

Tema 4: Introducción. Ecuaciones en derivadas parciales de primer orden

Resolución numérica de ecuaciones en derivadas parciales

Alicia Cordero, Juan R. Torregrosa



- ➊ Preliminares
- ➋ Clasificación de las EDP
- ➌ Solución de una EDP
- ➍ Ecuaciones de la Física Matemática
- ➎ Clasificación de las EDPs lineales de segundo orden
- ➏ Diferencias finitas. Convergencia y estabilidad
- ➐ Convergencia y Estabilidad
- ➑ Problemas de contorno de primer orden
 - Método de Lax-Friedrichs
 - Estabilidad de Von Neumann
 - Método de Lax-Wendroff
 - Método de Crank-Nicolson

- ✓ El estudio de las **Ecuaciones en Derivadas Parciales** (EDP) se inició en el siglo XVIII con los trabajos de los suizos d'Alembert y Euler y los franceses Lagrange y Laplace.
- ✓ Las EDPs aparecieron por primera vez en el contexto de la modelización matemática de fenómenos de la Física del Medio Continuo.
- ✓ En la actualidad, permiten modelizar numerosos problemas físicos, de mecánica de fluidos, de elasticidad, aerodinámicos, de ondas de cualquier tipo, de convección-difusión, distribución de calor, potencial, problemas de economía (**Modelos de Black-Scholes**), campos electromagnéticos (**Ecuaciones de Maxwell**), Astronomía, Electricidad, ...
- ✓ De manera imprecisa, una EDP es una ecuación que involucra una función desconocida $u(x, y, \dots)$ que depende al menos de dos variables independientes y algunas de sus derivadas parciales.
- ✓ Llamamos **orden de la EDP** al mayor de los órdenes de las derivadas parciales que aparecen en la ecuación.
- ✓ La EDP suele ir acompañada de **condiciones de contorno** y/o **condiciones iniciales**.

- ✓ A diferencia de lo que sucede con las EDOs, no existe una teoría general de EDPs, ni siquiera para las ecuaciones de segundo orden que son las más estudiadas. La investigación en este campo se centra en el desarrollo de teorías particulares aplicables a determinados "tipos" de EDPs que aparecen en la Física, Ingeniería, Ciencias Naturales, Matemáticas, ...

Ecuación de primer o segundo orden

Sea $N \geq 1$ un número natural. Una EDP de primer orden o segundo orden en las N variables independientes x_1, x_2, \dots, x_N , es cualquier expresión de la forma

$$G(x_1, \dots, x_N, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_N}) = 0,$$

ó

$$F(x_1, \dots, x_N, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_N}, u_{x_1^2}, \dots, u_{x_i x_j}, \dots, u_{x_N^2}) = 0,$$

donde $u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, $u_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$, $\forall i, j$, F y G son funciones continuas en un abierto Ω y u es la función incógnita o variable dependiente de x_1, x_2, \dots, x_N .

Notación habitual utilizada en los libros sobre EDP:

1 Variables $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, $u = u(x)$

2 $\nabla u = Du = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right) = (u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_N})$

3 Sea $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$ un vector de N componentes de números naturales.

a) $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N$

b) $D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}$

4 Dado un entero no negativo k ,

$$D^k u = \{D^\alpha u, \forall \alpha : |\alpha| = k\}$$

5 Una EDP de orden $p \in \mathbb{N}$, con N variables independientes $x \in \mathbb{R}^N$, tiene como expresión general

$$F(x, u, Du, \dots, D^p u) = 0.$$

Con esta notación, una EDP de segundo orden se escribe

$$F(x, u, Du, D^2 u) = 0.$$

- a) $2xu_x - y = 2u_y - u$. Ecuación de primer orden con x e y como variables independientes y $u(x, y)$ función incógnita.
- b) $\sqrt{x}u_{yy} - uu_x + \ln y - u_{xyy} = 0$. Ecuación de tercer orden con x e y como variables independientes y $u(x, y)$ función incógnita.
- c) **Operador de Laplace** $\nabla^2 u = \Delta u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$. Ecuación de Laplace-Poisson en tres dimensiones

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = e^{-x} \sin yz, \quad \text{o bien,} \quad \Delta u = e^{-x} \sin yz.$$

- d) EDP de segundo orden con condiciones de contorno

$$u_{xy} - u_y = 1, \quad u_y(0, y) = \sin y, \quad u(x, 0) = 0, \quad x, y \in [0, 1].$$

- e) EDP de segundo orden con condiciones de contorno e iniciales: Ecuación del telégrafo

$$u_{tt} + u_t + 2u = u_{xx}, \quad x \in [0, 1], \quad t \geq 0,$$

con las condiciones $u(0, t) = u(1, t) = 0$, $u(x, 0) = \sin(\pi x)$, $u_t(x, 0) = 0$.

□ **Ecuaciones lineales.** Una EDP de orden k es lineal si se expresa de la forma

$$\sum_{|\alpha| \leq k} C_\alpha(x) D^\alpha u = f(x), \quad x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^N.$$

Para una ecuación de segundo orden

$$\sum_{i,j=1}^N c_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^N b_i(x) u_{x_i} + c(x) u = f(x).$$

Si $f(x) = 0$, entonces **EDP lineal homogénea**.

Si $c_{ij}(x)$, $b_i(x)$ y $c(x)$ son constantes, entonces **EDP lineal con coeficientes constantes**.

Ejemplos

- $2xu_{xy} - u_x + y^2u_y - u = x + y$,
- $utt = u_{xx} + u_{yy} + \cos t \sin xy$,
- $u_x + \ln(xy)u_y = 0$.

□ **Ecuaciones semilineales.** Una EDP de orden k es semilineal si se expresa de la forma

$$\sum_{|\alpha| \leq k} C_\alpha(x) D^\alpha u = f(x, u), \text{ (o bien } f(x, (D^\beta u)_{|\beta| \leq k-1}),$$

es decir, si es lineal en las derivadas de mayor orden y no lineal en alguna de las otras.
Para una ecuación de segundo orden

$$\sum_{i,j=1}^N c_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^N b_i(x) u_{x_i} = f(x, u),$$

o bien

$$a(x, y) u_{xx} + b(x, y) u_{xy} + c(x, y) u_{yy} = d(x, y, u, u_x, u_y).$$

Ejemplos

- $2xu_{xy} - u_x - u^2 = xy,$
- $\sin x \sin y u_{xx} + u_{yy} - \cos u = 0,$
- $u_{xxy} - u_y + u_{yy} - \sqrt{u} = e^{-xy},$
- $e^{xy} u_{xy} + 5u_{yy} + u_x^2 + \sin u = 0$

