ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

1. Побудова математичної моделі задачі лінійного програмування

Для того, щоб скласти математичну модель практичної задачі, слід:

1) визначити керовані змінні і ввести їх позначення;
2) записати обмеження задачі у вигляді кількісних співвідношень (рівнянь та нерівностей), які залежать від керованих змінних;
3) в залежності від цілі задачі, побудувати функцію цілі як функцію керованих змінних.

Побудувати математичні моделі наступних практичних задач.

Задача № 1

Фабрика виготовляє два різновиди фарб: I – для внутрішніх робіт, E – для зовнішніх. Обидва різновиди фарб надходять у продаж. Для виробництва фарб використовується два види сировини: A і B.

Сировина	Запаси	Норми витрат сировини на тону	
		I	E
A	6	2	1
B	16	3	4

Вивчення ринку попиту показало, що добовий попит на фарбу I не перевищує відповідний попит на фарбу E більше, ніж на одну тонну, а попит на фарбу E – не більше двох тонн на добу.

Ціна однієї тонни фарби I дорівнює 2000 грошових одиниць, а фарби E – 3000 грошових одиниць.

Враховуючи, що прибуток пропорційний ціні, скласти добовий план випуску фарби так, щоб прибуток був максимальним.

Складання математичної моделі задачі проводитимемо згідно з алгоритмом.

1. Визначимо керовані змінні та введемо їх позначення. Для цього розглянемо параметри задачі.

- Різновид фарб, що можуть вироблятися.
- Різновид наявної сировини, яка використовується.
- Попит на кожен з різновидів фарб.
- Прибуток від реалізації одиниці об’єму фарби.
- Добовий об’єм випуску фарб.

- Запаси сировини А та В.
- Норми витрат кожної з видів сировини на виробництво конкретної фарби.

Очевидно, що змінювати можна лише добовий об’єм виробництва фарби, оскільки решта параметрів, заданих в умові задачі, не змінюються. Отже, добовий об’єм випуску фарби І та фарби Е є керованими змінними.

Позначимо x_1 – кількість тонн фарби І, що виготовляється за добу; x_2 – кількість тонн фарби Е, що виготовляється за добу.

2. Запишемо обмеження задачі у вигляді кількісних співвідношень (рівнянь, нерівностей), які залежать від керованих змінних. Для цього визначимо умови, накладені на об’єми випуску фарб.

Врахуємо той факт, що запаси сировини обмежені. Так, для виробництва x_1 тонн фарби І необхідно $2x_1$ тонн сировини А і $3x_1$ тонн сировини В; для виробництва x_2 тонн фарби Е необхідно x_2 тонн сировини А та $4x_2$ тонн сировини В. Отже, добова витрата сировини А дорівнює сумі витрат сировини для випуску фарби І ($2x_1$) та для випуску фарби Е (x_2). Вона не повинна перевищувати запаси цієї сировини, тобто

$$2x_1 + x_2 \leq 6.$$

Відповідно для сировини В:

$$3x_1 + 4x_2 \leq 16.$$

Добовий попит на фарбу І не перевищує відповідний попит на фарбу Е більше, ніж на одну тонну. Отже, різниця між об’ємами випуску фарб І та Е не повинна перевищувати 1, тобто

$$x_1 - x_2 \leq 1.$$

Згідно з умовою задачі, добовий випуск фарби Е не повинен перевищувати 2 тонни, тобто

$$x_2 \leq 2.$$

Очевидно, добовий випуск фарби не може бути від’ємним, тому

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

Отже, отримали систему обмежень

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 1, \\ x_2 \leq 2, \\ 2x_1 + x_2 \leq 6, \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 16, \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

3. Побудуємо функцію цілі як функцію керованих змінних.

Метою задачі є отримання максимально можливого прибутку. За умовою, прибуток еквівалентний ціні фарби. Отже, реалізувавши x_1 тон фарби І, отримаємо $2000x_1$ грошових одиниць, що є еквівалентним нашому прибутку; від реалізації x_2 тонн фарби Е матимемо $3000x_2$ грошових одиниць.

Сумарний прибуток складатиме $P(x_1, x_2) = 2000x_1 + 3000x_2$ (без урахування коефіцієнта пропорційності, що не має принципового значення). Отже, функція $P(x_1, x_2)$ і є функцєю цілі, яку треба максимізувати, тобто:

$$P(x_1, x_2) = 2000x_1 + 3000x_2 \to \max.$$

Таким чином, математична модель цієї задачі має наступний вигляд:

$$P(x_1, x_2) = 2000x_1 + 3000x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 1, \\ x_2 \leq 2, \\ 2x_1 + x_2 \leq 6, \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 16, \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Задача № 2

Для виготовлення продукції А та продукції В необхідно використовувати два верстати – P_1 та P_2.

При виготовленні одиниці продукції А верстат P_1 використовується три години, а P_2 – одну годину. Відповідно, для виготовлення продукції В верстат P_1 необхідно використовувати одну годину, а верстат P_2 – дві години.

За добу верстат P_1 може експлуатуватися не більше десяти годин, а верстат P_2 – не більше восьми годин. За простоювання впродовж однієї години верстата P_1 виробництво несе збитки в одну грошову одиницю, а верстата P_2 – в три грошові одиниці. Прибуток від реалізації одиниці продукції А складає дві грошові одиниці, а В – п'ять грошових одиниць. Скласти план виробництва, який забезпечує максимальний прибуток.

Розв'язок

Для побудови математичної моделі задачі слід виконати наступне.

1. Визначити керовані змінні і ввести їх позначення. Очевидно, що потрібно максимально використати ресурси верстатів і виготовити кількість продукції А та В у такому співвідношенні, щоб прибуток був максимальним. Тому керованими змінними будуть:

x_1 – кількість одиниць продукції А;

x_2 – кількість одиниць продукції В.

2. Записати обмеження задачі у вигляді рівнянь та нерівностей, які залежать від керованих змінних. На роботу верстатів накладені часові обмеження (кожен верстат може працювати лише певну кількість годин). Для виготовлення x_1 одиниць продукції А необхідно використати верстат P_1 протягом $3x_1$ годин та верстат P_2 протягом $1x_2$ годин. Відповідно для виготовлення продукції В верстат P_1 використовується $1x_1$ годин, а P_2 – $2x_2$ годин. Очевидними є умови $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

Отже, маємо систему обмежень

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1 + 2x_2 \le 8, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

3. В залежності від цілі задачі, побудувати функцію цілі як функцію керованих змінних. Ціль даної задачі – отримати максимальний прибуток, причому збитки за простоювання повинні бути мінімальними. Ці дві умови повинна враховувати функція цілі.

Отже, чистий прибуток (який треба максимізувати) дорівнює прибутку від реалізації виготовленої продукції мінус збитки за простоювання:

$$\chi(x) = Пр - Зб \,.$$

Прибуток від реалізації продукції А дорівнює її кількості, помноженої на прибуток від реалізації одиниці цієї продукції. Прибуток від продукції А становитиме: $2x_1$ грошових одиниць. Відповідно для продукції В – $5x_2$ грошових одиниць. Отже, сумарний прибуток:

$$Пр = 2x_1 + 5x_2 \,.$$

Збиток для конкретного верстата становитиме кількість годин його простоювання, помножених на збитки від години простоювання. В цілому, верстат P_1 працюватиме $3x_1 + x_2$ годин, а P_2 – $x_1 + 2x_2$ годин. Отже впродовж свого робочого часу перший верстат не працюватиме $10-(3x_1 + x_2)$ годин і збитки від цього становитимуть $1\cdot(10-(3x_1 + x_2))$, збитки від простоювання другого верстата становитимуть $3\cdot(8-(x_1 + 2x_2))$. Підставивши вищеотримане у раніше виведену формулу, отримаємо функцію чистого прибутку – функцію цілі:

$$\chi(x) = \left(2x_1 + 5x_2\right) - \left(10-(3x_1 + x_2) + 3\left(8-(x_1 + 2x_2)\right)\right) = 8x_1 + 12x_2 - 34.$$

Отже математична модель даної задачі має вигляд:

$$\chi(x) = 8x_1 + 12x_2 - 34 \to \max,$$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1 + 2x_2 \le 8, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

2. Графічний метод розв'язання задач лінійного програмування

Метод базується на наступній властивості градієнта функції: градієнт функції в точці $\left(\nabla f(x)\right)$ вказує напрямок найшвидшого зростання функції в цій точці (антиградієнт $\left(-\nabla f(x)\right)$, відповідно, – напрямок найшвидшого спадання).

Задача № 1

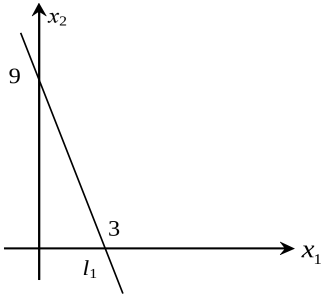
$$F(x) = 4x_1 + 6x_2 \to \min,$$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 9, \\ x_1 + 2x_2 \ge 8, \\ x_1 + 6x_2 \ge 12, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

1. Будуємо область припустимих розв'язків *X*. Для цього:
   - будуємо систему координат;
   - графічно розв'язуємо кожну з нерівностей, яка входить в систему обмежень;
   - знаходимо перетин отриманих розв'язків.

