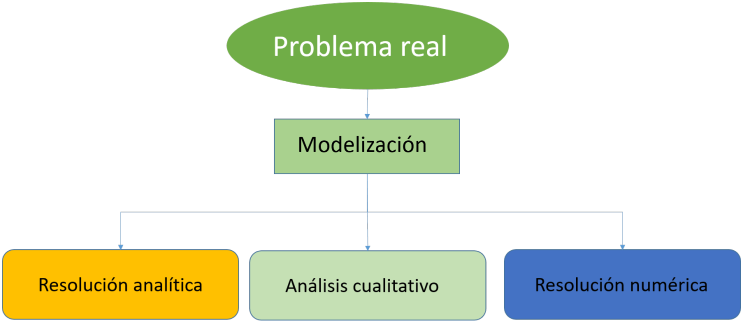
Tema 2: Sistemas dinámicos unidimensionales

Resolución numérica de ecuaciones en derivadas parciales

Alicia Cordero, Juan R. Torregrosa

Contenido


Problema real
Modelización
Resolución analítica
Análisis cualitativo
Resolución numérica

Representación gráfica de EDO: campo de direcciones

- No siempre es posible o fácil representar la solución de la EDO

Campo de direcciones

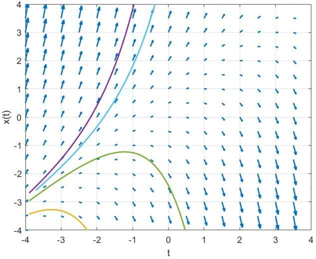
- Derivada: pendiente de la recta tangente en un punto

Campo de direcciones

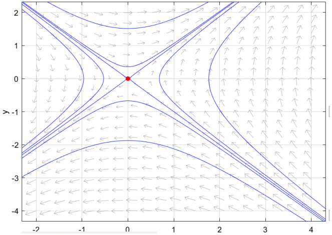
- Representa el comportamiento de las infinitas soluciones en cada punto (t, x)
- En cada punto (t, x) se representa como un vector de pendiente $f(t, x)$
- Dicho vector es tangente a la solución de la EDO
- Invariante respecto a las condiciones iniciales $\Rightarrow$ tangente a cualquier solución particular

Ejemplo: $x' = x - t$, $x(0) = 0$

- EDO lineal
- Solución general: $x(t) = Ce^t + t + 1$
- Solución particular: $x(t) = -e^t + t + 1$



$$\begin{cases} x' &= y \\ y' &= x \end{cases}$$



Un sistema dinámico es una aplicación $\phi : \mathbb{R} \times S \to S$, $\phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times S)$, donde $S \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto o bien $S \subseteq E$, siendo E un espacio vectorial normado, tal que satisface:

1. ϕ_0 es la identidad,
2. $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$.

Se denota $\phi_t(x) = \phi(t, x)$ y a la familia $\{\phi_t(x)\}_{t\in\mathbb{R}}$ se le llama sistema dinámico sobre S.

- Todas las ϕ_t tienen inversa, ϕ_{-t}.
- A todo sistema dinámico se le puede asociar una ecuación diferencial (escalar o vectorial), $x' = f(x)$, definiendo el campo vectorial $f : S \to E$. Entonces,

$$f(x) = \frac{d}{dt}\phi_t(x)|_{t=0}, \quad \text{para todo } x \in S.$$

- La soluciones de la ecuación diferencial en el sistema dinámico reciben el nombre de órbitas. Si son cerradas, se llaman órbitas periódicas.
- Suele considerarse $(t_0, x_0) = (0, 0)$.

Resolver la ecuación diferencial $x' = f(x)$ es encontrar una curva solución $u : J \to W$, con J intervalo real tal que, para todo $t \in J$,

$$u'(t) = f(u(t)),$$

donde $f : W \to E$, $W \subset E$ abierto, tal que $x' = f(x)$.

