Deep Learning School

# Ликбез по линейной алгебре

# Векторы

- операции над векторами
- линейные подпространства и линейная оболочка
- линейная независимость и базис

# Вектор

**Определение.** *Вектором* в $n$-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ называется упорядоченный набор чисел $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — собственно, элемент пространства $\mathbb{R}^n$.

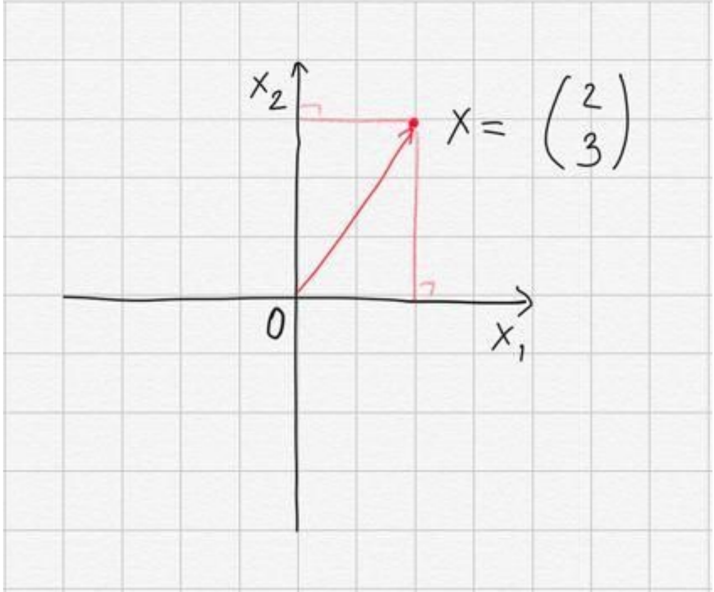
# Вектор

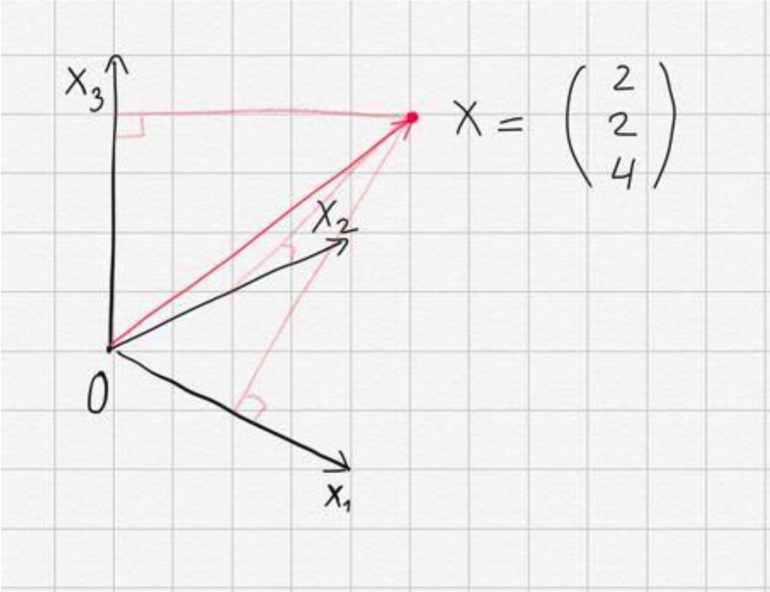
**Определение.** *Вектором* в $n$-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ называется упорядоченный набор чисел $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — собственно, элемент пространства $\mathbb{R}^n$.

Часто вектор удобнее записывать в столбец:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

# Векторы на плоскости и в пространстве



# Сложение и умножение на скаляр

**Наблюдение.** Векторы можно складывать и умножать на скаляр (число). Результат будет вектором, элементы которого суть результаты поэлементного применения операции.

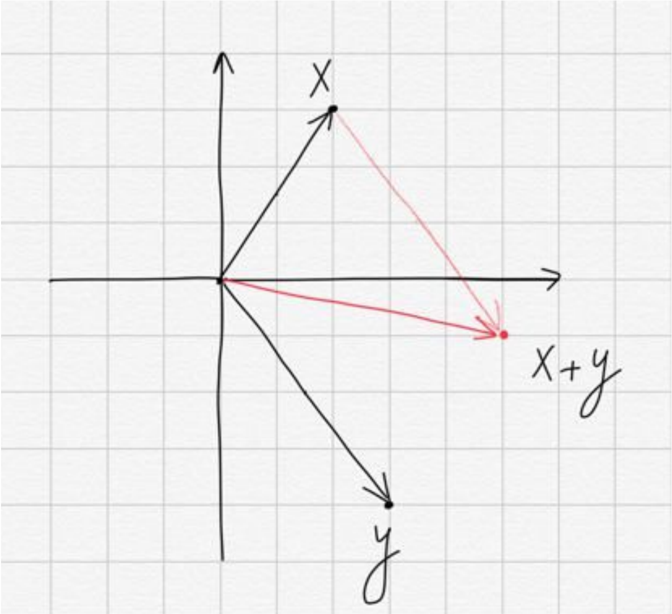
# Сложение и умножение на скаляр

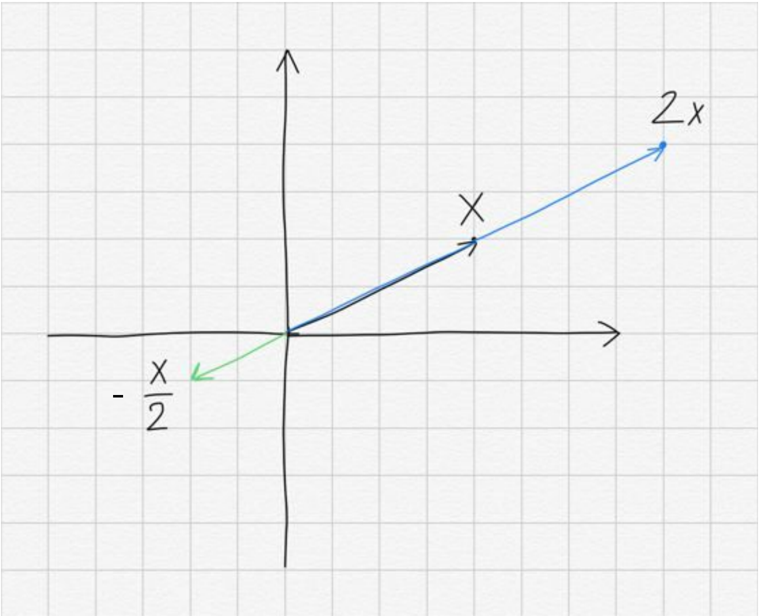
**Наблюдение.** Векторы можно складывать и умножать на скаляр (число). Результат будет вектором, элементы которого суть результаты поэлементного применения операции.

