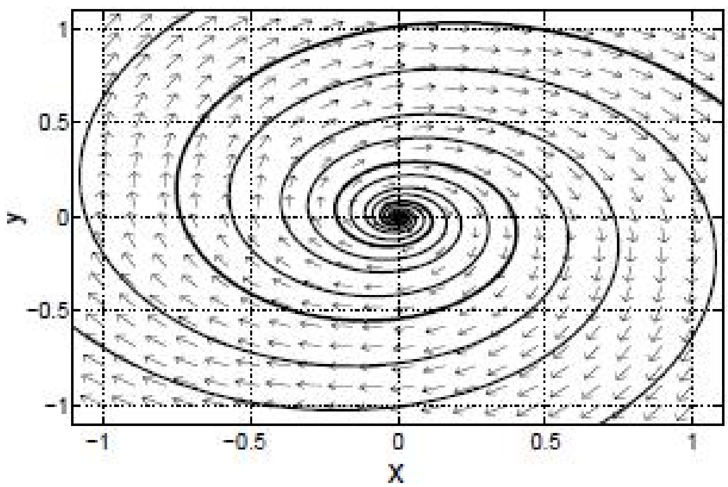
ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Apuntes del curso 2019-2020



Facultad de Matemáticas

Universidad De Murcia

Emilio Pardo Ballesteros

10 de febrero de 2020

Índice

Tema 1 ⋈ Ideas básicas

⋈ Primeras definiciones

Definición 1.1 ▸ Ecuación diferencial ordinaria de orden 1 (unidimensional)

Llamamos *ecuación diferencial ordinaria* de orden 1 a una relación de la forma:

$$f(t, x, x') = 0$$

donde f es una función definida en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Llamamos también *variable independiente* a $t \in \mathbb{R}$ y *variable dependiente* a $x(t)$, que toma valores reales y es derivable $(x = x(t), x' = x'(t), \dots)$

Definición 1.2 ▸ Solución de una EDO de orden 1 (unidimensional)

Dada la función $f(t, x, x') = 0$ llamamos *solución* de dicha ecuación a una función φ definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ que toma valores reales y es derivable en I, que cumple:

- Para cualquier $t \in I$, $(t, \varphi(t), \varphi'(t)) \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$.
- Para todo $t \in I$, $f(t, \varphi(t), \varphi'(t)) = 0$.

Se dice que la ecuación diferencial de orden 1 está resuelta respecto a la derivada si se escribe en la forma:

$$x' = g(t, x) \quad \text{donde} \quad g : \Omega \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}.$$

Definición 1.3 ▸ EDO de orden 1 (p-dimensional)

Decimos que una EDO de orden 1 es *p-dimensional* si

$$x' = F(t, x)$$

donde F es una función definida en un abierto Ω de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$ que toma valores en $\mathbb{R}^p$. La variable independiente es t y $x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$.

Podemos escribir la ecuación en función de sus funciones coordenadas:

$$\text{Sea } x' = F(t, x), x \in \mathbb{R}^p, x = (x_1, ..., x_p), F(F_!, ..., F_p)$$

$$\begin{cases} x_1' = F_1(t, x, ..., x_p) \\ \vdots \\ x_p' = F_p(t, x, ..., x_p) \end{cases}$$

Ejemplo:

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_1 \end{aligned}\right\} \quad \text{o también la podemos escribir como} \quad z = (x_1, x_2) \quad z' = (x_2, x_1)$$

$$\text{o al ser lineal, se puede escribir como} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

□

Definición 1.4 ▶ Solución de una EDO de orden 1 (p-dimensional

Llamamos solución de una EDO de orden 1 p-dimensional a la función $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$, que cumple:

- $\forall t \in I, \quad (t, \varphi(t)) \in \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$
- $\forall t \in I, \quad \varphi'(t) = F(t, \varphi(t))$

Nota: esto solamente es una extensión de la definición de solución unidimensional.

