to \mathbb{R}^{n} 이 \mathbb{R}^{n} 의 rigid motion이면,

M은 injective 이다.

M은 연속함수이다.

(관찰 9.2.8.) L(0) = 0 인 \mathbb{R}^{n} 의 rigid motion L 은 다음 성질을 갖는다.

\Vert L(X) \Vert = \Vert X \Vert for all X \in \mathbb{R}^{n}.

\langle L(X), L(X) \rangle = \langle X , X \rangle for all X \in \mathbb{R}^{n}.

\langle L(X), L(Y) \rangle = \langle X, Y \rangle for all X , Y \in \mathbb{R}^{n}.

\mathfrak{B} 가 \mathbb{R}^{n} 의 orthonormal basis 이면, L(\mathfrak{B}) 도 \mathbb{R}^{n} 의 orthonormal basis.

(관찰 9.2.9) A \in \mathfrak{M}\_{n,n}(\mathbb{R}) 의 column 들 {[A]^{1}, …, [A]^{n}} 이 \mathbb{R}^{n} 의 orthonormal basis 이면, linear map L\_{A} 는 rigid motion 이다.

(관찰 9.2.10) L(0) = 0 인 \mathbb{R}^{n} 의 rigid motion L 이 \mathbb{R}^{n} 의 orthonormal basis \mathfrak{B} = {X\_{i}} 를 고정하면 – 즉 , [L(X\_{j}) = X\_{j} for all j = 1, …, n ] 이면, - L은 항등사상이다.

(정리 9.2.11) L(0) = 0 인 \mathbb{R}^{n} 의 rigid motion L 은 linear map 이다.

따라서, \mathbb{R}^{n} 의 rigid motion M 은 translation 과 linear rigid motion 의 합성으로 쓸 수 있다.

(따름정리 9.2.12) \mathbb{R}^{n} 의 rigid motion 은 항상 bijection 이다.

(정의 9.2.13) \mathbb{R}^{n} 의 linear rigid motion 을 (real) orthogonal operator 라고 부른다. 또, L 이 \mathbb{R}^{n} 의 orthogonal operator 이고 L = L\_{A} 일 때, real (n \times n)-matrix A 를 (real) orthogonal matrix 라고 부른다.

(subsetion 9.3.) Orthogonal operator / Matrix

(정의 9.3.1.) \mathbb{R}^{n} 의 orthogonal operator 전체의 집합을 [orthogonal group on \mathbb{R}^{n}] 이라고 부르고, \mathbf{O}(\mathbb{R}^{n}) 이라고 부른다. 즉, \mathbf{O}(\mathbb{R}^{n}) = {L \in \mathfrak{L} (\mathbb{R}^{n}, \mathbb{R}^{n}) | \Vert L(X) – L(Y) \Vert = \Vert X – Y \Vert for all X, Y \in \mathbb{R}^{n}} .

또, real ( n \times n )-orthogonal matrix 전체의 집합을 (real) orthogonal group 이라고 부르고 \mathbf{O}(n) 으로 표기한다. 즉, \mathbf{O}(n) = {A \in \mathfrak{M}\_{n,n} (\mathbb{R}) | \Vert AX – AY \Vert = \Vert X – Y \Vert for all X, Y \in \mathbb{R}^{n}} 이다.

(따름정리 9.3.2.) M : \mathbb{R}^{n} \in \mathbb{R}^{n} 이 rigid motion 이면, M(X) = AX + B (X \in \mathbb{R}^{n}) 인 A \in \mathbf{O}(n) 과 B \in \mathbb{R}^{n}이 유일하게 존재한다.

(관찰 9.3.3.) L:\mathbb{R}^{n} \to \mathbb{R}^{n} 이 linear 일 때, 다음 조건들은 동치이다.

\Vert LX – LY \Vert = \Vert X – Y \Vert for all X, Y \in \mathbb{R}^{n} . (즉, L \in \mathbf{O}(\mathbb{R}^{n}).)

\Vert LX \Vert = \Vert X \Vert for all X \in \mathbb{R}^{n}.

\langle LX, LX \rangle = \langle X, X \rangle for all X \in \mathbb{R}^{n}

\langle LX, LY \rangle = \langle X, Y \rangle for all X, Y \in \mathbb{R}^{n}.

\mathfrak{B} 가 \mathbb{R}^{n} 의 orthonormal basis 이면, L(\mathfrak{B}) 도 \mathbb{R}^{n} 의 orthonormal basis 이다.

(관찰 9.3.5.) A \in \mathfrak{M}\_{n,n} (\mathbb{R}) 일 때, 다음 조건들은 동치이다.

\Vert AX – AY \Vert = \Vert X – Y \Vert for all X, Y \in \mathbb{R}^{n} . (즉, A \in \mathbf{O}(n).)

\Vert AX \Vert = \Vert X \Vert for all X \in \mathbb{R}^{n}.

\langle AX, AX \rangle = \langle X, X \rangle for all X \in \mathbb{R}^{n}

\langle AX, AY \rangle = \langle X, Y \rangle for all X, Y \in \mathbb{R}^{n}.

A의 column 들의 집합 {[A]^{1}, …, [A]^{n}} 은 \mathbb{R}^{n} 의 orthonormal basis.

^{t}A \cdot A = I = A \cdot ^{t}A . 즉, A^{-1} = ^{t}A.

^{t}A \in \mathbf{O}(n).

A의 row들의 집합 {[A]\_{1}, …, [A]\_{n}} 은 \mathfrak{M}\_{1,n}(\mathbb{R}) 의 orthonormal basis.

(정의 9.3.8) Special orthogonal group \mathbf{SO}(n) 을 \mathbf{SO}(n) = {A \in \mathbf{O}(n) | det(A) = 1} 로 정의한다. 이제, \mathbf{SO}(\mathbb{R}^{n}) = {L \in \mathbf{O}(\mathbb{R}^{n}) |det(L) = 1} 로 표기한다.

기하학에서 A \in \mathbf{SO}(n) 이면 L\_{A} 를 \mathbb{R}^{n} 의 orientation preserving orthogonal operator, A \in \mathbf{O}(n) - \mathbf{SO}(n) 이면 L\_{A} 를 \mathbb{R}^{n} 의 orientation reversing orthogonal operator 라고 부른다.

(subsection 9.4.) Reflection

(정의 9.4.2.) 0 \neq Y \in \mathbb{R}^{n} 일 때, 함수 S\_{Y} : \mathbb{R}^{n} \to \mathbb{R}^{n} 을 S\_{Y} (X) = X - \frac{2 \langle X , Y \rangle}{\langle Y, Y \rangle} Y (X \in \mathbb{R}^{n}) 으로 정의하고, S\_{Y} 를 Y에 관한 reflection 또는 symmetry 라고 부른다.

(subsection 9.5.) \mathbf{O}(2) 와 \mathbf{SO}(2)

(정리 9.5.2.) \mathbf{SO}(2) 의 원소는 2-dimensional rotation 뿐이다. 즉, \mathbf{SO}(2) = {\begin{pmatrix}cos \theta & -sin \theta \\ sin \theta & cos \theta \end{pmatrix} | 0 \le \theta < 2\pi} = {\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} |x,y \in \mathbb{R} , x^{2} + y^{2} = 1}

(따름정리 9.5.3.) \mathbf{O}(2) 의 구조는 다음과 같다. 즉, \mathbf{O}(2) = \mathbf{SO}(2) \mathfrak{U} {\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} |x,y \in \mathbb{R} , x^{2} + y^{2} = 1}

(관찰 9.5.6.) \theta \in \mathbb{R} 이면, S\_{\theta} = S\_{^{t}(-sin \frac{\theta}{2} , cos \frac{\theta}{2} } 이 성립한다.

따라서, \mathbb{R}^{2} 의 모든 reflection 은 S\_{\theta} 의 꼴이다.

(따름정리 9.5.7.)

\mathbb{R}^{2} 의 orthogonal operator L 은 rotation 이거나 reflection 둘 중 하나이다. 즉, det(L) = 1 이면 L 은 rotation 이고, det(L) = -1 이면 L 은 reflection 이다.

따라서, \mathbb{R}^{2} 의 rotation \mathbb{R} 과 reflection S 의 합성 R \bullet S 와 S \bullet R 은 언제나 \mathbb{R}^{2} 의 reflection 이다.

역으로, \mathbb{R}^{2} 의 reflection S를 하나 고정하면, \mathbb{R}^{2} 의 모든 reflection 은 [S \bullet R for some rotation R] 의 꼴로 유일하게 쓸 수 있다.

(관찰 9.5.8.) S가 \mathbb{R}^{2} 의 reflection 이고 \theta \in \mathbb{R} 이면, S^{-1} \bullet R\_{\theta} \bullet S = (R\_{\theta})^{-1} , 즉 R\_{\theta} \bullet S = S \bullet R\_{-\theta} 가 성립한다.

(subsection 9.6.) \mathbf{SO}(3) 와 \mathbf{SO}(n)

(정의 9.6.1.) Z \in \mathbb{R}^{3} 가 unit vector 일 때, \mathfrak{B} = {Z,X,Y} 가 \mathbb{R}^{3} 의 rotation basis 인 X,Y 를 찾자. 그리고, det(Z,X,Y) = det(X,Y,Z) = 1 이 되도록 X,Y 의 순서를 정하자. 이 때, 원점을 중심으로 하는 \mathbb{R}^{3} 의 rotation R\_{Z,\theta} : \mathbb{R}^{3} \to \mathbb{R}^{3} 를

[R\_{Z,\theta}]\_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos \theta & -sin \theta \\ 0 & sin \theta & cos \theta \end{pmatrix}

라고 정의하자. (이 때, Z를 회전축, \langle X \rangle \oplus \langle Y \rangle 을 회전판, \theta 를 회전각 이라고 부르면 자연스럽다.)

(정리 9.6.3.) \mathbf{SO}(\mathbb{R}^{3}) 의 원소는 모두 \mathbb{R}^{3} 의 rotation 이다.

(따름정리 9.6.4.) \mathbb{R}^{3} 의 두 rotation 의 합성도 rotation 이다.

(정의 9.6.6.) 임의의 n 에 대하여, \mathbf{SO}(\mathbb{R}^{n}) 의 원소를 – 혹은, \mathbf{SO} (n)의 원소를 - \mathbb{R}^{n} 의 rotation 이라고 정의한다.

(Section 10) 내적공간

(subsection 10.1) Inner product space

(정의 10.1.1) X = ^{t}(a\_{1}, …, a\_{n}) , Y = ^{t}(b\_{1}, …, b\_{n}) \in \mathbb{C}^{n} 일 때, \langle X , Y \rangle = ^{t} X \cdot \bar{Y} = \sum\_{i =1}^{n} a\_{i} \bar{b\_{i}} 로 정의하고 이를 \mathbb{C}^{n} 의 (Hermitian) dot product 라고 부른다.

(정의 10.1.4) (F = \mathbb{R} 혹은 F = \mathbb{C} 일 때, ) F^{n} \times F^{n} 에서 F로 가는 함수 (X,Y) \mapsto \langle X, Y \rangle 가, 모든 X,Y,Z \in F^{n}, c \in F 에 대해, 다음 조건

\langle X + Y , Z \rangle = \langle X, Z \rangle + \langle Y , Z \rangle

\langle cX , Y \rangle = c \langle X , Y \rangle

\langle X, Y \rangle = \bar{\langle Y , X \rangle}

X \neq 0 이면, (\langle X, X \rangle \in \mathbb{R} 이고) \langle X, X \rangle > 0

을 만족하면 , \langle , \rangle 을 F^{n} 의 inner product 라고 부른다. (특별히, F = \mathbb{C}인 경우에는 Hermitian inner product 라고 부르기도 한다.)

(관찰 10.1.5) \langle , \rangle 가 F^{n} 의 inner product 라면 다음이 성립한다.

\langle X, Y + Z \rangle = \langle X , Y \rangle + \langle X , Z \rangle

\langle X , cY \rangle = \bar{c} \langle X, Y \rangle

(정의 10.1.6) (F = \mathbb{R} 혹은 F = \mathbb{C} 일 때, ) V를 F-vector space 라고 하자. (V가무한차원인 경우도 허용한다.) 이 때, 함수 \langle, \rangle : V \times V \to F 가, 모든 u,v,w \in V, c \in F 에 대해, 다음 조건

\langle u + v , w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v , w \rangle

\langle cv , w \rangle = c \langle v , w \rangle

\langle v, w \rangle = \bar{\langle w , v \rangle}

v \neq 0 이면, (\langle v, v \rangle \in \mathbb{R} 이고) \langle v, v \rangle > 0

을 만족하면 , \langle , \rangle 을 V 의 inner product 라고 부르고, inner product 가 주어진 V를inner product space (내적공간) 라고 부른다. (특별히, F = \mathbb{C} 인 경우에는 Hermitialn inner product 라고 부르기도 한다.)