*Пример.*

$$3\begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{1}{2} \\ 4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -\frac{3}{2} \\ 16 \end{pmatrix}$$

# Геометрия векторных операций



# Линейные подпространства

- Векторное пространство $\mathbb{R}^n$ **замкнуто** относительно операций сложения и умножения на скаляр
- Обобщим это наблюдение

# Линейные подпространства

- Векторное пространство $\mathbb{R}^n$ **замкнуто** относительно операций сложения и умножения на скаляр
- Обобщим это наблюдение

**Определение.** *Линейным (или векторным) подпространством* векторного пространства $\mathscr{L}$ называется множество векторов $\mathscr{M} \subset \mathscr{L}$, замкнутое относительно операций сложения и умножения на скаляр.

# Линейная оболочка

**Определение.** *Линейной оболочкой* векторов $v_1, v_2, \ldots, v_n$ называется множество всех линейных комбинаций этих векторов с произвольными коэффициентами:

$$\mathscr{M} = \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n \mid \alpha_i \in \mathbb{R}\}$$

# Линейная оболочка

**Определение.** *Линейной оболочкой* векторов $v_1, v_2, \ldots, v_n$ называется множество всех линейных комбинаций этих векторов с произвольными коэффициентами:

$$\mathscr{M} = \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n \mid \alpha_i \in \mathbb{R}\}$$

**Утверждение.** Линейная оболочка произвольного числа векторов является линейным подпространством в $\mathbb{R}^n$.

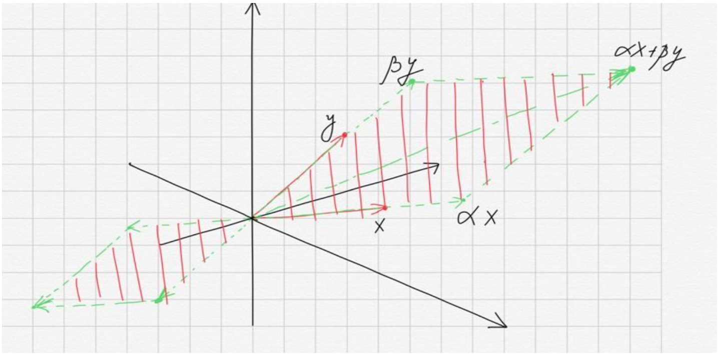
# Линейная оболочка

**Определение.** *Линейной оболочкой* векторов $v_1, v_2, \ldots, v_n$ называется множество всех линейных комбинаций этих векторов с произвольными коэффициентами:

$$\mathscr{M} = \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n \mid \alpha_i \in \mathbb{R}\}$$

**Утверждение.** Линейная оболочка произвольного числа векторов является линейным подпространством в $\mathbb{R}^n$.

*Пример.* На данной картинке $<x, y>$ — плоскость



# Линейная независимость

**Определение.** Векторы $v_1, v_2, \ldots, v_n$ называются *линейно независимыми*, если никакая нетривиальная линейная комбинация этих векторов не равна нуль-вектору. Иными словами, для любых $\alpha_i \in \mathbb{R}$, не все из которых нулевые, выполняется

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n \neq \overline{0}$$

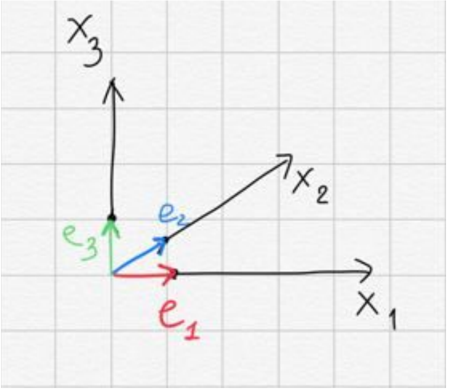
# Линейная независимость

**Определение.** Векторы $v_1, v_2, \ldots, v_n$ называются *линейно независимыми*, если никакая нетривиальная линейная комбинация этих векторов не равна нуль-вектору. Иными словами, для любых $\alpha_i \in \mathbb{R}$, не все из которых нулевые, выполняется

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n \neq \overline{0}$$

*Пример.*

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



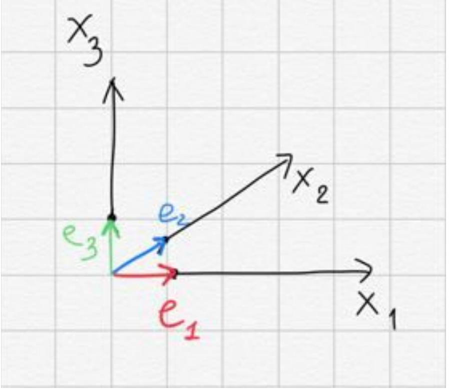
# Линейная независимость

**Определение.** Векторы $v_1, v_2, \ldots, v_n$ называются *линейно независимыми*, если никакая нетривиальная линейная комбинация этих векторов не равна нуль-вектору. Иными словами, для любых $\alpha_i \in \mathbb{R}$, не все из которых нулевые, выполняется

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n \neq \overline{0}$$

*Пример.*

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$




*Доказательство ЛНЗ.* $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = 0 \;\Rightarrow\; \alpha_i = 0$

$\square$

# Базис

**Определение.** Пусть $\mathscr{M}$ — линейное подпространство.
*Базисом* в $\mathscr{M}$ называется минимальная система векторов $v_1, v_2, \ldots, v_n$, для которой $\mathscr{M} = \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$ .

# Базис

**Определение.** Пусть $\mathscr{M}$ — линейное подпространство.
*Базисом* в $\mathscr{M}$ называется минимальная система векторов $v_1, v_2, \ldots, v_n$, для которой $\mathscr{M} = \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$ .