□ **Ecuaciones cuasilineales.** Una EDP de orden k es cuasilineal si se expresa de la forma

$$\sum_{|\alpha|=k} C_{\alpha}(x, (D^{\beta}u)_{|\beta|\leq k-1}) D^{\alpha}u = f(x, (D^{\beta}u)_{|\beta|\leq k-1}),$$

Para una ecuación de segundo orden

$$\sum_{i,j=1}^N c_{ij}(x, u, Du) u_{x_i x_j} = f(x, u, Du).$$

Ejemplos

- $2xuu_{xy} - (u_x)^2 - u^2 = xy,$
- $A(x, y, u_x, u_y, u)u_{xx} + B(x, y, u_x, u_y, u)u_{xy} + C(x, y, u_x, u_y, u)u_{yy} = D(x, y, u_x, u_y, u),$
- $A(x, y, u)u_x + B(x, y, u)u_y = C(x, y, u).$

$$\{EDP \text{ lineales}\} \subset \{EDP \text{ semilineales}\} \subset \{EDP \text{ cuasilineales}\}$$

Solución

Dada la EDP de orden k , $F(x, (D^\alpha u)_{|\alpha| \leq k}) = 0$, definida en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, una función $u \in \mathcal{C}^{(k)}(\Omega)$ es solución si satisface la EDP para todo $x \in \Omega$.

Debe satisfacer también las condiciones iniciales y de contorno si las hubiere.

Ejemplos

- La EDP $e^{u_y} = -1$ no tiene ninguna solución.
- Consideremos la ecuación de Laplace en \mathbb{R}^2 , $u_{xx} + u_{yy} = 0$. Cualquier función de la forma $u(x, y) = ax + by + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$, es solución de esta EDP en todo \mathbb{R}^2 .
- Para la ecuación de ondas unidimensional $u_{xx} - u_{tt} = 0$, las funciones de la forma $u(x, t) = ax + bt + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$, son soluciones en todo \mathbb{R}^2 .
También las funciones

$$u(x, t) = f(x + t) + g(x - t), \quad \forall f, g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}),$$

son soluciones de la ecuación de ondas.

- $u_{xx} = 0$. Las funciones $u(x, y) = f(y)x + g(y)$, $\forall f, g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, son soluciones de la EDP.
- La función $u(x, y) = xy - \frac{1}{3}x^3 + \cos(y - x^2/2)$ es la única solución de la EDP de primer orden $u_x + xu_y = y$, con la condición $u(0, y) = \cos y$, $\forall y \in \mathbb{R}$.

Significado geométrico de la solución

Consideremos la EDP de segundo orden en dos variables

$$F(x, y, u, Du, D^2u) = 0.$$

Supongamos que $u(x, y) = P(x, y) + \phi(y) + \varphi(x)$ es la solución general, para $\phi(y)$ y $\varphi(x)$ funciones arbitrarias. Para cada elección particular de $\phi(y)$ y $\varphi(x)$, la solución la podemos expresar como $z = f(x, y)$, lo que se interpreta como una **superficie** en el sistema cartesiano XYZ .

Para funciones arbitrarias $\phi(y)$ y $\varphi(x)$, obtenemos una familia de superficies cada miembro de la cual corresponde a una selección particular de $\phi(y)$ y $\varphi(x)$, esto es, una solución particular.

- ✓ Observemos la analogía con las EDO's en las que la solución general con constantes arbitrarias -en vez de funciones- representa una familia de curvas, donde cada miembro de ella corresponde a una solución particular.
- ✓ Estas ideas se pueden generalizar a los casos donde hay mas de dos variables independientes. Así por ejemplo, tendríamos que una solución $u(x, y, z)$ de una EDP de tres variables la podríamos interpretar geométricamente como la **Hipersuperficie** $p = u(x, y, z)$ en 4 dimensiones.

La ecuación

$$u_{tt} - c^2 \nabla^2 u = f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0,$$

es la **ecuación de ondas** N -dimensional.

Permite describir fenómenos ondulatorios de cualquier índole, caracterizados por la propagación de señales con velocidad finita. Por ejemplo, cuando $N = 1$, permite determinar las vibraciones de una cuerda elástica (siempre que éstas sean de pequeña amplitud)

- **Ecuación de ondas unidimensional**

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x, t),$$

- **Ecuación de ondas bidimensional**

$$u_{tt} = c^2 (u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y, t),$$

- **Ecuación de ondas en \mathbb{R}^N**

$$u_{tt} = c^2 (u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + \cdots + u_{x_N x_N}) + f(x_1, x_2, \dots, x_N, t).$$

- Cuerda vibrante no acotada

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

con las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) &= u_1(x), & x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

La cuerda es "infinita", no interesa la posición de los extremos y nos dan la posición y velocidad inicial de todos los puntos de la cuerda.

- Cuerda vibrante acotada

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x, t), \quad x \in]0, L[, \quad t > 0,$$

con las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0(x), & x \in [0, L], \\ u_t(x, 0) &= u_1(x), & x \in [0, L], \end{aligned}$$

y las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} u(0, t) &= v_0(t), & t \geq 0, \\ u(L, t) &= v_1(t), & t \geq 0. \end{aligned}$$

Ecuación de difusión del calor

La ecuación

$$u_t - k\nabla^2 u = f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0,$$

es la **ecuación del calor** N -dimensional.

Es frecuente encontrar esta ecuación cuando se intenta describir el comportamiento de fenómenos difusivos, es decir, ligados a una propagación rápida (o instantánea) de la variable dependiente. Por ejemplo, supongamos que sobre un cuerpo conductor de calor actúa una fuente de calor $f = f(x, y, z, t)$, durante el intervalo temporal $(0, T)$. Entonces, bajo determinadas condiciones, la temperatura del cuerpo verifica la ecuación del calor, para una constante positiva k (la conductividad del medio).

- **Ecuación del calor unidimensional** (Barra metálica)

$$u_t = ku_{xx} + f(x, t),$$

- **Ecuación del calor bidimensional** (Lámina metálica rectangular)

$$u_t = k(u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y, t),$$

- **Ecuación del calor en \mathbb{R}^N**

$$u_t = c^2(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + \cdots + u_{x_Nx_N}) + f(x_1, x_2, \dots, x_N, t).$$

- Barra no acotada

$$u_t = ku_{xx} + f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

con la condición inicial

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Barra acotada

$$u_t = ku_{xx} + f(x, t), \quad x \in]0, L[, \quad t > 0,$$

con la condición inicial

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [0, L].$$

y las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} u(0, t) &= v_0(t), & t &\geq 0, \\ u(L, t) &= v_1(t), & t &\geq 0. \end{aligned}$$

La ecuación

$$\nabla^2 u = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

se denomina **ecuación de Poisson**. Cuando $f \equiv 0$, recibe el nombre de **ecuación de Laplace**. Ambas ecuaciones aparecen con frecuencia en Física, Química, Biología, etc, cuando se intenta describir el comportamiento de fenómenos estacionarios, esto es, independientes del tiempo. Por ejemplo, el campo eléctrico generado en un medio que ocupa el abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ por una distribución de carga $f(x)$, está dado por $E = -\nabla u$, donde u es solución de

$$-\nabla^2 u = \frac{1}{\alpha} f(x), \quad x \in \Omega,$$

siendo α una constante positiva adecuada.

