Bachelorarbeit

Die proportionale Analyse der Bewegung bei Thomas Bradwardine

Bachelorarbeit

Die proportionale Analyse der Bewegung bei Thomas Bradwardine

von

Till Überrück-Fries
till@ueberfries.de
Matrikelnummer: 10968924

unter der Betreuung von

Daniel Di Liscia

vorgelegt der

Fakultät für Philosophie, Wissenschaftstheorie und Religionswissenschaft
Ludwig-Maximilians-Universität München

Juli 2018

Zusammenfassung

Der *Tractatus de Proportionibus* von Thomas Bradwardine hat in der Mathematisierung der scholastischen Naturphilosophie eine wichtige Rolle für die Wissenschaftsgeschichte gespielt und dadurch die Loslösung der Physik als selbständige, mathematische Wissenschaft im 16. Jahrhundert vorbereitet. Die vorliegende Arbeit vollzieht die Leistung und Bedeutung des Traktats nach. Zu diesem Ziel ordnet sie ihn in seinen historischen Kontext ein und liefert eine moderne Interpretation seines Inhalts. Besonderes Augenmerk wird dabei auf die getreue Reformulierung seiner Mathematik durch moderne Begriffe gelegt.

The Tractatus de Proportionibus *of Thomas Bradwardine played an important role in the history of science by quantifying the scholastic natural philosophy and preparing the emancipation of Physics in the 16*th *century as an independent and mathematical science. The present paper evaluates the contributions and importance of the treatise. To this end, an overview of the historical context and a modern interpretation of its content is provided. Special attention is paid to an accurate rendering of its mathematics through contemporary mathematical concepts.*

Inhaltsverzeichnis

0 Einführung

Als Thomas Bradwardine 1328 am Merton College der damals noch nicht ganz so altehrwürdigen, doch bereits wohl etablierten Universität *Oxoniensis* seinen Traktat über die Proportionen der Geschwindigkeiten von Bewegungen (*Tractatus Proportionium seu de Proportionibus Velocitatum in Motibus*, kurz: *Tractatus de Proportionibus*) verfasste, schrieb er Philosophie-, Physik- und in einem gewissen Sinne auch Mathematikgeschichte. Er führte in die scholastische, ganz und gar der aristotelischen Naturphilosophie verpflichteten Debatte über Bewegung – eine Debatte, die sich hauptsächlich mit dem Wesen und der Erklärung, aber kaum mit der Quantifizierung von Bewegung befasste – die auf Euklid und Boëthius zurückgehende mathematische Theorie der Proportionen ein. Dieser erste Schritt hin zu einer mathematischen Beschreibung der Natur, welche spätestens mit der wissenschaftlichen Revolution im 16. Jahrhundert zu unermesslichem Erfolg anhob und uns heutzutage so selbstverständlich erscheint, macht die historische Bedeutung des *Tractatus de Proportionibus* aus. Diese Bedeutung kann unter dem Blickwinkel des Spätgeborenen genauso leicht unter- wie überschätzt werden; schnell geht die eigentliche Neuerung unter, wenn man die ungewohnte und schwerfällige Darstellung und einige offensichtlich falsche Ergebnisse leichtfertig als primitiv abtut; ebenso schnell werden in den Text moderne Sichtweisen, Begriffe und Erkenntnisse hineingelegt, die gar nicht intendiert oder aber ganz anders gemeint waren.

Die vorliegende Arbeit will die Bedeutung von Bradwardines Traktat in seinem historischen Kontext würdigen, ohne in eine dieser beiden Fallen zu tappen. Zu diesem Ziel werden in Kapitel 1 die philosophischen Voraussetzungen diskutiert. Was bedeutete es im 14. Jahrhundert Naturphilosophie zu betreiben? Welche Vorstellung hatte man von Mathematik? (Abschnitt 1.1) Von welchem Begriff der Bewegung ging man aus? (Abschnitt 1.2) Das Herzstück der Arbeit besteht aus einer Interpretation des Traktats – daraus, seine Leistungen und auch seine Beschränkungen nachzuvollziehen und dem modernen Leser zugänglich darzustellen. Kapitel 2 ist dabei den mathematischen Werkzeugen gewidmet, wie Bradwardine sie selbst darstellt. Kapitel 3 beschäftigt sich im Anschluss mit dem physikalischen Teil des Traktats. Seine eigentliche historische Bedeutung kann im Rahmen dieser Arbeit leider nicht abschließend geklärt werden, erforderte dies doch die historischen Linien ausgehend von Bradwardine – auch die, die sich im Sande der Geschichte verliefen – mindestens bis ins 16. Jahrhundert nachzuzeichnen. Die vorliegende Arbeit kann nur hoffen, dazu die Grundlage zu schaffen, und beschränkt sich darauf, in Kapitel 4 einen kurzen Aus- und Rückblick auf die Wirkungsgeschichte des Traktats zu geben.

Vorbereitende Anmerkungen zu Person und Werk

Bevor dieses volle Programm angegangen wird, seien noch einige einführende Worte zu Bradwardine und seinem Traktat verloren.

Thomas Bradwardine (geboren ca. 1290) war seinen Zeitgenossen nicht nur als (Natur-) Philosoph bekannt, sondern auch und in größerem Maße als Logiker, Mathematiker, Theologe, als Berater und Diplomat im Dienste vom englischen König Eduard III., und letztlich als Erzbischof von Canterbury – ein Amt, das er kaum mehr als einen Monat innehielt, bevor 1349 die Pest seinem ereignisreichen Leben ein Ende bereitete.[1] Er war so bekannt, dass er noch Ende des Jahrhunderts in Geoffrey Chaucers *Canterbury Tales* im gleichen Atemzuge mit Größen wie Augustinus und Boëthius schmeichelhafte Erwähnung fand. In seiner Zeit am Merton College (von spätestens 1325 bis höchstens 1335) verfasste er den Großteil seiner Werke in so unterschiedlichen Bereichen wie Mathematik, Astronomie, Geometrie, Moralphilosophie, Theologie und eben 1328 in Naturphilosophie seinen *Tractatus de Proportionibus*.[2]

Ziel und Vorgehensweise des Traktats fasst Bradwardine in seiner Einleitung so präzise wie erhellend zusammen:

> Da jede fortlaufende Bewegung in der Geschwindigkeit eine vergleichbare Größe zu einer anderen besitzt, darf Naturphilosophie, die sich mit Bewegung beschäftigt, nicht unkundig sein über die Proportion der Bewegungen und der Geschwindigkeiten in Bewegungen. Und da eine Einsicht in jenes sowohl notwendig als auch sehr schwierig, in keinem Teil der Philosophie aber überliefert ist, haben wir folglich dieses Werk über die Proportion der Geschwindigkeiten in Bewegungen verfasst. Es steht aber, wie Boëthius in Buch I seiner Arithmetik versichert, fest, dass jeder, der mathematisches Wissen außer Acht lässt, die ganze Wissenschaft der Philosophie verliert; darum schicken wir die Mathematik, die wir für unser Vorhaben benötigen, voraus, damit die Lehre für den Schüler einfacher und zugänglicher werde. [3]

[1] Für eine ausführliche Biographie siehe Crosby, 1955, S. 3–7. Von dort übernommen ist auch der Verweis auf Chaucers *Canterbury Tales*. Die entsprechende Stelle findet sich in der Sage der Nonne.

[2] Die Auflistung folgt ebd., S. 4.

[3] „Omnem motum successivum alteri in velocitate proportionari contingit; quapropter philosophia naturalis, quae de motu considerebat, proportionem motuum et velocitatum in motibus ignorare non debet. Et quia cognitio illius est necessaria et multum difficilis, nec in aliqua parte philosophiae tradita est ad plenum, ideo de proportione velocitatum in motibus fecimus istud opus. Et quia, testante Boethio, primo Arithmeticae suae: Quisquis scientias mathematicales praetermiserit, constat eum omnem philosophiae perdidisse doctrinam,–ideo mathematicalia quibus ad propositum indigemus praemisimus, ut sit doctrina facilior et promptior inquirenti.“ (Tr. Prop., S. 64, 1–11)

Die Rolle, die Bradwardine hier unmissverständlich der Mathematik für die gesamte Philosophie zuschreibt, ist beachtenswert. Nach der ausführlichen Untersuchung des Traktats wird über diese noch im Detail zu sprechen sein, insbesondere auch darüber, ob Bradwardine sich einer aristotelischen Tradition möglicherweise nur so weit verpflichtet fühlt wie nötig, um auf ihrer Basis Mathematik zu betreiben.

Der Traktat ist in vier Kapitel gegliedert. Kapitel I stellt die später verwendeten mathematischen Werkzeuge vor.[4] In Kapitel II widerlegt Bradwardine vier falsche Bewegungstheorien, die er nicht immer ganz eindeutig seinen Vorgängern zuschreibt. Diese Widerlegung entwickelt laut Bradwardine so viel argumentative Kraft, dass er in Kapitel III seine eigene Theorie als „*conclusio*“ präsentieren kann. Sie besteht aus einer mathematischen Bewegungsregel, die – in unserem Verständnis – die Geschwindigkeit einer Bewegung in logarithmischer Abhängigkeit von bewegender und widerstehender Kraft ausdrückt. Kapitel IV diskutiert einige Spezialprobleme wie die Geschwindigkeit einer Rotationsbewegung, mit denen sich Bradwardine weder als Erster und noch als Neuerer beschäftigt,[5] und wird deshalb hier nur am Rande behandelt.

Der *Tractatus de Proportionibus* wird uns in über 30 Handschriften überliefert.[6] Eine Edition des lateinischen Textes, basierend auf einem Vergleich von vier Handschriften, sowie eine englische Übersetzung verfertigte Crosby (1955). Zusätzlich existiert eine französische Übersetzung von Rommevaux (2010). Die vorliegende Arbeit zitiert auf Latein aus der Edition von Crosby (Tr. Prop.) und stellt eine deutsche Übersetzung, entstanden unter Bezug auf Tr. Prop. [Crosby] und Tr. Prop. [Rommevaux] zur Verfügung.

[4] Römische Nummern verweisen auf Zählungen von Kapiteln, Abschnitten, Axiomen, Theoremen etc. innerhalb des Traktats; arabische werden für die vorliegende Arbeit verwendet.
[5] Zu diesem Schluss kommt auch Maier (1949, S. 87) in Fußnote 14.
[6] Eine vollständige Auflistung – soweit ihm bekannt – liefert Crosby (1955, S. 59–61).

1 Hintergrund

Wie auch jeder andere Text konnte auch der Traktat nicht im leeren, kontextfreien Raum entstehen. Diese Tatsache bezeugen schon die über siebzig direkten Verweise und Zitate, die Bradwardine anführt. Er bezieht sich dabei in mathematischer Hinsicht auf Boëthius' *Arithmetica* und Euklids *Elemente*, in philosophischer Hinsicht vor allem auf Aristoteles' *Physik* und seine Schrift *Über den Himmel*, auf die Kommentare Averroës' zu diesen beiden Schriften und auf weitere Texte der aristotelischen Kommentartradition. Dieser kurze und nicht vollständige Überblick deutet schon an, wie sehr der Traktat im scholastischen Projekt der Aristotelesrezeption verwurzelt ist. Dieses geistige Umfeld hatte zweifelsohne Konsequenzen für die Beschäftigung mit Naturphilosophie.

Spätestens 1250 war die weitgehend durch die arabische Tradition vermittelte ‚Wiederentdeckung' Aristoteles' so weit abgeschlossen, dass er mit allen seinen wichtigen Schriften in der lateinischen Welt angekommen war.[1] Die Folge davon war rege wissenschaftliche Aktivität mit dem Ziel, Aristoteles in das bestehende christliche und in gewisser Hinsicht platonische Weltbild einzufügen. Maßgebliche Rollen kamen dabei Albert Magnus und seinem Schüler Thomas von Aquin zu.[2] Am Ende dieses Prozesses war das aristotelische Weltbild in der Sache selbst angenommen, seine zentralen Schriften Pflichtlektüre der universitären Ausbildung und dominierende Marschrichtung des akademischen Betriebs Auslegung, Erweiterung und Fortentwicklung der aristotelischen Lehre.[3]

Einher ging damit auch die aristotelische Einteilung der verschiedenen Wissensbereiche – unter dem einheitlichen Dach der Philosophie. Besonders für die hiesigen Zwecke ist dabei die Unterscheidung von Physik, Mathematik und Metaphysik hervorzuheben. Von diesen drei theoretischen oder spekulativen Wissenschaften galt die Physik als die am wenigsten abstrakte – untersuche sie doch die Welt der empirischen Materie –, Ma-

[1] Dieses Urteil findet sich bei Wallace (1978, S. 92).

[2] Wallace (ebd., S. 97) geht sogar fast soweit Thomas weniger eine Christianisierung Aristoteles' als eine Aristotelisierung des Christentums zuzuschreiben.

[3] Dass diese Assimilierung Aristoteles' nicht ohne Gegenbewegung blieb, merkt z.B. Wallace (ebd., S. 107–11) an. Er führt als Beleg u.a. die Pariser Verurteilungen zahlreicher Thesen von Averroës und Aristoteles im Jahre 1277 an. In deren Folge meint er eine Akzentverschiebung innerhalb der Aristotelesrezeption weg von einer unbedingten Akzeptanz und hin zu einer nur grundsätzlichen Annahme auszumachen.

thematik als abstraktere, da sie sich nur intelligible Materie zum Gegenstand nehme, und Metaphysik, die sich mit ihrem Gegenständen nur in Hinblick auf ihr Sein beschäftige, als die abstrakteste.[4]

Schon diese strikte Einteilung von Mathematik und Physik in autonome Wissensbereiche erklärt zum Teil, warum es nicht bereits vor Bradwardine erfolgreiche Ansätze zur Mathematisierung der Physik gab. Als solche Ansätze dürfen die von der Physik getrennten (!) Wissenschaften der Astronomie und Optik nicht gelten, denen in dem skizzierten konzeptionellen Rahme der Status sogenannter *scientiae mediae* – zwischen Mathematik und Physik, aber ohne deren Autonomie einzuschränken – eingeräumt wurde.[5]

Es ist bemerkenswert, dass Widerspruch zu dieser Einteilung von Robert Grosseteste (ca. 1168–1253) ausgerechnet in Oxford knapp hundert Jahre vor Bradwardine geäußert wurde. Aus seiner Beschäftigung mit Augustinus und Aristoteles entwickelte Grosseteste eine dem Christentum geneigte Metaphysik, in deren Ausgangspunkt er das Licht stellte. Er vertrat dabei die Ansicht, dass der physischen Welt eine mathematische Struktur zu Grunde liege.[6] Diese Sicht hat sich in der Scholastik zumindest bis Bradwardine nicht durchgesetzt.

Ein weiterer beachtlicher Aspekt der scholastischen Naturphilosophie liegt darin, dass trotz ihres Verständnisses von Physik als Wissenschaft der materiellen Gegenstände eben diese erstaunlich selten als Objekt der Beobachtung vorkommen. Murdoch bezeichnet sie deshalb auch in seinem gleichnamigen Aufsatz als „Naturphilosophie ohne Natur“. Er legt dort dar, wie die Naturphilosophie des späten Mittelalters in zunehmendem Maße *secundo imaginatione* vorgeht. Das bedeutet: Natürliche Bestätigung erhalten ihre Ergebnisse häufig nicht durch Erfahrung und Beobachtung (geschweige denn durch gezielt durchgeführte Experimente), sondern durch eine vorgestellte Konstruktion der Natur.[7] Ein ähnliches Vorgehen lässt sich, wie noch zu sehen ist, auch bei Bradwardine feststellen.