*Пример.* $\mathscr{M} = \mathbb{R}^3$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ — базис}$$

# Базис

**Определение.** Пусть $\mathscr{M}$ — линейное подпространство.
*Базисом* в $\mathscr{M}$ называется минимальная система векторов $v_1, v_2, \ldots, v_n$, для которой $\mathscr{M} = \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$ .

**Свойства базиса**

- Базис является ЛНЗ системой
- Векторы из $\mathscr{M}$ выражается через базис единственным способом
- Любую ЛНЗ систему можно дополнить до базиса
- В любой системе образующих можно выбрать базис
- Любые два базиса равномощны

# Базис

**Определение.** Пусть $\mathscr{M}$ — линейное подпространство.
*Базисом* в $\mathscr{M}$ называется минимальная система векторов $v_1, v_2, \ldots, v_n$,
для которой $\mathscr{M} = \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$ .

**Свойства базиса**

- Базис является ЛНЗ системой
- Векторы из $\mathscr{M}$ выражается через базис единственным способом
- Любую ЛНЗ систему можно дополнить до базиса
- В любой системе образующих можно выбрать базис
- Любые два базиса равномощны

Последнее свойство свидетельствует о корректности определения *размерности линейного пространства* как размера базиса в этом линейном пространстве.

# Базис

**Теорема.** *$n+1$* векторов в $n$-мерном пространстве всегда линейно зависимы.

*Доказательство.*

# Базис

**Теорема.** $n+1$ векторов в $n$-мерном пространстве всегда линейно зависимы.

*Доказательство.* От противного.

# Базис

**Теорема.** $n+1$ векторов в $n$-мерном пространстве всегда линейно зависимы.

*Доказательство.* От противного. Они линейно независимы

# Базис

**Теорема.** $n+1$ векторов в $n$-мерном пространстве всегда линейно зависимы.

*Доказательство*. От противного. Они линейно независимы $\to$ можно дополнить до базиса

# Базис

**Теорема.** $n+1$ векторов в $n$-мерном пространстве всегда линейно зависимы.

*Доказательство.* От противного. Они линейно независимы → можно дополнить до базиса → противоречие с тем, что любые два базиса равномощны. $\square$

# Задачи

*Задача 1*. Доказать, что следующие вектора ЛНЗ:

$$a = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

*Задача 2*. Найти базис в пространстве

$$\mathscr{M} = \{(x, y, z, t) : x + 2y - 3z + t = 0\}$$

*Задача 3*. Выразить вектор $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ через базисные вектора, найденные в задаче 2

# Задачи

*Задача 1*. Доказать, что следующие вектора ЛНЗ:

$$a = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$c = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

# Задачи

*Задача 2*

Найти базис

в пространстве

$$\mathscr{M} = \{(x, y, z, t) :$$
$$x + 2y - 3z + t = 0\}$$

# Задачи

*Задача 3*

Выразить вектор $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

через базисные вектора,

найденные в задаче 2

# Резюме

- Вектор — удобная форма представления различных математических объектов
- Линейное пространство — множество векторов, замкнутое относительно сложения и умножения на скаляр
- Базис — универсальный способ описания линейных подпространств в $\mathbb{R}^n$
- Размер базиса, или размерность пространства, является важной характеристикой ЛП

# Матрицы

- определение
- (не)вырожденность и ранг
- умножение матрицы на вектор и матричный вид СЛУ
- пример: линейная регрессия

# Матрицы

**Определение.** *Матрицей размера* $m \times n$ называется прямоугольная таблица с числами из $m$ строк и $n$ столбцов:

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

# Матрицы

**Определение.** *Матрицей размера* $m \times n$ называется прямоугольная таблица с числами из $m$ строк и $n$ столбцов:

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

Удобно представлять матрицу как совокупность из $n$ векторов-столбцов, записанных в строчку:

$$(x_{*1}, x_{*2}, \dots, x_{*n})$$

# Вырожденная матрица

**Определение.** Квадратная матрица называется *(не)вырожденной*, если её строки линейно (не)зависимы.

*Пример.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

# Вырожденная матрица

**Определение.** Квадратная матрица называется *(не)вырожденной*, если её строки линейно (не)зависимы.

*Пример.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

**Утверждение.** Строки квадратной матрицы ЛНЗ тогда и только тогда, когда её столбцы ЛНЗ.

# Случай произвольных матриц

**Определение.** *Строчным рангом* матрицы $A$ называется размер наибольшего подмножества линейно независимых строк $A$. Аналогично определяется *столбцовый ранг*.

# Случай произвольных матриц

**Определение.** *Строчным рангом* матрицы $A$ называется размер наибольшего подмножества линейно независимых строк $A$. Аналогично определяется *столбцовый ранг*.

*Пример.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

строчный и столбцовый ранг равны 3

# Случай произвольных матриц

**Определение.** *Строчным рангом* матрицы $A$ называется размер наибольшего подмножества линейно независимых строк $A$. Аналогично определяется *столбцовый ранг*.

*Пример.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

строчный и столбцовый ранг равны 3

**Утверждение.** Строчный и столбцовый ранг равны.

# Умножение матрицы на вектор

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

# Умножение матрицы на вектор

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_k \end{pmatrix} =$$

# Умножение матрицы на вектор

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle x_{1*}, w \rangle \\ \langle x_{2*}, w \rangle \\ \dots \\ \langle x_{m*}, w \rangle \end{pmatrix}$$

где

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$$

# Пример: система линейных уравнений

- Решаем систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

- Запись системы в матричном виде: $Ax = b$

# Система линейных уравнений

**Теорема.** Пусть $A$ — невырожденная квадратная матрица.
Тогда система линейных уравнений $Ax = b$ имеет единственное решение при любом значении $b$.