Esta ecuación se podría denominar también **ecuación estacionaria del calor**. Se llega un instante en el que las temperaturas se estabilizan $u_t(x, t) = 0$, obteniendo la ecuación descrita.

Las ecuaciones anteriores son modelos de los tres grandes grupos en que se clasifican las EDPs lineales de segundo orden.

- La ecuación del calor es modelo de las llamadas **ecuaciones parabólicas**,
- La ecuación de ondas es modelo de las **ecuaciones hiperbólicas**,
- La ecuación de Laplace-Poisson es modelo de las **ecuaciones elípticas**.

Cuando las ecuaciones modelizan fenómenos en medios heterogéneos, adoptan formas más complejas y en particular presentan **coeficientes variables**, dependientes de x , de t o de ambos.

Se suele decir que las ecuaciones parabólicas e hiperbólicas son **ecuaciones de evolución** y que las ecuaciones elípticas son **ecuaciones estacionarias**.

Hay otras muchas ecuaciones de interés desde el punto de vista de las aplicaciones, que en buena parte son variantes de las anteriores. Así, el operador del calor suele estar presente en la dinámica de fluidos y en los fenómenos de difusión y el operador de ondas aparece en elasticidad y en la propagación de ondas acústicas y electromagnéticas. Otras veces aparecen sistemas acoplados con todas las componentes del mismo tipo o con componentes parabólicos e hiperbólicos (p.ej., el sistema de la termoelasticidad).

No debemos olvidar los numerosos fenómenos modelizados por **EDP no lineales** para las que, en general, no existen técnicas analíticas de resolución y debemos recurrir a los procedimientos numéricos con **diferencias finitas** o **elementos finitos**.

Clasificación de las EDPs lineales de segundo orden

Consideremos la EDP lineal de segundo orden

EDPL2

$$A(x, y)u_{xx} + B(x, y)u_{xy} + C(x, y)u_{yy} + D(x, y)u_x + E(x, y)u_y + F(x, y)u = G(x, y),$$

definida en una región $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Diremos que la ecuación es

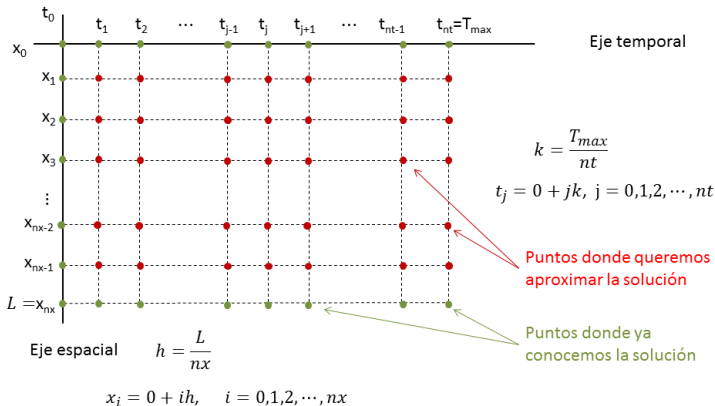
1. **Hiperbólica** en Ω si $\Delta = B^2 - 4AC > 0$ para todo punto de Ω ,
2. **Parabólica** en Ω si $\Delta = B^2 - 4AC = 0$ para todo punto de Ω ,
3. **Elíptica** en Ω si $\Delta = B^2 - 4AC < 0$ para todo punto de Ω .

Ejemplos

- ◇ Las ecuaciones $u_{xx} = u_{yy}$ y $u_{xy} = 0$ son hiperbólicas en cualquier región de \mathbb{R}^2 .
- ◇ La ecuación $u_x = u_{yy} + e^{-xy}$ es parabólica en cualquier región de \mathbb{R}^2 .
- ◇ La ecuación $u_{xy} - 2u_{xx} - 3u_{yy} = \sin xy$ es elíptica en cualquier región de \mathbb{R}^2 .
- ◇ La ecuación $yu_{xx} + y_{yy} = 0$ es
 - Elíptica en el semiplano $y > 0$,
 - Parabólica en la recta $y = 0$,
 - Hiperbólica en el semiplano $y < 0$.

Diferencias finitas

La solución numérica de EDPs mediante **diferencias finitas** consiste en transformar el problema en **sistemas de ecuaciones** lineales o no lineales, cuyas incógnitas son valores aproximados de la solución de la EDP en los puntos elegidos en el dominio espacial y temporal. La solución de estos sistemas se puede llamar **solución discreta aproximada**



Discretización

Proceso por el que cualquier **ecuación en derivadas parciales** se convierte en una **ecuación en diferencias**. Éstas suelen ser sistemas lineales o no lineales.

Los métodos en diferencias finitas suelen ser de dos tipos:

- ☐ Métodos explícitos
 - Sencillos y fáciles de implementar
 - Inestables
 - Requieren condiciones de convergencia
- ☐ Métodos implícitos
 - Más complejos
 - Estables
 - Sin condiciones de convergencia

Cuando trabajamos en un dominio regular (en general, rectángulo, cubo, ...) los resultados proporcionados por los métodos en diferencias finitas son satisfactorios. Cuando se trabaja con dominios no regulares la técnica que se utiliza es la de **elementos finitos**.

Es sencillo extender las diferencias finitas de una variable a varias variables, utilizando desarrollos de Taylor.

- **Diferencia progresiva** $u_x(x, t) \approx \frac{u(x+h, t) - u(x, t)}{h}$, $u_t(x, t) \approx \frac{u(x, t+k) - u(x, t)}{k}$
- **Diferencia regresiva** $u_x(x, t) \approx \frac{u(x, t) - u(x-h, t)}{h}$, $u_t(x, t) \approx \frac{u(x, t) - u(x, t-k)}{k}$
- **Diferencia central** $u_x(x, t) \approx \frac{u(x+h, t) - u(x-h, t)}{2h}$
- **Diferencia central** $u_{xx}(x, t) \approx \frac{u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)}{h^2}$

Si denotamos por $u_{i,j} = u(x_i, t_j)$, $i = 0, 1, 2, \dots, nx$, $j = 0, 1, 2, \dots, nt$, entonces

- **Diferencia progresiva** $u_x(x_i, t_j) \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h}$, $u_t(x_i, t_j) \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k}$
- **Diferencia regresiva** $u_x(x_i, t_j) \approx \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h}$, $u_t(x_i, t_j) \approx \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{k}$
- **Diferencia central** $u_x(x_i, t_j) \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h}$
- **Diferencia central** $u_{xx}(x_i, t_j) \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$

$U(x, t)$ solución exacta de la EDP y $u_{i,j}$ solución exacta de la ecuación en diferencias finitas $F(u_{i,j}) = 0$.

