Tema 8: Elementos finitos unidimensionales

Resolución numérica de ecuaciones en derivadas parciales

Alicia Cordero, Juan R. Torregrosa

Contenido

¿Qué es el método de elementos finitos?

El Método de Elementos Finitos (MEF), consiste en reemplazar un conjunto de ecuaciones diferenciales, por un conjunto equivalente, pero aproximado, de ecuaciones algebráicas, donde cada una de las variables es evaluada en los nodos. En la evaluación de las ecuaciones algebráicas pueden usarse diferentes tipos de aproximaciones, y los métodos de elementos finitos se clasifican de acuerdo al método usado

- El método directo
- El método variacional
- El método de los residuos

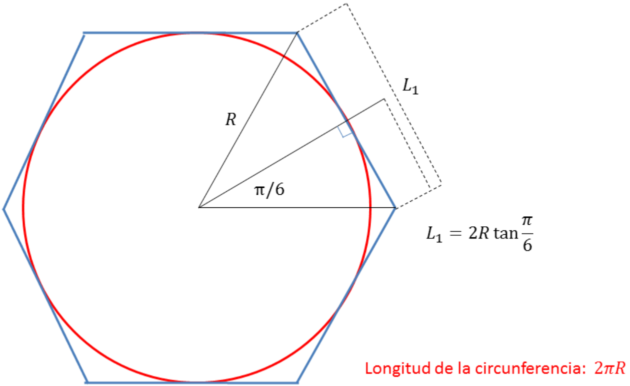
Con independencia de la naturaleza física del problema, el MEF requiere de los siguientes pasos:

1. Definición del problema y su dominio
2. Discretización del dominio en elementos finitos
3. Ecuaciones de los elementos
4. Formulación del problema
5. Construcción de las funciones de aproximación de cada elemento
6. Ensamblaje de las ecuaciones de los elementos
7. Solución del conjunto de ecuaciones simultáneas
8. Interpretación de resultados

Ejemplo: Determinación del valor de π

Queremos determinar el valor de π. Consideramos un círculo de radio R inscrito en un polígono regular de n lados (en la figura $n = 6$).

Si calculamos la longitud de cada lado del polígono, su perímetro será una aproximación de la longitud de la circunferencia, a partir de la cual podremos estimar el valor de π



Conceptos básicos

- Discretización del dominio.
  Región continua: la circunferencia;
  Elementos finitos: los lados del polígono
  Todos los elementos finitos tienen el mismo tamaño (no siempre es así): mallado uniforme

- Ecuaciones de los elementos.
  A partir del triángulo rectángulo: $L_e = 2R \tan \frac{\pi}{n}$

- Ensamblaje de las ecuaciones

$$L(n) = \sum_{e=1}^{n} L_e = 2nR \tan \frac{\pi}{n}.$$

- Convergencia de la solución

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L(n)}{2R} = \lim_{n\to\infty} n \tan \frac{\pi}{n} = \lim_{y\to 0} \pi \frac{1}{y} \tan y = \pi$$

Consideremos el problema de frontera que modeliza la deflexión $y(x)$ de una viga que soporta una serie de fuerzas:

Deflexión

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y = f(x), \quad x \in [0,1],$$

con las condiciones de contorno $y(0) = y(1) = 0$

Supondremos ciertas condiciones que garantizan la existencia y unicidad de solución del problema:

$$p \in \mathcal{C}^1[0,1], \quad q, f \in \mathcal{C}[0,1]; \qquad p(x) > 0, q(x) \geq 0, \forall x \in [0,1]$$

Una formulación variacional es la que transforma el problema de frontera en uno equivalente que consiste en minimizar un determinado operador funcional. Para este problema de frontera su formulación variacional sería:

Formulación variacional

Sea $p \in \mathcal{C}^1[0,1]$, $q, f \in \mathcal{C}[0,1]$ y

$$p(x) > 0, q(x) \geq 0, \forall x \in [0,1].$$

La función $y(x) \in \mathcal{C}_0^2[0,1]$ es la única solución de la ecuación diferencial

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y = f(x), \quad x \in [0,1],$$

si y sólo si

$y(x)$ es la única función en $\mathcal{C}_0^2[0,1]$ que minimiza el operador

$$I : \mathcal{C}_0^2[0,1] \to \mathbb{R}$$

definido

$$I(u) = \int_0^1 \left(p(x)[u'(x)]^2 + q(x)[u(x)]^2 - 2f(x)u(x)\right) dx.$$

Método de Rayleigh-Ritz

Minimizamos el operador I, no sobre todo el espacio $\mathcal{C}_0^2[0,1]$ si no sobre un espacio de dimensión finita $\mathcal{H}$, generado por las funciones base $\{\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots, \phi_n(x)\}$, funciones que deben satisfacer

- son linealmente independientes
- $\phi_i(0) = \phi_i(1) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$

Desde luego,

$$\phi \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \phi(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + \cdots + c_n\phi_n(x),$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son números reales.