# Пример: линейная регрессия

- Есть $m$ объектов (квартир)
- Объект описывается $n$ признаками (площадь, этаж, количество комнат, ...)

$$x_{k*} = (x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kn})$$

- Необходимо предсказать целевую переменную $y_k$ (стоимость квартиры)
- Ищем закономерность в *линейном виде*:

$$y_k = w_1 x_{k1} + w_2 x_{k2} + \ldots + w_n x_{kn}$$

# Линейная регрессия в матричном виде

- Ищем закономерность в *линейном виде*:

$$y_k = w_1 x_{k1} + w_2 x_{k2} + \ldots + w_n x_{kn}$$

- В матричном виде уравнение записывается так:

$$Xw = y$$

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{m1} & x_{m2} & \ldots & x_{mn} \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \ldots \\ w_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}$$

# Линейная регрессия в матричном виде

- Ищем закономерность в *линейном виде*:

$$y_k = w_1 x_{k1} + w_2 x_{k2} + \ldots + w_n x_{kn}$$

- В матричном виде уравнение записывается так:

$$Xw = y$$

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{m1} & x_{m2} & \ldots & x_{mn} \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \ldots \\ w_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}$$

- Если $m = n$, то решение (скорее всего) единственное
- Если $m > n$, то решения (скорее всего) нет
- Если $m < n$, то решений (скорее всего) бесконечно много

# Линейная регрессия в матричном виде

Если объектов меньше, чем признаков,
то линейная регрессия будет работать плохо!

# Операции над матрицами

- сложение матриц
- умножение матриц
- транспонирование и обратная матрица
- определитель матрицы

# Сложение и вычитание матриц

- Сложение и вычитание происходит поэлементно
- Можно применять только к матрицам одинакового размера

*Пример.*

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

# Умножение матриц

- Даны матрицы $A$ размера $m \times k$ и $B$ размера $k \times n$
- Хотим научиться вычислять матричное произведение $AB$

# Умножение матриц

- Даны матрицы $A$ размера $m \times k$ и $B$ размера $k \times n$
- Хотим научиться вычислять матричное произведение $AB$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

# Умножение матриц

- Даны матрицы $A$ размера $m \times k$ и $B$ размера $k \times n$
- Хотим научиться вычислять матричное произведение $AB$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -10 & 10 & -2 \end{pmatrix}$$

# Умножение матриц

- Даны матрицы $A$ размера $m \times k$ и $B$ размера $k \times n$
- Хотим научиться вычислять матричное произведение $AB$

$$\begin{pmatrix} \boxed{2 \quad 3 \quad -1} \\ 3 \quad -2 \quad 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{3} & -2 & 1 \\ -10 & 10 & -2 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot (-2) + 3 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) = 3$$

# Умножение матриц

- Даны матрицы $A$ размера $m \times k$ и $B$ размера $k \times n$
- Хотим научиться вычислять матричное произведение $AB$

$$\begin{pmatrix} \boxed{2 \quad 3 \quad -1} \\ 3 \quad -2 \quad 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & \boxed{2} & 0 \\ 2 & \boxed{-2} & 1 \\ -1 & \boxed{0} & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & \boxed{-2} & 1 \\ -10 & 10 & -2 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot 2 + 3 \cdot (-2) + (-1) \cdot 0 = -2$$

# Умножение матриц

- Даны матрицы $A$ размера $m \times k$ и $B$ размера $k \times n$
- Хотим научиться вычислять матричное произведение $AB$

$$\begin{pmatrix} \boxed{2 \quad 3 \quad -1} \\ 3 \quad -2 \quad 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & \boxed{1} \\ -10 & 10 & -2 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 = 1$$

# Умножение матриц

- Даны матрицы $A$ размера $m \times k$ и $B$ размера $k \times n$
- Хотим научиться вычислять матричное произведение $AB$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ \boxed{3 \quad -2 \quad 0} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ \boxed{-10} & 10 & -2 \end{pmatrix}$$

$$3 \cdot (-2) + (-2) \cdot 2 + 0 \cdot (-1) = -10$$

# Умножение матриц

- Даны матрицы $A$ размера $m \times k$ и $B$ размера $k \times n$
- Хотим научиться вычислять матричное произведение $AB$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ \boxed{3 \quad -2 \quad 0} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -10 & \boxed{10} & -2 \end{pmatrix}$$

$$3 \cdot 2 + (-2) \cdot -2 + 0 \cdot 0 = 10$$

# Умножение матриц

- Даны матрицы $A$ размера $m \times k$ и $B$ размера $k \times n$
- Хотим научиться вычислять матричное произведение $AB$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ \boxed{3 \quad -2 \quad 0} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -10 & 10 & \boxed{-2} \end{pmatrix}$$

$$3 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 + 0 \cdot 2 = -2$$

# Произведение матриц

- Частный случай — произведение матрицы на вектор
- Произведение матриц встречается тогда, когда совокупность векторов умножается на матрицу (например, при подаче в нейронную сеть батча данных)

# Свойства произведения матриц

- Ассоциативность: $A(BC) = (AB)C$
- Дистрибутивность: $A(B+C) = AB + AC$
- Существование нейтрального элемента $E_n$ (единичная матрица):

# Свойства произведения матриц

- Ассоциативность: $A(BC) = (AB)C$
- Дистрибутивность: $A(B+C) = AB + AC$
- Существование нейтрального элемента $E_n$ (единичная матрица):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

# Свойства произведения матриц

- Ассоциативность: $A(BC) = (AB)C$
- Дистрибутивность: $A(B+C) = AB + AC$
- Существование нейтрального элемента $E_n$ (единичная матрица):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$AE = EA = A$

# Свойства произведения матриц

- Ассоциативность: $A(BC) = (AB)C$
- Дистрибутивность: $A(B+C) = AB + AC$
- Существование нейтрального элемента $E_n$ (единичная матрица):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$AE = EA = A$

- Отсутствие коммутативности: не всегда $AB = BA$

# Свойства произведения матриц

- Ассоциативность: $A(BC) = (AB)C$
- Дистрибутивность: $A(B+C) = AB + AC$
- Существование нейтрального элемента $E_n$ (единичная матрица):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$AE = EA = A$

- Отсутствие коммутативности: не всегда $AB = BA$
- Для квадратных матриц: если $A$ вырождена, то $AB$ также вырождена

# Обратная матрица

**Определение.** Пусть $A$ — **квадратная** матрица. Если существует такая матрица $A^{-1}$, что $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, то $A^{-1}$ называется *обратной матрицей* к $A$. Матрица $A$ в таком случае называется *обратимой*.