El esquema en diferencias finitas se dice que es **convergente** si

$$u_{i,j} \rightarrow U(x_i, t_j), \quad \text{cuando } h, k \rightarrow 0.$$

La diferencia

$$e_{i,j} = U_{i,j} - u_{i,j} = U(x_i, t_j) - u_{i,j},$$

recibe el nombre de **error de truncamiento o de discretización**.

En general, este error se minimiza a medida que los pasos h y k disminuyen. Sin embargo, no sólo depende de h y de k si no también en el número de términos en el truncamiento de la serie de Taylor.

Si la solución exacta del esquema en diferencias $u_{i,j}$ es reemplazada por $U_{i,j}$ en los puntos $P_{i,j}$, entonces el valor $F(U_{i,j})$ se llama error de truncamiento local en $P_{i,j}$.

El esquema en diferencias finitas se dice que es **consistente** si

$$F(U_{i,j}) \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad h, k \rightarrow 0.$$

No debemos olvidar el **error de redondeo**, que depende del tipo de ordenador. En la práctica, la solución computada es $u_{i,j}^*$ no $u_{i,j}$. El error de redondeo en el punto $P_{i,j}$ es

$$r_{i,j} = u_{i,j} - u_{i,j}^*.$$

Este error no se reduce cuando los pasos espacial y temporal tienden a cero, más bien se produce el efecto contrario.

El **error total** que aparece en un esquema en diferencias finitas en $P_{i,j}$ es

$$U_{i,j} - u_{i,j}^* = (U_{i,j} - u_{i,j}) + (u_{i,j} - u_{i,j}^*) = e_{i,j} + r_{i,j}.$$

Usualmente, el error de discretización $e_{i,j}$ está acotado cuando $u_{i,j}$ está acotada, ya que $U_{i,j}$ es fija para una EDP dada. Este hecho es asumido para introducir el concepto de estabilidad.

El esquema en diferencias finitas se dice que es estable si el error de redondeo es suficientemente pequeño para todo i, j tendiendo a $+\infty$, es decir, el crecimiento de $r_{i,j}$ está acotado.

Lax en 1954 estableció la siguiente relación entre estos conceptos.

Teorema de Lax

Dado un problema contorno-inicial modelizado por una EDP lineal y su correspondiente aproximación en diferencias finitas que satisfaga el criterio de consistencia, entonces estabilidad y convergencia son equivalentes.

Consideremos un esquema en diferencias finitas, cuya relación entre dos instantes, está expresada mediante

$$Bu^{(n+1)} = Eu^{(n)}, n = 0, 1, \dots, \quad B, E \text{ matrices cuadradas.}$$

Si B es invertible,

$$u^{(n+1)} = Mu^{(n)}, n = 0, 1, \dots, \quad M = B^{-1}E,$$

que, de forma recursiva se puede escribir

$$u^{(n+1)} = Mu^{(n)} = M^2u^{(n-1)} = \dots = M^{n+1}u^{(0)}.$$

Lax-Richtmyer establecieron el siguiente **criterio de estabilidad**

Un esquema en diferencias es estable si existe $C > 0$ (independiente de $h = \Delta x$ y de $k = \Delta t$) y r , números reales, tal que

$$\|M^n\| \leq C, \quad \forall n, \quad 0 \leq n\Delta t \leq T_f; \quad \forall \Delta t \leq r.$$

Se denomina **estabilidad fuerte** cuando $\|M\| \leq 1$.

Condición de von-Neumann

Se dice que un esquema en diferencias satisface la condición de von-Neumann si

$$\text{Existe } C' \in \mathbb{R} \text{ tal que } \rho(M) \leq 1 + C' \Delta t.$$

Proposición

El criterio de estabilidad de Lax-Richtmyer, con cualquier norma, implica la condición de von-Neumann.

Demostración: Es sencillo demostrar que, para cualquier norma de matriz,

$$\rho(M)^k \leq \|M^k\|, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Por la condición de estabilidad de Lax, existe $C > 0$, tal que

$$|\lambda|^k \leq \|M^k\| < C, \quad \forall k, \quad 0 \leq k\Delta t \leq T_f,$$

luego $|\lambda| \leq C^{1/k} \leq K^{\Delta t/T_f}$.

Por otra parte, la función $f(x) = K^x$ es convexa, es decir,

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

Tomamos, $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ y $t = \Delta t/T_f$, y obtenemos

$$K^{\Delta t/T_f} \leq \frac{\Delta t}{T_f} K + \left(1 - \frac{\Delta t}{T_f}\right) = 1 + (K - 1) \frac{\Delta t}{T_f}.$$

Por tanto,

$$|\lambda| \leq 1 + \frac{K-1}{T_f} \Delta t \Rightarrow \rho(M) \leq 1 + C' \Delta t,$$

$$\text{con } C' = \frac{K-1}{T_f}.$$

□

Proposición

Si M es una matriz normal y se satisface la condición de von-Neumann, entonces el proceso es estable.

Demostración: Por ser M una matriz normal ($MM^T = M^T M$) se cumple $\|M\|_2 = \rho(M)$. Sabemos que existe C' tal que dado $n \in \mathbb{N}$, $n \leq T_f/\Delta t$,

$$\|M^n\|_2 = \rho(M^n) \leq \rho(M)^n \leq (1 + C' \Delta t)^n,$$

entonces,

$$(1 + C' \Delta t)^n \leq (1 + C' \Delta t)^{T_f/\Delta t} = \left[\left(1 + \frac{1}{1/C' \Delta t} \right)^{1/C' \Delta t} \right]^{T_f C'} \leq e^{T_f C'} \leq C,$$

para un cierto C independiente de Δt y Δx .

□

Corolario

Si M tiene como vectores propios los modos discretos de Fourier $W(\xi) = e^{i\xi_j h}$, entonces la condición de von-Neumann es suficiente para garantizar la estabilidad.

Demostración: Los modos discretos de Fourier forman una base ortonormal, por lo que la matriz M es una matriz normal a la que aplicamos el resultado anterior. \square

Esto permite justificar el análisis de estabilidad por el método de Fourier, donde reemplazamos

$$u_{k,j} = \lambda^j e^{i\xi_k h},$$

y buscamos una cota de la forma

$$|\lambda(\xi)| \leq 1 + C' \Delta t.$$

El método de Fourier ignora las condiciones de contorno del problema suponiéndolas siempre periódicas.