Definición 1.5 ▶ EDO de orden n (unidimensional)

Decimos que una EDO es de orden n (resuelta respecto a la derivada) si es de la forma:

$$x^{(n)} = g(t, x, \ldots, x^{(n-1)})$$

donde g es una función definida en un abierto Ω de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ y toma valores a $\mathbb{R}$.

Definición 1.6 ▶ Solución de una EDO de ornen n (unidimensional)

Una solución de la ecuación anterior es una función $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que es n veces derivable y verifica:

- $\forall t \in I \quad (t, \varphi(t), \ldots, \varphi^{(n-1)}(t)) \in \Omega$
- $\forall t \in I \quad \varphi^{(n)}(t) = g(t, \varphi(t), \ldots, \varphi^{(n-1)}(t))$

Proposición 1.1 ▶ Una EDO de orden n es equivalente a n EDOs de orden 1

Una ecuación del tipo:

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

es equivalente a un sistema de ecuaciones de n EDOs de orden 1 donde:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &:= y \\ x_2 &:= y' \\ &\vdots \\ x_{n-1} &:= y^{(n-2)} \\ x_n &:= y^{(n-1)} \end{aligned}\right\} \longrightarrow \left.\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ &\vdots \\ x_{n-1}' &= x_n \\ x_n' &= f(t, x_1, \dots, x_n) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

DEMOSTRACIÓN: Si consideramos φ solución de (1), entonces $\psi(t) = (\varphi(t), \dots, \varphi^{(n-1}(t))$ es solución de (2), donde $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\psi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. □

EJEMPLO:

Podemos reescribir $x'' = -x$ de la forma:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -x_1 \end{cases}$$

□

EJEMPLO:

Veamos ahora algunas soluciones de EDOs:

1. Sea $x' = ax = f(t, x)$ tiene como solución $x(t) = ke^{at}$. Podemos observar que $f : \mathbb{R}x\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $x(t)$ está definido en todo $\mathbb{R}$. Cuando la solución de una ecuación está definida en todo el intervalo (como en este caso) se dice que hay ***existencia global***.

2. Sea $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $F(x, y, y', y'') \equiv 4 - 4x^2 + (y')^2 - (y'')^2 = 0$ tiene como solución $\varphi(x) = x^2$ definida sobre todo $\mathbb{R}$.

3. $$y' = f(x) = \frac{1}{x} \qquad f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$$
$$y_1(x) = log(x) + c \quad \text{es solución,} \quad y_1 : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$$
$$y_2(x) = log(-x) + c \quad \text{es solución,} \quad y_1 : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$$

   Tenemos también *existencia global.*

4.
$$x' = -\frac{1}{2}x^3 = f(t,x) \qquad f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \quad \text{es una solución}$$
Como podemos ver, $x' = f(t,x)$ está definida en todo $\mathbb{R}^2$, sin embargo $\varphi : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$. Las soluciones no tienen por qué estar definidas en todo el intervalo, cuando esto ocurre, decimos que hay *existencia ???*.

5. Otro ejemplo en el que no encontramos *existencia global* es $x' = -x^2 = f(t,x)$, $\quad f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dado que sus soluciones son de la forma:
$$x(t) = \frac{1}{t-c} \quad \text{con} \quad c \in \mathbb{R}$$

□

En el ejemplo anterior podemos encontrar soluciones que dependen de una constante arbitraria c. Para poder elegir o determinar una de ellas preciso imponer una ecuación suplementaria:

Definición 1.7 ► Problema de Cauchy

Un tipo de condición usual al resolver una ecuación es prefijar el valor en un punto t_0, es decir, consideramos el problema:
$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$
llamado problema de Cauchy o problema de valores iniciales.