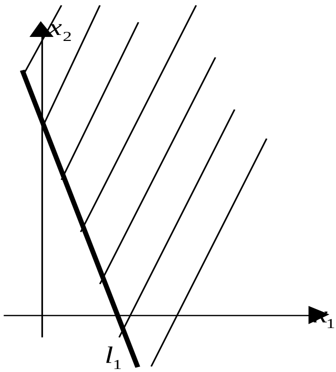
Розв'яжемо нерівність $3x_1 + x_2 \ge 9$. Для цього будуємо пряму

$$3x_1 + x_2 = 9.$$

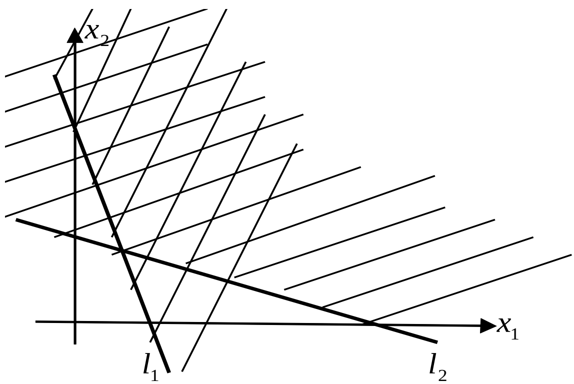
Позначимо її через l_1.



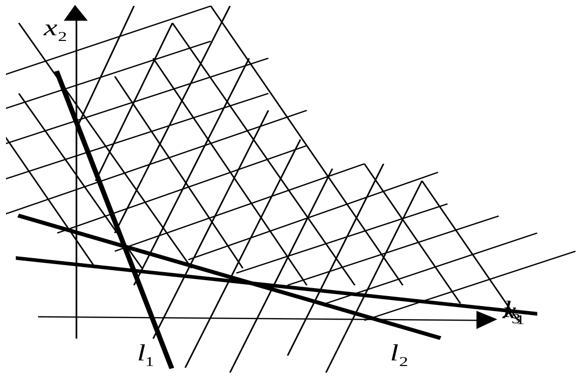
Визначаємо, яка з утворених півплощин є розв'язком нерівності $3x_1 + x_2 \geq 9$. Для цього беремо будь–яку точку площини, що не належить прямій l_1, і підставляємо її координати в нерівність. Якщо нерівність виконується, відповідна півплощина є розв'язком, у протилежному ж випадку розв'язком є півплощина розташована по інший бік прямої. Візьмемо точку (0;0). Маємо: $3 \cdot 0 + 0 \geq 9$, тобто $0 \geq 9$. Нерівність невірна, отже, розв'язком є півплощина, утворена прямою l_1, якане містить точки (0,0). Зобразимо її.



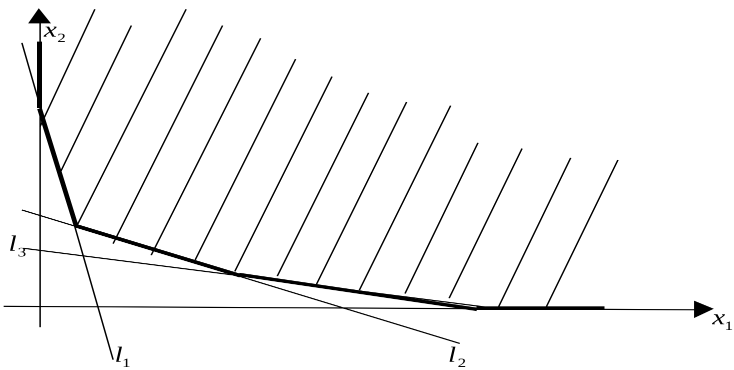
Аналогічно знаходимо розв'язок нерівності $x_1 + 2x_2 \geq 8$. Будуємо пряму $x_1 + 2x_2 = 8$ – позначаємо її l_2. Очевидно, точка (0;0) не належить прямій, тому визначимо півплощину, що є розв'язком, за допомогою цієї точки: $0 + 2 \cdot 0 > 8$ – невірна, отже, шукана півплощина не містить (0;0). Зобразимо її.



Будуємо останню область $x_1 + 6x_2 \geq 12$ (пряма $x_1 + 6x_2 = 12$, позначимо її через l_3). Як і в попередніх пунктах, скористаємось точкою (0;0). Маємо наступне.

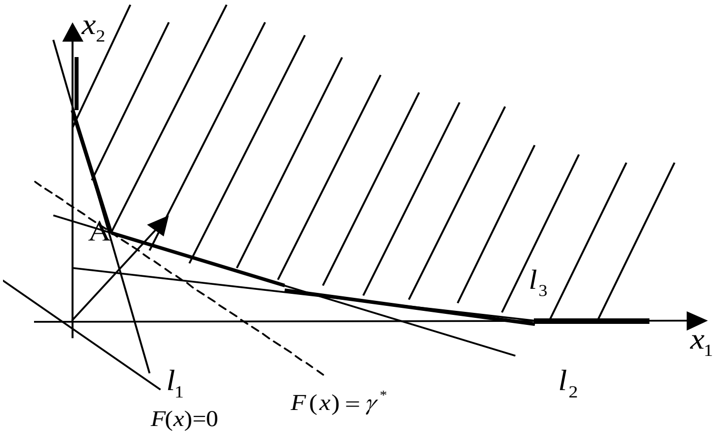


Врахувавши обмеження $x_1 \geq 0$ та $x_2 \geq 0$, зобразимо множину припустимих розв’язків *X*, яка є перетином усіх зображених областей.



2. Знайшовши *X* – множину припустимих розв'язків задачі, будуємо лінію рівня функції цілі $4x_1 + 6x_2 = \gamma$. Нехай для простоти $\gamma = 0$. Отже, будуємо лінію $4x_1 + 6x_2 = 0$

Для цього будуємо вектор нормалі цієї прямої, який співпадає з градієнтом функції: $\nabla F(x) = \left(\frac{\partial F(x)}{\partial x_1}; \frac{\partial F(x)}{\partial x_2} \right)$. Його координати: (4;6), тобто він буде зорієнтований так, що початок його співпадатиме з початком координат, а кінець – з точкою (4;6). Далі будуємо пряму, що проходить через початок координат перпендикулярно вектору нормалі. Це і є шукана лінія рівня.



3. Переміщаємо лінію рівня у напрямку до області припустимих розв'язків паралельно самій собі. Очевидно, що точка, в якій пряма вперше торкнеться області X – точка А. Оскільки пряму переміщали у напрямі вектора нормалі (градієнта функції цілі), то А є точкою мінімуму функції.

4. Знайдемо цю точку як точку перетину прямих l_1 і l_2. Щоб знайти її, слід розв'язати систему відповідних цим прямим лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 9 \\ x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow A(2,3).$$

Дана точка А(2;3) і є оптимальним розв'язком задачі, тобто $x^*(2;3)$. Знайдемо значення функції цілі у цій точці: $\chi(x^*) = 4 \cdot 2 + 6 \cdot 3 = 26$.

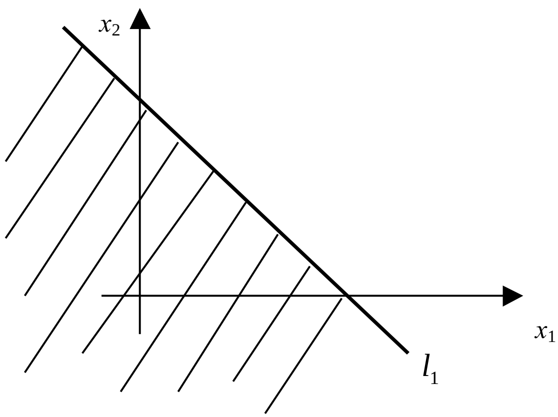
Задача № 2

$$F(x) = -3x_1 - 2x_2 \to \min,$$

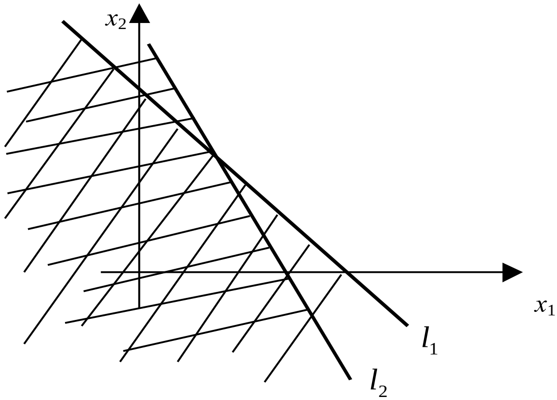
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5, \\ 8x_1 + 3x_2 \le 24, \\ 3x_1 - 2x_2 \le 6, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0; \; x_2 \ge 0$.