Bevor jedoch Bradwardines Unternehmen, Mathematik und Physik zusammenzubringen, ins Auge gefasst wird, seien die Voraussetzungen, die beide Fächer für sich besaßen, in den folgenden zwei Abschnitten dargelegt.

[4] Die Darstellung dieser Unterscheidung folgt teilweise sehr wörtlich Wallace (ebd., S. 97) und findet sich zum einen natürlich in Aristoteles *Physik*, zum anderen aber in dieser speziellen Ausformulierung in Thomas’ Kommentar zu Boëthius’ *De trinitate* wieder.

[5] Zum Begriff der *scientia media* siehe Wallace (ebd., S. 98), aber auch Weisheipl (1982, S. 525).

[6] Eine Einordnung Grossetestes in die Aristotelesrezeption findet sich bei Wallace (1978, 95f.).

[7] Vgl. Murdoch, 1981, S. 174.

1.1 Mathematische Voraussetzungen

Der für Bradwardine so zentrale Begriff der Proportion geht auf Euklid zurück, welcher ihn in den Büchern V und VII seiner Elemente einführt. Diese wurden im 13. Jahrhundert von Campanus de Novara ins Lateinische übersetzt und erlangten rasch große Verbreitung. Eine wesentliche Erweiterung des Proportionsbegriff durch eine systematische Benennung der Proportionen zwischen ganzen Zahlen stand in Form von Boëthius' *Arithmetica* und *Musik* zur Verfügung. Wie von Rommevaux (2011) in „De la proportion au rapport" gezeigt wurde, entwickelte das 13. Jahrhundert diese Ansätze zu einer mathematischen Theorie weiter, die sich Proportionen explizit zu ihrem Objekt bestimmte: die Proportionenlehre. Eine wichtige Arbeit aus dieser Zeit stellt der Traktat *De proportione* von Jordanus de Nemore dar, auf welche sich auch Bradwardine an entscheidender Stelle bezieht. Es kann also festgehalten werden, dass Bradwardine in seinem *Tractatus de Proportionibus* die Proportionenlehre nicht weiterentwickelt, sehr wohl aber zu einer neuen Anwendung führt.

Eine detaillierte Darstellung der Proportionenlehre, wie von Bradwardine verwendet, erfolgt in Abschnitt 2. An dieser Stelle ist aber noch eine allgemeine Bemerkung zur Mathematik des späten Mittelalters vorauszuschicken.

Rechnungen und Funktionen[8]

Im 13. Jahrhundert führte Jordanus de Nemore, von dem eben noch die Rede war, in seiner *Arithmetica* eine bedeutsame Neuerung ein: das Rechnen mit Buchstaben. Bis dato wurde – insbesondere auch in der Beweisführung – nur mit Zahlenbeispielen gerechnet. Die Buchstabenrechnung vereinfachte zum einen die Darstellung, zum anderen verlieh sie ihren Ergebnissen eine neue Allgemeinheit. Dennoch darf nicht vergessen werden, dass dieser ‚Literalkalkül', wie Maier ihn nennt, für unsere Begriffe sehr umständlich bleibt, drückt er doch in Ermangelung uns heute so geläufiger Symbole wie ‚+' und ‚−' alles durch sprachliche Umschreibung aus. In besonderem Maße zurückgehalten wird er durch das Fehlen eines Gleichheitszeichens „und damit [der] Möglichkeit der Gleichung und des algebraischen Formalismus überhaupt"[9]. Trotz alldem: das 13. und mehr noch das 14. Jahrhundert rechnete; und dies mit einer fast nicht zu bremsenden Begeisterung.

Ein Ausgangspunkt jeder Physik ist die Beobachtung, dass gewisse Größen in einer bestimmten Regelmäßigkeit zu anderen stehen. Für uns ist es ganz selbstverständlich diese

[8] Die folgende Darstellung ist im Wesentlichen eine Zusammenfassung der sehr lesenswerten und weit ausführlicheren Ausführungen von Anneliese Maier (1949, 257ff. 1952, S. 81–110) zu den „Calculationes des 14. Jahrhunderts und die Wissenschaft von den Formlatituden" und zum „Funktionsbegriff in der Physik des 14. Jahrhunderts".

[9] Maier, 1952, S. 257.

Abhängigkeit durch eine mathematische Funktion auszudrücken. Nach dem bereits Gesagten ist klar, dass der Scholastik diese Möglichkeit im Sinne einer Funktionsgleichung nicht offenstand. Maier bemerkt dazu passend, dass „das Wesen der mathematischen Funktion – wie man sie auch im einzelnen definieren mag – [...] jedenfalls darin [bestehe], dass sie eine Rechenregel darstellt, durch die das Abhängigkeitsverhältnis von zwei (oder mehreren) veränderlichen Größen zum Ausdruck gebracht wird".[10] Solche Rechenregeln stellte zweifelsohne das Literalkalkül zur Verfügung.

Literalkalkül und funktionelle Abhängigkeiten lassen sich ohne Schwierigkeiten im *Tractatus de Proportionibus* wiederfinden, wenn Bradwardine beschreibt, wie sich Geschwindigkeiten in Abhängigkeit von bewegenden und widerstehenden Kräften ändern. Dies als ‚$v(x) = \ldots$' zu verstehen, ist dabei mindestens anachronistisch. Nichtsdestotrotz steht in seiner Bewegungsregel eine Formel bereit, um diese Abhängigkeit in konkreten, nicht aber unbedingt in empirischen Fällen zu berechnen.

1.2 Aristotelischer Bewegungsbegriff

Der Begriff der Bewegung liegt der gesamten aristotelischen Naturphilosophie zugrunde. In *Physik*, II.1, 192b13–23 definiert Aristoteles die Natur als ein Prinzip (*archē*) der Bewegung und Ruhe, welches in jedem natürlichen Gegenstand vorliegt. Dabei ist allerdings nicht wie im modernen Verständnis gemeint, dass jeder natürliche Prozess, der Gegenstände hervorbringt oder bestimmt, auf eine *lokale* Bewegung reduzierbar ist. Vielmehr ist der Begriff der Bewegung selbst weiter gefasst im Sinne der Veränderung überhaupt. Er werden vier Arten der Bewegung unterschieden: Veränderung der Substanz (wenn ein Holzscheit zu Asche verbrennt), Veränderung der Qualität (wenn etwas die Farbe wechselt), Zu- oder Abnahme der Quantität und eben lokale Bewegung.[11] Diese Unterteilung ist eine Konsequenz der Kategorienlehre. Aus dem Blickwinkel der Kategorienlehre wird deutlich, dass Bewegung keinen separaten ontologischen Status jenseits der Kategorien hat. Sie kann nur innerhalb der Kategorien von Substanz, Quantität, Qualität und Ort vonstatten gehen.[12]

In der Frage nach der Ursache der Bewegung sucht Aristoteles und mit ihm die Scholastik nach kausalen Erklärungen und erhebt somit für sich zum Grundprinzip, dass alles, was in Bewegung ist, von irgendetwas bewegt wird. Zumindest theoretisch ist demnach das Bewegende bzw. die bewegende Kraft von dem Bewegten unterscheidbar. Eine sehr wichtige Konsequenz jenes Grundprinzips, durch welche sich die aristotelische Physik

[10] Maier, 1949, S. 82.
[11] Die Beispiele sind von Grant (1977, S. 36) übernommen.
[12] Vgl. *Physik* (III.1, 200b32–201a3).

grundlegend von der modernen Mechanik unterscheidet, ist die Auffassung, dass ohne Krafteinwirkung jede Bewegung sofort erlischt und der bewegte Körper in den Ruhezustand übergeht.[13]

Durch bewegende Kräfte allein lässt sich Bewegung und vor allem ihre zeitliche Dauer allerdings noch nicht vollständig erklären. In der Auffassung Aristoteles' nämlich ist jede Kausalwirkung instantan. Verantwortlich für die Verzögerung ist jeweils ein Widerstand in Form einer widerstehenden Kraft. Je größer die widerstehende im Vergleich zur bewegenden Kraft, desto langsamer vollzieht sich natürlich die Bewegung.[14]

Dieses Wechselspiel von bewegenden und widerstehenden Kräften kommt bei allen vier Arten der Bewegung zum Tragen. Die (qualitative) Erwärmung eines Körpers wird z.B. durch einen anderen warmen Körper in Überwindung der Kälte des ersteren verursacht. Im Folgenden wird nun speziell die lokale Bewegung vorgestellt.

Lokale Bewegung

Lokale Bewegung als ein wichtiger Spezialfall der Bewegung wird von Aristoteles an zahlreichen Stellen, aber weder systematisch noch umfassend behandelt.[15] Die wichtigsten Aussagen finden sich bei Aristoteles in der *Physik* und *Über den Himmel*.[16]

Eine für lokale Bewegungen zentrale Unterscheidung ist die zwischen natürlichen und erzwungenen Bewegungen, welche der Beobachtung entspricht, dass Gegenstände scheinbar zu einer ihnen ‚natürlichen' Lage tendieren, wenn sie nicht gewaltsam aus ihr heraus bewegt werden. Die Theorie der natürlichen Bewegungen als Theorie der Gravitation hat die Lehre der natürlichen Lage der Elemente zur Voraussetzung. Die vier Elemente Erde, Wasser, Luft und Schwere besitzen aufgrund ihrem abnehmendem Anteil an Schwere bzw. ihrem zunehmenden Anteil an Leichtigkeit ihren natürlichen Ort in konzentrischen Kreisen um den Erdmittelpunkt.[17] Der natürliche Ort der tatsächlich vorkommenden ‚gemischten' Gegenstände bestimmt sich aus dem Mischungsverhältnis der in ihnen enthaltenen Elemente. Aristoteles' Erklärung, wie sich diese Theorie der Gravitation durch bewegende und widerstehende Kräfte ausdrücken lässt, bleibt insbesondere für die Scholastik unbefriedigend. Sie versucht also, wie auch bei Bradwardine zu sehen sein wird, eine bessere Lösung des Gravitationsproblems zu finden.

Der Begriff der Geschwindigkeit besitzt keine allgemeine Definition für alle Arten der

[13] Vgl. Maier, 1949, 54f.
[14] Vgl. ebd., 66f.
[15] Zu diesem Schluss kommt Grant (1977, S. 37).
[16] Einen Überblick über die Behandlung der Bewegung (nicht speziell der lokalen) innerhalb der *Physik* findet sich bei Murdoch und Sylla (1978, S. 208–10). Eine übersichtliche Darstellung der zentralen mechanischen Regeln Aristoteles' liefert Clagett (1961, S. 425–32).
[17] Vgl. Maier, 1949, 59ff. und auch Grant, 1977, 37f.

Bewegung. Selbst innerhalb der lokalen Bewegungen wird Geschwindigkeit nicht einfach als zurückgelegte Strecke durch Zeit verstanden. Insbesondere wird sie nicht vektoriell verstanden. In *Physik*, VII.4 schreibt Aristoteles' der Geschwindigkeit vielmehr die Rolle eines Vergleichsmaßes von Bewegungen zu. Allerdings sind nicht alle Bewegungen (noch nicht einmal die lokalen) untereinander vergleichbar. Eine Kreisbewegung kann zum Beispiel nicht mit einer linearen Bewegung verglichen werden, weil eine Kurve nicht mit einer Gerade vergleichbar sei. In dieser Überlegung wird die Geschwindigkeit einer Bewegung zwar hinsichtlich zurückgelegter Strecke in einer bestimmten Zeit betrachtet, aber nicht zu ihrem Quotienten gleichgesetzt.[18] Andererseits kann die Geschwindigkeit einer Bewegung auch hinsichtlich der an ihr beteiligten Kräfte betrachtet werden. Diese Unterscheidung entspricht der modernen Zweiteilung der Mechanik in Kinematik und Dynamik. Wie noch gezeigt werden wird, erhalten diese beiden Perspektiven auf Geschwindigkeit eine wichtige Weiterentwicklung in Bradwardines Unterscheidung von quantitativer und qualitativer Geschwindigkeit.

Trotz dieser Einschränkungen trifft Aristoteles doch allgemein formulierte Aussagen über Geschwindigkeit, auf welche sich die scholastische Debatte und eben auch Bradwardine maßgeblich beziehen. Diese werden im Folgenden zum Abschluss der historischen Einordnung vorgestellt.

Ausgangspunkt einer quantitativen Theorie der Bewegung

Bradwardine zieht in seinem *Tractatus de Proportionibus* aus, eine mathematische Formel zu finden, welche die unsystematischen quantitativen Bestimmungen der Bewegung durch Aristoteles erfüllen soll. Als zusätzliche Bedingung – welche implizit von Aristoteles ausgedrückt wird und ansonsten als gegeben gilt – setzt er, dass keine Bewegung erfolgen darf, wenn die bewegende gleich oder kleiner der widerstehenden Kraft ist.[19] Ein zentrales Argument für seine Bewegungsregel ist es, dass diese Bedingung schon aus mathematischen Gründen erfüllt ist.

Die verstreuten quantitativen Aussagen Aristoteles' lassen sich vorsichtig zusammenfassen zu: „Kraft und Widerstand, insofern sie die Geschwindigkeit bestimmen, stehen zueinander in irgendeiner Art von Proportion, die sich nicht durch einfache arithmetische Differenz ausdrücken lässt.“[20] Diese sehr vorsichtige Formulierung durch Clagett

[18] Strecke und Zeit können sich überhaupt nicht in einem gemeinsamen Verhältnis befinden, da an ihnen unterschiedliche Größen beteiligt sind. Das gleiche Problem taucht auch beim Aufstellen von Proportionen auf. Man vergleiche dazu den Abschnitt *Begriff der Proportion* auf S. 12.

[19] Das entspricht dem, was Bradwardine für seine Bewegungsregel in Theorem VIII aus Kapitel III zeigt. (Tr. Prop., S. 114)

[20] „The factors of force and resistance as determiners of speed are in some kind of ratio rather than relatable by a simple arithmetical difference.“ (Clagett, 1961, S. 437–8)

zollt zum einen dem Projekt Bradwardines, eben die genaue Art dieser Proportion zu bestimmen, zum anderen Aussagen Tribut, die sich tatsächlich bei Aristoteles finden lassen.[21]

Versuche einer Ausformulierung dieser Ansätze tauchen auch in der scholastischen Kommentartradition auf,[22] aber noch ohne die speziell mathematische Herangehensweise Bradwardines. Um diese besser zu charakterisieren, stellt das folgende Kapitel Bradwardines mathematische Werkzeuge vor.

[21] Zum Beispiel beschreibt Aristoteles in *Physik*, IV.8, 215a14–215b10, wie sich jeweils die Größen Strecke, Zeit, Kraft, Widerstand und Geschwindigkeit proportional zueinander verhalten, wenn die restlichen konstant bleiben. Aristoteles selbst verallgemeinert diese Aussagen allerdings nicht im Sinne einer Formel $V \propto \frac{S}{T} \propto \frac{F}{R}$. Vergleiche auch Clagett (1961, 431f.).

[22] So z.B. in dem von Bradwardine zitierten Traktat *De ponderibus*.

