

## 8. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

### 8.1 Основные понятия

Процессы в цепи, возникающие при переходе от одного установившегося (стационарного) режима к другому, называются **переходными**.

В электрической цепи переходные процессы возникают при изменении режима ее работы: включении или отключении цепи, изменении параметров  $R$ ,  $L$  или  $C$ . Такие действия, вызывающие переходные процессы, называются **коммутацией**.

Каждому состоянию цепи, имеющей индуктивность  $L$  и емкость  $C$ , соответствуют определенные запасы энергии магнитного и электрического поля:

$$W_M = \frac{L \cdot i_L^2}{2}; \quad W_E = \frac{C \cdot u_C^2}{2}.$$

Для изменения энергии поля на конечную величину необходимо некоторое время, т.к. скачкообразное изменение энергии было бы равносильно тому, что мощность источника достигала бы бесконечных значений ( $P = \frac{dW}{dt} = \infty$ ), что физически невозможно.

В связи с этим – скачкообразные изменения тока  $i_L$  в катушке индуктивности и напряжения  $u_C$  на конденсаторе невозможны. Следовательно, переход от одного установившегося значения к другому совершается не мгновенно, а лишь за некоторое время (хотя и очень быстро – за доли секунды).

#### **Первый закон коммутации.**

*Ток в цепи с индуктивностью не может изменяться скачком и в начальный момент времени переходного процесса ( $t=0$ ) сохраняет свое предшествующее значение.*

#### **Второй закон коммутации.**

*Напряжение на зажимах конденсатора не может изменяться скачком и в начальный момент времени переходного процесса ( $t=0$ ) сохраняет свое предшествующее значение.*

Математический анализ переходных процессов в электрических цепях базируется на том, что законы Кирхгофа применимы не только к установившимся, но и к неустановившимся режимам.

Используя первый и второй законы Кирхгофа можно получить линейные дифференциальные уравнения для переходного процесса. По этим уравнениям определяют значения токов и напряжений в любой момент рассматриваемого процесса. Значения постоянных интегрирования находят из граничных условий, определяемых законами коммутации.

Для упрощения решения дифференциальных уравнений и их анализа переходный процесс принято рассматривать как результат наложения двух режимов: принужденного и свободного. В соответствии с этим действительный ток в цепи  $i$  представляется как сумма принужденного тока  $i_{np}$ , который устанавливается в цепи по окончании переходного процесса, и свободного тока  $i_{св}$ , протекающего в цепи только в течение переходного процесса

$$i = i_{св} + i_{np}.$$

Свободный ток постепенно уменьшается и при установившемся режиме ( $t=\infty$ ) становится равным нулю, т.е.  $i|_{t=\infty} = i_{np}$ .

Оперируя в расчетах принужденной и свободной составляющими тока, необходимо помнить, что реально существуют не эти отдельные составляющие, а результирующие токи или напряжения.

## 8.2. Переходные процессы в цепях с индуктивностью

### 8.2.1. Включение RL цепи на постоянное напряжение

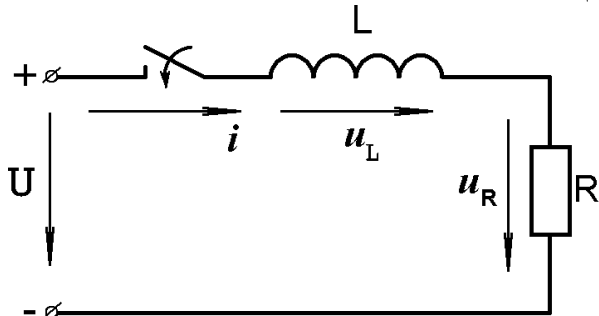


Рис.8.1

Запишем уравнение по второму закону Кирхгофа для данной цепи (рис.8.1):

$$u_L + u_R - U = 0;$$

$$U = u_L + u_R.$$

Или (раскрыв  $u_L$  и  $u_R$ )

$$U = L \frac{di}{dt} + i \cdot R. \quad (8.1)$$

Пусть мгновенный переходный ток в цепи равен  $i = i_{np} + i_{св}$ . Стоит задача нахождения составляющих тока  $i_{np}$  и  $i_{св}$ . Подставив это выражение в уравнение (8.1), получим:

$$L \frac{d}{dt}(i_{np} + i_{св}) + (i_{np} + i_{св}) \cdot R = U. \quad (8.2)$$

Очевидно, что  $i_{св}|_{t=\infty} = 0$ , т.е. в установившемся режиме  $i_{св} = 0$ . Тогда уравнение (8.2) можно записать относительно принужденной составляющей тока

$$L \frac{di_{np}}{dt} + i_{np} \cdot R = U. \quad (8.3)$$

Очевидно, что  $i_{np}|_{t=\infty} = const$ , следовательно:

$$L \frac{di_{np}}{dt} = 0 \quad \text{и} \quad i_{np} = \frac{U}{R}. \quad (8.4)$$

Вычтем (8.3) из (8.2), получим

$$L \frac{di_{св}}{dt} + i_{св} \cdot R = 0. \quad (8.5)$$

Решением данного дифференциального уравнения является выражение:

$$i_{св} = A \cdot e^{p \cdot t},$$

где  $A$  – постоянная интегрирования;  $p$  – корень характеристического уравнения.