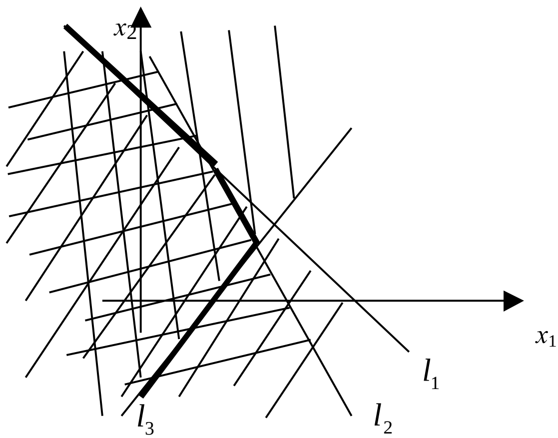
1. Знаходимо множину припустимих розв'язків *X*:
   - будуємо розв'язок нерівності $x_1 + x_2 \le 5$:



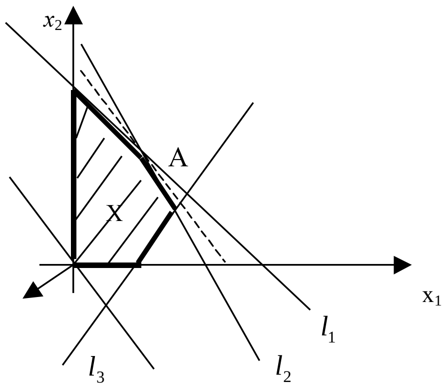
   - будуємо розв'язок нерівності $8x_1 + 3x_2 \le 24$:



- нарешті будуємо розв'язок нерівності $3x_1 - 2x_2 \le 6$, та перетин знайдених розв'язків:



- врахувавши обмеження $x_1 \ge 0; x_2 \ge 0$, отримуємо область *X*:



2. Побудувавши область, будуємо вектор нормалі лінії рівня функції цілі (–3;–2), а також – саму лінію рівня $-3x_1 - 2x_2 = 0$. Бачимо, що початок координат, що належить лінії рівня, належить також множині припустимих розв'язків. При пересуванні лінії в напрямку антиградієнта (протилежному вектору нормалі) вона перетинає множину *X*, а значення функції цілі зменшується.

3. Отже, для відшукання точки мінімуму функції на множині *X*, пересуваємо лінію рівня у вказаному напрямку до точки виходу її з множини *X* – це точка А.

4. Вона знаходиться на перетині прямих l_1 та l_2, тому знайдемо її, розв'язавши систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ 8x_1 + 3x_2 = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 9/5 \\ x_2 = 16/5 \end{cases} \Rightarrow A = (\frac{9}{5}, \frac{16}{5}) .$$

Точка А є розв'язком задачі, отже $x^* = \left(\frac{9}{5}; \frac{16}{5}\right)$.

5. Знайдемо значення функції цілі у цій точці:

$$F(x^*) = -3 \cdot \frac{9}{5} - 2 \cdot \frac{16}{5} = -\frac{59}{5} .$$

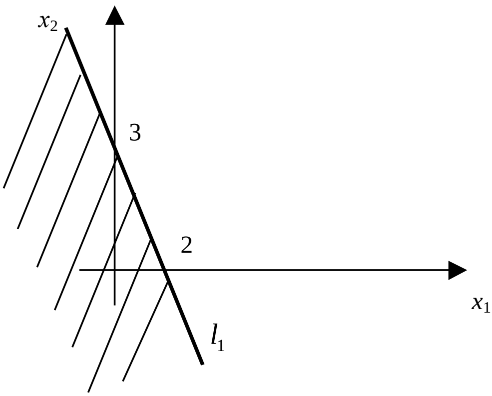
Задача № 3

$$F(x) = -x_1 + 2x_2 \to \max,$$

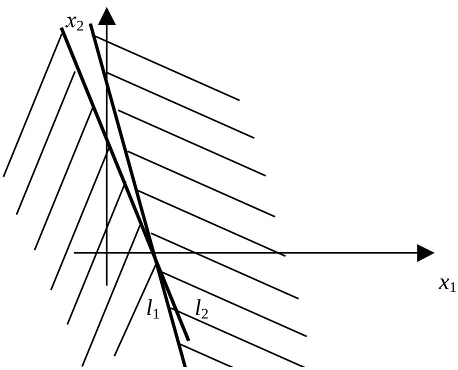
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 6, \\ 3x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_1 - x_2 \geq 2, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0.$$

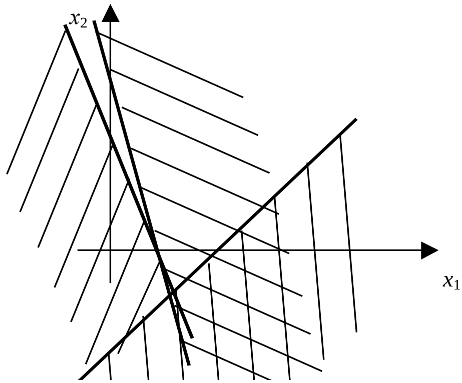
1. Будуємо область припустимих розв'язків *X*:
   - будуємо розв'язок нерівності $3x_1 + 2x_2 \geq 6$:



   - будуємо розв'язок нерівності $3x_1 + x_2 \leq 3$:



- Будуємо розв'язок нерівності $x_1 - x_2 \geq 2$:



З даної побудови видно, що в просторі R^2 немає жодної точки, яка б задовольняла усім трьом нерівностям, тобто наша система несумісна. Таким чином, поставлена задача не має розв’язку, тому що множина її припустимих розв'язків порожня.

3. Розв’язання симплекс-методом задач лінійного програмування, що мають спеціальний вигляд

Задача № 1

$$\chi(x) = 2x_1 + x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + 3x_3 + x_5 = 12, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \; j = 1,\ldots,5$$

Розв’язок

За базисні змінні: найзручніше вибрати змінні x_1, x_4 та x_5, оскільки матриця коефіцієнтів при них є одиничною.

Перевіряємо, чи має задача зручний для застосування симплекс-методу вигляд.

1. Функція цілі повинна мінімізуватися. Ми маємо протилежний випадок, тому, домноживши нашу функцію на (–1), отримаємо функцію для мінімізації: $\hat{\chi}(x) = -2x_1 - x_2 \to \min$.

З урахуванням всіх наявних змінних, повний вигляд даної функції буде:

$$\tilde{\chi}(x) = -2x_1 - x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \to \min .$$

2. Всі вільні члени мають бути невід'ємними. В даному випадку всі вільні члени додатні.

3. Система обмежень повинна містити лише рівняння. Умова виконується для нашого випадку.

4. Матриця коефіцієнтів при базисних змінних є одиничною, тобто базисна змінна входить з коефіцієнтом (+1) лише у одне рівняння і кожне рівняння містить лише одну базисну змінну. Дана умова також виконується.

5. На всі змінні накладено умову невід'ємності

Оскільки задача задовольняє усім вимогам, необхідним для застосування симплекс-методу, розв'яжемо її цим методом. Будуємо таблицю.

Змінні / Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	
x_2	–1	1	1	0	0	2	–1
x_4	3	0	–2	1	0	3	0
x_5	1	0	3	0	1	12	0
$\tilde{\chi}$							
	–2	–1	0	0	0		

В додаткових стовпчику та рядку таблиці знаходяться коефіцієнти при відповідних змінних у функції цілі : *Ci* – у стовпчику, а *Cj* – у рядку. Це зроблено для зручності обрахунків.

Знайдемо значення оцінок за формулою:

$$\Delta_j = \sum_{i \in I} \gamma_{ij} \cdot c_i - c_j ,\ j \in J .$$

Отже,

$$\Delta_1 = (-1*(-1)+0*3+0*1)-(-2)=3,$$
$$\Delta_2 = (-1*1+0*0+0*0)-(-1)=0,$$
$$\Delta_3 = (-1*1+0*(-2)+0*3)-0=-1,$$
$$\Delta_4 = (-1*0+0*1+0*0)-0=0,$$
$$\Delta_5 = (-1*0+0*0+0*1)-0=0.$$

Обчислимо значення функції цілі у кутовій точці, яка відповідає даній таблиці. Оскільки це кутова точка, то всі базисні змінні дорівнюють вільним членам відповідних їм рівнянь, а решта змінних рівні нулю.

Отже, маємо точку $x(0;2;0;3;12)$. Підставивши її значення у функцію цілі, отримаємо значення цієї функції в даній точці.

Записавши оцінки у нижньому рядку і значення функції у нижній правій клітинці, отримаємо першу симплекс-таблицю.

Змінні / Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_2	–1	1	1	0	0	2
x_4	3	0	–2	1	0	3
x_5	1	0	3	0	1	12
$\tilde{\chi}$	3	0	–1	0	0	–2

Проаналізуємо отриману таблицю. Серед оцінок є одна додатна (Δ_1). Стовпчик над нею містить два додатні елементи, отже план, що відповідає таблиці, можна покращити.

Для покращення плану:

1. Визначаємо змінну, яку вводитимемо в базис. Для цього вибирається максимальна з додатних оцінок. У даному випадку вона одна, це Δ_1, тобто змінна x_1 вводиться в базис. Отже, відповідний стовпчик є розв'язуючим.

2. Визначимо змінну, яку слід вивести з базису. Вона відповідає мінімальному з відношень вільних членів до додатних елементів розв'язуючого стовпчика

$$\min\left\{\frac{3}{3};\frac{12}{1}\right\}=\frac{3}{3}.$$

Отже, цю змінну (x_4) і слід вивести з базису, відповідний рядок є розв’язуючим. Тоді розв’язуючий елемент (він лежить на перетині відповідних стовпчика та рядка) дорівнює трьом.