2 Bradwardines mathematische Werkzeuge

Bevor Thomas Bradwardine sich der Analyse der Bewegung und damit dem eigentlichen Teil seiner Arbeit zuwendet, stellt er in erster Linie unter Bezugnahme auf Boëthius' *Arithmetica* und Campanus de Novaras Kommentar zum fünften Buch von Euklids *Elementen* die Proportionenlehre vor. Dass er diese sehr gründliche vorangestellte Darstellung seiner mathematischen Werkzeuge, die zumindest seinen mathematisch versierten Zeitgenossen bekannt gewesen sein sollte, für nötig erachtet, kann, wie Crosby anmerkt, durchaus als Indiz dafür genommen werden, welches Novum die Anwendung fortgeschrittener Mathematik in einer physikalischen Untersuchung darstellte.[1] Andererseits lässt sich diese Tatsache auch aus einem „Streben nach argumentativer Vollständigkeit"[2] und dem explizit formulierten didaktischen Ziel, „dass die Lehre für den Schüler einfacher und zugänglicher werde"[3], erklären.

Man kann der vorliegenden Arbeit möglicherweise vorwerfen, durch ihre Interpretation der Mathematik Bradwardines in die zweite der in der Einleitung erwähnten Fallen getappt zu sein: in seine Mathematik moderne Sichtweisen, Begriffe und Erkenntnisse hineinzulegen, die gar nicht intendiert sind. Dieses Risiko wird in dem aktuellen Kapitel sehr bewusst durch die Entscheidung eingegangen, unter Zuhilfenahme moderner Methoden und Begriffe ein präzises Modell der Proportionenlehre zu entwickeln. Ein solches Modell muss zwangsläufig anachronistisch sein, verfügen doch die heute zur Verfügung stehenden mathematischen Begriffe eine Schärfe und Präzision, die über die Begriffe des Spätmittelalters hinausgehen.[4] Man kann dem hier vorgelegten Versuch aber hoffentlich zugute halten, im Geist der Mathematik Bradwardines zu stehen, unternimmt es doch jede Anstrengung deren Eigenheiten getreu abzubilden.

Um der dennoch grundsätzlichen Anachronizität, der logischen Trennung von der restlichen Interpretation und auch der sich in der Beweisführung genommenen Freiheit, stellenweisen von Bradwardine abzuweichen, Ausdruck zu verleihen, wurde die moderne Darstellung der Proportionenlehre grau hinterlegt. Wo immer sinnvoll wurde sie Bei-

[1] Siehe Crosby, 1955, S. 18.
[2] Ebd.
[3] Tr. Prop., S. 64, 10–11.
[4] Unter anderem werden Fragen der Eindeutigkeit und Vollständigkeit der mathematischen Begriffe diskutiert, die dem Mittelalter in diesem Sinne fremd waren.

spielen aus Bradwardines Traktat gegenübergestellt.

Diese Vorgehensweise, die den Philosophen hoffentlich so wenig aus der Bahn wirft, wie sie den Mathematiker nicht von den eigentlichen, naturphilosophischen Fragen ablenkt, rechtfertigt sich auf zweierlei Weise. Zum einen ließe sich durch eine ‚minimal invasive' Darstellung zu den wichtigen Vorarbeiten von Crosby (1955) und Rommevaux (2011), denen die hiesige Darstellung viel verdankt, nur wenig Neues hinzufügen. Zum anderen – was schwerer wiegt – treten in ihren Ergebnissen eine Eigenschaft und eine Beschränkung der historischen Proportionenlehre deutlich hervor. Diese Metaperspektive auf die Proportionenlehre wird in einer abschließenden Anmerkung eingenommen.

Begriff der Proportion

Der zentrale Begriff der Proportion wird in einem allgemeinen und einem speziellen Sinne verwendet. Eine Proportion im allgemeinen Sinne beschreibt in einem Vergleich das Verhältnis von einem Gegenstand zu seinem Vergleichsgegenstand.[5] Der wichtigere spezielle Sinn wird wie folgt definiert:

> Eine Proportion ist das Verhältnis von einer Quantität zu einer anderen Quantität des gleichen Genus.[6]

Diese formale Definition bestimmt ein neues mathematisches Objekt, zunächst ohne Regeln anzugeben, denen es unterliegt. Es lassen sich jedoch bereits drei wichtige Eigenschaften von Proportionen festhalten.

1) Eine Proportion ist nicht symmetrisch, sondern geht von der einen zur anderen Quantität.
2) Eine Quantität darf nicht als reine Zahl – abstrahiert von dem Genus (in moderner Sprache: der physikalischen Dimension), die sie ausdrückt – verstanden werden. Sie behält ihre Verwiesenheit auf eine materielle Größe stets bei. Dadurch erklärt sich, dass man von einer Proportion zwischen zwei Längen, nicht aber zwischen z.B. einer Länge und einer Zeitdauer sprechen kann.
3) Eine Proportion ist zu unterscheiden von einer Zahl, welche eine Proportion zwar direkt oder indirekt benennt, aber nicht mit ihr identisch ist.[7] Eine unserem modernen Gebrauch angemessene Notation für Proportionen sollte diesen Umstand berücksichtigen.

Crosby drückt in seiner Einführung Proportionen durch Brüche aus, was inhaltlich natürlich naheliegend ist, jedoch nicht der spezifischen Unterscheidung zwischen Zahlen und Proportionen Rechnung trägt. Seien also A und B zwei Quantitäten desselben

[5] Vgl. Tr. Prop., S. 66, 5–7.
[6] „Proportio est duarum quantitatum eiusdem generis unius ad alteram habitudo." (Tr. Prop., S. 66, 9–10)
[7] Vgl. Tr. Prop., S. 66, 11–2.

Genus. Dann drückt – mit Übernahme der Notation von Rommevaux – $(A : B)$ die Proportion von A zu B aus. Die Menge der Proportionen wird des weiteren untergliedert in rationale und irrationale Proportionen, in Proportionen der Gleichheit, der größeren Ungleichheit und der kleineren Ungleichheit:

Definitionen

Definition 1. Seien $(x, \tau_1), (y, \tau_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}$, wobei $\mathbb{T} = \{V, F, S, T, ...\}$ die Menge aller möglichen Genera von Quantitäten (= Dimensionen) mit V=Geschwindigkeit, F=Kraft, S=Strecke, T=Zeit ist.
Eine *Proportion* ist ein Paar $((x, \tau), (y, \tau)) \in P := \left\{((x, \tau_1), (y, \tau_2)) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{T})^2 \,|\tau_1 = \tau_2\right\}$. Für das Paar $((x, \tau), (y, \tau))$ schreiben wir auch $(x[\tau] : y[\tau])$, bzw., vereinfachen wir es meistens zu $(x : y)$.

Definition 2. Die Proportion $(x : y)$ nennen wir

rational	gdw $\exists p \in \mathbb{Q} : x = py$,
irrational	gdw $\exists a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : x = ay$,
Proportion der Gleichheit	gdw $x = y$,
Proportion der größeren Ungleichheit	gdw $x > y$,
Proportion der kleineren Ungleichheit	gdw $x < y$.

Beispiele. Rationale Proportionen: $(2 : 1), (3 : 1), ...$[a] Irrationale Proportionen: $(\sqrt{2} : 1), (3 : 2\sqrt{2})$.[b]

[a] Tr. Prop., S. 66, 12–3.
[b] Tr. Prop., S. 66, 16–9.

Nomenklatur für rationale Proportionen

Bei der Systematisierung von Proportionen hat die Proportionenlehre vor allem mit zwei Schwierigkeiten zu kämpfen. Der Mangel an symbolischen Schreibweisen erschwert den kompakten und übersichtlichen Ausdruck allgemeiner Sachverhalte und erfordert so stets ein aufwendiges sprachliches Umschreiben. Zusätzlich verhindert die metaphysische Unterscheidung von Proportionen und Zahlen die Identifikation einer rationalen Proportion $(x : y)$ mit dem Quotienten $\frac{x}{y}$ und damit die Reduktion von Aussagen über Proportionen zu Aussagen über rationale Zahlen.

Stattdessen wird eine Nomenklatur für rationale Proportionen größerer (und in Analogie auch kleinerer) Ungleichheit eingeführt. Bradwardine unterteilt dazu die Klasse der rationalen Proportionen größerer Ungleichheit in fünf Unterklassen: die Proportionen *multiplex*, *superparticularis*, *superpartiens*, *multiplex superparticularis* und *multiplex superpartiens*. Diese stellen noch nicht die letztendliche Benennung einer Proportion dar, sondern systematisieren die Proportionen soweit, dass sich dann für jede Unterklasse eine Regel zur Benennung ihrer Proportionen angeben lässt. Man beachte, dass die Klassen der Proportionen *superpartiens*, *multiplex superparticularis* und *multiplex superpartiens* noch einmal in Unterklassen unterteilt werden, deren Kombination erst die Benennung einer Proportion eindeutig bestimmt.[8]

Die Vorgehensweise in der Benennung einer rationalen Proportion größerer Ungleichheit $(x : y)$ folgt dabei dem folgenden Muster: Es wird bestimmt, wie oft y in x enthalten ist und welcher „*aliquot*“-Teil überschüssig ist.[9] Dieser *aliquot*-Teil entspricht dem Rest einer ganzzahligen Division als Bruchteil von y ausgedrückt. Insgesamt entspricht dies einer Zerlegung von x in $x = py = (k + \frac{m}{n})y$ für ein $p \in \mathbb{Q}$, bzw. $k, m, n \in \mathbb{N}_0, m < n$. Man beachte, dass die mathematische Praxis der Zerlegung von x in Anteile von y möglicherweise im Zusammenhang steht mit der physikalischen Interpretation des *excessus* von einer Kraft über eine andere. Vergleiche dazu Abschnitt **??**.

Nomenklatur

Sei $P_{\mathbb{Q}}$ die Menge aller rationaler Proportionen größerer Ungleichheit. Wir unterscheiden fünf Familien von Teilmengen. Die Familie der Proportionen

multiplex:	$(\{(x : y) \in P_{\mathbb{Q}} \vert x = ky\})_{1<k}$,
superparticularis:	$\left(\{(x : y) \in P_{\mathbb{Q}} \vert x = (1 + \frac{1}{n})y\}\right)_{1<n}$,
superpartiens:	$\left(\{(x : y) \in P_{\mathbb{Q}} \vert x = (1 + \frac{m}{n})y\}\right)_{\substack{1<m<n \\ m,n \text{ teilerfremd}}}$,
multiplex superparticularis:	$\left(\{(x : y) \in P_{\mathbb{Q}} \vert x = (k + \frac{1}{n})y\}\right)_{1<k,n}$ und
multiplex superpartiens:	$\left(\{(x : y) \in P_{\mathbb{Q}} \vert x = (k + \frac{m}{n})y\}\right)_{\substack{1<k,m \\ m<n \\ m,n \text{ teilerfremd}}}$.

Theorem 3. *Die Familie der Proportionen* multiplex*,* superparticularis*,* superpartiens*,* multiplex superparticularis *und* multiplex superpartiens *bilden eine Partition $\mathcal{Z}$ von $P_{\mathbb{Q}}$, d.i. eine Zerlegung in nichtleere paarweise disjunkte Teilmengen.*[a]

Beweis. Es ist zu zeigen:

1) Die Mengen der Familien sind nichtleer.
2) Die Mengen aller Familien sind paarweise disjunkt.

Zu 1): Wähle $y = 1$ und zu jeder Menge $x = py$ so, dass $(x : y)$ in der Menge liegt.

[8] Dieser zusätzlichen Unterteilung wurde in der weiteren Darstellung keine Rechnung getragen, denn es lässt sich direkt zu den Grundklassen vorstoßen, die dann ihre Proportionen vollständig und eindeutig benennen. Tatsächlich ließe sich auf der Ebene dieser Zusatzunterteilung Theorem 3 nicht zeigen.

[9] Vgl. Tr. Prop., S. 68, 56–9.

Zu 2): Die paarweise Disjunktivität aller Mengen aller Familien lässt sich durch Fallunterscheidung und die Definitionen der Mengen zeigen. □

Jetzt, da gezeigt wurde, dass $\mathcal{Z}$ eine Partition von $P_{\mathbb{Q}}$ ist, können wir *jede* rationale Proportion größerer Ungleichheit *eindeutig* durch ihre Zugehörigkeit zu einer Menge aus $\mathcal{Z}$ benennen:

Definition 4. Sei $(x : y)$ eine rationale Proportion größerer Ungleichheit. Dann existiert ein eindeutiges $p \in \mathbb{Q}$, $1 < p$, so dass $x = py$. Wir nennen $(x : y)$ eine *p-Proportion.*

Es lässt sich jetzt eine Interpretationsfunktion ϕ definieren, die jede Proportion $(x : y)$ mit $x = py$ auf p abbildet:

Definition 5. Die Funktion $\phi : P \to \mathbb{R}$ mit $(x[\tau] : y[\tau]) \mapsto \frac{x}{y}$ heißt *Interpretationsfunktion* von Proportionen.

[a] Dieses Theorem stellt sicher, dass jede rationale Proportion größerer Ungleichheit genau einmal benannt wird. Bradwardine wird sich wahrscheinlich mit diesem Problem nicht explizit beschäftigt haben. Er muss aber insofern von seiner Gültigkeit ausgehen, dass in seiner Benennungspraxis keine Mehrdeutigkeiten auftaucht. Für unsere Zwecke stellt diese Unterstellung zusammen mit Theorem 3 eine wichtige Kontrolle der Richtigkeit unserer Interpretation dar.

In der unsymbolischen Ausdrucksweise Bradwardines ist dieser Sachverhalt nicht durch ein schematisches p darzustellen. Stattdessen führt er für die Werte, die p annehmen kann, eine Nomenklatur ein. Tabelle 2.1 zeigt ein Schema dieser lateinischen Bezeichnung durch Bradwardine.

Gleichheit von Proportionen

Die Nomenklatur für Proportionen erfüllt nicht nur die Funktion, überhaupt systematisch über Proportionen sprechen zu können, sondern ermöglicht vielmehr die Definition einer Gleichheitsrelation für Proportionen, die über die Leibniz-Gleichheit ($(x : y)$ ist gleich $(a : b)$ gdw $x = a$ und $y = b$) hinausgeht. Bradwardine stellt in Axiom I von Kapitel I Abschnitt III die folgende Gleichheitsbedingung auf:

> Alle Proportionen sind gleich, deren Benennungen identisch oder gleich sind.[10]

Diese Definition erlaubt es, Proportionen zu erweitern und zu kürzen, wie es unserer Intuition entspricht: Es verhält sich damit 4 zu 2 wie 2 zu 1 und umgekehrt. Die Gleichheit von Proportionen ist auf diese Weise von Zahlen vermittelt, bleibt aber definitorisch von ihnen getrennt.

