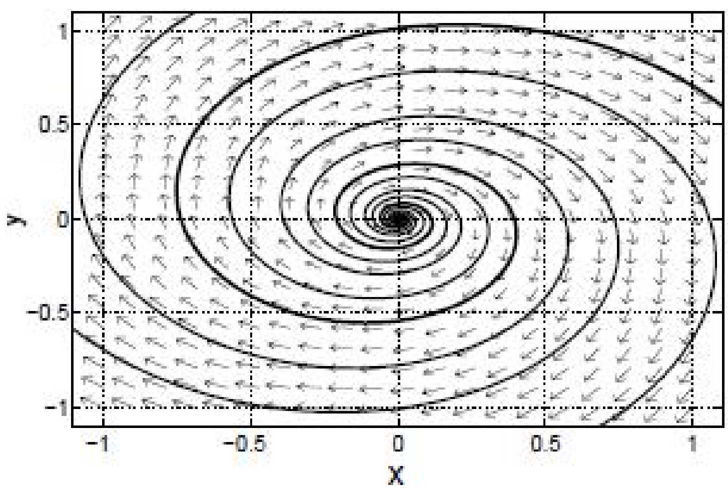
ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Apuntes del curso 2019-2020



Facultad de Matemáticas

Universidad De Murcia

Emilio Pardo Ballesteros

17 de febrero de 2020

Índice

Tema 1 ⋈ Ideas básicas

⋈ Primeras definiciones

Definición 1.1 ▶ Ecuación diferencial ordinaria de orden 1 (unidimensional)

Llamamos *ecuación diferencial ordinaria* de orden 1 a una relación de la forma:

$$f(t, x, x') = 0$$

donde f es una función definida en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Llamamos también *variable independiente* a $t \in \mathbb{R}$ y *variable dependiente* a $x(t)$, que toma valores reales y es derivable $(x = x(t), x' = x'(t), \dots)$.

Definición 1.2 ▶ Solución de una EDO de orden 1 (unidimensional)

Dada la función $f(t, x, x') = 0$ llamamos *solución* de dicha ecuación a una función φ definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ que toma valores reales y es derivable en I, que cumple:

- Para cualquier $t \in I$, $(t, \varphi(t), \varphi'(t)) \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$.
- Para todo $t \in I$, $f(t, \varphi(t), \varphi'(t)) = 0$.

Se dice que la ecuación diferencial de orden 1 está resuelta respecto a la derivada si se escribe en la forma:

$$x' = g(t, x) \quad \text{donde} \quad g : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}.$$

Definición 1.3 ▶ EDO de orden 1 (p-dimensional)

Decimos que una EDO de orden 1 es *p-dimensional* si

$$x' = F(t, x)$$

donde F es una función definida en un abierto Ω de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$ que toma valores en $\mathbb{R}^p$. La variable independiente es t y $x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$.

Podemos escribir la ecuación en función de sus funciones coordenadas:

$$\text{Sea } x' = F(t, x), x \in \mathbb{R}^p, x = (x_1, ..., x_p), F(F_1, ..., F_p)$$

$$\begin{cases} x_1' = F_1(t, x, ..., x_p) \\ \vdots \\ x_p' = F_p(t, x, ..., x_p) \end{cases}$$

EJEMPLO:

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_1 \end{aligned}\right\} \quad \text{o también la podemos escribir como} \quad z = (x_1, x_2) \quad z' = (x_2, x_1)$$

$$\text{o al ser lineal, se puede escribir como} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

□

Definición 1.4 ▶ Solución de una EDO de orden 1 (p-dimensional

Llamamos solución de una EDO de orden 1 p-dimensional a la función $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$, que cumple:

- $\forall t \in I, \quad (t, \varphi(t)) \in \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$
- $\forall t \in I, \quad \varphi'(t) = F(t, \varphi(t))$

NOTA: esto solamente es una extensión de la definición de solución unidimensional.

Definición 1.5 ▶ EDO de orden n (unidimensional)

Decimos que una EDO es de orden n (resuelta respecto a la derivada) si es de la forma:

$$x^{(n)} = g(t, x, \dots, x^{(n-1)})$$

donde g es una función definida en un abierto Ω de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ y toma valores en $\mathbb{R}$.

Definición 1.6 ▶ Solución de una EDO de ornen n (unidimensional)

Una solución de la ecuación anterior es una función $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que es n veces derivable y verifica:

- $\forall t \in I \quad (t, \varphi(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)) \in \Omega$
- $\forall t \in I \quad \varphi^{(n)}(t) = g(t, \varphi(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t))$

Proposición 1.1 ▶ Una EDO de orden n es equivalente a n EDOs de orden 1

Una ecuación del tipo:

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

es equivalente a un sistema de ecuaciones de n EDOs de orden 1 donde:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &:= y \\ x_2 &:= y' \\ &\vdots \\ x_{n-1} &:= y^{(n-2)} \\ x_n &:= y^{(n-1)} \end{aligned}\right\} \longrightarrow \left.\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ &\vdots \\ x_{n-1}' &= x_n \\ x_n' &= f(t, x_1, \dots, x_n) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Demostración: Si consideramos φ solución de (1), entonces $\psi(t) = (\varphi(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t))$ es solución de (2), donde $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\psi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Recíprocamente, si $\psi(t) = (\psi_1(t), \dots, \psi_{n-1})$ solución de (2), entonces $\varphi(t) := \psi_1(t)$ es solución de (1). □

Ejemplo:

Podemos reescribir $x'' = -x$ de la forma:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -x_1 \end{cases}$$

□

Ejemplo:

Veamos ahora algunas soluciones de EDOs:

1. Sea $x' = ax = f(t, x)$ tiene como solución $x(t) = ke^{at}$. Podemos observar que $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $x(t)$ está definido en todo $\mathbb{R}$. Cuando la solución de una ecuación está definida en todo el intervalo donde puede estar definida (como en este caso) se dice que hay ***existencia global***.

2. Sea $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $F(x, y, y', y'') \equiv 4 - 4x^2 + (y')^2 - (y'')^2 = 0$ tiene como solución $\varphi(x) = x^2$ definida sobre todo $\mathbb{R}$.

3. $$y' = f(x) = \frac{1}{x} \qquad f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$$
$$y_1(x) = \log(x) + c \quad \text{es solución,} \quad y_1 : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$$
$$y_2(x) = \log(-x) + c \quad \text{es solución,} \quad y_2 : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$$

Tenemos también *existencia global*, dado que tenemos dos soluciones que están definidas en $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$ respectivamente, que es todo el intervalo en el que está definida la ecuación inicial.

4.
$$x' = -\frac{1}{2}x^3 = f(t,x) \qquad f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \quad \text{es una solución}$$
Como podemos ver, $x' = f(t,x)$ está definida en todo $\mathbb{R}^2$, sin embargo $\varphi : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$. Las soluciones no tienen por qué estar definidas en todo el intervalo, cuando esto ocurre, decimos que no hay *existencia global*.

5. Otro ejemplo en el que no encontramos *existencia global* es $x' = -x^2 = f(t,x), \quad f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dado que tiene soluciones de la forma:
$$x(t) = \frac{1}{t-c} \quad \text{con} \quad c \in \mathbb{R} \text{ arbitrario}$$

□

En el ejemplo anterior podemos encontrar soluciones que dependen de una constante arbitraria c. Para poder elegir o determinar una de ellas preciso imponer una ecuación suplementaria:

Definición 1.7 ▶ Problema de Cauchy

Un tipo de condición usual al resolver una ecuación es prefijar el valor en un punto t_0, es decir, consideramos el problema:
$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$
llamado problema de Cauchy o problema de valores iniciales.

⋈ Unicidad de soluciones

Ya hemos estudiado la existencia (global o no) de las soluciones, ahora procederemos a estudiar la **unicidad de las soluciones** mediante un ejemplo:

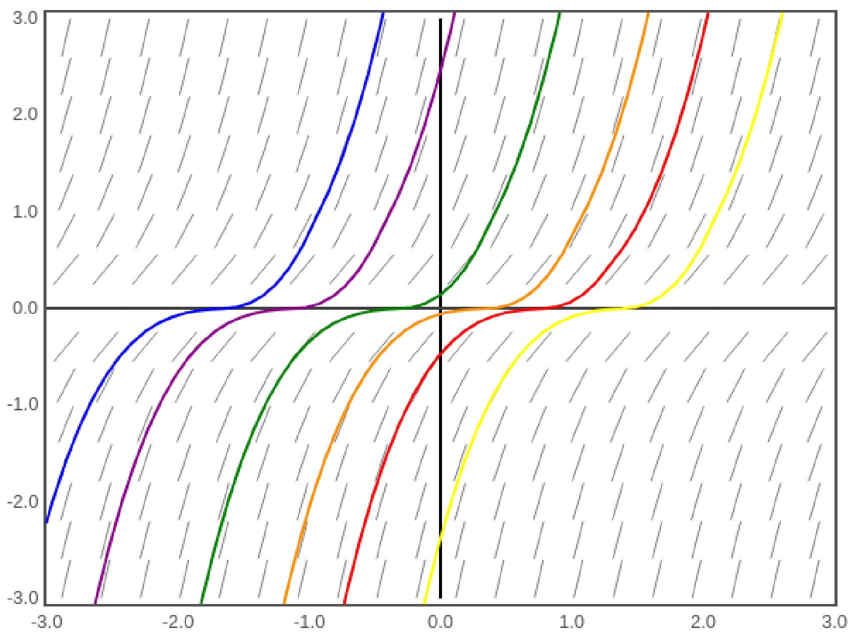
Ejemplo:

