Algunos temas de investigación del grupo DAMRES.
Diseño de métodos iterativos y estudio de su estabilidad mediante dinámica compleja

Francisco I. Chicharro, Alicia Cordero, Juan R. Torregrosa

Instituto de Matemáticas Multidisciplinar
Universitat Politècnica de València
Universitat de València
Universitat Jaume I
Instituto Tecnológico de Santo Domingo
Universidad Autónoma de Santo Domingo
https://damres.webs.upv.es/

curso 2024/2025

Outline

¿Qué problemas queremos resolver?

Pretendemos aproximar, mediante técnicas numéricas, una solución α de cualquier ecuación no lineal $F(x) = 0$, donde $F : Y \to Y$ es un operador no lineal definido en un espacio de Banach Y.

- $Y = \mathbb{R}$ o $Y = \mathbb{C}$, $F(x) = 0$ es una ecuación no lineal escalar.
- $Y = \mathbb{R}^n$, $F(x) = 0$ es un sistema de ecuaciones no lineales.
- $Y = \mathbb{R}^{n\times n}$ ($\mathbb{C}^{m\times n}$), $F(x) = 0$ es una ecuación matricial no lineal.

Algunos ejemplos donde aparecen este tipo de ecuaciones:

- Ecuación de Colebrook-White (estudio del flujo en una tubería).
- Problemas de difusión (ecuación de Burgers) o de frontera (ecuación de Fisher), ecuación de ondas (ec. del telégrafo), etc.
- Ecuaciones en derivadas parciales en finanzas, modelos de Black-Scholes.
- Ecuaciones integrales, integro-diferenciales, etc.
- $X + AX^{-1}A = B$, $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, (teoría de control, programación dinámica,...),
- Ecuación algebraica de Riccati $XAX - XB - CX + D = 0$, $A, B, C, \in \mathbb{C}^{n\times n}$, (Teoría del transporte).
- Problemas de optimización en una o varias variables.

¿Cómo lo hacemos?

- Diseño de métodos iterativos genéricos ó específicos para el problema a abordar, intentando mejorar los ya existentes en cuanto a orden de convergencia, coste computacional, tiempo, etc.
- Análisis de la convergencia y velocidad de convergencia: local, semilocal o global.
- Estudio de la eficiencia computacional.
- Análisis de la accesibilidad del método y de su estabilidad.
- Aplicación a la resolución del problema concreto.
- Comparación con otros métodos conocidos.

Herramientas complementarias en este estudio:

- Análisis dinámico real multidimensional o complejo, para determinar la estabilidad y eficiencia del método diseñado.
- Desarrollo de software para el análisis de la convergencia, principalmente, en el caso vectorial y matricial.
- Utilización de las derivadas fraccionarias como alternativa a la derivada clásica: derivada fractal, de Caputo, de Riemann-Liouville, etc.
- Utilización de inversas generalizadas como alternativa a la inversa de una matriz.
- Planteamiento de estos problemas en el contexto del q-Calculus.

Método de Newton (convergencia cuadrática)

Para la ecuación escalar $f(x) = 0$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Para el sistema de ecuaciones $F(x) = 0$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - [F(x^{(k)})]^{-1} F(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, \ldots$$

Para la ecuación matricial $F(X) = X^{-1} - A = 0$

$$X_{k+1} = X_k(2I - AX_k), \quad k = 0, 1, \ldots$$

Familia M4 de métodos iterativos (orden de convergencia 4)

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= x^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1} F(x^{(k)}), k = 0, 1, \ldots \\ z^{(k)} &= y^{(k)} - \frac{1}{\beta}[F'(x^{(k)})]^{-1} F(y^{(k)}), \\ x^{(k+1)} &= z^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1} \left((2 - 1/\beta - \beta)F(y^{(k)}) + \beta F(z^{(k)})\right), \end{aligned} \tag{1}$$

donde β es un parámetro real arbitrario, $\beta \neq 0$.

¿Todos los métodos de esta familia tienen el mismo comportamiento?

[ACT] V. Arroyo, A. Cordero, J.R. Torregrosa, Approximation of artificial satellites preliminary orbits: The efficiency challenge, Mathematical and Computer Modelling, 54(7-8) (2011) 1802–1807.

Elementos de dinámica real multidimensional o dinámica compleja para abordar este análisis.

- Teorema del escalado.
- Transformación de Möbius.
- Comportamiento dinámico del operador racional resultante de aplicar el método iterativo sobre polinomios arbitrarios de bajo grado.
- Análisis de los puntos fijos extraños y su estabilidad.
- Análisis de los puntos críticos libres y el plano de parámetros asociado a cada uno: comportamiento estable o caótico.
- Interpretación de los planos dinámicos.