[10] „Omnes proportiones sunt aequales quarum denominationes sunt eaedem vel aequales.“ (Tr. Prop., S. 76, 262–3)

Tabelle 2.1: Lateinische Nomenklatur

	Benennung	p	Beispiel
multiplex	*dupla*	2	$(2:1)$[a]
	tripla	3	$(3:1)$[b]
	$\vdots$	$\vdots$	
superparticularis	*sesquialtera*	$1+\frac{1}{2}$	$(3:2)$[c]
	sesquitertia	$1+\frac{1}{3}$	$(4:3)$[d]
	$\vdots$	$\vdots$	
superpartiens	*superbitertia*	$1+\frac{2}{3}$	$(5:3)$[e]
	superbiquinta	$1+\frac{2}{5}$	$(7:5)$[f]
	$\vdots$	$\vdots$	
	supertriquarta	$1+\frac{1}{2}$	-
	supertriquinta	$1+\frac{1}{3}$	-
	$\vdots$	$\vdots$	
multiplex superparticularis	*dupla sesquialtera*	$2+\frac{1}{2}$	-
	dupla sesquitertia	$2+\frac{1}{3}$	-
	$\vdots$	$\vdots$	
	tripla sesquialtera	$3+\frac{1}{2}$	-
	tripla sesquitertia	$3+\frac{1}{3}$	-
	$\vdots$	$\vdots$	
multiplex superpartiens	*dupla superbitertia*	$2+\frac{2}{3}$	-
	dupla superbiquinta	$2+\frac{2}{5}$	-
	$\vdots$	$\vdots$	
	dupla supertriquarta	$2+\frac{3}{4}$	-
	dupla supertriquinta	$2+\frac{3}{5}$	-
	$\vdots$	$\vdots$	
	tripla superbitertia	$3+\frac{2}{3}$	-
	tripla superbiquinta	$3+\frac{2}{5}$	-
	$\vdots$	$\vdots$	

[a] (Tr. Prop., S. 68, 52–3) [b] (Ebd., 68, 53) [c] (Ebd., 68, 63–4)
[d] (Ebd., 68, 64–5) [e] (Ebd., 68, 83–4) [f] (Ebd., 68, 85–6)

Gleichheit, Äquivalenzklassen

Definition 6. Seien $(x[\tau] : y[\tau]), (a[\tau'] : b[\tau']) \in P_{\mathbb{Q}}$. Wir definieren die Gleichheitsrelation ‚=' $\subseteq P_{\mathbb{Q}} \times P_{\mathbb{Q}}$ durch:

$$\begin{aligned} &(x[\tau] : y[\tau]) = (a[\tau'] : b[\tau']) \\ &\qquad \text{gdw } \exists p \in \mathbb{Q} : (x[\tau] : y[\tau]) \text{ und } (a[\tau'] : b[\tau']) \text{ sind } p\text{-Proportionen.} \end{aligned}$$

Lemma 7. ‚=' ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis. Durch Anwendung der Definition von p-Proportion lässt sich einfach zeigen, dass ‚=' reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Bemerkung. Die Äquivalenzklassen von ‚=' entsprechen der Partition $\mathcal{Z}$ aus Theorem 3.

Proportionalität

In zweiten Abschnitt des ersten Kapitels führt Bradwardine das Konzept der Proportionalität ein. Aus Boëthius' *Arithmetica* übernimmt er drei von zehn Proportionalitätsbegriffen: arithmetische, geometrische und harmonische Proportionalität. Die ersten beiden unterteilt er noch einmal in fortlaufende und nichtfortlaufende Proportionalität.

Definition von Proportionalität

Definition 8. Sei $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ eine Folge reeller Zahlen. Dann ist $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$

fortlaufend arithmetisch proportional	gdw	für $1 \leq i \leq n-2$: $x_i - x_{i+1} = x_{i+1} - x_{i+2}$,
nichtfortlaufend arithmetisch proportional	gdw	für $1 \leq i \leq n-3$: $x_i - x_{i+1} = x_{i+2} - x_{i+3}$,
fortlaufend geometrisch proportional	gdw	für $1 \leq i \leq n-2$: $(x_i : x_{i+1}) = (x_{i+1} : x_{i+2})$,
nichtfortlaufend geometrisch proportional	gdw	für $1 \leq i \leq n-3$: $(x_i : x_{i+1}) = (x_{i+2} : x_{i+3})$ und
fortlaufend harmonisch proportional	gdw	$n = 3$ und $(x_1 : x_3) = (x_1 - x_2 : x_2 - x_3)$.

Beispiele. $3, 2, 1$ ist fortlaufend arithmetisch proportional, da $3 - 2 = 2 - 1$.[a] $4, 2, 1$ ist fortlaufend geometrisch proportional, da $(4 : 2) = (2 : 1)$.[b] $6, 3, 2, 1$ ist nichtfortlaufend geometrisch proportional, da $(6 : 3) = (2 : 1)$.[c] $6, 4, 3$ ist fortlaufend harmonisch proportional, da $(6 : 3) = (6{-}4 : 4{-}3)$.[d]

[a]Tr. Prop., S. 72, 152.
[b]Tr. Prop., S. 72, 158.
[c]Tr. Prop., S. 72, 180–1.
[d]Tr. Prop., S. 72, 163–6.

Die Tatsache, dass bei Bradwardine anders als in der hiesigen Darstellung die Gleichheitsrelation erst nach der Proportionalität definiert wird, ist ein Hinweis darauf, dass beide in einem gewissen Sinne redundant sind. Beide drücken Verhältnisse zwischen Proportionen aus und es ist ebenso denkbar, Gleichheit durch (geometrische) Proportionalität zu definieren. Während der Begriff der Proportionalität zusammen mit seinen feinen Unterscheidungen historisch gewachsen ist, erscheint die Definition der Gleichheit in Axiom I (Kapitel I, Abschnitt III) überraschend, zumal Bradwardine für es keine Referenz angibt. Denn so selbstverständlich, wie Crosby meint, ist das Bewusstsein, dass Gleichheit von Identität abweichen kann, nicht.[11]

Die Einführung von Proportionalität hat den Vorteil, dass sie die Unterscheidung fortlaufend–nichtfortlaufend zur Verfügung stellt. Diese Unterscheidung erhält vor allem dann Bedeutung, wenn man die Genera der betrachteten Quantitäten berücksichtigt. So tritt fortlaufende Proportionalität nur bei Folgen von Quantitäten des gleichen Genus auf: $(x_i[\tau])_{1 \leq i \leq n}$. Nichtfortlaufende Proportionalität erfordert nur, dass die Genera innerhalb einer Proportion übereinstimmen. Dies erlaubt beispielsweise Proportionalität zwischen zwei Strecken und zwei Zeitdauern: $(x[S] : y[S]) = (a[T] : b[T])$. Insbesondere in physikalischen Zusammenhängen können so Größen zueinander ins Verhältnis gesetzt werden, die andernfalls nicht vergleichbar wären.

Im Anschluss an die Definition von Proportionalität setzt Bradwardine axiomatisch die Gültigkeit von fünf Umformungen für geometrische Proportionalität (welche in dem hier entwickelten Modell einfach zu zeigen sind) und definiert die proportionale Gleichheit von Folgen.

[11]Die Einschätzung Crosbys findet sich auf Seite 28. Die hier vertretende abweichende Ansicht bleibt natürlich durch einen historischen Vergleich von Gleichheitsbegriffen zu zeigen.

Umformungen geometrische Proportionalität

Lemma 9. Gegeben sei die Folge a, b, c, d reeller Zahlen. Dann gelten mit einem einheitlichen Genus τ die folgenden Umformungen:

a) *Permutation*: $(a : b) = (c : d) \Rightarrow (a : c) = (b : d)$
b) *Umkehrung*: $(a : b) = (c : d) \Rightarrow (b : a) = (d : c)$
c) *Konjunktion*: $(a : b) = (c : d) \Rightarrow (a{+}b : b) = (c{+}d : d)$
d) *Disjunktion*: $(a{+}b : b) = (c{+}d : d) \Rightarrow (a : b) = (c : d)$
e) *Umdrehung*: $(a{+}b : b) = (c{+}d : d) \Rightarrow (a{+}b : a) = (c{+}d : c)$

Definition 10. Wir nennen zwei Folgen a, b, c und x, y, z *proportional gleich* genau dann, wenn $(a : b) = (x : y)$, $(b : c) = (y : z)$ und $(a : c) = (x : z)$.

„Vielfache“ von Proportionen

Im dritten Abschnitt des ersten Kapitels entwickelt Bradwardine in den Axiomen II und III und den ihnen entsprechenden Theoremen I und II eine Erweiterung des Proportionenbegriffs, dessen Reichweite ihm wahrscheinlich nicht bewusst ist, deren erste Ergebnisse aber in seiner neuen Bewegungsregel zu direkter Anwendung kommen.

Axiom II behauptet, dass sich zu je zwei Größen x, z mit $x \neq z$ eine mittlere Größe y finden lässt, sodass $(x : y) = (y : z)$ und $(x : z)$ eine Proportion *composita* von $(x : y)$ und $(y : z)$ ist.[12] Axiom III erweitert diese Aussage auf n eingeschobene Größen. Die Beschreibung einer Proportion durch ‚*composita*‘ legt nahe, dass Bradwardine sich eine Operation zwischen zwei Proportionen vorstellt, und die Wortwahl ‚*composita*‘, dass jene additiven Charakter hat. Tatsächlich muss es sich aber in unserem Verständnis um eine Multiplikation der Art $(x : y) \cdot (y : z) = (x{\cdot}y : y{\cdot}z) = (x : z)$ handeln. Bei Bradwardine bleibt eine solche Operation unbestimmt. Auch wird keine Konstruktion für die mittlere Größe y gegeben; die Aussage bleibt somit axiomatisch. Da beides nur die Funktion eines Zwischenschritts zu einer ‚Potenz‘ für Proportionen erfüllt, ist dies nicht weiter problematisch.

Theorem I ist eine Schlussfolgerung aus Axiom II und behauptet:

> Wenn eine Proportion größerer Ungleichheit einer ersten Größe zu einer zweiten gleich der der zweiten Größe zu einer dritten ist, dann wird die Proportion der ersten Größe zur dritten genau zweimal (*dupla*) die Proportion der ersten zur zweiten, und der zweiten zur dritten sein.[13]

[12] (Vgl. Tr. Prop., S. 76, 264–7). Für die Zusatzbedingung $x \neq z$ siehe Tr. Prop., S. 84, 437–9.
[13] „Si fuerit proportio maioris inaequalitatis primi ad secundum ut secundi ad tertium, erit proportio primi ad tertium praecise dupla ad proportionem primi ad secundum et secundi ad tertium.“ (Tr. Prop., S. 78, 293–6)

Theorem II erweitert die Aussage dann analog zu Axiom III auf n Terme: Wenn $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ fortlaufend geometrisch proportional ist, dann ist $(x_1 : x_n)$ das $n-1$-fache von $(x_i : x_{i+1})$ für $1 \leq i \leq n-1$. Viel interessanter als der eigentliche Beweisgang für beide Theoreme ist die Anwendung der Begriffe ‚*dupla*', ‚*tripla*' etc. nicht auf Zahlen oder als Benennung einer Proportion *multiplex*, sondern auf eine Proportion selbst. Dies muss wiederum als eine Operation auf einer Proportion verstanden werden in dem Sinne von $2(2 : 1) = (4 : 1)$ als Verdopplung der Proportion $(2 : 1)$. Auch hier wird die Operation nicht konstruktiv definiert. Damit allerdings Theoreme I und II konsistent zu dem bisherigen Modell der Proportionenlehre bleiben, muss es sich hierbei um die Potenzfunktion für Proportionen handeln. Man beachte, dass dessen ungeachtet die Beschreibung durch *dupla*, *tripla* etc. einen multiplikativen Charakter impliziert. Diese Sichtweise Bradwardines hat zwei Konsequenzen: Zum einen sind die Sprachoperatoren ‚*dupla*', ‚*tripla*' etc. jetzt überladen und lassen sich auf Zahlen, wie auf Proportionen anwenden. Zum anderen erlaubt es genau diese Vermengung, von einer Proportion zwischen Proportionen zu sprechen.

Zunächst wird aber die Multiplikation (Potenz) für Proportionen sauber beschrieben.

Multiplikation (Potenz) für Proportionen

Sei $P^{>}$ die Menge der Proportionen größerer Ungleichheit.

Definition 11. Wir definieren die Operation ‚$\cdot$': $\mathbb{R} \times P^{>} \to P^{>}$ durch:

$$p \cdot (x : y) \mapsto (x^p : y^p)$$

Für $p \cdot (x : y)$ schreiben wir auch $p(x : y)$.

Bemerkung. Die Operation ‚$\cdot$' entspricht dem Potenzieren von rationalen Zahlen. Betrachte:

$$\phi(p(x : y)) = \phi((x^p : y^p)) = \frac{x^p}{y^p} = \left(\frac{x}{y}\right)^p$$

Proportion von Proportionen

Nirgends in seinem Traktat benutzt Bradwardine die Sprechweise ‚Proportion von Proportionen'. Bei der Formulierung seiner Bewegungsregel spricht er allerdings davon, dass zwei Proportionen von Kräften (geometrisch) proportional zur Proportion zweier Geschwindigkeiten seien.[14] Die Vorstellung, dass eine Proportion das Vielfache von einer anderen Proportion ist – parallel dazu, wie eine Zahl das Vielfache einer anderen ist –,

[14] Vgl. Tr. Prop., S. 112, 47–9. Einen Abriss über die Prägung des Begriffs einer Proportion von Proportionen vor allem unter Nicolaus von Oresme (ca. 1330 bis 1382) liefert Grant (1966, S. 15, Fußnote 9).

legt nahe, das Verhältnis zwischen zwei Proportion genau in dem Faktor zu sehen, der die eine auf die andere abbildet. Wenn sich ein Faktor zwischen zwei Proportionen bestimmen lässt, ist es ein intuitiver Schritt, die Proportion zwischen Proportionen genau dann als gleich zu einer Proportion von Zahlen zu sehen, wenn die Proportionen sich um den gleichen Faktor unterscheiden wie die Zahlen.

Dieser Sachverhalt wird im Folgenden mathematisch explizit formuliert:

Proportion von Proportionen

Definition 12. Seien $(x : y), (a : b)$ Proportionen größerer Ungleichheit.
Eine *Proportion von Proportionen* ist ein Paar $((x : y), (a : b)) \in P^{>} \times P^{>}$. Für das Paar $((x : y), (a : b))$ schreiben wir auch $((x : y) : (a : b))$.[a]

Lemma 13. Seien $(x : y), (a : b)$ Proportionen größerer Ungleichheit. Dann existiert genau ein $p \in \mathbb{R}^{+}$, so dass $(x : y) = p(a : b)$.

Beweis.
Existenz: Setze $p = \log_{\frac{a}{b}} \left(\frac{x}{y}\right)$. $p > 0$ wegen $\frac{a}{b} > 1$ und $\frac{x}{y} > 1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
p &= \log_{\frac{a}{b}} \left(\frac{x}{y}\right) \\
&\Leftrightarrow \frac{x}{y} = \left(\frac{a}{b}\right)^{p} = \frac{a^{p}}{b^{p}} \\
&\Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Q} : x = qy \text{ und } a^{p} = qb^{p} \\
&\Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Q} : (x : y) \text{ und } (a^{p} : b^{p}) \text{ } q\text{-Proportionen} \\
&\Leftrightarrow (x : y) = (a^{p} : b^{p}) \Leftrightarrow (x : y) = p(a : b)
\end{aligned}$$

Eindeutigkeit: Seien $p, p' \in \mathbb{R}^{+}$ so, dass $(x : y) = p(a : b)$ und $(x : y) = p'(a : b)$. Durch die obigen Äquivalenzumformungen folgt: $p = \log_{\frac{a}{b}} \left(\frac{x}{y}\right) = p'$. □

Definition 14. Sei $((x : y) : (a : b))$ eine Proportion von Proportionen. Dann existiert ein eindeutiges $p \in \mathbb{R}^{+}$, so dass $(x : y) = p(a : b)$. Wir nennen $((x : y) : (a : b))$ eine *p-Proportion von Proportionen.*

Erneut lässt sich damit eine Interpretationsfunktion Φ definieren:

Definition 15. Die Funktion $\Phi : P^{>} \times P^{>} \to \mathbb{R}^{+}$ mit $((x : y) : (a : b)) \mapsto \log_{\frac{a}{b}} \left(\frac{x}{y}\right)$ heißt *Interpretationsfunktion* von Proportionen von Proportionen.