Sea el problema de Cauchy:
$$\begin{cases} y' = 3y^{\frac{2}{3}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Podemos encontrar la solución obvia $y(t) \equiv 0$. Otra solución sería $y_c(t) = (t-c)^3$ (pronto aprenderemos a calcularlas), como $y_c(0) = 0 \Rightarrow c = 0$. Pero si nos damos cuenta, no tenemos solamente estas dos soluciones sino que tenemos infinitas, dado que las trasladadas de $y_c(t)$ que también son soluciones. Además podemos ver que son soluciones las funciones definidas de la siguiente manera:

$$\varphi(x) = \begin{cases} (t-c_1)^3 & si\ t \leq c_1 \\ 0 & si\ c_1 < t < c_2 \\ (t-c_2)^3 & si\ t > c_2 \end{cases}$$

Utilizando una herramienta externa podemos ver las soluciones de la ecuación del ejemplo:



En un futuro estudiaremos la diferencia entre unicidad local y global, pero la idea principal es que en un punto (t_0, x_0) podemos encontrar una única solución que pasa por él en un entorno local del punto, pero sin embargo, globalmente, existen infinitas soluciones que pasan por dicho punto. $\square$

⋈ Ecuaciones autónomas

Antes de estudiar qué son las ecuaciones autónomas, introduciremos unos conceptos de notación previos:

Definición 1.8 ▶ Notación: Espacio de fases, órbita y trayectoria

En el sistema $x' = f(t,x)$, $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, llamamos espacio de fases (o de estados) al conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Sea $\varphi : I \to \Omega$ solución de la ecuación, denominamos a $\varphi(I)$ la órbita de la ecuación y a $graf(\varphi) = \{(t, \varphi(t)) : t \in I\} \subset \mathbb{R} \times \Omega$ la trayectoria o curva integral.

Definición 1.9 ▶ Ecuación autónoma

Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la función $x' = f(t,x)$ es autónoma si f no depende de la variable independiente, es decir:

$$x' = f(t,x) = g(x) \qquad g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

El ejemplo anterior es un ejemplo de ecuación autónoma.

Proposición 1.2 ▶ Propiedad de las ecuaciones autónomas

Sea $x' = g(x)$ y $\varphi(t) : I \to U$ es solución y $c \in \mathbb{R}$ es una constante, entonces:

$$\varphi_c(t) = \varphi(t+c) \quad \text{es también solución,} \quad \text{donde } \varphi_c : I - c \to U, \quad I - c = \{t - c : t \in I\}$$

Demostración:

$\varphi_c'(t) = \varphi'(t+c) = g(\varphi(t+c)) = g(\varphi_c(t))$

□

Nota: Obsérvese que φ y φ_c son soluciones distintas pero sus órbitas $\varphi(I) = \varphi_c(I)$ son iguales.

Ejemplo:

"El origen de los tiempos lo pongo donde yo quiera".

$$\begin{cases} x' = g(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad \tilde{\varphi}(t) = \varphi(t + t_0) \text{ es solución} \begin{cases} x' = g(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

□

Geométricamente:

Las ecuaciones autónomas se pueden ver de manera equivalente a un campo de vectores. Definamos primero este concepto:

Definición 1.10 ▶ Campo de vectores

Un campo de vectores puede interpretarse como una aplicación de la forma:

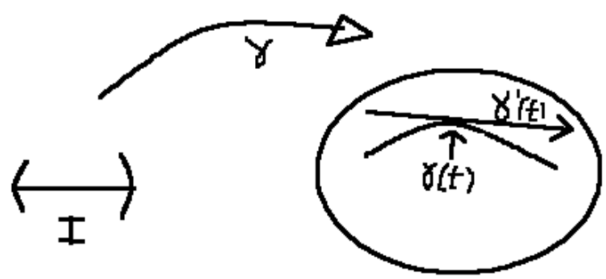
$$F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

Podemos verlo como una aplicación que manda un vector sobre cada punto del abierto.

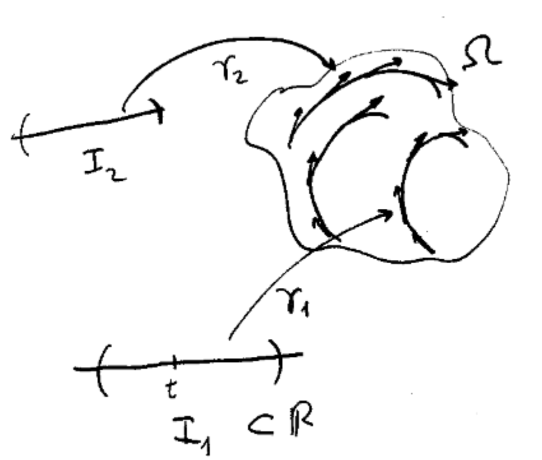
Podemos ver ahora que las ideas de ecuación autónoma y campos de vectores son equivalentes:

Sea $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $x' = g(x)$ una ecuación autónoma con solución $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \Omega$.

Escribiendo $\gamma(t) = (\gamma_1(t), ..., \gamma_n(t))$ y $\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), ..., \gamma_n'(t))$ podemos representar gráficamente la solución (en $\mathbb{R}^2$):



Y podemos dibujar el campo de vectores asociado:

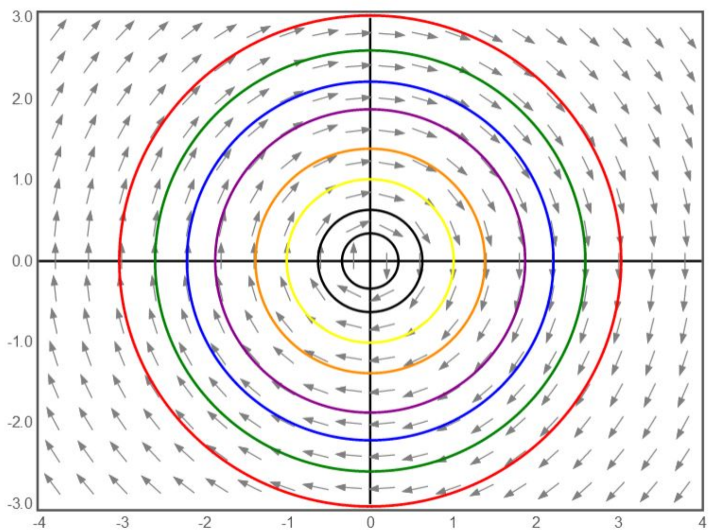


Ejemplo:

1. Si tenemos una ecuación autónoma $x' = g(x)$ y una solución φ, entonces φ y $\varphi_c(t) = \varphi(t-c)$ son dos ecuaciones con la misma órbita pero distintas trayectorias.

2. Sea $x'' = -x$ o equivalentemente:

$$\left\{ \begin{matrix} x' = y \\ y' = -x \end{matrix} \right\} \longrightarrow g(x,y) = (y, -x)$$



Podemos considerar dos soluciones $\varphi(t) = (\sin(t), \cos t)$ y $\psi(t) = (\cos(t), -\operatorname{sen} t)$. Ambas tienen la misma órbita recorrida en el mismo sentido pero empiezan en puntos distintos dado que $\varphi(0) = (0,1)$ y $\psi(0) = (1,0)$.

$\square$

Nota: Por cada punto pasa una única órbita, dos órbitas distintas no se pueden cortar, si lo hacen son idénticas. Podemos verlo como que tenemos el espacio "descompuesto.en curvas que no se cortan.

⋈ Método de las isoclinas

Definición 1.11 ▶ Isoclina

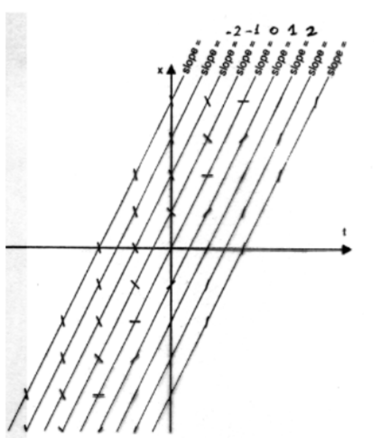
Se llama isoclina al conjunto de los puntos del plano en donde las rectas tangentes a las gráficas de las soluciones de la ecuación diferencial tienen la misma pendiente. Estos puntos son aquellos que satisfacen $x' = f(t.x) = c$.

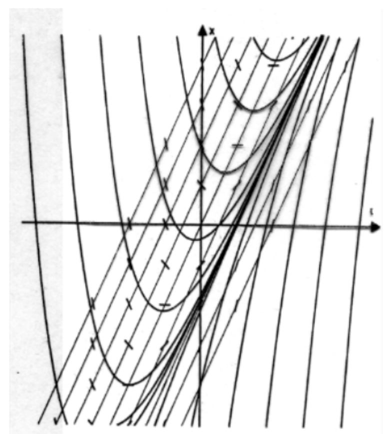
Explicación del método:

Este método **no** lo utilizaremos a lo largo de la asignatura pero está bien conocerlo. Se utiliza para EDOs de orden 1 y unidemensionales. Sea $x' = f(t,x)$ es útil observar que la pendiente x' de la solución tiene valor constante en todos los puntos de la curva $f(t,x) = c$. Por definición, estas son las llamadas curvas isoclinas. Basta dibujar unas cuantas haciendo variar la constante c y en algunos puntos de cada una trazar el vector tangente a la solución en ese punto. Por último basta buscar una curva que pase por los puntos dibujados y sea tangente a los vectores.