3. Будуємо нову симплекс-таблицю.

- Перший рядок залишається без змін.
- У першому стовпчику, навпроти рядка, який був розв'язуючим, записується нова базисна змінна (x_1). Решта базисних змінних переписуються без змін.
- Всі елементи розв’язуючого рядка діляться на розв’язуючий елемент (3) та записують в новій таблиці на відповідні їм місця.
- Змінна, яка вводиться в базис, виключається з решти рядків таблиці, включаючи останній. Виключення змінної відбувається методом Жордана–Гауса. Отримуємо другу симплекс-таблицю:

Змінні / Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_2	0	1	1/3	1/3	0	3
x_1	1	0	–2/3	1/3	0	1
x_5	0	0	11/3	–1/3	1	11
$\tilde{\chi}$	0	0	1	–1	0	–5

Серед оцінок даної таблиці є додатні ($\Delta_3 = 1$), причому стовпчик над нею містить додатні елементи. Тому є можливість покращити план.

1. Визначаємо змінну, яку вводитимемо в базис. Очевидно це буде x_3 ($\Delta_3 = 1 > 0$), відповідний стовпчик є розв’язуючим.
2. Визначимо змінну, яку слід вивести з базису

$$\min\left\{3:\frac{1}{3};11:\frac{11}{3}\right\}=11:\frac{11}{3},$$

отже змінну x_5 виводимо з базису, відповідний рядок є розв’язуючим, розв’язуючий елемент дорівнює 11/3.

3. Будуємо нову (третю) симплекс-таблицю:

Змінні / Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_2	0	1	0	4/11	–1/11	2
x_1	1	0	0	3/11	2/11	3
x_3	0	0	1	–1/11	3/11	3
$\tilde{\chi}$	0	0	0	–10/11	–3/11	–8

Серед отриманих оцінок відсутні додатні, а, отже, одержано розв'язок задачі: $x^*(3,2,3,0,0)$, $\tilde{\chi}(x^*) = -8$; $\chi(x^*) = -\tilde{\chi}(x^*) = 8$.

4. Приведення задач лінійного програмування до вигляду, зручного для застосування симплекс-методу

Задача № 1

$$\chi(x) = 3x_1 - 2x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 \le 2, \\ 6x_1 + 2x_2 - 4x_3 \ge 6, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

1. Перевіряємо, чи мінімізується функція цілі. У нашому випадку ні, тому, домноживши її на (–1), отримаємо функцію для мінімізації:

$$\chi(x) = -3x_1 + 2x_2 \to \min.$$

2. Перевіряємо чи всі вільні члени невід'ємні. У даному випадку ця умова виконується.

3. Система обмежень містить рівняння, нерівність типу "≤" та нерівність типу "≥". Перетворення слід починати з нерівності типу "≤": до її лівої частини додається змінна $x_4 \ge 0$. Система обмежень набуває вигляду:

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 6x_1 + 2x_2 - 4x_3 \geq 6. \end{cases}$$

4. Отже, в системі обмежень залишилася лише нерівність типу "≥" та рівняння. Застосуємо відповідний для даного випадку спосіб приведення.

- Перевіряємо, чи є серед рівнянь, що не отримані шляхом перетворення нерівностей, рівняння з вільним членом, відмінним від нуля. У нашому випадку це рівняння $-x_1 - 2x_2 + x_3 = 4$, назвемо його *поміченим* (рівняння, отримані з нерівностей типу "≤", не розглядаємо).
- Порівняємо вільні члени нерівності з вільним членом поміченого рівняння. Обидві частини нерівностей, вільний член яких більший від вільного члена поміченого рівняння, слід поділити на додатне число таким чином, щоб отриманий у результаті вільний член був не більшим вільного члена поміченого рівняння. Тому поділимо обидві частини нерівності $6x_1 + 2x_2 - 4x_3 \geq 6$ на 2, отримаємо: $3x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 3$.
- Щоб позбавитись знаку нерівності, слід ввести додаткову змінну $x_5 \geq 0$, яку віднімаємо від лівої частини нерівності, отримаємо рівняння: $3x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 = 3$. Дана змінна увійде у функцію цілі з коефіцієнтом 0.
- З поміченого рівняння почленно віднімаємо щойно отримане. В результаті маємо систему

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ -4x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_5 = 1 \end{cases}.$$

- Вводиться штучна змінна $x_6 \geq 0$, яка додається до лівої частини першого рівняння.

5. На кожну змінну накладена умова невід'ємності.

Отже, система обмежень набула вигляду:

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 + x_6 = 4, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ -4x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_5 = 1. \end{cases}$$

Кожна додаткова змінна входить в функцію цілі з коефіцієнтом 0, а штучна – з коефіцієнтом М, де М – нескінченно велике число.

Функція цілі набуває вигляду:

$$\tilde{\chi}(\tilde{x}) = -3x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + M \cdot x_6 \to \min .$$

Такий вигляд задачі є зручним для застосування симплекс–методу.

Застосувавши симплекс метод, отримаємо точку $\tilde{x}^*(\frac{19}{9};0;\frac{13}{3};0;0;\frac{16}{9})$.

Це є розв’язок допоміжної задачі. Проаналізуємо його. У допоміжній задачі ми вводили штучну змінну. Щоб вихідна задача мала розв’язок, необхідно, щоб в отриманому розв'язку допоміжної задачі значення штучної змінної дорівнювало нулю. В протилежному випадку вихідна задача не має розв’язку, оскільки множина її припустимих розв’язків – порожня (система обмежень несумісна). Очевидно останній випадок і має місце у даній задачі (штучна змінна $x_6^* = \frac{16}{9} \neq 0$), а отже, вона не має розв’язку.

Задача № 2

$$\chi(x) = -x_1 - x_2 + x_3 \to \min ,$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 \le 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 \ge 4, \\ 5x_1 - x_2 + x_3 \ge 3, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \le 1, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 .$$

Розв'язок

1. Перевіряємо, чи мінімізується функція цілі. У нашому випадку – так.

2. Всі вільні члени нерівностей – невід'ємні.

3. Додаємо додаткові змінні $x_4 \geq 0$, $x_5 \geq 0$ до лівих частин відповідних нерівностей типу "$\leq$". Маємо:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 4, \\ 5x_1 - x_2 + x_3 \geq 3, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 1. \end{cases}$$

4. В системі обмежень залишилися лише нерівності типу "$\geq$" та рівняння, отримані з нерівностей, які в подальших перетвореннях не використовуються.

- Вводимо в наші нерівності по додатковій змінній $x_6 \geq 0$ та $x_7 \geq 0$, які віднімаємо від лівих частин відповідних нерівностей типу "$\geq$". Перетворивши таким чином нерівності на рівняння, маємо:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_6 = 4, \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - x_7 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 1. \end{cases}$$

- З щойно отриманих рівнянь вибираємо рівняння, вільний член якого більший і почленно віднімаємо від нього інше з отриманих рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_6 = 4, \\ -4x_1 + 2x_2 - x_6 + x_7 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 1. \end{cases}$$

- Введемо штучну змінну $x_8 \geq 0$, яку додаємо до лівої частини другого рівняння. Кожна додаткова змінна міститься у функції цілі з коефіцієнтом 0, а штучна – з коефіцієнтом M, де M – нескінченно велике.

5. На кожну із змінних накладена умова невід'ємності.

Остаточно допоміжна задача має вигляд:

$$\tilde{\chi}(\tilde{x}) = -x_1 - x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + Mx_8 \to \min,$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_6 + x_8 = 4, \\ -4x_1 + 2x_2 - x_6 + x_7 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 1, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0, x_6 \ge 0, x_7 \ge 0, x_8 \ge 0.$$

Застосувавши симплекс-метод, отримаємо точку $\tilde{x}^*(\frac{4}{7};\frac{23}{14};\frac{25}{14};\frac{25}{14};$ $0; 0; 0; 0)$ із значенням функції цілі $\tilde{\chi}(\tilde{x}^*) = -\frac{3}{7}$. Це є розв'язок допоміжної задачі. Проаналізуємо його. У даній задачі, як і в попередній, була введена штучна змінна x_8.

Але її значення в отриманій точці дорівнює нулю, отже, вихідна задача має розв'язок: $x^*(\frac{4}{7};\frac{23}{14};\frac{25}{14})$; $\chi(x^*) = -\frac{3}{7}$.

Задача № 3

$$\chi(x) = -x_1 + 5x_2 - 3x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 \ge -4, \\ 6x_1 + x_2 - 4x_3 \le 3, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \ge 4, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

Розв'язок

1. Перевіряємо, чи мінімізується функція цілі. У нашому випадку – так.

2. Перевіряємо вільні члени на невід'ємність. Вільний член першої нерівності – від'ємний, тому домножимо обидві частини цієї нерівності на (–1). Маємо

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - x_3 \le 4, \\ 6x_1 + x_2 - 4x_3 \le 3, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \ge 4. \end{cases}$$

3. Додаємо додаткові змінні $x_4 \ge 0$ та $x_5 \ge 0$ до лівих частин першої та другої нерівностей відповідно:

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 6x_1 + x_2 - 4x_3 + x_5 = 3, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \ge 4. \end{cases}$$

4. В системі обмежень залишилася нерівність типу “≥” та рівняння, отримані з нерівностей типу “≤”. Тому виконуємо наступні дії.