Si encontramos constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ que minimizan

$$I\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\phi_i(x)\right)$$

tendremos una aproximación $\phi(x)$ de la solución $y(x)$ del problema de frontera

Con las funciones base fijadas

$$I(\phi(x)) = \int_0^1 \left(p(x)\phi'(x)^2 + q(x)\phi(x)^2 - 2f(x)\phi(x)\right) dx$$

es una función de $c_1, c_2, \ldots, c_n$

¿Cómo encontramos el mínimo de una función de n variables?

$$\nabla I(\phi(x)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial I(\phi(x))}{\partial c_j} = 0,\ j = 1, 2, \ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\int_0^1 (p(x)\phi_i'(x)\phi_j'(x) + q(x)\phi_i(x)\phi_j(x))dx\right) c_i - \int_0^1 f(x)\phi_j(x) = 0,\ j = 1, 2, \ldots, n$$

Debemos resolver un sistema lineal, simétrico $Ac = b$, donde $A = (a_{ij})$, $b = [b_1, b_2, \ldots, b_n]^T$,

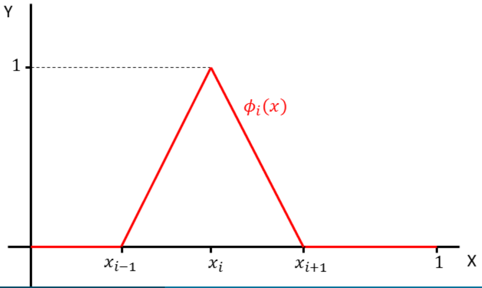
$$a_{ij} = \int_0^1 (p(x)\phi_i'(x)\phi_j'(x) + q(x)\phi_i(x)\phi_j(x))dx, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

$$b_i = \int_0^1 f(x)\phi_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Funciones base lineales a trozos

- Elegimos n puntos en el dominio $[0,1]$, $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n < x_{n+1} = 1$,
- $h_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$
- Definimos las funciones base $\{\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots, \phi_n(x)\}$

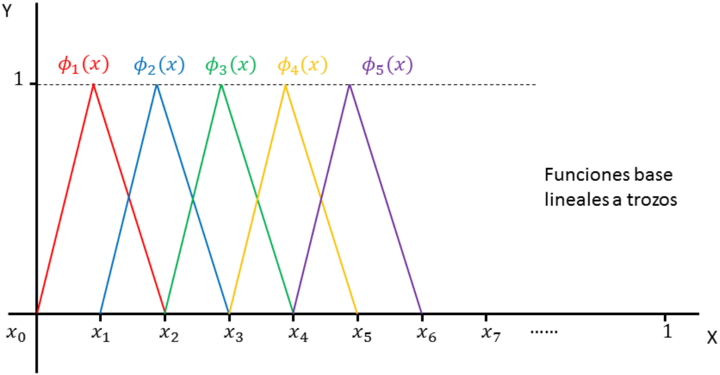
$$\phi_i(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad 0 \leq x \leq x_{i-1} \\ \dfrac{x - x_{i-1}}{h_{i-1}} & \text{si} \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{h_i} & \text{si} \quad x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0, & \text{si} \quad x_{i+1} \leq x \leq 1 \end{cases}$$



Funciones base

Funciones base lineales a trozos

- $\{\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots, \phi_n(x)\}$ linealmente independientes
- $\phi_i(x)\phi_j(x) = 0$, para todo $x \in [0,1]$, excepto para $j = i-1$, $j = i$, $j = i+1$
- $\phi_i'(x)\phi_j'(x) = 0$, para todo $x \in [0,1]$, excepto para $j = i-1$, $j = i$, $j = i+1$



