Tema 3: Sistemas dinámicos multidimensionales

Resolución numérica de ecuaciones en derivadas parciales

Alicia Cordero, Juan R. Torregrosa

Contenido

Introducción

- Sistemas lineales

$$\bar{y}' = A\bar{y}$$

1. Valores y vectores propios
2. Plano traza-determinante

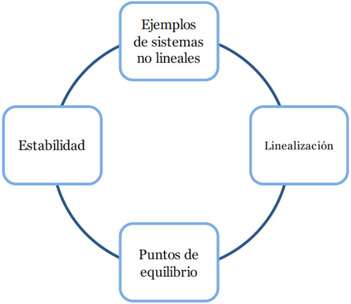
- Sistemas no lineales

$$\bar{y}' = F(\bar{y})$$

$$\Downarrow$$

Puntos de equilibrio

- Hiperbólicos: linealización
- No hiperbólicos: Lyapunov



Consideremos el sistema autónomo

$$\bar{y}' = F(\bar{y}),$$

donde $\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$ y $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una función cuyas funciones coordenadas denotamos por $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Una solución $\phi(t)$ del sistema definida para todo $t \geq 0$ se dice estable si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\psi(t)$ es otra solución que cumple la condición

$$\|\psi(t_0) - \phi(t_0)\| < \delta,$$

entonces $\psi(t)$ está definida para todo $t \geq 0$ y se verifica que

$$\|\psi(t) - \phi(t)\| < \epsilon \;\forall t > 0.$$

Si, además, se verifica que

$$\lim_{t\to\infty} \|\psi(t) - \phi(t)\| = 0,$$

la solución $\phi(t)$ se dice que es asintóticamente estable. Finalmente, la solución se dirá inestable si no es estable.

El problema de Cauchy

$$\bar{y}' = \bar{y},\ \bar{y}(t_0) = \bar{y}_0,$$

tiene como solución $\bar{y}(t) = \bar{y}_0 e^{t-t_0}$. Dadas dos soluciones cualesquiera $\bar{y}_1(t)$ e $\bar{y}_2(t)$, con condiciones iniciales distintas,

$$\|\bar{y}_1(t_0) - \bar{y}_2(t_0)\| < \delta,$$

entonces

$$\lim_{t\to\infty} \|\bar{y}_1(t) - \bar{y}_2(t)\| = +\infty,$$

con lo que sus soluciones son inestables.

Las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x \end{cases}$$

son circunferencias concéntricas de centro $(0,0)$. Por tanto, sus soluciones son estables pero no asintóticamente estables.

- **Autónomos:** $\bar{y}' = F(\bar{y})$,
- **Forzados:** $\bar{y}' = F(t, \bar{y})$.

Consideremos un sistema no autónomo,

$$\bar{y}' = A\bar{y} + \bar{b}(t),\ A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$$

y supongamos que su sistema autónomo asociado

$$\bar{y}' = A\bar{y}$$

es asintóticamente estable. Entonces toda solución satisface

$$\bar{y}_h(t) = Ce^{At}, C \in \mathbb{R}^n, \lim_{t\to\infty} \bar{y}_h(t) = 0.$$

Dado que toda solución del sistema completo es de la forma $\bar{y}(t) = \bar{y}_h(t) + \bar{y}_p(t)$, ($\bar{y}_p(t)$ solución particular del sistema completo), al tomar límites resulta

$$\bar{y}(t) \approx \bar{y}_p(t).$$

Consideremos el sistema lineal no homogéneo

$$\bar{y}(t) = A\bar{y}(t) + \bar{b}(t),\ t \in \mathbb{R}.$$

Dada una solución $\phi(t)$ del sistema completo, el cambio de variable $\bar{z} = \bar{y} - \phi$,

$$\begin{aligned} \bar{z}'(t) &= \bar{y}'(t) - \phi'(t) \\ &= A\bar{y}(t) - A\phi(t) \\ &= A\bar{z}(t), \end{aligned}$$

transforma el sistema en homogéneo.

Diagonalización

Teorema 1.1

Si los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ de una matriz A de tamaño $n \times n$ son reales y distintos, entonces el conjunto de sus correspondientes vectores propios $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ forman una base de $\mathbb{R}^n$, la matriz P cuyas columnas son los vectores propios es invertible y $P^{-1}AP = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

- La transformación $\bar{x} = P^{-1}\bar{y}$ transforma el sistema lineal $\bar{y}' = A\bar{y}$ en uno desacoplado.
- La solución de $\bar{y}' = A\bar{y}$ es

$$\bar{y}(t) = P\ diag(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t})\ P^{-1}\ \bar{y}(0).$$

¿Cómo podemos expresar las soluciones de otros sistemas lineales de ED mediante funciones exponenciales?