Ejemplo:

$$y' = 2x - y \qquad 2x - y = c \Rightarrow y = 2x - c \quad \text{isoclinas}$$





□

⋈ Cambios de variable

▷ Cambio en la variable dependiente

Proposición 1.3 ▶ Cambio de variable sobre un campo de vectores

Sea $x' = f(x)$ siendo $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y $h : \Omega \to V$ un difeomorfismo (homeomorfismo diferenciable con inversa diferenciable). Tenemos que la ecuación anterior es equivalente a

$$y' = dh(h^{-1}(y))f(h^{-1}(y)) = g(y) \qquad (1)$$

Es decir, si tenemos $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \Omega$ solución de la ecuación original, $\psi = h \circ \varphi : I \subset \mathbb{R} \to V$ es solución de (1).

Lo que buscamos es llevarnos el campo de vectores desde Ω a V mediante el difeomorfismo h. La idea para ello es que para cada punto $y \in V$, nos lo llevamos a Ω con h^{-1}. El punto $h^{-1}(y)$ tiene asociado un vector en Ω. Basta llevarnos ese vector de nuevo a V mediante la diferencial de h con $h^-1(y)$ (que es una aplicación lineal). De esta idea sale la construcción de la ecuación anterior.

Demostración:

Demostremos ahora que ψ es solución de y:

$$\psi(t) = h(\varphi(t)) \to \psi'(t) = dh(\varphi(t))\varphi'(t) = dh(\varphi(t))f(\varphi(t)) = dh(h^{-1}(\varphi(t)))f(h^{-1}(\varphi(t))) = g(\psi(t))$$

□

Lo mismo pero visto en coordenadas:

$$\begin{array}{ccc} f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n & h : \Omega \to V & h^{-1} = H : V \to \Omega \\ f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)) & h(x) = (h_1(x), \dots, h_n(x)) & H(y) = (H_1(y), \dots, H_n(y)) \\ x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega & & y = (y_1, \dots, y_n) \in V \end{array}$$

$$g(y) = dh(H(y))f(H(y)) \longrightarrow \begin{pmatrix} g_1(y) \\ \vdots \\ g_n(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(H(y)) & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n}(H(y)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_n}{\partial x_1}(H(y)) & \dots & \frac{\partial h_n}{\partial x_n}(H(y)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(H(y)) \\ \vdots \\ f_n(H(y)) \end{pmatrix}$$

$$g_j(y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial h_j}{\partial x_k}(H_1(y), ..., H_n(y))f_k(H_1(y), ..., H_n(y)) \quad j = 1, \dots, n$$

$$\psi(t) = h \circ \varphi(t) \qquad \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$$

$$\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$$

$$\psi_j(t) = h_j(\varphi(t))$$

$$\psi_j'(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial h_j}{\partial x_k}(\varphi(t))\varphi_k'(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial h_j}{\partial x_k}(H_1(\psi(t)), ..., H_n(\psi(t)))f_k(H_1(\psi(t)), ..., H_n(\psi(t)))$$

Ejemplo:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_1 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad f(y_1, y_2) = (y_2, y_1)$$

$$h(y_1, y_2) = (y_1 + y_2, y_1 - y_2) = (x_1, x_2)$$

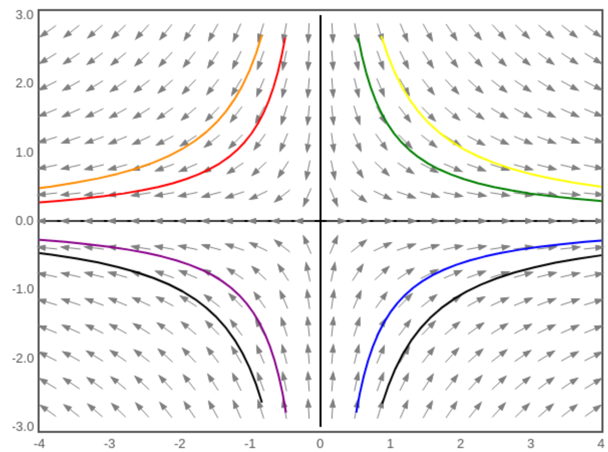
$$\left.\begin{array}{l} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} \dot{x}_1 = \dot{y}_1 + \dot{y}_2 = y_2 + y_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = \dot{y}_1 - \dot{y}_2 = y_2 - y_1 = -x_2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{array}\right\}$$

Cuyas soluciones ya sabemos que son $\left\{\begin{array}{r} x_1(t) = c_1 e^{t} \\ x_2(t) = c_2 e^{-t} \end{array}\right\}$ Ahora basta deshacer el cambio:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \end{array}\right\} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} y_1 = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{(sumando } x_1 + x_2\text{)} \\ y_2 = \frac{x_1 - x_2}{2} \quad \text{(restando } x_1 - x_2\text{)} \end{array}\right\} \quad \text{Soluciones:} \quad \left.\begin{array}{l} y_1(t) = \frac{1}{2}(c_1 e^{t} + c_2 e^{-t}) \\ y_2(t) = \frac{1}{2}(c_1 e^{t} - c_2 e^{-t}) \end{array}\right\}$$

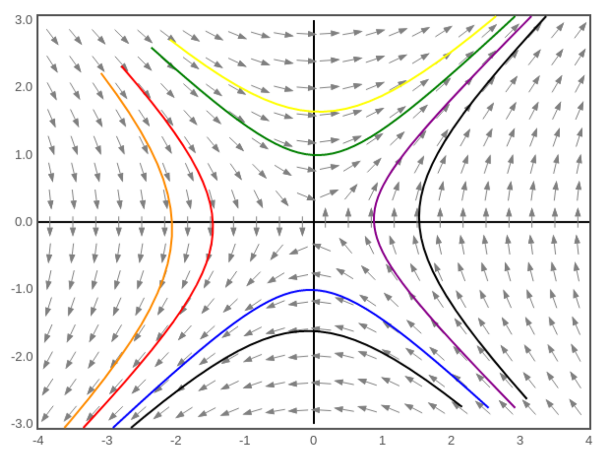
Gráficamente:

1. $x_1(t) = c_1 e^t$
   $x_2(t) = c_2 e^{-t}$



2. $y_1(t) = \frac{1}{2}(c_1 e^t + c_2 e^{-t}), \quad y_2(t) = \frac{1}{2}(c_1 e^t - c_2 e^{-t})$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$ Rotación de $\dfrac{\pi}{4}$ en sentido antihorario.



□

▷ Cambio en la variable independiente

Proposición 1.4 ▶ Cambio en la variable independiente

Sean I, J , Ω conjuntos abiertos, $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y consideramos la ecuación $\dot{x} = f(x)$, de la cual $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \Omega$ es solución. Sea además $\mu : J \subset \mathbb{R} \to I$ un difeomorfismo (es decir, que $\mu'(s) \neq 0, \forall s \in J$). Entonces se cumple:

$$\psi = \varphi \circ \mu : J \to \Omega \quad \text{es solución de } \dot{y} = f(y)\dot{\mu}(s)$$

Recíprocamente sea la ecuación $\dot{y}(s,y) = f(y)\nu(s)$, siendo $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \nu : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y $\nu(s) \neq 0, \forall s \in J$. Consideramos μ una primitiva de ν y $\dot{\mu}(s) = \nu(s) \neq 0, \forall s \in J$(es decir, μ tiene inversa $\mu^{-1} : I \subset \mathbb{R} \to J$ derivable).

Supongamos además $\psi : (a,b) \subset J \to \Omega$ es una solución de $\dot{y} = f(y)\nu(s)$. Entonces se cumple que:

$$\varphi = \psi \circ \mu^{-1} : (\mu(a), \mu(b)) \to \Omega \quad \text{es solución de } \dot{x} = f(x)$$

Demostración:

$\Rightarrow$

$$\dot{\psi}(s) = \dot{\varphi}(\mu(s))\dot{\mu}(s) = f(\varphi(\mu(s))\dot{\mu}(s) = f(\psi(s))\dot{\varphi}(s)$$

$\Leftarrow$

$$\dot{\varphi}(t) = \dot{\psi}(\mu^{-1}(t))(\dot{\mu})^{-1}(t) = f(\psi(\mu^{-1}(t)))\nu(\mu^{-1}(t))\frac{1}{\dot{\mu}(\mu^{-1}(t))} =$$
$$= f(\varphi(t))\nu(\mu^{-1}(t)) \cdot \frac{1}{\nu(\mu^{-1}(t))} = f(\varphi(t))$$

□

Proposición 1.5 ▶ Mismo cambio de variable pero en ecuaciones no autónomas

Sean I, J , Ω conjuntos abiertos, $f : \Omega \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y consideramos la ecuación $\dot{x} = f(t,x)$, de la cual $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es solución. Sea además $\mu : J \subset \mathbb{R} \to I$ un difeomorfismo. Entonces se cumple:

$$\psi = \varphi \circ \mu : J \to \mathbb{R}^n \quad \text{es solución de } \dot{y} = f(\mu(s), y)\dot{\mu}(s)$$

Demostración:

$$\dot{\psi}(s) = \dot{\varphi}(\mu(s))\dot{\mu}(s) = f(\varphi(s), \varphi(\mu(s))\dot{\mu}(s) = f(\varphi(s), \psi(s))\dot{\mu}(s)$$

□

Tema 2 ⋈ Métodos de resolución

Antes de estudiar los distintos métodos de integración, enunciaremos uno de los teoremas más importantes de la asignatura: el teorema de Picard. De esta manera dispondremos de él cuando herramienta cuando lo necesitemos. Lo demostraremos más adelante:

Teorema 2.1 ▶ Teorema de Picard

Sea $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un abierto y sea $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una función continua, de clase C^1 con respecto a la segunda variable. Entonces, para cada $(t_0, x_0) \in \Omega$, existe un entorno $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ y una función $\varphi : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \to \mathbb{R}$ que es la única solución definida en $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ del problema de Cauchy:

$$\left.\begin{aligned} x' &= f(t,x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}\right\}$$

⋈ Cálculo de la primitiva

Es el caso más elemental de todos. Se emplea para ecuaciones del tipo:

$$\dot{x} = f(t)$$

donde $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Las soluciones se optienen por integración directa:

$$\dot{\varphi}(t) = f(t)\varphi(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)ds + c$$

Añadiendo la condición de Cauchy $x(t_0) = x_0$ se tiene como solución:

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s)ds$$

Toda solución $\varphi(t)$ está definida sobre (a, b) y tiene unicidad.

