М. И. Андреева, Р. Е. Горелик
О. К. Чесноков, Н. В. Чигиринская

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ЗАКОНЫ ИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ВОЛГОГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

М. И. Андреева, Р. Е. Горелик
О. К. Чесноков, Н. В. Чигиринская

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ЗАКОНЫ ИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Учебно-методическое пособие

2-е издание, переработанное и дополненное

Волгоград
2019

УДК 519.2 (075)

Р е ц е н з е н т ы:

кафедра «Математическое моделирование и информатика»
Волгоградского государственного аграрного университета,
зав. кафедрой д-р техн. наук, профессор *А. Ф. Рогачев*;

доцент кафедры «Биотехнические системы и технологии»
Волгоградского государственного медицинского университета
канд. физ.-мат. наук, доцент *А. И. Киреева*

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Волгоградского государственного технического университета

Случайные величины и законы их распределения : учеб.-метод. пособие / М. И. Андреева, Р. Е. Горелик, О. К. Чесноков, Н. В. Чигиринская ; ВолгГТУ. – 2-е изд., перераб. и доп. – Волгоград, 2019. – 128 с.

ISBN 978-5-9948-3493-0

Содержит необходимый теоретический материал, варианты контрольных работ (СРС), дополнительные задания и примеры решения задач.

Предназначено для студентов всех форм обучения, изучающих дисциплины «Теория вероятностей», «Теория вероятностей и математическая статистика», «Теория вероятностей, математическая статистика и случайные процессы».

Ил. 4. Табл. 2. Библиогр.: 8 назв.

ISBN 978-5-9948-3493-0

1. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

1.1. Дискретные и непрерывные случайные величины. Основные способы задания случайных величин

1.1.1. Случайная величина. Примеры случайных величин

Одним из важнейших понятий теории вероятностей является понятие случайной величины. Под *случайной величиной (СВ)* понимается величина, которая в результате опыта принимает то или иное значение, причем заранее неизвестно, какое именно. Примерами СВ могут служить: число выстрелов до первого попадания в цель; время безотказной работы прибора; текущий курс рубля по отношению к другой валюте; количество бракованных деталей в партии; температура воздуха в определенной местности в определенное время; суммарная величина выплат страховой компании в течение определенного периода.

Приведем понятие случайной величины в теоретико-множественной трактовке.

Пусть (Ω, A, P) – произвольное вероятностное пространство. Числовая функция $X(\omega)$, определенная на пространстве элементарных событий Ω, называется случайной величиной, если для любого действительного числа x

$$(X < x) = \{\omega : X(\omega) < x\} \in \mathsf{A}, \tag{1.1}$$

где A – сигма-алгебра событий.

Если в A включаются все подмножества Ω, то (1.1) очевидно выполняется.

В дальнейшем случайные величины будем обозначать большими латинскими буквами, а принимаемые ими значения соответствующими малыми.

Для описания СВ следует задать ее возможные значения и определить соответствующие им вероятности.

Законом распределения вероятностей СВ называется любое правило, позволяющее находить вероятности всевозможных событий, связанных со случайной величиной, например, вероятность того, что она примет какое-то значение или попадет в какой-то промежуток.

1.1.2. Дискретные случайные величины

Если множество возможных значений случайной величины конечно или счетно, то такая СВ называется дискретной, ее значения могут быть перечислены и распределены в порядке возрастания.

СВ X – число попаданий в мишень при трех выстрелах – дискретна. Ее возможные значения: 0, 1, 2, 3. Другая случайная величина T – время безотказной работы прибора – не является дискретной, так как ее возможные значения целиком заполняют некоторый промежуток числовой прямой.

Простейшей формой закона распределения дискретной случайной величины X является ряд распределения – таблица, в верхней строке которой перечислены все возможные значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ или $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$ в порядке их возрастания, а в нижней – соответствующие им вероятности p_1, $p_2, \ldots, p_i, \ldots$

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

(1.2)

или

x_i	x_1	x_2	…	x_i	…
p_i	p_1	p_2	…	p_i	…

(1.3)

где
$$p_i = P(X = x_i). \tag{1.4}$$

Так как события $(X = x_1)$, $(X = x_2)$… несовместны и образуют полную группу событий, то сумма их вероятностей равна 1

$$\sum_i p_i = 1. \tag{1.5}$$

Закон распределения дискретной СВ можно задать графически, если на оси абсцисс отложить возможные значения СВ X, а на оси ординат - вероятности принятия случайной величиной этих значений. Ломаную, соединяющую последовательно точки (x_1, p_1), (x_2, p_2) … называют *многоугольником распределения*.

Схематический вид многоугольника распределения СВ X, принимающей конечное множество значений $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, изображен на рис. 1.