# Обратная матрица

**Определение.** Пусть $A$ — **квадратная** матрица. Если существует такая матрица $A^{-1}$, что $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, то $A^{-1}$ называется *обратной матрицей* к $A$. Матрица $A$ в таком случае называется *обратимой*.

**Утверждение.** Пусть $A$ — квадратная матрица. Если строки (или столбцы) $A$ линейно независимы (т.е. $A$ невырожденная), то обратная матрица существует и единственна.

# Решаем систему линейных уравнений

- Есть СЛУ, записанная в матричном виде:

$$Ax = b$$

- Если существует $A^{-1}$, то у системы есть единственное решение:

# Решаем систему линейных уравнений

- Есть СЛУ, записанная в матричном виде:

$$Ax = b$$

- Если существует $A^{-1}$, то у системы есть единственное решение:

$$x = A^{-1}b$$

# Транспонированная матрица

Транспонирование — операция отражения матрицы относительно главной диагонали
Пишут: $A^\top$

Вектор-столбец при транспонировании переходит в вектор-строку. Поэтому скалярное произведение можно записать так:

$$\langle x, y \rangle = x^\top y$$

# Определитель матрицы

Определитель квадратной матрицы — это её числовая характеристика, которая определяется рекурсивно:

- $\begin{vmatrix} a \end{vmatrix} = a$
- $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

# Определитель матрицы

Определитель квадратной матрицы — это её числовая характеристика, которая определяется рекурсивно:

$$|A| = a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + \ldots + (-1)^n|A_{1n}|$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i-1,1} & \ldots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \ldots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \ldots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \ldots & a_{i+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

# Свойства определителя

- $|AB| = |A||B|$
- $|A| = 0$ тогда и только тогда, когда $A$ вырожденная

# Вычисление обратной матрицы

- Цель: хотим научиться вычислять обратную матрицу

**Алгоритм** (метод Крамера). Дана квадратная матрица $A$.

1. Вычислим $|A|$
2. Построим матрицу миноров:

$$A' = \begin{pmatrix} |A_{11}| & -|A_{12}| & \dots & (-1)^{n+1}|A_{1n}| \\ -|A_{21}| & |A_{22}| & \dots & (-1)^{n+2}|A_{1n}| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n+1}|A_{n1}| & (-1)^{n+2}|A_{n2}| & \dots & |A_{nn}| \end{pmatrix}$$

3. Обратная матрица вычисляется по формуле

$$A^{-1} = \frac{(A')^{\top}}{|A|}$$

# Задачи

Задача 1

Вычислить определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

# Задачи

Задача 2
Найти обратную
к матрице

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

# Резюме

С матрицами можно делать следующее:

- Складывать, вычитать
- Умножать
- Находить обратную
- Транспонировать
- Считать определитель

- Все эти операции так или иначе необходимы для теоретического понимания матричного исчисления
- Большая часть операций так или иначе используется в нейросетях

# Матрица и линейный оператор

- матрица и линейный оператор
- геометрический смысл линейного преобразования
- линейный оператор в нейронной сети

# Матрица и линейный оператор

- Пусть $A$ — некоторая матрица размера $m \times n$
- Рассмотрим оператор $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, действующий по формуле $f(x) = Ax$
- Отображение $f$ является линейным, то есть

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

# Матрица и линейный оператор

- Пусть $A$ — некоторая матрица размера $m \times n$
- Рассмотрим оператор $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, действующий по формуле $f(x) = Ax$
- Отображение $f$ является линейным, то есть

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

$$f(\alpha x + \beta y) = A(\alpha x + \beta y) =$$

# Матрица и линейный оператор

- Пусть $A$ — некоторая матрица размера $m \times n$
- Рассмотрим оператор $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, действующий по формуле $f(x) = Ax$
- Отображение $f$ является линейным, то есть

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

$$f(\alpha x + \beta y) = A(\alpha x + \beta y) =$$

$$= \begin{pmatrix} \langle a_{1*}, (\alpha x + \beta y) \rangle \\ \langle a_{2*}, (\alpha x + \beta y) \rangle \\ \dots \\ \langle a_{m*}, (\alpha x + \beta y) \rangle \end{pmatrix}$$

# Матрица и линейный оператор

- Пусть $A$ — некоторая матрица размера $m \times n$
- Рассмотрим оператор $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, действующий по формуле $f(x) = Ax$
- Отображение $f$ является линейным, то есть

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

$$f(\alpha x + \beta y) = A(\alpha x + \beta y) =$$

$$= \begin{pmatrix} \langle a_{1*}, (\alpha x + \beta y)\rangle \\ \langle a_{2*}, (\alpha x + \beta y)\rangle \\ \dots \\ \langle a_{m*}, (\alpha x + \beta y)\rangle \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \langle a_{1*}, x\rangle \\ \langle a_{2*}, x\rangle \\ \dots \\ \langle a_{m*}, x\rangle \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \langle a_{1*}, y\rangle \\ \langle a_{2*}, y\rangle \\ \dots \\ \langle a_{m*}, y\rangle \end{pmatrix}$$

# Геометрия линейного преобразования

- Рассмотрим линейный оператор $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ при $m = n = 2$
- $f$ задаётся матрицей $A$ и задаёт некоторое преобразование плоскости