Trabajando en n dimensiones:

$$\dot{x} = f(t) \qquad f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

$$f = (f_1, \dots, f_n) \qquad \left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(t) \end{aligned}\right\}$$

Las soluciones son de la forma:

$$\int_{t_0}^{t} f(s)ds + c = \left(\int_{t_0}^{t} f_1(s)ds + c_1, \dots, \int_{t_0}^{t} f_n(s)ds + c_n\right)$$

⋈ Ecuaciones de variables separables

Definición 2.1 ▶ Ecuaciones de variables separables

Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ y $g:(c,d)\to\mathbb{R}$ se dice que una ecuación es de variables separables (de orden 1 en $\mathbb{R}$) si es del tipo:

$$\dot{y}=f(x)g(y)$$

Teorema 2.2 ▶ Existencia-unicidad de variables separables

Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ y $g:(c,d)\to\mathbb{R}$ funciones continuas con $g(y)\neq 0, \forall y\in(c,d)$. Entonces para $(x_0,y_0)\in(a,b)\times(c,d)$ existe una única solución del problema definida en algún entorno de x_0 (no tiene por qué estar definido en todo (a,b)).

$$\left.\begin{aligned}\dot{y}&=f(x)g(y)\\ y(x_0)&=y_0\end{aligned}\right\}$$

Demostración:

Sea φ una solución. Entonces:

$$\dot{\varphi}(x)=f(x)g(\varphi(x))$$

$$\frac{\dot{\varphi}(x)}{g(\varphi(x))}=f(x)$$

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\dot{\varphi}(t)}{g(\varphi(t))}dt \overset{\text{cambio } u=\varphi(t)}{=} \int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)}\frac{du}{g(u)}=\int_{x_0}^{x}f(t)dt$$

Sea $G:(c,d)\to(c_1,d_1)$ una primitiva de $\frac{1}{g(y)}$.

Como g es no nula y continua, entonces tiene signo constante. Luego $G(y)$ es estrictamente monótona ($G'(y)=\frac{1}{g(y)}\neq 0$) sobre (c,d).

Sea $F:(a,b)\to\mathbb{R}$ una primitiva de $f(t)$.

La regla de Barrow nos dice:

$$G(\varphi(x))-G(\varphi(x_0))=F(x)-F(x_0)$$

$$G(\varphi(x))=F(x)-F(x_0)+G(y_0)$$

Como G es estrictamente monótona entonces existe $G^{-1}:(c_1,d_1)\to(c,d)$ derivable.

$$\varphi(x)=G^{-1}(F(x)-F(x_0)+G(y_0)) \qquad (1)$$

$$dom(\varphi)=\{x\in(a,b):F(x)-F(x_0)+G(y_0)\in dom(G^{-1})\}$$

Comprobemos que esta expresión es solución de la ecuación:

$$\varphi'(x) = (G^{-1})'(\underbrace{F(x) - F(x_0) + G(y_0)}_{\alpha})f(x) = \frac{1}{G'(G^{-1}(\alpha))}f(x) = g(\varphi(x))f(x)$$

NOTA: Falta comprobar que la expresión (1) es independiente de la elección de las primitivas de f y $\frac{1}{g}$. La elección de F se ve que no va a influir al tener $F(x) - F(x_0)$ se anula la constante. En cuanto a G, basta coger $\tilde{G}(y) = G(y) + c$ y como $\tilde{G}^{-1}(y) = G^{-1}(y - c)$:

$$\varphi(x) = \tilde{G}^{-1}(F(x) - F(x_0) + \tilde{G}(y_0) + c) = G^{-1}(F(x) - F(x_0) + G(y_0))$$

□

- Cualquier ecuación autónoma de orden 1 en $\mathbb{R}$ es de variables separables.
- ¿Qué pasa si $g(y_0) = 0$ para algún y_0? Pues que tenemos la solución trivial $\varphi(x) \equiv y_0$.

EJEMPLO:

1. $\begin{cases} \dot{x} = x \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} , \forall x \in \mathbb{R}$

   El primer problema que encontramos al enfrentarnos al problema es que no cumple la hipótesis del problema anterior para $x = 0$:

   $g(x) = \begin{cases} g : (0, +\infty) \to \mathbb{R} \\ g : (-\infty, 0) \to \mathbb{R} \end{cases}$

   Escribimos la ecuación como $\frac{x'}{x} = 1$ e integramos a ambos lados de la igualdad:

   $$\int_{t_0}^{t} \frac{\dot{x}(s)}{x(s)} ds = \int_{t_0}^{t} ds$$

   $$log(|\frac{x(t)}{x(t_0)}|) = t - t_0$$

   Nos quedamos con el semiplano donde esté definido x_0. Supongamos que $x_0 < 0$, entonces nos quedamos con el semiplano negativo.

   $$log(-x(t)) - log(-x(t_0)) \Longrightarrow -x(t) = exp((t - t_0) + log(-x_0)) \Rightarrow$$

   $$\Rightarrow -x(t) = -x_0 e^{(t-t_0)} \Rightarrow x(t) = x_0 e^{(t-t_0)} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

   Si $x_0 > 0$ nos quedaríamos con el semiplano positivo y saldrían las mismas cuentas. Por desgracia, no siempre será así.

2. $y' = 3y^{2/3}$

   Nos las escribimos de la forma en la que podamos integrar e integramos:

$$y' = 3y^{2/3} \Longrightarrow \frac{\dot{y}}{3y^{2/3}}$$

$$\int \frac{\dot{y}}{3y^{2/3}} = \int 1 \Longrightarrow \frac{3}{3}y^{1/3} = t + c \Longrightarrow y(t) = (t+c)^3$$

   Nota: En $y = 0$ no cumple el teorema, por lo que se pierde la unicidad.

3. Resolver $(1+e^x)yy' = e^x$, que escrita resuelta respecto a la derivada es $y' = \frac{e^x}{1+e^x}\frac{1}{y}$

   Separamos las variables:

$$yy' = \frac{e^x}{1+e^x}$$

   Y calculamos primitivas:

$$\frac{1}{2}y^2 + A = \log(1+e^x) + B$$

$$y^2 = 2\log(1+e^x) + C \qquad C := B - A$$

$$y(x) = \pm\sqrt{2\log(1+e^x) + C}$$

   Despejando x vemos dónde está definida:

$$x \geq \log\left(e^{\frac{C}{2}} - 1\right)$$

   Es decir, tenemos que no hay existencia global.

   En el caso de tener el problema de Cauchy con $y(x_0) = y_0$:

$$\int_{x_0}^{x} y(t)y'(t)dt = \int_{x_0}^{x} \frac{e^t}{1+e^t}dt$$

$$\int_{x_0}^{x} y(t)y'(t)dt = \int_{y_0}^{y} udu = \frac{1}{2}(y^2(x) - y^2(x_0)) = \log(\frac{e^x}{1+e^x}) - \log(\frac{e^{x_0}}{1+e^{x_0}})$$

□

▷ Ecuaciones reducibles a variables separables

Las ecuaciones de la forma:

$$y' = f(ax + by(x) + c) \qquad f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$$

Se pueden reducir a variables separables mediante el cambio:

$$\left.\begin{cases} x = x \\ u(x) = ax + by(x) + c \end{cases}\right\} \to u'(x) = a + by'(x) = a + bf(ax + by(x) + c) + x = a + bf(u(x))$$

Es decir, la ecuación queda reducida a una de variables separables de la forma:

$$\boxed{u'(x) = a + bf(u(x))}$$

Para utilizar el teorema de existencia y unicidad de ecuaciones de variables separables anterior, tenemos que asegurar que $\forall u, f(u) \neq -\frac{a}{b}$, en caso contrario perderemos la unicidad.

En el caso contrario, es decir que $f(u_0) = -\frac{a}{b}$, tenemos que

$$\varphi(x) = -\frac{a}{b}x + \frac{u_0 - c}{b}$$

es una solución de la ecuación.