Wir verstehen Gleichheit von Proportionen mit Proportionen von Proportionen wie folgt:

Definition 16. Seien $(x : y) \in P^{>}$, $((a : b) : (c : d)) \in P^{>} \times P^{>}$. Wir definieren:

$$\begin{aligned}(x : y) = ((a : b) : (c : d)) \quad \text{gdw} \quad \exists p \in \mathbb{R} :\ & (x : y) \text{ ist eine } p\text{-Proportion und} \\ & ((a : b) : (c : d)) \text{ ist eine } p\text{-Proportion von Proportionen}\end{aligned}$$

Bemerkung. Wir müssen $(x : y) = ((a : b) : (c : d))$ also interpretieren als $\phi(x : y) = \Phi((a : b) : (c : d)) \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \log_{\frac{c}{d}}\left(\frac{a}{b}\right)$.

[a] Analog lässt sich eine Proportion von Proportionen kleinerer Ungleichheit definieren. Es ist sogar denkbar eine Proportion von einer Proportion größerer zu einer Proportion kleinerer Ungleichheit (und umgekehrt) zu erlauben. Dann bekommen wir in Lemma 13 allerdings ein $p < 0$, was Konsequenzen für die (Nicht-)Totalität der Ordnung auf P hätte (Siehe dazu Theoreme 19 und 20).

Irrationale Proportionen

In der mathematischen Darstellung der Proportionen von Proportionen wurden stillschweigend irrationale Proportionen einbezogen. Die explizite mathematische Darstellung macht deutlich, dass eine Erweiterung des Proportionenbegriffs auf irrationale Proportionen notwendig ist, wenn jeder Proportion von Proportionen eine einfache Proportion entsprechen soll. Denn eine rationale Proportion lässt sich im Allgemeinen nicht durch einen rationalen Faktor auf eine andere rationale Proportion abbilden. Man betrachte z.B. die Proportionen $(10 : 1)$ und $(2 : 1)$ und die Gleichung $(10 : 1) = p(2 : 1)$. Die Gleichung lässt sich für rationale p nicht lösen, sondern nur durch das transzendente $p = \log_{10} 2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Bradwardine selbst liefert keine explizite Theorie irrationaler Proportionen. Die einzige Aussage zu irrationalen Proportionen ist:

> [Irrationale Proportionen] werden nicht unmittelbar, sondern nur mittelbar durch eine gegebene Zahl benannt (denn sie werden unmittelbar durch eine gegebene Proportion benannt, die wiederum unmittelbar durch eine Zahl benannt wird).[15]

Ein Beispiel für diese Art der Benennung ist die Proportion „*medietas duplae proportionis*“[16], $\frac{1}{2}(2 : 1) = (\sqrt{2} : 1)$. Diese Benennung liefert weitere Unterstützung für die oben vorgeschlagene Definition einer Multiplikation für Proportionen. Das gegebene Beispiel lässt sich auf intuitive Weise zu einer Nomenklatur für irrationale Proportionen erweitern, wenn diese sich als Vielfaches $p(x : y)$ einer rationalen Proportion $(x : y)$ darstellen lassen, wobei $p = n$ oder $p = \frac{1}{n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Eine abschließende Nomenklatur würde

[15] „[Proportio irrationalis] non immediate denominatur ab aliquo numero, sed mediate tantum (quia immediate denominatur ab aliqua proportione, quae immediate denominatur a numero).“ (Tr. Prop., S. 66, 14–6)

[16] Tr. Prop., S. 66, 16.

eine Theorie transzendenter Zahlen erfordern, welche erst im 19. Jahrhundert entwickelt wurde. Trotz der Einschränkungen der Mathematik Bradwardines stehen ihm nicht zu verachtende rechnerische Werkzeuge und vor allem die Möglichkeit, logarithmische Gleichungen – wenn auch nicht explizit als solche verstanden und ohne, sie im Allgemeinen lösen zu können – zur Verfügung.

Ordnungsrelation für Proportionen

Zwei der fünf Axiome und alle sechs verbliebenen Theoreme aus Kapitel I Abschnitt III des Traktats treffen über eine Ordnungsrelation. Die meisten Aussagen wären für sich genommen wenig bemerkenswert, wenn nicht Theorem VII eine andere als die intuitive Ordnungsrelation erfordern würde, um überhaupt einen sinnvollen Gehalt auszudrücken. Theorem VII behauptet:

> Keine Proportion ist größer oder kleiner als eine Proportion der Gleichheit.[17]

Diese Aussage ist zunächst einmal überraschend, zumal dann, wenn man als moderner Leser doch heimlich Proportionen mit Brüchen identifiziert. Eine Reduktion der Ordnung von Proportionen auf die Ordnung von reellen Zahlen scheitert allerdings an obiger Aussage, denn es gilt bekannterweise sehr wohl $\frac{1}{1} < \frac{4}{1}$. Es bleibt somit unumgänglich, die Ordnungsrelation für Proportionen auf andere Art und Weise zu definieren.

Ordnungsrelation, Theorem VII

Definition 17. Wir definieren die Ordnungsrelation ‚$<$'$\subset P \times P$ durch

$$(a:b) < (x:y) \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists p > 1\colon p(a:b) = (x:y)$$

Dass diese Definition mit unserer Intuition zumindest für Proportionen größerer Ungleichheit kompatibel ist, zeigt das nächste Lemma.

Lemma 18. Für $(a:b) < (x:y) \in P^{<}$ gilt:

$$(a:b) < (x:y) \quad \Longleftrightarrow \quad \phi(a:b) < \phi(x:y)$$

[17] „Proportione aequalitatis nulla proportio est maior vel minor.“ (Tr. Prop., S. 80, 350–1)

Beweis.

$$\begin{aligned}(a:b)<(x:y) &\iff \exists p>1\colon p(a:b)=(x:y)\\ &\iff \log_{\frac{a}{b}}\left(\frac{x}{y}\right)=p \text{ und } p>1\\ &\iff 1<\log_{\frac{a}{b}}\left(\frac{x}{y}\right)\\ &\overset{\text{n.V.: } 1<\frac{a}{b},\frac{x}{y}}{\iff} \frac{a}{b}<\frac{x}{y}\\ &\iff \phi(a:b)<\phi(x:y)\end{aligned}$$

□

Es kann nun Theorem VII bewiesen werden.

Theorem 19. *Sei* $(a:a)$ *eine Proportion der Gleichheit. Dann gilt:*

$$\forall (x:y)\in P\colon (a:a)\not< (x:y)\wedge (x:y)\not<(a:a)$$

Beweis. Sei $(a:a)$ eine Proportion der Gleichheit und $(x:y)\in P$ beliebig.
Falls $(x:y)$ auch eine Proportion der Gleichheit ist, folgt, $p(x:y)=(x:y)=(a:a)=p(a:a)$ mit $p=1$ und somit, dass weder $(x:y)<(a:a)$, noch dass $(a:a)<(x:y)$.
Andernfalls ist $(x:y)$ entweder eine Proportion der größeren oder der kleineren Ungleichheit. Sei ohne Einschränkung der Allgemeinheit $(x:y)\in P^<$.
Angenommen $(a:a)<(x:y)$. Dann gilt für ein $p>1$: $p(a:a)=(x:y)$ und damit $(a^p:a^p)=(x:y)$. Allerdings ist $(a^p:a^p)$ eine Proportion der Gleichheit und $(x:y)$ der Ungleichheit. Damit kann zwischen ihnen keine Gleichheit bestehen. Mit *reductio ad absurdum* folgt: $(a:a)\not<(x:y)$
Angenommen $(x:y)<(a:a)$. Dann gilt für ein $p>1$: $p(x:y)=(a:a)$. Mit Lemma 13 gilt aber auch $p=\log_{\frac{x}{y}}\left(\frac{a}{a}\right)=\log_{\frac{x}{y}}1=0<1$. Mit *reductio ad absurdum* folgt: $(x:y)\not<(a:a)$ □

Ganz ähnlich lässt sich Theorem VIII zeigen, dass zusammen mit Theorem VII die Nichttotalität der Ordnungsrelation festhält.

Theorem 20. *„Keine Proportion größerer Ungleichheit ist größer oder kleiner als eine der kleineren Ungleichheit.“*[a]

[a] „Nulla proportio maioris inaequalitatis aliqua proportione minoris inaequalitatis est maior vel minor.“ (Tr. Prop., S. 84, 444–5)

Die von Bradwardine aufgestellte Ordnungsrelation geht auf den Begriff der Proportion von Proportionen zurück.[18] Man könnte alternativ zu Definition 17 auch formulieren: Eine Proportion ist dann größer [kleiner] als eine zweite Proportion, wenn zwischen ihnen eine Proportion größerer [kleinerer] Ungleichheit besteht. Für eine Proportion größerer Ungleichheit zu einer Proportion der kleineren Ungleichheit oder auch der Gleichheit ist dies unmöglich.

Die Relevanz der Theoreme VII und VIII für Bradwardines Theorie der Bewegung erschließt sich im Zusammenhang mit der Annahme, dass keine Bewegung entsteht, wenn eine widerstehende Kraft gleich oder größer einer bewegenden Kraft ist.[19] Für Bradwardines Bewegungsregel folgt, wie wir sehen werden, diese Aussage schon aus mathematischen Gründen.

Die verbliebenen Axiome IV bis VIII und Theoreme III bis VI sind vergleichsweise wenig außergewöhnlich und bedürfen kaum der Interpretation. Der Vollständigkeit halber werden sie ohne weiteren Kommentar aufgelistet.[20]

Axiome IV–VIII, Theoreme III–VI

Axiom IV: Wenn $x = y$ und z beliebig, dann $(z : x) = (z : y)$ und $(x : z) = (y : z)$.

Axiom V: Sei $x \neq y$ und z beliebig. Wenn $x > y$, dann $(x : z) > (x : z)$, und wenn $x < y$, dann $(x : z) < (x : z)$.

Axiom VI: Wenn $(x : z) = (y : z)$ oder $(z : x) = (z : y)$, dann $x = y$.

Axiom VII: Wenn $(a : b) = (b : c) = (c : d)$, dann $(a : c) = (b : d)$.

Axiom VIII: Wenn $(a : b) = (b : c) = (c : d)$ und $a > b$, dann $a + d > b + c$.

Theorem III: Wenn $x > 2y$ und $y = 2z$, dann $(x : z) < 2(x : y)$.

Theorem IV: Wenn $x = 2z$ und $y > 2z$, dann $(x : z) < 2(x : y)$.

Theorem V: Wenn $x < 2y$ und $y = 2z$, dann $2(x : y) < (x : z)$.

Theorem VI: Wenn $x = 2y$ und $y < 2z$, dann $2(x : y) < (x : z)$.

[18] Vergleiche die Fußnote zu Definition 12.)

[19] Vergleiche die Ausführung zum ‚Ausgangspunkt einer quantitativen Theorie der Bewegung‘ in Abschnitt 1.2.

[20] Die Darstellung folgt Crosby, 1955, 28ff.

Anmerkung

Die präzise Rekonstruktion der Mathematik Bradwardines mit modernen Begriffen erlaubt zwei Schlussfolgerungen. Die eine anerkennend, die andere einschränkend.

Die erste Schlussfolgerung betrifft die Unterscheidung von Proportionen und Zahlen. In diesem Zusammenhang hat insbesondere die explizite Einführung einer separaten Ordnungrelation für Proportionen gezeigt, dass die Entscheidung, Proportionen strikt von Zahlen zu trennen, keine zufällige war. Sie wurde in der Absicht getroffen, die für die physikalische Korrektheit der Bewegungsregel relevanten Theoreme VII und VIII zu erhalten. Die Unterscheidung von Proportionen und Zahlen, die auf den ersten Blick auf historischer Unkenntnis zu beruhen scheint, ist vielmehr beabsichtigt.

Die zweite Schlussfolgerung steht im Zusammenhang mit der Diskussion des mittelalterlichen Funktionsbegriffs aus Abschnitt 1.1. Die Überlegungen zur Vollständigkeit der eingeführten Begriffe hat gezeigt, dass für die vollständige Beschreibung von Proportionen von Proportionen eine abgeschlossene Theorie irrationaler Proportionen notwendig ist. Da Bradwardine diese nicht liefert und aufgrund der nicht weit genug fortgeschrittenen Zahlentheorie seiner Zeit auch gar nicht liefern kann, ist klar, dass es sich bei der von ihm vorgestellten Bewegungsregel, welche eine Proportion von Proportionen ausdrückt, gar nicht um eine stetige Funktion im modernen Sinne handeln kann. Sie liefert stattdessen nur eine partielle Rechenregel für geeignete Zahlenwerte. Diese Einschränkung bedeutet allerdings nicht, dass die Neuerung, physikalische Zusammenhänge überhaupt durch eine solche Regel auszudrücken, in ihrer Bedeutung unterschätzt werden darf.

3 Die Bewegungsregel

Die Herleitung seiner Bewegungsregel erfolgt bei Bradwardine durch die Widerlegung von vier alternativen Theorien – eine Methode in seinem Selbstverständnis ganz „nach der Weise Aristoteles'".[1] Diese Widerlegung führt er in Kapitel II durch. Kapitel III schließt daran mit der ‚*conclusio*' seiner Bewegungsregel an. Die Regel erhält an dieser Stelle keine weitere Begründung. Seine restliche Theorie präsentiert er in zehn weiteren Schlussfolgerungen, die er mit den bereits entwickelten mathematischen Werkzeugen herleitet. Erst danach geht er auf mögliche Einwände gegen seine Theorie der Bewegung ein und versucht sie zu widerlegen. Kapitel I bis III folgen somit einem einheitlichen, logischen Aufbau. Kapitel IV stellt im Vergleich dazu eine Art Neuanfang dar. Nachdem er im ersten Abschnitt neue Mathematik, hauptsächlich die Geometrie betreffend einführt, behandelt Bradwardine zwei Spezialprobleme: die Rotationsbewegung und die proportionale Verteilung der Elemente innerhalb des geozentrischen Kosmos'. Er verfolgt dabei weiterhin das Projekt, die Proportionenlehre in naturphilosophischen Problemen zur Anwendung zu bringen.

Die nächsten drei Abschnitte orientieren sich an den Kapiteln II bis IV des Traktats. Abschnitt 3.3 beschränkt sich dabei auf eine kurze Zusammenfassung von Kapitel IV und geht dann auf eine dort erstmals formulierte und in der historischen Perspektive sehr bedeutsame Unterscheidung der Qualität von der Quantität von Geschwindigkeit ein.