Sea el operador lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, la convergencia en $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ se define a partir de la norma operador de T,

$$\|T\| = \max_{\|x\|_2 \leq 1} \|T(x)\|_2, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Dados $S, T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$,

(a) $\|T\| \geq 0$ y $\|T\| = 0 \Leftrightarrow T = 0$

(b) $\|kT\| = |k|\|T\|$, $k \in \mathbb{R}$

(c) $\|S + T\| \leq \|S\| + \|T\|$

Una sucesión de operadores lineales $T_k \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ se dice que converge al operador lineal $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ cuando $k \to \infty$,

$$\lim_{k \to \infty} T_k = T,$$

si para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $k \geq N$, se cumple $\|T - T_k\| < \epsilon$.

Lema 1.1

Dados $S, T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$,

(1) $\|T(x)\|_2 \leq \|T\| \; \|x\|_2$

(2) $\|TS\| \leq \|T\| \; \|S\|$

(3) $\left\|T^k\right\| \leq \|T\|^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Teorema 1.2

Dado $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $t_0 > 0$, la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{T^k t^k}{k!},$$

es absoluta y uniformemente convergente para todo $t \in \mathbb{R}$ tal que $|t| \leq t_0$

La exponencial de un operador lineal T se define mediante la serie absolutamente convergente

$$e^T = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{T^k}{k!}.$$

- $\left\| e^T \right\| \leq e^{\|T\|}$
- En el contexto del sistema $x' = Ax$, el operador lineal $T(x) = Ax$ define

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k t^k}{k!}, \quad t \in \mathbb{R},$$

de la que se pueden calcular sus valores y vectores propios.

Proposición

Si $S, T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ y $S = PTP^{-1}$, entonces $e^S = Pe^T P^{-1}$.

Corolario 1.1

Si $P^{-1}AP = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, *entonces* $e^{At} = P\ diag(e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t})\ P^{-1}$

Proposición

Sean $S, T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tales que $ST = TS$, entonces $e^{S+T} = e^S e^T$.

Corolario 1.2

Si $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, *la inversa de la transformación lineal* e^T *es* $(e^T)^{-1} = e^{-T}$.

Corolario 1.3

Si $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, *entonces* $e^A = e^a \begin{bmatrix} \cos(b) & -\sin(b) \\ \sin(b) & \cos(b) \end{bmatrix}$.

Corolario 1.4

Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$, *entonces* $e^A = e^a \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

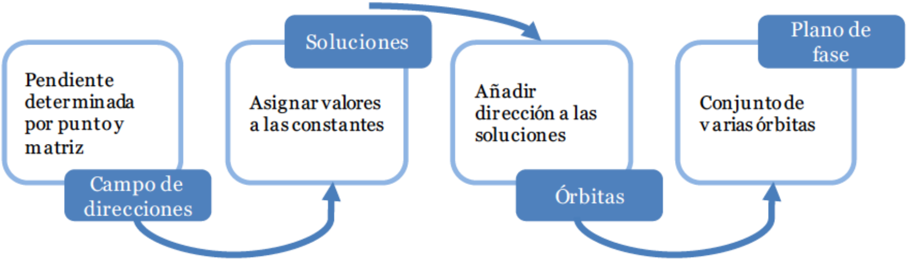
Teorema 1.3

Sea A *una matriz* $n \times n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. *El problema de valor inicial* $\bar{y}' = A\bar{y}$ *con condición inicial* $\bar{y}(0) = y_0$ *tiene solución única para todo* $t \in \mathbb{R}$,

$$\bar{y}(t) = e^{At} y_0.$$

Representaciones gráficas de sistemas planos

- Campo de direcciones
- Soluciones $\Rightarrow$ Curva parametrizada en el plano: para cada t se tiene un punto $(x(t), y(t))$
- Órbitas $\Rightarrow$ representan la dirección que sigue la solución cuando aumenta el tiempo
- Planos de fase $\Rightarrow$ para observar el comportamiento de un sistema para diferentes valores de las constantes



Sistema de n ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

$$\left.\begin{array}{rcl} y_1' & = & a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\ y_2' & = & a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n \\ & \vdots & \\ y_n' & = & a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{y}' = A\bar{y}$$

Sistemas lineales planos ($n = 2$)

$$\bar{y}' = A\bar{y}, \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

- $det(A) \neq 0 \Rightarrow$ un único punto de equilibrio
- $det(A) = 0$, con A no nula $\Rightarrow$ una línea de puntos de equilibrio

Sistemas en forma canónica

$$\boxed{\bar{y}' = A\bar{y}} \Leftrightarrow \boxed{\bar{x}' = B\bar{x}}, \quad \bar{y} = P\bar{x}, \quad B = P^{-1}AP$$

Formas canónicas: $B = \left\{ \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{bmatrix} \right\}$

- Caso 1: valores propios reales distintos

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

- Caso 2: valores propios reales iguales

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\bar{y}(t) = e^{At}y_0$$

- Caso 3: valores propios complejos

$$B = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{bmatrix}$$

Caso 1: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Solución de $\bar{y}' = A\bar{y}$