Teorema fundamental local

Sea E un espacio vectorial normado, $W \subset E$ y sea $f : W \to E$ de clase $\mathcal{C}^1$. Entonces existe $a \in J$, $a > 0$, y una única solución u de la ecuación diferencial $x' = f(x)$ que satisface la condidión inicial $x(0) = x_0$, tal que $u : (-a, a) \to W$.

Dependencia de la solución respecto a las condiciones iniciales

Sea $W \subset E$ abierto y $f : W \to E$ Lipschitziana. Sean $z(t)$ e $y(t)$ dos soluciones del sistema dinámico $x' = f(x)$ en el intervalo $[t_0, t_1] \subset J$. Entonces, para todo $t \in [t_0, t_1]$,

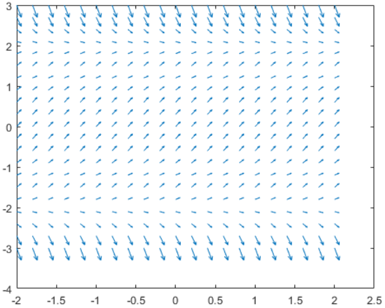
$$|y(t) - z(t)| \leq e^{k(t-t_0)}|y(t_0) - z(t_0)|,$$

donde k es la condición de Lipschitz.

Ejemplo: Consideremos el PVI

$$x' = \frac{1}{2}(x^2 - 4)(\sin^2(x^3) + \cos(x) - 2), \quad x(0) = \frac{1}{2}.$$

No es fácil resolver este problema analíticamente.
Sin embargo, es fácil ver que $x = 2$ anula la parte derecha de la ecuación. Luego $x_1(t) = 2$ es una solución de equilibrio.
Supongamos que $x_2(t)$ es una solución del problema que cumple la condición inicial, $x_2(0) = \frac{1}{2}$.



Por el Teorema de existencia y unicidad, $x_2(t) < 2$, ya que de otro modo ambas soluciones se cortarían.

Flujo de una ecuación diferencial

Sea $x' = f(x)$ una ecuación diferencial tal que $f : W \to E$, $f \in \mathcal{C}^1$, $W \subset E$ abierto.
Para cada $y \in W$ existe una única solución $\phi(t)$ con $\phi(0) = x_0$ definida en un intervalo abierto maximal $J(x_0) \subset \mathbb{R}$. Para indicar la dependencia de la condición inicial, denotamos

$$\phi(t) = \phi(t, x_0), \text{ luego } \phi(0, x_0) = x_0.$$

Definamos el conjunto

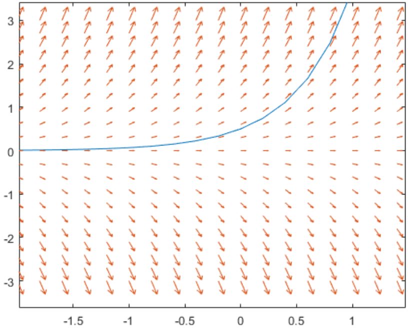
$$\Omega = \{(t, x_0) \in \mathbb{R} \times W \text{ tales que } t \in J(x_0)\}.$$

A la aplicación

$$\phi : \Omega \to W, \text{ tal que } \phi(t, x_0) = \phi_t(x_0)$$

se la conoce como flujo de la ecuación diferencial.

Ejemplo:
Sea $x' = Ax$, siendo $A \in \mathcal{L}(E)$.
Entonces, su flujo es $\phi_t(x_0) = e^{tA} x_0$.
Supongamos $A = 2$ y $x_0 = 0{,}5$ (véase gráfica); el flujo define conjuntos de soluciones dependientes de la estimación inicial usada.



El flujo ϕ de una ecuación diferencial satisface las siguientes propiedades:

- $\phi_{s+t}(x) = \phi_s(\phi_t(x))$.
- El conjunto Ω es abierto en $\mathbb{R} \times W$ y $\phi : \Omega \rightarrow W$ es una aplicación de clase $\mathcal{C}^1$.
- Sea $(t, x_0) \in \Omega$; entonces existe un entorno $U \subset W$ de x_0 con $t \times U \subset \Omega$. La aplicación $\phi_t(x)$, $\phi_t : U \rightarrow W$, envía U al conjunto abierto V y ϕ_{-t} está definida en V y envía V a U.