⋈ Ecuaciones homogéneas

Definición 2.2 ▶ Función homogénea de grado p

Una función $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se dice que es homogénea de grado p si:

$$F(tx, ty) = t^p F(x, y) \qquad \forall t > 0$$

En particular, $G(x, y)$ es una función homogénea de grado 0 si:

$$G(x, y) = G(tx, ty) \qquad \forall t > 0$$

Ejemplo:

$$F(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x + y} \qquad\qquad F(tx, ty) = \frac{\sqrt{t^2(x^2 + y^2)}}{t(x + y)} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x + y}$$

□

Proposición 2.1 ▶ Propiedad ecuaciones homogéneas

Sean G, H homogéneas de grado p tenemos que:

$$F(x, y) := \frac{G(x, y)}{H(x, y)} \quad \text{es una función homogénea de grado } 0.$$

Demostración:

$$F(tx,ty) = \frac{G(tx,ty)}{H(tx,ty)} = \frac{t^p G(x,y)}{t^p H(x,y)} = \frac{G(x,y)}{H(x,y)} = F(x,y)$$

□

Definición 2.3 ▸ Ecuación homogénea

Una ecuación se dice que es homogénea si es de la siguiente forma:

$$y' = F(x,y) \quad \text{siendo F homogénea de grado 0}$$

Mediante unas pequeñas transformaciones, podemos encontrar una expresión equivalente de una ecuación homogénea:

$$F(x,y) = F(x\cdot 1, x\cdot \frac{y}{x}) = F(1,\frac{y}{x}) = g(\frac{y}{x}) \text{ siendo x} > 0 \text{ y } x \neq 0.$$

Si $x < 0$:

$$F(x,y) = F((-x)\cdot(-1), (-x)\cdot\frac{y}{(-x)}) = F(-1, \frac{y}{-x})$$

Proposición 2.2 ▸ Ecuación homogénea

Las ecuaciones homogéneas las podemos expresar de la forma:

$$y' = f(\frac{y}{x}), \quad \text{con } x \neq 0, f:(a,b)\to\mathbb{R}.$$

Teorema 2.3 ▸ Existencia-unicidad de variables separables

Si $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ es continua y $f(u)\neq u \quad \forall u\in(a,b)$, existe una única solución de la ecuación $y' = f(\frac{x}{y})$ que pasa por el punto $(x_0,y_0)\in A = \{(x,y) : x\neq 0, a<\frac{y}{x}<b\}$.

Demostración: Mediante el cambio de variable:

$$\left\{\begin{matrix} x = x \\ u = \frac{y}{x}\end{matrix}\right\} \to y = ux \to y' = u'x + u = f(u) \to u' = \frac{f(u)-u}{x} \quad \text{que es de variables separables.}$$

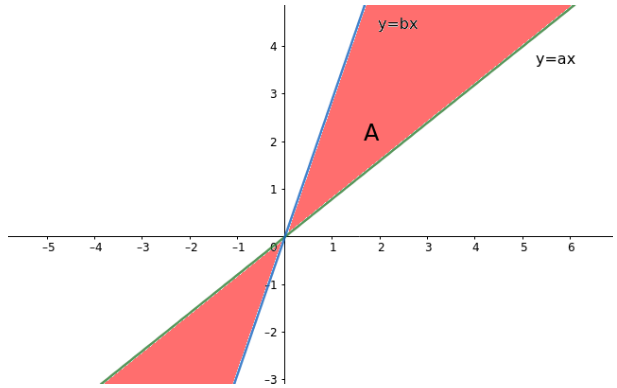
Integrando tenemos que la forma de las soluciones es:

$$\log|x| = F(\frac{y}{x}) + c \quad \text{donde F es una primitiva de } \frac{1}{f(u)-u}$$

. □

- En el caso de que $f(u_0) = u_o$ con $u_0\in(a,b)$, se tiene que $y = u_0x$ es solución de $y' = f(\frac{y}{x})$.
- Si $y' = f(x,y)$ es homogénea, se puede hacer el cambio $u = ux$ directamente sin escribirla de la forma $y' = F(\frac{y}{x})$.

- Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ la región $A = \{(x, y) : x \neq 0, a < \frac{y}{x} < b\}$ es de la forma:



- Cualquier solución $\log |x| = F(\frac{y}{x}) + c$ se obtiene de la solución particular $\log |x| = F(\frac{y}{x})$ mediante una homotecia de centro en el origen de coordenadas y razón e^{-c}.

▷ Ecuaciones reducibles a homogéneas

Trataremos ecuaciones del tipo:

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{mx + ny + p}\right)$$

Caso 1:

Si $c = p = 0$:

$$y' = f\left(\frac{ax + by}{mx + ny}\right) \qquad \text{es homogénea.}$$

Caso 2:

Si las rectas $\begin{Bmatrix} ax+by+c=0 \\ mx+ny+p=0 \end{Bmatrix}$ se cortan en (α, β) . Hacemos el cambio:

$$\begin{Bmatrix} t = x-\alpha \\ u = y-\beta \end{Bmatrix} \quad \text{(traslación en el origen)} \to u(t) = y(t+\alpha)-\beta$$

Y entonces tenemos una ecuación como la del caso 1 de la forma:

$$u'(t) = f\left(\frac{at+bu}{mt+nu}\right)$$

Caso 3:

Si las rectas $\begin{Bmatrix} ax+by+c=0 \\ mx+ny+p=0 \end{Bmatrix}$ son paralelas. Entonces $\exists\alpha$ tal que $ax+by=\alpha(mx+ny)$.

Haciendo el cambio:

$$\begin{Bmatrix} x = x \\ u = mx+ny \end{Bmatrix} \to u' = m+ny' = m+nf\left(\frac{\alpha u+c}{u+p}\right), \quad \text{es decir,}$$

$$u' = m+nf\left(\frac{\alpha u+c}{u+p}\right) \quad \text{que es de variables separables.}$$

Ejemplo:

$$y' = \frac{\sqrt{x^2-y^2}}{x} + \frac{y}{x}$$

Hacemos el cambio $u = \dfrac{y}{x} \to ux = y \to u'x+u = y'$

Por lo que tenemos: $u'x+u = \dfrac{\sqrt{x^2-u^2x^2}}{x} + \dfrac{ux}{x} = u'x+u = \sqrt{1-u^2}+u$ (Si $x>0$)

$$u' = \frac{\sqrt{1-u^2}}{x}$$

Aplicando variables separables a $\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}} = \dfrac{1}{x}$

$$\arcsin(u) \log x + C$$

$$u(x) = \sin(\log(x)+C) \longrightarrow y(x) = x\sin(\log(x)+C)$$

Para las soluciones con $x<0$ los cálculos son análogos. □

⋈ Ecuaciones lineales (orden 1, dimensión 1)

Definición 2.4 ▶ Ecuaciones lineales (orden 1, dimensión 1)

Sean f y g funciones reales, decimos que una ecuación es lineal si:

$$y' = f(x)y + g(x)$$

Si $g(x) \equiv 0$, decimos que la ecuación es homogénea y si $g(x) \not\equiv 0$ se dice que la ecuación es no homogénea.

Teorema 2.4 ▶ Existencia-unicidad de ecuaciones lineales

Sean $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas. Entonces, para cada $x_0 \in (a, b)$ y cada $y_0 \in \mathbb{R}$ existe una única solución del problema:

$$\begin{cases} \dot{y} = f(x)y + g(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

definida en todo (a, b) y viene dada por la expresión

$$y(x) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} f(s)ds\right)\left[y_0 + \int_{x_0}^{x} \exp\left(-\int_{x_0}^{u} f(s)ds\right) g(u)du\right]$$

.

Demostración: Supongamos $\varphi(x)$ una solución de la ecuación, es decir:

$$\varphi'(x) - f(x)\varphi(x) = g(x) \qquad (1)$$

Consideramos una primitiva arbitraria:

$$-\int_{x_0}^{x} f(s)ds$$

Multiplicamos la ecuación (1) por la exponencial de la primitiva anterior:

$$\varphi'(x)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} f(s)ds\right) - f(x)\varphi(x)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} f(s)ds\right) = g(x)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} f(s)ds\right)$$

Ahora nos damos cuenta de que el miembro de la izquierda, no es ni más ni menos que la derivada respecto a x del producto $\varphi(x)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} f(s)ds\right)$:

$$\frac{d}{dx}\left(\varphi(x)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} f(s)ds\right)\right) = g(x)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} f(s)ds\right)$$

Integrando entre x_0 y x:

$$\varphi(x)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} f(s)ds\right) - y_0 = \int_{x_0}^{x} \exp\left(-\int_{x_0}^{u} f(s)ds\right) g(u)du$$

$$\varphi(x) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} f(s)ds\right)\left[y_0 + \int_{x_0}^{x} \exp\left(-\int_{x_0}^{u} f(s)ds\right)g(u)du\right]$$

Existencia: basta comprobar que esta expresión anterior es solución:

$$\varphi'(x) = f(x)\exp\left(\int_{x_0}^{x} f\right)\left[y_0 + \int_{x_0}^{x} \exp\left(-\int_{x_0}^{u} f\right)g(u)du\right] + \cancel{\exp\left(\int_{x_0}^{x} f\right)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} f\right)}g(x)$$

□

Observaciones:

1. Podemos escribir la expresión de la solución del enunciado del teorema anterior de la siguiente manera:

$$y(x) = exp\left(\int_{x_0}^{x} f(s)ds\right)y_0 + exp\left(\int_{x_0}^{x} f(s)ds\right)\int_{x_0}^{x} exp\left(-\int_{x_0}^{s} f(u)du\right)g(s)ds \qquad (2)$$

   Si tomamos la ecuación homogénea $y' = f(x)y$, tenemos que la solución en ese caso es:

$$\varphi(x) := exp\left(\int_{x_0}^{x} f(s)ds\right)y_0$$

   Si ahora tomamos la derivada del segundo sumando de la expresión (2):

$$\psi(x) := exp\left(\int_{x_0}^{x} f(s)ds\right)\int_{x_0}^{x} exp\left(-\int_{x_0}^{s} f(u)du\right)g(s)ds$$

$$\psi'(x) = f(x)exp\left(\int_{x_0}^{x} f(s)ds\right)\int_{x_0}^{x} exp\left(-\int_{x_0}^{s} f(u)du\right)g(s)ds+$$
$$+\cancel{exp\left(\int_{x_0}^{s} f(s)ds\right)exp\left(-\int_{x_s}^{x} f(s)ds\right)}g(x)$$

   Lo que nos indica que $\psi(x)$ es solución de la ecuación.