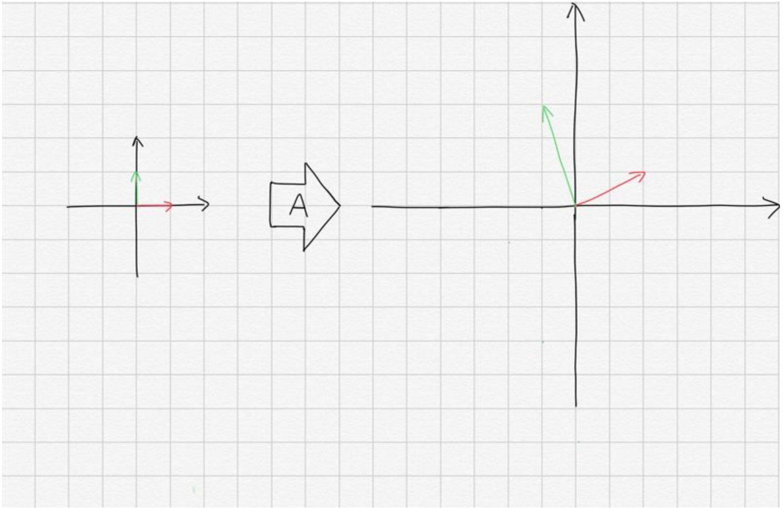
# Геометрия линейного оператора

*Пример 1.*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$



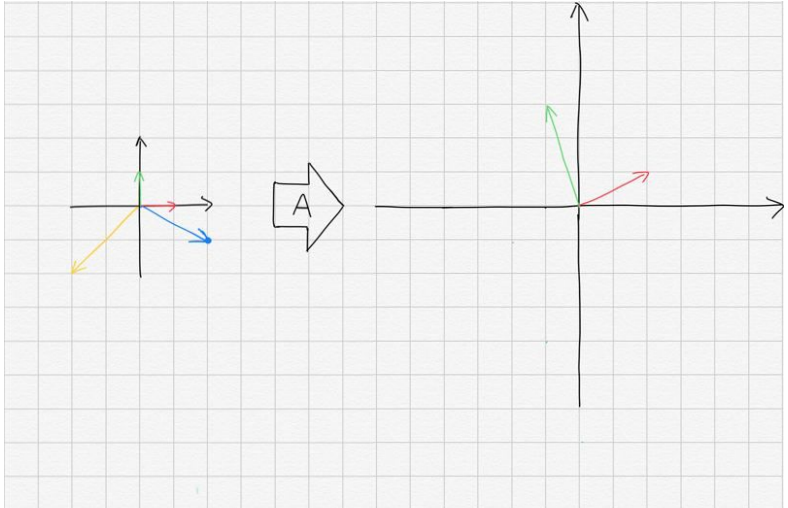
# Геометрия линейного оператора

*Пример 1.*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$




$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \to$$

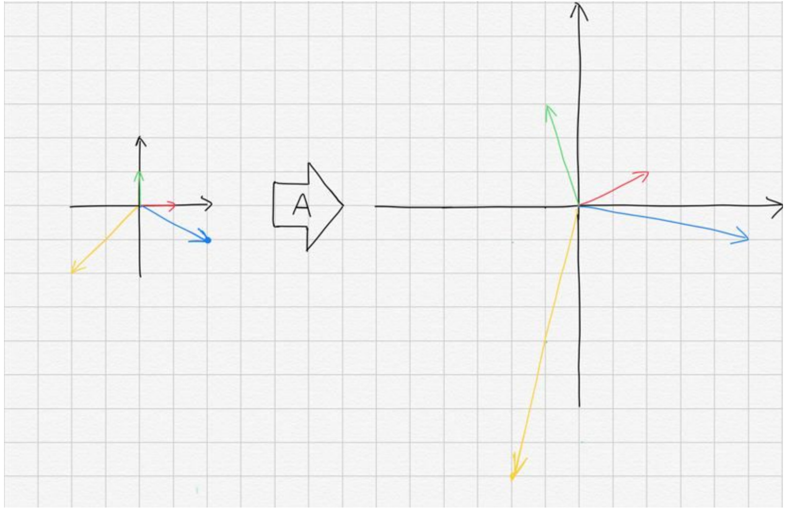
# Геометрия линейного оператора

*Пример 1.*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$




$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \end{pmatrix}$$

# Геометрия линейного оператора

*Пример 2.* Что если матрица $A$ вырожденная?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

# Геометрия линейного оператора

*Пример 2.* Что если матрица $A$ вырожденная?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Все $Ax$ укладываются на прямую $-2x_1 = x_2$

# Геометрия линейного оператора

*Пример 2.* Что если матрица $A$ вырожденная?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Все $Ax$ укладываются на прямую $-2x_1 = x_2$

**Вывод.** Вырожденный линейный оператор отображает пространство в пространство меньшей размерности

# Матрица поворота

**Утверждение.** Преобразованию поворота на угол $\alpha$ (против часовой стрелки) соответствует матрица

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

# Матрица поворота

**Утверждение**

Преобразованию
поворота на угол $\alpha$
(против часовой стрелки)
соответствует матрица

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

# Матрица поворота

**Утверждение.** Преобразованию поворота на угол $\alpha$ (против часовой стрелки) соответствует матрица

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

*Доказательство.*

# Композиция операторов

- Даны два оператора, имеющие матрицы $A$ и $B$
- Необходимо найти матрицу композиции двух операторов

**Утверждение.** Матрица композиции линейных операторов равна произведению матриц этих линейных операторов

# Композиция операторов

**Утверждение.** Матрица композиции линейных операторов равна произведению матриц этих линейных операторов

*Доказательство.*

- Рассмотрим образ вектора $x$
- Под действием первого оператора он переходит в вектор $Ax$
- Вектор $Ax$ под действием второго оператора переходит в $B(Ax)$
- Под действием композиции $x$ переходит в $(BA)x$

# Композиция операторов

**Утверждение.** Матрица композиции линейных операторов равна произведению матриц этих линейных операторов

*Пример.* Композиция двух поворотов с центром в нуле — поворот с центром в нуле

$$\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha & -\cos\beta\sin\alpha - \sin\beta\cos\alpha \\ \sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\sin\alpha & -\sin\beta\sin\alpha + \cos\beta\cos\alpha \end{pmatrix} =$$

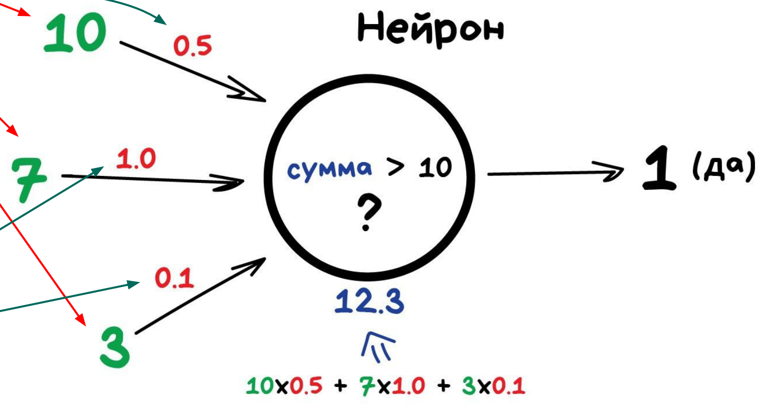
$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

# Пример: матрица в нейронной сети

Опишем нейронную сеть в терминах матриц!