(subsection 10.2) Inner product space 의 성질

(정의 10.2.2) v \in V 일 때, \Vert v \Vert = \sqrt{\langle v, v \rangle} 로 표기하고, \Vert v \Vert 를 v의 norm 이라고 부른다. Norm은 vector 의 길이(크기)로 이해한다.

(정의 10.2.5) v, w \in V 일 때, \langle v, w \rangle = 0 이면, v \perp w로 표기하고 v와 w는 서로 수직(perpendicular 또는 orthogonal) 이라고 말한다. (\langle v, w \rangle = 0 이면, \langle w ,v \rangle = 0 이다.)

S,T \subseteq V 일 때, [\langle v,w \rangle = 0 for all v \in S, w \in T ] 이면, S \perp T 로 표기하고 S 와 T는 서로 수직이라고 말한다.

(관찰 10.2.8) v,w \in V 이면, 다음이 성립한다.

(Cauchy-Schwarz Inequality) | \langle v, w \rangle | \le \Vert v \Vert \cdot \Vert w \Vert (등호가 성립할 필요충분조건은 {v,w} 가 일차종속인 것이다.)

(Triangle inequality) \Vert v + w \Vert \le \Vert v \Vert + \Vert w \Vert

(정의 10.2.10) V의 non-zero vector 들 {v\_{i} | i \in I} 가 mutually perpendicular 이면 – 즉 [v\_{i} \perp v\_{j} for all i \neq j \in I] 이면 – {v\_{i} | i \in I} 를 V의 orthogonal subset 이라고 부른다. 이 때, v\_{i} 들이 모두 unit vector 이면, 이번에도 {v\_{i} | i \in I } 를 V의 orthonormal subset 이라고 부른다.

V의 basis \mathfrak{B} 가 orthogonal subset 이면, \mathfrak{B} 를 V의 orthogonal basis 라고 부르고, orthonormals subset 이면 \mathfrak{B} 를 V의 orthonormal basis 라고 부른다.

(정의 10.2.14) S \subseteq V 일 때, S^{\perp} = {v \in V | v \perp w for all w \in S} 로 표기한다. 특히, W \le V 일 때에는 W^{\perp} 를 W의 orthogonal complement 라고 부른다.

(subsection 10.3) Gram-Schmidt Orthogonalization

(Gram-Schmidt Orthogonalization) (정리 10.3.1) V가 inner product space 이고 {v\_{1}, …, v\_{r}} 가 V의 linearly independent subset 이라고 하자.

w\_{1} = v\_{1} 으로, 그리고 2 \le i \le r 일 때에는 w\_{i} = v\_{i} - \frac{\langle v\_{i}, w\_{i-1} \rangle}{\langle w\_{i-1} , w\_{i-1} \rangle} w\_{i-1} - \cdots - \frac{\langle v\_{i}, w\_{2} \rangle}{\langle w\_{2}, w\_{2} \rangle} w\_{2} - \frac{\langle v\_{i}, w\_{1} \rangle}{ \langle w\_{1}, w\_{1} \rangle} w\_{1} 으로 inductively 정의하면, \langle v\_{1}, …, v\_{r} \rangle = \langle w\_{1}, …, w\_{r} \rangle 이고, {w\_{1}, …, w\_{r}} 은 V의 orthogonal subset 이 된다.

따라서, {\frac{1}{\Vert w\_{1} \Vert} w\_{1} , …, \frac{1}{\Vert w\_{r} \Vert} w\_{r}} 은 V의 orthonormal subset 이 된다.

특별히, r = dim V 이면 , {\frac{1}{\Vert w\_{1} \Vert} w\_{1} , …, \frac{1}{\Vert w\_{r} \Vert} w\_{r}} 은 V의 orthonormal basis 가 된다.

(따름정리 10.3.4.) V가 유한차원 inner product space 이고 W \le V 라고 하자.

W 자신 inner product space 이므로, W도 orthonormal basis 를 갖는다.

따라서, V = W \oplus W^{\perp} 이고, 특별히 dim V = dim W + dim W^{\perp} 이다.

(따름정리 10.3.7) A \in \mathfrak{M}\_{m,n}(\mathbb{R}) 의 row space \langle ^{t}[A]\_{1}, …, ^{t}[A]\_{m} \rangle 은 연립방정식 AX = 0 의 solution space 의 orthogonal complement 이다. 즉, ker (L\_{A}) = {X \in \mathbb{R}^{n} | AX = 0} = \langle ^{t}[A]\_{1}, …, ^{t}[A]\_{m} \rangle^{\perp} 이다. 따라서, (따름정리 10.3.4.)에 의해 dim ker(L\_{A}) = n – [row rank of A] 이다.

(subsection 10.4.) Standard Basis 대 Orthonormal Basis

(관찰 10.4.1.) \mathfrak{B} = {v\_{1}, …, v\_{n}} 이 inner product space V 의 orthogonal basis 이면, 다음이 성립한다.

v \in V 이면, v = \sum\_{i = 1}^{n} \frac{\langle v,v\_{i} \rangle}{\langle v\_{i}, v\_{i} \rangle} v\_{i} (즉, [v]\_{\mathfrak{B}} 의 i-번째 좌표는 \frac{\langle v, v\_{i} \rangle}{\langle v\_{i}, v\_{i} \rangle}).

그리고, \mathfrak{B} = {v\_{1}, …, v\_{n}} 이 inner product space V 의 orthonormal basis 이면, 다음이 성립한다.

v \in V 이면, v = \sum\_{i = 1}^{n} \langle v,v\_{i} \ranglev\_{i} (즉, [v]\_{\mathfrak{B}} 의 i-번째 좌표는 \langle v, v\_{i} \rangle).

v,w \in V 이면, \langle v, w \rangle = ^{t} [v]\_{\mathfrak{B}} \cdot \bar{[w]\_{\mathfrak{B}}}.

(정의 10.4.2.) \mathfrak{B} = {v\_{i} | i \in I} 가 inner product space V 의 orthonormal subset 이라고 하자. v \in V 일 때, \langle v, v\_{i} \rangle 을 \mathfrak{B} 에 관한 v의 i-th Fourier coefficient 라고 부른다. 그리고, 이를 \mathfrak{B} 에 관한 v 의 i-번째 좌표로 생각한다.( 한편, \mathfrak{B} 가 V의 orthogonal subset 일 때에는 \frac{\langle v, v\_{i}\rangle}{\langle v\_{i}, v\_{i} \rangle} 을 \mathfrak{B} 에 관한 v의 i-th Fourier coefficient 라고 부른다.)

(관찰 10.4.3.) W가 inner product space V의 finite dimensional subspace 이고, {v\_{1}, …, v\_{m}} 을 W의 orthonormal basis 라고 하자. v \in V 이면, v = w + w’ 인 w \in W 와 w’ \in W^{\perp} 가 유일하게 존재하고, w = \langle v, v\_{1} \rangle v\_{1} + \cdots + \langle v, v\_{m} \rangle v\_{m} 으로 주어진다.

(Closest Vector Problem) (관찰 10.4.4) 위 (관찰 10.4.3) 의 w는 v에 가장 가까운 W의 vector 이다.

(Bessel’s Inequality) (관찰 10.4.7) \mathfrak{B} = {v\_{1}, …, v\_{n}} 이 inner product space V 의 orthonormal subset 이면, 모든 v \in V 는 다음 부등식 \sum\_{i = 1}^{n} |\langle v, v\_{i} \rangle |^{2} \le \Vert v \Vert^{2} 을 만족한다.

(subsection 10.5) Inner product space 의 isomorphism

(정의 10.5.3) V 와 V’ 이 F-위의 inner product space 이고, 다음 조건 \langle \phi(v) , \phi(w) \rangle = \langle v, w \rangle , (v,w \in V) 을 만족하는 vector space isomorphism \phi : V \to V’ 이 존재하면, 우리는 V와 V’ 이 inner product space 로서 isomorphic 하다고 말하고, \phi 를 inner product space isomorphism 이라고 부른다.

(Classification of finite dimensional inner product space) (정리 10.5.5) V 와 W가 F-위의 유한차원 inner product space 일 때, 다음은 동치이다.

V와 W는 inner produce space 로서 isomorphic.

dim V = dim W.

(정리 10.5.6.) V가 \mathbb{R} -위의 유한차원 inner product space 일 때,

L(0) = 0 인 V의 rigid motion L 은 linear map 이다.

따라서, V 의 rigid motion M 은 translation 과 linear rigid motion 의 합성으로 쓸 수 있다.

V의 rigid motion 은 항상 bijection 이다.

(section 10.6) Orthogonal Group 과 Unitary Group

(정의 10.6.1) (F = \mathbb{R}) 인 경우) V가 inner product \langle , \rangle 가 주어진 \mathbb{R}-위 의 inner product space일 때, \mathbf{O}(V) = \mathbf{O}(V, \langle, \rangle ) = {L \in \mathfrak{L}(V,V) | \Vert Lv – Lw \Vert = \Vert v – w \Vert for all v, w \in V} 로 표기하고 [orthogonal group on V with respect to \langle , \rangle ] 라고 부른다. 또, \mathbf{O}(V) 의 원소를 orthogonal operator 라고 부른다.

(F = \mathbb{C}) 인 경우) V가 inner product \langle , \rangle 가 주어진 \mathbb{C}-위 의 inner product space일 때, \mathbf{U}(V) = \mathbf{U}(V, \langle, \rangle ) = {L \in \mathfrak{L}(V,V) | \Vert Lv – Lw \Vert = \Vert v – w \Vert for all v, w \in V} 로 표기하고 [unitary group on V with respect to \langle , \rangle ] 라고 부른다. 또, \mathbf{U}(V) 의 원소를 unitary operator 라고 부른다.

(정의 10.6.2.) \mathbb{C}^{n} 에 (Hermitian ) dot product 가 주어졌을 때, \mathbf{U}(n) = {A \in \mathfrak{M}\_{n,n}(\mathbb{C}) | L\_{A} \in \mathbf{U} (\mathbb{C}^{n} , dot product )} = {[L]\_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} \in \mathfrak{M}\_{n,n}(\mathbb{C}) | L \in \mathbf{U} (\mathbb{C}^{n} , dot product )} 로 표기하고, 이를 (complex) unitary group 이라고 부른다. 그리고, \mathbf{U}(n) 의 원소를 (complex) unitary matrix 라고 부른다.

(정의 10.6.3.) V가 inner product \langle , \rangle 가 주어져 있는 F-위의 n-dimensional inner product space 이고, \mathfrak{B} 를 V의 orthonormal basis 라고 하자.

F = \mathbb{R} 이면, \mathbf{O}\_{n} (\mathbb{R} , \langle, \rangle ) = {[L]\_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}} \in \mathfrak{M}\_{n,n}(\mathbb{R}) | L \in \mathbf{O} (V, \langle, \rangle ) } 로 표기하고, 이를 V와 \langle, \rangle 로부터 얻어진 orthogonal group 이라고 부른다.

F = \mathbb(C) 이면, \mathbf{U}\_{n} (\mathbb{C} , \langle, \rangle ) = {[L]\_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}} \in \mathfrak{M}\_{n,n}(\mathbb{C}) | L \in \mathbf{U} (V, \langle, \rangle ) } 로 표기하고, 이를 V와 \langle, \rangle 로부터 얻어진 unitary group 이라고 부른다.

(명제 10.6.4) 위 (정의 10.6.3) 은 – 즉, \mathbf{O}\_{n} (\mathbb{R} , \langle, \rangle ) 및 \mathbf{U}\_{n} (\mathbb{C} , \langle, \rangle) 의 정의는 V의 orthonormal basis 의 선택과는 무관하다.

(따름명제 10.6.5.)

\mathfrak{B} 가 [dot product 가 주어진 Euclidean space \mathbb{R}^{n}] 의 임의의 orthonormal basis 이면, \mathbf{O}(n) = {[L]\_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}} \in \mathfrak{M}\_{n,n}(\mathbb{R}) | L \in \mathbf{O}(\mathbb{R}^{n})} 이다. (단, \mathbf{O}(\mathbb{R}^{n}) = \mathbf{O}(\mathbb{R}^{n}, dot product) .)

\mathfrak{B} 가 [(Hermitian) dot product 가 주어진 \mathbb{C}^{n}] 의 임의의 orthonormal basis 이면, \mathbf{U}(n) = {[L]\_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}} \in \mathfrak{M}\_{n,n}(\mathbb{C}) | L \in \mathbf{U}(\mathbb{C}^{n})} 이다. (단, \mathbf{U}(\mathbb{C}^{n}) = \mathbf{U}(\mathbb{C}^{n}, dot product) .)

(관찰 10.6.6.) V가 inner product \langle , \rangle 가 주어진 n-dimensional inner product space 이고, L \in \mathfrak{L} (V,V) 일 때, 다음 조건들은 동치이다.

\Vert Lv – Lw \Vert = \Vert v – w \Vert for all v, w \in V.