   Es decir, si reescribimos (2) en función de $\varphi(x)$ y $\psi(x)$, llegamos a la conclusión de que cualquier solución de la ecuación es de la forma:

$$\boxed{y(x) = \varphi(x) + \psi(x)}$$

   donde $\varphi(x)$ es la solución de la **ecuación homogénea** $y' = f(x)y$ y $\psi(x)$ es una **solución particular** de la ecuación $y' = f(x)y + g(x)$.

2. Las soluciones de las ecuaciones lineales homogéneas forman un espacio vectorial de dimensión 1.

▷ Método de variación de las constantes

Sea la ecuación $y' = f(x)y + g(x)$ lineal no homogénea. El primer paso para resolverla será encontrar todas las soluciones de la ecuación $y' = f(x)y$. Esta ecuación ya sabemos resolverla dado que es de variables separables:

$$\frac{y'}{y} = f(x)$$

$$\log|y(x)| = \int f(x)dx + k \quad k \in \mathbb{R}$$

$$|y(x)| = C(exp\int f(x)dx) \xrightarrow{\text{podemos quitar v.abs.}} y(x) = C(exp\int f(x)dx) \quad C \in \mathbb{R}$$

Llamaremos a la solución de la homogénea calculada anteriormente y_0. El método de variación de constantes se basa en suponer que las soluciones de la ecuación no homogénea son de la forma $y(x) = C(x)y_0(x)$, donde $C(x)$es ahora una función arbitraria que suponemos derivable. Derivando esta expresión:

$$y'(x) = C'(x)y_0(x) + C(x)y_0'(x) = C'(x)y_0(x) + C(x)f(x)y_0(x)$$

Además tenemos $y'(x) = f(x)C(x)y_0(x) + g(x)$, igualando ambas expresiones:

$$C'(x)y_0(x) + \cancel{C(x)f(x)y_0(x)} = \cancel{f(x)C(x)y_0(x)} + g(x)$$

$$C'(x)y_0(x) = g(x)$$

$$C'(x) = \frac{g(x)}{y_0(x)}$$

Ahora simplemente integrando respecto de x, tenemos:

$$C(x) = \int \frac{g(x)}{y_0(x)}dx = H(x) + c$$

Donde H es una primitiva de de $\dfrac{g(x)}{y_0(x)}$.

Por lo tanto, la solución de la ecuación no homogénea es de la forma:

$$y(x) = c \cdot exp\left(\int f(x)dx\right) + H(x)exp\left(\int f(x)dx\right)$$

Ejemplo:

$\dot{y} = -y + \sin(x)$

$$y' = -y \xrightarrow{\text{solución}} y(x) = e^{-x}C$$

Convertimos la contante C en la función $C(x)$:

$$y(x) = e^{-x}C(x)$$

Derivamos la expresión y la igualamos a $y'(x) = -e^{-x}C(x) + \sin(x)$:

$$y'(x) = \cancel{-e^{-x}C(x)} + e^{-x}C'(x) = \cancel{-e^{-x}C(x)} + \sin x$$

$$C'(x) = e^{x}\sin x$$

$$C(x) = \int e^{x}\sin x + K = \overset{\text{resolviendo la integral}}{[\ldots\ldots\ldots\ldots]} = \frac{1}{2}e^{x}(-\cos x + \sin x) + K$$

La solución resulta:

$$y(x) = Ke^{-x} + \frac{1}{2}(-\cos x + \sin x)$$

Si consideramos el problema de Cauchy $y(0) = -\frac{1}{2}$:

$$y(0) = K - \frac{1}{2} \Longrightarrow K = 0$$

□

⋈ Ecuaciones de Bernoulli

Definición 2.5 ▶ Ecuación de Bernoulli

Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ y $g : (c, d) \to \mathbb{R}$ se dice que una ecuación es de Bernoulli si es del tipo:

$$\dot{y} = f(x)y + g(x)y^{\alpha} \qquad \alpha \neq 0, 1$$

Nota: Si $\alpha = 0$ tenemos una ecuación de variables separables y si $\alpha = 1$ una lineal.

Nota 2: $y \equiv 0$ es solución de la ecuación.

Resolución de las ecuaciones de Bernoulli:

1. Multiplicamos por $y^{-\alpha}$ la ecuación:

$$y^{-\alpha}\dot{y} = f(x)y^{-\alpha+1} + g(x)$$

2. Hacemos el cambio $u(x) = y(x)^{-\alpha+1}$:

$$u'(x) = (-\alpha+1)y(x)^{-\alpha}y'(x) \iff y(x)^{-\alpha}y'(x) = \frac{u'(x)}{(-\alpha+1)}$$

3. Sustituyendo la igualdad anterior:

$$\frac{u'(x)}{\alpha+1} = f(x)u(x) + g(x)$$

Que es una ecuación lineal no homogénea.

Ejemplo:

Sea la ecuación de Bernoulli de grado 2, $y' = y + \sin xy^2$:

$$\frac{1}{y^2}y' = \frac{1}{y}\sin x$$

Hacemos el cambio:

$$u = \frac{1}{y}$$

$$u' = -\frac{1}{y^2}y' = -u - \sin x$$

Y obtenemos una ecuación lineal no homogénea que ya sabemos resolver. □

⋈ Ecuación de Ricatti

Definición 2.6 ▶ Ecuación de Ricatti

Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ y $g : (c, d) \to \mathbb{R}$ se dice que una ecuación es de Ricatti si es del tipo:

$$\dot{y} = h(x) + f(x)y + g(x)y^2$$

Resolución de las ecuaciones de Ricatti:

1. Lo primero que necesitamos es una solución particular $y_p(x)$.
2. Hacemos el cambio $u(x) = y(x) - y_p(x)$ y obtenemos una ecuación de Bernoulli:

$$u(x)' = y(x)' - y_p'(x) = \cancel{h(x)} + f(x)y + g(x)y^2 - \big(\cancel{h(x)} + f(x)y_p'(x) + g(x)y_p^2(x)\big)$$

Sustituyendo $y(x) = u(x) + y_p(x)$:

$$u(x)' = f(x)(u(x) + y_p(x)) + g(x)(u(x) + y_p(x))^2 - f(x)y_p'(x) - g(x)y_p^2(x) =$$

$$= f(x)u(x) + 2u(x)y_p(x)g(x) + g(x)u(x)^2 = [f(x) + 2y_p(x)g(x)]u(x) + g(x)u(x)^2$$

Por lo que llevamos a una ecuación de Bernoulli con $\alpha = 2$:

$$u'(x) = [f(x) + 2y_p(x)g(x)]u(x) + g(x)u(x)^2$$

Ejemplo:

$\dot{x} = \frac{x}{t} + t^3x^2 - t^5$ que es una ecuación de Ricatti:

$$\dot{x} = f(t)x + g(t)x^2 + h(t)$$

Necesitamos una solución particular. Una que podemos encontrar de forma sencilla es $x(t) = t$, con lo que $x'(t) = 1$. Hacemos el cambio $u = x - t$:

$$u' = x' - 1 = \frac{x}{t} + t^3x^2 - t^5 - 1 = \frac{u+t}{t} + t^3(u+t)^2 - t^5 - 1 =$$
$$= \frac{u}{t} + t^3u^2 + 2t^4u = u\left(\frac{1}{2} + 2t^4\right) + t^3u^2$$

Es decir, nos queda:

$$u'(t) = u(t)\left(\frac{1}{2} + 2t^4\right) + t^3u^2(t)$$

Resolvemos la ecuación de Bernoulli y ya hemos terminado. □

⋈ Ecuaciones exactas y factores integrantes

▷ Ideas básicas y conceptos previos

Definición 2.7 ▶ Forma lineal (en $\mathbb{R}^2$)

Denotamos como forma lineal sobre $\mathbb{R}^2$ a una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Queremos saber ahora qué es la base dual de $\mathbb{R}^2$. Consideramos la base canónica de $\mathbb{R}^2$, $e_1 = (1,0)$ y $e_2 = (0,1)$. Sabemos que para cada vector v de $\mathbb{R}^2$, podemos expresarlo como $v = (x,y) = xe_1 + ye_2$. Quiero buscar dos formas lineales de manera que pueda escribir cualquier forma lineal de $\mathbb{R}^2$ como una combinación lineal de ellas.

Tomamos ahora el espacio de todas las formas lineales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, este es un espacio vectorial de dimensión 2. Sea L una aplicación lineal:

$$L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(\alpha, \beta)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha x + \beta y$$

Podemos observar que:

$$(\alpha,\beta)e_1 = \alpha \qquad \begin{matrix} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \end{matrix} \qquad (1,0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \quad (1,0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$(\alpha,\beta)e_2 = \beta \qquad \begin{matrix} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \end{matrix} \qquad (0,1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (0,1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

Hemos encontrado dos aplicaciones que mandan su propio vector a 1 y el otro lo mandan a cero. De esta manera, definimos la base dual de $\{e_1, e_2\}$ como las formas lineales tales que:

$$e_1^* = (1,0) \qquad e_1^*(e_1) = 1, \quad e_1^*(e_2) = 0$$

$$e_2^* = (0,1) \qquad e_2^*(e_1) = 1, \quad e_2^*(e_2) = 1$$

Ahora vamos a denotar a e_1^*, e_2^* como dx y dy, que no son más que la aplicación lineal de la proyección:

$$\begin{aligned} dx : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} & \qquad dy : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\rightsquigarrow x & (x,y) &\rightsquigarrow y \end{aligned}$$

Proposición 2.3 ▶ Propiedad de la base dual

Sea $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ únicos tales que $L = \alpha dx + \beta dy$.