# Модель нейрона

входы нейрона:
$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

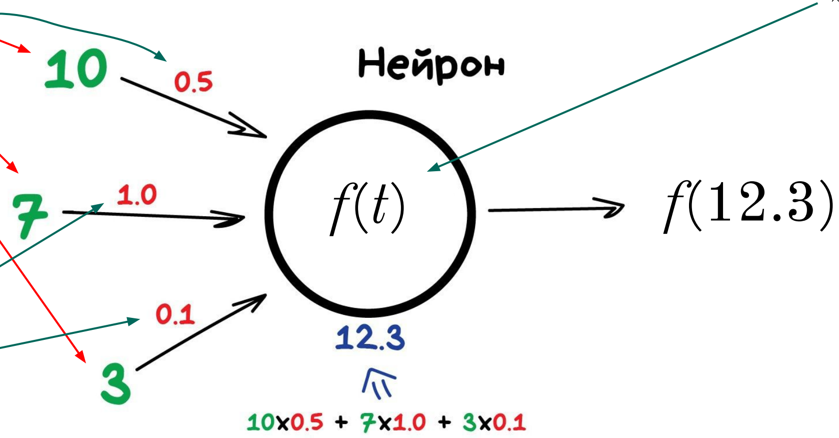



веса нейрона:
$w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$

скалярное произведение векторов $x$, $w$:
$$w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2 + \ldots + w_n \cdot x_n = \langle w, x \rangle$$

# Модель нейрона

входы нейрона:
$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$



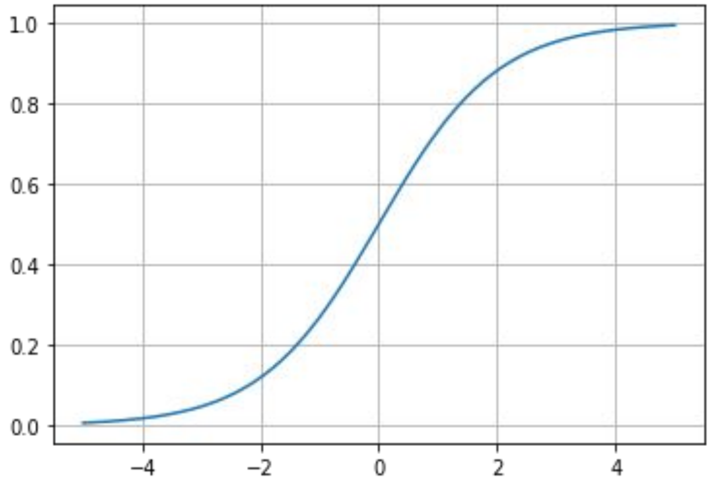

функция активации

веса нейрона:
$w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$

скалярное произведение векторов $x$, $w$:
$$w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2 + \ldots + w_n \cdot x_n = \langle w, x \rangle$$