\Vert Lv \Vert = \Vert v \Vert for all v \in V.

\langle Lv, Lv \rangle = \langle v, v \rangle for all v \in V.

\langle Lv, Lw \rangle = \langle v, w \rangle for all v, w \in V.

\mathfrak{B} 가 V의 orthonormal basis 이면, L(\mathfrak{B}) 도 V의 orthonormal basis.

(정의 10.6.9) A \in \mathfrak{M}\_{m,n}(\mathbb{C}) 일 때,A^{\*} = \bar{^{t}A} = ^{t}\bar{A} 로 표기하고, A^{\*} 를 A의 adjoint matrix 라고 부른다. (A \in \mathfrak{M}\_{n,n}(\mathbb{R}) 일 때에는, 물론 A^{\*} = ^{t} A로 이해한다.)

(정의 10.6.13.) 다음 표기법 \mathbf{SU} (n) = {A \in \mathbf{U}(n) | det(A) = 1} 이다. \mathbf{SU} (n) 을 special unitary group 이라고 부른다.

(subsection 10.7.) Adjoint Matrix 와 그 응용

(관찰 10.7.1.) F^{n} 과 F^{m} 에 각각 dot product \langle , \rangle 가 주어져 있다고 하자. 이 때, A \in \mathfrak{M}\_{n,n} (F) 이면, \langle AX, Y \rangle = \langle X, A^{\*} Y \rangle , \langle Y , AX \rangle = \langle A^{\*} Y , X \rangle , (X \in F^{n}, Y \in F^{m}) 이 성립한다.

(정의) AX = B 가 solution 을 갖지 않는 경우에 \Vert AX\_{0} – B \Vert 가 최소인 X\_{0} 을 구하는 문제를 최소자승법 (Least Squares Approximation – LSA) 라고 한다.

(명제 10.7.3.) A \in \mathfrak{M}\_{m,n} (F) 이고 B \in F^{m} 일 때,

LSA-문제의 solution – 즉, [\Vert AX\_{0} – B \Vert \le \Vert AX – B \Vert for all X in F^{n} ] 인 X\_{0} \in F^{n} 은 항상 존재한다.

만약 L\_{A} 가 injective 이면, LSA-문제의 solution X\_{0} 는 유일하게 결정된다.

(명제 10.7.4.) A \in \mathfrak{M}\_{m,n}(F) 이고 B \in F^{m} 일 때, 다음은 동치이다.

X\_{0} 는 LSA-문제의 solution (즉, \Vert AX\_{0} – B \Vert \le \Vert AX – B \Vert for all X \in F^{n} )

(A^{\*} A ) X\_{0} = A^{\*} B.

(명제 10.7.5) A \in \mathfrak{M}\_{m,n} (F) 이고 B \in F^{m} 이라고 하자. 만약, m \ge n 이고 rk(A) = n 이면 (즉 A가 full rank 를 가지면), LSA-문제의 solution X\_{0} 은 존재하고 하나뿐이다.

(관찰 10.7.9.) A \in \mathfrak{M}\_{m,n}(F) 이면, rk(A^{\*} A) = rk(A) 이다. (따라서, A가 full rank 를 가지면, (A^{\*}A) 는 가역행렬이다.)

(관찰 10.7.11) A \in \mathfrak{M}\_{m,n}(F) 이면, 다음이 성립한다.

im(A^{\*}) = (ker A)^{\perp} . 즉, ker A = (im(A^{\*})^{\perp}

im(A) = (ker(A^{\*}))^{\perp}. 즉, ker(A^{\*}) = (im A)^{\perp}

(정의) Minimal solution problem 은 AX = B가 solution 을 가질 때, 크기가 가장 작은 solution 을 구하는 것이다.

(명제 10.7.12.) A \in \mathfrak{M}\_{m,n} (F) 이고 B \in F^{m} 일 때, AX = B 가 solution 을 갖는다고 가정하자. 그러면

AX = B 의 minimal solution – 즉 , AX\_{0} = B 이고 [X \in F^{n} 이 AX = B 를 만족하면 \Vert X\_{0} \Vert \le \Vert X \vert ] 인 X\_{0} \in F^{n} 이 유일하게 존재한다.

{X\_{0}} = [AX = B 의 해집합] \cap im(A^{\*}) .

(Section 11) 군

(subsection 11.1) Binary Operation 과 Group

(정의 11.1.1.) 집합 X가 있을 때, 함수 \* : X \times X \to X 를 X위의 이항연산 (Binary operation) 이라고 부른다.

(정의 11.1.2.) 이항연산을 갖는 집합 X가 있을 때, 임의의 x,y,z \in X 에 대해 (xy)z = x(yz) 가 성립하면, 이항연산이 결합법칙(Associative law) 를 만족한다고 말한다.

(정의 11.1.4.) 이항연산 \*를 갖는 집합 G가 다음 조건들

모든 x,y,z \in G 에 대하여 (xy)z = x(yz)

[모든 x \in G 에 대하여 xe = ex = x] 인 원소 e \in G 가 존재.

각 x \in G 에 대하여 x\bar{x} = \bar{x} x = e 를 만족하는 원소 \bar{x} \in G 가 존재.

를 만족하면, G를 , 정확하는 (G,\*) 를 , 군 (Group) 이라고 부른다.

(관찰 11.1.6.) 군은 공집합이 아니다.

(관찰 11.1.7.) G가 group 이면 [[모든 x \in G 에 대하여 xe = ex = x] 인 원소 e \in G 가 존재.] 조건을 만족하는 e는 하나뿐이다. 이 때 e를 G의 항등원( identity 혹은 identity element) 라 부르고, G를 강조할 필요가 있으면 e = e\_{G} 로 표기한다.

(관찰 11.1.8.) G가 군이고 x \in G 이면, [각 x \in G 에 대하여 x\bar{x} = \bar{x} x = e 를 만족하는 원소 \bar{x} \in G 가 존재.] 를 만족하는 \bar{x}는 하나뿐이다. 이 때, \bar{x} 를 x의 역원 ( inverse element) 라고 부르고, \bar{x} = x^{-1} 로 표기한다.

(정의 11.1.9.) 군 G가 finite set 이면, G를 유한군(finite group) 이라고 부른다. 따라서, 무한군(infinite group) 의 뜻도 자명하다. 특히, G가 유한군일 때, |G| 를 G 의 order 라고 부른다.

(정의 11.1.10.) 군 G가 모든 x,y \in G 에 대해 xy = yx 의 조건을 만족하면, G를 가환군 (Commutative group, 혹은 abelian group) 이라고 부른다.

(subsection 11.2.) Group 의 초보적인 성질

(표기법 11.2.1) (Multiplicative notation) Group G 의 이항연산을 곱셈으로 표기할 때는 항등원을 대개 e = 1로 표기한다. 그리고 g \in G 일 때, 언제나처럼 g^{1} = g, g^{2} = gg , \cdots 로 정의한다. g^{0} =1 로 정의하는 것이 관습이고, g^{-2} = g^{-1}g^{-1}, g^{-3} = g^{-1}g^{-1}g^{-1} , \cdots 로 표기한다.

(Additive Notation) Group G의 이항연산을 덧셈으로 표기할 때에는 보통 G가 abelian group 인 것을 implicitly 가정한다. 이 때에는, 항등원을 e = 0 으로 표기하고 g \in G 의 inverse element 를 (-g) 로 표기하는 것이 관습이다. 따라서 이 경우에는 \cdots , (-2)g = (-g) + (-g) , (-1)g = -g , 0g = 0, 1g = g, 2g = g+g , \cdots 의 표기법이 자연스럽다. (그리고 h \in G 일 때, g-h = g + (-h) 의 표기법도 사용한다.)

G가 commutative group 이라고 하면 multiplicative notation을 사용하고, abelian group 이라고 하면 additive notation 을 사용하는 것이 관례이다. 별다른 언급이 없으면 multiplicative notation 을 사용한다.

(Cancellation Law) (관찰 11.2.9.) x,y,z \in G 일 때, xy = xz 이면 y = z 이다. 또, xz = yz 이면 x = y 이다.

(관찰 11.2.14.) 연산표의 각 가로줄에는 모두 다른 원소가 나타난다. 각 세로줄도 마찬가지이다.

(관찰 11.2.15.) 고정된 x \in G 에 대해서 함수 \lambda\_{x} : G \to G 를 \lambda\_{x} (y) = xy ( y \in G) 로 정의하면, \lambda\_{x} : G \to G 는 bijection 이다. \lambda\_{x} 는 집합 G를 permute 한다.

(subsection 11.3.) Subgroup

(정의 11.3.1.) H가 group G의 subset일 때( 즉 H \subseteq G일 때) G로부터 물려받은 binary operation 에 관하여, H 자신 group 이 되면, 우리는 H를 G의 subgroup(부분군) 이라고 부르고 H \le G 로 표기한다.

(관찰 11.3.2.) H \le G 일 때,

G 의 identity element 를 e\_{G} 로, H 의 identity element 를 e\_{H} 로 표기하면, e\_{H} = e\_{G} 이다.

h \in H 일 때, h 의 G에서의 inverse 를 h^{-1} 로, H에서의 inverse 를 h’ 으로 표기하면, h’ = h^{-1} 이다.

(관찰 11.3.4.) Group G 의 subset H 가 G의 subgroup 일 필요충분조건은 다음과 같다.

h\_{1} , h\_{2} \in H 이면, h\_{1}h\_{2} \in H .

e \in H.

h \in H 이면, h^{-1} \in H.

(관찰 11.3.7.) K \le H 이고 H \le G 이면, K \le G 이다. (즉, 부분군의 부분군은 부분군이다.)

(표기법 11.3.9.) H , K \subseteq G 일 때, HK = {hk \in G | h \in H, k \in K}로 표기한다.

(정의 11.3.11.) S \subseteq G 일 때, S를 포함하는 가장 작은 G의 subgroup 을 \langle S \rangle 로 표기하고, \langle S \rangle 을 subgroup generated by S (S 가 생성한 부분군) 이라고 부른다. (여기서 ‘가장 작다’는 말은 [물론 S \subseteq \langle S \rangle \le V 이면서, 만약 H 가 S를 포함하는 임의의 G 의 subgroup 이면 \langle S \rangle \le H ] 라는 뜻이다.)

(관찰 11.3.12.) S \subseteq G 이면, \langle S \rangle = \bigcup\_{S \subseteq H \le G} H 이다. 이로부터 \langle S \rangle 의 existence 와 uniqueness 가 얻어진다.

(정의 11.3.15.) x \in G 일 때, \langle x \rangle 를 x 가 generate 하는 G의 cyclic subgroup 이라고 부른다.

G = \langle x \rangle 인 x \in G 가 존재하면, G 를 x 를 generator 로 갖는 cyclic group 이라고 부른다.

(정의 11.3.16.) S \subseteq G 일 때, S^{-1} = {s^{-1} \in G | s \in S } 로 표기하자. 이 때, S \cup S^{-1} 의 원소를 alphabet 이라고 부르자.

Alphabet 들을 유한개 늘어놓은 (곱한) 것을 word 라고 부른다. e는 empty word 로 취급한다.

(관찰 11.3.17) S \subseteq G 일 때, [alphabet S \cap S^{-1} 로 만들어진 word 전체의 집합] 은 G의 subgroup 이 된다.

(명제 11.3.18) S \subseteq G 이면, \langle S \rangle 는 [alphabet S\cupS^{-1} 로 만들어진 word 전체의 집합]과 같다.

(subsection 11.4.) 학부 대수학의 반

(학부 대수학의 반) (정리 11.4.2.) Abelian group (\mathbb{Z}, +) 의 subgroup 은 n\mathbb{Z} 들 뿐이다. (단, 0 \le n \in \mathbb{Z})

(subsection 11.5.) Group Isomorphism

(정의 11.5.1.) G와 G’이 group 이고, 다음 조건 \phi(g\_{1}g\_{2}) = \phi(g\_{1}) \phi(g\_{2}) (g\_{1}, g\_{2} \in G) 를 만족하는 bijection \phi : G \to G’ 이 존재하면, 우리는 group G와 G’ 이 (group 으로서) isomorphic 하다고 말하고, G \approx G’ 혹은

\begin{tikzpicture}\matrix (m) [matrix of math nodes,row sep=3em,column sep=4em,minimum width=2em] {G &G’ \\}; \path[-stealth] (m-1-1) edge node [above] {$\phi$} node [below]{$\approx$} (m-1-2);\end{tikzpicture}

으로 표기한다. 이 때, \phi 를 (grou) isomorphism(from G onto G’) 이라고 부른다.

(관찰 11.5.4.) 위 (정의 11.5.1.) 의 relation \approx 는 equivalence relation 이다.