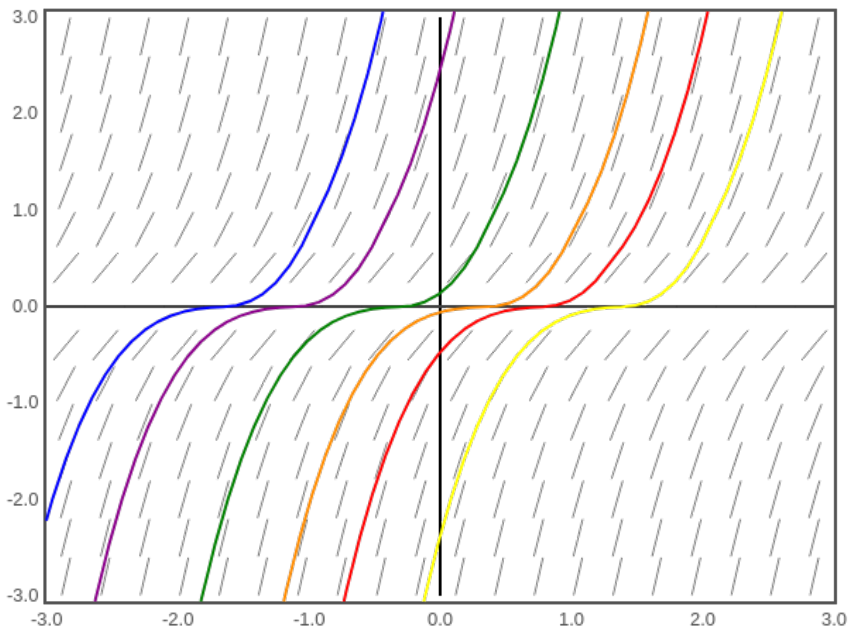
⋈ Unicidad de soluciones

Ya hemos estudiado la existencia (global o no) de las soluciones, ahora procederemos a estudiar la **unicidad de las soluciones** mediante un ejemplo:

Ejemplo:

Sea el problema de Cauchy:
$$\begin{cases} y' = 3y^{\frac{2}{3}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Podemos encontrar la solución obvia $y(t) \equiv 0$. Otra solución sería $y_c(t) = (t-c)^3$ (pronto aprenderemos a calcularlas), como $y_c(0) = 0 \Rightarrow c = 0$. Pero si nos damos cuenta, no tenemos solamente estas dos soluciones sino que tenemos infinitas, dado que las trasladadas de $y_c(t)$ que también son soluciones:



En un futuro estudiaremos la diferencia entre unicidad local y global, pero la idea principal es que en un punto (t_0, x_0) podemos encontrar una única solución que pasa por él en un entorno local del punto, pero sin embargo, globalmente, existen infinitas soluciones que pasan por dicho punto. □

⋈ Ecuaciones autónomas

Antes de estudiar qué son las ecuaciones autónomas, introduciremos unos conceptos de notación previos:

Definición 1.8 ▶ Notación: Espacio de fases, órbita y trayectoria

En el sistema $x' = f(t, x)$, $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, llamamos espacio de fases (o de estados) a el conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Sea $\varphi : I \to \Omega$ solución de la ecuación, denominamos a $\varphi(I)$ la órbita de la ecuación y a $graf(\varphi) = \{(t, \varphi(t)) : t \in I\} \subset \mathbb{R} \times \Omega$la trayectoria o curva integral.

Definición 1.9 ▶ Ecuación autónoma

Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la función $x' = f(t, x)$ es autónoma si f no depende de la variable independiente, es decir:

$$x' = f(t, x) = g(x) \qquad g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

El ejemplo anterior es un ejemplo de ecuación autónoma.

Proposición 1.2 ▶ Propiedad de las ecuaciones autónomas

Sea $x' = g(x)$ y $\varphi(t) : I \to U$ es solución y $c \in \mathbb{R}$es una constante, entonces:

$$\varphi_c(t) = \varphi(t+c) \quad \text{es también solución, donde } \varphi_c : \{I - c : t \in I\} \to U$$

Demostración:

$\varphi_c'(t) = \varphi'(t+c) = g(\varphi(t+c)) = g(\varphi_c(t))$

□

Nota: Obsérvese que φ y φ_c son soluciones distintas pero sus órbitas $\varphi(I) = \varphi_c(I)$ son iguales.

