Tema 6: Resolución numérica de EDPs hiperbólicas

Resolución numérica de ecuaciones en derivadas parciales

Alicia Cordero, Juan R. Torregrosa

Contenido

La ecuación de ondas

El ejemplo característico de un problema de contorno hiperbólico es la ecuación de ondas con numerosas aplicaciones en Física e Ingeniería. Una de las descripciones más simples es la dada por

$$u_{tt}(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t), \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0,$$

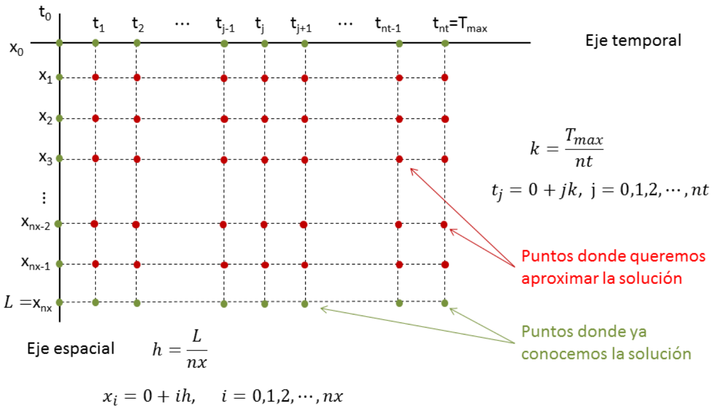
$$u(0,t) = c_1(t), u(L,t) = c_2(t), t > 0; \quad u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = g(x), x \in [0,L]$$

donde α es un número real en el que intervienen constantes físicas, $f(x)$ y $g(x)$ son funciones reales.

Dependiendo del tipo de diferencias finitas que utilicemos para aproximar las parciales segundas de la ecuación, obtendremos dos tipos de métodos numéricos:

- Métodos explícitos
- Métodos implícitos

La solución numérica de estos problemas consiste en transformarlos, mediante diferencias finitas, en sistemas de ecuaciones lineales o no lineales, cuyas incógnitas son valores aproximados de la solución en los puntos elegidos en el dominio espacial y temporal.



Método explícito para la ecuación de ondas

$$u_{tt}(x,t)=\alpha^2 u_{xx}(x,t), \quad 0\leq x\leq L, \quad t\geq 0,$$

$$u(0,t)=c_1(t), u(L,t)=c_2(t), t>0; \quad u(x,0)=f(x), u_t(x,0)=g(x), x\in[0,L]$$

Diferencias centrales en u_{tt} y u_{xx}

- Transformación del problema

$$\frac{u(x,t+k)-2u(x,t)+(x,t-k)}{k^2}=\alpha^2\frac{u(x+h,t)-2u(x,t)+u(x-h,t)}{h^2},$$

- Discretización del problema Evaluando la expresión anterior en los puntos (x_i,t_j), $i=1,2,\ldots,nx-1$, $j=1,\ldots,nt-1$,

$$\frac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{k^2}=\alpha^2\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2}, \quad i=1,\ldots,nx-1, j=1,\ldots,nt-1.$$

Llamando $\lambda=\dfrac{k\alpha}{h}$ y llevando a la izquierda las incógnitas del instante mayor, resulta

$$u_{i,j+1}=2(1-\lambda^2)u_{i,j}+\lambda^2(u_{i+1,j}+u_{i-1,j})-u_{i,j-1},$$

para $i=1,\ldots,nx-1$, $j=1,\ldots,nt-1$.

Método explícito para la ecuación de ondas

$$u_{tt}(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t), \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0,$$
$$u(0,t) = c_1(t), u(L,t) = c_2(t), t > 0; \quad u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = g(x), x \in [0,L]$$

Fijando el índice j y variando el índice i, $i = 1, \ldots, nx-1$, obtenemos la expresión matricial del método

$$u^{(j+1)} = Au^{(j)} - u^{(j-1)} + c^{(j)}, \quad j = 1, \ldots, nt-1,$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 2(1-\lambda^2) & \lambda^2 & \cdots & 0 \\ \lambda^2 & 2(1-\lambda^2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2(1-\lambda^2) \end{pmatrix}, \quad u^{(j)} = \begin{pmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ \vdots \\ u_{nx-1,j} \end{pmatrix},$$

$$c^{(j)} = \begin{pmatrix} \lambda^2 c_1(t_j) \\ 0 \\ \vdots \\ \lambda^2 c_2(t_j) \end{pmatrix}, \; u^{(0)} = \begin{pmatrix} u_{1,0} \\ u_{2,0} \\ \vdots \\ u_{nx-1,0} \end{pmatrix}, \; u^{(1)} = \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ \vdots \\ u_{nx-1,1} \end{pmatrix}$$

Dada la expresión en diferencias

$$\boxed{u_{i,j+1} = 2(1-\lambda^2)u_{i,j} + \lambda^2(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - u_{i,j-1},} \quad i = 1, \ldots, nx-1, j = 1, \ldots, nt-1,$$

reemplazamos $u_{i,j}$ por $e^{\sqrt{-1}\beta i h}\xi^j$,

$$e^{\sqrt{-1}\beta i h}\xi^{j+1} = 2(1-\lambda^2)e^{\sqrt{-1}\beta i h}\xi^j + \lambda^2\left(e^{\sqrt{-1}\beta(i+1)h} + e^{\sqrt{-1}\beta(i-1)h}\right)\xi^j - e^{\sqrt{-1}\beta i h}\xi^{j-1}.$$

Dividiendo por $e^{\sqrt{-1}\beta i h}\xi^j$,

$$\begin{aligned} \xi &= 2(1-\lambda^2) + \lambda^2\left(e^{\sqrt{-1}\beta h} + e^{-\sqrt{-1}\beta h}\right) - \xi^{-1} \\ &= 2(1-\lambda^2) + 2\lambda^2\cos(\beta h) - \xi^{-1}, \end{aligned}$$

luego

$$\xi + \frac{1}{\xi} = 2 + 2\lambda^2\left(\cos(\beta h) - 1\right)$$

y, si denotamos por

$$p = 2 + 2\lambda^2\left(\cos(\beta h) - 1\right),$$

entonces $p \leq 2$, ya que $\cos(\beta h) - 1 \leq 0$.

Estabilidad del método explícito

Entonces,

$$\xi + \frac{1}{\xi} = p \Leftrightarrow \xi^2 - p\xi + 1 = 0 \Leftrightarrow \xi_\pm = \frac{p \pm \sqrt{p^2-4}}{2}.$$

- $\boxed{p^2 - 4 > 0}$ y como $p \leq 2$, entonces $p < -2$. La ecuación cuadrática tiene dos raíces reales. Una de ellas es

$$\xi_- = \frac{p - \sqrt{p^2-4}}{2} < \frac{p}{2} < \frac{-2}{2} = -1$$

  y el método será inestable.

- $\boxed{p^2 - 4 \leq 0}$, luego $-2 \leq p \leq 2$ y

$$\xi_\pm = \frac{p}{2} \pm \sqrt{-1}\,\frac{\sqrt{4-p^2}}{2} \Rightarrow |\xi_\pm| = 1.$$

Luego la condición de estabilidad es

$$-2 \leq 2 + 2\lambda^2\left(\cos(\beta h) - 1\right) \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq 2 - 4\lambda^2 \Leftrightarrow \boxed{\lambda^2 \leq 1}.$$

Condición de estabilidad: $\lambda \leq 1$.