Dada una ecuación diferencial, su flujo define un sistema dinámico.

- EDO autónoma: no presenta estímulo externo

$$x' = f(x)$$

- Punto fijo o de equilibrio: no existe variación temporal (el punto permanece invariante)

$$x' = f(x) = 0 \to x^*(t) = x^* \forall t \in \mathbb{R}$$

- Clasificación de los puntos de equilibrio x^*:
  - $f'(x^*) > 0$ **Fuente** (Repulsor, inestable)
  - $f'(x^*) < 0$ **Sumidero** (Atractor, estable)
  - $f'(x^*) = 0$ **Nodo**
- Línea de fase: representa el comportamiento de los puntos de equilibrio

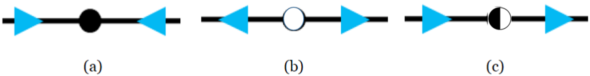


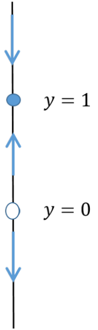
Figura: (a) atractor; (b) repulsor; (c) nodo

Cómo dibujar líneas de fase

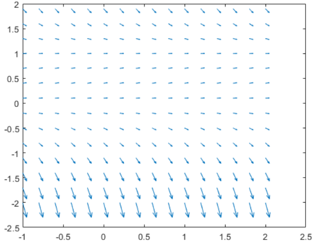
Línea de fase de una ecuación autónoma $x' = f(x)$

- Dibuja la línea x.
- Calcula los puntos de equilibrio x^* y márcalos sobre la línea.
- Obtén los intervalos para los cuales $f(x) > 0$ y dibuja sobre ellos flechas hacia arriba.
- Calcula los intervalos para los cuales $f(x) < 0$ y dibuja sobre ellos flechas hacia abajo.

Ejemplo: Ecuación logística $y' = (1 - y)y$.



L. fase



Campo de direcciones

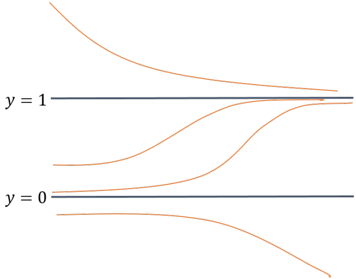


Diagrama de flujo

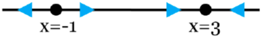
Ejemplo: Dada la ecuación diferencial $x' = 3 + 2x - x^2$, $x(0) = 3$, obtener los puntos de equilibrio, clasificarlos y dibujar la línea de fase

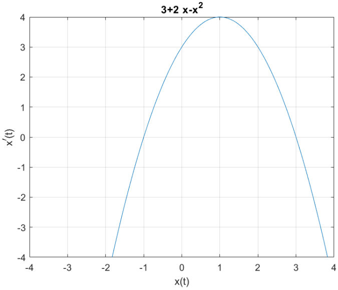
- Solución particular: $x(t) = \dfrac{e^{-4t} + 3}{1 - e^{-4t}}$
- Puntos de equilibrio:

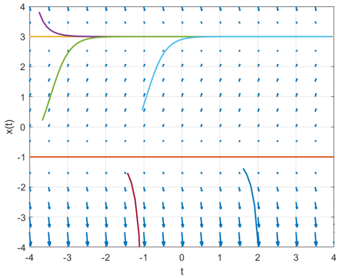
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3 + 2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^* \in \{-1, 3\}$$

- Clasificación: $f'(x) = -2x + 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(-1) = 4 > 0 & \textbf{repulsor o fuente} \\ f'(3) = -4 < 0 & \textbf{atractor o sumidero} \end{cases}$$







Ejemplo: Realiza el estudio dinámico de $x' = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$