Как уже отмечалось выше (в п.8.1), постоянные интегрирования определяются из граничных условий, задаваемых законами коммутации.

В данном случае постоянная интегрирования  $A$  определяется из следующего граничного условия, записанного на основе первого закона коммутации

$$(i_{np} + i_{св})|_{t=0} = i|_{t=0} = 0.$$

Отсюда:  $i_{cs}|_{t=0} = -i_{np} = -\frac{U}{R}$ .

С другой стороны  $i_{cs}|_{t=0} = A \cdot e^{p \cdot 0} = A$ .

Следовательно,  $A = -\frac{U}{R}$ .

Корень  $p$  определяется из характеристического уравнения, записываемого по виду уравнения (8.5)  $p \cdot L + R = 0$ . Откуда  $p = -\frac{R}{L}$ . В результате ток  $i_{cs}$  равен:

$$i_{cs} = -\frac{U}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L}t} = -\frac{U}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}},$$

где  $\tau = \frac{L}{R} = -\frac{1}{p}$  – постоянная времени цепи, определяющая скорость протекания переходного процесса. Теоретически переходный процесс длится бесконечно долго. Однако принято считать, что он закончился, если ток  $i$  составляет 99% от установившегося значения  $I = \frac{U}{R}$ . Это имеет место при  $t \approx (3 \div 4) \cdot \tau$ .

Искомый ток равен  $i = i_{np} + i_{cs} = \frac{U}{R} - \frac{U}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{U}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ .

Временная диаграмма процесса включения цепи с R и L на постоянное напряжение изображена на рис.8.2.

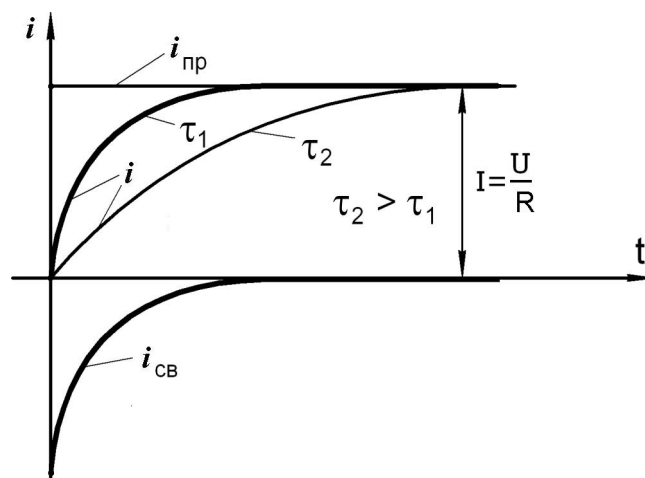


Рис.8.2

На этом же рисунке показаны два графика изменения тока в цепи в зависимости от постоянной времени  $\tau$ . Видно, что чем больше значение  $L$ , при неизменном сопротивлении  $R$ , тем больше энергия магнитного поля, накапливаемая в магнитном поле катушки  $W = \frac{L \cdot i^2}{2}$ , и тем больше постоянная времени цепи  $\tau$ .

### 8.2.2. Короткое замыкание RL цепи постоянного тока

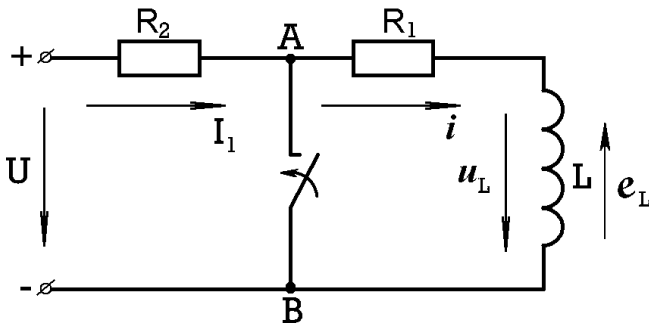


Рис.8.3

Если ключ на рис.8.3 не замкнут, то через некоторое время в цепи установится ток  $I_1 = \frac{U}{R_1 + R_2}$ , определяемый напряжением источника и активным сопротивлением цепи. При замыкании ключа в момент времени  $t = 0$  напряжение на участке АВ равно нулю.

Запас энергии магнитного поля  $\left(\frac{L \cdot I_1^2}{2}\right)$  и ток  $i$  начинают исчезать, но не скачком, а постепенно, т.к. при изменении тока в замкнутой цепи на катушке  $L$  наводится ЭДС самоиндукции, поддерживающая ток  $i$ . Энергия магнитного поля преобразуется в тепловую энергию на сопротивлении  $R_1$ , которая выделяется в окружающее пространство.

Для замкнутого контура с катушкой второй закон Кирхгофа имеет вид:

$$\begin{aligned} u_L + i \cdot R_1 &= 0; \\ L \frac{di}{dt} + i \cdot R_1 &= 0. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Очевидно, что  $i_{np}|_{t=\infty} = 0$ , и, следовательно,  $i = i_{cs} + i_{np} = i_{cs}$ .