- Valores propios de A: λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$
- Vectores propios asociados: $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$
- Solución general:
$$\bar{y}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}\vec{v_1} + C_2 e^{\lambda_2 t}\vec{v_2}$$

Ejemplo

Obtén la solución del sistema: $\left\{ \begin{array}{lcl} y_1' & = & -2y_1 + y_2 \\ y_2' & = & y_2 \end{array} \right.$

- Matricialmente:
$$\bar{y'} = A\bar{y} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{y}$$

- Valores y vectores propios:
$$\lambda_1 = 1, \quad \vec{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \lambda_2 = -2, \quad \vec{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{y}(t) = C_1 e^{t} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + C_2 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} y_1(t) & = & C_1 e^{t} + C_2 e^{-2t} \\ y_2(t) & = & 3C_1 e^{t} \end{array} \right.$$

Caso 1: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

Existe un cambio de coordenadas $\bar{y} = P\bar{x}$ tal que $\bar{x}' = B\bar{x}$, $B = P^{-1}AP$

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{y}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v_1} + C_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v_2}$$

El origen es un punto silla

- Eje X: **variedad estable**

$$\bar{y}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad \lim_{t \to +\infty} \bar{x}(t) = 0$$

- Eje Y: **recta inestable**

$$\bar{y}(t) = C_2 e^{\lambda_2 t} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad \lim_{t \to +\infty} \bar{x}(t) = \infty$$

- Las demás combinaciones $C_1, C_2 \neq 0$ tienden a infinito

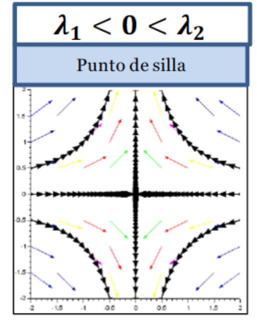


Figura: P. Silla: Campos de direcciones y planos de fase

Caso 1: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

Soluciones **estables**, el origen es un sumidero

- A es diagonal (o diagonalizable), nodo estable

$$\bar{y}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}\vec{v_1} + C_2 e^{\lambda_2 t}\vec{v_2}, \quad \lambda_1 < \lambda_2 < 0$$

$$\lim_{t \to +\infty} \phi(t) = 0, \forall \phi \text{ solución.}$$

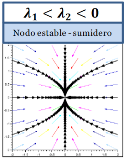


Figura: Sumidero: Campos de direcciones y planos de fase

$0 < \lambda_1 < \lambda_2$

Soluciones **inestables**, el origen es una fuente

- A es diagonal (o diagonalizable), nodo inestable

$$\bar{y}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}\vec{v_1} + C_2 e^{\lambda_2 t}\vec{v_2}, \quad 0 < \lambda_1 < \lambda_2$$

$$\lim_{t \to -\infty} \phi(t) = 0, \forall \phi \text{ solución.}$$

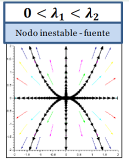


Figura: Fuente: Campos de direcciones y planos de fase

Caso 2.1: $B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$

- Cualquier $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ es vector propio asociado de $\lambda \in \mathbb{R}$
- Solución general de $\bar{y}' = A\bar{y}$:

$$\bar{y}(t) = Ce^{\lambda t}\vec{v}$$

El origen es un foco estable si $\lambda < 0$ y es un foco inestable si $\lambda > 0$.

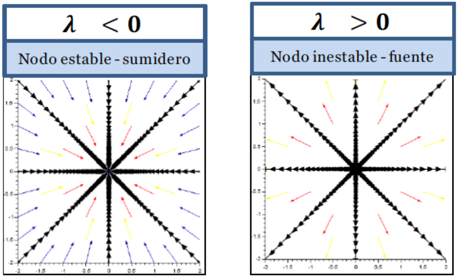


Figura: Focos: Campos de direcciones y planos de fase

Caso 2: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

Caso 2.1: $B = \left[\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right]$

- Cualquier $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ es vector propio asociado de $\lambda \in \mathbb{R}$
- Solución general de $\bar{y}' = A\bar{y}$:
$$\bar{x}(t) = Ce^{\lambda t}\vec{v}$$

El origen es un foco estable si $\lambda < 0$ y es un foco inestable si $\lambda > 0$.