Ahora ya podemos definir lo que es una forma diferencial, que es en lo que estaremos trabajando nostros:

Definición 2.8 ▶ Forma diferencial

Una forma diferencial en una abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es una aplicación:

$$\begin{aligned} \omega : \Omega &\to \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \\ (x,y) &\rightsquigarrow \omega(x,y) \end{aligned}$$

Por la proposición anterior, existen $P, Q : \Omega \to \mathbb{R}$ (que en este caso van a depender de (x,y), tales que:

$$\omega(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

Ejemplo:

Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable.

$$(a,b) \in \Omega \qquad df(a,b) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$df : \Omega \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$$

$$(a,b) \rightsquigarrow df(a,b)$$

Podemos observar que df es una forma diferencial que envía cada punto (a,b) a una forma lineal y además, las funciones P y Q de la definición son las derivadas parciales:

$$df(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)dy$$

□

Definición 2.9 ▶ Forma diferencial exacta

Diremos que una forma diferencial $\omega : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es exacta si existe $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable tal que:

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad \omega(x, y) = df(x, y)$$

Sea ahora una forma diferencial $\omega : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con P, Q continuas.

$$\text{¿Qué quiere decir que } \omega(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0\text{?}$$

.

Podemos suponer que $\omega(x, y)$ no es idénticamente nula ($\omega(x, y) \neq 0, \forall (x, y) \in \Omega$). Esto es equivalente a suponer que P y Q no se anulan simultáneamente ($P^2 + Q^2 \neq 0$). Y esto se puede traducir en que la dimensión del núcleo de ω tiene necesariamente dimensión 1 ($\dim \ker\ \omega(x, y) = 1$), es decir, es una recta. Esto nos produce un concepto análogo al que teníamos en campos de vectores. En cada punto de Ω nos podemos crear una copia de $\mathbb{R}^2$ en la que dibujamos la recta asociada al núcleo de ω. Lo que lo diferencia de los vectores es que las rectas no tienen ni sentido ni módulo.

Definición 2.10 ▶ Solución de una forma diferencial

Una solución de una forma diferencial a una función $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to \Omega$ de clase C^1 con $\gamma'(t) \neq 0\ \forall t \in I$, tal que

$$\omega(\gamma(t))\gamma'(t) = 0\ \forall t \in I$$

Vamos a ver ahora una forma equivalente de ver las soluciones de una forma diferencial ω. Empezamos considerando γ solución:

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) \qquad \gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$$

Tenemos que como γ es solución, cumple que $\omega(\gamma(t))\gamma'(t) = 0$, es decir:

$$\omega(\gamma(t))\gamma'(t) = P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t) = 0$$

Vamos ahora a reinterpretar la definición. La expresión $P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t) = 0$ la podemos interpretar como el producto escalar de dos vectores. Como el producto es cero, podemos considerar estos vectores ortogonales:

$$(P(x(t), y(t)), Q(x(t), y(t))) \perp (x'(t), y'(t))$$

Por lo que los vectores $(-Q(x(t), y(t)), P(x(t), y(t)))$ y $(x'(t), y'(t))$ son colineales, es decir:

$$\exists\, \lambda(t) \in \mathbb{R}\; con\; \lambda(t) \neq 0\; \forall t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = -\lambda(t) Q\left(x(t), y(t)\right) \\ \dot{y}(t) = -\lambda(t) P\left(x(t), y(t)\right) \end{cases} .$$

Además podemos afirmar que λ es continua porque $\lambda^2 = \frac{||\gamma'(t)||_2^2}{||(P,Q)||_2^2}$.

Conclusión:

Las soluciones de la forma diferencial ω, se pueden expresar como soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales en $\mathbb{R}^2$. Es decir, las soluciones de las formas diferenciales se pueden expresar como:

$$\begin{cases} x' = -f(t) Q(x, y) \\ y' = f(t) P(x, y) \end{cases} \qquad f(t) \neq 0\; \forall t \in I$$

Queremos llegar a que ambas formas son equivalentes, por lo que vamos ahora a probar el recíproco:

Proposición 2.4 ▶ Recíproco de la conclusión anterior

Si tenemos $\varphi(t)$ una solución de

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -h(t) Q\left(x(t), y(t)\right) \\ \dot{y}(t) = h(t) P\left(x(t), y(t)\right) \end{cases} \quad .Con h(t) \neq 0\; \forall t \in I$$

Entonces φ es solución de $Pdx + Qdy = 0$:

Demostración:

$$P(\varphi(t))\varphi_1'(t) + Q(\varphi(t))\varphi_2'(t) = -P(\varphi(t))h(t)Q(\varphi(t)) + Q(\varphi(t)h(t)P(\varphi(t)) = 0$$

$\square$

Proposición 2.5 ▶ Expresión equivalente de la ecuación $\omega(x, y) = 0$

Sea $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ una forma diferencial:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \iff \frac{dy}{dx} = \frac{-P(x, y)}{Q(x, y)}$$

$\boxed{\Rightarrow}$

Suponemos como siempre que $P^2 + Q^2 \neq 0$. Ahora consideramos un subconjunto $\Omega_1 \subset \Omega$ tal que

$$P(x, y) \neq 0\;\; \forall (x, y) \in \Omega_1$$

Suponemos además una función $\gamma(t)$ solución de $Pdx + Qdy = 0$ con $\gamma(I) \subseteq \Omega_1$. Entonces tenemos:

$$P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t) = 0 \qquad (1)$$

Además tenemos que $\forall t \; P(x(t), y(t)) \neq 0 \implies y'(t) \neq 0 \; \forall t \in I$. Por tanto, por el Teorema de la función inversa y tiene una inversa, al ser derivable con derivada distinta de 0. Llamamos h a su inversa:

$$\widehat{\gamma}(y) := \gamma'(h(y)) = (\alpha(h(y)), y(h(y))) = (\widehat{x}(y), y)$$

Esto se puede interpretar como que podemos ver la derivada de la solución como una gráfica en función de la segunda variable. Ahora me pregunto, ¿de qué es solución $\widehat{x}(y)$?

$$\widehat{x}'(y) = (x(h(y)))' = x'(h(y))h'(y) = x'(h(y))\frac{1}{y'(h(y))} \overset{(*)}{=}$$

$$= \frac{-Q(\widehat{x}(y), y)y'(h(y))}{P(\widehat{x}(y), y)}\frac{1}{y'(h(y))} \qquad \implies \qquad \widehat{x}' = \frac{-Q(\widehat{x}, y)}{P(\widehat{x}, y)}$$

O más bonito escrito:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-Q(x, y)}{P(x, y)}$$

$(*)$ De (1) sacamos que $x'(t) = \dfrac{Q(x(t), y(t))y'(t)}{P(x(t), y(t))}$

$\boxed{\Leftarrow}$

Sea $\varphi(y)$ solución de:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$$

Definimos $\gamma : J \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de la forma:

$$\gamma(y) = (\varphi(y), y)$$

$$\gamma'(y) = (\varphi'(y), 1)$$

De manera que podemos llegar a que es solución de ω:

$$\omega(\gamma(y)) = P(\gamma(y))\gamma_1'(y) + Q(\gamma(y))\gamma_2'(y) = P(\varphi(y), y)\varphi'(y) + Q(\varphi(y), y) \cdot 1 = 0$$

□

Observación:

A través de una demostración análoga, podemos llegar a la proposición equivalente:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \iff \frac{dx}{dy} = \frac{-Q(x, y)}{P(x, y)}$$

Conclusión final:

$$P(x,y)dx + Q(x,y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{aligned} \dot{x} &= -f(t)Q(x,y) \\ \dot{y} &= f(t)P(x,y) \end{aligned} \right\} \quad f(t) \neq 0 \; \forall t \in I \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-P(x,y)}{Q(x,y)} \quad / \quad \frac{dx}{dy} = \frac{-Q(x,y)}{P(x,y)}$$

▷ Formas diferenciales exactas y cerradas

Nos centraremos ahora en el objeto de estudio de la sección que son las formas diferenciales exactas y cerradas. Ya definimos lo que era una forma exacta, aún así, recordémoslo:

Definición 2.11 ▶ Forma diferencial exacta

Diremos que una forma diferencial $\omega : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es exacta si existe $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable tal que:

$$\forall (x,y) \in \Omega, \quad \omega(x,y) = df(x,y)$$

Definición 2.12 ▶ Forma diferencial cerrada

Una forma diferencial de clase C^1 se dice cerrada si:

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

Proposición 2.6 ▶ Exacta $\Rightarrow$ cerrada

Sea $\omega(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ exacta con P,Q de clase C^1, entonces

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

Es decir,

$$\boxed{\text{exacta} \Longrightarrow \text{cerrada}}$$

Demostración:

Consideramos $\omega(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ exacta

$$\omega : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$$

Entonces si f es la función derivable que satisface la definición de exacta, tenemos que:

$$df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} P(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ Q(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{cases}$$

Como ω es exacta y P,Q de clase C^1 y sabemos que las parciales cruzadas son iguales:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Así como $\omega(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, una condición necesaria para que sea exacta es:

$$\forall (x,y) \in \Omega, \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

$\square$

▷ Integración de las formas exactas

Consideramos $\omega(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ una forma exacta y $\gamma(t)$ una solución de la ecuación, entondes tenemos:

$$\omega(x,y) = df(x,y)$$

$$\omega(\gamma(t))\gamma'(t) = 0$$

$$df(\gamma(t))\gamma'(t) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t))y'(t) = 0$$

Estamos buscando las soluciones de $df = 0$, que son de la forma, $f = cte$. Buscamos una solución de $f(x,y) = 0$ con $f(x_0,y_0) = 0$, $(x_0,y_0) \in \Omega$.