(subsection 11.6.) Group Homomorphism

(정의 11.6.1.) G,H 가 group 일 때, 함수 \phi : G \to H 가 다음 조건 \phi(g\_{1}g\_{2}) = \phi(g\_{1}) \phi(g\_{2}) (g\_{1}, g\_{2} \in G) 를 만족하면 \phi 를 (group) homomorphism from G into H 라고 부른다.

(관찰 11.6.2.) \phi : G \to H 가 group homomorphism 이면,

\phi(e) = e

x \in G 이면, \phi(x^{-1}) = (\phi(x))^{-1} = \phi x^{-1}.

(정의 11.6.3.) \phi : G \to H 가 homomorphism 일 때,

\phi 가 injective 이면, \phi 를 monomorphism 이라고 부른다.

\phi 가 surjective 이면, \phi 를 epimorphism 이라고 부른다.

\phi 가 bijective 이면, \phi 를 isomorphism 이라고 부른다.

G = H 이면, \phi 를 endomorphism 이라고 부른다.

Bijective endomorphism 을 automorphism 이라고 부른다.

(관찰 11.6.4.) \phi : G \to H 가 homomorphism 일 때, 다음 조건은 동치이다.

\phi 는 isomorphism.

[\psi \bullet \phi = I\_{G} 이고 \phi \bullet \psi = I\_{H}] 인 homomorphism \psi : H \to G 가 존재한다.

(정의 11.6.5.) \phi : G \to H 가 homomorphism 일 때,

ker \phi = \phi^{-1} (e) = {x \in G | \phi(x) = e} 를 \phi 의 kernel 이라고 부른다.

im \phi = \phi(G) = {\phi(x) | x \in G } 를 \phi 의 image 라고 부른다.

(관찰 11.6.6.) \phi : G \to H 가 homomorphism 이면,

ker \phi \le G 이고 im \phi \le H 이다.

\phi 가 monomorphism 이면, G 와 im \phi 는 isomorphic 하다.

K \le G 이면, \phi(K) \le H 이다.

(관찰 11.6.7.) \phi : G \to H 가 homomorphism 일 때, 다음 조건은 동치이다.

\phi 는 monomorphism 이다.

x , y \in G 이고 \phi x = \phi y 이면, x = y 이다.

x \in G 이고 \phi x = \phi e = e 이면, x = e 이다.

ker \phi = {e} 이다.

(관찰 11.6.8.) \phi : G \to H 가 homomorphism 이고 S 가 G 의 subset 이면,

\phi \langle S \rangle = \lange \phi S \rangle 이다.

G = \langle S \rangle 이면, im \phi = \langle \phi S \rangle이다.

\phi 가 epimorphism 일 필요충분조건은 \phi 가 (G의) generating set 을 (H의) generating set 으로 옮기는 것이다.

(subsection 11.7.)

(정의 11.7.3.) x \in G 일 때, G의 cyclic subgroup \langle x \rangle 의 order 를 x 의 order 라고 부른다. x 의 order 는 |x| 로 표기한다. 즉 |\langle x \rangle | = |x|.

(관찰 11.7.4.) x \in G 일 때, |x| = n < \infty 일 필요충분조건은 다음과 같다.

x^{n} = 1 이고, 0 m < n 이면 x^{m} \neq 1. 즉, n 은 x^{n} = 1인 최소의 자연수이다.

(재정의 11.7.5.) x \in G 일 때, homomorphism \gamma\_{x} : \mathbb{Z} \to G 를 \gamma\_{x} (a) = x^{a}, (a \in \mathbb{Z}) 라고 정의하자. 이 때 ker \gamma\_{x} \le \mathbb{Z} 이므로, [학부대수학의 반] 에 의해 ker \gamma\_{x} = n\mathbb{Z} 인 0 \le n \in \mathbb{Z} 가 존재한다. 만약 n = 0 이면 |x| = \infty 로 정의하고, n \neq 0 이면 |x| = n 으로 정의한다.

(정리 11.7.8.) Cyclic group 은 up to isomorphism \mathbb{Z} 와 \mu\_{n} 뿐이다.

(정리 11.7.9.) Cyclic group 의 subgroup 은 cyclic group 이다.

(subsection 11.8.) Group 과 Homomorphism 의 보기

(재정의 11.8.6.) X가 non-empty set 일 때, S\_{X} 를 S\_{X} = {\sigma : X \to X | \sigma 는 bijection} 으로 정의하면, (S\_{X} , \bullet ) 는 group 이 된다. S\_{X} 를 symmetric group on X 라고 부른다.

(Cayley’s Theorem) (정리 11.8.8.) \lambda : G \to S\_{G} 를 (\lambda(x))(g) = \lambda\_{x} (g) = xg (x,g \in G) 로 정의하면, \lambda 는 monomorphism 이 된다. 그러므로 모든 group 은 symmetric group 의 subgroup 과 isomorphic 하다.

(subsection 11.9.) Linear group

(보기 11.9.1.) 가역행렬 전체의 집합을 GL\_{n}(F) = {A \in \mathfrak{M}\_{n,n}(F) | A is invertible} 으로 표기하고 [general linear group over F] 라고 부른다. GL\_{n}(F) 는 행렬의 곱셈을 이항연산으로 갖는 group 이다. 그리고, GL\_{n}(F) 의 subgroup 을 linear group 또는 matrix group 으로 부른다.

SL\_{n}(F) = {A \in GL\_{n}(F) |det(A) = 1} 로 표기하고, [special linear group over F] 라고 부른다. SL\_{n} (F) \le GL\_{n}(F) 이다.

(보기 11.9.2.) V가 finite dimensional F-vector space 일 때, GL(V) = {L \in \mathfrak{L}(V,V) | L is invertible} 으로 표기하고 [general linear group on V] 라고 부른다. GL(V) 는 선형사상의 합성을 이항연산으로 갖는 group 이다. 그리고, GL(V) 의 subgroup 을 linear group 으로 부른다.

SL(V)= {L \in GL(V) |det(L) = 1} 로 표기하고, [special linear group on V] 라고 부른다. SL(V)\le GL(V) 이다.

(표기법 11.9.7.) GL\_{1}(F), 즉 F – {0} 을 F^{\times} = GL\_{1}(F) = F-{0} 으로 표기하고, [the multiplicative subgroup of F] 라고 부른다.

(Cayley’s Theorem 의 따름정리)(따름정리 11.9.21.) 모든 finite group 은 linear group (또는 matrix group) 과 isomorphic 하다.

(Section 12) Quotient  
(subsection 12.1) Equivalence class 와 Partition

(정의 12.1.1.) 집합 X가 있을 때, X \times X 의 subset R이 다음 조건을 만족하면, R 을 X-위의 equivalence relation 이라고 부른다. 또, (x,y) \in R 이면, x~\_{R} y, 혹은 간단히 x ~ y 로 표기한다.

(x,x) \in R for all x \in X. (Reflexivity)

(x,y) \in R 이면, (y,x) \in R (Symmetry)

(x,y) \in R 이고 (y,z) \in R 이면 (x,z) \in R. (Transitivity)

(정의 12.1.2) ~ 이 집합 X-위의 equivalence relation 이고 x \in X 일 때, [x] = { y \in X | x ~ y} 로 표기하고, [x] 를 x의 (x를 대표로 갖는) equivalence class 라고 부른다. 또, X/~ = {[x] | x \in X} 로 표기하고, X/~ 를 the set of equivalence classes in X 라고 부른다.

(정의 12.1.5.) ~ 이 집합 X-위의 equivalence relation 일 때, X 의 subset \mathcal{C} 가 다음 조건을 만족하면, \mathcal{C} 를 a complete set of representatives 라고 부른다.

z \in X 이면, z ~ x for some x \in \mathcal{C}.

x,y \in \mathcal{C} 이면, x \nsim y.

이 때 X = \mathfrak{U}\_{x \in \mathcal{C}} [x] 이다. 이를 equivalence class decomposition 이라고 부른다.

(정의 12.1.6.) X가 집합이고 A가 index set 일 때, X의 non-empty subset 들 {X\_{\alpha} | \alpha \in A} 가 다음 조건

\bigcul\_{\alpha \in A} X\_{\alpha} = X.

X\_{\alpha} \cap X\_{\beta} = \empty if \alpha \neq \beta.

을 만족하면, {X\_{\alpha} | \alpha \in A} 를 X-의 partition 이라고 부른다. 그리고, 각각의 X\_{\alpha} 를 part 라고 부른다.

(관찰 12.1.7.) 집합 X위에 equivalence relation 이 주어졌다는 말과 partition 이 주어졌다는 말은 같은 말이다.

(표기법 12.1.12) H \le G 이고 g \in G 일 때, 다음 표기법 g^{-1} H g = {g^{-1} hg | h \in H} , gHg^{-1} = {ghg^{-1} | h \in H} 를 사용한다.

(subsection 12.2.) Coset

(정의 12.2.1.) H \le G 이고 x \in G 일 때, xH = {xh | h \in H} 로 표기하고 (G의 연산이, 예를들어 덧셈일 때에는 x + H 로 표기) xH 를 [x를 대표로 갖는 left coset modulo H] 라고 부른다. 마찬가지로, Hx = {hx | h \in H} 로 표기하고, Hx 를 [x를 대표로 갖는 right coset modulo H] 라고 부른다.

(관찰 12.2.2.) H \le G 이고 x,y \in G 일 때,

x \in xH 이고, 따라서 G = \bigcup\_{x \in G} xH.

xH = yH iff y^{-1}x \in H.

xH \cap yH = \empty if xH \neq yH.

(표기법 12.2.4.) H \le G 이고 x,y \in G 일 때, 다음 표기법 x \equiv y (mod H) \iff xH = yH \iff x ~\_{H} y 와 \bar{x} = [x] = xH 를 사용한다. coset들 전체의 집합 – 즉 equivalence class 전체의 집합- 을 G/H = \frac{G}{H} = {xH | x \in G} = G/~\_{H} 로 표기하고, G/H 를 [coset space of G modulo H] 라고 부른다. 따라서 {x\_{i} | i \in I} 를 a complete set of representatives 라고 하면, G/H = {\bar{x\_{i}} | i \in I} 가 된다. 이 때, 서로 다른 coset 들 전체의 집합은 G의 partition 이므로, G = \mathfrak{U}\_{i \in I} x\_{i}H 로 쓸 수 있고, 이를 [coset decomposition of G modulo H] 라고 부른다.

(관찰 12.2.11.) H \le G 이고 x,y \in G 이면, |xH| = |yH| = |H| 이다.

(Lagrange’s Theorem) (관찰 12.2.12) G가 finite group 이고 H \le G 이면, |H| 는 |G| 의 약수이고, |G/H| = \frac{|G|}{|H|} 이다.

(표기법 12.2.13.) H \le G 일 때, |G/H| < \infty 이면, [G : H] = |G/H| 로 표기하고, [G:H] 를 [index of H in G]라고 부른다.

(관찰 12.2.16.) G가 finite group 일 떄 x \in G 이면, |x| \mid |G| 이다. 즉 x의 order 는 G의 order 를 나눈다.

(명제 12.2.17.) p가 prime 이고 |G| = p 이면, G 는 cyclic 이다. 즉, G \approx \mu\_{p} 이다.

(Cauchy’s Theorem) (정리 12.2.22) p 가 prime 이고 p \mid |G| 이면, |x| = p 인 x \in G 가 존재한다.

(subsection 12.3.) Normal Subgroup 과 Quotient Group

(정의 12.3.2.) H \le G 일 때, 다음 조건 g^{-1}hg \in G (for all g \in G, h \in H) 를 만족하면, H 를 G의 normal subgroup 이라고 부르고, H \trianglelefteq G 로 표기한다.

(관찰 12.3.3.) H \le G 일 때, coset space G/H 의 binary operation \bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{xy} (x,y \in G) 가 well-defined 되어있을 필요충분조건은 H \trianglelefteq G 로 표기한다.

(명제 12.3.4.) N \trianglelefteq G 일 때, coset space G/N 의 binary operation 을 bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{xy} (x,y \in G) 라 정의하면, G/N 은 group 이 된다. 우리는 G/N 을 [quotient group of G modulo N] 이라고 부른다.

(관찰 12.3.6.) H \le G 일 때, 다음 조건은 동치이다.

H \trianglelefteq G.

g^{-1}Hg \le H for all g \in G.

g^{-1}Hg = H for all g \in G.

(관찰 12.3.10.) H \le G 이고 [G:H] = 2이면, H 는 G의 normal subgroup 이다.

(관찰 12.3.11.) \phi : G \to G’ 이 group homomorphism 이면, ker \phi \trianglelefteq G (그러나, 반드시 im \phi \trianglelefteq G’일 필요는 없다.

(정의 12.3.12.) N \trianglelefteq G 일 때, \pi : G \to G/N 을 \pi(x) = \bar{x} (x \in G) 라고 정의하고, \pi 를 natural projection 이라고 부른다.

(관찰 12.3.14.) Cyclic group 의 quotient group 은 cyclic 이다.