Error de truncamiento del método explícito

$$\begin{array}{l} u_{tt}(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t), \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0, \\ u(0,t) = c_1(t), u(L,t) = c_2(t), t > 0; \quad u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = g(x), x \in [0,L] \end{array}$$

Vamos a calcular el error de truncamiento en el punto $P(ih, jk)$. El esquema en diferencias finitas del método es

$$F_{i,j} = u_{i,j+1} - 2(1-\lambda^2)u_{i,j} - \lambda^2(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + u_{i,j-1},$$

siendo $\lambda = k\alpha/h$. Por tanto,

$$T_{i,j} = F_{i,j}(U) = U_{i,j+1} - 2(1-\lambda^2)U_{i,j} - \lambda^2(U_{i+1,j} + U_{i-1,j}) + U_{i,j-1}.$$

Desarrollamos por Taylor cada sumando alrededor del punto P, obteniendo

$$\begin{array}{rcl} U_{i,j+1} & = & U_{i,j} + k(U_t)_{i,j} + \dfrac{k^2}{2}(U_{tt})_{i,j} + \dfrac{k^3}{6}(U_{ttt})_{i,j} + \dfrac{k^4}{24}(U_{tttt})_{i,j} + \cdots \\ U_{i+1,j} & = & U_{i,j} + h(U_x)_{i,j} + \dfrac{h^2}{2}(U_{xx})_{i,j} + \dfrac{h^3}{6}(U_{xxx})_{i,j} + \dfrac{h^4}{24}(U_{xxxx})_{i,j} + \cdots \\ U_{i-1,j} & = & U_{i,j} - h(U_x)_{i,j} + \dfrac{h^2}{2}(U_{xx})_{i,j} - \dfrac{h^3}{6}(U_{xxx})_{i,j} + \dfrac{h^4}{24}(U_{xxxx})_{i,j} + \cdots \\ U_{i,j-1} & = & U_{i,j} - k(U_t)_{i,j} + \dfrac{k^2}{2}(U_{tt})_{i,j} - \dfrac{k^3}{6}(U_{ttt})_{i,j} + \dfrac{k^4}{24}(U_{tttt})_{i,j} + \cdots \end{array}$$

Error de truncamiento del método explícito

Sustituyendo estos desarrollos en $T_{i,j}$, obtenemos

$$T_{i,j} = k^2 \left((U_{tt})_{i,j} - \alpha^2 (U_{xx})_{i,j}\right) + \frac{k^2}{12} \left(k^2 (U_{tttt})_{i,j} - \alpha^2 h^2 (U_{xxxx})_{i,j}\right) + \cdots$$

Teniendo en cuenta que el primer sumando es nulo, la parte principal de este error de truncamiento es

$$\left(k^2 (U_{tttt})_{i,j} - \alpha^2 h^2 (U_{xxxx})_{i,j}\right),$$

por lo que

$$T_{i,j} = O(k^2) + O(h^2).$$

El método explícito es un esquema con memoria, matricialmente

$$u^{(j+1)} = Au^{(j)} - u^{(j-1)}.$$

Perturbando la condición inicial $u^{(0)}$ a $u^{*(0)}$, las soluciones en los diferentes instantes se verán alteradas

$$u^{*(j+1)} = Au^{*(j)} - u^{*(j-1)}.$$

Si definimos el error de perturbación como $e = u^* - u$, resulta $e_j = u^{*(j)} - u^{(j)}$, obteniendo

$$\begin{pmatrix} e_{j+1} \\ e_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_j \\ e_{j-1} \end{pmatrix}, \quad v_{j+1} = Pv_j.$$

El radio espectral de la matriz

$$P = \begin{pmatrix} A & -I \\ I & 0 \end{pmatrix},$$

nos dará información sobre la estabilidad del método.

$$\det(P - \mu I) = \det \begin{pmatrix} A - \mu I & -I \\ I & -\mu I \end{pmatrix} = 0.$$

¿Relación entre los valores propios de A y de P?
Fórmulas para el cálculo de determinantes de matrices por bloques

¿Cómo calculamos $u^{(1)}$, es decir, $u_{i,1}$, $i = 1, 2, \ldots, nx - 1$?

- Utilizando la diferencia progresiva en la condición inicial $u_t(x, 0) = g(x)$

$$\frac{u_{i,1} - u_{i,0}}{k} = g(x_i) \quad \Rightarrow \quad u_{i,1} = f(x_i) + kg(x_i), i = 1, 2, \ldots, nx - 1$$

aproximación de orden 1, $O(k)$.

- Utilizando el desarrollo de Taylor hasta orden 2

$$\begin{aligned} u(x, 0 + k) \quad &\approx \quad u(x, 0) + u_t(x, 0)k + u_{tt}(x, 0)\frac{k^2}{2} = f(x) + kg(x) + \frac{k^2}{2}\alpha^2 u_{xx}(x, 0) = \\ & f(x) + kg(x) + \frac{k^2}{2}\alpha^2 f''(x), \end{aligned}$$

o bien, si $f''(x) \approx \dfrac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$, evaluando en x_i, resulta

$$u_{i,1} = (1 - \lambda^2)f(x_i) + \frac{\lambda^2}{2}\left(f(x_{i+1}) + f(x_{i-1})\right) + kg(x_i), \;\; i = 1, 2, \ldots, nx - 1$$

aproximación de orden 2, $O(k^2 + h^2)$.

Método explícito ya que calculamos la solución en el instante t_{j+1} a partir de las soluciones en los instantes t_j y t_{j-1}, directamente, sin resolver ningún sistema

Las características principales de este método son:

- El proceso es convergente si $\lambda \leq 1$,
- El orden de convergencia es $O(k + h^2)$ ó $O(k^2 + h^2)$, dependiendo de cómo calculemos $u^{(1)}$.

Algoritmo del método explícito para la ecuación de ondas

$$u_{tt}(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t), \quad 0 \le x \le L, \quad t \ge 0,$$
$$u(0,t) = c_1(t), u(L,t) = c_2(t), t > 0; \quad u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = g(x), x \in [0,L]$$

- function U=explicito-ondas(parámetros de entrada)
- Definir los elementos que intervienen en el programa;
- Inicializar la matriz U;
- Rellenar la primera y última fila de U con las condiciones de contorno;
- Rellenar la primera columna de U con la condición inicial;
- Calcular la segunda columna de U;

```
for i=2:nx
    U(i,2) =;
end
```

- Rellenar resto de elementos de U, columna a columna;

```
for j=2:nt
    for i=2:nx
    U(i,j+1) =...
    end
end
```

Ejemplo

$$u_{tt}(x,t) - 4u_{xx}(x,t) = 0, \quad 0 \le x \le 1,\ t \ge 0,$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0, t > 0; \quad u(x,0) = \sin \pi x, u_t(x,0) = 0\ x \in [0,1]$$

Solución exacta: $u(x,t) = \sin \pi x \cos 2\pi t$

Buscamos la solución aproximada en $T_{max} = 1$ mediante el método explícito con:
(a) $h = 0{,}1,\ k = 0{,}05$
(b) $h = 0{,}1,\ k = 0{,}1$.