[CCT] F.I. Chicharro, A. Cordero, J.R. Torregrosa, Drawing Dynamical and Parameters Planes of Iterative Families and Methods, The Scientific World JOURNAL, 213, 1–11. 10.1155/2013/780153

[CCGT] F.I. Chicharro, A. Cordero, N. Garrido, J.R. Torregrosa, Registro de propiedad intelectual del código de generación de planos con tiempo de ejecución optimizado. (2024) Generation of dynamical planes. Registro ND-920-2024.

Método de Newton con derivadas fraccionarias

Derivada Caputo, $f(x) = 0$, $\bar{x}$ raíz

$$x_{k+1} = x_k - \Gamma(\alpha+1)\frac{f(x_k)}{{}_C D_a^{\alpha} f(x_k)}, k = 0, 1, \ldots$$

es al menos 2α, siendo $0 < \alpha \leq 1$ y la ecuación del error es,

$$e_{k+1}^{\alpha} = \frac{\Gamma(2\alpha+1) - \Gamma^2(\alpha+1)}{\Gamma^3(\alpha+1)} C_2 {e_k}^{2\alpha} + O(e_k^{3\alpha}).$$

Derivada conformable, $f(x) = 0$, $\bar{x}$ raíz

$$x_{k+1} = a + \left((x_k - a)^{\alpha} - \alpha \frac{f(x_k)}{(T_{\alpha}^{a} f)(x_k)} \right)^{1/\alpha}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

es al menos 2, siendo $0 < \alpha \leq 1$, y la ecuación del error

$$e_{k+1} = \alpha(\bar{x} - a)^{\alpha-1} C_2 e_k^2 + O\left(e_k^2\right),$$

[ACT] A. Akgüll, A. Cordero, J.R. Torregrosa, A fractional Newton method with th-order of convergence and its stability, Appl. Math. Letters 98 (2019) 344-351

[CCTV] G. Candelario, A. Cordero, J.R. Torregrosa, M.P. Vassileva, An optimal and low computational cost fractional

Newton-type method for solving nonlinear equations, Appl. Math. Letters 124 (2022) 107650

$f(x)$ un polinomio de grado n, $n \geq 2$. Sean $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ las raíces de $f(x)$, tal que $\alpha_i \neq \alpha_j$, $\forall i, j$

$x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \in \mathbb{K}^n$ una estimación inicial simultanea.

El método de Ehrlich, cuya expresión iterativa es

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - \frac{f(x_i^{(k)})}{f'(x_i^{(k)}) - f(x_i^{(k)}) \sum_{j \neq i} \frac{1}{x_i^{(k)} - x_j^{(k)}}}, \; i = 1, 2, \ldots, n,$$

proporciona, bajo ciertas condiciones, todas las raíces del polinomio,

$$(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}) \; \rightarrow \; (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n),$$

esta convergencia es en $\mathbb{K}^n$, cuando $k \rightarrow +\infty$.

Posibles extensiones de este resultado:

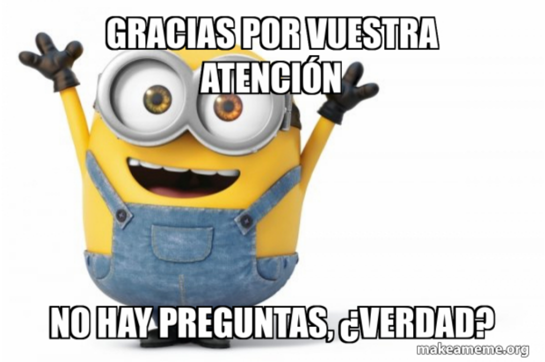
Raices simultáneas

- ¿Qué ocurre si el polinomio tiene raíces múltiples?,
- ¿Qué podemos decir si la función f no es un polinomio?. Es una función escalar arbitraria con raices simples o múltiples,
- ¿Es posible extender estas técnicas a sistemas de ecuaciones no lineales $F(x) = 0$,
- ...

[CGTT] A. Cordero, N. Garrido, J.R. Torregrosa, P. Triguero-Navarro, An iterative scheme to obtain multiple solutions simultaneously, Applied Mathematics Letters 145 (2023) 108738

[CCNTT] F. Chinesta, A. Cordero, N. Garrido, J.R. Torregrosa, P. Triguero-Navarro, Simultaneous roots for vectorial problems,

Computational and Applied Mathematics (2023) 42:227


GRACIAS POR VUESTRA ATENCIÓN
NO HAY PREGUNTAS, ¿VERDAD?
makeameme.org