(표기법 12.3.16.) 0 < n \in \mathbb{Z} 일 때, \mathbb{Z}\_{n} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} 로 표기한다. 이 때, 연산은 \bar{a} + \bar{b} = \bar{a+b} 로 표기한다. (단, a,b \in \mathbb{Z}).

(관찰 12.3.17.) \mathbb{Z}\_{n} 은 cyclic group 이다. 따라서 \mathbb{Z}\_{n} \approx \mu\_{n} 이다.

(정의 12.3.20.) G가 group 일 때, Z(G) = { z \in G | zg = gz for all g \in G} 로 표기하고, Z(G) 를 G의 center 라고 부른다.

(정의 12.3.24.) Projective general linear group PGL\_{n}(F) 와 projective special linear group PSL\_{n}(F) 를 각각 PGL\_{n}(F) = GL\_{n}(F) / Z(GL\_{n}(F)) , PSL\_{n}(F) = SL\_{n}(F) / Z(SL\_{n}(F)) 로 정의한다. PSO, PSU 등도 유사하게 정의할 수 있다.

(subsection 12.4.) Quotient space

(명제 12.4.1.) W \le V 일 때, coset space V/W 의 연산을 \bar{u} + \bar{v} = \bar{u+v} , c\bar{v} = \bar{cv} (u,v \in V, c \in F) 로 정의하면, V /W 는 vector space 가 된다. 우리는 V/W 를 [quotient space of V modulo W] 라고 부른다.

(정리 12.4.6.) V 가 f.d.v.s.이면 dim(V/W) = dim V = dim W 이다.

(subsection 12.5.) Isomorphism Theorem

(관차 12.5.1.) \phi : G \to H 가 group homomorphism 일 때, \phi (g) = h \in im \phi 이면, \phi^{-1}(h) = g \cdot ker \phi = \bar{g} 이다. (여기에서, (g \cdot ker \phi) 는 [G/ker \phi 의 coset] 을 뜻한다.)

(Group 의 First Isomorphism Theorem) (정리 12.5.2.) \phi : G \to H 가 group homomorphism 일 때, 함수 \bar{\phi} : G / ker \phi \to \im \phi 를 \bar{\phi} (\bar{g}) = \phi(g) , (g \in G) 로 정의하면, \bar{\phi} 는 well-defined 된 group isomorphism 이다. 즉, \begin{tikzpicture}\matrix (m) [matrix of math nodes,row sep=3em,column sep=4em,minimum width=2em] {G/ker \phi &im \phi \\}; \path[-stealth] (m-1-1) edge node [above] {$\bar{\phi}$} node [below]{$\approx$} (m-1-2);\end{tikzpicture} 이다.

(벡터공간의 First Isomorphism Theorem) (정리 12.5.11.) L : V \to W 가 linear map 일 때, 함수 \bar{L} : V/ker L \to im L 을 \bar{L} (\bar{v}) = L(v) (v \in V) 로 정의하면, \bar{L} 은 well-defined 된 vector space isomorphism 이다. 즉, \begin{tikzpicture}\matrix (m) [matrix of math nodes,row sep=3em,column sep=4em,minimum width=2em] {V/ker L &im L \\}; \path[-stealth] (m-1-1) edge node [above] {$\bar{\phi}$} node [below]{$\approx$} (m-1-2);\end{tikzpicture} 이다.

(관찰 12.5.14.) H \trianglelefteq G 이고 K \le G 이면, HK \le G 이다.

(Group 의 Second Isomorphism Theorem) H \trianglelefteq G 이고 G \le G 일 때, 함수 \bar{\jmath} : \frac{K}{H \cap K } \to \frac{HK}{H} 를 \bar{\jmath} (\bar{k}) = \bar{k} , (k \in K) 로 정의하면, \bar{\jmath} 는 well-defined 된 group isomorphism 이다. 따라서, \begin{tikzpicture}\matrix (m) [matrix of math nodes,row sep=3em,column sep=4em,minimum width=2em] {\frac{K}{H\capK} &\frac{HK}{H} \\}; \path[-stealth] (m-1-1) edge node [above] {$\bar{\jmath}$} node [below]{$\approx$} (m-1-2);\end{tikzpicture} 이다.

(벡터공간의 Second Isomorphism Theorem) U, W \le V 일 때, 함수 \bar{\jmath} : \frac{W}{U \cap W } \to \frac{U + W}{W} 를 \bar{\jmath} (\bar{w}) = \bar{w} , (w \in W) 로 정의하면, \bar{\jmath} 는 well-defined 된 group isomorphism 이다. 따라서, \begin{tikzpicture}\matrix (m) [matrix of math nodes,row sep=3em,column sep=4em,minimum width=2em] {\frac{W}{U\capW} &\frac{U+W}{U} \\}; \path[-stealth] (m-1-1) edge node [above] {$\bar{\jmath}$} node [below]{$\approx$} (m-1-2);\end{tikzpicture} 이다.

(따름정리 12.5.18.) V 가 f.d.v.s. 일 때, U,W \le V 이면, dim(U+W) = dim U + dim W – dim(U \cap W) 이다.

(Section 13) Triangularization

(subsection 13.1.) Triangularization

(정의) 이 장에서는 모든 것이 유한차원이라고 가정한다.

(관찰 13.1.1.) W \le V , W’ \le V’ 이고, linear map L : V \to V’ 이 LW \le W’ 을 만족한다고 가정할 때, \bar{L} : V/W \to V’/W’ 을 \bar{L}\bar{v} = \bar{Lv} (v \in V) 로 정의하면, \bar{L} 은 well-defined 된 linear map 이다. (이때, 우리는 L이 \bar{L} 을 naturally induce 한다고 말한다.)

(보조정리 13.1.4.) T \in \mathfrak{LM} 이고, W는 V의 T-invariant subspace 라고 하자. \bar{T} : \bar{V} \to \bar{V} 는 (관찰 13.1.1) 과 같다고 하고, \mathfrak{C} = {v\_{1}, …, v\_{m}} 은 W의 basis, \mathfrak{B} = {v\_{1}, …, v\_{n}} 은 V의 basis, 그리고 \bar{\mathfrak{B}} = {\bar{v\_{m+1}}, …, \bar{v\_{n}}} 는 \bar{V} 의 basis 라고 하자. 그러면, [T]\_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}} = $\left( \begin{array}{c|c} [T|\_{W}]\_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{C}} & \* \\ \hline 0 & [\bar{T}]\_{\bar{\mathfrak{B}}}^{\bar{\mathfrak{B}}}\end{array} \right)$

(Triangularization) (정리 13.1.6.) F = \mathbb{C} 이고 T \in \mathfrak{LM} 이면, [T]\_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}} 가 upper-triangle matrix 인 V의 기저 \mathfrak{B} 가 존재한다.

(subsection 13.2.) Triangularization 의 결과

(따름정리 13.2.1.) T \in \mathfrak{LM} 일 때, T의 characteristic polynomial \phi\_{T}(t) = t^{n} + a\_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a\_{1} t + a\_{0} (단, a\_{1}, …, a\_{n-1} \in F) 가 \mathbb{C}-위에서 \phi\_{T}(t) = (t-\lambda\_{1})(t-\lambda\_{2}) \cdots (t-\lambda\_{n}), (단, \lambda\_{1}, …, \lambda\_{n} \in \mathbb{C}) 로 인수분해되면, det(T) = \lambda\_{1}\lambda\_{2} \cdots \lambda\_{n} = (-1)^{n}a\_{0} , tr(T) = \lambda\_{1} + \lambda\_{2} + \cdots + \lambda\_{n} = -a\_{n-1} 이다.

(따름정리 13.2.2.) N \in \mathfrak{LM} 이 nilpotent 이면, N의 characteristic polynomial 은 \phi\_{N}(t) = t^{n} 이다.

(정의 13.2.5.) T \in \mathfrak{LM} 일 때, (T-I) 가 nilpotent 이면 T를 unipotent operator (matrix) 라고 부른다.

(정의 13.2.9.) T,S \in \mathfrak{LM} 일 때, V 의 하나의 기저 \mathfrak{B} 에 관해 [T]\_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}} 와 [S]\_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}} 가 모두 upper-triangular matrix 이면, 우리는 T와 S가 simultaneously triangularizable 하다고 말한다. 여러 개 (무한개 포함) 의 경우도 마찬가지로 정의한다.

(명제 13.2.10.) T,S \in \mathfrak{LM} 이고 TS = ST 이면 – 즉 T 와 S 가 commute 하면 – T와 S는 common eigen-vector 를 갖는다. 즉, [Tv = \lambda v, Sv = \mu v for some \lambda , \mu \in \mathbb{C}] 인 non-zero vector v \in V 가 존재한다.

(명제 13.2.11.) T,S \in \mathfrak{LM} 이고, TS = ST 이면, T,S 는 simultaneously triangularizable 하다.

(Section 14) Bilinear form

(subsection 14.1) Bilinear form

(정리 14.1.6.) \mathfrak{B} 를 n-dimensional F-vector space V 의 고정된 기저라고 할 때, 함수 \Omega\_{\mathfrak{B}} : \mathfrak{Bil}(V) \to \mathfrak{M}\_{n,n}(F) 를 \Omega\_{\mathfrak{B}}(B) = [B]\_{\mathfrak{B}} , (B \in \mathfrak{Bil}(V)) 로 정의하면 \Omega\_{\mathfrak{B}} 는 vector space isomorphism 이다. 이때, [B]\_{\mathfrak{B}} 를 (기저 \mathfrak{B} 에 관한) B의 행렬이라고 부른다.

(관찰 14.1.8.) F^{n} 에 bilinear form B\_{\mathcal{E}}^{J} 가 주어져 있다고 하자. J 가 가역일 때, A \in \mathfrak{M}\_{n,n}(F) 이면 B\_{\mathcal{E}}^{J}(AX,Y) = B\_{\mathcal{E}}^{J}(X,(J^{-1} \cdot ^{t}A \cdot J) Y ), (X,Y \in F^{n})

(정의 14.1.9.) B : V \times V \to F 가 F-vector space V 의 bilinear form 일 때,

B가 다음 조건 B(v,w) = B(w,v) (v,w \in V) 를 만족하면, B를 symmetric bilinear form 이라고 부른다.

B가 다음 조건 B(v,v) = 0 (v \in V) 를 만족하면, B를 alternating bilinear form 이라고 부른다.

(관찰 14.1.10.) \mathfrak{B} 가 f.d.v.s. V의 기저이고, B 가 V의 bilinear form 일 때, B가 symmetric 이기 위한 필요충분조건은 [B]\_{\mathfrak{B}} 가 symmetric matrix 인 것이다.

(subsection 14.2.)

(정의 14.2.2.) 유한차원 벡터공간 V위에 정의된 함수 Q : V \to F 가 다음 조건을 만족하면, Q를 V의 quadratic form 이라고 부른다.

B\_{Q} : V \times V \to F 를 B\_{Q} (v,w) = Q(v + w) -Q(v) – Q(w) (v,w \in V) 로 정의하면, B\_{Q} 는 V의 symmetric bilinear form.

v \in V, c \in F 이면, Q(cv) = c^{2}Q(v)

따라서, quadratic form 이 주어지면, symmetric bilinear form 이 주어진다. 그리고, 그 역도 성립한다.

(관찰 14.2.4.) V가 유한차원 벡터공간을 때, 다음 대응관계 Q \leftrightarrow B\_{Q} 는 [V의 quadratic form 전체의 집합] 과 [V의 symmetric bilinear form 전체 집합] 사이의 bijection 이다.

(정의 14.2.5.) 유한차원 벡터공간 V에 symmetric bilinear form B 가 주어졌다고 하자. 그러면, 앞 (관찰 14.2.4.) 에 의해, V의 quadratic form Q도 자동적으로 주어진다. 이 때, (V,B) = (V,B,Q) 를 quadratic space 라고 한다.

(section 14.3.) Orthogonal group 과 Symplectic group

(정의 14.3.1.) Quadratic space (V,B) 가 주어졌을 때 (따라서, B는 symmetric bilinear form 이고, quadratic form Q는 자동으로 주어져있다), O(V,B) = {L \in GL(V) | B(Lv, Lw) = B(v,w) for all v, w \in V} 로 정의하고, O(V,B) 를 (V,B) 로부터 만들어진 orthogonal group 이라고 부른다. 또, O(V,B) 의 원소는 물론 orthogonal operator 라고 부른다. 그리고, (V,B) 와 O(V,B) 를 공부하는 것을 orthogonal geometry 라고 부른다.

(명제 14.3.5.) \mathfrak{B} 를 quadratic space (V,B) 의 basis 라고 할 때, J = [B]\_{\mathfrak{B}} 로 표기하면 (따라서 , J는 symmetric)

{[L]\_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}} \in GL\_{n}(F) | L \in O(V,B)} = {A \in GL\_{n}(F) | ^{t}A \cdot J \cdot A = J} 이다.