Caso 2.2: $B = \left[\begin{smallmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right]$

Si A no es diagonalizable, existe un cambio de coordenadas $\bar{y} = P\bar{x}$ tal que $\bar{x}' = B\bar{x}$, $B = P^{-1}AP$

$$y(\bar{t}) = (C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t})\vec{v_1} + C_2 e^{\lambda t}\vec{v_2},$$

El origen es un nodo estable (impropio) si $\lambda < 0$

$$\lim_{t \to +\infty} \bar{x}(t) = 0,$$

y es un nodo inestable (impropio) si $\lambda > 0$,

$$\lim_{t \to -\infty} \bar{x}(t) = 0.$$

Caso 3: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\lambda_1 = \lambda_2^*$

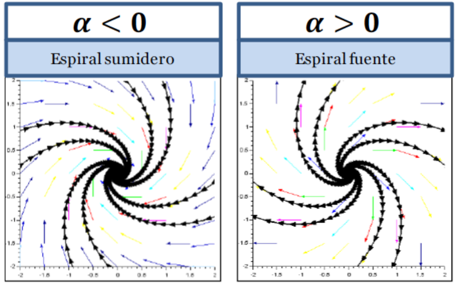
$\Re(\lambda_{1,2}) \neq 0$

Existe un cambio de coordenadas $\bar{y} = P\bar{x}$ tal que $\bar{x}' = B\bar{x}$, $B = P^{-1}AP$

$$B = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}, \quad e^{Bt} = e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \cos(t\beta) & -\sin(t\beta) \\ \sin(t\beta) & \cos(t\beta) \end{bmatrix}$$

$$\bar{y(t)} = e^{\alpha t}(C_1 \cos(t\beta) - C_2 \sin(t\beta))\vec{v_1} + (C_2 \cos(t\beta) + C_1 \sin(t\beta))\vec{v_2},$$

- Si $\alpha < 0$, $\lim_{t \to +\infty} \bar{x}(t) = 0$. El origen es una espiral sumidero.
- Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \to -\infty} \bar{x}(t) = 0$. El origen es una espiral fuente.



$\Re(\lambda_{1,2}) = 0$

Existe un cambio de coordenadas $\bar{y} = P\bar{x}$ tal que $\bar{x}' = B\bar{x}$, $B = P^{-1}AP$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{bmatrix}, \quad e^{Bt} = \begin{bmatrix} \cos(t\beta) & -\sin(t\beta) \\ \sin(t\beta) & \cos(t\beta) \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}(t) = (C_1 \cos(t\beta) - C_2 \sin(t\beta))\vec{v_1} + (C_2 \cos(t\beta) + C_1 \sin(t\beta))\vec{v_2},$$

- El origen es un centro.
- Todas las soluciones son periódicas con el mismo periodo, $\bar{y}\left(t + \dfrac{2\pi}{\beta}\right) = \bar{y}(t)$.
- Si $\beta < 0$, las flechas apuntan en la dirección de las agujas del reloj.

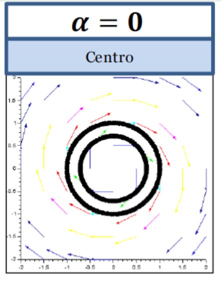


Figura: Centro: Campos de direcciones y planos de fase

Dado el sistema lineal plano $\bar{y}' = A\bar{y}$, el polinomio característico de A puede escribirse como

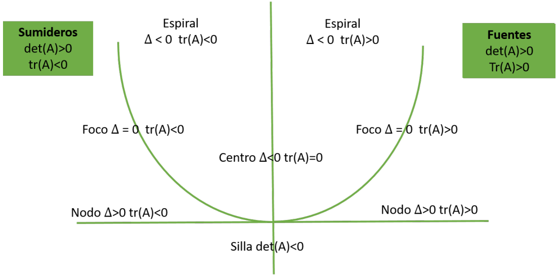
$$\lambda^2 - (tr(A))\lambda + det(A),$$

su discriminante Δ se define como

$$\Delta = (tr(A))^2 - 4det(A)$$

y los valores propios se obtienen como

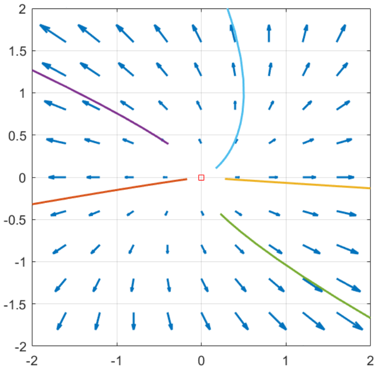
$$\frac{1}{2}(tr(A) \pm \sqrt{\Delta}).$$



Ejemplo:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & 2x-y \\ y' & = & 2y \end{array}\right. \Rightarrow A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=2,\ v_1=v_2=(1,0)^T$$

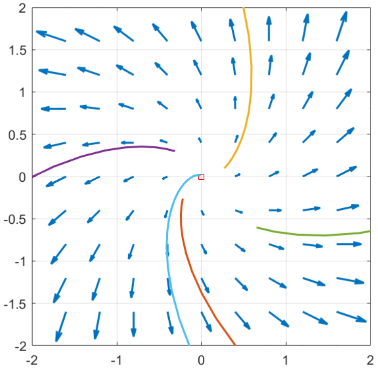
Nodo inestable impropio (foco inestable). Sólo hay una solución "de línea recta".