Lema

Sea $M = (m_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $m_{ij} \geq 0$ y $\sum_{j=1}^n |m_{ij}| \leq 1$, $\forall i$. Entonces, $\|M^k\|_\infty \leq 1$, $\forall k$.
(Este lema proporciona la estabilidad fuerte de un método)

Demostración: Es conocido que la $\|\cdot\|_\infty$ de una matriz se puede calcular de la forma

$$\|M\|_\infty = \max\left\{\sum_{j=1}^n |m_{ij}|, i = 1, 2, \dots, n\right\}.$$

Por tanto, $\|M\|_\infty \leq 1$. Si elevamos al cuadrado, $\|M^2\|_\infty \leq \|M\|_\infty^2 \leq 1$. Así sucesivamente, $\|A^k\|_\infty \leq 1$, $\forall k$. □

Lema (Varah)

Sea $M = (m_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ estrictamente diagonal dominante por filas. Definimos

$$\alpha = \min\left\{|m_{kk}| - \sum_{j=1, j \neq k}^n |m_{kj}|, k = 1, 2, \dots, n\right\} > 0.$$

Entonces, $\|M^{-1}\|_\infty < 1/\alpha$.

Consideremos el denominado **Problema del transporte** descrito por la EDP de primer orden

$$u_t(x, t) + au_x(x, t) = 0, \quad x \in [0, 1], \quad t \geq 0,$$

con las condiciones $u(0, t) = u(1, t) = 0$ y $u(x, 0) = \sin \pi x$.

Tomamos $\Delta x = \frac{1}{nx}$ y $\Delta t = \frac{T_f}{nt}$, lo que proporciona el mallado

$$x_i = 0 + i\Delta x, \quad i = 0, 1, \dots, nx; \quad t_j = 0 + j\Delta t, \quad j = 0, 1, \dots, nt.$$

Utilizamos diferencias progresivas para u_t y diferencias regresivas para u_x

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t} + a \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, nx - 1; \quad j = 1, 2, \dots, nt - 1.$$

Manipulando la expresión y llamando $\mu = \frac{a\Delta t}{\Delta x}$, obtenemos

$$u_{i,j+1} = (1 - \mu)u_{i,j} + \mu u_{i-1,j}, \quad i = 1, 2, \dots, nx - 1; \quad j = 1, 2, \dots, nt - 1.$$

Matricialmente:

$$\begin{pmatrix} u_{1,j+1} \\ u_{2,j+1} \\ u_{3,j+1} \\ \vdots \\ u_{nx-2,j+1} \\ u_{nx-1,j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\mu & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \mu & 1-\mu & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \mu & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1-\mu & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \mu & 1-\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ u_{3,j} \\ \vdots \\ u_{nx-2,j} \\ u_{nx-1,j} \end{pmatrix}$$

$u^{(j+1)} = Mu^{(j)}$, relación entre un instante y el siguiente.

M no es una matriz normal.

Desde luego, $\rho(M) = |1 - \mu|$. Por tanto,

$$\rho(M) \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq 1 - \mu \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \mu - 1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \mu \leq 2.$$

- Sería erróneo concluir que el método es estable para $0 \leq \mu \leq 2$, ya que hay valores de μ en ese intervalo para los que no se cumple la condición CFL.
- Condición Courant-Friedrichs-Levy (CFL). Para este problema, la condición CFL, que es una condición necesaria para la estabilidad, se satisface si y sólo si $0 \leq \mu \leq 1$.
- Para $\mu = 1,5$, se tiene $\rho(M) < 1$ y $\|M\|_2 > 1$.
- Para obtener una condición suficiente de estabilidad para este problema, podemos recurrir a la $\|\cdot\|_\infty$ y el lema anterior, observando que si $\mu \leq 1$ se cumplen las hipótesis del resultado y $\|M\|_\infty \leq 1$.

Si el problema tiene condiciones periódicas, podemos analizar la **estabilidad por el método de Fourier**.

Reemplazando $u_{k,j} = \lambda^j e^{i\xi_k h}$, resulta

$$\lambda^{j+1} e^{i\xi_k h} = (1 - \mu) \lambda^j e^{i\xi_k h} + \mu \lambda^j e^{i\xi_{k-1} h},$$

de donde

$$\lambda e^{i\xi_k h} = (1 - \mu) e^{i\xi_k h} + \mu e^{i\xi_{k-1} h},$$

luego

$$\lambda = 1 - \mu + \mu e^{i(\xi_{k-1} - \xi_k)h}.$$

Entonces,

$$|\lambda| \leq 1 - \mu + \mu = 1,$$

siempre que $0 \leq \mu \leq 1$. Podemos, por tanto, garantizar la estabilidad de este problema en este dominio.

Consideremos la ecuación en derivadas parciales

$$u_t(x, t) + au_x(x, t) = 0, \quad a > 0, \quad x \in [0, L], \quad t > 0.$$

- ¿Qué tipo de aproximaciones podemos usar en cada variable?
- ¿Podemos alcanzar el orden 2 de convergencia?
- ¿Podemos asegurar la convergencia/estabilidad? ¿Bajo qué condiciones?

$$u_t(x, t) + au_x(x, t) = 0, \quad a > 0, \quad x \in [0, L], \quad t > 0.$$

Diferencia progresiva en u_t y central en u_x

- Transformación del problema

$$\frac{u(x, t+k) - u(x, t)}{k} + a \frac{u(x+h, t) - u(x-h, t)}{2h} = 0,$$

- Discretización del problema

Dados los pasos espacial $h = \frac{L}{nx}$ y temporal $k = \frac{T}{nt}$, definimos los nodos $x_i = 0 + ih$, $i = 0, 1, 2, \dots, nx - 1, nx$ y $t_j = 0 + jk$, $j = 0, 1, \dots, nt - 1, nt$. Evaluando la expresión anterior en los puntos (x_i, t_j)

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} + a \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h}, \quad i = 1, \dots, nx - 1, j = 1, \dots, nt - 1.$$

Denotamos por $\mu = \frac{ak}{h}$ y despejamos las incógnitas del instante mayor,

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} - \frac{\mu}{2}(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}), \quad i = 1, \dots, nx - 1, j = 1, \dots, nt - 1.$$

Utilizando notación matricial: $u^{(j+1)} = Au^{(j)}$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\mu}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{\mu}{2} & 1 & -\frac{\mu}{2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\frac{\mu}{2} \\ 0 & 0 & \cdots & -\frac{\mu}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad u^{(j)} = \begin{pmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ \vdots \\ u_{nx-2,j} \\ u_{nx-1,j} \end{pmatrix},$$

Estabilidad de Lax y Richtmyer: Utilizando la norma infinito,

$$\|A\|_{\infty} = 1 + 2 \left| \frac{\mu}{2} \right| = 1 + \mu > 1,$$

ya que $\mu > 0$. Luego el método es **incondicionalmente inestable**.