(정의 14.3.6.) J \in \mathfrak{M}\_{n,n}(F) 가 symmetric matrix 일 때, O\_{n}^{J}(F) = {A \in GL\_{n}(F) } ^{t}A \cdot J \cdot A = J} 로 표기하고, J에 대응하는 orthogonal group 이라고 부른다.

(정의 14.3.8.) B가 유한차원 벡터공간 V의 alternating bilinear form일 때, Sp(V,B) = {L \in GL(V) | B(Lv, Lw) = B(v,w) for all v , w \in V} 로 정의하고, Sp(V,B) 를 (V,B) 로부터 만들어진 symplectic group 이라고 부른다. 그리고 (V,B) 와 Sp(V,B) 를 공부하는 것을 symplectic grometry 라고 부른다.

(명제 14.3.9.) B가 유한차원 벡터공간 V의 alternating bilinear form 이고 , \mathfrak{B} 가 V의 기저일 때, J = [B]\_{\mathfrak{B}} 로 표기하면 (따라서 ,J 는 skew-symmetric)

{[L]\_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}} \in GL\_{n}(F) | L \in Sp(V,B) } = {A \in GL\_{n}(F) | ^{t}A \cdot J \cdot A = J} 이다.

(정의 14.3.10.) J \in \mathfrak{M}\_{n,n}(F) 가 skew-symmetric matrix 일 때, SP\_{n}^{J}(F) = {A \in GL\_{n}(F) | ^{t}A \cdot J \cdot A = J} 로 표기하고, J에 대응하는 symplectic group 이라고 부른다.

(subsection 14.4.) O(1,1) 과 O(3,1)

(표기법) F = \mathbb{R}, J = diag(1,-1) 이라고 하면 \mathbb{R}^{2} 의 symmetric bilinear form B\_{\mathcal{E}}^{J} 는 B\_{\mathcal{E}}^{J} (\binom{a}{b} , \binom{c}{d} ) = ac – bd , (a,b,c,d \in \mathbb{R}) 로 주어질 것이다. 이 때, B\_{\mathcal{E}}^{J} 에 대응하는 orthogonal group 을 O(1,1) = O\_{2}^{J} (\mathbb{R}) = {A \in GL\_{2}(\mathbb{R}) |^{t} A \cdot J \cdot A = J} 로 표기하자.

(정의 14.4.7.) J = diag(1,1,1,-1) 일 때, O(3,1) = O\_{4}^{J}(\mathbb{R}) = {A \in GL\_{4}(\mathbb{R}) | ^{t}A \cdot J \cdot A = J} 로 표기하고, O(3,1) 을 Lorenz group 이라고 부른다.

(subsection 14.5.) Non-degenerate Symmetric Bilinear form

(정의 14.5.1.) v, w \in V 일 때, B(v,w) = 0 이면 v \perp w 로 표기하고, v와 w 는 서로 수직이라고 말한다. 또, S,T \subseteq V 일 때, [B(v,w) = 0 for all v \in S, w \in T] 이면, S \perp T 라고 표기하고 S와 T는 서로 수직이라고 말한다.

(정의 14.5.3.) V의 basis \mathfrak{B} = {v\_{i}} 가 mutually perpendicular subset 이면, \mathfrak{B} 를 V의 orthogonal basis 라고 부른다. 또, V의 orthogonal basis \mathfrak{B} = {v\_{i}} 가 unit vector 들로 이루어져 있으면 (즉 ,B(v\_{i}, v\_{i}) = 1 for all i 이면) , \mathfrak{B} 를 V의 orthonormal basis 라고 부른다.

(표기법 14.5.5.) S \subseteq V 일 때, S^{\perp} = {v \in V | v \perp w for all w \in S} 로 표기한다.

(정의 14.5.9.) V^{\perp} = 0일 때, 우리는 B를 non-degenerate symmetric bilinear form 이라고 부른다.

(명제 14.5.11.) \mathfrak{B} 가 V의 basis 일 때, 다음은 동치이다.

B는 non-degenerate.

det([B]\_{\mathfrak{B}}) \neq 0.

(정리 14.5.12.) B가 non-degenerate 일 때, W \le V 이면 dim W^{\perp} = dim V – dim W 가 성립한다.

(관찰 14.5.13.) [B(v,v) = 0 for all v \in V] 이면, B = 0 이다.

(보조정리 14.5.14.) w \in V 이고 B(w,w) \neq 0 이면, V = \langle w \rangle \oplus \langle w \rangle^{\perp} 이 성립한다.

(정리 14.5.15.) 모든 quadratic space (V,B) 는 orthogonal basis 를 갖는다. (물론 V \neq 0). (B 가 non-degenerate 일 필요도 없다.)

(정의 14.5.16.) 만약 , w \in V 가 B(w,w) \neq 0 을 만족하면, 함수 S\_{w} : V \to V 를 S\_{w}(v) = v - \frac{2B(v,w)}{B(w,w)} w, (v \in V) 라 정의하고, S\_{w} 를 w에 관한 reflection 또는 symmetry 라고 부른다.

(subsection 14.6.) Dual space 와 Dual map

(명제 14.6.1.) 함수 \psi^{V} : V \to V^{\*\*} 를 (\psi^{V}(v))(f) = f(v) , (v \in V , f \in V^{\*}) 로 정의하면, \psi^{V} 는 vector space isomorphism 이다. 이 때, \psi^{V} 는 [기저의 선택과 무관한 natural isomorphism] 이므로, 우리는 \psi^{V} 를 사용해 V와 V^{\*\*} 를 identify 한다.

(관찰 14.6.2.) v \in V 일 때, [f(v) = 0 for all f \in V^{\*}] 이면, v = 0 이다.

(관찰 14.6.3.) {v\_{1}, …, v\_{n}} 이 f.d.v.s. V의 기저이면, \psi^{V}(v\_{i}) = v\_{i}^{\*\*} (i = 1,…,n) 이 성립한다. (단, v\_{i}^{\*\*} = (v\_{i}^{\*})^{\*} ).

(정의 14.6.5.) V,W 가 vector space 이고 L : V \to W 가 linear map 일 때, linear map L^{\*} : W^{\*} \to V^{\*} 를 L^{\*}(f) = f \bullet L , (f \in W^{\*}) 으로 정의하고, L^{\*} 를 L의 dual map 이라고 부른다.

(관찰 14.6.7.) \mathfrak{B} = {v\_{1}, …, v\_{n}} 을 V의 기저라고 하고, \mathfrak{C} = {w\_{1}, …, w\_{m}} 은 W의 기저라고 하자. 이 때, L \in \mathfrak{L}(V,W) 이면 [L^{\*}]\_{\mathfrak{B}^{\*}}^{\mathfrak{C}^{\*}} = ^{t}([L]\_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}}) 가 성립한다.

(subsection 14.7.) Duality

(표기법) F-벡터공간 V 와 그 dual V^{\*} 에 대해 bilinear form \epsilon : V \times V^{\*} \to F : \epsilon(v,f) = f(v) , (v \in V, f \in V^{\*}) 로 정의한다. S \subseteq V , T \subseteq V^{\*} 일 때, S^{perp} = {f \in V^{\*} | \epsilon(v,f) = 0 for all v \in S} , T^{perp} = {v \in V | \epsilon(v,f) = 0 for all f \in T} , 로 표기한다.

(정리 14.7.3.) V가 유한차원이고, W \le V, Y \le V^{\*} 이면 다음이 성립한다.

dim W^{perp} = dim V – dim W.

dim Y^{perp} = dim V – dim Y.

(따름정리 14.7.4.) V가 유한차원이고, Y \le V^{\*} 라고 하자. 만약, Y \neq V^{\*} 이면, [f(v) = 0 for all f \in Y] 인 0 \neq v \in W 가 존재한다.

(subsection 14.8.) B-identification

(정리 14.8.1.) 함수 \phi^{V} = \phi\_{B}^{V} : V \to V^{\*} 를 (\phi^{V}(v))(w) = B(w,v) , (v,w \in V) 로 정의하면, \phi^{V} 는 linear map 이다. 이 때, 다음 조건은 동치이다.

B는 non-degenerate symmetric bilinear form.

\phi^{V} 는 monomorphism.

\phi^{V} 는 isomorphism.

V^{\*} 의 모든 원소는 \phi^{V} (v) 의 꼴. (단, v \in V).

(관찰 14.8.3.) \mathfrak{B} 가 V의 기저이고, \mathfrak{B}^{\*} 를 \mathfrak{B} 의 dual basis 라고 하면, [\phi\_{B}^{V}]\_{\mathfrak{B}^{\*}}^{\mathfrak{B}} = [B]\_{\mathfrak{B}}.

(표기법 14.8.4.) (V,B) 가 유한차원 non-degenerate quadratic space 일 때, (정리 14.8.1.) 의 isomorphism \phi^{V} 는 기저의 선택과 무관한 natural isomorphism 이다. 따라서 이번에도 \phi^{V} 를 통하여 V 와 V^{\*} 를 identify 하고, V = V^{\*} 로 표기법을 남용한다. 이를 B-identification 이라고 한다. 그리고, 혼동의 가능성이 없다면 \phi\_{B}^{V} (v) = \phi\_{v} (v \in V) 로 간략히 표기하기로 한다.

(명제 14.8.9.) (V,B) 가 유한차원 non-degenerate quadratic space 일 때, 함수 I \times \phi\_{B}^{V} : V \times V \to V \times V^{\*} 를 (I \times \phi\_{B}^{V})(v,w) = (v, \phi\_{w}) (v,w \in V) 로 정의하면, 다음 사각형 diagram

\begin{tikzpicture} \matrix (m) [matrix of math nodes,row sep=3em,column sep=4em,minimum width=2em] { V \times V & F\\ V \times V^{\*} & F \\}; \path[-stealth] (m-1-1) edge node [left] {$I \times \phi\_{B}^{V} $} node [right] {$=$} (m-2-1) edge node [above] {$B$} (m-1-2) (m-1-2) edge node [right] {$ I $} node [left] {$=$} (m-2-2) (m-2-1) edge node [below] {$\epsilon$} (m-2-2);\end{tikzpicture}

은 commutative diagram 이다. 즉, B-identification 의 관점에서는 B = e 이다. (따라서, “\perp = perp “ 라고 말할 수 있다.)

(정리 14.8.10.) (V,B) 를 유한차원 non-degenerate quadratic space 라고 하고, W \le V 라고 하자. 그러면, B-identification 의 관점에서는 W^{\perp} = W^{perp} 이다. 특별히, dim W^{\perp} = dim V – dim W 이다.

(subsection 14.9.) Transpose Operator

(정의 14.9.1) L \in \mathfrak{L}(V,W) 라고 하자. 이때, 선형사상 L의 (B와 C에 관한) transpose map ^{t}L \in \mathfrak{L}(V,W) 는 – B-identification 과 C-identification 의 관점에서 - ^{t}L = L^{\*} 로 정의된다. (L^{\*} 는 L의 dual map) . 즉, ^{t}L : W \to V 는 다음 사각형 diagram

\begin{tikzpicture} \matrix (m) [matrix of math nodes,row sep=3em,column sep=4em,minimum width=2em] { W & V\\ W^{\*} \times V^{\*} & F \\}; \path[-stealth] (m-1-1) edge node [left] {$ \phi\_{C}^{W} $} node [right] {$=$} (m-2-1) edge node [above] {$^{t}L$} (m-1-2) (m-1-2) edge node [right] {$ \phi\_{B}^{V} $} node [left] {$=$} (m-2-2) (m-2-1) edge node [below] {$L^{\*}$} (m-2-2);\end{tikzpicture}

을 commutative diagram 으로 만들어주는 유일한 linear map 이다. 이를 식으로 표현한다면, ^{t}L = (\phi\_{B}^{V})^{-1} \bullet L^{\*} \bullet \phi\_{C}^{W} 가 된다.

L \in \mathfrak{L}(V,V) 일 때 T의 transpose operator ^{t}L 을 ^{t}L = (\phi\_{B}^{V})^{-1} \bullet L^{\*} \bullet \phi\_{B}^{W} 로 정의한다.

(관찰 14.9.2.) L,M \in \mathfrak{L}(V,V) 일 때, B(Lv, w) = B(Mv,w) , (v, w \in V) 이면, L = M 이다. (뒷자리에서도 마찬가지다.)

(명제 14.9.3.) L \in \mathfrak{L}(V,W) 이면, ^{t}L 은 다음 조건 C(Lv, w) = B(v, ^{t}Lw) , (v \in V , w \in W) 를 만족하는 유일한 linear map 이다. (B,C 는 symmetric 이므로, 이 조건은 C(w,Lv) = B(^{t}Lw, v) , (v \in V, w \in W) 와 동치이다.)

(명제 14.9.4.) \mathfrak{B,C} 를 각각 V,W의 고정된 기저라고 하자.