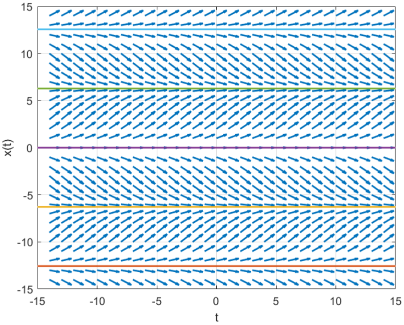
- Puntos de equilibrio:

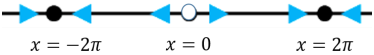
$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow x^* \in \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

- Clasificación: $f'(x^*) = \frac{1}{2}\cos(k\pi)$

$$\Rightarrow f'(x^*) = \begin{cases} 1/2 > 0, & k \text{ par} \\ -1/2 < 0, & k \text{ impar} \end{cases}$$

  - Repulsores/fuentes: $x^* = 0, 4\pi, 8\pi, \ldots, -4\pi, -8\pi, \ldots$
  - Atractores/sumideros: $x^* = 2\pi, 6\pi, 10\pi, \ldots, -2\pi, -6\pi, \ldots$





Ejemplo: Consideremos la familia paramétrica de ecuaciones diferenciales

$$\boxed{y' = f_\mu(y) = y^2 - 2y + \mu}$$

- Idea: Para cada valor del parámetro, tenemos una ecuación diferencial.
- ¿Qué valores analizamos? Por ejemplo: $\mu \in \{-4, -2, 0, 2, 4\}$.
- Cálculo de los puntos de equlibrio y su estabilidad:

$$y^2 - 2y + \mu = 0 \;\Rightarrow\; y^* = 1 \pm \sqrt{1-\mu}.$$

	$\mu = -4$	$\mu = -2$	$\mu = 0$	$\mu = 2$	$\mu = 4$
Ptos. Eq.	$y^* = 1 \pm \sqrt{5}$	$y^* = 1 \pm \sqrt{3}$	$y^* = 2,\ y^* = 0$	$\nexists$	$\nexists$
Fuente Sumidero	$f'(1+\sqrt{5}) > 0$ $f'(1-\sqrt{5}) < 0$	$f'(1+\sqrt{5}) > 0$ $f'(1-\sqrt{5}) < 0$	$f'(2) > 0$ $f'(0) > 0$	- -	- -

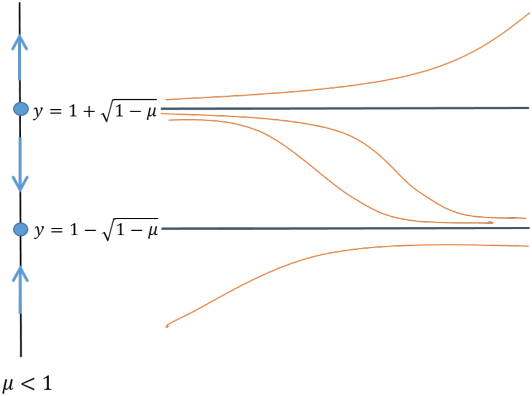
- En general,

$$1 \pm \sqrt{1-\mu} \in \mathbb{R} \text{ si y sólo si } \mu \leq 1,$$

  $y^2 - 2y + \mu$ tiene dos raíces para $\mu < 1$, una para $\mu = 1$ y ninguna para $\mu > 1$.
- $\mu = 1$ es un valor de bifurcación.