Уравнение (8.6) примет вид:

$$L \frac{di_{cs}}{dt} + R_1 \cdot i_{cs} = 0.$$

Решением данного уравнения является

$$i_{cs} = A \cdot e^{p \cdot t} = A \cdot e^{-\frac{R_1}{L} \cdot t}.$$

Постоянную интегрирования  $A$  определим из первого закона коммутации:

$$i_{\hat{n}\hat{a}}|_{t=0} = i|_{t=0} = \frac{U}{R_1 + R_2} \text{ — это с одной стороны; } i_{cs}|_{t=0} = A \cdot e^{p \cdot 0} = A \text{ — с другой стороны.}$$

$$\text{Следовательно, } A = \frac{U}{R_1 + R_2}.$$

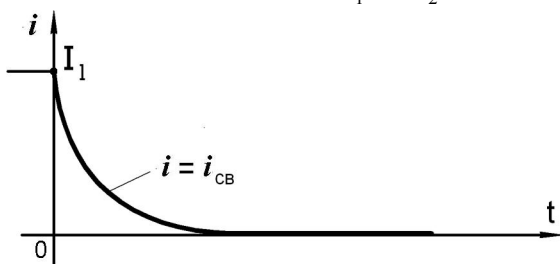


Рис.8.4

Окончательно,

$$i = i_{cs} = \frac{U}{R_1 + R_2} \cdot e^{-\frac{R_1}{L} \cdot t} = I_1 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}},$$

$$\text{где } \tau = -\frac{1}{p} = \frac{L}{R_1}.$$

Временная диаграмма для данного процесса показана на рис.8.4.

### 8.2.3. Отключение цепи RL от источника постоянного напряжения

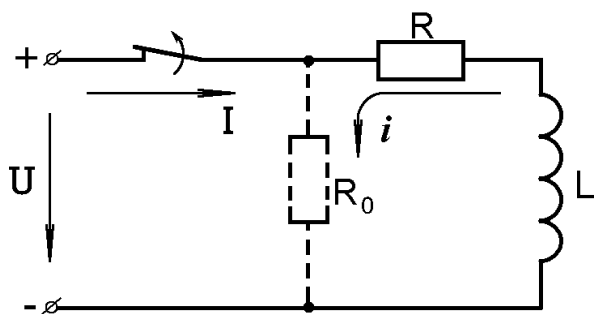


Рис.8.5

При отключении цепи, содержащей катушку индуктивности (рис.8.5), возникает ЭДС самоиндукции, препятствующая мгновенному прекращению тока.

В момент разрыва между контактами выключателя возникает дуга, поддерживаемая энергией магнитного поля катушки.

Скорость затухания тока определяют переходное сопротивление контактов и дуги.

Если индуктивность  $L$  велика, а ток уменьшается быстро, то ЭДС самоиндукции  $e_L = -L \frac{di}{dt}$  может во много раз превышать приложенное к цепи напряжение  $U$ . Такое перенапряжение опасно (возможен пробой изоляции).

Если в момент размыкания параллельно ветви RL включить сопротивление  $R_0$ , то перенапряжение уменьшается, т.к. энергия  $W_M = \frac{L \cdot I^2}{2}$  постепенно в виде тепла будет выделяться в этом сопротивлении. В результате процесс спада тока окажется более продолжительным, а ЭДС самоиндукции меньше. На практике используют различные дугогасительные устройства.

### 8.2.4. Включение цепи RL на синусоидальное напряжение

При включении цепи RL (рис.8.1) на синусоидальное напряжение  $u = U_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi)$  в цепи устанавливается ток  $i_{np} = \frac{U_m}{z} \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi - \varphi)$ ,

где  $z = \sqrt{R^2 + (\omega \cdot L)^2}$ ,  $\varphi = \arctg \frac{\omega \cdot L}{R}$ .

Для свободной составляющей уравнение имеет вид:

$$L \frac{di_{cs}}{dt} + R \cdot i_{cs} = 0.$$

Его решение

$$i_{cs} = A \cdot e^{-\frac{R}{L}t} = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}},$$

где  $\tau = \frac{L}{R}$ .

Постоянная интегрирования определяется из первого закона коммутации  $i|_{t=0} = i_{cs}|_{t=0} + i_{np}|_{t=0} = 0$ . Отсюда следует, что  $i_{cs}|_{t=0} = -i_{np}$ , а с другой стороны—  $i_{cs}|_{t=0} = A \cdot e^{p \cdot 0} = A$ . Тогда,  $A = -i_{np} = -\frac{U_m}{z} \cdot \sin(\psi - \varphi)$  ( $t = 0$ , поэтому отсутствует компонента  $\omega \cdot t$ ). Следовательно,  $i_{cs} = A \cdot e^{p \cdot t} = -\frac{U_m}{z} \cdot \sin(\psi - \varphi) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$ .