Ejemplo:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & 2x - y \\ y' & = & x + 2y \end{array} \right. \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \lambda_1 = 2 + i & , & v_1 = (0{,}70711, -0{,}70711i)^T \\ \lambda_2 = 2 - i & , & v_2 = (0{,}70711, +0{,}70711i)^T \end{array} \right.$$

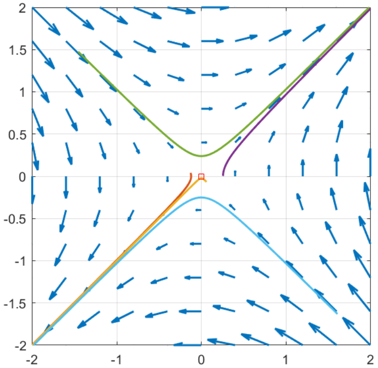
Espiral inestable.



Ejemplo:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & y \\ y' & = & x \end{array}\right. \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{ccc} \lambda_1 = -1 & , & v_1 = (-0{,}70711, 0{,}70711)^T \\ \lambda_2 = 1 & , & v_2 = (0{,}70711, 0{,}70711)^T \end{array}\right.$$

Punto silla.

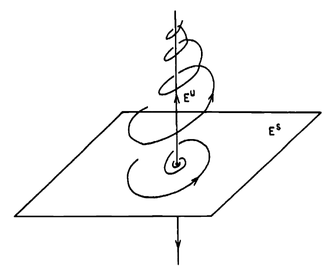


Consideremos el sistema lineal $\bar{y}' = A\bar{y}$. Sea $w_j = u_j + iv_j$ un vector propio de la matriz A correspondiente a cada valor propio $\lambda_j = a_j + ib_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$ (si $b_j = 0$, entonces $v_j = 0$). Sea $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_k, v_{k+1}, u_{k+1}, v_{k+2}, u_{k+2}, \ldots, v_m, u_m\}$ una base de $\mathbb{R}^n$ con $n = 2m - k$. Entonces:

- La variedad estable E^s del sistema lineal es el subespacio de $\mathbb{R}^n$ generado por los vectores u_j, v_j tales que $a_j < 0$.
- La variedad central E^c del sistema lineal es el subespacio generado por los vectores u_j, v_j tales que $a_j = 0$.
- La variedad inestable E^u del sistema lineal es el subespacio generado por los vectores u_j, v_j tales que $a_j > 0$.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \lambda_1 = -2 + i & \rightarrow & w_1 = [0,1,0]^T + i[1,0,0]^T \\ \lambda_2 = -2 - i & \rightarrow & w_1 = [0,1,0]^T - i[1,0,0]^T \\ \lambda_3 = 3 & \rightarrow & u_2 = [0,0,1]^T \end{array} \right.$$



Flujo de un sistema lineal, variedades invariantes

Consideremos el sistema lineal $\bar{y}' = A\bar{y}$, $\bar{y}(0) = \bar{y_0}$. Sabemos que su solución viene dada por :

$$\phi(t) = e^{At}\bar{y_0}.$$

- El conjunto de aplicaciones $e^{At} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se puede interpretar como el movimiento de $\bar{y_0}$ sobre trayectorias del sistema. A este conjunto de aplicaciones se le llama flujo del sistema lineal.
- Si todos los valores propios de la matriz A tienen parte real no nula, el flujo $e^{At} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ recibe el nombre de hiperbólico así como el sistema.
- Decimos que un subespacio $E \subset \mathbb{R}^n$ es invariante respecto al flujo $e^{At} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ del sistema si $e^{At}E \subset E$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Teorema

Sea A una matriz real de tamaño $n \times n$. Entonces

$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u \oplus E^c,$$

siendo E^s, E^u y E^c las variedades estable, inestable y central del sistema lineal $\bar{y}' = A\bar{y}$, respectivamente. Además, E^s, E^u y E^c son invariantes con respecto al flujo e^{At} del sistema lineal.

Dado el sistema lineal $\bar{y}' = A\bar{y}$, siendo A una matriz $n \times n$, denotaremos por $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ los valores propios de A con multiplicidades $m_1, m_2, \ldots, m_k$. Además, denotaremos por $d_1, d_2, \ldots, d_k$ las dimensiones sobre $\mathbb{C}$ de los subespacios propios $Ker(A - \lambda_1 I)$, $Ker(A - \lambda_2 I)$,...,$Ker(A - \lambda_k I)$.

Teorema

Sea el sistema lineal $\bar{y}' = A\bar{y}$, $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ no nula Entonces:

(a) El sistema es estable si $\Re(\lambda_i) \leq 0$, $1 \leq i \leq k$ y además si $\Re(\lambda_i) = 0$ entonces $d_i = m_i$.

(b) El sistema es asintóticamente estable si $\Re(\lambda_i) < 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, k$.

(c) El sistema es inestable si, o bien existe λ_j tal que $\Re(\lambda_j) = 0$ y $m_j > d_j$, o bien existe λ_j tal que $\Re(\lambda_j) > 0$.

$$\left\{\begin{array}{c} x' = -3x + 2y + 2z \\ y' = -2x + y + 2z \\ z' = -2x + 2y + z \end{array}\right. \qquad \text{valores propios: } \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1$$

sistema inestable.

$$\left\{\begin{array}{c} x' = -2x + y - z \\ y' = x - 2y - z \\ z' = -x + y - 2z \end{array}\right. \qquad \text{valores propios: } \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = -3$$

sistema asintóticamente estable.