- Віднімаємо від лівої частини нерівності типу “≥”, що залишилась серед обмежень, додаткову змінну $x_6 \ge 0$:

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 6x_1 + x_2 - 4x_3 + x_5 = 3, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_6 = 4. \end{cases}$$

- Додаємо до лівої частини отриманого в попередньому пункті рівняння штучну змінну $x_7 \ge 0$:

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 6x_1 + x_2 - 4x_3 + x_5 = 3, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_6 + x_7 = 4. \end{cases}$$

Функція цілі має вигляд:

$$\tilde{\chi}(\tilde{x}) = -x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + Mx_7 \to \min.$$

5. За умовою змінні x_1, x_3 невід’ємні, а на x_2 така умова не накладалася, тому слід виконати перетворення типу: $x_i = x_i' - x_i''$. У нашому випадку це буде: $x_2 = x_2' - x_2''$.

Остаточно допоміжна задача має вигляд:

$$\tilde{\chi}(\tilde{x}) = -x_1 + 5x_2' - 5x_2'' - 3x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + Mx_7 \to \min$$
$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2' - 4x_2'' - x_3 + x_4 = 4, \\ 6x_1 + x_2' - x_2'' - 4x_3 + x_5 = 3, \\ x_1 + x_2' - x_2'' - 2x_3 - x_6 + x_7 = 4, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2' \ge 0, x_2'' \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0, x_6 \ge 0, x_7 \ge 0.$$

Застосувавши симплекс-метод, отримаємо розв'язок допоміжної задачі $\tilde{x}^*(\frac{8}{25}; \frac{27}{25}; 0; 0; 0; 0; \frac{13}{5})$. Вихідна ж задача не має розв'язку, бо значення штучної змінної x_7 не дорівнює нулю $\left(x_7^* = \frac{13}{5} \ne 0 \right)$.

Задача № 4

$$\chi(x) = x_1 + x_2 - 4x_3 \to \max,$$
$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 4x_3 \ge -2, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 \le 4, \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 \ge 0, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

Розв'язок

1. У нашому випадку функція цілі максимізується, тому, домноживши її на (–1), отримаємо функцію для мінімізації:

$$\tilde{\chi}(x) = -x_1 - x_2 + 4x_3 \to \min.$$

2. Позбавляємося від'ємного вільного члена у першій нерівності, домноживши обидві її частини на (–1). Так як третя нерівність має вільний член 0, то її можна перетворити у нерівність типу "≤" за допомогою того ж прийому. Таке перетворення спростить приведення. Отже, маємо

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 \le 4, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 \le 0. \end{cases}$$

3. Додавши до лівої частини кожної нерівності по додатковій змінній $x_4 \geq 0$, $x_5 \geq 0$, $x_6 \geq 0$ відповідно, а також врахувавши їх у функції цілі, одразу отримуємо результат, оскільки решта необхідних умов виконується.

$$\tilde{\chi}(\tilde{x}) = -x_1 - x_2 + 4x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \rightarrow \min,$$
$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_5 = 4, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_6 = 0, \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0 \cdot$$

Застосувавши симплекс-метод до даної задачі, можна переконатися, що вона немає розв’язку, оскільки функція $\tilde{\chi}(\tilde{x})$ – не обмежена знизу. А отже, вихідна задача також не має розв’язку з тієї ж причини.

5. Розв’язання симплекс-методом задач лінійного програмування довільного вигляду.

Задача № 1

$$\chi(x) = x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 \rightarrow \max,$$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 4, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 \leq 3, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 4, \end{cases}$$
$$x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

Розв’язок

Перевіряємо чи має задача вигляд, зручний для застосування симплекс-методу. Оскільки функція цілі не мінімізується, система обмежень містить не лише рівняння, не на всі змінні накладена умова невід’ємності, то дану задачу слід привести до зручного для використання симплекс-методу вигляду.

Приведення

1. Перевіряємо, чи мінімізується функція цілі. У нашому випадку вона максимізується, тому, домноживши її на (–1), отримаємо функцію для мінімізації:

$$\tilde{\chi}(x) = -x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 \to \min.$$

2. Перевіряємо, чи всі вільні члени є невід’ємними. У нашому випадку – так.

3. Перевіряємо чи є в системі нерівності типу “$\le$”. У нашому випадку їх дві. Додамо до лівої частини кожного з них по змінній $x_5 \ge 0, x_6 \ge 0$ відповідно, одночасно врахувавши їх у функції цілі (з коефіцієнтом 0). Маємо систему обмежень

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 4, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 3, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 + x_6 = 4, \end{cases}$$
$$x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_5 \ge 0, x_6 \ge 0.$$

4. Додаємо штучну змінну $x_7 \ge 0$ до лівої частини рівняння, для якого не встановлена базисна змінна (для першого). Отримуємо

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_7 = 4, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 3, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 + x_6 = 4, \end{cases}$$
$$x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_5 \ge 0, x_6 \ge 0, x_7 \ge 0.$$

5. Виконуємо перетворення типу $x_i = x_i' - x_i''$ для змінних, на які не накладена умова невід'ємності. У даному випадку перетворення стосуватиметься першої та четвертої змінних. Зробивши заміну $x_1 = x_1' - x_1''$ та $x_4 = x_4' - x_4''$, отримаємо:

$$\tilde{\chi}(\tilde{x}) = -x_1' + x_1'' - x_2 + 4x_3 - 2x_4' + 2x_4'' +$$
$$+0x_5 + 0x_6 + Mx_7 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1' - x_1'' - 2x_2 + 3x_3 - x_4' + x_4'' + x_7 = 4, \\ 3x_1' - 3x_1'' - x_2 - x_3 + 2x_4' - 2x_4'' + x_5 = 3, \\ x_1' - x_1'' + 5x_2 + x_3 + 3x_4' - 3x_4'' + x_6 = 4, \end{cases}$$

$$x_1' \ge 0, x_1'' \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4' \ge 0, x_4'' \ge 0, x_5 \ge 0, x_6 \ge 0, x_7 \ge 0.$$

Ця задача має вигляд, зручний для застосування симплекс-методу.

1. Вибираємо базисні змінні: для нашого випадку найзручніше обрати змінні x_7, x_5, x_6 – для першого, другого та третього рівняння відповідно.
2. Будуємо першу симплекс-таблицю.

Змінні / Базис	x_1'	x_1''	x_2	x_3	x_4'	x_4''	x_5	x_6	x_7	b_i	
x_7	1	–1	–2	3	–1	1	0	0	1	4	M
x_5	3	–3	–1	–1	2	–2	1	0	0	3	0
x_6	1	–1	5	1	3	–3	0	1	0	4	0
$\tilde{\chi}$	M+1	–M–1	–2M+1	3M–4	–M+2	M–2	0	0	0	4M	
	–1	1	–1	4	–2	2	0	0	M		

Аналізуємо отриману таблицю.

1. Не всі оцінки є недодатними, а отже, кутова точка $x^0(0{,}0{,}0{,}0{,}0{,}0{,}3{,}4{,}4)$, що відповідає цій таблиці, не є розв'язком, оскільки результат можна поліпшити.
2. Над жодною з додатних оцінок немає стовпчика, який би містив тільки недодатні елементи (це б свідчило про необмеженість функції знизу).
3. Щоб поліпшити план, виконаємо наступні дії.

- Визначимо змінну, яку слід ввести в базис. Це буде змінна, якій відповідає максимальна додатна оцінка.

$$\max\{M + 1, 3M - 4, M - 2\} = 3M - 4 = \Delta_3,$$

отже, це змінна x_3. Відповідний їй стовпчик назвемо розв'язуючим.

- Визначимо змінну, яка виводиться з базису. Вона відповідає мінімальному з відношень вільних членів до додатних елементів розв'язуючого стовпчика:

$$\min\left\{\frac{4}{3},\frac{4}{1}\right\}=\frac{4}{1}\cdot$$

Мінімальне відношення має місце для змінної x_7, її і виведемо з базису. Відповідний їй рядок – розв’язуючий.

- Будуємо нову симплекс-таблицю.

Змінні / Базис	x_1'	x_1''	x_2	x_3	x_4'	x_4''	x_5	x_6	x_7	b_i
x_3	1/3	–1/3	–2/3	1	–1/3	1/3	0	0	1/3	4/3
x_5	10/3	–10/3	–5/3	0	5/3	–5/3	1	0	1/3	13/3
x_6	2/3	–2/3	17/3	0	10/3	–10/3	0	1	–1/3	8/3
$\tilde{\chi}$	7/3	–7/3	–5/3	0	2/3	–2/3	0	0	–*M*+4/3	16/3

Аналізуємо отриману таблицю.

1. Не всі оцінки є недодатними, а отже, точка $x^0(0,0,0,\frac{4}{3},0,0,\frac{13}{3},\frac{8}{3},0)$ не є розв’язком, оскільки результат можна поліпшити.