Ejemplo:

"El origen de los tiempos lo pongo donde yo quiera".

$$\begin{cases} x' = g(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad \tilde{\varphi}(t) = \varphi(t + t_0) \text{ es solución} \begin{cases} x' = g(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

□

Cualquier ecuación no autónoma es equivalente a una autónoma cuando se aumenta la dimensión del espacio de fases en una unidad:

$$y' = f(t,y) \quad \longrightarrow \quad \left\{ \begin{matrix} y' = f(t,y) \\ t' = 1 \end{matrix} \right\} \quad \begin{matrix} Y' = F(Y) \\ Y := (t,y) \end{matrix}$$

donde $f : I \times J \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y $F : w \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$.

Geométricamente:

Las ecuaciones autónomas se pueden ver de manera equivalente a un campo de vectores. Definamos primero este concepto:

Definición 1.10 ▶ Campo de vectores

Un campo de vectores puede interpretarse como una aplicación de la forma:

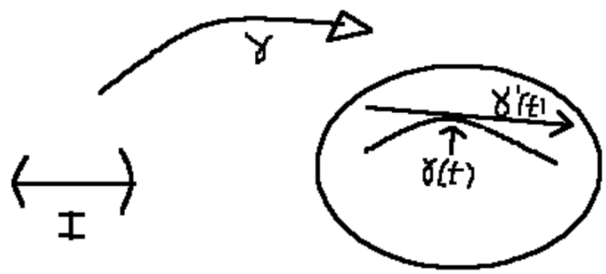
$$F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

Podemos verlo como una aplicación que manda un vector sobre cada punto del abierto.

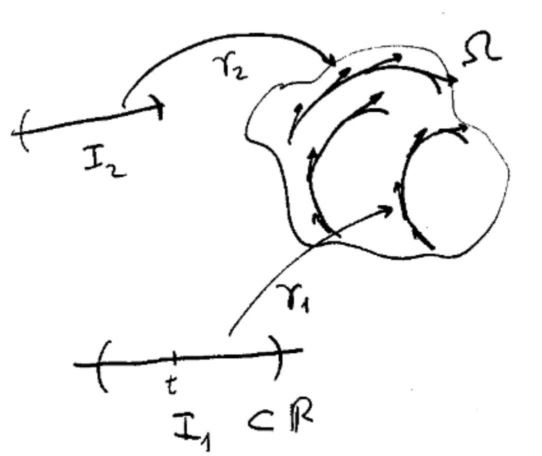
Podemos ver ahora que las ideas de ecuación autónoma y campos de vectores son equivalentes:

Sea $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $x' = g(x)$ una ecuación autónoma con solución $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \Omega$.

Escribiendo $\gamma(t) = (\gamma_1(t), ..., \gamma_n(t))$ y $\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), ..., \gamma_n'(t))$ podemos representar gráficamente la solución (en $\mathbb{R}^2$):



Y podemos dibujar el campo de vectores asociado:

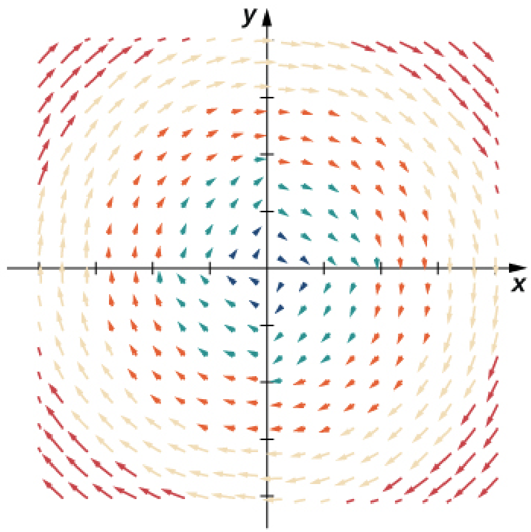


Ejemplo:

1. Si tenemos una ecuación autónoma $x' = g(x)$ y una solución φ, entonces φ y $\varphi_c(t) = \varphi(t-c)$ son dos ecuaciones con la misma órbita pero distintas trayectorias.