L \in \mathfrak{L}(V,W) 일 때, J\_{\mathfrak{B}} = [B]\_{\mathfrak{B}} , J\_{\mathfrak{C}} = [C]\_{\mathfrak{C}} 로 표기하면, [^{t}L]\_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{C}} = (J\_{\mathfrak{B}})^{-1} \cdot ^{t} ([L]\_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}}) \cdot J\_{\mathfrak{C}} 이다.

특별히, L \in \mathfrak{L}(V,V) 일 때, J = [B]\_{\mathfrak{B}} 로 표기하면, [^{t}L]\_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B }} = J^{-1}\cdot ^{t} ([L]\_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}) \cdot J 이다.

(명제 14.9.6.) O(V,B) = {L \in GL(V) | ^{t}L \bullet L = I} .

(관찰 14.9.8.) t : \mathfrak{L}(V,W) \to \mathfrak{L}(W,V) 를 t(L) = ^{t}L (L \in \mathfrak{L}(V,V)) 로 정의하면, t 는 isomorphism 이다. 특별히, 다음이 성립한다.

L, M \in \mathfrak{L}(V,W) 이면, ^{t}(L+M) = ^{t}L + ^{t}M

L \in \mathfrak{L}(V,W), c \in F 이면, ^{t}(cL) = c \cdot ^{t}L.

(관찰 14.9.9.) 다음이 성립한다.

^{t}I = I.

L \in \mathfrak{L}(V,W) 이고 M \in \mathfrak{L}(W,U) 이면, ^{t}(M \bullet L) = ^{t}L \bullet ^{t}M.

L \in \mathfrak{L}(V,W) 이면, ^{t}(^{t}L) = L.

(Section 15) Hermitian form

(subsection 15.1.) Hermitial form

(정의 15.1.1.) V를 \mathbb{C}-vector space 라고 하자. 이 때, 함수 H : V \times V \to \mathbb{C} 가 , 모든 v,u,w \in V , c \in \mathbb{C} 에 대해, 다음 조건

H(u+v, w) = H(u,w) + H(v,w)

H(cv, w) = cH(v,w)

H(v,w) = \bar{H(w,v)}

를 만족하면, H를 V의 Hermitian form 이라고 부르고, (V,H) 를 Hermitian space 라고 부른다.

(정의) V가 유한차원 \mathbb{C}-벡터공간일 때, \mathfrak{Ker}(V) = {H : V \times V \to \mathbb{C} | H 는 Hermitian form} 이라고 표기하자.

(정의) (i,j)-성분이 H(v\_{i}, v\_{j}) 인 (n \times n)-행렬 [H]\_{\mathfrak{B}} = (H(v\_{i},v\_{j})) 를 (기저 \mathfrak{B} 에 관한) H의 행렬이라고 부른다

(정리 15.1.6.) 함수 \Omega\_{\mathfrak{B}} : \mathfrak{Ker}(V) \to {J \in \mathfrak{M}\_{n,n} (\mathbb{C}) | J 는 self-adjoint} 를 \Omega\_{\mathfrak{B}}(H) = [H]\_{\mathfrak{B}} (H \in \mathfrak{Ker}(V)) 로 정의하면 \Omega\_{\mathfrak{B}} 는 bijection 이다.

(명제 15.1.11.) J = [H]\_{\mathfrak{B}} 로 표기하면(따라서, J 는 self-adjoint) {[L]\_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}} \in GL\_{n}(\mathbb{C}) | L \in U(V,H) } = {A \in GL\_{n}(\mathbb{C}) | ^{t}A \cdot J \cdot \bar{A} = J} 이다.

(정의 15.1.12.) J \in \mathfrak{M}\_{n,n}(\mathbb{C}) 가 self-adjoint 일 때, U\_{n}^{J}(\mathbb{C}) = {A \in GL\_{n}(\mathbb{C}) | ^{t}A \cdot J \cdot \bar{A} = J} 로 표기하고, J 에 대응하는 unitary group 이라고 부른다.

(subsection 15.2.) Non-degenerate Hermitian form

(정의 15.2.1.) v,w \in V 일 때, H(v,w) = 0 이면, v \perp w 로 표기하고 v 와 w는 서로 수직이라고 말한다. 그리고, S,T \subseteq V 일 때, [H(v,w) = 0 for all v \in S, w \in T] 이면, S \perp T 로 표기하고 S와 T는 서로 수직이라고 말한다. 또, S^{\perp} = {v \in V | v \perp w for all w \in S} 로 표기한다.

(정의 15.2.2.) [H]\_{\mathfrak{B}} 가 대각행렬이면, \mathfrak{B} 를 V의 orthogonal basis 라고 부른다. 또, [H]\_{\mathfrak{B}} = I 이면, \mathfrak{B} 를 V의 orthonormal basis 라고 부른다.

(정의 15.2.4.) V^{\perp} = 0 일 때, 우리는 H를 non-degenerate Hermitian form 이라고 부른다.

(명제 15.2.5.) H가 non-degenerate 이기 위한 필요충분조건은 det([H]\_{\mathfrak{B}}) \neq 0 인 것이다.

(정리 15.2.6.) H가 non-degenerate 일 때, W \le V 이면 dim W^{\perp} = dim V – dim W 가 성립한다.

(관찰 15.2.7.) [H(v,v) = 0 for all v \in V] 이면, H = 0 이다.

(정리 15.2.9.) 모든 non-zero Hermitian space (V,H) 는 orthogonal basis 를 갖는다.

(subsection 15.3.) H-Identification 과 Adjoint operator

(정의) 함수 \phi^{V} = \phi\_{H}^{V} : V \to V^{\*} 를 (\phi^{V} (v)) (w) = H(w,v) (v,w \in V ) 로 정의하자.

(정리 15.3.3.) 함수 \phi^{V} = \phi\_{H}^{V} : V \to V^{\*} 에 대해 H가 non-degenerate Hermitian form 이면, \phi^{V} 는 bijection이다. 특별히, V^{\*} 의 모든 원소는 \phi^{V}(v) 의 꼴로 쓸 수 있다. (단, v \in V)

(관찰 15.3.4.) W \le V 이면, dim W = dim \phi\_{H}^{V}(W) 이다.

(표기법 15.3.5.) (정리 15.3.3.) 의 bijection \phi\_{H}^{V} 는 기저의 선택과 무관한 natural bijection 이다. 따라서, B-identification 과 유사하게 \phi\_{H}^{V} 를 통하여 V 와 V^{\*} 를 identify 하고, V = V^{\*} 로 표기법을 쓴다. 이를 우리는 H-identification 이라고 부른다. 그리고 혼동의 가능성이 없다면 \phi\_{H}^{V}(v) = \phi\_{v} (v \in V) 라고 쓰기도 한다.

(정리 15.3.9.) W \le V 라고 하자. 그러면, H-identification 의 관점에서는 W^{\perp} = W^{perp} 이다. 특별히, dim W^{\perp} = dim V – dim W 이다.

(정의 15.3.10.) L \in \mathfrak{L}(V,W) 이라고 하자. 이 때, L의 (H와 K에 관한) adjoint map L^{\star} \in \mathfrak{L}(W,V) 는 – H-identification 과 K-identification 의 관점에서 – L^{\star} = L^{\*} 로 정의된다. 즉, L^{\star} : W \to V 는 다음 사각형 diagram

\begin{tikzpicture} \matrix (m) [matrix of math nodes,row sep=3em,column sep=4em,minimum width=2em] { W & V\\ W^{\*} \times V^{\*} & F \\}; \path[-stealth] (m-1-1) edge node [left] {$ \phi\_{K}^{W} $} node [right] {$=$} (m-2-1) edge node [above] {$L^{\star}$} (m-1-2) (m-1-2) edge node [right] {$ \phi\_{H}^{V} $} node [left] {$=$} (m-2-2) (m-2-1) edge node [below] {$L^{\*}$} (m-2-2);\end{tikzpicture}

을 commutative diagram 으로 만들어주는 유일한 linear map이다. 이를 식으로 표현한다면, L^{\*} = (\phi\_{H}^{V})^{-1} \bullet L^{\*} \bullet \phi\_{K}^{W} 가 된다.

(명제 15.3.12.) L \in \mathfrak{L}(V,W) 이면, L^{\*} 는 다음 조건 K(Lv, w) = H(v, L^{\*}w), (v \in V , w \in W) 를 만족하는 유일한 linear map 이다. (이 조건은 K(w,Lv) = H(L^{\*}w, v) (v \in V, w \in W) 와 동치이다.)

(명제 15.3.13.) L \in \mathfrak{L}(V,W) 일 때, J\_{\mathfrak{B}} = [H]\_{\mathfrak{B}} , J\_{\mathfrak{C}} = [K]\_{\mathfrak{C}} 로 표기하면, [L^{\*}]\_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{C}} = \bar{J\_{\mathfrak{B}}}^{-1} \cdot ([L]\_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{C}})^{\*} \cdot \bar{J\_{\mathfrak{C}} 이다.

특별히, L \in \mathfrak{L}(V,V) 일 때, J = [B]\_{\mathfrak{B}}로 표기하면, [L^{\*}]\_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}} = \bar{J}^{-1} \cdot ([L]\_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}})^{\*} \cdot \bar{J}

(명제 15.3.14.) U(V,H) = { L \in GL(V) | L^{\*} \bullet L = I}

(관찰 15.3.16.) L,M \in \mathfrak{L}(V,W) 이고 c \in \mathbb{C} 이면, 다음이 성립한다.

(L + M)^{\*} = L^{\*} + M^{\*}.

(cL)^{\*} = \bar{c} \cdot L^{\*}.

(subsection 15.4.) 왜 Non-degenerate 인 경우만?

(관찰 15.4.1.) L \in U(V,H) 이면, V^{\perp} 는 V의 L-invariant subspace 이다. 다시 말해, L(V^{\perp}) = V^{\perp} 이고, 따라서 L|\_{V^{\perp}} \in GL(V^{\perp}) 이다.

(관찰 15.4.2.) \bar{H} 는 well-defined 된 \bar{V} 의 Hermitian form 이다.

(관찰 15.4.3.) \bar{H} 는 non-degenerate 이고, [\bar{H}]\_{\bar{\mathfrak{B}} = [H|\_{W \times W} ]\_{\mathfrak{D}} 이다.

(명제 15.4.5.) 함수 \Lambda : U(V,H) \to GL(V^{\perp}) \times \mathfrak{M}\_{m,n-m}(\mathbb{C}) \times U(\bar{V}, \bar{H}) 를 \Lambda(L) = (L|\_{V^{\perp}} , [L]\_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{D}} , \bar{L}) , (L \in U(V,H)) 로 정의하면, \Lambda 는 bijection 이다.

(Section 16) Spectral Theorem

(subsection 16.1) 표기법과 용어

(표기법 16.1.1.) 이 책에서 [T \in \mathfrak{LM}] 이라고 하면, 항상 [T \in \mathfrak{L}(V,V) 혹은 T \in \mathfrak{M}\_{n,n}(F)] 를 뜻하기로 약속한다. 이때, dim V = n 이라고 놓자. 물론 T가 행렬이면 V = F^{n} 으로 이해하고, T = L\_{T} 로 혼동한다. (즉, 행렬은 특수한 선형사상으로 이해한다.) 또, V \neq 0 이라고 가정한다.

(표기법 16.1.2.) F = \mathbb{C} 이고 (V,H) 가 non-degenerate Hermitian space 일 때, T = L \in \mathfrak{L}(V,V) 이면, T^{\*} = L^{\*} 로 이해한다. 따라서, T = A \in \mathfrak{M}\_{n,n}(\mathbb{C}) 이면 T^{\*} = (L\_{A})^{\*} 로 이해한다는 뜻이 된다.

(F에 제한은 없지만 대부분의 경우에 F = \mathbb{R} 이고, ) (V,B) 가 non-degenerate quadratic space 일 때에는, T = L \in \mathfrak{L}(V,V) 이면, T^{\*} = ^{t}L 로 이해한다. 따라서, T = A \in \mathfrak{M}\_{n,n}(F) 이면 T^{\*} = ^{t}(L\_{A}) 로 이해한다는 뜻이 된다. 그리고 quadratic space 임을 강조하기 위하여, T^{\*} 보다는 ^{t}T 의 표기법을 더 자주 사용한다.

(관찰 16.1.4.) T \in \mathfrak{LM} 일 때, V의 subspace W 가 T-invariant 이고 동시에 T^{\*}-invariant 이면, (T|\_{W})^{\*} = T^{\*}|\_{W} 이다.

(정의 16.1.5.) T \in \mathfrak{LM} 일 때

만약 [T^{\*} = T] 이면, (V,H) 의 경우에는 T를 self-adjoint operator(또는, Hermitian operator) 라고 부르고, (V,B)의 경우에는 T를 symmetric operator 라고 부른다.

[T^{\*} \cdot T = I] 이면 ,(V,H)의 경우에는 T를 unitary operator 라고 부르고, (V,B) 의 경우에는 T를 orthogonal operator 라고 부른다.