3.1 Die falschen Regeln

Die vier falschen Theorien sind – so wie Bradwardine sie vorstellt – unmittelbar darauf ausgerichtet, die von Aristoteles extrahierte Aussage zu interpretieren, dass sich Kraft und Widerstand in einer Art proportionalem Verhältnis zur Geschwindigkeit befinden. Theorien I bis III argumentieren dabei jeweils für eine bestimmte mathematische Art der Proportionalität, wohingegen Theorie IV argumentiert, dass eine solche mathematische Proportionalität zwischen bewegender und widerstehender Kraft schlichtweg nicht existiert. Crosby merkt an, dass der spezifisch mathematische Charakter, den Theorien I

[1] „more Aristotelis" (Tr. Prop., S. 86, 2)

bis III bei Bradwardine besitzen, bei den mittelalterlichen Vorgängern, auf welche er sich bezieht, noch nicht in dieser Form ausgeprägt war. Sie interessierten sich vielmehr für die Natur der an Bewegung beteiligten Prinzipien und formulierten die mathematischen Implikationen ihrer Ansichten nicht präzise aus.[2]

Bradwardines Widerlegungsstrategie folgt bei allen vier Theorien einem ähnlichen Muster. Er stellt die jeweilige Theorie und insbesondere ihren mathematischen Gehalt vor, führt hauptsächlich unter Verweis auf Aristoteles und Averroës unterstützende Argumente für sie an, um sie dann jedoch zu widerlegen. Die eigentliche Widerlegung erfolgt in erster Linie dadurch, dass aus den Theorien die mathematischen Konsequenzen gezogen und ihnen widersprechende Aussagen Aristoteles' oder Averroës', aber selten auch im weitesten Sinne empirische Data gegenübergestellt werden. Bei Theorie IV erfolgt die Widerlegung durch Analogie zu anderen Wissensbereichen und durch grundsätzliche Überlegungen. Dadurch liefert sie uns auch einige wichtige Einsichten in Bradwardines naturphilosophische Annahmen.

Im Folgenden werden die vier falschen Theorien vorgestellt. Dabei wird nicht auf jedes einzelne Argument des Für und Wider eingegangen, sondern nur auf solche, die entweder besonders repräsentativ für Bradwardines Argumentationsweise oder naturphilosophisch besonders relevant sind.

Theorie I: Proportionalität zum *excessus*

Theorie I besagt, dass „die Proportion der Geschwindigkeiten von Bewegungen dem *excessus* der Kraft des Bewegers über die Kraft des bewegten Gegenstandes folgt."[3] Unter *excessus* lässt sich hier die mathematische Differenz zwischen der einen und der anderen Größe verstehen.[4] Dann lässt sich die Theorie mathematisch interpretieren durch:[5]

$$(v : v') = (f{-}r : f'{-}r').$$

[2] Vgl. Crosby, 1955, S. 31.
[3] „proportionem velocitatum in motibus sequi excessum potentiae motoris ad potentiam rei motae." (Tr. Prop., S. 86, 5–6)
[4] In der Diskussion von Theorie IV wird die metaphysische Bedeutung des *excessus* problematisiert. Eine gründliche Analyse des *excessus* wird bis dahin verschoben.
[5] Hier und im Folgenden bezeichnet v die Geschwindigkeit, f die bewegende und r die widerstehende Kraft.

Interpretiert als Bruch bedeutet dies:[6]

$$\frac{v}{v'} = \frac{f-r}{f'-r'},$$
$$\text{bzw. } v = k(f-r) \text{ mit } k = \frac{v'}{f'-r'}.$$

Zur Widerlegung führt Bradwardine sieben Argumente an, von denen Argument I, IV und VII eine genauere Betrachtung wert sind.

Das erste Argument zeigt exemplarisch, wie Bradwardine durch mathematische Argumentation einen exakten Widerspruch zwischen der Theorie und einer Aussage Aristoteles' herleitet. Er zeigt mit der Rechnung

Wenn $f = 2f' = 4$ $r = 2r' = 2$, dann $(v : v') = (4{-}2 : 2{-}1) = (2 : 1)$. Also $v = 2v'$. ,

dass bei gleicher Zeit eine halbe Kraft einen halben Gegenstand nur halb soweit bewegt, wie die volle Kraft den vollen Gegenstand. Dies steht allerdings im Widerspruch zu Aristoteles' Aussage, dass die halbe Kraft den halben Gegenstand in der gleichen Zeit gleich weit bewegt.[7]

Das vierte Argument behandelt den Fall eines ‚gemischten Körpers' durch ein Medium im Vergleich zum Vakuum. Es steht damit exemplarisch für Bradwardines' Anspruch, dass eine Bewegungsregel nicht nur einfache Bewegungen, sondern auch komplexere Fallbewegungen beschreiben soll. Er betrachtet den Fall eines gemischten Körpers A (mit inneren bewegenden und widerstehenden Kräften f_A und r_A) und vergleicht ihn mit dem Fall einer so gewählten Menge reiner Erde B (ohne inneren Widerstand), dass ihre bewegende Kraft $f_B < f_A - r_A$. Im Vakuum V fällt A mit einer bestimmten Geschwindigkeit $v_{A,V}$. Er wählt dann ein so passend verdünntes Medium M mit einem (entsprechend der Verdünnung verringerten) Widerstand r_M, dass B in ihm mit der Geschwindigkeit $v_{B,M} = v_{A,V}$ fällt. Platziert man nun A ebenfalls im Medium M muss $v_{A,M} > v_{B,M} \overset{!}{=} v_{A,V}$ gelten, da $f_A - r_A > f_B$. A fällt dann in einem Medium schneller als im Vakuum. Die Argumentation steht und fällt mit der Möglichkeit ein solches Medium M unter den gegebenen Bedingungen zu finden. Tatsächlich ist dies unter der Annahme $(v : v') = (f{-}r : f'{-}r')$ mathematisch unmöglich.[8] Bradwardine bezieht sich allerdings

[6] Besonders die letzte Darstellung ist die am meisten anachronistische. Die Proportionalitätskonstante k suggeriert, dass sich nach der empirische Bestimmung der drei Größen v', f' und r' einer Referenzbewegung und damit von k direkt ein funktionales Verhältnis von v zu f und r ausdrücken lässt. Zumal die Scholastik sich gar nicht mit dem Messen von irgendwelchen Größen beunruhigte, ist die Vorstellung bei Bradwardine schlicht nicht vorhanden. Stattdessen betrifft eine Proportionalitätsaussage immer die Größen von zwei *gleichzeitig* betrachteten Bewegungen.

[7] Vgl. *Physik*, VII.5, 250a7–8

[8] Aus $v_{B,M} = v_{A,V}$ folgt mit $(v_{B,M} : v_{A,V}) = (f_B{-}r_M : f_A{-}r_A)$, dass $f_B - r_M = f_A - r_A$. Dies steht allerdings im Widerspruch zu der Voraussetzung $f_B < f_A - r_A$. Wie man sich leicht überzeugen kann, lässt sich unter Annahme von Bradwardines' Bewegungsregel ein solches Medium sehr wohl finden

auf Aristoteles, der behauptet, dass es bei gleichbleibender bewegender Kraft jederzeit möglich ist, ein Medium so zu verdünnen, dass eine beliebige Geschwindigkeit erreicht wird.[9] Zum vierten Argument lassen sich zwei Punkte anmerken. Zum einen verdeutlicht es, das Verhältnis Bradwardines zu Aristoteles. Er fordert, dass selbst ein problematisches Diktum Aristoteles', wie das eben genannte, von einer Theorie der Bewegung erfüllt werden muss. Zum anderen macht das Argument erfolgreich anschaulich, wie Bradwardine *secundo imaginatione* argumentiert. Der Fall im Vakuum und auch die beliebige Verdünnung eines Mediums sind und bleiben bei ihm reine Gedankenexperimente.

Das siebte und letzte Argument ist dadurch bemerkenswert, dass es als einziges nicht an eine Aussage Aristoteles' appelliert, sondern in einem sehr weiten Sinne an die Erfahrung. Das Argument beruft sich darauf, dass die Formel $(v : v') = (f - r : f' - r')$ nur die absolute Differenz zwischen bewegender und widerstehender Kraft betrachtet. Eine relativ betrachtet kleine, aber absolut große Differenz von f zu r würde eine sehr große Geschwindigkeit bewirken im Vergleich zu einer relativ betrachtet größeren, aber absolut kleinen Differenz. Diese Konsequenz steht im Widerspruch mit der Alltagserfahrung, dass ein starker Mann (f) ein sehr schweres Objekt (r) nur geradeso fortbewegen kann, eine Fliege (f') aber ein ihr angemessenes Objekt (r') üblicherweise sehr schnell transportiert, obwohl $f - r$ in den meisten Fällen sehr viel größer ist als $f' - r'$. Dieses ‚empirische' Argument verdeutlicht, wie sehr sich die Naturphilosophie Bradwardines trotz der beginnenden Mathematisierung von der jungen Erfahrungswissenschaft des 16. Jahrhunderts unterscheidet.

Die Problematisierung der absoluten Differenz in dem letzten Argument legt ganz natürlich Theorie II nahe, in welcher der *excessus* relativ zum Widerstand betrachtet wird.

Theorie II: Proportionalität zum *excessus* relativ zum Widerstand

Theorie II besagt, dass „die Proportion der Geschwindigkeiten von Bewegungen der Proportion des *excessus* der bewegenden Kraft und der Kraft des bewegten Gegenstands

durch die Wahl $r_M = \frac{f_A}{f_B \cdot r_A}$. Man erhält in der Folge auch wie gewünscht $v_{A,M} < v_{B,M}$.

[9] Bradwardine verweist auf *Physik*, IV. Die genaue Stelle konnte leider nicht bestimmt werden. Auch Crosby gibt keine genaue Stelle an, nimmt die Zuschreibung zu Aristoteles aber an.

folgt.“[10] Dies lässt sich mathematisch darstellen durch:[11]

$$(v : v') = \left(\frac{f-r}{r} : \frac{f'-r'}{r'}\right), \tag{1}$$

und interpretiert als Bruch durch:

$$\frac{v}{v'} = \frac{\frac{f-r}{r}}{\frac{f'-r'}{r'}}, \tag{2}$$

$$\text{bzw. } v = k\frac{f-r}{r} \text{ mit } k = \frac{v'r'}{f'-r'}. \tag{3}$$

Crosby merkt zu Theorie II an, dass sie bei keinem von Bradwardines Vorgängern ausführliche Behandlung findet.[12] Bradwardine selbst führt als Autorität für sie auch nur Averroës’ Kommentar 63 zu *Physik*, Buch VII an, welcher die Theorie zumindest andeutet. Deshalb und, weil sie Theorie I sehr ähnelt, wird sie auch von Bradwardine nur mit zwei Gegenargumenten behandelt.

Schon das sehr spitzfindige erste Argument hebt die Probleme der Theorie klar hervor. Man betrachte nur eine Bewegung mit der Geschwindigkeit v, bei der $f - r = r$. Dann ist $(f-r : r)$ eine Proportion der Gleichheit. Nach Theorem 20 kann aber keine Proportion $(f'-r' : r')$ größer oder kleiner als $(f-r : r)$ sein. Folglich kann es auch keine Geschwindigkeit v' geben, die größer oder kleiner als v ist. Alle Bewegungen müssten mit der gleichen Geschwindigkeit v erfolgen. Das ist offensichtlich nicht der Fall.

Das zweite Argument führt sehr allgemein aus, dass ein Beweger einen Gegenstand stets mit seiner vollen Kraft und nicht nur mit dem *excessus* über den Widerstand bewegt. Deshalb müsse eine Proportionalitätsaussage auch die volle bewegende Kraft berücksichtigen.

Wie sofort zu sehen sein wird, berücksichtigt die dritte Theorie diesen Einwand.

Theorie III: Proportionalität zu bewegender und widerstehender Kraft

Theorie III besagt, dass, „wenn der Beweger derselbe oder gleich bleibt, die Proportion der Geschwindigkeiten von Bewegungen der Proportion der Widerstände folgt, und,

[10] „proportionem velocitatum in motibus sequi proportionem excessus potentiae motoris super potentiam rei motae.“ (Tr. Prop., S. 92, 160–2)

[11] Man beachte, was bereits zur Verwendung des Ausdrucks ‚Proportion von Proportionen‘ gesagt wurde. Während in der Formulierung seiner Bewegungsregel der Ausdruck einer Proportion von Proportionen zumindest angelegt ist, fällt es schwer, diesen in die Formulierung von Theorie II hineinzulesen. Dass die aufgestellte Formel (1) trotzdem die Theorie korrekt wiedergibt, folgt aus Bradwardines anschließender Widerlegung. Dort ist eindeutig Proportionalität im Sinne von Formel (3) und damit auch von (1) gemeint.

[12] Vgl. Crosby, 1955, S. 35.

wenn der Widerstand derselbe oder gleich bleibt, der Proportion der Beweger.“[13] Diese Theorie lässt sich durch die zwei Formeln ausdrücken:[14]

$$\begin{aligned} (v : v') &= (r' : r), \text{ wenn } f = f', \\ \text{und } (v : v') &= (f : f'), \text{ wenn } r = r', \end{aligned}$$

bzw. durch[15]

$$\begin{aligned} v &= k\frac{1}{r} \text{ mit } k = r'v', \text{ wenn } f = f', \\ \text{und } v &= kf \text{ mit } k = \frac{v'}{f'}, \text{ wenn } r = r'. \end{aligned}$$

Wie Crosby und auch Grant konstatieren, entspricht Theorie III am ehesten der Auffassung Aristoteles’.[16] Bradwardine führt gegen sie einen allgemeinen Einwand und drei Argumente, die widersprüchliche Konsequenzen angreifen, ins Felde.

Ganz allgemein wendet er ein, dass die Theorie zu wünschen übrig ließe, da sie nur anwendbar sei, wenn entweder die bewegende oder aber die widerstehende Kraft konstant sei. Eine annehmbare Theorie der Bewegung müsse aber auch eine Aussage treffen, wenn beide an der Bewegung beteiligten Kräfte variabel seien.

Von den drei restlichen Argumente verdeutlicht das erste besonders gut das Problem der Theorie. Sei $f = f' = f'' = f^3 \ldots$ und bewege f einen Gegenstand mit dem Widerstand r mit der Geschwindigkeit v. Indem die Geschwindigkeit schrittweise halbiert wird, kann f jeweils den doppelten Gegenstand bewegen, da $(v : \frac{1}{2}v) = (2r : r)$. Folglich kann jede Kraft einen beliebigen Widerstand bewegen. Dies steht im Widerspruch zu der anerkannten Aussage Aristoteles’, dass nur dann eine Bewegung entsteht, wenn die bewegende Kraft größer ist als die widerstehende Kraft.

Das zweite Argument läuft ganz analog und schlussfolgert aus der Theorie die widersprüchliche Aussage, dass jeder Gegenstand von einer beliebigen Kraft bewegt werden kann. Das dritte Argument appelliert ähnlich wie das siebte Argument gegen Theorie I

[13] „proportionem velocitatum in motibus (manente eodem motore vel aequali) sequi proportionem passorum, et (manente eodem passo vel aequali) sequi proportionem motoris.“ (Tr. Prop., 94, 183–6)

[14] Durch die im Text folgenden Beispiele und Argumente wird klar, dass es sich bei der Proportion der Widerstände um die umgekehrte Proportion handeln muss; also um $(r' : r)$ statt $(r : r')$.

[15] Crosby (1955, 35f.) und auch Grant (1966, 16f.) fassen diese beiden Gleichungen zusammen zu $v = k\frac{f}{r}$ mit einem geeigneten k. Diese Auffassung ist zwar mathematisch äquivalent, entspricht aber nicht Bradwardines Verständnis von Theorie III. Wie aus seinem allgemeinen Einwand gegen die Theorie ersichtlich wird, kann sie nur dann Anwendung finden, wenn entweder $f = f'$ oder $r = r'$. Diese Einschränkung wird durch die Repräsentation der Theorie durch Crosby und Grant aufgehoben. Hier wird die separate Darstellung bevorzugt, da sie näher an der Auffassung der Theorie durch Bradwardine liegt.