2. Sea $x'' = -x$ o equivalentemente:

$$\left\{ \begin{array}{c} x' = y \\ y' = -x \end{array} \right\} \longrightarrow g(x,y) = (y,-x)$$



(a)

Podemos considerar dos soluciones $\varphi(t) = (\sin(t), \cos t)$ y $\psi(t) = (\cos(t), -\operatorname{sen} t)$. Ambas tienen la misma órbita recorrida en el mismo sentido pero empiezan en puntos distintos dado que $\varphi(0) = (0, 1)$ y $\psi(0) = (1, 0)$.

□

Nota: Por cada punto pasa una única órbita, dos órbitas distintas no se pueden cortar, si lo hacen son idénticas. Podemos verlo como que tenemos el espacio ”descompuesto.en curvas que no se cortan.

⋈ Método de las isoclinas

Definición 1.11 ▶ Isoclina

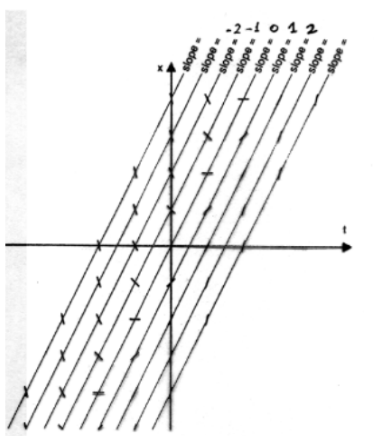
Se llama isoclina al conjunto de los puntos del plano en donde las rectas tangentes a las gráficas de las soluciones de la ecuación diferencial tienen la misma pendiente. Estos puntos son aquellos que satisfacen $x' = f(t.x) = c$.

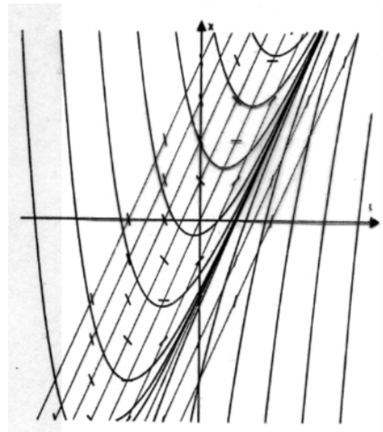
Explicación del método:

Este método **no** lo utilizaremos a lo largo de la asignatura pero está bien conocerlo. Se utiliza para EDOs de orden 1 y unidemensionales. Sea $x' = f(t, x)$ es útil observar que la pendiente x' de la solución tiene valor constante en todos los puntos de la curva $f(t, x) = c$. Por definición, estas son las llamadas curvas isoclinas. Basta dibujar unas cuantas haciendo variar la constante c y en algunos puntos de cada una trazar el vector tangente a la solución en ese punto. Por último basta buscar una curva que pase por los puntos dibujados y sea tangente a los vectores.

Ejemplo:

$$y' = 2x - y \qquad 2x - y = c \Rightarrow y = 2x - c \quad \text{isoclinas}$$





□

⋈ Cambios de variable

▷ Cambio en la variable dependiente

Proposición 1.3 ▶ Cambio de variable sobre un campo de vectores

Sea $x' = f(x)$ siendo $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y $h : \Omega \to V$ un difeomorfismo (homeomorfismo diferenciable con inversa diferenciable). Tenemos que la ecuación anterior es equivalente a

$$y' = dh(h^{-1}(y))f(h^{-1}(y)) = g(y) \qquad (1)$$

Es decir, si tenemos $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \Omega$ solución de la ecuación original, $\psi = h \circ \varphi : I \subset \mathbb{R} \to V$ es solución de (1).