x_i	$u_{i,20}$	$\lvert u(x_i,1) - u_{i,20}\rvert$	$u_{i,10}$	$\lvert u(x_i,1) - u_{i,10}\rvert$
0.0	0	0	0	0
0.1	3.0902e-01	5.5511e-17	3.0800e-01	1.0140e-03
0.2	5.8779e-01	0	5.8585e-01	1.9308e-03
0.3	8.0902e-01	0	8.0636e-01	2.6555e-03
0.4	9.5106e-01	1.1102e-16	9.4793e-01	3.1226e-03
0.5	1.0000e+00	0	9.9672e-01	3.2845e-03
0.6	9.5106e-01	3.3307e-16	9.4794e-01	3.1204e-03
0.7	8.0902e-01	0	8.0636e-01	2.6590e-03
0.8	5.8779e-01	2.2204e-16	5.8586e-01	1.9274e-03
0.9	3.0902e-01	5.5511e-17	3.0800e-01	1.0161e-03
1.0	0	1.2246e-16	0	1.2246e-16

Ejemplo

Consideremos la ecuación en derivadas parciales hiperbólica

$$u_{xx} = u_{tt} - \sin(x), \quad x \in [0,1], \quad t > 0,$$

con las condiciones de contorno e iniciales

$$\begin{aligned} &u(0,t) = 0, u_x(1,t) = 0, \quad t > 0, \\ &u(x,0) = (x/2)(1-x), \quad u_t(x,0) = 0, \; x \in [0,1]. \end{aligned}$$

(a) Transforma el problema en un esquema en diferencias finitas explícito de orden $O(k^2 + h^2)$.

(b) Aplicando el apartado (a) determina la solución en el instante $t = 1$, tomando $h = 0{,}1$ y $k = 0{,}025$.

(c) Representa las soluciones en los instantes $t = 0{,}2, 0{,}4, 0{,}6, 0{,}8, 1$.

$$u_{tt}(x,t)=\alpha^2 u_{xx}(x,t), \quad 0\leq x\leq L, \quad t\geq 0,$$

$$u(0,t)=c_1(t), u(L,t)=c_2(t), t>0; \quad u(x,0)=f(x), u_t(x,0)=g(x), x\in[0,L]$$

Aproximamos u_{tt} mediante una diferencia central

$$u_{tt}(x_i,t_j) \;\rightarrow\; \frac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{k^2}.$$

Aproximamos u_{xx} mediante la media entre la diferencia central en t_{j+1}

$$\frac{u_{i+1,j+1}-2u_{i,j+1}+u_{i-1,j+1}}{h^2}$$

y la diferencia central en t_{j-1}

$$\frac{u_{i+1,j-1}-2u_{i,j-1}+u_{i-1,j-1}}{h^2}.$$

El esquema en diferencias que se obtiene es el siguiente:

$$u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1} = \frac{\lambda^2}{2}\left[(u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}) \right.$$
$$\left. +(u_{i+1,j-1} - 2u_{i,j-1} + u_{i-1,j-1})\right],$$

para $i = 1, 2, \ldots, nx - 1$, $j = 1, 2, \ldots, nt - 1$,
o bien, llamando $\lambda = \frac{\alpha k}{h}$ y llevando a la izquierda las variables correspondientes al instante más alto

$$(1 + \lambda^2)u_{i,j+1} - \frac{\lambda^2}{2}(u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1}) =$$
$$= 2u_{i,j} + \frac{\lambda^2}{2}(u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}) - (1 + \lambda^2)u_{i,j-1},$$

para $i = 1, 2, \ldots, nx - 1$, $j = 1, 2, \ldots, nt - 1$,
Fijando j y escribiendo todas las ecuaciones para $i = 1, 2, \ldots, nx - 1$, obtenemos la expresión matricial del método

$$Au^{(j+1)} = 2u^{(j)} + Bu^{(j-1)} + c^{(j)}, \quad j = 1, 2, \ldots, nt - 1,$$

donde

Método implícito para la ecuación de ondas

$$A = \begin{pmatrix} 1+\lambda^2 & -\lambda^2/2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\lambda^2/2 & 1+\lambda^2 & -\lambda^2/2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^2/2 & 1+\lambda^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+\lambda^2 & -\lambda^2/2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda^2/2 & 1+\lambda^2 \end{pmatrix}, \quad u^{(j)} = \begin{pmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ \vdots \\ u_{nx-2,j} \\ u_{nx-1,j} \end{pmatrix},$$

$$c^{(j)} = \begin{pmatrix} \lambda^2/2(c_1(t_{j+1}) + c_1(t_{j-1})) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda^2/2(c_2(t_{j+1}) + c_2(t_{j-1})) \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} -(1+\lambda^2) & \lambda^2/2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda^2/2 & -(1+\lambda^2) & \lambda^2/2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2/2 & -(1+\lambda^2) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -(1+\lambda^2) & \lambda^2/2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda^2/2 & -(1+\lambda^2) \end{pmatrix} = -A.$$

$$(1+\lambda^2)u_{i,j+1} - \frac{\lambda^2}{2}(u_{i+1,j+1}+u_{i-1,j+1}) =$$
$$= 2u_{i,j} + \frac{\lambda^2}{2}(u_{i+1,j-1}+u_{i-1,j-1}) - (1+\lambda^2)u_{i,j-1},$$

para $i = 1, 2, \ldots, nx-1$, $j = 1, 2, \ldots, nt-1$,

Von Neumann: $u_{i,j}$ por $e^{\sqrt{-1}\beta ih}\xi^j$,

$$\begin{aligned}(1+\lambda^2)e^{\sqrt{-1}\beta ih}\xi^{j+1} - \frac{\lambda^2}{2}(e^{\sqrt{-1}\beta(i+1)h} + e^{\sqrt{-1}\beta(i-1)h})\xi^{j+1} \\ = 2e^{\sqrt{-1}\beta ih}\xi^j + \frac{\lambda^2}{2}\left(e^{\sqrt{-1}\beta(i+1)h} + e^{\sqrt{-1}\beta(i-1)h}\right)\xi^{j-1} \\ -(1+\lambda^2)e^{\sqrt{-1}\beta ih}\xi^{j-1}.\end{aligned}$$

Dividiendo de nuevo por $e^{\sqrt{-1}\beta ih}\xi^j$,

$$(1+\lambda^2)\xi - \frac{\lambda^2}{2}(e^{\sqrt{-1}\beta h} + e^{-\sqrt{-1}\beta h})\xi = 2 + \frac{\lambda^2}{2}\left(e^{\sqrt{-1}\beta h} + e^{-\sqrt{-1}\beta h}\right)\xi^{-1} - (1+\lambda^2)\xi^{-1},$$

Estabilidad del método implícito

$$(1+\lambda^2)\xi - \frac{\lambda^2}{2}(e^{\sqrt{-1}\beta h} + e^{-\sqrt{-1}\beta h})\xi = 2 + \frac{\lambda^2}{2}\left(e^{\sqrt{-1}\beta h} + e^{-\sqrt{-1}\beta h}\right)\xi^{-1} - (1+\lambda^2)\xi^{-1},$$

es decir,

$$\left[1 + \lambda^2(1 - \cos(\beta h))\right]\xi = 2 - \left[1 + \lambda^2(1 - \cos(\beta h))\right]\xi^{-1},$$

$$\left[1 + 2\lambda^2 \sin^2\frac{\beta h}{2}\right]\xi = 2 - \left[1 + 2\lambda^2 \sin^2\frac{\beta h}{2}\right]\xi^{-1},$$

luego

$$q\xi^2 - 2\xi + q = 0, \quad q = 1 + 2\lambda^2\sin^2\frac{\beta h}{2}, \quad q > 1$$

y, por tanto,

$$\xi_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1-q^2}}{q} = \frac{1}{q} \pm \sqrt{-1}\,\frac{\sqrt{q^2-1}}{q} \Leftrightarrow \boxed{|\xi| = 1},$$

el método implícito es incondicionalmente estable.