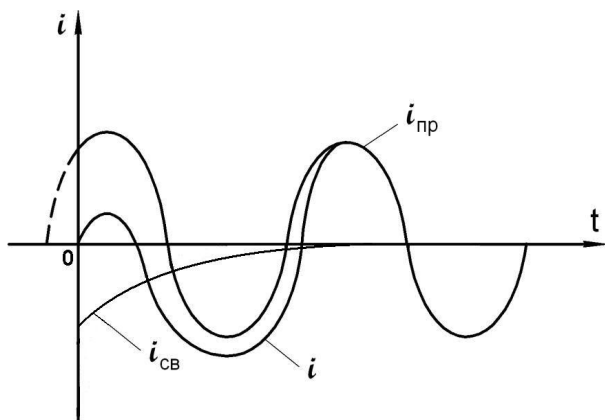


Рис.8.6

Поскольку общий ток  $i = i_{св} + i_{пр}$ , то

$$i = -\frac{U_m}{z} \sin(\psi - \varphi) \cdot e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U_m}{z} \sin(\omega \cdot t + \psi - \varphi)$$

Графики свободного, принужденного и переходного токов в общем случае изображены на рис.8.6.

Если включение происходит в момент, когда ток  $i_{пр}$  проходит через нуль, то свободный ток  $i_{св}$  не возникает и в цепи сразу наступает установившийся режим.

Если включение произошло в момент, когда ток  $i_{пр} = \max$  (рис.8.7), т.е.  $\omega \cdot t + \psi - \varphi = 90^\circ$ , ( $\omega \cdot t|_{t=0} = 0$ ), то через половину периода (при  $t = \frac{T}{2}$ ) общий ток  $i$  достигает максимума, который при больших  $\tau$  почти в 2 раза больше тока в установившемся режиме.

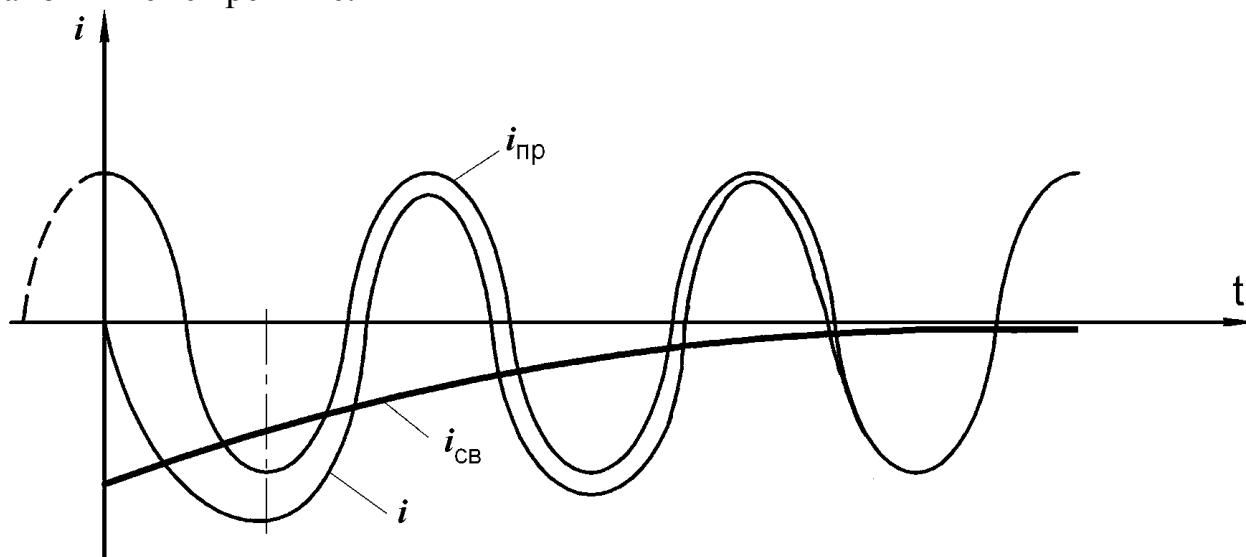


Рис.8.7

При расчете цепей (устройств) этот факт нужно учитывать, например, при расчете электродвигателя.

### 8.3. Переходные процессы в цепях с емкостью

#### 8.3.1. Включение цепи RC на постоянное напряжение

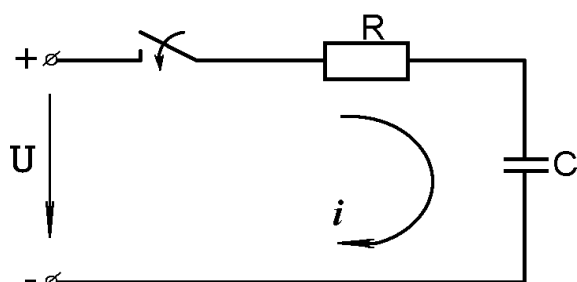


Рис.8.8

Для цепи (рис.8.8) уравнение по второму закону Кирхгофа имеет вид:

$$u_R + u_C - U = 0, \text{ или } u_R + u_C = U.$$

Зная, что  $u_R = i \cdot R$  получим:

$$C \cdot R \frac{du_C}{dt} + u_C = U, \text{ т.к. } i = C \frac{du_C}{dt}.$$

Пусть  $u_C = u_{Cnp} + u_{Ccs}$ . Подставив данное выражение в предыдущее уравнение, получим:

$$R \cdot C \frac{d}{dt}(u_{Cnp} + u_{Ccs}) + u_{Cnp} + u_{Ccs} = U.$$

Очевидно, что  $u_{Cnp}|_{t=\infty} = U$ , т.к. за время  $t \rightarrow \infty$  емкость полностью зарядится до входного напряжения.