Lo que buscamos es llevarnos el campo de vectores Ω a V mediante el difeomorfismo h. La idea para ello es que para cada punto $y \in V$, nos lo llevamos a Ω con h^{-1}. El punto $h^{-1}(y)$ tiene asociado un vector en Ω. Basta llevarnos ese vector de nuevo a V mediante la diferencial de h (que es una aplicación lineal). De esta idea sale la construcción de la ecuación anterior.

Demostración:

Demostremos ahora que ψ es solución de y:

$$\psi(t) = h(\varphi(t)) \to \psi'(t) = dh(\varphi(t))\varphi'(t) = dh(\varphi(t))f(\varphi(t)) = dh(h^{-1}(\varphi(t)))f(h^{-1}(\varphi(t))) = g(\psi(t))$$

$\square$

Lo mismo pero visto en coordenadas:

$$\begin{array}{ccc} f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n & h:\Omega\to V & h^{-1}=H:V\to\Omega \\ f(x)=(f_1(x),\dots,f_n(x)) & h(x)=(h_1(x),\dots,h_n(x)) & H(y)=(H_1(y),\dots,H_n(y)) \\ x=(x_1,\dots,x_n)\in\Omega & & y=(y_1,\dots,y_n)\in V \end{array}$$

$$g(y) = dh(H(y))f(H(y)) \longrightarrow \begin{pmatrix} g_1(y) \\ \vdots \\ g_n(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(H(y)) & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n}(H(y)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_n}{\partial x_1}(H(y)) & \dots & \frac{\partial h_n}{\partial x_n}(H(y)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(H(y)) \\ \vdots \\ f_n(H(y)) \end{pmatrix}$$

$$g_j(y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial h_j}{\partial x_k}(H_1(y),...,H_n(y))f_k(H_1(y),...,H_n(y)) \quad j=1,\dots,n$$

$$\psi(t) = h\circ\varphi(t) \qquad \varphi=(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$$
$$\psi=(\psi_1,\dots,\psi_n)$$
$$\psi_j(t) = h_j(\varphi(t))$$

$$\psi_j'(t) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial h_j}{\partial x_k}(\varphi(t))\varphi_k'(t) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial h_j}{\partial x_k}(H_1(\psi(t)),...,H_n(\psi(t)))f_k(H_1(\psi(t)),...,H_n(\psi(t)))$$

Ejemplo:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_1 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad f(y_1,y_2) = (y_2,y_1)$$

$$h(y_1,y_2) = (y_1+y_2, y_1-y_2) = (x_1,x_2)$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = y_1+y_2 \\ x_2 = y_1-y_2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} \dot{x}_1 = \dot{y}_1+\dot{y}_2 = y_2+y_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = \dot{y}_1-\dot{y}_2 = y_2-y_1 = -x_2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{array}\right\}$$