Estabilidad del método implícito

El método implícito es un esquema con memoria, matricialmente

$$Au^{(j+1)} = 2u^{(j)} + Bu^{(j-1)} \;\Leftrightarrow\; u^{(j+1)} = 2A^{-1}u^{(j)} + A^{-1}Bu^{(j-1)}.$$

Perturbando la condición inicial $u^{(0)}$ a $u^{*(0)}$, las soluciones en los diferentes instantes se verán alteradas

$$u^{*(j+1)} = 2A^{-1}u^{*(j)} + A^{-1}Bu^{*(j-1)}.$$

Si definimos el error de perturbación como $e = u^* - u$, resulta $e_j = u^{*(j)} - u^{(j)}$, obteniendo

$$\begin{pmatrix} e_{j+1} \\ e_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2A^{-1} & A^{-1}B \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_j \\ e_{j-1} \end{pmatrix}, \quad v_{j+1} = Pv_j.$$

El radio espectral de la matriz

$$P = \begin{pmatrix} 2A^{-1} & A^{-1}B \\ I & 0 \end{pmatrix},$$

nos dará información sobre la estabilidad del método.

$$\det(P - \mu I) = \det \begin{pmatrix} 2A^{-1} - \mu I & A^{-1}B \\ I & -\mu I \end{pmatrix} = 0.$$

¿Relación entre los valores propios de A, B y de P?
Fórmulas para el cálculo de determinantes de matrices por bloques

Error de truncamiento del método implícito

$$u_{tt}(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t), \quad 0 \le x \le L, \quad t \ge 0,$$
$$u(0,t) = c_1(t), u(L,t) = c_2(t), t > 0; \quad u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = g(x), x \in [0,L]$$

Vamos a calcular el error de truncamiento en el punto $P(ih, jk)$. El esquema en diferencias finitas del método es

$$\begin{aligned} F_{i,j} \quad = \quad & (1+\lambda^2)u_{i,j+1} - \frac{\lambda^2}{2}(u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1}) \\ & -2u_{i,j} - \frac{\lambda^2}{2}(u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}) + (1+\lambda^2)u_{i,j-1}, \end{aligned}$$

siendo $\lambda = k\alpha/h$. Por tanto,

$$\begin{aligned} T_{i,j} = F_{i,j}(U) \quad = \quad & (1+\lambda^2)U_{i,j+1} - \frac{\lambda^2}{2}(U_{i+1,j+1} + U_{i-1,j+1}) \\ & -2U_{i,j} - \frac{\lambda^2}{2}(U_{i+1,j-1} + U_{i-1,j-1}) + (1+\lambda^2)U_{i,j-1}. \end{aligned}$$

Desarrollamos por Taylor cada sumando alrededor del punto P, reemplazamos en $T_{i,j}$ y obtenemos una expresión que nos permite afirmar que el error de truncamiento es de orden

$$T_{i,j} = O(k^2) + O(h^2).$$

Método implícito con el que calculamos la solución en el instante t_{j+1} resolviendo un sistema lineal que tiene como matriz de coeficientes A y cuyo término independiente es $2u^{(j)} + Bu^{(j-1)}$, que depende de la solución en los instantes t_j y t_{j-1}

Las características principales de este método son:

- El proceso es convergente sin necesidad de condiciones,
- El orden de convergencia es $O(k + h^2)$ ó $O(k^2 + h^2)$, dependiendo de cómo calculemos $u^{(1)}$.

Algoritmo del método implícito para la ecuación de ondas

$$u_{tt}(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t), \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0,$$
$$u(0,t) = c_1(t), u(L,t) = c_2(t), t > 0; \quad u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = g(x), x \in [0,L]$$

- Definir los elementos $h = \dfrac{L}{nx}$, $k = \dfrac{T}{nt}$, $\lambda = \dfrac{k\alpha}{h}$.
- Construimos los vectores diagonales
$$a = (1+\lambda^2) ones(nx-1,1)$$
$$b = -\frac{\lambda^2}{2} ones(nx-2,1)$$
$$c = b$$
- Construimos la matriz B a partir de las diagonales de A (valores opuestos)
- Introducimos las soluciones para t_0, $u^{(0)}$ y para t_1, $u^{(1)}$
- Para $j = 1, 2, \ldots, nt-1$
$$d = 2u^{(j)} + Bu^{(j-1)} - c^{(j)}$$
$$u^{(j+1)} = Crout(a,b,c,d)$$

Ejemplo

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, \quad 0 \leq x \leq 4,\ t \geq 0,$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0, t > 0; \quad u(x,0) = 2 - |x-2|, u_t(x,0) = 0\ x \in [0,4]$$

Buscamos la solución aproximada en $T_{max} = 4$ mediante el método implícito con $h = 1$ y $k = 0{,}5$.

	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$	$x = 4$
t=0	0.0	1.0000	2.0000	1.0000	0.0
t=0.5	0.0	1.0000	1.7500	1.0000	0.0
t=1	0.0	0.9184	1.1837	0.9184	0.0
t=1.5	0.0	0.6926	0.4824	0.6926	0.0
t=2	0.0	0.2912	-0.1699	0.2912	0.0
t=2.5	0.0	-0.2449	-0.6647	-0.2449	0.0
t=3	0.0	-0.7996	-0.9953	-0.7996	0.0
t=3.5	0.0	-1.2231	-1.2214	-1.2231	0.0
t=4	0.0	-1.3966	-1.3981	-1.3966	0.0

Problema del telégrafo

Consideremos la siguiente ecuación en derivadas parciales, conocida como la ecuación del telégrafo

$$u_{tt} + u_t + 2u = u_{xx}, \qquad 0 < x < 1,\ t > 0$$

con las condiciones de contorno $u(0,t) = u(1,t) = 0$ y las condiciones iniciales $u(x,0) = \operatorname{sen}(\pi x)$ y $u_t(x,0) = 0$.

a) Transforma el problema en un esquema en diferencias finitas explícito de orden $O(k^2 + h^2)$. Determina la solución en el instante $t = 0{,}5$, tomando $h = 0{,}1$ y $k = 0{,}005$. Representa la solución en los instantes $t = 0{,}1, 0{,}2, 0{,}3, 0{,}4, 0{,}5$.

b) Transforma el problema en un esquema en diferencias finitas implícito de orden $O(k^2 + h^2)$. Determina la solución en el instante $t = 0{,}5$, tomando $h = 0{,}1$ y $k = 0{,}005$. Compara los resultados obtenidos con los del apartado a).

a) Tomamos $h = 1/nx$ y $k = 0{,}5/nt$, como pasos espacial y temporal respectivamente, con lo que los nodos de nuestro problema son $x_i = 0 + ih$, $i = 0, 1, \ldots, nx$, y $t_j = 0 + jk$, $j = 0, 1, \ldots, nt$. Utilizamos diferencias finitas centrales y la notación $u_{i,j} = u(x_i, t_j)$. Así, obtenemos

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} + \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k} + 2u_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2},$$

para $i = 1, 2, \ldots, nx - 1$ y $j = 1, 2, \ldots, nt - 1$. Despejando la solución en el instante t_{j+1} obtenemos

$$\left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{2k}\right) u_{i,j+1} = \left(\frac{2}{k^2} - 2 - \frac{2}{h^2}\right) u_{i,j} + \frac{1}{h^2}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{k^2}\right) u_{i,j-1}$$

para $i = 1, 2, \ldots, nx - 1$ y $j = 1, 2, \ldots, nt - 1$.