Pero este no es (todavía) el método de Lax-Friedrichs...

Ejemplo

$$u_t(x, t) + 5u_x(x, t) = 0, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad t \geq 0, \\ u(0, t) = e^{-25t^2}, u(2, t) = e^{-(2-5t)^2}, t > 0; \quad u(x, 0) = e^{-x^2}, x \in [0, 2]$$

Solución exacta: $u(x, t) = e^{-(x-5t)^2}$

Buscamos la solución aproximada en $T_{max} = 2$ mediante el método progresivo-central con:

(a) $h = 0,2$, $k = 0,01$

(b) $h = 0,2$, $k = 0,1$.

x_i	$u_{i,200}$	$ u(x_i, 2) - u_{i,200} $	$u_{i,20}$	$ u(x_i, 2) - u_{i,20} $
0.0	1.3888e-11	0	1.3888e-11	0
0.2	4.7910e+00	4.7910e+00	-1.5076e+05	1.5076e+05
0.4	1.3094e+01	1.3094e+01	2.5966e+06	2.5966e+06
0.6	-1.5212e+01	1.5212e+01	7.0614e+05	7.0614e+05
0.8	-1.1447e+01	1.1447e+01	-3.7459e+06	3.7459e+06
1	1.0307e+01	1.0307e+01	-1.5017e+06	1.5017e+06
1.2	9.9900e+00	9.9900e+00	3.1449e+06	3.1449e+06
1.4	-8.2457e-01	8.2457e-01	1.7296e+06	1.7296e+06
1.6	-4.6748e+00	4.6748e+00	-1.6244e+06	1.6244e+06
1.8	-3.5328e+00	3.5328e+00	-7.8331e+05	7.8331e+05
2.0	1.2341e-04	0	1.2341e-04	0

- También conocido como **método de las series de Fourier**.
- Aplicable a ecuaciones lineales con coeficientes constantes, condiciones iniciales periódicas de periodo L y una sola variable dependiente (en sistemas, es condición necesaria pero no suficiente).
- Se expresan los valores del mallado en $t = 0$ en términos de series finitas de Fourier. Notación exponencial:

$$\sum A_n e^{\sqrt{-1} \frac{n\pi}{L} x_i} = \sum A_n e^{\sqrt{-1} \frac{n\pi}{nxh} ih} = \sum A_n e^{\sqrt{-1} \beta_n ih}, \text{ donde } \beta_n = \frac{n\pi}{nxh}.$$

Cuando $t = 0$,

$$u_{i,0} = \sum A_n e^{\sqrt{-1} \beta_n ih}, \quad i = 0, 1, \dots, nx$$

utilizando el principio de superposición, basta con analizar la propagación del error en uno de los valores iniciales, $e^{\sqrt{-1} \beta ih}$.

- Se analiza el crecimiento de una función que reduce la serie para $t = 0$ por "separación de variables".

$$u_{i,j} = e^{\sqrt{-1} \beta x_i} e^{\alpha t_j} = e^{\sqrt{-1} \beta ih} e^{\alpha k j} = e^{\sqrt{-1} \beta ih} \xi^j,$$

donde $\alpha \in \mathbb{C}$ y $\xi = e^{\alpha k}$ es el llamado **factor de amplificación**.

- Si la solución exacta de las ecuaciones en diferencias no crece exponencialmente con el tiempo, entonces una condición necesaria y suficiente para la estabilidad es que $|\xi| \leq 1$.

Analicemos de nuevo la estabilidad del esquema:

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} - \frac{\mu}{2}(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}), \quad i = 1, \dots, nx - 1, j = 1, \dots, nt - 1.$$

Reemplazamos $u_{i,j}$ por $e^{\sqrt{-1}\beta ih}\xi^j$,

$$e^{\sqrt{-1}\beta ih}\xi^{j+1} = e^{\sqrt{-1}\beta ih}\xi^j - \frac{\mu}{2} \left(e^{\sqrt{-1}\beta(i+1)h} - e^{\sqrt{-1}\beta(i-1)h} \right) \xi^j,$$

dividiendo toda la expresión por $e^{\sqrt{-1}\beta ih}\xi^j$,

$$\xi = 1 - \frac{\mu}{2} \left(e^{\sqrt{-1}\beta h} - e^{-\sqrt{-1}\beta h} \right) = 1 - \sqrt{-1}\mu \sin(\beta h).$$

De este modo,

$$|\xi|^2 = 1 + (\mu \sin(\beta h))^2 > 1 \text{ si } \beta h = \frac{\pi}{nx} \neq 0 \text{ si } \beta h = \frac{\pi}{nx} \neq \pi,$$

luego es incondicionalmente inestable.

Hemos deducido que el esquema en diferencias

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} - \frac{\mu}{2}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}), \quad i = 1, \dots, nx - 1, j = 1, \dots, nt - 1.$$

donde $\mu = \frac{ak}{h}$, es incondicionalmente inestable.

Si reemplazamos $u_{i,j}$ por el promedio de $u_{i-1,j}$ y $u_{i+1,j}$, obtenemos el **esquema de Lax-Friedrichs**,

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{2}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - \frac{\mu}{2}(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}),$$

$i = 1, \dots, nx - 1, j = 1, \dots, nt - 1.$

- Error de truncamiento es de orden $O(k + h^2)$.
- Estable bajo determinadas condiciones.

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{2}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - \frac{\mu}{2}(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}),$$

Utilizando el criterio de Von Neumann, estudiemos su estabilidad:

$$e^{\sqrt{-1}\beta ih} \xi^{j+1} = \frac{1}{2} \left(e^{\sqrt{-1}\beta(i+1)h} + e^{\sqrt{-1}\beta(i-1)h} \right) \xi^j - \frac{\mu}{2} \left(e^{\sqrt{-1}\beta(i+1)h} - e^{\sqrt{-1}\beta(i-1)h} \right) \xi^j,$$

dividiendo toda la expresión por $e^{\sqrt{-1}\beta ih} \xi^j$,

$$\xi = \cos(\beta h) - \sqrt{-1}\mu \sin(\beta h)$$

$$\text{y } |\xi|^2 = \cos^2(\beta h) + \mu^2 \sin^2(\beta h) = 1 - (1 - \mu^2) \sin^2(\beta h).$$

Luego $|\xi|^2 \leq 1$ sii $\mu^2 \leq 1$ (condición de Courant-Friedrichs-Lewy, CFL).