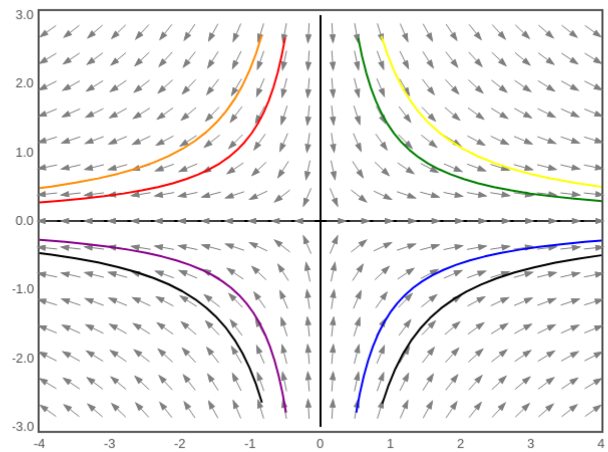
Cuyas soluciones ya sabemos que son $\left\{\begin{array}{l} x_1(t) = c_1e^t \\ x_2(t) = c_2e^{-t} \end{array}\right\}$ Ahora basta deshacer el cambio:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = y_1+y_2 \\ x_2 = y_1-y_2 \end{array}\right\} \longrightarrow \left.\begin{array}{ll} y_1 = \frac{x_1+x_2}{2} & (\text{sumando } x_1+x_2) \\ y_2 = \frac{x_1-x_2}{2} & (\text{restando } x_1-x_2) \end{array}\right\} \quad \text{Soluciones:} \quad \left.\begin{array}{l} y_1(t) = \frac{1}{2}(c_1e^t+c_2e^{-t}) \\ y_2(t) = \frac{1}{2}(c_1e^t-c_2e^{-t}) \end{array}\right\}$$

Gráficamente:

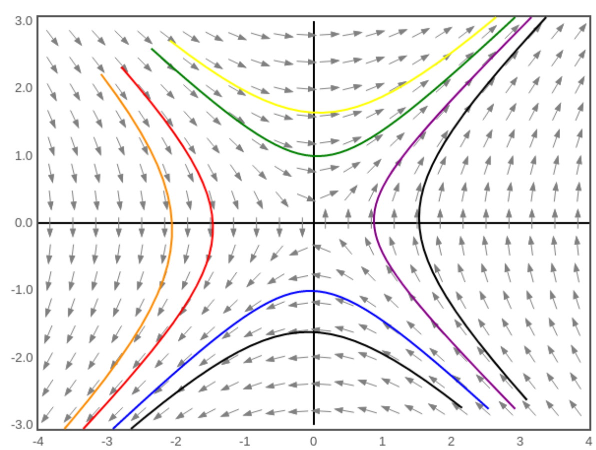
1. $x_1(t) = c_1 e^t$

   $x_2(t) = c_2 e^{-t}$



2. $y_1(t) = \frac{1}{2}(c_1 e^t + c_2 e^{-t}), \quad y_2(t) = \frac{1}{2}(c_1 e^t - c_2 e^{-t})$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$ Rotación de $\frac{\pi}{4}$ en sentido antihorario.



$\square$

▷ Cambio en la variable independiente

Proposición 1.4 ▶ Cambio en la variable independiente

Sean I, J , Ω conjuntos abiertos, $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y consideramos la ecuación $\dot{x} = f(x)$, de la cual $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \Omega$ es solución. Sea además $\mu : J \subset \mathbb{R} \to I$ un difeomorfismo (es decir, que $\mu'(s) \neq 0, \forall s \in J$). Entonces se cumple:

$$\psi = \varphi \circ \mu : J \to \Omega \quad \text{es solución de } \dot{y} = f(y)\dot{\mu}(s)$$

Recíprocamente sea la ecuación $\dot{y}(s,y) = f(y)\nu(s)$, siendo $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \nu : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y $\nu(s) \neq 0, \forall s \in J$. Consideramos μ una primitiva de ν y $\dot{\mu}(s) = \nu(s) \neq 0, \forall s \in J$(es decir, μ tiene inversa $\mu^{-1} : I \subset \mathbb{R} \to J$ derivable).