Primera columna de la matriz U (solución en el instante $t = t_0$)

$$u_{i,0} = \sin(\pi x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, nx - 1$$

A partir de las dos condiciones iniciales, aproximamos la solución en el instante t_1 (segunda columna de la matriz U)

$$\begin{aligned} u(x, 0 + k) &\approx u(x, 0) + u_t(x, 0)k + u_{tt}(x, 0)\frac{k^2}{2} \\ &= \sin(\pi x) + 0k + \frac{k^2}{2}(u_{xx}(x, 0) - u_t(x, 0) - 2u(x, 0)) \\ &= (1 - k^2)\sin(\pi x) + \frac{k^2}{2}u_{xx}(x, 0), \end{aligned}$$

y como

$$u_{xx}(x, 0) \approx \frac{u(x_{i+1}, 0) - 2u(x_i, 0) + u(x_{i-1}, 0)}{h^2} = \frac{\sin(\pi x_{i+1}) - 2\sin(\pi x_i) + \sin(\pi x_{i-1})}{h^2},$$

$$u_{i,1} = \left(1 - k^2 - \frac{k^2}{h^2}\right)\sin(\pi x_i) + \frac{k^2}{2h^2}\left(\sin(\pi x_{i+1}) + \sin(\pi x_{i-1})\right),$$

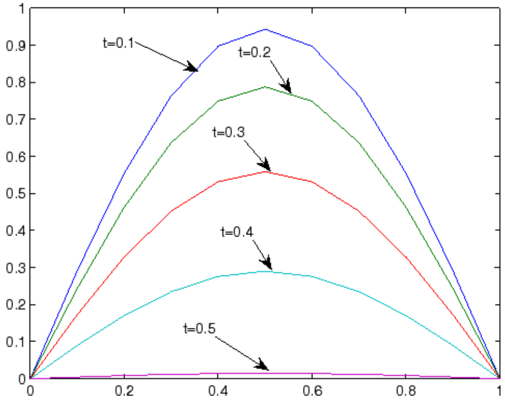
para $i = 1, 2, \ldots, nx - 1$.

$$U(C,2) = (k^2/(2*h^2))*(fx(L)+fx(R))+(1-k^2-k^2/h^2)*fx(C);$$

$$U(C,j+1) \quad = \quad c1*(U(L,j)+U(R,j))+c2*U(C,j)+c3*U(C,j-1);$$

donde $c1 = (2*k^2/(h^2*(2+k)))$, $c2 = (2*k^2/(2+k))*(2/k^2-2-2/h^2)$ y $c3 = (2*k^2/(2+k))*(1/(2*k)-1/k^2)$.

$plot(x,U(:,21),x,U(:,41),x,U(:,61),x,U(:,81),x,U(:,101))$



b) Para el método implícito utilizamos diferencias finitas centrales y aproximamos u_{xx} por la media entre la diferencia central en el instante t_{j+1} y en el instante t_{j-1},

$$\frac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{k^2}+\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j-1}}{2k} = \frac{1}{2}\left[\frac{u_{i+1,j+1}-2u_{i,j+1}+u_{i-1,j+1}}{h^2} + \frac{u_{i+1,j-1}-2u_{i,j-1}+u_{i-1,j-1}}{h^2}\right]-2u_{i,j},$$

para $i=1,2,\ldots,nx-1$, $j=1,2,\ldots,nt-1$.

Agrupando los términos en el paso $j+1$ a un lado y todos los demás al otro, resulta

$$\left(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{2k}+\frac{1}{h^2}\right)u_{i,j+1}-\frac{1}{2h^2}(u_{i+1,j+1}+u_{i-1,j+1}) =$$
$$=\left(\frac{2}{k^2}-2\right)u_{i,j}+\left(\frac{1}{2k}-\frac{1}{k^2}-\frac{1}{h^2}\right)u_{i,j-1}+\frac{1}{2h^2}(u_{i+1,j-1}+u_{i-1,j-1})$$

para $i=1,2,\ldots,nx-1$ y $j=1,2,\ldots,nt-1$.
La segunda columna de la matriz U, es decir, $u_{i,1}$, $i=1,2,\ldots,nx-1$, se calcula de la misma forma que en el método explícito.

Fijando j y escribiendo todas las ecuaciones para $i = 1, 2, \ldots, nx - 1$, obtenemos la expresión matricial del método

$$Au^{(j+1)} = (2/k^2 - 2)u^{(j)} + Bu^{(j-1)}, \quad j = 1, 2, \ldots, nt - 1,$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{h^2} & -\frac{1}{2h^2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2h^2} & \frac{1}{k^2} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{h^2} & -\frac{1}{2h^2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2h^2} & \frac{1}{k^2} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{h^2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{k^2} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{h^2} & -\frac{1}{2h^2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{2h^2} & \frac{1}{k^2} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{h^2} \end{pmatrix},$$

$$Au^{(j+1)} = (2/k^2 - 2)u^{(j)} + Bu^{(j-1)}, \quad j = 1, 2, \ldots, nt - 1,$$

$$u^{(0)} = \begin{pmatrix} \sin(\pi x_1) \\ \sin(\pi x_2) \\ \vdots \\ \sin(\pi x_{nx-1}) \end{pmatrix}, \; u^{(1)} = \begin{pmatrix} \left(1 + k^2 - \frac{k^2}{h^2}\right)\sin(\pi x_1) + \frac{k^2}{2h^2}(\sin(\pi x_2) + \sin(\pi x_0)) \\ \left(1 + k^2 - \frac{k^2}{h^2}\right)\sin(\pi x_2) + \frac{k^2}{2h^2}(\sin(\pi x_3) + \sin(\pi x_1)) \\ \vdots \\ \left(1 + k^2 - \frac{k^2}{h^2}\right)\sin(\pi x_{nx-1}) + \frac{k^2}{2h^2}(\sin(\pi x_{nx}) + \sin(\pi x_{nx-2})) \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2k} - \frac{1}{k^2} - \frac{1}{h^2} & \frac{1}{2h^2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2h^2} & \frac{1}{2k} - \frac{1}{k^2} - \frac{1}{h^2} & \cdots & 0 & 0 & \\ 0 & \frac{1}{2h^2} & \frac{1}{2k} - \frac{1}{k^2} - \frac{1}{h^2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2k} - \frac{1}{k^2} - \frac{1}{h^2} & \frac{1}{2h^2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2h^2} & \frac{1}{2k} - \frac{1}{k^2} - \frac{1}{h^2} \end{pmatrix}$$

x	Método explícito Sol. en $t = 0{,}5$	Método implícito Sol. en $t = 0{,}5$
0	0	0
0.1	0.004493	0.004515
0.2	0.008545	0.008588
0.3	0.011762	0.011820
0.4	0.013827	0.013896
0.5	0.014538	0.014611
0.6	0.013827	0.013896
0.7	0.011762	0.011820
0.8	0.008545	0.008588
0.9	0.004493	0.004515
1.0	0	0

Cuadro: Solución por los métodos explícito e implícito

El valor máximo de la diferencia, en valor absoluto, de ambos vectores es $m = 7{,}2668 \times 10^{-5}$.