Подставим это значение в последнее уравнение и учтем, что  $\frac{du_{Cnp}}{dt} = 0$ , получим:

$$R \cdot C \frac{du_{Ccs}}{dt} + u_{Ccs} = 0. \quad (8.7)$$

Решением данного уравнения является выражение  $u_{Ccs} = A \cdot e^{p \cdot t}$ .

Постоянную интегрирования  $A$  найдем из второго закона коммутации:

$$(u_{Cnp} + u_{Ccs})|_{t=0} = 0.$$

Отсюда  $u_{Ccs}|_{t=0} = -u_{Cnp} = -U$ . С другой стороны  $u_{Ccs}|_{t=0} = A \cdot e^{p \cdot 0} = A$ .

Тогда  $A = -U$ .

Величина корня  $p$  определяется из характеристического уравнения, записываемого по виду уравнения (8.7)

$$R \cdot C \cdot p + 1 = 0.$$

Отсюда следует, что  $p = -\frac{1}{R \cdot C}$ .

Тогда свободная составляющая напряжения на емкости будет равна

$$u_{Ccs} = -U \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} = -U \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (8.8)$$

где  $\tau = -\frac{1}{p} = R \cdot C$ .

Окончательно, напряжение на емкости в процессе заряда равно

$$u_C = u_{Cnp} + u_{Ccs} = U - U \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} = U \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}).$$

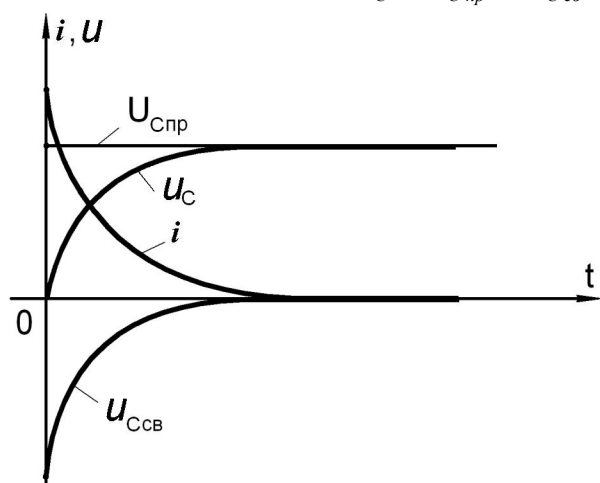


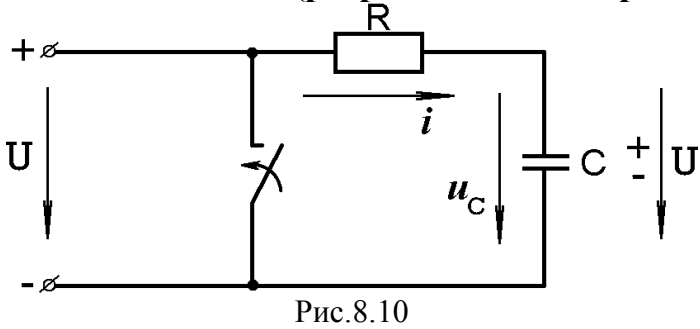
Рис.8.9

Воспользовавшись этим уравнением можно определить ток  $i$ :

$$i = C \frac{du_C}{dt} = -U \cdot \left( -\frac{1}{R \cdot C} \right) \cdot C \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} = \frac{U}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Временная диаграмма данного процесса изображена на рис.8.9.

### 8.3.2 Короткое замыкание цепи RC (разряд конденсатора C на сопротивлении R)



До коммутации конденсатор был заряжен до входного напряжения  $U$ , потому что  $u_C|_{t=0} = U$ .

После замыкания ключа по цепи RC (рис.8.10) будет протекать ток  $i = C \frac{du_C}{dt}$ .

Рис.8.10

Ток будет существовать до тех пор, пока энергия электрического поля  $W_э = \frac{C \cdot U^2}{2}$  не преобразуется в тепло в сопротивлении R.

По второму закону Кирхгофа имеем  $i \cdot R + u_C = 0$ , или

$$R \cdot C \frac{du_C}{dt} + u_C = 0. \quad (8.9)$$

Так как конденсатор за время  $t = \infty$  разрядится полностью, то  $u_{C_{np}}|_{t=\infty} = 0$ . Поэтому в любой момент переходного процесса  $u_C = u_{C_{св}}$ .

Решением уравнения (8.9) является выражение

$$u_C = u_{C_{св}} = A \cdot e^{pt}.$$

Значение A определяется из условия, задаваемого вторым законом коммутации  $u_C|_{t=0} = (u_{C_{св}} + u_{C_{np}})|_{t=0} = u_{C_{св}}|_{t=0} = U$ .

С другой стороны  $u_C|_{t=0} = u_{C_{св}}|_{t=0} = A \cdot e^{p \cdot 0} = A$ .