[T \cdot T^{\*} = T^{\*} \cdot T] 이면, T를 normal operator 라고 부른다.

(subsection 16.2.) Normal operator

(표기법 16.2.1.) 이 절에서는 항상 F = \mathbb{C} 이고, (V,\langle , \rangle ) 는 Hermitian inner product \langle, \rangle 가 주어진 n-차원 \mathbb{C}-vector space 이다.

(관찰 16.2.2.) T \in \mathfrak{LM} 이라고 할 때, [T의 eigen-vector 들로 이루어진 V의 orthonormal basis] 가 존재하려면, T는 normal 이어야만 한다.

(관찰 16.2.3.) T \in \mathfrak{LM} 일 때, 다음은 동치이다.

T 는 normal.

\langle Tv, Tw \rangle = \langle T^{\*}v, T^{\*}w \rangle for all v, w \in V.

(관찰 16.2.4.) T \in \mathfrak{LM} 이 normal이고, \lambda \in \mathbb{C} 이면, (T-\lambda I) 도 normal 이다.

(관찰 16.2.5) T \in \mathfrak{LM} 이 normal 일 때, Tv = \lambda v 이면 (단, 0 \neq v \in V, \lambda \in \mathbb{C}) , 즉 v가 eigen-value \lambda 를 갖는 T의 eigen-vector 이면, T^{\*}v = \bar{\lambda} v 이다. 즉, v는 eigen-value \bar{\lambda} 를 갖는 T^{\*} 의 eigen-vector 이다.

(Spectral Theorem ; positive definite Hermitian case) (정리 16.2.6.) T \in \mathfrak{LM} 일 때, 다음 조건은 동치이다.

T 는 normal.

[T의 eigen-vector 들로 이루어진 V의 orthonormal basis] 가 존재.

(정의 16.2.7.) The group of diagonal unitary matrices T\_{U(n)} 을 T\_{U(n)} = U(n) \cap D\_{n}(\mathbb{C}) 로 정의한다. 그리고, T\_{SU(n)} = SU(n) \cap D\_{n}(\mathbb{C}) = T\_{U(n)} \cap SL\_{n}(\mathbb{C}) 로 정의한다.

(Spectral Theorem for U(n)) (따름정리 16.2.9.) 만약 A \in U(n) 이라고 하면, U^{-1}AU \in T\_{U(n)} 인 U \in U(n) 이 존재한다. 따라서, U(n) = \bigcup\_{U \in U(n)} U \cdot T\_{U(n)} \cdot U^{-1} 로 쓸 수 있다.

(Spectral Theorem for SU(n)) (따름정리 16.2.10.) 만약 A \in SU(n) 이라고 하면, U^{-1}AU \in T\_{SU(n)} 인 U \in SU(n) 이 존재한다. 따라서, SU(n) = \bigcup\_{U \in SU(n)} U \cdot T\_{SU(n)} \cdot U^{-1} 로 쓸 수 있다.

(subsection 16.3.) Symmetric Operator

(표기법 16.3.1.)이 절에서는 항상 F = \mathbb{R} 이고, (V,\langle , \rangle ) 는 inner product \langle, \rangle 가 주어진 n-차원 \mathbb{R}-vector space 이다. 그리고 T^{\*} 보다 ^{t}T 를 더 많이 사용한다.

(명제 16.3.2.) T \in \mathfrak{LM} 이 symmetric operator 이면, T는 항상 (real) eigen-value 를 갖는다.

Symmetric matrix A \in \mathfrak{M}\_{n,n}(\mathbb{R}) 은 항상 (real) eigen-value 를 갖는다.

(관찰 16.3.4.)T \in \mathfrak{LM} 이라고 할 때, [T의 eigen-vector 들로 이루어진 V의 orthonormal basis] 가 존재하려면 , T는 symmetric 이어야만 한다.

(Spectral Theorem ; positive definite real quadratic case) (정리 16.3.5.) T \in \mathfrak{LM} 일 때, 다음 조건은 동치이다.

T는 symmetric.

[T의 eigen-vector 들로 이루어진 V의 orthonormal basis] 가 존재.

(Spectral Therorem for real symmetric matrices) (따름정리 16.3.6.) \mathbb{R}^{n} 에 dot product 가 주어졌을 때, A \in \mathfrak{M}\_{n,n}(\mathbb{R}) 이면, 다음 조건은 동치ㅣ다.

A는 symmetric matrix.

[A의 eigen-vector 들로 이루어진 \mathbb{R}^{n}의 orthonormal basis] 가 존재.

[U^{-1}AU 가 diagonal matrix] 인 U \in O(n) 이 존재.

(subsection 16.4.) Orthogonal Operator

(명제 16.4.1.) F = \mathbb{R} 이고, T \in \mathfrak{LM} 이면, [dim W = 1 혹은 dim W = 2] 인 V의 T-invariant subspace W 가 존재한다.

(Spectral Theorem for real orthogonal operators) (정리 16.4.2.) V를 inner product \langle , \rangle 가 주어진 finite dimensional \mathbb{R} – vector space 라 할때, T \in \mathfrak{LM} 이 orthogonal operator 이면, 다음 조건

V = W\_{1} \oplus \cdots \oplus W\_{s}.

W\_{1}, …, W\_{s} 는 V의 T-invariant subspace.

W\_{1}, …., W\_{s} 는 mutually orthogonal. 즉, W\_{i} \perp W\_{j} if i \neq j.

dim W\_{i} = 1 or 2 for all i = 1,…,s

를 만족하는 V의 subspace W\_{1}, …, W\_{s} 가 존재한다.

(표기법) B\_{i} 가 square matrix들일 때, diag(B\_{1}, …, B\_{r}) 은 i-th diagonal block 에 B\_{i} 가 있는 행렬, 즉 diag(B\_{1}, ... , B\_{r}) = \begin{pmatrix} B\_{1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B\_{2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B\_{r} \end{pmatrix} 을 의미하기로 한다.

(정의 16.4.3.) O(n) 의 subgroup T\_{\mp} 를

n이 홀수이면 T\_{\mp} = {diag(\mp 1, A\_{1}, …, A\_{r}) \in O(n) | A\_{1}, …, A\_{r} \in SO(2)} , 로 정의하고

n이 짝수이면 T\_{\mp} = {diag(A\_{0}, A\_{1}, …, A\_{r}) \in O(n) | A\_{0} \in O(2) and A\_{1}, …, A\_{r} \in SO(2)} 로 정의한다.

(정의 16.4.4.) SO(n) 의 subgroup T\_{SO(n)} 을 T\_{SO(n)} = SO(n) \cap T\_{\mp} 로 정의한다.

(Spectral Theorem for O(n)) (따름정리 16.4.6.) 만약 A \in O(n) 이라고 하면, U^{-1}AU \in T\_{\mp} 인 U \in O(n) 이 존재한다. 따라서, O(n) = \bigcup\_{U \in O(n)} U \cdot T\_{\mp} \cdot U^{-1} 로 쓸 수 있다.  
(Spectral Theorem for SO(n)) (따름정리 16.4.8.) A \in SO(n) 이라고 하면, U^{-1}AU \in T\_{SO(n)} 인 U \in SO(n) 이 존재한다. 따라서, SO(n) = \bigcup\_{U \in SO(n)} U \cdot T\_{SO(n)} \cdot U^{-1} 로 쓸 수 있다.

(subsection 16.5.) Non-Degenerate Case

새로운 발상, 새로운 언어, 새로운 도구가 필요하다.

(subsection 16.6) Epilogue

(Schur’s Theorem) (정리 16.6.1.) F = \mathbb{C} 이고 (V , \langle , \rangle) 는 n-차원 Hermitian inner product space 라고 할 때, T \in \mathfrak{LM{ 이면 [T]\_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}} 가 upper-triangular matrix 인 V의 orthonormal basis \mathfrak{B} 가 존재한다.

(정의 16.6.2.) (표기법 12.3.16) 의 abelian group \mathbb{Z}\_{2} = {\bar{0}, \bar{1}} 에 다음과 같이 \bar{0} \cdot \bar{0} = \bar{0} \cdot \bar{1} = \bar{1} \cdot \bar{0} = \bar{0} , \bar{1} \cdot \bar{1} = \bar{1} 곱셈을 정의하면 \mathbb{Z}\_{2} 는 field 가 된다.

(정의 16.6.3.) n-dimensional \mathbb{Z}\_{2} -vector space (\mathbb{Z}\_{2}^{n}) 의 \mathbb{Z}\_{2}=subspace C 를 우리는 [linear (binary) code of length n] 이라고 부른다. 또, (\mathbb{Z}\_{2}^{n})에 ‘보통 내적’ B\_{\mathcal{E}}^{I} 가 주어졌다고 할때, C^{\perp} 를 C의 dual code 라고 부른다.

(정리 16.6.4.) C 가 (\mathbb{Z}\_{2})^{n} 의 linear code 이면, dim C + dim C^{\perp} = n 이다. 따라서, dim C = m 이라고 하면, |C| = 2^{m} 이고, |C^{\perp}| = 2^{n-m} 이다.

(Section 17) Topology 맛보기

(정의 17.1.8.) X \subseteq \mathbb{R}^{r} , Y \subseteq \mathbb{R}^{s} 일 때, 함수 f : X \to Y 가 다음 조건

f 는 bijection.

f 는 continuous 이고, 그의 역함수 f^{-1} 도 continuous.

를 만족하면 ,f 를 같은 생김새 함수라고 부르기로 한다. 이 때 X와 Y는 서로 같은 생김새라고 말한다.

(관찰 17.1.17)H 가 matrix group G \le GL\_{n}(F) 의 subgroup 일 때, g \in G 이면, H 와 left coset g는 같은 생김새이다.

(정의 17.1.18) ([F,F’= \mathbb{R} or \mathbb{C}] 로 놓자. 즉, F \new F’ 일 수도 있다는 뜻.) G \le GL\_{n}(F) \subset \mathbb{R}^{N} , H \le GL\_{m}(F’) \subset \mathbb{R}^{M} 이 matrix group 일 때, 함수 \phi : G \to H 가 다음 조건

\phi 는 group isomorphism.

\phi 는 같은 생김새 함수.

를 만족하면, \phi 를 matrix group isomorphism 이라고 부르기로 한다. 이 때, G와 H는 서로 matrix group 으로서 isomorphic 하다고 말하고, \begin{tikzpicture}\matrix (m) [matrix of math nodes,row sep=3em,column sep=4em,minimum width=2em] {G &H \\}; \path[-stealth] (m-1-1) edge node [above] {$\approx$} node [below]{$matrix gp$} (m-1-2);\end{tikzpicture} 으로 표기하자.

(관찰 17.1.21.) H가 matrix group G \le GL\_{n}(F) 의 subgroup 일 때, g \in G 이면 , \begin{tikzpicture}\matrix (m) [matrix of math nodes,row sep=3em,column sep=4em,minimum width=2em] {H &gHg^{-1} \\}; \path[-stealth] (m-1-1) edge node [above] {$\approx$} node [below]{$matrix gp$} (m-1-2);\end{tikzpicture} 이다.

(subsection 17.2.) Compactness 와 Connectedness

(명제 17.2.1.) X \subseteq \mathbb{R}^{N}, Y \subseteq \mathbb{R}^{M} 이고 f : X \to Y가 연속함수이면, 다음이 성립한다.

X가 compact 이면, f(X) 도 compact.

X 가 connected 이면, f(X) 도 connected.

(명제 17.2.9.) X\_{i} \subseteq \mathbb{R}^{N\_{i}} 일 때, X\_{1} \times \cdot \times X\_{r} 을 \mathbb{R}^{N\_{1} + \cdot + N\_{r}} 의 subset으로 생각하자.

모든 X\_{i} 가 compact 이면 X\_{1} \times \cdot \times X\_{r} 도 compact.

모든 X\_{i} 가 connected이면 X\_{1} \times \cdot \times X\_{r} 도 connected.

(정의 17.2.10) \mathbb{R}^{N} 의 subset T가 S^{1} \times \cdots \times S^{1} 과 같은 생김새이면, T를 torus 라고 부른다. Torus 는 compact connected group 이다.

(Spectral Theorem 의 따름정리) (따름정리 17.2.12.) U(n) 과 SU(n), 그리고 SO(n) 은 connected group 이다.

(관찰 17.2.13.) SO(n) 은 O(n) 의 connected component 이다.

O(n) 의 coset decomposition O(n) = SO(n) \mathfrak{U} (O(n) – SO(n)) 은 동시에 O(n) 의 [connected component decomposition] 이다.

(관찰 17.2.14.) SO^{\bullet}(1,1) 은 O(1,1) 의 connected component 이다.

[coset decomposition of O(1,1) modulo SO^{\bullet} (1,1)] 은 동시에 O(1,1) 의 [connected component decomposition] 이다.