Rayleigh-Ritz con funciones base lineales

Sistema lineal con matriz tridiagonal

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{23} & a_{33} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1n} & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} a_{ii} \quad = \quad & \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{1}{h_{i-1}}\right)^2 p(x)dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{-1}{h_{i-1}}\right)^2 p(x)dx \\ & + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{1}{h_{i-1}}\right)^2 (x - x_{i-1})^2 q(x)dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{1}{h_i}\right)^2 (x_{i+1} - x)^2 q(x)dx \end{aligned}$$

$$a_{ii+1} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(-\frac{1}{h_i}\right)^2 p(x)dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{1}{h_i}\right)^2 (x_{i+1} - x)(x - x_i)q(x)dx$$

$$b_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h_{i-1}}(x - x_{i-1})f(x)dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h_i}(x_{i+1} - x)(f(x)dx$$

Aparecen seis tipos de integrales a evaluar:

- $Q_{1i} = \left(\frac{1}{h_i}\right)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x)(x - x_i)q(x)dx,\ i = 1, 2, \ldots, n-1$
- $Q_{2i} = \left(\frac{1}{h_{i-1}}\right)^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1})^2 q(x)dx,\ i = 1, 2, \ldots, n$
- $Q_{3i} = \left(\frac{1}{h_i}\right)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x)^2 q(x)dx,\ i = 1, 2, \ldots, n$
- $Q_{4i} = \left(\frac{1}{h_{i-1}}\right)^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x)dx,\ i = 1, 2, \ldots, n+1$
- $Q_{5i} = \frac{1}{h_{i-1}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1})f(x)dx,\ i = 1, 2, \ldots, n$
- $Q_{6i} = \frac{1}{h_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x)f(x)dx,\ i = 1, 2, \ldots, n$

La matriz A y el vector b contienen los elementos:

$$\begin{array}{rcll} a_{ii} & = & Q_{4i} + Q_{4i+1} + Q_{2i} + Q_{3i} & i = 1, 2, \ldots, n \\ a_{ii+1} & = & -Q_{4i+1} + Q_{1i} & i = 1, 2, \ldots, n-1 \\ b_i & = & Q_{5i} + Q_{6i} & i = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

- ENTRADA entero $n \geq 1$, puntos $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n < x_{n+1} = 1$
- SALIDA coeficientes $c_1, c_2, \ldots, c_n$

- Paso 1 Para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ tomar $h_i = x_{i+1} - x_i$
- Paso 2 Para $i = 1, 2, \ldots, n$ definir las funciones base $\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots, \phi_n(x)$
- Paso 3 Para $i = 1, 2, \ldots, n-1$ calcular $Q_{1i}, Q_{2i}, Q_{3i}, Q_{4i}, Q_{5i}, Q_{6i}$
  Calcular $Q_{2n}, Q_{3n}, Q_{4n}, Q_{4n+1}, Q_{5n}, Q_{6n}$
- Paso 4 Para $i = 1, 2, \ldots, n-1$ calcular
  $$\alpha_i = Q_{4i} + Q_{4i+1} + Q_{2i} + Q_{3i}$$
  $$\beta_i = -Q_{4i+1} + Q_{1i}$$
  $$d_i = Q_{5i} + Q_{6i}$$
- Paso 5 Calcular $\alpha_n = Q_{4n} + Q_{4n+1} + Q_{2n} + Q_{3n}$ y $d_n = Q_{5n} + Q_{6n}$
- Paso 6 $c = Crout(\alpha, \beta, \beta, d)$
- Paso 7 PARAR (Procedimiento terminado)

Ejemplo

$$-y'' + \pi^2 y = 2\pi^2 \sin(\pi x), \quad x \in [0,1], \quad y(0) = y(1) = 0$$

Solución exacta $y(x) = \sin(\pi x)$

Tomamos $h_i = h = 0.1$ de forma que $x_i = 0.1i$, $i = 0, 1, 2, \ldots, 10$

Calculando analíticamente las diferentes integrales, el sistema lineal $Ac = b$ tiene los elementos

$$\begin{array}{rcll} a_{ii} & = & 20 + \frac{\pi^2}{15} & i = 1, 2, \ldots, 9 \\ a_{ii+1} & = & -10 + \frac{\pi^2}{60} & i = 1, 2, \ldots, 8 \\ b_i & = & 40 \sin(0.1\pi i)[1 - \cos(0.1\pi)] & i = 1, 2, \ldots, 9 \end{array}$$