Problema en medio elástico

Una cuerda vibrante que se desplaza en un medio elástico satisface la ecuación:

$$u_{xx} - u = u_{tt}, \qquad x \in [0,1], \;\; t > 0 \tag{1}$$

Supongamos que la cuerda está fija en los extremos y que se suelta sin velocidad inicial a partir de la posición inicial $u(x,0) = \operatorname{sen}(\pi x)$.

a) Describe la transformación del problema en un esquema en diferencias finitas explícito de orden $O(k^2 + h^2)$.

b) Aplica este esquema para determinar la solución en el instante $t = 1$, tomando $h = 0{,}1$ y $k = 0{,}0005$. Representa la solución en los instantes $t = 0{,}25$, $t = 0{,}5$ y $t = 0{,}75$.

c) Describe la transformación del problema en un esquema en diferencias finitas implícito de orden $O(k^2 + h^2)$. Aplica este esquema para determinar la solución en el instante $t = 1$, tomando $h = 0{,}1$ y $k = 0{,}0005$.

a) Consideramos los nodos $x_i = ih$, $i = 0, 1, \ldots, nx$ y $t_j = jk$, $j = 0, 1, \ldots, nt$, con $h = 1/nx$ y $k = 1/nt$, siendo nx y nt el número de subintervalos en cada variable. Aplicando diferencias simétricas en u_{xx} y u_{tt}, obtenemos:

$$u_{i,j+1} = (2 - 2\lambda^2 - k^2)u_{i,j} + \lambda(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - u_{i,j-1}, \qquad \begin{array}{l} i = 1, \ldots, nx-1, \\ j = 0, \ldots, nt-1 \end{array}$$

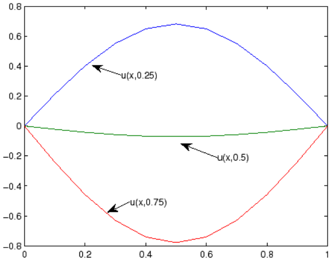
donde $\lambda = k/h$. Dado que los extremos de la cuerda son fijos, sabemos que $u(0,t) = u(1,t) = 0$. Asimismo, la posición inicial de la cuerda, es $u_{i,0} = \operatorname{sen}(\pi x_i)$, para $i = 0, 1, \ldots, nx$.
El hecho de soltar la cuerda sin velocidad inicial nos permite deducir que $u_t(x_i, 0) = 0$, $i = 0, 1, \ldots, nx$. Si aproximamos esta derivada respecto a la variable temporal por diferencias simétricas, se deduce que $u_{i,-1} = u_{i,1}$. Empleando esta aproximación en el esquema en diferencias anterior para $j = 0$,

$$u_{i,1} = (1 - \lambda^2 - \frac{k^2}{2})\operatorname{sen}(\pi x_i) + \frac{\lambda}{2}(\operatorname{sen}(\pi x_{i+1}) + \operatorname{sen}(\pi x_{i-1})), \quad i = 0, \ldots, nx$$

b) Modificando en el programa estándar el cálculo de $u_{i,1}$ y $u_{i,j+1}$ según se ha descrito, obtenemos para $t = 1$,

x	M. Explícito $u(x,1)$
0	0
0.1	-0.305862
0.2	-0.581784
0.3	-0.800757
0.4	-0.941346
0.5	-0.989790
0.6	-0.941346
0.7	-0.800757
0.8	-0.581784
0.9	-0.305862
1	0

En la gráfica podemos ver las distintas curvas que aproximan la posición de la cuerda en los instantes $t = 0{,}25$, $t = 0{,}5$ y $t = 0{,}75$.



c) Al aplicar el método implícito aproximamos u_{xx} por la media de las diferencias centrales en los instantes t_{j-1} y t_{j+1} y u_{tt} por diferencias simétricas. Tras agrupar los términos del instante t_{j+1}, obtenemos:

$$\frac{\lambda^2}{2}(u_{i+1,j+1}+u_{i-1,j+1})-(1+\lambda^2)u_{i,j+1}$$
$$=-\frac{\lambda^2}{2}(u_{i+1,j-1}+u_{i-1,j-1})+(1+\lambda^2)u_{i,j-1}+(k^2-2)u_{i,j}$$

para $i=1,\ldots,nx-1$ y $t=1,\ldots,nt-1$. Es un sistema tridiagonal en el que son conocidos los valores de la función incógnita para $x=0$, $x=1$, $t=0$ y $t=k$. Además, $u_{i,1}$ se obtiene del mismo modo que en el apartado a).

$$u_{i,1}=(1-\lambda^2-\frac{k^2}{2})\text{sen}(\pi x_i)+\frac{\lambda}{2}(\text{sen}(\pi x_{i+1})+\text{sen}(\pi x_{i-1})),\quad i=0,\ldots,nx$$

Así pues, en cada paso j hay que resolver el sistema lineal tridiagonal

$$Au^{(j+1)} = Bu^{(j-1)} + (k^2 - 2)u^{(j)}$$

donde $u^{(j)}$ representa la solución en el instante t_j,

$$A = \begin{pmatrix} -1-\lambda^2 & \lambda^2/2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda^2/2 & -1-\lambda^2 & \lambda^2/2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1-\lambda^2 & \lambda^2/2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda^2/2 & -1-\lambda^2 \end{pmatrix},$$

y

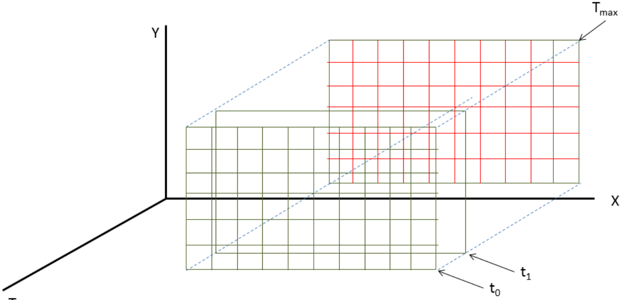
$$B = \begin{pmatrix} 1+\lambda^2 & -\lambda^2/2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\lambda^2/2 & 1+\lambda^2 & -\lambda^2/2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+\lambda^2 & -\lambda^2/2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda^2/2 & 1+\lambda^2 \end{pmatrix}$$

Modificando en el programa estándar el cálculo de $u_{i,1}$ y $u_{i,j+1}$ según se ha descrito, obtenemos la aproximación de la solución para $t=1$ por el método implícito, que comparamos con la anterior.

x	M. Explícito $u(x,1)$	M. Implícito $u(x,1)$
0	0	0
0.1	-0.305862	-0.305862
0.2	-0.581784	-0.581784
0.3	-0.800757	-0.800757
0.4	-0.941346	-0.941346
0.5	-0.989790	-0.989790
0.6	-0.941346	-0.941346
0.7	-0.800757	-0.800757
0.8	-0.581784	-0.581784
0.9	-0.305862	-0.305862
1	0	0

$$u_{tt}(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,y,t) + \beta^2 u_{yy}(x,y,t), \quad (x,y) \in R = [a,b] \times [c,d], \; t \geq 0$$

$$u(a,y,t) = h1(y,t), \; u(b,y,t) = h2(y,t), \; u(x,c,t) = h3(x,t), \; u(x,d,t) = h4(x,t),$$
$$u(x,y,0) = f(x,y), u_t(x,y,0) = g(x,y), (x,y) \in R = [a,b] \times [c,d], \quad t \geq 0$$