En primer lugar integramos la igualdad $\dfrac{\partial f}{\partial x} = P(x,y)$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial f}{\partial x}(s,y)ds = \int_{x_0}^{x} P(s,y)ds + \underbrace{\varphi(y)}_{cte}$$

$$f(x,y) - f(x_0,y) = \int_{x_0}^{x} P(s,y)ds + \underbrace{\varphi(y)}_{cte}$$

$$f(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(s,y)ds + f(x_0,y) + \varphi(t)$$

Ahora sustituimos la igualdad obtenida en $\dfrac{\partial f}{\partial y} = Q(x,y)$

$$Q(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_{x_0}^{x} P(s,y)ds\right) + \varphi'(y) + \frac{\partial t}{\partial y}(x_0,y) =$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial P}{\partial y}(s,y)ds + \varphi'(y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial Q}{\partial x}(s,y)ds + \varphi'(y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y)$$

$$= Q(x,y) - Q(x_0,y) + \varphi'(y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y)$$

Despejando $\varphi(y)$ de la igualdad anterior:

$$\varphi'(y) = -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) + Q(x_0,y)$$

$$\varphi(y) - \varphi(y_0) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0,t)dt - f(x_0,y) + f(x_0,y_0)$$

$$\boxed{f(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(s,y)ds + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,t)dt}$$

Esto que hemos calculado es la primitiva de ω. Las soluciones de la ecuación son de la forma $f(x,y) = 0$. Para calcularlas tenemos que calcular la $\varphi(y)$:

$$f(x,y) = \int P(s,y)ds + \varphi(y) = R(x,y) + \varphi(y)$$

Donde $R(x,y)$ es una función conocida.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = Q(x,y) = \frac{\partial R}{\partial y}(x,y) + \varphi'(y)$$

$$Q(x,y) - \frac{\partial R}{\partial y}(x,y) = \varphi'(y)$$

$$\varphi(y) = \int \left(Q(x,y) - \frac{\partial R}{\partial y} \right) dy + cte$$

Nota: $Q(x,y) - \frac{\partial R}{\partial y}$ debe estar solo en función de y, en caso contrario tenemos que nos hemos equivocado o que ecuación no es exacta.

Ejemplo:

$$\frac{y}{x^2}dx - \frac{1}{x}dy = 0$$

Comprobemos que es cerrada:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{x^2}$$

Efectivamente es cerrada, vamos a calcular la primitiva:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{x^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{x}$$

$$f(x,y) = \int \frac{y}{x^2}dx + \varphi(y) = -\frac{y}{x} + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cancel{-\frac{1}{x}} = \cancel{-\frac{1}{x}} + \varphi'(y)$$

$$\varphi'(0) = 0 \qquad \varphi(y) = c$$
$$f(x,y) = \frac{-y}{x} + C$$
$$\boxed{-\frac{y}{x} = K}$$

Nota: Las soluciones de este tipo son las semirrectas que pasan por el origen.

Mismo ejemplo en modo "físico":

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y/x^2}{1/x} = \frac{y}{x}, \qquad \text{que es una ecuación homogénea}$$

□

Teorema 2.5 ▶ Derivación bajo el signo integral

Sea $f : I \times U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua. Sea $[a,b] \subset I$ y sea

$$F(x) = \int_a^b f(t,x)dt, \quad x \in U$$

Supongamos que f tiene derivadas parciales continuas con respecto a $x_1, ...x_n$ en $I \times U$. Entonces F tiene derivadas parciales continuas y se tiene que:

$$\forall i = 1, ..., n \qquad \frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,x)dt$$

Demostración: La demostración se deja como ejercicio al lector :D □

Definición 2.13 ▶ Conjunto especial

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ decimos que Ω es especial si existe un $(x_0, y_0) \in \Omega$ tal que para cada $(x,y) \in \Omega$ el rectángulo de vértices opuestos (x_0, y_0) y (x,y) está contenido en Ω.

Teorema 2.6 ▶ Caso concreto del lema de Poincaré.

En un abierto especial, toda forma cerrada es exacta.

Demostración: Sea $\omega(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ cerrada, es decir que:

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

Denotamos por f a la primitiva de ω, la hemos calculado antes, es $f(x,y) = \int_{x_0}^x P(s,y)ds + \int_{y_0}^y Q(x_0,t)dt$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = P(x,y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \int_{x_0}^x \frac{\partial P}{\partial y}(s,y)ds + Q(x_0,y) = \int_{x_0}^x \frac{\partial Q}{\partial x}(s,y)ds + Q(x_0,y) = Q(x,y)$$

$\square$

▷ Factores integrantes

Motivación:

Sea la ecuación $ydx - xdx = 0$. Esta ecuación no es exacta, pero si la multiplicamos el factor $\frac{1}{x^2}$, tenemos $\frac{y}{x^2}dx - \frac{1}{x}dy = 0$ que si lo es.

Es decir, que puedo encontrar una función que al multiplicarla por la ecuación, me produzca una expresión resultante exacta.

Definición 2.14 ▶ Factor integrante

Si tenemos una ecuación $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ no exacta, llamamos factor integrante a una función $\mu(x,y)$ tal que la forma $\mu(x,y)P(x,y)dx + \mu(x,y)Q(x,y)dy$ es exacta.

El objetivo es que cuando tengamos la función $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ no exacta, buscamos un factor integrante. Supongamos que tenemos Ω un abierto especial y que queremos buscar un factor integrante μ para hacer que $\mu Pdx + \mu Qdy$ sea cerrada (y como Ω es especial será exacta). Se cumplirá que:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q)$$

Si desarrollo estas derivadas se tiene:

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x}Q + \mu\frac{\partial Q}{\partial x}$$

Y con esto hemos llegado a una ecuación en derivadas parciales que no tenemos ni idea de cómo resolver, pero vamos a conseguir reducirlo para que lo único que tengamos que hacer sea encontrar una solución de otra ecuación diferencial. Para ello soleremos buscar factores integrantes **que solo dependan de una variable** (aunque no siempre se podrá hacer eso).

Ejemplo:

1. $ydx - xdy$

   Buscamos μ utilizando la propiedad anterior de forma cerrada:

   $$\mu y)dx - (\mu x)dy$$

   $$\frac{\partial \mu}{\partial y}y + \mu = -\frac{\partial \mu}{\partial x} - \mu$$

   Si suponemos que μ es una función con respecto de x solo:

   $$\mu(x,y) = \varphi(x) \to \varphi(x) = -\varphi'(x)x - \varphi(x)$$

$$2\varphi(x) = -\varphi(x)\dot{x}$$
$$\frac{\varphi'(x)}{2\varphi(x)} = -\frac{1}{x}$$
$$\frac{1}{2}\log\varphi(x) = -\log x$$
$$\varphi(x) = \frac{1}{x^2}$$

Una vez obtenido el factor integrante, multiplicamos la ecuación original y resolvemos la ecuación exacta resultante.

2. $(3x - y - 3xy + 3y^2)dx + (5xy - x^2 - 4y^2 - 2x)dy = 0$ Vamos a buscar un factor integrante, pero antes comprobemos que no es exacta:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1 - 3x + 6y$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 5y - 2x - 2$$

Son distintas, por lo que no es cerrada, vamos a buscar un factor integrante (para hacerla exacta) μ de la forma:

$$\mu(x, y) = \varphi(x - y)$$

Vamos a escribir ahora μ de la forma anterior descrita:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q)$$
$$\frac{\partial \mu}{\partial y}P + \mu\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x}Q + \mu\frac{\partial Q}{\partial x}$$

Sustituyendo en la ecuación los valores de P y Q:

$$-\varphi'(x - y)\cdot\left(3x - y - 3xy + 3y^2\right) + \varphi(x - y)\cdot(-1 - 3x + 6y) =$$
$$= \varphi'(x - y)\cdot\left(5xy - x^2 - 4y^2 - 2x\right) + \varphi(x - y)\cdot(5y - 2x - 2)$$
$$\varphi'(x - y)\cdot(5xy - x^2 - 4y^2 - 2x + 3x - y + 3xy + 3y^2) = \varphi(x - y)\cdot(-1 - 3x + 6y - 5y + 2x + 2)$$
$$\varphi'(x - y)\cdot(2xy - x^2 - y^2 - x - y) = \varphi(x - y)\cdot(1 - x + y)$$
$$\varphi'(x - y)\cdot\left((x - y) - (x - y)^2\right) = \varphi(x - y)\cdot(1 - (x - y))$$
$$\varphi'(x - y)\cdot\cancel{(1 - (x - y))} = \varphi(x - y)\cdot\cancel{(1 - (x - y))}$$
$$\frac{\varphi'(x - y)}{\varphi(x - y)} = \frac{1}{x - y}$$

Haciendo el cambio $u = x - y$:

$$\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)} = \frac{1}{u} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{array}{c} \varphi(u) = u \\ \varphi(x,y) = x - y \end{array}$$

Multiplicando por el factor y resolviendo la ecuación exacta, llegamos a la solución:

$$F(x,y) = x^2(1-y) + yx^2(3y-2) + y^2(x-3y) + y^4 = C$$

$\square$

Referencias

[1] Salvador Sánchez-Pedreño Guillén. Notas de clase. (Notas subidas al Aula Virtual).

[2] Paco Mora, Chito Belmonte, David Aguirre, Emilio Pardo. Apuntes de EDO.

[3] S. Novo, R. Obaya, J. Rojo. Ecuaciones y sistemas diferenciales. MgGraw Hill, Madrid, 1995