Следовательно,  $A=U$ . Величина корня  $p$  для RC – цепи была получена выше, см.(8.8):  $p = -\frac{1}{R \cdot C}$ . Окончательно получим:

$$u_C = u_{C_{св}} = U \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} = U \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

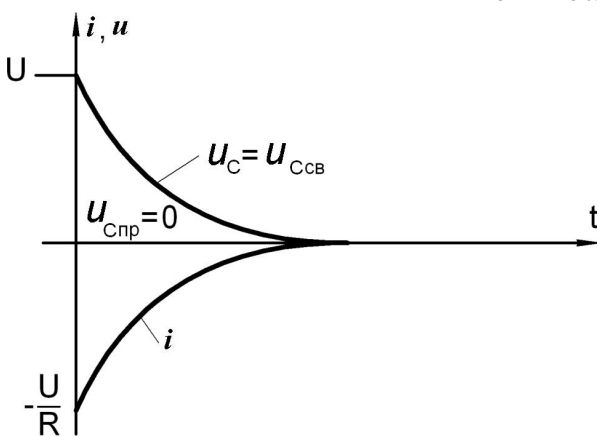


Рис.8.11

Выражение для тока разряда  $i$  в этой цепи:

$$i = C \frac{du_C}{dt} = C \cdot U \cdot \left( -\frac{1}{R \cdot C} \right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = -\frac{U}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Очевидно, чем больше  $R$  и  $C$ , тем медленнее протекает процесс разряда конденсатора (рис.8.11).

Процессы заряды и разряда конденсатора, рассмотренные в параграфах 8.3.1 и 8.3.2, называются **релаксационными**.

На основе этих процессов построены релаксационные генераторы, используемые для получения пилообразного напряжения необходимого для работы осциллографов, телевизоров и др.



### 8.3.3. Релаксационный генератор

Принципиальная схема простейшего релаксационного генератора показана на рис.8.12.

Здесь УЭ – управляющий элемент (неоновая лампа).

**Принцип работы генератора** заключается в следующем.

После замыкания ключа конденсатор медленно заряжается через большое сопротивление  $R$  с постоянной времени  $\tau_1 = R \cdot C$ . При напряжении  $u_C = u_{зак}$  проводимость неоновой лампы резко увеличивается за счет ионизации газа. Конденсатор очень быстро разряжается с постоянной времени  $\tau_2 = R_{нл} \cdot C$ , где  $R_{нл}$  – сопротивление неоновой лампы при тлеющем разряде.

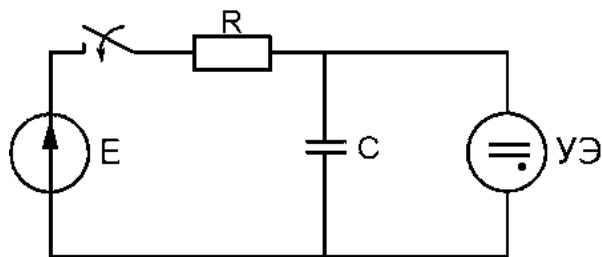


Рис.8.12

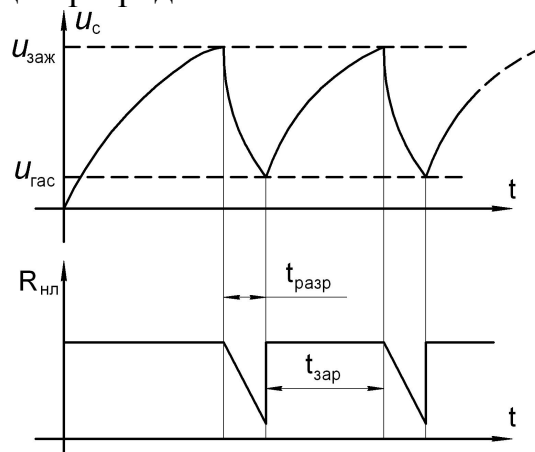


Рис.8.13

Выбирают  $R \gg R_{нл}$ , вследствие чего  $t_{зар} \gg t_{разр}$ .

При уменьшении напряжения на конденсаторе до напряжения  $U_{рас}$ , разряд в лампе прекращается, а ее сопротивление резко возрастает. В результате этого снова начинается заряд конденсатора до  $u_C = u_{зак}$ . И т.д.

Если цепь не разомкнуть, то этот процесс будет длиться бесконечно долго (рис.8.13).

### 8.4. Переходные процессы в R, L, C цепи.

#### Включение R, L, C цепи на постоянное напряжение (ЭДС)

Пусть начальные условия в цепи (рис.8.14) следующие  $u_C(0) = U$ ;  $i(0) = 0$ , что означает, что до замыкания ключа емкость была заряжена до напряжения  $U$ .