[16] Vgl. Crosby, 1955, S. 35; und Grant, 1966, S. 19, Fußnote 21.

an die Alltagserfahrung und zeigt auf, dass nach Theorie III ein schwerer Stein, der von einem Mann nur sehr langsam bewegt werden könne, von zwei Männern gerade einmal doppelt so schnell bewegt werde. Der Erfahrung entsprechend könnten zwei Männer den Stein aber um ein Vielfaches schneller bewegen als ein einzelner Mann.

Theorie IV: Keine mathematische Proportionalität

Theorie IV besagt, dass „es weder eine Proportion noch irgendein anderes *excessus*-[Verhältnis] der bewegenden Kraft zur widerstehenden Kraft gibt.“[17] Stattdessen übe die bewegende Kraft eine Art ‚natürliche Dominanz‘ über den bewegten Körper aus, die sich nicht durch eine Proportion ausdrücken lasse. Die Auseinandersetzung mit dieser Theorie ist hier von besonderem Interesse, da sie das Projekt der Mathematisierung der Naturphilosophie durch die Proportionenlehre im Ganzen in Frage stellt. Durch sie wird deutlich, welche konzeptionellen Hindernisse zu überwinden waren, bevor jenes Projekt überhaupt angegangen werden konnte.

Es sind maßgeblich drei Hindernisse, welche die vierte Theorie ihm in den Weg stellt.

1) Kräfte seien körperlos, besäßen somit keine Größe und könnten folglich zueinander in keiner Proportion stehen.
2) Bewegende und widerstehende Kräfte besäßen unterschiedliche Genera und seien deshalb inkommensurabel.
3) Die Bildung des *excessus* der bewegenden über die widerstehende Kraft zerlege die erstere in zwei Teile. Da die bewegende Kraft aber körperlos sei, sei sie nicht teilbar und ergo lasse sich der *excessus* nicht bilden.

Den ersten Einwand entkräftet Bradwardine durch Analogie zur musikalischen Harmonielehre. Dort sei es allgemein anerkannt, dass körperlose Tonhöhen zueinander im Verhältnis stünden. So entspricht z.B. das Epogdoon (das Ganztonintervall in der pythagoreischen Stimmung) der Proportion von 9 zu 8. Allein die Existenz der Harmonielehre widerlegt damit schon den Einwand. Zusätzlich merkt Bradwardine an, dass Aristoteles an vielen Stellen darauf bestehe, dass eine wie auch immer geartete Dominanz eines Bewegers über ein Bewegtes durch eine Proportion auszudrücken sei.

Die Entkräftung des zweiten Einwands ist dadurch bedeutsam, dass sie die aristotelische Lehre von der Inkommensurabilität von Größen verschiedenen Genus, welche die so gewinnbringende mathematische Verknüpfung wesensverschiedener Phänomene verhindert, abschwächt. Bradwardine argumentiert, dass ein Vergleich zweier Größen nicht unbedingt in Ansehung ihres spezifischen Genus, sondern auch ebenso in Ansehung eines gemeinsamen Obergenus geschehen kann. So seien zwar bewegende und widerstehende

[17] „nulla est proportio nec aliquis excessus potentiae motivae ad potentiam resistivam“ (Tr. Prop., S. 104, 397–8)

Kraft getrennt durch die Gattungsunterscheidung von aktiven und passiven Kräften, aber eben doch vergleichbar in ihrem gemeinsamen Genus der Kraft.

Die Auseinandersetzung mit dem letzten Einwand erfordert eine genauere Untersuchung des Begriffs des *excessus*. Im Sinne von Theorie IV ist der *excessus* streng genommen ein Vergleichsmaß nur für Quantitäten in Anbetracht ihres Genus. Seine Anwendung erfordert, dass sich die überschreitende Quantität entlang der überschrittenen Quantität zerlegen lässt. So existiert z.B. der *excessus* einer längeren Linie über eine kürzere, da sich die längere eben auch physisch (körperlich) teilen lasse. Die gleiche Forderung gelte auch für den weiter gefassten, nicht nur auf Quantitäten bezogenen *excessus* und somit in jedem Fall auch für Kräfte – seien sie jetzt Quantitäten oder etwas anderes. Da eine körperlose Kraft aber nicht zerlegt werden kann, kann sie auch keinen *excessus* zu einer anderen besitzen. Bradwardine entgegnet auf diese Sichtweise, dass es eine strikte und eine allgemeine Auffassung des *excessus* gebe. Die strikte erfordere weiterhin die Zerlegbarkeit des Überschreitenden gemäß dem Überschrittenen. Die allgemeine Auffassung erfordert nur, dass das Überschreiten graduell erfolge. Das heißt, dass sich durch graduelle Reduzierung – und nicht unbedingt durch striktes Zerlegen – das Überschreitende dem Überschrittenen anpassen lässt. In diesem Sinne besteht auch zwischen Kräften ein *excessus*, da z.B. das Doppelte einer halben Kraft gleich der ganzen Kraft ist.

Die Schwierigkeit dieser Diskussion besteht darin, inwiefern denn genau der *excessus* rein quantitativ zu verstehen ist. Zum einen betont Bradwardine, dass er nicht nur quantitativ zu nehmen sei, damit er sich überhaupt auf Kräfte anwenden lasse. Zum anderen ist die angeführte Auflösung – insbesondere sofern sie Kräfte betrifft – eindeutig quantitativ. Die hier vorgestellte Diskussion von Bradwardine löst noch nicht alle Schwierigkeiten auf, sie ist aber, wie auch Crosby urteilt, „ein Schritt dahin, Kraft als eine Quantität und somit als etwas Messbares zu etablieren.“[18]

3.2 Bradwardines neue Bewegungsregel

„Jetzt, da die Nebel der Unkenntnis durch die Winde der Beweise vertrieben sind, verbleibt es dem Licht des Wissens und der Wahrheit zu erstrahlen.“[19] Mit diesen festlichen Worten leitet Bradwardine Kapitel III, die Darlegung seiner eigenen Theorie der Bewegung ein. Er liefert eine erste Formulierung seiner Bewegungsregel und führt im Anschluss Belegstellen bei Aristoteles und Averroës für seine Theorie an. Erst im Anschluss beginnt

[18] „a step toward the establishment of force as a quantity and, therefore, as something measurable.“ (Crosby, 1955, S. 37)

[19] „His igitur ignoratiae nebulis demonstrationum flatibus effugatis, superest ut lumen scientiae resplendeat veritatis.“ (Tr. Prop., S. 110, 1–2)

er mit ihrer systematischen Entwicklung in zwölf Axiomen.

Das erste Theorem wiederholt und setzt fest die neue Bewegungsregel:

> Die Proportionen der bewegenden Kräfte zu den widerstehenden Kräften und die Geschwindigkeiten der Bewegung zeigen sich proportional im gleichen Grade, umgekehrt genauso. Und dieses ist als geometrische Proportionalität zu verstehen.[20]

Diese zentrale Aussage lässt sich durch die Formel ausdrücken:

$$((f\colon r) : (f'\colon r')) = (v : v'),$$

bzw. durch

$$\frac{v}{v'} = \log_{\frac{f'}{r'}}\left(\frac{f}{r}\right), \text{ was äquivalent ist zu}$$
$$v = \log_k\left(\frac{f}{r}\right) \text{ mit } k = \sqrt[v']{\frac{f'}{r'}}.$$

Die von Bradwardine eingeführte Bewegungsregel ist aus mathematischer Sicht um einiges komplexer als die Regeln der Theorien I bis III. Sie beschreibt die logarithmische Abhängigkeit der Geschwindigkeit vom Quotienten der bewegenden und der widerstehenden Kraft. Gleichzeitig darf nicht vergessen werden, dass Bradwardine selbst sie ausschließlich auf den einfachen Fall der Verdopplung von beteiligten Größen anwendet. Die Stetigkeit und Definiertheit auf allen reellen Zahlen, welche die letzte Formel in der Form einer logarithmischen Funktionsgleichung andeutet, ist in Bradwardines Begriffen nicht ausgeschöpft. Dennoch: Die Vorteile dieser Bewegungsregel entfalten sich in denen aus ihr hergeleiteten Theoreme II bis XII.

Die Theoreme II bis XII werden nun (teilweise mit Beweis) vorgestellt und anschließend kommentiert.

Theorem II. *Wenn* $(f : r) = (2 : 1)$, $f' = 2f$ *und* $r' = r$, *dann* $v' = 2v$.

Beweis. $(v : v') = ((f\colon r) : (f'\colon r')) = ((f\colon r) : (2f\colon r)) = ((2\colon 1) : (4\colon 1))$
Mit $(2\colon 1) = \frac{1}{2}(4\colon 1)$ folgt $v = \frac{1}{2}v'$. Also $v' = 2v$. □

Theorem III. *Wenn* $(f : r) = (2 : 1)$, $f' = f$ *und* $r' = \frac{1}{2}r$, *dann* $v' = 2v$.

Beweis. Wie bei Theorem II.

Theorem IV. *Wenn* $(2 : 1) < (f : r)$, $f' = 2f$ *und* $r' = r$, *dann* $v' < 2v$.

[20] „Proportiones potentiarum moventium ad potentias resistivas, et velocitates in motibus, eodem ordine proportionales existunt, et similiter econtrario. Et hoc de geometrica proportionalitate intelligas.“ (Tr. Prop., S. 112, 47–50)

Bei Bradwardine ist dies eine direkte Konsequenz von Theorem IV aus Kapitel I. Es folgt trotzdem ein Beweis mit der hiesigen Definition der Ordnung:

Beweis. Betrachte $(v : v') = ((f : r) : (f' : r')) = ((f : r) : (2f : r))$. Wähle p so, dass $p(f : r) = (2f : r)$.

$$\begin{aligned} p(f : r) = (2f : r) &\Leftrightarrow \frac{f^p}{r^p} = \frac{2f}{p} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{f}{p}\right)^{p-1} = 2 \\ &\Leftrightarrow p = 1 + \log_{\frac{f}{r}} 2 \end{aligned}$$

Wegen $(2 : 1) < (f : r)$ gilt $2 < \frac{f}{r}$. Damit folgt mit den Eigenschaften des Logarithmus: $0 < \log_{\frac{f}{r}} 2 < 1$, also $1 < p < 2$. Dann gilt allerdings:

$$\begin{aligned} (1 : p) < (1 : 2) &\Leftrightarrow ((f : r) : (2f : r)) < (1 : 2) \\ &\Leftrightarrow ((f : r) : (f' : r') < (1 : 2) \\ &\Leftrightarrow (v : v') < (1 : 2) \\ &v' < 2v \end{aligned}$$

□

Theorem V. *Wenn $(f : r) < (2 : 1)$, $f' = f$ und $r' = \frac{1}{2}r$, dann $v' < 2v$.*

Folgt mit Theorem III aus Kapitel I.

Theorem VI. *Wenn $(f : r) < (2 : 1)$, $f' = 2f$ und $r' = r$, dann $v' > 2v$.*

Folgt mit Theorem VI aus Kapitel I.

Theorem VII. *Wenn $(f : r) < (2 : 1)$, $f' = f$ und $r' = \frac{1}{2}r$, dann $v' > 2v$.*

Folgt mit Theorem V aus Kapitel I.

Theorem VIII. *Wenn $f = r$ oder $f < r$, dann $v = 0$.*

Folgt mit Theoremen VII und VIII aus Kapitel I.

Theorem IX. *Wenn $f > r$, dann $v > 0$.*[21]

Folgt aus dem vorangehenden Theorem VIII.

[21] Die Darstellungen von Theoremen VIII und IX folgen Crosby (1955, S. 39–40).

Theorem X. *Zu jeder Bewegung mit bestimmten Größen* v, f, r, *existieren* f', r' *und* f'', r'', *sodass* $v' = 2v$ *und* $v'' = \frac{1}{2}v$.

Theorem XI. *Sei* r_M *der Widerstand einen Mediums, seien* f *und* r *jeweils innere bewegende und innere widerstehende Kraft eines gemischten Körpers. Sei* $f' < f$ *die innere bewegende Kraft von einem Gegenstand aus purer Erde, d.h.* $r' = 0$. *Durch Verdichtung und Verdünnung des Mediums, lässt sich* r_M *so wählen, dass* $v > v'$, $v = v'$ *oder* $v < v'$.

Theorem XII. *Wenn der Widerstand eines Mediums* $r_M = 0$ *und* $(f : r) = (f' : r')$ *mit* f, r *innere Kraft und Widerstand eines Gegenstands,* f', r' *innere Kraft und Widerstand eines anderen Gegenstandes, dann* $v = v'$.

Die Theoreme II bis XII lassen sich zu vier Gruppen zusammenfassen. Theoreme II und III beschreiben wenig überraschend, dass sich die Geschwindigkeit verdoppelt, wenn man die Kraft verdoppelt, bzw. den Widerstand halbiert. Theoreme IV bis VII drücken aus, dass die Geschwindigkeit einer Bewegung nicht-linear von der Referenzbewegung abhängt. Theoreme VIII bis X zeigen, dass die Bewegungsregel die Bedingungen erfüllt, die entsprechend der Widerlegung falscher Theorien eine Bewegungsregel erfüllen muss. Die Theoreme XI und XII wenden die Bewegungsregel auf den Fall durch ein Medium an. Bemerkenswert ist, dass Bradwardine als Korollar zu Theorem XII eine Aussage über die Theorie von Gewichten trifft. Man kann darin wie Crosby die vereinheitlichende Kraft der Mathematik erkennen.[22]

Insgesamt lässt sich sagen, dass Bradwardines Theorie gerade im Vergleich zu den widerlegten Theorien erstaunlich gut, die selbst gestellten Bedingungen (die beiden Bedingungen aus Abschnitt 1.2) mit mathematischer Notwendigkeit erfüllt und dabei eine Bandbreite an rechnerischen Möglichkeiten zur Verfügung stellt.

3.3 Qualitative und quantitative Geschwindigkeit

Kapitel IV stellt, wie bereits gesagt wurde, eine Art Neuanfang dar. In ihm setzt sich Bradwardine mit der Geschwindigkeit von Bewegung unter einem anderen Gesichtspunkt als bisher auseinander. Anstatt die Geschwindigkeit in Abhängigkeit von bewegender und widerstehender Kraft zu betrachten, will er die Geschwindigkeit einer Rotationsbewegung in Abhängigkeit von zurückgelegter Strecke und Zeit ausdrücken. Zunächst als Reaktion auf einen Einwand gegen seine Bewegungsregel, in der Folge aber auch als Rechtfertigung für diesen Perspektivenwechsel entwickelt er am Ende von Kapitel III die Unterscheidung der Qualität zu der Quantität einer Geschwindigkeit.

[22] Vgl. ebd., S. 42.

Der Einwand läuft wie folgt. Man betrachte zwei Mengen reiner Erde A, B (d.h. ohne inneren Widerstand in der Fallbewegung), wobei A größer als B sei und deshalb auch $f_A > f_B$, sowie zwei gleichmäßige Volumen von Luft C, D, wobei ebenfalls C größer als D sei, mit den Widerständen $r_C > r_D$, so dass $(f_A : f_B) = (r_C : r_D)$. Wenn A durch C und B durch D fällt, müssen sie wegen $(f_A : r_C) = (f_B : r_D)$ mit der gleichen Geschwindigkeit fallen und deshalb in der gleichen Zeit ihre jeweiligen Volumen durchqueren. Andererseits ist das von A durchquerte Volumen C größer als das von B durchquerte Volumen D. Demnach muss A in der gleichen Zeit weiter, d.h. quantitativ mehr, gefallen sein als B. Die Geschwindigkeiten können folglich nicht gleich sein.