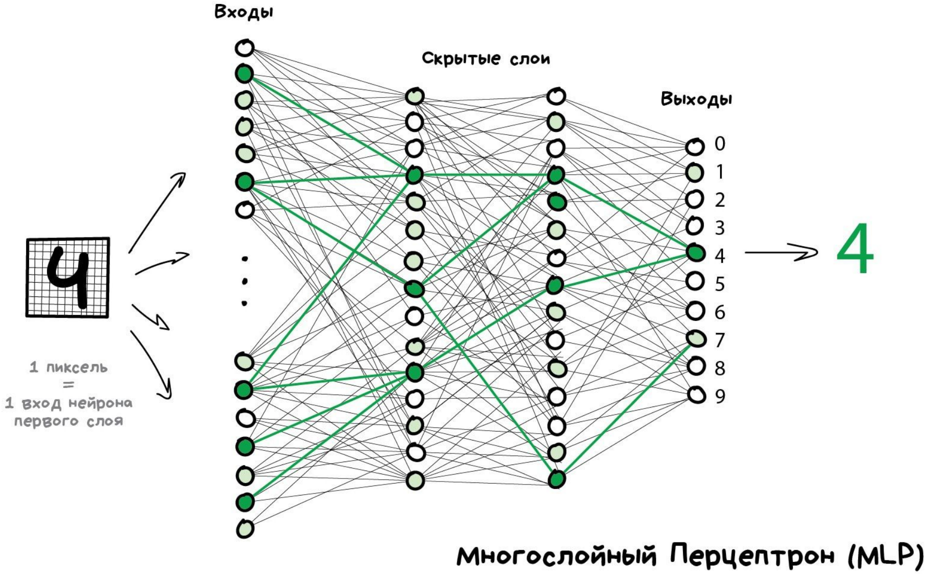
# Функция сигмоиды

$$\sigma(t) = \frac{1}{1 + e^{-t}}$$

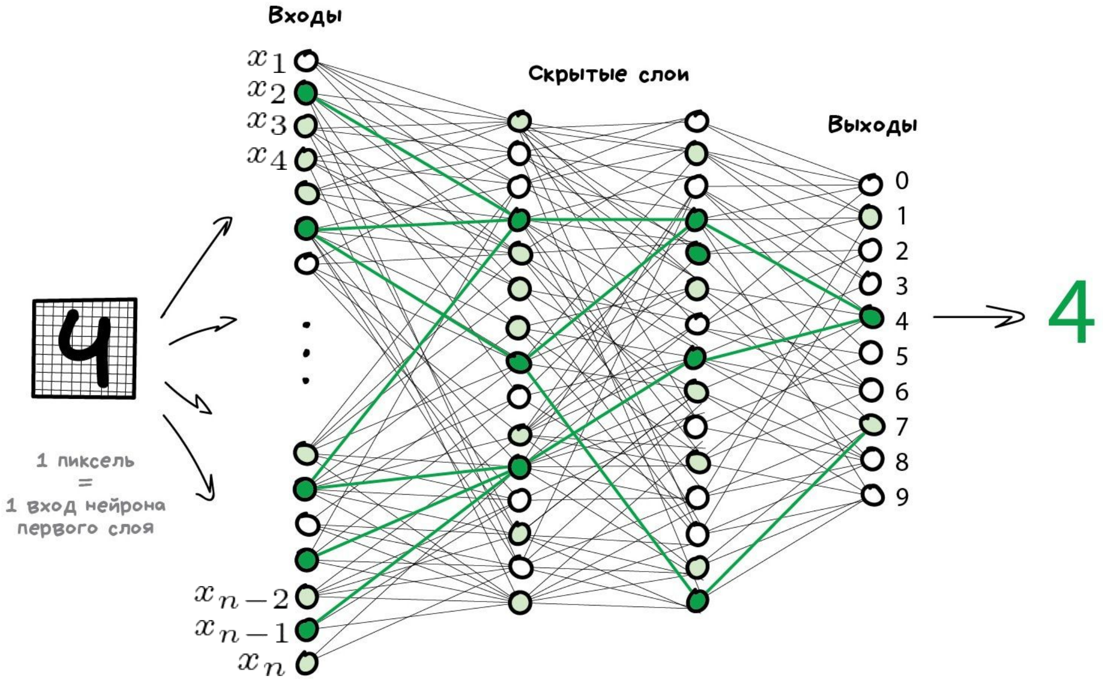


# Многослойный перцептрон

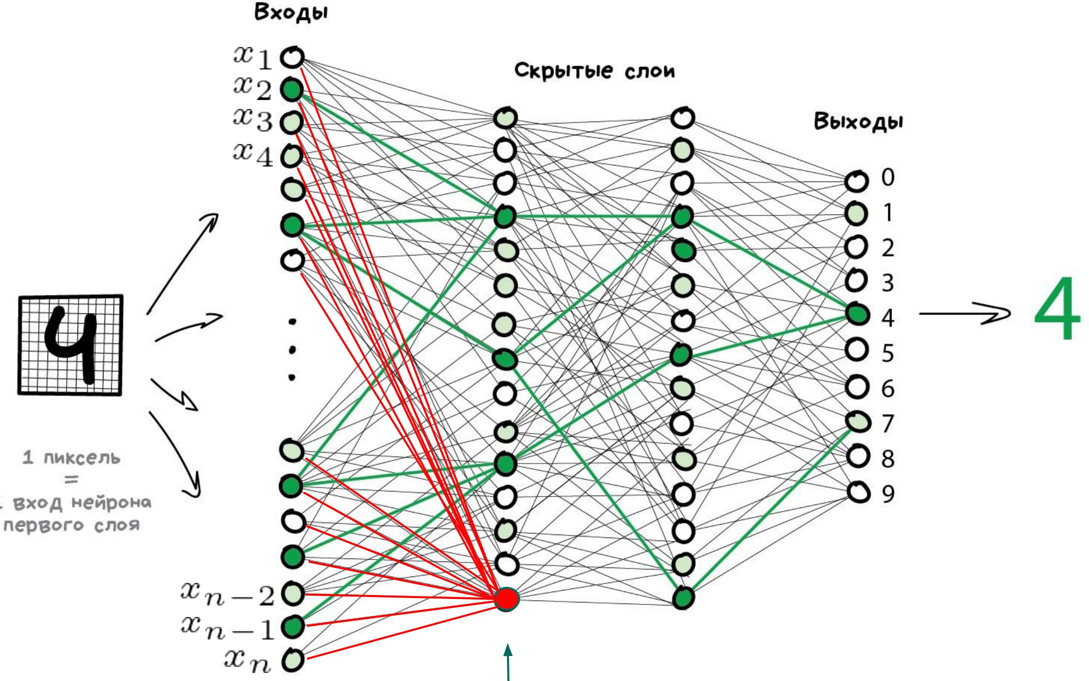
- Многослойный перцептрон — простейшая архитектура нейронной сети
- Каждый слой нейронов связан со всем нейронами с предыдущего слоя
- Выходные нейроны соответствуют классам изображений



# Многослойный перцептрон



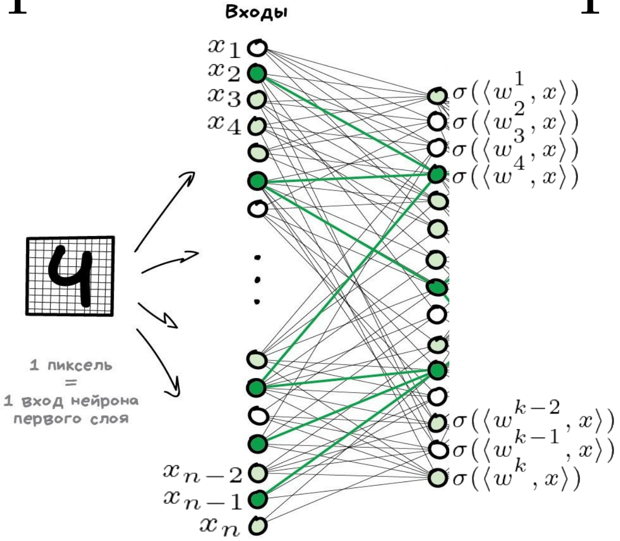
# Многослойный перцептрон




$$y_i = \sigma(\langle w^i, x \rangle)$$

$w^i$ — вектор весов $i$-ого нейрона

# Преобразование вектора в перцептроне




$$= \sigma \begin{pmatrix} \langle w^1, x\rangle \\ \langle w^2, x\rangle \\ \dots \\ \langle w^k, x\rangle \end{pmatrix} = \sigma(Wx)$$

линейное преобразование вектора $x$

$$W = \begin{pmatrix} w_1^1 & w_2^1 & \dots & w_n^1 \\ w_1^2 & w_2^2 & \dots & w_n^2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ w_1^k & w_2^k & \dots & w_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \\ \dots \\ w^k \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

# Преобразование вектора в перцептроне

- Полносвязный слой нейронной сети выполняет линейный оператор
- Функция активации создаёт нелинейность: без неё нейронная сеть была бы просто линейным алгоритмом

# Резюме

- Матрица соответствует линейному оператору
- Умножение матриц соответствует композиции линейных операторов
- Линейные операторы имеют естественную геометрическую интерпретацию
- Нейронные сети удобно описывать в терминах матриц и линейных операторов

# The End