Supongamos además $\psi : (a,b) \subset J \to \Omega$ es una solución de $\dot{y} = f(y)\nu(s)$. Entonces se cumple que:

$$\varphi = \psi \circ \mu^{-1} : (\mu(a), \mu(b)) \to \Omega \quad \text{es solución de } \dot{x} = f(x)$$

Demostración:

$\Rightarrow$

$$\dot{\psi}(s) = \dot{\varphi}(\mu(s))\dot{\mu}(s) = f(\varphi(\mu(s))\dot{\mu}(s) = f(\psi(s))\dot{\varphi}(s)$$

$\Leftarrow$

$$\dot{\varphi}(t) = \dot{\psi}(\mu^{-1}(t))(\dot{\mu})^{-1}(t) = f(\psi(\mu^{-1}(t)))\nu(\mu^{-1}(t))\frac{1}{\dot{\mu}(\mu^{-1}(t))} =$$
$$= f(\varphi(t))\nu(\mu^{-1}(t)) \cdot \frac{1}{\nu(\mu^{-1}(t))} = f(\varphi(t))$$

□

Proposición 1.5 ▶ Mismo cambio de variable pero en ecuaciones no autónomas

Sean I, J , Ω conjuntos abiertos, $f : \Omega \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y consideramos la ecuación $\dot{x} = f(t,x)$, de la cual $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es solución. Sea además $\mu : J \subset \mathbb{R} \to I$ un difeomorfismo. Entonces se cumple:

$$\psi = \varphi \circ \mu : J \to \mathbb{R}^n \quad \text{es solución de } \dot{y} = f(\mu(s), y)\dot{\mu}(s)$$

Demostración:

$$\dot{\psi}(s) = \dot{\varphi}(\mu(s))\dot{\mu}(s) = f(\varphi(s), \varphi(\mu(s))\dot{\mu}(s) = f(\varphi(s), \psi(s))\dot{\varphi}(s)$$

□

Tema 2 ⋈ Métodos de resolución

Antes de estudiar los distintos métodos de integración, enunciaremos uno de los teoremas más importantes de la asignatura: el teorema de Picard, que lo demostraremos más adelante:

Teorema 2.1 ▶ Teorema de Picard

Sea $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un abierto y sea $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una función continua, de clase C^1 con respecto a la segunda variable. Entonces, para cada $(t_0, x_0) \in \Omega$, existe un entorno $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ y una función $\varphi : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \to \mathbb{R}$ que es la única solución definida en $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ del problema de Cauchy:

$$\left.\begin{aligned} x' &= f(t,x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}\right\}$$

⋈ Cálculo de la primitiva

Es el caso más elemental de todos. Se emplea para ecuaciones del tipo:

$$\dot{x} = f(t)$$

donde $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Las soluciones se optienen por integración directa:

$$\dot{\varphi}(t) = f(t)\varphi(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)ds + c$$

Añadiendo la condición de Cauchy $x(t_0) = x_0$ se tiene como solución:

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s)ds$$

Toda solución $\varphi(t)$ está definida sobre (a, b) y tiene unicidad.

Trabajando en n dimensiones:

$$\dot{x} = f(t) \qquad f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

$$f = (f_1, \dots, f_n) \qquad \left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(t) \end{aligned}\right\}$$

Las soluciones son de la forma:

$$\int_{t_0}^{t} f(s)ds = (\int_{t_0}^{t} f_1(s)ds, \dots, \int_{t_0}^{t} f_n(s)ds)$$

⋈ Ecuaciones de variables separables

Definición 2.1 ▶ Ecuaciones de variables separables

Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ y $g:(c,d)\to\mathbb{R}$ se dice que una ecuación es de variables separables (de orden 1 en $\mathbb{R}$) si es del tipo:

$$\dot{y}=f(x)g(y)$$

Teorema 2.2 ▶ Existencia-unicidad de variables separables

Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ y $g:(c,d)\to\mathbb{R}$ funciones continuas con $g(y)\neq 0, \forall y\in(c,d)$. Entonces para $(x_0,y_0)\in(a,b)\times(c,d)$ existe una única solución del problema definida en algún entorno de x_0 (no tiene por qué estar definido en todo (a,b).

$$\left.\begin{aligned}\dot{y}&=f(x)g(y)\\ y(x_0)&=y_0\end{aligned}\right\}$$

⋈