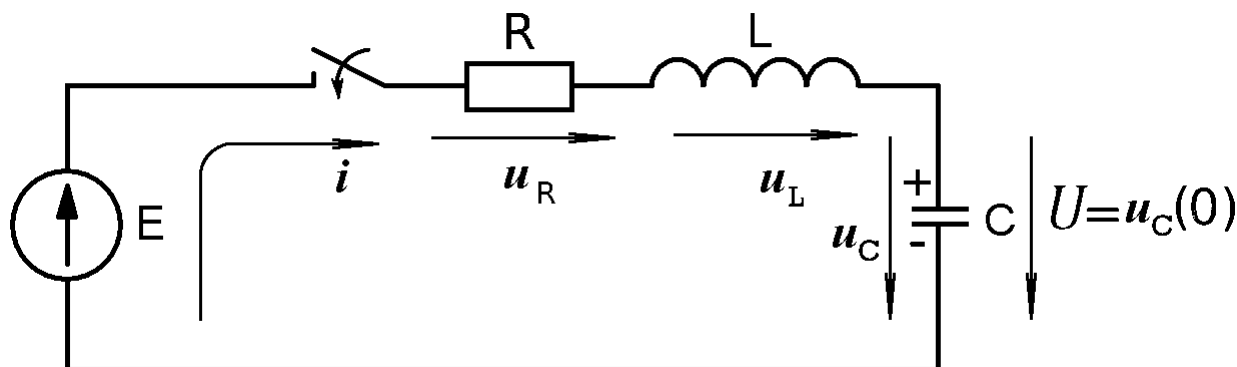


Рис.8.14

Очевидно, что эти параметры после завершения переходного процесса будут равны:

$$u_{C_{np}} = E; i_{np} = 0.$$

Это означает, что конденсатор дозарядится (или разрядится) до входного напряжения  $E$ , после чего ток заряда (разряда) прекратится.

По второму закону Кирхгофа:

$$u_L + u_R + u_C = E;$$

$$L \frac{di}{dt} + i \cdot R + u_C = E; \quad (8.10)$$

$$L \frac{di}{dt} + i \cdot R + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i dt = E. \quad (8.11)$$

Продифференцируем обе части уравнения (8.11)

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0. \quad (8.12)$$

Пусть  $i = i_{np} + i_{св}$ . Так как  $i_{np} = 0$ , значит  $i = i_{св}$ .

Решением (8.12) является

$$i = A_1 \cdot e^{p_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{p_2 \cdot t}. \quad (8.13)$$

Коэффициенты  $p_1$  и  $p_2$  находятся из характеристического уравнения, записываемого по виду уравнения (8.12):

$$L \cdot p^2 + R \cdot p + \frac{1}{C} = 0.$$

Это уравнение также можно получить, записав его по виду комплексного сопротивления  $\underline{Z}_{вх}$  относительно входных зажимов:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{вх} &= R + j \cdot \omega \cdot L + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} = 0 \text{ или} \\ \frac{R \cdot j \cdot \omega \cdot C + (j \cdot \omega)^2 \cdot L \cdot C + 1}{j \cdot \omega \cdot C} &= 0. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Умножим на  $j \cdot \omega \cdot C$  левую и правую части выражения (8.14)

$$(j \cdot \omega)^2 \cdot L \cdot C + (j \cdot \omega) R \cdot C + 1 = 0.$$

Разделим на  $C$  и заменим  $(j \cdot \omega)$  на  $p$ :

$$L \cdot p^2 + R \cdot p + \frac{1}{C} = 0.$$

Решением этого уравнения являются корни:

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2 \cdot L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2 \cdot L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta \pm \omega_{св}, \quad (8.15)$$

где  $\delta = \frac{R}{2 \cdot L}$  – коэффициент затухания;  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$  – резонансная частота;

$\omega_{св} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$  – угловая частота свободных колебаний в контуре.

Постоянные интегрирования найдем из совместного решения следующих уравнений, найденных с помощью законов коммутации.

Известно  $i|_{t=0} = 0$ . Тогда из (8.13) получим первое уравнение:

$$0 = A_1 + A_2 \quad (8.16)$$

Для получения второго уравнения выполним следующие операции. Продифференцируем обе части уравнения (8.13), получим:

$$\frac{di}{dt} = A_1 \cdot p_1 \cdot e^{p_1 \cdot t} + A_2 \cdot p_2 \cdot e^{p_2 \cdot t}.$$

Очевидно:

$$\left( \frac{di}{dt} \right) \Big|_{t=0} = A_1 \cdot p_1 + A_2 \cdot p_2 \quad (8.17)$$

Далее, подставим начальные условия в уравнение (8.10)

$$L \cdot \left( \frac{di}{dt} \right) \Big|_{t=0} + 0 \cdot R + U = E \text{ и выразим производную} \quad (8.18)$$

$$\left( \frac{di}{dt} \right) \Big|_{t=0} = \frac{E - U}{L}.$$

Сравнивая (8.17) и (8.18) получим второе уравнение для определения постоянных интегрирования и запишем систему уравнений

$$\begin{cases} A_1 \cdot p_1 + A_2 \cdot p_2 = \frac{E - U}{L} & ; \\ 0 = A_1 + A_2. \end{cases} \quad (8.19)$$

Найдем постоянные интегрирования из решения системы (8.19).