$(x,y) \in \; [a,b]$ x $[c,d]$

$$h_x = \frac{b-a}{nx} \qquad h_y = \frac{d-c}{ny} \qquad k = \frac{Tmax}{nt}$$

Método explícito

$$u_{tt}(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,y,t) + \beta^2 u_{yy}(x,y,t), \quad (x,y) \in R = [a,b] \times [c,d],\ t \geq 0$$

$$u(a,y,t) = h1(y,t),\ u(b,y,t) = h2(y,t),\ u(x,c,t)) = h3(x,t),\ u(x,d,t)) = h4(x,t)$$
$$u(x,y,0) = f(x,y), u_t(x,y,0) = g(x,y), (x,y) \in R = [a,b] \times [c,d], \quad t \geq 0$$

Diferencias centrales en u_{tt}, u_{xx} y u_{yy}

$$\frac{u(x,y,t+k) - 2u(x,y,t) + u(x,y,t-k)}{k^2} = \alpha^2 \frac{u(x+h_x,y,t) - 2u(x,y,t) + u(x-h_x,y,t)}{h_x^2} + \beta^2 \frac{u(x,y+h_y,t) - 2u(x,y,t) + u(x,y-h_y,t)}{h_y^2},$$

Discretización del problema Evaluando la expresión anterior en los puntos (x_i, y_j, t_l), $i = 1,2,\ldots,nx-1,\ j = 1,2,\ldots,ny-1,\ l = 0,1,\ldots,nt-1,$ $u(x_i,y_j,t_l) = u_{i,j,l}$

$$\frac{u_{i,j,l+1} - 2u_{i,j,l} + u_{i,j,l-1}}{k^2} = \alpha^2 \frac{u_{i+1,j,l} - 2u_{i,j,l} + u_{i-1,j,l}}{h_x^2} + \beta^2 \frac{u_{i,j+1,l} - 2u_{i,j,l} + u_{i,j-1,l}}{h_y^2},$$

$i = 1,2,\ldots,nx-1, j = 1,2,\ldots,ny-1, l = 0,1,\ldots,nt-1.$

Llamando $\lambda = \dfrac{\alpha k}{h_x}$, $\mu = \dfrac{\beta k}{h_y}$ y despejando las incógnitas del instante mayor

$$u_{i,j,l+1} = 2(1-\lambda^2-\mu^2)u_{i,j,l} + \lambda^2(u_{i+1,j,l}+u_{i-1,j,l}) + \mu^2(u_{i,j+1,l}+u_{i,j-1,l}) - u_{i,j,l-1},$$
$$i = 1,2,\ldots,nx-1, j = 1,2,\ldots,ny-1, l = 0,1,\ldots,nt-1.$$

Para calcular cada matriz utilizamos las dos anteriores (en la variable temporal)

¿Cómo calculamos $U^{(1)}$, es decir, $u_{i,j,1}$, $i = 1,2,\ldots,nx-1$, $j = 1,2,\ldots,ny-1$?

- Utilizando la diferencia progresiva en la condición inicial $u_t(x,y,0) = g(x,y)$

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j,1}-u_{i,j,0}}{k} &= g(x_i,y_j) \\ &\curvearrowright \\ u_{i,j,1} &= f(x_i,y_j) + kg(x_i,y_j), i = 1,2,\ldots,nx-1,\ j = 1,2,\ldots,ny-1 \end{aligned}$$

aproximación de orden 1 en la variable temporal, $O(h_x^2+h_y^2+k)$.

¿Cómo calculamos $U^{(1)}$, es decir, $u_{i,j,1}$, $i=1,2,\ldots,nx-1$, $j=1,2,\ldots,ny-1$?

- Utilizando el desarrollo de Taylor hasta orden 2

$$\begin{aligned}
u(x,y,0+k) &\approx u(x,y,0)+u_t(x,y,0)p+u_{tt}(x,y,0)\frac{k^2}{2} \\
&= f(x,y)+kg(x,y)+\frac{k^2}{2}\left(\alpha^2 u_{xx}(x,y,0)+\beta^2 u_{yy}(x,y,0)\right) \\
&= f(x,y)+kg(x,y)+\frac{k^2}{2}\left(\alpha^2 f_{xx}(x,y)+\beta^2 f_{yy}(x,y)\right),
\end{aligned}$$

si $f_{xx}(x,y)\approx \dfrac{f(x+h_x,y)-2f(x,y)+f(x-h_x,y)}{h_x^2}$ y

$f_{yy}(x,y)\approx \dfrac{f(x,y+h_y)-2f(x,y)+f(x,y-h_y)}{h_y^2}$ evaluando en (x_i,y_j), resulta

$$\begin{aligned}
u_{i,j,1} &= (1-\lambda^2-\mu^2)f(x_i,y_j)+kg(x_i,y_j) \\
&+\frac{\lambda^2}{2}\left(f(x_{i+1},y_j)+f(x_{i-1},y_j)\right)+\frac{\mu^2}{2}\left(f(x_i,y_{j+1})+g(x_i,y_{j-1})\right),
\end{aligned}$$

$i=1,2,\ldots,nx-1$, aproximación de orden 2, $O(h_x^2+h_y^2+k^2)$.

```
function [U]=exponda3D(CC1x,CC2x,CC1y,CC2y,CI1,CI2,a,b,nx,c,d,ny,Tmax,nt,alfa,beta)

hx=(b-a)/nx;    x=a:hx:b;
hy=(b-a)/ny;    y=c:hy:d;
k=Tmax/nt;      t=0:k:Tmax;

U=zeros(nx+1,ny+1,nt+1);

for j=1:ny+1
    for l=1:nt+1
        U(1,j,l)=feval(CC1x,y(j),t(l));
        U(nx+1,j,l)=feval(CC2x,y(j),t(l));
    end
end
for j=1:nx+1
    for l=1:nt+1
        U(j,1,l)=feval(CC1y,x(j),t(l));
        U(j,ny+1,l)=feval(CC2y,x(j),t(l));
    end
end
for i=1:nx+1
    for j=1:ny+1
        U(i,j,1)=feval(CI1,x(i),y(j));
        M(i,j) = feval(CI2,x(i),y(j));
    end
end
```

```
lambda=k*alfa/hx;

mu=k*beta/hy;

for i=2:nx
        for j=2:ny
   U(i,j,2) = (1-lambda^2-mu^2)*U(i,j,1) + k * M(i,j)...
             +(lambda^2/2)*(U(i+1,j,1)+U(i-1,j,1))+...
             +(mu^2/2)*(U(i,j+1,1)+U(i,j-1,1));
       end
end

for l=2:nt

       U(2:nx,2:ny,l+1) = 2*(1-lambda^2-mu^2)*U(2:nx,2:ny,l)...
                        +lambda^2*(U(3:nx+1,2:ny,l)+U(1:nx-1,2:ny,l))+...
                        mu^2*(U(2:nx,3:ny+1,l)+U(2:nx,1:ny-1,l))-U(2:nx,2:ny,l-1);

end
end
```

Ejemplo

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) - u_{yy}(x,t) = 0, (x,y) \in [0,2] \times [0,2],\ \ t \geq 0,$$
$$u(0,y,t) = u(2,y,t) = u(x,0,t) = u(x,2,t) = 1+t;$$
$$u(x,0) = \sin\left(\pi(x+y)\right), u_t(x,y,0) = 0$$