Ejemplo

$$u_t(x, t) + 5u_x(x, t) = 0, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad t \geq 0,$$

$$u(0, t) = e^{-25t^2}, u(2, t) = e^{-(2-5t)^2}, t > 0; \quad u(x, 0) = e^{-x^2}, x \in [0, 2]$$

Solución exacta: $u(x, t) = e^{-(x-5t)^2}$

Buscamos la solución aproximada en $T_{max} = 2$ mediante el método Lax-Friedrichs con:

(a) $h = 0,2$, $k = 0,01$

(b) $h = 0,2$, $k = 0,1$.

x_i	$u_{i,200}$	$ u(x_i, 2) - u_{i,200} $	$u_{i,20}$	$ u(x_i, 2) - u_{i,20} $
0.0	0.0000e-05	0	0.0000	0
0.2	0.0193e-05	0.0193e-05	0.2362e+05	0.2362e+05
0.4	0.0474e-05	0.0474e-05	-0.4492e+05	0.4492e+05
0.6	0.0843e-05	0.0843e-05	-1.3590e+05	1.3590e+05
0.8	0.1279e-05	0.1279e-05	1.4890e+05	1.4890e+05
1	0.1737e-05	0.1737e-05	3.5290e+05	3.5290e+05
1.2	0.2132e-05	0.2132e-05	-2.8856e+05	2.8856e+05
1.4	0.2342e-05	0.2342e-05	-5.9265e+05	5.9265e+05
1.6	0.2196e-05	0.2196e-05	3.4840e+05	3.4840e+05
1.8	0.1491e-05	0.1491e-05	4.8781e+05	4.8781e+05
2.0	0.0000e-05	0	0.0000	0

Ejemplo

$$u_t(x, t) + u_x(x, t) = 0, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad t \geq 0, \\ u(0, t) = \sin(-3t), u(\pi/2, t) = \sin(3(\pi/2 - t)), t > 0; \quad u(x, 0) = \sin(3x), x \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

Solución exacta: $u(x, t) = \sin 3(x - t)$

Buscamos la solución aproximada en $T_{max} = 1$ mediante el método Lax-Friedrichs con:

(a) $nx = 10, nt = 10$

(b) $nx = 100, nt = 100$.

x_i	$u_{i,10}$	$ u(x_i, 1) - u_{i,10} $	x_i	$u_{i,100}$	$ u(x_i, 1) - u_{i,100} $
0	-1.4112e-01	0	0	-0.1411	0
0.1571	-5.0002e-01	7.5162e-02	0.0157	-0.1873	2.5835e-04
0.3142	-7.2221e-01	1.6165e-01	0.0314	-0.2331	6.1007e-04
0.4712	-7.8670e-01	2.1318e-01	0.0471	-0.2782	1.0530e-03
0.6283	-7.0244e-01	1.9549e-01	0.0628	-0.3225	1.5845e-03
0.7854	-5.0090e-01	9.9340e-02	0.0785	-0.3661	2.2017e-03
0.9425	-2.3179e-01	6.0083e-02	0.0942	-0.4088	2.9012e-03
1.0996	5.3382e-02	2.4087e-01	0.1100	-0.4505	3.6793e-03
1.2566	3.0592e-01	3.9016e-01	0.1257	-0.4911	4.5318e-03
1.4137	5.3452e-01	4.1164e-01	0.1414	-0.5306	5.4544e-03
1.5708	9.8999e-01	0	0.1571	-0.5687	6.4423e-03

A igual μ , distintos resultados \Rightarrow Orden

Otras aproximaciones son:

- **Upwind:** (viento ascendente) $O(k + h)$, estable si $k \leq \frac{h}{|a|}$,

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \begin{cases} -\frac{a}{h}(u_{i,j} - u_{i-1,j}), & a \geq 0, \\ -\frac{a}{h}(u_{i+1,j} - u_{i,j}), & a < 0 \end{cases}$$

- **Leap-frog:** (salto de obstáculos), $O(k^2 + h^2)$, necesita de una condición de contorno Dirichlet y la solución en los dos primeros instantes. Estable si $k|a| < h$,

$$u_{i,j+1} = u_{i,j-1} - \mu(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}), \quad \mu = \frac{ak}{h}$$

- ¿Existen métodos de segundo orden en ambas variables que no necesiten de un predictor?

Método de Lax-Wendroff

De la EDP $u_t + au_x = 0$ deducimos que la relación entre operadores es $\frac{\partial}{\partial t} \equiv -a \frac{\partial}{\partial x}$.
Aplicando desarrollos de Taylor,

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} + k \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{i,j} + \frac{1}{2} k^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{i,j} + \dots$$

y utilizando que $\frac{\partial u}{\partial t} = -a \frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} - ka \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} + \frac{1}{2} k^2 a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} + \dots$$

Utilizando ahora aproximaciones de segundo orden en las derivadas espaciales,

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} - ka \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} + \frac{1}{2} k^2 a^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \dots,$$

o, denotando por $\mu = a \frac{k}{h}$,

$$u_{i,j+1} = (1 - \mu^2)u_{i,j} + \frac{\mu}{2}(\mu - 1)u_{i+1,j} + \frac{\mu}{2}(\mu + 1)u_{i-1,j}.$$

$i = 1, \dots, nx - 1, j = 1, \dots, nt - 1.$

Las ecuaciones en diferencias son:

$$F_{i,j} = u_{i,j+1} - (1 - \mu^2)u_{i,j} - \frac{\mu}{2}(\mu - 1)u_{i+1,j} - \frac{\mu}{2}(\mu + 1)u_{i-1,j},$$

luego

$$T_{i,j} = F_{i,j}(U) = U_{i,j+1} - (1 - \mu^2)U_{i,j} - \frac{\mu}{2}(\mu - 1)U_{i+1,j} - \frac{\mu}{2}(\mu + 1)U_{i-1,j}$$

Desarrollando en serie de Taylor,

$$\begin{aligned} T_{i,j} &= U_{i,j} + k(U_t)_{i,j} + \frac{k^2}{2}(U_{tt})_{i,j} + \frac{k^3}{6}(U_{ttt})_{i,j} + \cdots \\ &\quad - (1 - \mu^2)U_{i,j} - \frac{\mu}{2}(\mu - 1) \left[U_{i,j} + h(U_x)_{i,j} + \frac{h^2}{2}(U_{xx})_{i,j} + \frac{h^3}{6}(U_{xxx})_{i,j} + \cdots \right] \\ &\quad - \frac{\mu}{2}(\mu + 1) \left[U_{i,j} - h(U_x)_{i,j} + \frac{h^2}{2}(U_{xx})_{i,j} - \frac{h^3}{6}(U_{xxx})_{i,j} + \cdots \right] \\ &= k(U_t + aU_x)_{i,j} + \frac{k^2}{2}(U_{tt} - a^2U_{xx})_{i,j} + \frac{k}{6} \boxed{(k^2U_{ttt} + ah^2U_{xxx})_{i,j}} + \cdots \end{aligned}$$