2. Над жодною з додатних оцінок немає стовпчика з виключно недодатними елементами.

3. Щоб поліпшити розв’язок, виконаємо наступні дії.

- Визначимо змінну, яку слід ввести в базис – їй відповідає максимальна додатна оцінка:

$$\max\left\{\frac{7}{3},\frac{2}{3}\right\}=\frac{7}{3}.$$

Це буде змінна x_1' (відповідний їй стовпчик – розв’язуючий).

- Визначимо змінну, яка виводиться з базису:

$$\min\left\{\frac{4}{3}:\frac{1}{3},\frac{13}{3}:\frac{10}{3},\frac{8}{3}:\frac{2}{3}\right\}=\frac{13}{3}:\frac{10}{3}.$$

Мінімальне відношення матиме місце для змінної x_5, її і виведемо з базису. Відповідний їй рядок – розв’язуючий.

- Будуємо нову симплекс-таблицю.

Змінні / Базис	x_1'	x_1''	x_2	x_3	x_4'	x_4''	x_5	x_6	x_7	b_i
x_3	0	0	–1/2	1	–1/2	1/2	–1/10	0	3/10	9/10
x_1'	1	–1	–1/2	0	1/2	–1/2	3/10	0	1/10	13/10
x_6	0	0	6	0	3	–3	–1/5	1	–2/5	9/5
$\tilde{\chi}$	0	0	–1/2	0	–1/2	1/2	–7/10	0	–*M*+11/10	23/10

Аналізуємо отриману таблицю:

1. Не всі оцінки є недодатними, а отже, план можна покращити.
2. Над жодною з додатних оцінок немає стовпчика з виключно недодатними елементами.
3. Щоб покращити розв'язок, виконаємо наступні дії.

- Визначимо змінну, яку слід ввести в базис:

$$\max \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \Delta_4'' .$$

Це буде змінна x_4''

- Визначимо змінну, яка виводиться з базису:

$$\min \frac{9}{10} : \frac{1}{2} = \frac{9}{10} : \frac{1}{2} .$$

Це буде змінна x_3.

- Будуємо нову симплекс таблицю.

Змінні / Базис	x_1'	x_1''	x_2	x_3	x_4'	x_4''	x_5	x_6	x_7	b_i
x_4''	0	0	–1	2	–1	1	–1/5	0	3/5	0
x_1'	1	–1	–1	1	0	0	1/5	0	2/5	1
x_6	0	0	3	6	0	0	–4/5	1	7/5	0
$\tilde{\chi}$	0	0	0	–1	0	0	–3/5	0	–*M*+4/5	0

У даній таблиці всі оцінки є недодатними (–*M* + 4/5 < 0, так як *M* – нескінченно велике додатне число, тоді *M* – нескінченно велике за модулем від'ємне число). Тому покращити план, що відповідає цій таблиці, неможливо.

Отже, розв'язком допоміжної задачі є точка: $\tilde{x}^*(\frac{11}{5};0;0;0;0;\frac{9}{5};0;\frac{36}{5};0)$, $\tilde{\chi}\left(\tilde{x}^*\right)=\frac{7}{5}$. Оскільки штучна змінна дорівнює нулю, то вихідна задача має розв'язок.

Знайдемо $x_1 = x_1' - x_1'' = \frac{11}{5} - 0 = \frac{11}{5}$.

Знайдемо $x_4 = x_4' - x_4'' = 0 - \frac{9}{5} = -\frac{9}{5}$.

Таким чином, розв'язком вихідної задачі є точка $x^*(\frac{11}{5};0;0;-\frac{9}{5})$.

Значення функції цілі у даній точці: $\chi(x^*) = -\chi(\tilde{x}^*) = -\frac{7}{5}$.

Задача № 2

$$\chi(x) = 7x_1 + 5x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 3, \\ x_1 + 5x_2 \geq 5, \\ 2x_1 + x_2 \geq 4. \end{cases}$$

Розв'язок

Очевидно, дана задача має незручний для застосування симплекс–методу вигляд.

Приведення до зручного вигляду.

1. Функція цілі повинна мінімізуватись. Щоб ця умова виконувалась у нашому випадку, слід функцію, що розглядається, домножити на (–1). Отримаємо:

$$\hat{\chi}(x) = -7x_1 - 5x_2 \to \min.$$

2. Умова про невід'ємність вільних членів виконується.

3. У системі залишилися лише нерівності типу “$\geq$”. Для трансформування їх у рівняння слід відняти від лівої частини кожної з них по додатковій змінній $x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$ відповідно.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 + 5x_2 - x_4 = 5, \\ 2x_1 + x_2 - x_5 = 4. \end{cases}$$

4. Щоб отримати базисні змінні у рівняннях, слід від рівняння з максимальним вільним членом почленно відняти решту рівнянь:

$$\begin{cases} 4x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 + 5x_2 - x_4 = 5, \\ -x_1 + 4x_2 - x_4 + x_5 = 1. \end{cases}$$

5. Щоб у другому рівнянні також була базисна змінна, слід ввести штучну, $x_6 \geq 0$. Отже, маємо

$$\tilde{\tilde{\chi}}(\tilde{\tilde{x}}) = -7x_1 - 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + Mx_6 \to \min.$$

$$\begin{cases} 4x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 + 5x_2 - x_4 + x_6 = 5, \\ -x_1 + 4x_2 - x_4 + x_5 = 1, \end{cases}$$

$$x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0.$$

6. На змінні x_1 та x_2 не накладена умова невід’ємності, тому слід зробити заміну: $x_i = x_i' - x_i''$. Для даного випадку: $x_1 = x_1' - x_1''$ та $x_2 = x_2' - x_2''$.

Остаточно отримали:

$$\tilde{\chi}(\tilde{x}) = -7x_1' + 7x_1'' - 5x_2' + 5x_2'' + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + Mx_6 \to \min,$$

$$\begin{cases} 4x_2' - 4x_2'' + x_3 - x_4 = 2, \\ x_1' - x_1'' + 5x_2' - 5x_2'' - x_4 + x_6 = 5, \\ -x_1' + x_1'' + 4x_2' - 4x_2'' - x_4 + x_5 = 1, \end{cases}$$

$$x_1' \geq 0,\ x_1'' \geq 0,\ \ldots,\ x_6 \geq 0.$$

Задача має зручний для застосування симплекс–методу вигляд. Перейдемо до її безпосереднього розв’язку:

Обираємо базисні змінні. Очевидно це будуть змінні x_3, x_6, x_5 – відповідно для першого, другого та третього рівнянь.

Будуємо першу симплекс-таблицю:

Змінні / Базис	x_1'	x_1''	x_2'	x_2''	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i	
x_3	0	0	4	–4	1	–1	0	0	2	0
x_6	1	–1	5	–5	0	–1	0	1	5	M
x_5	–1	1	4	–4	0	–1	1	0	1	0
$\tilde{\chi}$	M+7	–M–7	5M+5	–5M–5	0	–M	0	0	5M	
	–7	7	–5	5	0	0	0	M		

Аналізуємо отриману таблицю.

1. Не всі оцінки є недодатними, а отже, кутова точка $x^0(0,0,0,0,2,0,1,5)$ не є розв’язком, оскільки результат можна покращити.
2. Над жодною з додатних оцінок немає стовпчика, який би містив тільки від’ємні елементи.
3. Щоб покращити розв’язок слід виконати наступні дії:

- Визначити змінну, яку слід ввести в базис, це змінна x_2'.
- Визначити змінну, яку слід вивести з базису, це змінна x_5.
- Будуємо нову симплекс таблицю.

Змінні / Базис	x_1'	x_1''	x_2'	x_2''	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_3	1	–1	0	0	1	0	–1	0	1
x_6	9/4	–9/4	0	0	0	1/4	–5/4	1	15/4
x_2'	–1/4	1/4	1	–1	0	–1/4	1/4	0	1/4
$\tilde{\chi}$	9/4M+ +33/4	–9/4M– –33/4	0	0	0	1/4M+ +5/4	–5/4M– –5/4	0	15/4M– –5/4

Аналізуємо отриману таблицю.

1. Не всі оцінки є недодатними, а отже, кутова точка $x^1\left(0{,}0,\frac{1}{4},0{,}1{,}0{,}0,\frac{15}{14}\right)$ не є розв’язком, оскільки результат можна покращити.

2. Над жодною з додатних оцінок немає стовпчика, який би містив тільки від’ємні елементи.

3. Щоб покращити розв’язок слід виконати наступні дії:

- Визначити змінну, яку слід ввести в базис, це змінна x_1'.
- Визначити змінну, яку слід вивести з базису, це змінна x_3.
- Побудувати нову симплекс-таблицю:

Змінні / Базис	x_1'	x_1''	x_2'	x_2''	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_1'	1	–1	0	0	1	0	–1	0	1
x_6	0	0	0	0	–9/4	1/4	1	1	3/2
x_2'	0	0	1	–1	1/4	–1/4	0	0	1/2
$\tilde{\chi}$	0	0	0	0	$-9/4M-$ $-33/4$	$1/4M+$ $+5/4$	$M+7$	0	$3/2M-$ $-19/2$

Аналізуємо отриману таблицю.