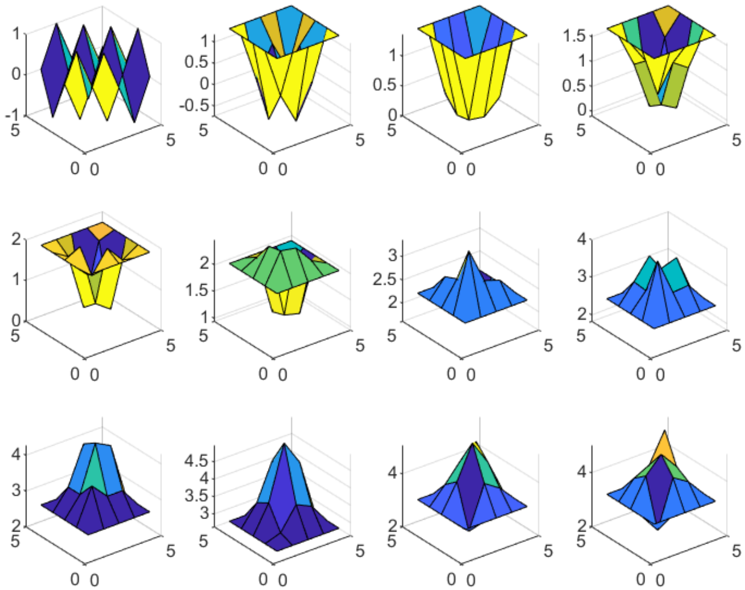
Resolvemos el problema para $nx = ny = 4$, $nt = 11$, $Tmax = 2$ con el método explícito:

```
>> U = exponda3D(@(y,t) 1+0*y+t, @(y,t) 1+0*y+t, @(x,t) 1+0*x+t,...
@(x,t) 1+0*x+t, @(x,y) sin(pi*(x+y)), @(x,y) 0*x+0*y,...
0,2,4,0,2,4,2,11,1,1)
```

Solución en el último instante:

```
U(:,:,12) =

    3.0000    3.0000    3.0000    3.0000    3.0000
    3.0000    2.2882    4.0185    3.6566    3.0000
    3.0000    4.0185    4.6079    3.9430    3.0000
    3.0000    3.6566    3.9430    5.0250    3.0000
    3.0000    3.0000    3.0000    3.0000    3.0000
```


1
0
-1
5
5
0 0
1
0.5
0
-0.5
5
5
0 0
1
0.5
0
5
5
0 0
1.5
1
0.5
0
5
5
0 0
2
1
0
5
5
0 0
2
1.5
1
5
5
0 0
3
2.5
2
5
5
0 0
4
3
2
5
5
0 0
4
3
2
5
5
0 0
4.5
4
3.5
3
5
5
0 0
4
2
5
5
0 0
4
2
5
5
0 0

La ecuación de ondas $u_{tt} = u_{xx}$, puede aproximarse en el punto (x_i, t_j) mediante el esquema en diferencias implícito

$$\frac{1}{k^2}\delta_t^2 u_{i,j} = \frac{1}{h^2}\left(\frac{1}{4}\delta_x^2 u_{i,j+1} + \frac{1}{2}\delta_x^2 u_{i,j} + \frac{1}{4}\delta_x^2 u_{i,j-1}\right),$$

donde $\delta_t^2 u_{i,j} = u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}$.

Desarrollando el esquema, tenemos

$$\frac{-\lambda^2}{4}u_{i-1,j+1} + (1+\frac{\lambda^2}{2})u_{i,j+1} - \frac{\lambda^2}{4}u_{i+1,j+1} =$$
$$\frac{\lambda^2}{2}u_{i-1,j} + (2-\lambda^2)u_{i,j} + \frac{\lambda^2}{2}u_{i+1,j} + \frac{\lambda^2}{4}u_{i-1,j-1} - (1+\frac{\lambda^2}{2})u_{i,j-1} + \frac{\lambda^2}{4}u_{i+1,j-1},$$

y en forma matricial

$$Au^{(j+1)} = Bu^{(j)} + Cu^{(j-1)} + b_j,$$

donde b_j es un vector columna de constantes conocidas y A, B y C son matrices tridiagonales con las siguientes estructuras:

$$A = \begin{pmatrix} 1+\lambda^2/2 & -\lambda^2/4 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\lambda^2/4 & 1+\lambda^2/2 & -\lambda^2/4 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^2/4 & 1+\lambda^2/2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+\lambda^2/2 & -\lambda^2/4 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda^2/4 & 1+\lambda^2/2 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 2-\lambda^2 & \lambda^2/2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda^2/2 & 2-\lambda^2 & \lambda^2/2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2/2 & 2-\lambda^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2-\lambda^2 & \lambda^2/2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda^2/2 & 2-\lambda^2 \end{pmatrix},$$

y

$$C = -A.$$

Método implícito

Si reemplazamos en el esquema en diferencias

$$u_{i,j} = e^{\sqrt{-1}\beta x_i} e^{\alpha t_j} = e^{\sqrt{-1}\beta i h} \xi^j, \quad \xi = e^{\alpha k},$$

obtenemos la expresión

$$(1 + \lambda^2 \sin^2(\beta h/2))\xi^2 - (2 - 2\lambda^2 \sin^2(\beta h/2)) + (1 + \lambda^2 \sin^2(\beta h/2)) = 0.$$

Las dos raíces de esta ecuación cuadrática son

$$\xi_{1,2} = \frac{1 - \lambda^2 \sin^2(\beta h/2) \pm 2\sqrt{-1}\lambda \sin(\beta h/2)}{1 + \lambda^2 \sin^2(\beta h/2)}.$$

Es sencillo comprobar que $|\xi| = 1$, por lo que el método es incondicionalmente estable.

Para condiciones de contorno constantes

$$u^{(j+1)} = A^{-1}Bu^{(j)} + A^{-1}Cu^{(j-1)} + A^{-1}b_j,$$

donde

$$\begin{array}{rcl} A & = & (1+\lambda^2/2)I - (\lambda^2/4)E, \\ B & = & (2-\lambda^2)I + (\lambda^2/2)E, \\ C & = & (-1-\lambda^2/2)I + (\lambda^2/4)E = -A, \end{array}$$

donde $E = diag(v,1) + diag(v,-1)$, $v = [1,1,\ldots,1]$.

Si utilizamos el error de perturbación $e = u^* - u$, podemos escribir

$$e_{j+1} = A^{-1}Be_j + A^{-1}Ce_{j-1},$$

es decir,

$$\left(\begin{array}{c} e_{j+1} \\ e_j \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} A^{-1}B & A^{-1}C \\ I & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} e_j \\ e_{j-1} \end{array}\right), \quad v_{j+1} = Pv_j$$

Los valores propios μ de la matriz P vienen dados por la ecuación

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_k^{-1}\beta_k - \mu & \alpha_k^{-1}\gamma_k \\ 1 & -\mu \end{pmatrix} = 0,$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha_k &= 1 + \lambda^2 \sin^2\left(\frac{k\pi}{2nx}\right), \\ \beta_k &= 2 - 2\lambda^2 \sin^2\left(\frac{k\pi}{2nx}\right), \\ \gamma_k &= -1 - \lambda^2 \sin^2\left(\frac{k\pi}{2nx}\right), \end{aligned}$$

$k = 1, 2, \ldots, nx - 1$, son los valores propios de A, B y C respectivamente.
Se demuestra que $|\mu| = 1$, para cualquier valore propio de P. Por tanto, $\rho(P) = 1$ y el método es incondicionalmente estable.

Para el error de truncamiento, obtenemos

$$I_{i,j} = -\, h^2 k^2 (1 + 2\lambda^2)(U_{xxxx})_{i,j} + \ldots$$