La solución del sistema tridiagonal que se obtiene es

$$\begin{array}{ll} c_1 = 0.310287 & c_9 = 0.310287 \\ c_2 = 0.5902 & c_8 = 0.5902 \\ c_3 = 0.812341 & c_7 = 0.812341 \\ c_4 = 0.954964 & c_6 = 0.954964 \\ c_5 = 1.004109 & \end{array}$$

Ejemplo

Tabla de resultados

x_i	$\phi(x_i)$	$y(x_i)$	$\lvert\phi(x_i) - y(x_i)\rvert$
0.1	0.310287	0.309017	0.00127
0.2	0.5902	0.587785	0.00242
0.3	0.812341	0.809017	0.00332
0.4	0.954964	0.951057	0.00391
0.5	1.004109	1.000000	0.00411
0.6	0.954964	0.951057	0.00391
0.7	0.812341	0.809017	0.00332
0.8	0.5902	0.587785	0.00242
0.9	0.310287	0.309017	0.00127

Table: Resultados numéricos

Con las hipótesis presentadas se puede demostrar que

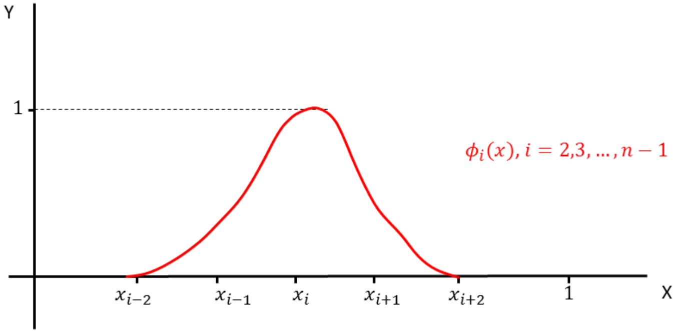
$$|\phi(x) - y(x)| = O(h^2), \quad \forall x \in [0,1].$$

Observemos que la solución aproximada $\phi(x)$ es continua pero no diferenciable. Para obtener una solución aproximada diferenciable debemos modificar las funciones base.

Funciones base no lineales

Se obtienen a partir de los llamados polinomios cúbicos a trozos

$$S(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2 \\ \frac{1}{4}[(2-x)^3 - 4(1-x)^3 - 6x^3 + 4(1+x)^3], & -2 < x \leq -1 \\ \frac{1}{4}[(2-x)^3 - 4(1-x)^3 - 6x^3], & -1 < x \leq 0 \\ \frac{1}{4}[(2-x)^3 - 4(1-x)^3], & 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{4}(2-x)^3, & 1 < x \leq 2 \\ 0, & 2 < x \end{cases}$$



Elegimos n puntos en el dominio $[0,1]$

$$h = \frac{1}{n+1}, \quad x_i = ih, \quad i = 0,1,2,\ldots,n,n+1$$

Definimos las funciones base

$$\phi_i(x) = S\left(\frac{x-x_i}{h}\right), \quad i = 2,3,\ldots,n-1$$

$$\phi_0(x) = S\left(\frac{x}{h}\right) - 4S\left(\frac{x+h}{h}\right), \qquad \phi_1(x) = S\left(\frac{x-h}{h}\right) - S\left(\frac{x+h}{h}\right)$$

$$\phi_n(x) = S\left(\frac{x-nh}{h}\right) - S\left(\frac{x-(n+2)h}{h}\right),$$

$$\phi_{n+1}(x) = S\left(\frac{x-(n+1)h}{h}\right) - 4S\left(\frac{x-(n+2)h}{h}\right)$$

Funciones base no lineales

Las funciones base definidas cumplen las siguientes propiedades:

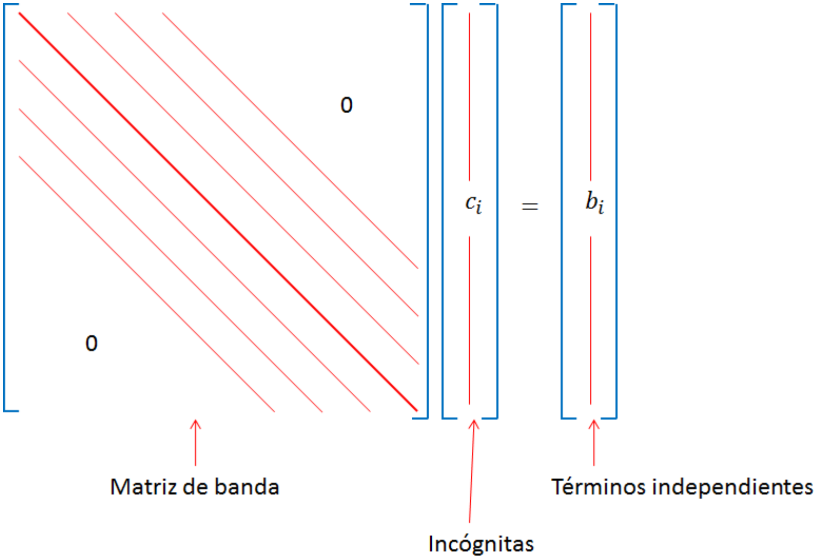
- Son linealmente independientes
- $\phi_i(x)$ es no nula como mucho en el intervalo $[x_{i-2}, x_{i+2}]$
- $\phi_i'(x)$ es no nula como mucho en el intervalo $[x_{i-2}, x_{i+2}]$
- $\phi_i(x)\phi_j(x) = 0$, excepto en determinados valores de j
- $\phi_i'(x)\phi_j'(x) = 0$, excepto en determinados valores de j

Las dos últimas propiedades permiten afirmar que la matriz A es una matriz de bandas, con ancho de banda igual a 3 y

$$a_{ij} = \int_0^1 (p(x)\phi_i'(x)\phi_j'(x) + q(x)\phi_i(x)\phi_j(x))dx, \quad i, j = 0, 1, \ldots, n+1$$

$$b_i = \int_0^1 f(x)\phi_i(x)dx, \quad i = 0, 1, \ldots, n+1$$

Funciones base no lineales



Ejemplo

Ejemplo

$$-y'' + \pi^2 y = 2\pi^2 \sin(\pi x), \quad x \in [0,1], \quad y(0) = y(1) = 0$$

Solución exacta $y(x) = \sin(\pi x)$

Tomamos $h_i = h = 0.1$ de forma que $x_i = 0.1i$, $i = 0, 1, 2, \ldots, 10$

Calculamos las diferentes integrales que aparecen en el proceso mediante el comando integral

La solución del sistema así como el error exacto cometido, aparece en la siguiente tabla.

Ejemplo

Tabla de resultados

i	x_i	c_i	$\phi(x_i)$	$y(x_i)$	$\lvert\phi(x_i) - y(x_i)\rvert$
0	0.0	0.5096e-5	0.000000	0.000000	-
1	0.1	0.209426	0.309016	0.309017	5.5e-7
2	0.2	0.398357	0.587785	0.587785	2.4e-7
3	0.3	0.548289	0.809017	0.809017	1.2e-7
4	0.4	0.644554	0.951057	0.951057	1.5e-7
5	0.5	0.677723	1.000000	1.000000	2.0e-7
6	0.6	0.644554	0.951057	0.951057	6.1e-7
7	0.7	0.548290	0.809018	0.809017	7.4e-7
8	0.8	0.398357	0.587787	0.587785	1.6e-6
9	0.9	0.209426	0.309018	0.309017	1.1e-6
10	1.0	0.7493e-5	0.000000	0.000000	-

Table: Resultados numéricos

Con las hipótesis presentadas se puede demostrar que

$$|\phi(x) - y(x)| = O(h^4), \quad \forall x \in [0,1].$$

- S Larsson, V Thomée, *Partial differential equations with numerical methods*, Springer, Berlin, 2016.
- T. Myint-U, L. Debnath, *Partial differential equations for Scientist and engineers*, Ed. North-Holland, New York, 1987.
- R. Burden, J. Faires, *Análisis Numérico*, Ed. Thompson, 2002.
- S.C. Chapra, R.P. Canale, *Métodos numméricos para ingenieros*, Ed. McGraw-Hill, México D.F., 2006.
- L. Lapidus, G. Pinder, *Numerical solution of partial differential equations in science and engineering*, Ed. Wiley Interscience Publication, New York, 1999.
- A. Cordero, J.L. Hueso, E. Martínez, J.R. Torregrosa, *Problemas resueltos de métodos numéricos*, Ed. Thompson, 2006.
- J. Mathews, K. Fink, *Métodos Numéricos con Matlab*, Ed. Prentice-Hall, 1999.