1. Не всі оцінки є недодатними, а отже, кутова точка $x^2\left(1{,}0,\frac{1}{2},0{,}0{,}0{,}0,\frac{3}{2}\right)$ не є розв’язком, оскільки результат можна покращити.

2. Над жодною з додатних оцінок немає стовпчика, який би містив тільки недодатні елементи.

3. Щоб покращити розв’язок слід використати такі дії:

- Визначити змінну, яку слід ввести в базис, це змінна x_5.
- Визначити змінну, яку слід вивести з базису, це змінна x_6.
- Побудувати нову симплекс–таблицю:

Змінні / Базис	x_1'	x_1''	x_2'	x_2''	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_1'	1	–1	0	0	–5/4	¼	0	1	5/2
x_5	0	0	0	0	–9/4	¼	1	1	3/2
x_2'	0	0	1	–1	1/4	–1/4	0	0	1/2
$\tilde{\chi}$	0	0	0	0	15/2	–1/2	0	–*M*–7	–20

Аналізуємо отриману таблицю.

1. Не всі оцінки є недодатними, а отже, кутова точка $x(\frac{5}{2},0,\frac{1}{2},0,0,0,\frac{3}{2},0)$ не є розв’язком, оскільки результат можна покращити.
2. Над жодною з додатних оцінок немає стовпчика, який би містив тільки недодатні елементи.
3. Щоб покращити розв’язок слід виконати такі дії:

- Визначити змінну, яку слід ввести в базис, це змінна x_3.
- Визначити змінну, яку слід вивести з базису, це змінна x_2' .
- Побудувати нову симплекс–таблицю:

Змінні / Базис	x_1'	x_1''	x_2'	x_2''	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_1'	1	–1	5	–5	0	–1	0	1	5
x_5	0	0	9	–9	0	–2	1	1	6
x_3	0	0	4	–4	1	–1	0	0	2
$\tilde{\chi}$	0	0	–3	3	0	7	0	–*M*–7	–35

Аналізуємо отриману таблицю.

Не всі оцінки є недодатними, а отже, дана точка не є розв’язком, оскільки результат можна покращити.

Аналізуємо стовпчики над додатними оцінками. Стовпчик коефіцієнтів при змінній x_2'', що відповідає додатній оцінці $\Delta_2'' = 3$, не містить додатних елементів. Це є ознакою того, що на множині припустимих розв’язків функція цілі необмежена знизу, тобто дана задача (допоміжна) не має розв’язку. А отже, вихідна задача також не має розв’язку – з тієї ж причини.

6. Транспортна задача

Задача № 1

Є 4 постачальники і 4 споживача. Умови записані у наступній таблиці.

Спожив. / Постач.	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси
A_1	6	7	5	8	30
A_2	6	8	8	4	50
A_3	3	5	7	6	70
A_4	5	4	6	7	50
Потреби	40	60	50	50	200

1. Складаємо опорний план методом північно-західного кута.

Спожив. / Постач.	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси
A_1	6 30	7	5	8	30
A_2	6 10	8 40	8	4	50
A_3	3	5 20	7 50	6	70
A_4	5	4	6 0	7 50	50
Потреби	40	60	50	50	200

Заповнення таблиці починається з лівої верхньої клітинки.
x_{11} – вибираємо як мінімальне значення з чисел 30 і 40.

$x_{11} = \min\{30,40\} = 30$, тобто вичерпані всі запаси, а потреби задоволені не повністю. Перший рядок викреслюється, а одержана в результаті таблиця заповнюється так само з лівого верхнього кута.

$$x_{21} = \min\{60,40-30\} = 10.$$

Тепер повністю задоволені потреби. Викреслюємо перший стовпчик і заповнюємо одержану після цього таблицю, починаючи з лівого верхнього кута, тобто знаходимо x_{22}. Таким чином, заповнюємо таблицю до кінця. При заповненні клітинки x_{33} одержуємо випадок, коли повністю вичерпуються запаси і повністю задовольняються потреби, отже, $x_{33} = 50$. Викреслюємо рядок, а у ліву верхню клітинку одержаної таблиці записуємо 0, тобто $x_{43} = 0$ (фіктивне перевезення). $x_{44} = 50$. Відповідний опорний план називається виродженим (виродженим називається опорний план, який містить хоча б одне фіктивне перевезення).

2. Знаходимо потенціали постачальників і споживачів, які відповідають отриманому опорному плану.

Для цього складаємо систему лінійних рівнянь, прирівнюючи для кожної зайнятої клітинки суму потенціалів відповідних постачальника та споживача до вартості перевезення, яка знаходиться в цій клітинці, тобто

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 6, \\ u_2 + v_1 = 6, \\ u_2 + v_2 = 8, \\ u_3 + v_2 = 5, \\ u_3 + v_3 = 7, \\ u_4 + v_3 = 6, \\ u_4 + v_4 = 7. \end{cases}$$

Для визначеності вважаємо $u_1 = 0$. Тоді розв'язок визначається однозначно

$u_1 = 0$, $\quad v_1 = 6$,

$u_2 = 0$, $\quad v_2 = 8$,

$u_3 = -3$, $\qquad\qquad v_3 = 10$,

$u_4 = -4$, $\qquad\qquad v_4 = 11$.

Занесемо знайдені потенціали у таблицю (другий рядок та другий стовпчик таблиці з відповідним опорним планом).

Постач. \ Спожив.		B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси
	u_i \ v_i	6	8	10	11	
A_1	0	6 30	7	5	8	30
A_2	0	6 10	8 – 40	8	4 + θ	50
A_3	–3	3	5 + 20	7 – 50	6	70
A_4	–4	5	4	6 + 0	7 – 50	50
Потреби		40	60	50	50	200

3. Знайдемо оцінки незайнятих клітинок за формулою:

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} .$$

Маємо

$$\Delta_{12} = 0+8-7=1,\ \Delta_{23} = 0+10-8=2,\ \Delta_{34} = -3+11-6=2,$$
$$\Delta_{13} = 0+10-5=5,\ \Delta_{24} = 0+11-4=7,\ \Delta_{41} = -4+6-5=-3,$$
$$\Delta_{14} = 0+11-8=3,\ \Delta_{31} = -3+6-3=0,\ \Delta_{42} = -4+8-4=0 .$$

4. Якщо всі оцінки недодатні, то знайдено оптимальний розв'язок. У даному випадку це не так. Тоді вибираємо максимальну з додатніх оцінок (якщо їх декілька – то береться перша). Ця клітинка буде вводитись в базис.

$$\max\{1,5,3,,2,7,2\} = 7 = \Delta_{24}.$$

Тобто в базис вводиться клітинка (2,4).

5. У клітинку, що вводиться в базис, записується поки невідома величина θ. Будуємо цикл з вершинами, які знаходяться лише в зайнятих клітинках, а також в клітинці, що містить θ. У вершинах, починаючи з θ, ставимо почергово знаки "+" та "–" (клітинка з θ має знак "+").

6. Знаходимо значення θ, як мінімальне з перевезень, що містяться в клітинках зі знаками "–".

$$\theta = \min\{50,50,40\} = 40 .$$

Відповідна цьому перевезенню клітинка (в даному випадку це клітинка (2,2)), виводиться з базису.

Будується нова таблиця, в якій рядок та стовпчик потенціалів – вільні. В клітинку, яка позначена θ у попередній таблиці, записують знайдене її значення. У решті вершин записується результат відповідних дій над їх вмістом та величиною θ. Клітинки, які не мали позначок "+" або "–", залишаються без змін. Клітинка, яка містила величину θ (мінімальне з перевезень зі знаком "–"), залишається вільною (виводиться з базису). Якщо таких клітинок декілька, то виводиться з базису перша з них, у решті клітинок ставлять нулі (результати дій θ–θ).

Перехід до пункту 2.

Знаходимо потенціали постачальників та споживачів.

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 6, \\ u_2 + v_1 = 6, \\ u_2 + v_4 = 4, \\ u_3 + v_2 = 5, \\ u_3 + v_3 = 7, \\ u_4 + v_3 = 6, \\ u_4 + v_4 = 7. \end{cases}$$

Постач. \ Спожив.	u_i \ v_i	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси
A_1		6 30	7	5	8	30
A_2		6 10	8	8	4 40	50
A_3		3 θ	5 60	7 10	6	70
A_4		5	4	6 40	7 10	50
Потреби		40	60	50	50	200

Знайдені потенціали записуються у вільні стовпчик та рядок відповідної таблиці.

Постач \ Спожив	u_i \ v_i	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси
		6	1	3	4	
A_1	0	6 30	7	5	8	30
A_2	0	6 – 10	8	8	4 + 40	50
A_3	4	3 + θ	5 60	7 – 10	6	70
A_4	3	5	4	6 + 40	7 – 10	50
Потреби		40	60	50	50	200

Знайдемо оцінки для незайнятих клітинок.

$$\Delta_{12} = 0+1-7 = -6,\ \ \Delta_{22} = 0+1-8 = -7,\ \ \Delta_{34} = 4+4-6 = 2,$$
$$\Delta_{13} = 0+3-5 = -2,\ \ \Delta_{23} = 0+3-8 = -5,\ \ \Delta_{41} = 3+6-5 = 4,$$
$$\Delta_{14} = 0+4-8 = -4,\ \ \Delta_{31} = 4+6-3 = 7,\ \ \Delta_{42} = 3+1-4 = 0.$$

Серед оцінок є додатні, отже, план не оптимальний. Поліпшимо його. Вибираємо максимальну з оцінок.

$$\max\{7,2,4\} = 7 = \Delta_{31}.$$

Їй відповідає клітинка (3;1), що вводиться в базис.