Criterio del Círculo de Gershgorin

Sea A una matriz $n \times n$, con valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Entonces todos los valores propios están en el conjunto plano de la forma

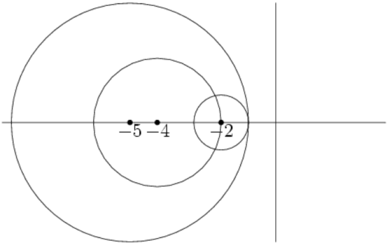
$$D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_n$$

siendo D_k los círculos de centro $(a_{kk}, 0)$ y radio $r_k = \sum_{j \neq k} |a_{kj}|$ para $j, k = 1, 2, \ldots, n$; es decir, $D_k = \left\{ x + iy \in \mathbb{C} \ : \ \sqrt{(x_k - a_{kk})^2 + y^2} < r_k \right\}$.

Ejemplo:

$$\left\{ \begin{array}{c} x' = -4x + y + z \\ y' = -2y + z \\ z' = 4y - 5z \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x,y) : \sqrt{(x+4)^2 + y^2} < 2\} \\ D_2 &= \{(x,y) : \sqrt{(x+2)^2 + y^2} < 1\} \\ D_3 &= \{(x,y) : \sqrt{(x+5)^2 + y^2} < 4\} \end{aligned}$$



Los valores propios tienen parte real negativa y el sistema es asintóticamente estable.

Ejemplos: cadena alimenticia

Ecosistema árboles-alces-lobos

$$
\begin{aligned}
x' &= x(1-x) - xy,\\
y' &= y(1-y) + xy - yz,\\
z' &= z(1-z) + yz.
\end{aligned}
$$

¿La cantidad de árboles depende de la cantidad de lobos?

Dado el sistema no lineal

$$\bar{y}' = F(\bar{y})$$

con punto de equilibrio (hiperbólico) $x^* \in \mathbb{R}^n$, el sistema lineal asociado es:

$$\bar{y}' = F'(x^*)\bar{y}$$

donde $F'(x^*)$ es la matriz Jacobiana de F evaluada en x^*:

$$F'(x^*) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^*) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(x^*) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(x^*) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(x^*) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(x^*) & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}(x^*) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(x^*) & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2}(x^*) & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}(x^*) \end{bmatrix}$$

Punto de equilibrio hiperbólico

Un punto de equilibrio es hiperbólico si el sistema lineal asociado no tiene valores propios con parte real nula.

Estabilidad de los puntos de equilibrio

- **Punto de equilibrio hiperbólico:** el comportamiento de las soluciones en un entorno del punto de equilibrio es semejante al comportamiento de las soluciones del sistema lineal asociado

  $\Rightarrow$ Estabilidad a partir del sistema linealizado:
  - $Re(\lambda_i) < 0, \forall i \Rightarrow$ nodo estable o sumidero
  - $Re(\lambda_i) > 0, \forall i \Rightarrow$ nodo inestable o fuente
  - Existen valores propios λ_i, λ_j con $Re(\lambda_i) > 0$ y $Re(\lambda_j) < 0 \Rightarrow$ punto de silla

- **Punto de equilibrio no hiperbólico:** no podemos afirmar nada

  $\hookrightarrow$ Estabilidad de Lyapunov

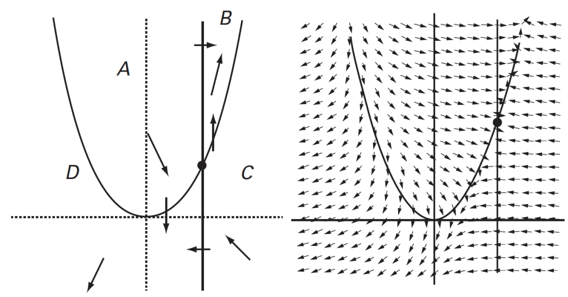
Nulclinas

- **x-nulclina:** $x' = 0$
- **y-nulclina:** $y' = 0$

Permiten separar el plano en regiones donde los vectores del campo de direcciones tienen una misma dirección.