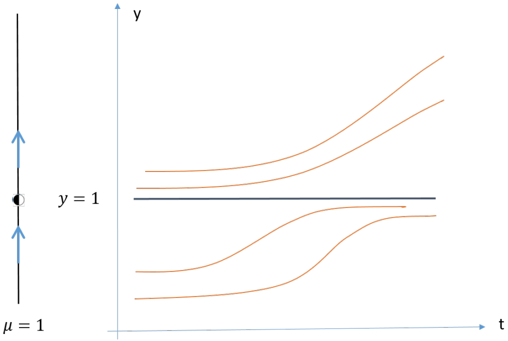
$$\boxed{y' = f_\mu(y) = y^2 - 2y + \mu}$$

- $\boxed{\mu < 1}$: dos puntos de equilibrio en $y^* = 1 \pm \sqrt{1-\mu}$
- 1 fuente en $y = 1 + \sqrt{1-\mu}$
- 1 sumidero en $y = 1 - \sqrt{1-\mu}$



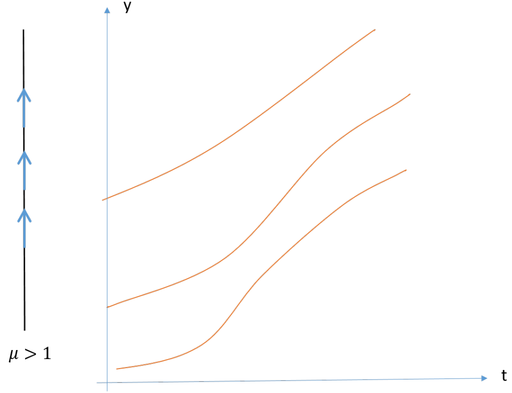
$$\boxed{y' = f_\mu(y) = y^2 - 2y + \mu}$$

- $\boxed{\mu = 1}$: un punto de equilibrio en $y^* = 1$
- 1 nodo



$$\boxed{y' = f_\mu(y) = y^2 - 2y + \mu}$$

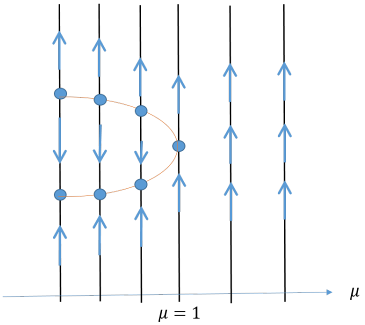
- $\boxed{\mu > 1}$: no existen puntos de equilibrio
- $f(y) > 0$ órbitas crecientes no acotadas.



$$\boxed{y' = f_\mu(y) = y^2 - 2y + \mu}$$

Diagrama de bifurcación

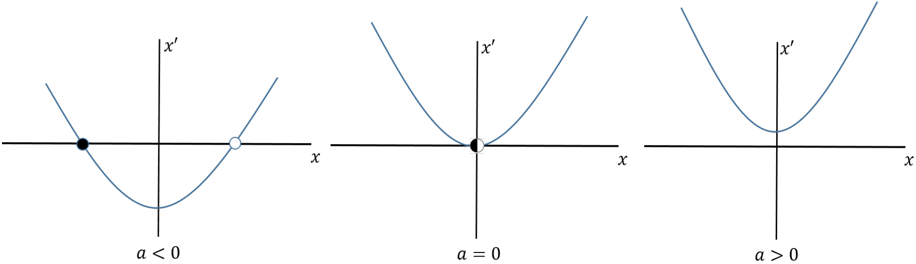
- Representa los cambios que se producen en el comportamiento del sistema dinámico en función del valor de los parámetros
- Eje de abscisas: parámetro
- Eje de ordenadas: magnitud
- Líneas de fase verticales (comportamiento de cada punto de equilibrio)

