

HDU 3117 Solved Report

Subject

题目地址

[HDU 3177](#)

题目大意

求解斐波纳济数Fn的前4位数字和后四位数字，中间的结果用"..."表示。

输入的范围 $\text{Max}(n) = 10^8$ ，按照网页上测试用例输出结果显示第40位Fn数为：**63245986**，正好8位整数。超过8位数的Fn数，如第64位Fn数，表示如下：

1	1023...4155
---	-------------

输入：

1	0
2	1
3	2
4	3
5	4
6	5
7	35
8	36
9	37
10	38
11	39
12	40
13	64
14	65

输出：

1	0
2	1
3	1
4	2
5	3
6	5
7	9227465
8	14930352
9	24157817
10	39088169
11	63245986
12	1023...4155
13	1061...7723
14	1716...7565

解题思路

如何在2000ms的事件内求斐波纳济数，并输出正确的格式，这是一个大问题，起先想到的是用BigInteger和Dp进行推导，但是这种算法铁定要超过2000ms，因为n的数值增加，Fn的值呈指数级地增长。

解决问题要点

- 对于第40个以下的Fn数，可以用公式来推导：
$$an = (1/\sqrt{5}) * \{ [(1+\sqrt{5})/2]^n - [(1-\sqrt{5})/2]^n \}$$
 算法时间O(1)即能求出要求的值。
- 对于第40个以上的Fn数，最理想的方法是用推导矩阵来实现，初始矩阵为

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

求解公式为：

$$R = (M^n F); R = \begin{pmatrix} F_n \\ F_n - 1 \end{pmatrix}$$

- 根据矩阵快速幂的推导求mod 10000，可以计算出Fn的后4位数字
- 那么如何求取Fn的前4位数字呢？来看以下算法，真是受教了！！

$$\text{fib通项公式 } F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

$$\text{可化简为: } F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \left(1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^n \right) \right]$$

等式两端取对数:

$$\log_{10} F_n = \log_{10} \frac{1}{\sqrt{5}} + n \cdot \log_{10} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + \log_{10} \left(1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^n \right)$$

前39项打表求出. 当 $n \geq 40$ 时, $\log_{10} \left(1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^n \right) \approx 0$

$$\text{故 } \log_{10} F_n = -0.5 \log_{10} 5 + n \cdot \log_{10} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$$

先暂停下.

$$\text{例如 } \log_{10} (12344321) = \log_{10} (1.2344321 \times 10^7)$$

$$= \log_{10} (1.2344321) + 7 \Rightarrow (\text{整数} + \text{小数})$$

$$\log_{10} (1.2344321) = t$$

$$1.2344321 = 10^t. \text{ 故 } 1234.4321 = 10^{t+3}$$

所以取 10^{t+3} 整数部分即为 12344321 的前4位

继续.

所以只要求得 $-0.5 \log_{10} 5 + n \log_{10} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$ 的小数部分
便可得到其前4位了.

end.

^^ WArobot.

经验总结

1. 此题是数学之美的集中体现, 运用数学公式的推导和计算能够在规定的时间内轻易求解该问题, 如果用蛮力算法, 铁定超时, 另外用javaagent插件能够有效的度量出程序运行的时间, 避免分析算法走的弯路. 由此可见, 计算机编程是工具也是人脑对算法的延伸, 数学思维才是解决问题的关键.

2. ISSUE:

This method also reveals that when you want to request the first few digits of a large number, you can just ask for the decimal part below \log_{10} and then pow it. The principle is also easy to understand. The reason why this question can be used is because fib has a general term formula, which simplifies this question in some sense.

Hit Problems

[HDU 2604](#)

[HDU 1757](#)

[HDU 1575](#)