Ejemplo 4. (cont.) $\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & y - x^2 \\ y' & = & x - 2 \end{array} \right.$

- Punto de equilibrio: $x^* = (2, 4)^T$
- x-nulclina: $y = x^2$
- y-nulclina: $x = 2$
- Determinar en cada región (A, B, C o D) la dirección de los vectores del campo de direcciones



Ejemplo: $\left\{\begin{array}{lll} x' & = & y-x^2 \\ y' & = & x-2 \end{array}\right.$

- Punto de equilibrio: nulclinas

$$\left.\begin{array}{r} y-x^2=0 \\ x-2=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x=2, y=4 \quad \Rightarrow \quad x^*=(2,4)^T$$

- Matriz Jacobiana:

$$F'(\bar{y}) = \begin{bmatrix} -2x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Sistema linealizado:

$$\bar{y}' = F'(x^*)\bar{y} \quad \Rightarrow \quad \bar{y}' = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \bar{y}$$

- Valores propios: $\lambda_1 = -2-\sqrt{5}$, $\lambda_2 = -2+\sqrt{5}$
- x^* es un punto de silla

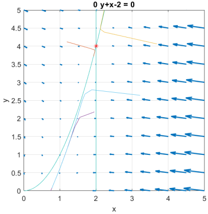


Diagrama de fases no lineal

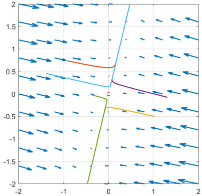


Diagrama de fases linealizado

Ejemplo: $\begin{cases} x' &= x + y^2 \\ y' &= -y \end{cases}$

- Punto de equilibrio: $x^* = (0,0)^T$
- Sistema linealizado: $\bar{y}' = F'(x^*)\bar{y}$

$$F'(\bar{y}) = \begin{bmatrix} 1 & 2y \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad F'(x^*) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- Valores y vectores propios:

$$\lambda_1 = 1, \vec{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \lambda_2 = -1, \vec{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- El origen es un punto de silla

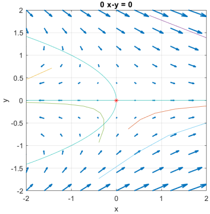


Diagrama de fases no lineal

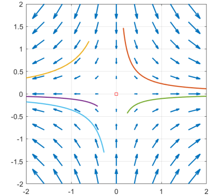
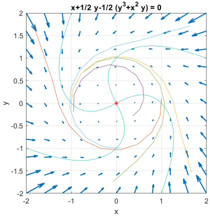


Diagrama de fases linealizado

Ejemplo:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & \frac{1}{2}x - y - \frac{1}{2}(x^3 + y^2 x) \\ y' & = & x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}(y^3 + x^2 y) \end{array} \right. \Rightarrow \text{Linealización}$$



- Punto de equilibrio: $x^* = (0,0)^T$
- Sistema linealizado:

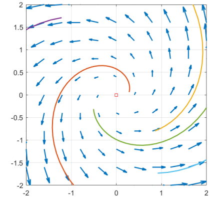
$$F'(\bar{y}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 & -1 - xy \\ 1 - xy & \frac{1}{2} - \frac{3}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 \end{bmatrix} \Rightarrow F'(x^*) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Diagrama de fases no lineal

- Valores propios:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} - i, \qquad \lambda_2 = \frac{1}{2} + i$$

- El centro es una espiral fuente



Diagrama

Ecosistema árboles-alces-lobos

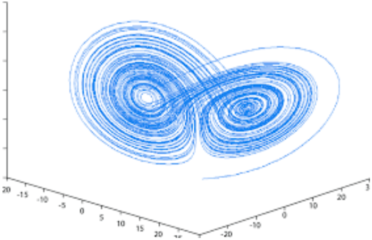
$$
\begin{aligned}
x' &= x(1-x) - xy, \\
y' &= y(1-y) + xy - yz, \\
z' &= z(1-z) + yz.
\end{aligned}
$$

¿La cantidad de árboles depende de la cantidad de lobos?

Atractor de Lorentz

$$
\begin{aligned}
x' &= 10(y-x),\\
y' &= 28x - y - xz,\\
z' &= -8/3z + xy.
\end{aligned}
$$

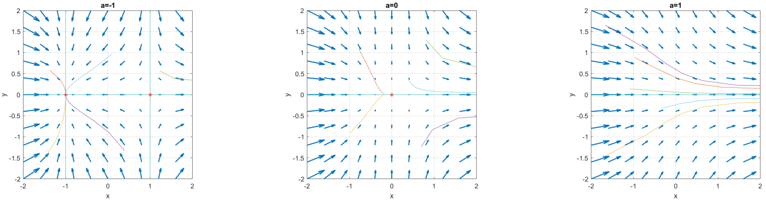
¿Qué podemos deducir de la estabilidad de sus soluciones?