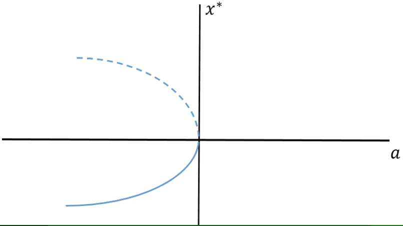


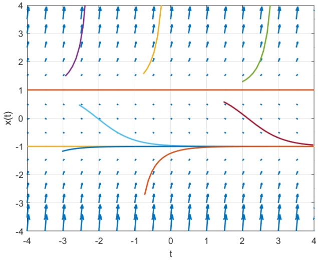
Bifurcación silla-nodo

Los puntos de equilibrio de $x' = f(x)$ se crean o se destruyen

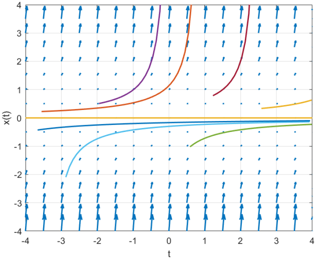
Forma normal: $x' = x^2 + a$



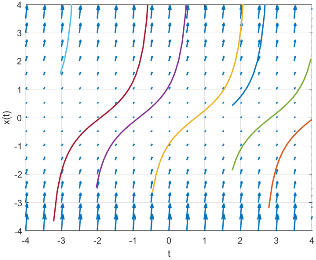




$a < 0$



$a = 0$

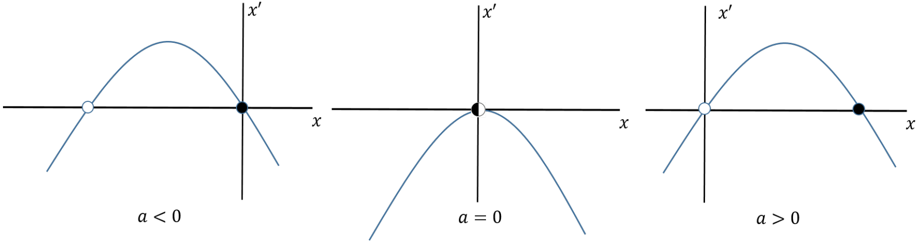


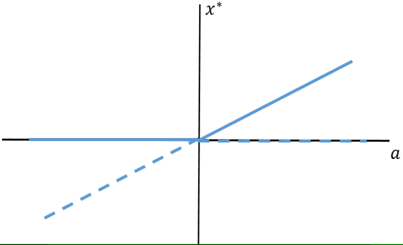
$a > 0$

Bifurcación transcrítica

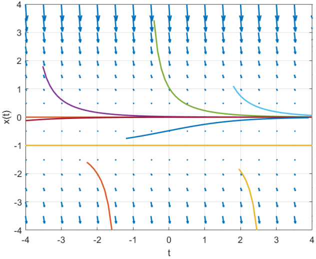
Hay un intercambio de estabilidad entre los puntos de equilibrio de $x' = f(x)$

Forma normal: $x' = ax - x^2$

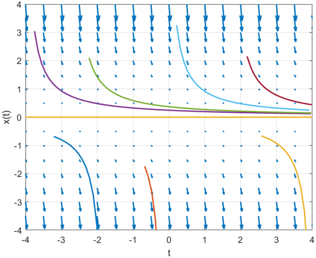




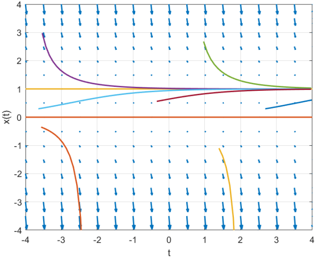
Bifurcaciones: transcrítica



$a < 0$



$a = 0$



$a > 0$

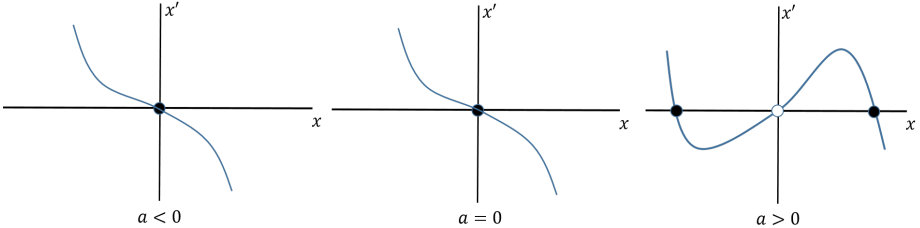
Bifurcación tridente (pitchfork)