Bradwardine entgegnet auf diesen Einwand, dass

> es ist nicht inkonsistent sei, wenn eine gewisse [Kraft] qualitativ (das heißt in dem Vermögen anzutreiben) die gleiche Proportion zum Ganzen wie zum Teil besitzt, quantitativ aber nicht. [23]

Qualitativ ist also die Geschwindigkeit von A die gleiche wie von B, da A in der gleichen qualitativen Proportion zu den Widerständen in C steht wie B zu D. Quantitativ unterscheidet sich die Geschwindigkeit von A aber durch die größere durchquerte Quantität im Vergleich zu B. Allgemeiner gesprochen wird die Qualität einer Geschwindigkeit in Abhängigkeit von den beteiligten Kräfte ausgedrückt, die Quantität aber in Abhängigkeit der messbaren Quantitäten Strecke und Zeit. Es ist genau diese, bei Bradwardine nur rudimentär angelegte Unterscheidung, die in seiner Nachfolge am Merton College aufgenommen und rasch weiterentwickelt wird. Wie Clagett (1961) in dem Kapitel „The Emergence of Kinematics" aufzeigt, mündete dies in eine scharf getrennte Begrifflichkeit von Dynamik und Kinematik, von instantaner (*velocitas instantanea*) und totaler Geschwindigkeit (*velocitas totalis*). Sogar die Änderung der Qualität einer Geschwindigkeit – in Vorwegnahme des Begriffs der Beschleunigung – konnte ausgedrückt werden (*latitudo velocitatis*).

Im Rahmen des Traktats dient die Unterscheidung von Qualität und Quantität auch zur Rechtfertigung des Perspektivenwechsels zu Beginn des vierten Kapitels, in welchem die Rotationsbewegung in Anbetracht der beteiligten Quantitäten, Strecke und Zeit diskutiert wird.

Überblick über Kapitel IV

Kapitel IV folgt einem ähnlichen Aufbau wie der Traktat im Ganzen. Im ersten Abschnitt führt Bradwardine neue mathematische Werkzeuge ein, die es ermöglichen, geometrische Verhältnisse durch den bereits entwickelten Proportionsbegriff auszudrücken. Die Axio-

[23] „non esse inconveniens idem habere eandem proportionem qualitative (scilicet in virtute agendi) ad totum et ad partem sed quantitative non"(Tr. Prop., S. 118, 190–2)

me übernimmt er aus Euklids *Elementen* und Archimedes' *De curvis superficiebus*. Auf deren Basis zeigt er unter Verwendung der Ergebnisse aus Kapitel I einige mathematische Theoreme, denen er in eigenen Worten zuschreibt, „bei anderen Autoren selten vorzukommen."[24] Die tatsächliche Originalität dieser Ergebnisse lässt sich ohne ausführlichen historischen Vergleich leider nicht bewerten.

Im zweiten Abschnitt werden dann erneut drei falsche Theorien der Rotationsbewegung vorgestellt und widerlegt. Noch im gleichen Abschnitt stellt Bradwardine seine eigene Theorie vor. Das Problem, das all diese Theorien zu lösen versuchen, liegt darin, wie überhaupt die Geschwindigkeit der Rotationsbewegung eines Körpers zu verstehen ist. Die moderne Antwort auf diese Frage ist die Winkelgeschwindigkeit. Geht man das Problem jedoch wie die Scholastik mit der Erwartung an, die Geschwindigkeit durch eine zurückgelegte Strecke auszudrücken, stellt sich das nicht zu lösende Problem, welche materielle Größe als diese Strecke verstanden werden soll – hängt diese doch unweigerlich vom Radius der betrachteten Stelle ab. Die falschen Theorien schlagen vor, unter dieser materiellen Größe einmal das Volumen, einmal die Oberfläche, einmal das Kreissegment, welche ein rotierender Körper durchschreitet, zu verstehen. Bradwardines eigener Lösungsvorschlag ist es, den Kreisbogen, den der Punkt mit dem größten Radius eines Körpers zurücklegt, als das Maß der Geschwindigkeit anzunehmen. Auf dieser Basis zieht er noch einige Schlussfolgerungen, auf welche hier nicht weiter eingegangen wird.

Der Traktat endet im dritten Abschnitt des vierten Kapitels mit einer Bestimmung der proportionalen Verteilung der Elemente innerhalb des geozentrischen Kosmos. Dazu bestimmt er rechnerisch die relativen Ausmaße der Sphäre von Erde, Wasser, Luft und Feuer. Diese Bestimmung hat, wie Bradwardine selbst eingesteht, nichts mit der proportionalen Analyse der Geschwindigkeit – der eigentlichen Aufgabe des Traktats – zu tun. Sie stellt für Bradwardine jedoch einen wichtigen naturphilosophischen Fortschritt und eben eine weitere Anwendungsmöglichkeit der Proportionenlehre dar. Gerade in letzterem sieht Crosby einen Verdienst – „hat sich doch der Instinkt Bradwardines, eine solche Anwendung zu versuchen, in der Geschichte der modernen mathematischen Physik auf so dramatische Weise als gerechtfertigt gezeigt."[25] Tatsächlich unterstreicht der hier von Bradwardine unternommene, letztendlich gescheiterte Versuch die Macht der Mathematik, anscheinend völlig unterschiedliche Phänomene einheitlich zu beschreiben.

[24] „in alliis auctoribus minime [...] inventae" (Tr. Prop., S. 124, 7)

[25] „[The interesting thing is] that Bradwardine's instinct in seeking such an application has turned out to be so dramatically justified in the history of modern mathematical physics." (Crosby, 1955, S. 47)

4 Aus- und Rückblick

Eine abschließende Bewertung der historischen Bedeutung des *Tractatus de Proportionibus* muss dessen Wirkungsgeschichte miteinbeziehen. Sein weitreichender und prägender Einfluss auf die Naturphilosophie des 14. und 15. Jahrhunderts kann hier nicht vollständig dargestellt werden. Stattdessen werden nur die wesentlichen Wirkungsrichtungen aufgezeigt und auf die relevanten Arbeiten der Forschung verwiesen.

Einen sehr kompakte Überblick über die Wirkungsgeschichte lieferte schon Anneliese Maier.[1] Sie unterscheidet drei Wirkungsradien. Unter den ‚*proportionistae*' fasst sie die zahlreichen Arbeiten zusammen, die vor allem Bradwardines Proportionenlehre aufnehmen und paraphrasieren. Für sich selbst genommen uninteressant – böte die Masse solcher Arbeiten jedoch ein Maß für die Verbreitung der Bradwardineschen Theorie. In der Sache vielleicht richtig vernachlässigt dieses Urteil von Maier jedoch eine wichtige Funktion jener Schriften. Wie Daniel Di Liscia zeigen konnte, erhielt die Proportionenlehre gerade in Form solcher Zusammenfassungen Einzug an den Universitäten Europas. Für die Universität Wien weist er nach, dass die Proportionenlehre in das Curriculum aufgenommen und als *scientia media* neben der Latitudenlehre unterrichtet wurde.[2]

Als zweite Gruppe nennt Maier Bradwardines' direkte Nachfolger am Merton College – von der Nachwelt auch *calculatores* genannt: Richard Swineshead, Wilhelm von Heytesbury, der anonyme Verfasser des *Tractatus de inconvenientibus* und Johannes Dumbleton. Eines ihrer Verdienste war, wie bereits angesprochen, die Erweiterung der Unterscheidung von Qualität und Quantität einer Bewegung zu weitreichender Differenziertheit. Insgesamt jedoch weiteten sie den Anwendungsbereich der Bradwardineschen Regel auf weitere Wissensbereiche aus und brachten somit maßgeblich das Projekt der Mathematisierung der Naturphilosophie voran. Neben der bereits schon erwähnten Arbeit von Clagett (1961) sei in diesem Zusammenhang auf den Aufsatz „The Oxford Calculators" von Sylla (1982) verwiesen.

Als dritten Wirkungskreis des Traktats führt Maier die Pariser Naturphilosophen Johannes Buridan, Nicolaus von Oresme, Albert von Sachsen und Marsilius von Inghen auf. Besonders relevant für die mathematische Fortentwicklung war dabei der Traktat

[1] Maier, 1949, S. 95–8.
[2] Siehe Di Liscia, 2016, S. 66–67.

De proportionibus proportionum von Oresme. Ein direkter Vergleich und eine gemeinsame Ausgabe mit dem Traktat Bradwardines ist bei Rommevaux (2010) zu finden. Eine englische Ausgabe mit ausführlicher Einleitung liefert Grant (1966).

Dieser knappe Ausblick über die Wirkungsgeschichte des *Tractatus de Proportionibus* zeigt, dass er kein vereinzeltes Phänomen darstellt, sondern am Anfang einer weite Teile Europas umfassenden Bewegung steht, Aristoteles unter einem neuen, mathematischen Gesichtspunkt zu betrachten. Bradwardine kommt dabei der Verdienst zu, gewisser Maßen als Initialzündung durch seine strikt mathematische Behandlung seines Themas, den Anlass zu dieser Entwicklung gegeben zu haben. Das heißt nicht, dass sämtliche Verdienste seiner Zeitgenossen und Nachfolger ihm zuzuschreiben seien, dass sie ohne ihn undenkbar gewesen wären; aber doch, dass er die Richtung gesetzt hat.

Im Zusammenhang mit einer historischen Bewertung ist nicht nur die anschließende Wirkungsgeschichte, sondern auch das Verhältnis zur bestehenden Tradition zu betrachten. In einem abschließenden Rückblick wird die bisher noch offene Frage erörtert, inwiefern Bradwardine in eine aristotelische Tradition einzuordnen ist.

Das Herausstellungsmerkmal des Traktats liegt in dem für seine Zeit außergewöhnlichen Verhältnis zur Mathematik. Die fundamentale Bedeutung für die gesamte Philosophie, die Bradwardine zu Beginn seiner Schrift konstatiert, hebt ihn aus der aristotelischen Tradition heraus. Eine solche Aussage erinnert mehr an ein neoplatonisches oder an das positivistische Weltbild der Neuzeit als an einen Aristotelismus, der die Mathematik nur als einen von vielen Erkenntnisbereichen – nicht gänzlich ohne methodische Anwendung – versteht. Zu dieser Einschätzung passt auch die Tatsache, dass Bradwardine sich nur wenig mit den typischen metaphysischen Fragestellung nach grundsätzlichen Kausalbeziehungen des Aristotelismus beschäftigt und sich nur dann darauf einlässt, wenn es seiner mathematischen Vorgehensweise im Weg steht.

Andererseits alliiert sich Bradwardine ständig mit Aristoteles: rhetorisch und methodisch, wenn er nach der Art Aristoteles' falsche Theorien kritisiert; und inhaltlich, wenn er jede Anstrengung unternimmt seine mathematische Theorie mit den Aussagen Aristoteles' in Einklang zu bringen.

Aus diesen Gründen scheint es angebracht, Bradwardine nicht als einen Kämpfer gegen den Aristotelismus zu verstehen, sondern als dessen Reformator, der versucht ihn nach dem auszurichten, was ihn selbst am meisten interessiert: der Mathematik.

Primärliteratur

Tr. Prop.	T. Bradwardine (1328). *Tractatus Proportionium seu de Proportionibus Velocitatum in Motibus*. Hrsg. von H. L. Crosby jr. In: Crosby (1955).
Tr. Prop. [Crosby]	T. Bradwardine (1955). *Treatise on Proportions, or On the Proportions of the Speeds of Motions*. Englisch. Aus dem Lateinischen übers. von H. L. Crosby jr. In: Crosby (1955).
Tr. Prop. [Rommevaux]	T. Bradwardine (2010). *Traité des rapports entre les rapidités dans le mouvements*. Französisch. Aus dem Lateinischen übers. von S. Rommevaux. In: Rommevaux (2010).

Sekundärliteratur

Clagett, M. (1961). *The Science of Mechanics in the Middle Ages*. Madison: The University of Wisconsin Press.

Crosby jr., H. L. (1955). *Thomas of Bradwardine* His Tractatus de Proportionibus. *Its Significance for the Development of Mathematical Physics*. Mit einer Einl. von H. L. Crosby jr. Madison: The University of Wisconsin Press.

Di Liscia, D. A. (2016). „The 'Latitudines breves' and Late Medieval University Teaching". In: *Sciamus* 17, S. 55–120.

Grant, E., Hrsg., Übers. und Einl. (1966). *Nicole Oresme:* De proportionibus proportionum *and* Ad pauca respicientes. Madison–Milwaukee–London: The University of Wisconsin Press.

– (1977). *Physical Science in the Middle Ages*. Cambridge: Cambridge University Press.

Maier, A. (1949). *Die Vorläufer Galileis im 14. Jahrhundert*. Studien zur Naturphilosophie der Spätscholastik 1. Roma: Edizione di Storia e Letteratura.

– (1952). *An der Grenze von Scholastik und Naturwissenschaft. Die Struktur der materiellen Substanz. Das Problem der Gravitation. Die Mathematik der Formlatituden.* 2. Aufl. Studien zur Naturphilosophie der Spätscholastik 3. Roma: Edizione di Storia e Letteratura.

Murdoch, J. E. (1981). „The Analytical Character of Later Medieval Learning. Natural Philosophy without Nature". In: *Sprache und Erkenntnis im Mittelalter*. Hrsg. von J. P. Beckmann. Miscellanea Mediaevalia 13/1. Berlin–New York: de Gruyter, S. 171–213.

Murdoch, J. E. und E. D. Sylla (1978). „The Science of Motion“. In: *Science in the Middle Ages*. Hrsg. von D. C. Lindberg. Chicago–London: University of Chicago Press, S. 206–64.

Rommevaux, S. (2010). *Traité des rapports entre les rapidités dans le mouvements.* Suivi de *Nicole Oresme, Sur les rapports de rapport*. Mit einer Einl. von S. Rommevaux. Paris: Les Belles Lettres.

– (2011). „De la proportion au rapport“. In: *Proportions. Science – Musique – Peinture & Architecture*. Actes du LI^e Colloque International d'Études Humanistes (Tours, 30. Juni–4. Juli 2008). Hrsg. von S. Rommevaux, P. Vendrix und V. Zara. Turnhout: Brepols, S. 17–28.

Sylla, E. D. (1982). „The Oxford Calculators“. In: *The Cambridge History of Later Medieval Philosophy*. Hrsg. von N. Kretzmann, A. Kenny und J. Pinborg. Cambrigde: Cambridge University Press, S. 540–63.

Wallace O.P., W. A. (1978). „The Philosophical Setting of Medieval Science“. In: *Science in the Middle Ages*. Hrsg. von D. C. Lindberg. Chicago–London: University of Chicago Press, S. 91–119.

Weisheipl O.P., J. A. (1982). „The interpretation of Aristotle's Physics and the science of motion“. In: *The Cambridge History of Later Medieval Philosophy*. Hrsg. von N. Kretzmann, A. Kenny und J. Pinborg. Cambrigde: Cambridge University Press, S. 521–36.

Versicherung über die selbständige Abfassung

Hiermit versichere ich, dass ich die Hausarbeit selbständig abgefasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe. Insbesondere habe ich nichts – ohne Kenntlichmachung der Quelle – 1:1 oder sinngemäß aus einer anderen Quelle abgeschrieben.

München, den 9. Juli 2018