Ejemplo:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & x^2+a,\ \ a\in\mathbb{R} \\ y' & = & -y \end{array}\right. \Rightarrow \text{Puntos de equilibrio dependientes de } a$$

- si $a<0$, $x^* = (\pm\sqrt{-a},0)^T$
- si $a=0$, $x^* = (0,0)^T$
- si $a>0$, no hay puntos de equilibrio



Diagramas de fases no lineales (i) $a=-1$, (ii) $a=0$, (iii) $a=1$

Teorema de estabilidad de Liapunov

Sea x^* un punto de equilibrio de $\bar{y}' = F(\bar{y})$, donde $F : D \to \mathbb{R}^n$ es de clase $\mathcal{C}^1$ en el conjunto abierto $D \subset \mathbb{R}^n$. Sea $L : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una función diferenciable definida en un conjunto abierto $\Omega \subset D$ que contiene a x^*, diferenciable en $\Omega \setminus \{x^*\}$. Supongamos además que

(a) $L(x^*) = 0$ y $L(\bar{x}) > 0$ si $\bar{x} \neq x^*$;

(b) $\dfrac{dL}{dt} \leq 0$ en $\Omega \setminus \{x^*\}$;

Entonces x^* es un punto de equilibrio **estable**. Si además, L satisface

(c) $\dfrac{dL}{dt} < 0$ en $\Omega \setminus \{x^*\}$,

entonces x^* es un punto de equilibrio **asintóticamente estable**. Finalmente,

(d) si $\dfrac{dL}{dt} > 0$ en $\Omega \setminus \{x^*\}$, entonces x^* es un punto de equilibrio **inestable**.

La función L que satisface las condiciones (a) y (b) se denomina **función Lyapunov** de x^*. Si L también satisface la condición (c) o (d), se denomina **función Lyapunov estricta** de x^*.

- Función de Lyapunov: ensayo y error.
- Sistemas mecánicos o eléctricos: función energía total.

Ejemplo

$$\begin{cases} x' &= y - x(x^2+y^2) \\ y' &= -x - y(x^2+y^2) \end{cases}$$

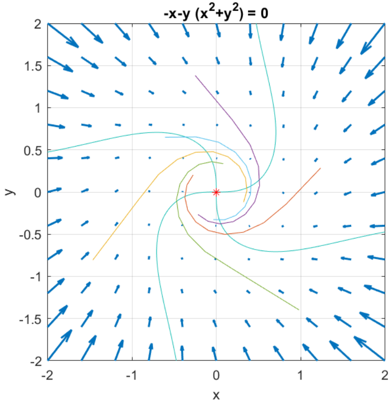
- Punto de equilibrio: $x^* = (0,0)^T$. Sistema lineal asociado:

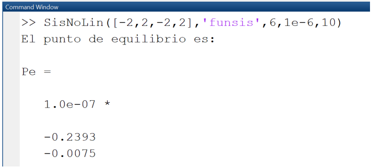
$$\bar{y}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \bar{y}$$

- Valores propios: $\lambda_1 = -i$, $\lambda_2 = i$
- $\Re(\lambda_1) = \Re(\lambda_2) = 0 \Rightarrow$: x^* no es un punto de equilibrio hiperbólico.
- Consideremos una función de la forma: $L(x,y) = ax^2 + by^2$, $a, b > 0$
  - (a) $L(x^*) = 0$ y $L(\bar{x}) > 0$, $\bar{x} \neq x^*$
  - (b) $\dfrac{dL}{dt} \leq 0$ en $\Omega \setminus \{x^*\}$:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= 2axx' + 2byy' = 2ax(y - x(x^2+y^2)) + 2by(-x - y(x^2+y^2)) \\ &= -(2ax^2 + 2by^2)(x^2+y^2) + xy(2a-2b) \underset{a=b=\frac{1}{2}}{=} -(x^2+y^2)^2 < 0 \end{aligned}$$

L es una función de Lyapunov y x^* es un punto de equilibrio asintóticamente estable.





¡Ojo con el error de redondeo!

Ejemplo 6.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & (\phi x + 2y)(z+1) \\ y' & = & (-x + \phi y)(z+1) \\ z' & = & -z^3 \end{array}\right.$$

- Punto de equilibrio: $x^* = (0,0,0)^T$
- Sistema lineal asociado:

$$\bar{y}' = \begin{bmatrix} \phi & 2 & 0 \\ -1 & \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{y}$$

- Valores propios: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \phi - i\sqrt{2}$, $\lambda_2 = \phi + i\sqrt{2}$.
- $Re(\lambda_1) = 0$, $Re(\lambda_2) = Re(\lambda_3) = \phi$
- x^* es un punto de equilibrio no hiperbólico
- Estabilidad:
  - Si $\phi > 0 \Rightarrow$ el origen es inestable.
  - Si $\phi \leq 0 \Rightarrow$ función de Lyapunov

  Consideremos la función $L(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2$, $a, b, c > 0$.

Referencias

- W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis, McGraw Hill, New York, 1964.
- M.W. Hirsch, S. Smale, R.L. Devaney, Differential equations, dynamical systems and an introduction to Chaos. Ed. Elsevier, Amsterdan, 2004.
- G.F. Simmons, Ecuaciones diferenciales. Con aplicaciones y notas históricas, Ed. McGraw-Hill, 1991.
- L. Perko, Differential Equations and Dynamical Systems, Ed. Springer-Verlag, 1991.
- P. Blanchard, R.L. Devaney, G.R. Hall, Ecuaciones diferenciales, Ed, Thomson, México, 1998.