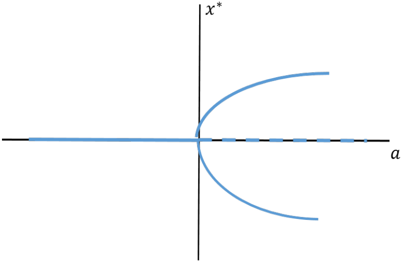
Los puntos de equilibrio de $x' = f(x)$ aparecen y desaparecen por pares debido a una simetría del modelo. En el punto de bifurcación, un punto de equilibrio previamente existente les cede su estabilidad, que cambia a partir de ahí. Dos tipos:

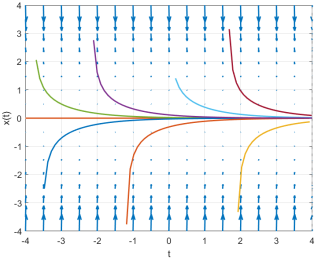
- Supercrítica: en el valor de bifurcación se crean un par de puntos de equilibrio estables que existen después de la bifurcación.
- Subcrítica: en el valor de bifurcación se crean un par de puntos de equilibrio inestables que existen antes de la bifurcación.

Bifurcación tridente (pitchfork) supercrítica

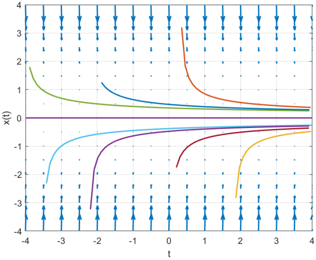
Forma normal: $x' = ax - x^3$



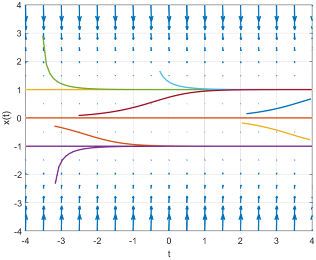



x(t)
t
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4

$a < 0$


x(t)
t
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4

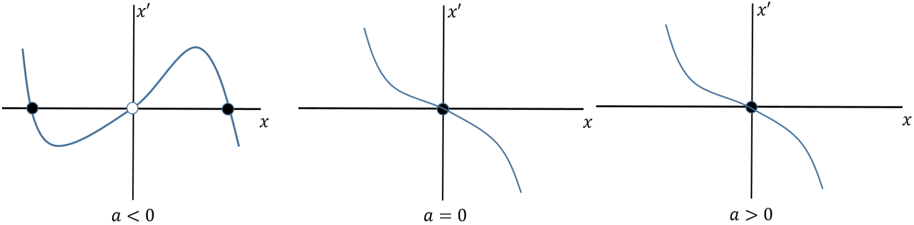
$a = 0$

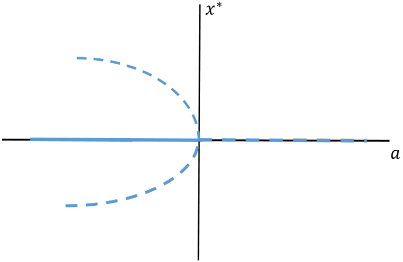

x(t)
t
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4

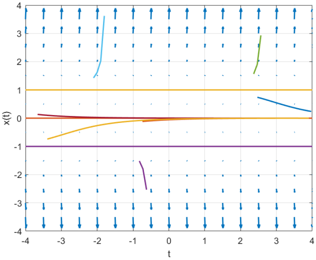
$a > 0$

Bifurcación tridente (pitchfork) subcrítica

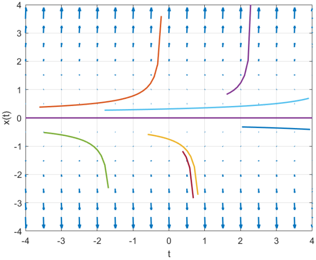
Forma normal: $x' = ax + x^3$, (hasta orden 5, $x' = ax + x^3 - x^5$)