Partimos de la expresión iterativa, en la que reemplazamos $u_{i,j}$ por $e^{\sqrt{-1}\beta ih}\xi^j$,

$$\begin{aligned}e^{\sqrt{-1}\beta ih}\xi^{j+1} &= e^{\sqrt{-1}\beta ih}\xi^j - \frac{\mu}{2} \left(e^{\sqrt{-1}\beta(i+1)h} - e^{\sqrt{-1}\beta(i-1)h} \right) \xi^j \\ &\quad + \frac{\mu^2}{2} \left(e^{\sqrt{-1}\beta(i+1)h} - 2e^{\sqrt{-1}\beta ih} + e^{\sqrt{-1}\beta(i-1)h} \right) \xi^j,\end{aligned}$$

dividiendo toda la expresión por $e^{\sqrt{-1}\beta ih}\xi^j$,

$$\begin{aligned}\xi &= 1 - \frac{\mu}{2} \left(e^{\sqrt{-1}\beta h} - e^{-\sqrt{-1}\beta h} \right) + \frac{\mu^2}{2} \left(e^{\sqrt{-1}\beta h} - 2 + e^{-\sqrt{-1}\beta h} \right) \\ &= 1 - \sqrt{-1}\mu \sin(\beta h) + \mu^2 (\cos(\beta h) - 1) \\ &= 1 - 2\mu^2 \sin\left(\frac{\beta h}{2}\right) + \sqrt{-1}\mu \sin(\beta h)\end{aligned}$$

y, finalmente,

$$|\xi|^2 = 1 - 4\mu^2(1 - \mu^2) \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right).$$

Por tanto,

$$|\xi|^2 \leq 1 \text{ si y solo si } \mu^2 \leq 1.$$

Ejemplo

$$u_t(x, t) + 5u_x(x, t) = 0, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad t \geq 0,$$

$$u(0, t) = e^{-25t^2}, u(2, t) = e^{-(2-5t)^2}, t > 0; \quad u(x, 0) = e^{-x^2}, x \in [0, 2]$$

Solución exacta: $u(x, t) = e^{-(x-5t)^2}$

Buscamos la solución aproximada en $T_{max} = 2$ mediante el método Lax-Wendroff con:

(a) $h = 0,2, k = 0,01$

(b) $h = 0,2, k = 0,1.$

x_i	$u_{i,200}$	$ u(x_i, 2) - u_{i,200} $	$u_{i,20}$	$ u(x_i, 2) - u_{i,20} $
0.0	0.0000	0	0.0000	0
0.2	-0.0161e-04	0.0161e-04	0.5231e+16	0.5231e+16
0.4	0.0775e-04	0.0775e-04	-1.3985e+16	1.3985e+16
0.6	-0.0215e-04	0.0215e-04	2.5634e+16	2.5634e+16
0.8	-0.0877e-04	0.0877e-04	-3.8134e+16	3.8134e+16
1	0.0292e-04	0.0292e-04	4.8494e+16	4.8494e+16
1.2	0.0308e-04	0.0308e-04	-5.3882e+16	5.3882e+16
1.4	0.1987e-04	0.1987e-04	5.2736e+16	5.2736e+16
1.6	0.0399e-04	0.0399e-04	-4.4889e+16	4.4889e+16
1.8	-0.2341e-04	0.2341e-04	2.9600e+16	2.9600e+16
2.0	0.0000	0	0.0000	0

Ejemplo

$$u_t(x, t) + u_x(x, t) = 0, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad t \geq 0,$$

$$u(0, t) = \sin(-3t), u(\pi/2, t) = \sin(3(\pi/2 - t)), t > 0; \quad u(x, 0) = \sin(3x), x \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

Solución exacta: $u(x, t) = \sin(3(x - t))$

Buscamos la solución aproximada en $T_{max} = 1$ mediante el método Lax-Wendroff con:

(a) $nx = 10, nt = 10$

(b) $nx = 100, nt = 100$.

x_i	$u_{i,10}$	$ u(x_i, 1) - u_{i,10} $	x_i	$u_{i,100}$	$ u(x_i, 1) - u_{i,100} $
0	-0.1411	0	0	-0.1411	0
0.1571	-0.5824	7.1729e-03	0.0157	-0.1876	1.0147e-05
0.3142	-0.8890	5.1490e-03	0.0314	-0.2337	2.0067e-05
0.4712	-0.9916	8.3065e-03	0.0471	-0.2792	2.9692e-05
0.6283	-0.8680	2.9929e-02	0.0628	-0.3242	3.8958e-05
0.7854	-0.5497	5.0573e-02	0.0785	-0.3684	4.7799e-05
0.9425	-0.1115	6.0185e-02	0.0942	-0.4118	5.6153e-05
1.0996	0.3477	5.3477e-02	0.1100	-0.4543	6.3960e-05
1.2566	0.7316	3.5534e-02	0.1257	-0.4957	7.1161e-05
1.4137	0.9420	4.1932e-03	0.1414	-0.5361	7.7701e-05
1.5708	0.9900	0	0.1571	-0.5753	8.3525e-05

¿Un método implícito?: Crank-Nicolson

$$u_t(x, t) + au_x(x, t) = f(x, t), \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0, \\ u(0, t) = c_1(t), u(L, t) = c_2(t), t > 0; \quad u(x, 0) = ci(x), x \in [0, L]$$

- En el instante t_j , diferencia progresiva en u_t , central en u_x :

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} + a \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} = f(x_i, t_j).$$

- En el instante t_{j+1} , diferencia regresiva en u_t , central en u_x :

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} + a \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1}}{2h} = f(x_i, t_{j+1}).$$

- Promedio de ambas expresiones:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} + \frac{a}{2} \left[\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} + \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1}}{2h} \right] = \frac{1}{2} (f(x_i, t_j) + f(x_i, t_{j+1})).$$

Simplificando y agrupando términos,

$$u_{i,j+1} + \frac{\mu}{4} u_{i+1,j+1} - \frac{\mu}{4} u_{i-1,j+1} = u_{i,j} - \frac{\mu}{4} u_{i+1,j} + \frac{\mu}{4} u_{i-1,j} + \frac{k}{2} (f(x_i, t_j) + f(x_i, t_{j+1})).$$

donde $\mu = \frac{ak}{h}$.