Будуємо цикл.

$$\theta = \min\{10,10,10\} = 10\,.$$

Будується нова таблиця з вільними рядком та стовпчиком потенціалів.

Мінімальне значення (значення θ) знаходиться у трьох клітинках (2;1), (3;3) та (4;4) попередньої таблиці. Залишаємо незайнятою першу з них – (2,1). У решту записується фіктивне перевезення 0 і вони вважаються зайнятими. Інші клітинки таблиці заповнюються таким же чином, як і в попередньому випадку.

Спожив. / Постач.	v_i / u_i	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси
		6	8	10	11	
A_1	0	6 − 30	7	5 + θ	8	30
A_2	–7	6	8	8	4 50	50
A_3	–3	3 + 10	5 60	7 − 0	6	70
A_4	–4	5	4	6 50	7 0	50
Потреби		40	60	50	50	200

Знайдемо потенціали постачальників і споживачів:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 6, \\ u_2 + v_4 = 4, \\ u_3 + v_1 = 3, \\ u_3 + v_2 = 5, \\ u_3 + v_3 = 7, \\ u_4 + v_3 = 6, \\ u_4 + v_4 = 7. \end{cases}$$

Приймаємо $u_1 = 0$, тоді

$$\begin{array}{ll} u_1 = 0, & v_1 = 6, \\ u_2 = -7, & v_2 = 8, \\ u_3 = -3, & v_3 = 10, \\ u_4 = -4, & v_4 = 11. \end{array}$$

Записуємо отримані потенціали в таблицю – в стовпчик та рядок, що були вільними.

Знаходимо оцінки для всіх незайнятих клітинок цієї таблиці.

$$\begin{array}{lll} \Delta_{12} = 0 + 8 - 7 = 1, & \Delta_{21} = -7 + 6 - 6 = -7, & \Delta_{34} = -3 + 11 - 6 = 2, \\ \Delta_{13} = 0 + 10 - 5 = 5, & \Delta_{22} = -7 + 8 - 8 = -7, & \Delta_{41} = -4 + 6 - 5 = -3, \\ \Delta_{14} = 0 + 11 - 8 = 3, & \Delta_{23} = -7 + 10 - 8 = -5, & \Delta_{42} = -4 + 8 - 4 = 0. \end{array}$$

Серед оцінок є додатні, отже, план можна поліпшити.

$$\max\{1,5,3,2\} = 5 = \Delta_{13}.$$

В базис вводимо клітинку (1;3).

Записуємо в цю клітинку θ.

Будуємо цикл, проставляємо знаки "+" та "–".

$$\theta = \min\{0,30\} = 0.$$

Постач. \ Спожив.		B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси
	u_i \ v_i	6	8	5	6	
A_1	0	6 − 30	7	5 + θ	8	30
A_2	–2	6	8	8	4 50	50
A_3	–3	3 + 10	5 − 60	7 0	6	70
A_4	1	5	4 + θ	6 − 50	7 0	50
Потреби		40	60	50	50	200

Клітинка (4,4) виводиться з базису.

Будуємо нову таблицю, залишаючи поки вільними рядок та стовпчик для потенціалів.

Знайдемо потенціали постачальників і споживачів для побудованої таблиці.

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 6, \\ u_1 + v_3 = 5, \\ u_2 + v_3 = 4, \\ u_3 + v_1 = 3, \\ u_3 + v_2 = 5, \\ u_4 + v_3 = 6, \\ u_4 + v_4 = 7. \end{cases}$$

Приймаємо $u_1 = 0$, тоді

$u_1 = 0$, $\quad v_1 = 6$,

$u_2 = -2$, $\quad v_2 = 8$,

$u_3 = -3$, $\quad v_3 = 5$,

$u_4 = 1$, $\quad v_4 = 6$.

Записуємо отримані потенціали в стовпчик та рядок відповідної таблиці, що були вільними.

Знаходимо оцінки для всіх незайнятих клітинок.

$$\Delta_{12} = 0+8-7=1, \quad \Delta_{22} = -2+8-8=-2, \quad \Delta_{34} = -3+6-6=-3,$$
$$\Delta_{14} = 0+6-8=-2, \quad \Delta_{23} = -2+5-8=-5, \quad \Delta_{41} = 1+6-5=2,$$
$$\Delta_{21} = -2+6-6=-2, \quad \Delta_{33} = -3+5-7=-5, \quad \Delta_{42} = 1+8-4=5.$$

Серед оцінок є додатні, отже, план можна поліпшити.

$$\max\{1,2,5\} = 5.$$

В базис вводимо клітинку (4;2), записуємо в неї θ.

Будуємо цикл, проставляємо знаки “+” та ”–”.

$$\theta = \min\{0,30\} = 0.$$

Клітинка (1,3) виводиться з базису

Будуємо нову таблицю, залишаючи поки вільними рядок та стовпчик для потенціалів.

Постач. \ Спожив.	u_i \ v_i	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси
		1	3	5	6	
A_1	0	6	7	5 30	8	30
A_2	–2	6	8	8	4 50	50
A_3	2	3 40	5 – 30	7	6 + θ	70
A_4	1	5	4 + 30	6 20	7 – 0	50
Потреби		40	60	50	50	200

Знайдемо потенціали постачальників і споживачів для побудованої таблиці.

$$\begin{cases} u_1 + v_3 = 5, \\ u_2 + v_4 = 4, \\ u_3 + v_1 = 3, \\ u_3 + v_2 = 5, \\ u_4 + v_2 = 4, \\ u_4 + v_3 = 6, \\ u_4 + v_4 = 7. \end{cases}$$

Приймаємо $u_1 = 0$, тоді

$$\begin{array}{ll} u_1 = 0, & v_1 = 1, \\ u_2 = -2, & v_2 = 3, \\ u_3 = 2, & v_3 = 5, \\ u_4 = 1, & v_4 = 6. \end{array}$$

Записуємо отримані потенціали в стовпчик та рядок відповідної таблиці, що були вільними.

Знаходимо оцінки для всіх незайнятих клітинок.

$$\begin{array}{lll} \Delta_{11} = 0 + 1 - 6 = -5, & \Delta_{21} = -2 + 1 - 6 = -7, & \Delta_{33} = 2 + 5 - 7 = 0, \\ \Delta_{12} = 0 + 3 - 7 = -4, & \Delta_{22} = -2 + 3 - 8 = -7, & \Delta_{34} = 2 + 6 - 6 = 2, \\ \Delta_{14} = 0 + 6 - 8 = -2, & \Delta_{23} = -2 + 5 - 8 = -5, & \Delta_{41} = 1 + 1 - 5 = -3. \end{array}$$

Серед оцінок є додатні, отже, план можна поліпшити.

$$\max\{2\} = 2.$$

В базис вводимо клітинку (3;4):

$$\theta = \min\{0,30\} = 0.$$

Знайдемо потенціали постачальників і споживачів:

Постач. \ Спожив.	v_j / u_i	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси
		1	3	5	4	
A_1	0	6	7	5 30	8	30
A_2	0	6	8	8	4 50	50
A_3	2	3 40	5 30	7	6 0	70
A_4	1	5	4 30	6 20	7	50
Потреби		40	60	50	50	200

$$\begin{cases} u_1 + v_3 = 5, \\ u_2 + v_4 = 4, \\ u_3 + v_1 = 3, \\ u_3 + v_2 = 5, \\ u_3 + v_4 = 6, \\ u_4 + v_2 = 4, \\ u_4 + v_3 = 6. \end{cases}$$

Приймаємо $u_1 = 0$, тоді

$$\begin{array}{ll} u_1 = 0, & v_1 = 1, \\ u_2 = 0, & v_2 = 3, \\ u_3 = 2, & v_3 = 5, \\ u_4 = 1, & v_4 = 4. \end{array}$$

Знаходимо оцінки для всіх незайнятих клітинок.

$$\begin{array}{lll} \Delta_{11} = 0 + 1 - 6 = -5, & \Delta_{21} = 0 + 1 - 6 = -5, & \Delta_{33} = 2 + 5 - 7 = 0, \\ \Delta_{12} = 0 + 3 - 7 = -4, & \Delta_{22} = 0 + 3 - 8 = -5, & \Delta_{41} = 1 + 1 - 5 = -3, \\ \Delta_{14} = 0 + 4 - 8 = -4, & \Delta_{23} = 0 + 5 - 8 = -3, & \Delta_{44} = 1 + 4 - 7 = -2. \end{array}$$

Оскільки серед оцінок немає жодної додатної, то знайдено оптимальний розв’язок.

Обрахуємо значення функції цілі:

$$\chi = 30 \cdot 5 + 50 \cdot 4 + 40 \cdot 3 + 30 \cdot 5 + 30 \cdot 4 + 20 \cdot 6 + 0 \cdot 7 = 860.$$