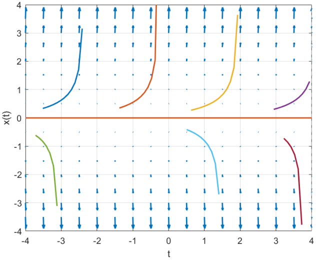




$a < 0$



$a = 0$



$a > 0$

Ejemplo: Modelo logístico de población: $x' = ax(1-x)$, $x(0) = x_0$

- Solución particular: $x(t) = \dfrac{x_0 e^{at}}{1 - x_0 + x_0 e^{at}}$
- Puntos de equilibrio:

$\boxed{a = 0}$

$$f(x) = 0, \forall x$$
$$f'(x) = 0, \forall x$$

$\Rightarrow$ todos los puntos son de equilibrio y son nodos

$\boxed{a \neq 0}$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^* \in \{0, 1\}$$
$$f'(x) = a - 2ax$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(0) = a \\ f'(1) = -a \end{cases}$$

a	$x^* = 0$	$x^* = 1$
$a < 0$	atractor	repulsor
$a > 0$	repulsor	atractor

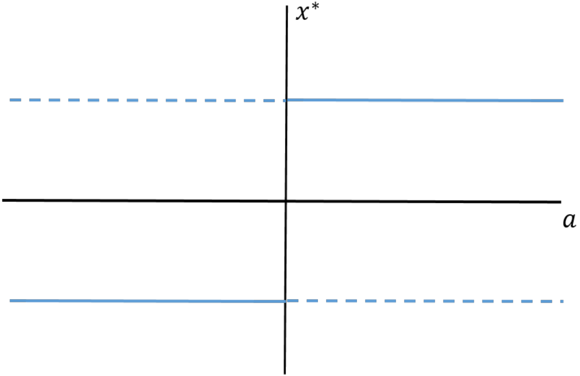


Figura: Diagrama de bifurcación

Ejercicio 1

Analiza el comportamiento cualitativo de las soluciones de la familia paramétrica

$$y' = y^3 - \alpha y,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Para ello:

- Calcula sus puntos de equilibrio y clasifícalos.
- Determina los intervalos donde f_α cambia de signo, si existen.
- Representa las líneas de fase y los diagramas de flujo para distintos valores del parámetro, tratando de que cubran todas las situaciones posibles.
- ¿Existen valores de bifurcación? En caso afirmativo, genera el diagrama de bifurcación e identifícala.

Ejercicio 2

Analiza el comportamiento cualitativo de las soluciones de la familia paramétrica

$$y' = y(1-y)^2 + \mu, \;\; \mu \in \mathbb{R}.$$

Para ello:

- Calcula sus puntos de equilibrio y clasifícalos.
- Determina los intervalos donde f_μ cambia de signo, si existen.
- Representa las líneas de fase y los diagramas de flujo para distintos valores del parámetro, tratando de que cubran todas las situaciones posibles.
- ¿Existen valores de bifurcación? En caso afirmativo, genera el diagrama de bifurcación e identifícala.

Ejercicio 3

La población $P(t)$ de un cierto tipo de pez se modeliza mediante el modelo logístico

$$P' = kP(t)\left(1 - \frac{P(t)}{N}\right),$$

donde k es el parámetro de razón de crecimiento y N es la capacidad de soporte del hábitat. Supongamos que la pesca elimina un número constante C de peces de la población por estación. Entonces, el modelo queda:

$$P' = kP(t)\left(1 - \frac{P(t)}{N}\right) - C,$$

¿Cómo varía la población de peces cuando C se incrementa?

Referencias

- M.W. Hirsch, S. Smale, R.L. Devaney, Differential equations, dynamical systems and an introduction to Chaos. Ed. Elsevier, Amsterdan, 2004.
- G.F. Simmons, Ecuaciones diferenciales. Con aplicaciones y notas históricas, Ed. McGraw-Hill, 1991.
- L. Perko, Differential Equations and Dynamical Systems, Ed. Springer-Verlag, 1991.
- P. Blanchard, R.L. Devaney, G.R. Hall, Ecuaciones diferenciales, Ed, Thomson, México, 1998.