Выразим из второго уравнения  $A_2 = -A_1$  и подставим в первое

$$A_1 \cdot p_1 - A_1 \cdot p_2 = \frac{E - U}{L}.$$

Таким образом, постоянные интегрирования будут равны:

$$A_1 = \frac{\frac{E - U}{L}}{p_1 - p_2} = \frac{E - U}{L \cdot (-\delta + \gamma + \delta + \gamma)} = \frac{E - U}{2 \cdot L \cdot \gamma} = -A_2. \quad (8.20)$$

Подставим найденные значения  $p_1$  и  $p_2$ ,  $A_1$  и  $A_2$  в уравнение (8.13), получим

$$i = \frac{E - U}{2 \cdot L \cdot \gamma} \cdot e^{(-\delta + \gamma)t} - \frac{E - U}{2 \cdot L \cdot \gamma} \cdot e^{(-\delta - \gamma)t}. \quad (8.21)$$

В зависимости от величины  $\gamma = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$ , а именно, от соотношения между собой  $\delta^2$  и  $\omega_0^2$  ( $\left(\frac{R}{2 \cdot L}\right)^2$  и  $\frac{1}{L \cdot C}$ ), процесс изменения тока в R, L, C цепи может быть *апериодическим* либо *колебательным*.

#### 8.4.1. Апериодический процесс

Данный процесс наблюдается при  $\delta^2 > \omega_0^2$ , в результате чего корни уравнения  $p_{1,2}$  есть вещественные отрицательные числа  $p_1 = -\delta + \gamma$  и  $p_2 = -\delta - \gamma$ , показанные на комплексной плоскости на рис.8.15.

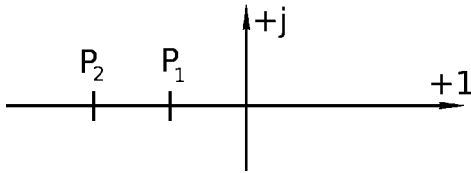


Рис.8.15

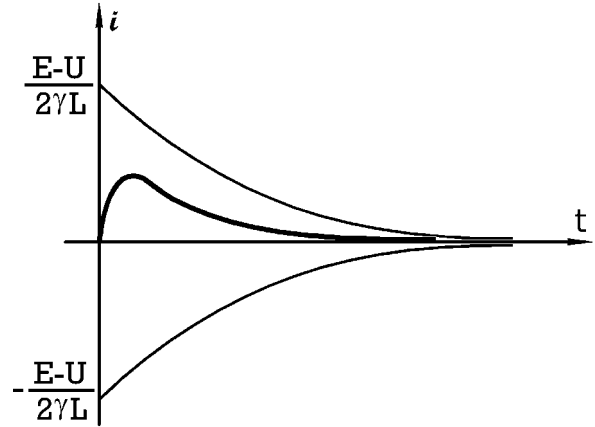


Рис.8.16

В этом случае ток  $i$  описывается уравнением (8.21), а график процесса изображен на рис.8.16.

#### 8.4.2. Колебательный процесс

При соотношении  $\delta^2 < \omega_0^2$  наблюдается колебательный процесс изменения тока в цепи. В этом случае корни  $p_{1,2}$  являются комплексными сопряженными числами  $p_1 = -\delta + j \cdot \omega_{св}$  и  $p_2 = -\delta - j \cdot \omega_{св}$ , где  $\omega_{св}$  – собственная частота свободных колебаний ( $T_{св} = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_{св}}$  – период свободных колебаний). Они располагаются симметрично относительно действительной оси в левой полуплоскости, на полуокружности, центр которой совпадает с началом координат, а радиус равен  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  (рис.8.17).

В этом случае постоянные интегрирования  $A_1$  и  $A_2$  находятся также из совместного решения системы уравнений (8.19), но для  $p_1 = -\delta + j \cdot \omega_{св}$  и  $p_2 = -\delta - j \cdot \omega_{св}$ .

В результате получим  $A_1 = \frac{E-U}{2 \cdot j \cdot \omega_{св} \cdot L} = -A_2$ .

Подставим  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $A_1$  и  $A_2$  в (8.13), получим

$$\begin{aligned} i &= \frac{E-U}{2 \cdot j \cdot \omega_{св} \cdot L} \cdot e^{(-\delta + j \cdot \omega_{св})t} - \frac{E-U}{2 \cdot j \cdot \omega_{св} \cdot L} \cdot e^{(-\delta - j \cdot \omega_{св})t} = \\ &= \frac{E-U}{2 \cdot j \cdot \omega_{св} \cdot L} \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot (e^{j \cdot \omega_{св} \cdot t} - e^{-j \cdot \omega_{св} \cdot t}) = \\ &= \frac{E-U}{\omega_{св} \cdot L} \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \frac{e^{j \cdot \omega_{св} \cdot t} - e^{-j \cdot \omega_{св} \cdot t}}{2 \cdot j} = \frac{E-U}{\omega_{св} \cdot L} \cdot \sin \omega_{св} t \cdot e^{-\delta \cdot t} \end{aligned}$$

При преобразовании была использована формула  $\frac{e^{j \cdot Z} - e^{-j \cdot Z}}{2 \cdot j} = \sin Z$ .

Временная диаграмма колебательного процесса представляет собой экспоненциально затухающую синусоиду (рис.8.18).