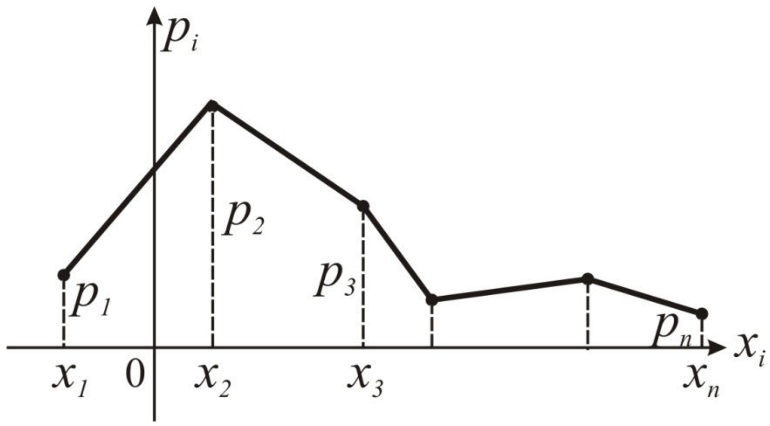


Рис. 1

1.1.3. Функция распределения

Наиболее общей формой закона распределения СВ является функция распределения вероятностей.

Функцией распределения $F(x)$ случайной величины X называется функция действительного аргумента x, значение которой для любого x равно вероятности события ($X < x$).

$$F(x) = P(X < x). \tag{1.6}$$

Функция распределения обладает следующими свойствами:

1) $0 \le F(x) \le 1, -\infty < x < \infty$;

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0$;

$\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = F(+\infty) = 1$;

3) $F(x)$ – неубывающая функция на всей числовой оси;

4) $F(x)$ – непрерывна слева, т. е.

$$\lim_{x \to x_0 - 0} F(x) = F(x_0).$$

Вероятность попадания случайной величины на произвольный промежуток действительной оси $[x_1; x_2)$ определяется формулой

$$P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1). \quad (1.7)$$

Для дискретной СВ X функция распределения $F(x)$ представляет собой разрывную ступенчатую функцию, скачки которой соответствуют возможным значениям x_1, x_2, … случайной величины X и равны вероятностям p_1, p_2, … этих значений; между скачками функция $F(x)$ сохраняет постоянное значение.

Для дискретных СВ X функция распределения $F(x)$ задается формулой

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i). \quad (1.8)$$

На рисунке 2 схематически изображен график функции распределения дискретной случайной величины X, принимающей конечное множество значений $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

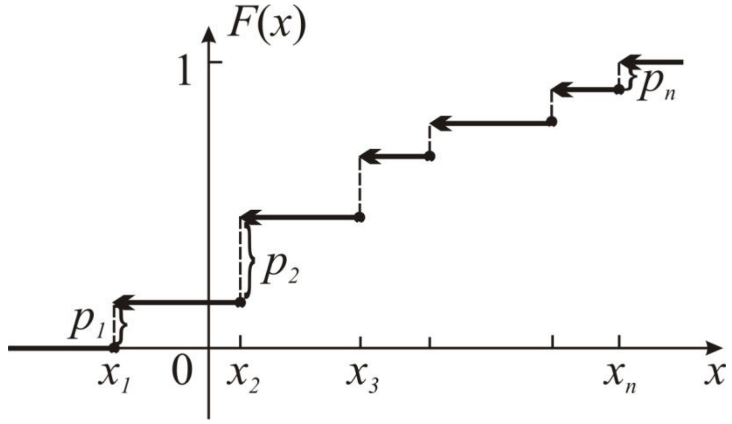


Рис. 2

1.1.4. Непрерывные и смешанные случайные величины

Многие случайные величины не являются дискретными, например: время безотказной работы прибора, погрешность измерения некоторой величины, расстояние от точки попадания до центра мишени, дальность обнаружения объекта радиолокатором. У всех этих СВ множество возможных значений совпадает с некоторым промежутком числовой прямой.

Если функция распределения $F(x)$ СВ X при любом x непрерывна и, кроме того, имеет производную $F'(x)$ везде, кроме, может быть, отдельных точек разрыва первого рода, то случайная величина называется *непрерывной*.

Если функция распределения $F(x)$ на некоторых участках непрерывно возрастает, а в отдельных точках имеет разрывы I рода, то случайная величина называется *смешанной*. Функция $F(x)$ для смешанной случайной величины, как и для дискретной, непрерывна слева.

Для непрерывной СВ X вероятность принятия этой величиной каждого отдельного значения равна нулю

$$P(X = x) = 0 \tag{1.9}$$

и справедливо утверждение

$$P(a \le X < b) = P(a < X < b) = P(a < X \le b) = P(a \le X \le b) = F(b) - F(a). \tag{1.10}$$

Для смешанной случайной величины вероятность принятия этой величиной каждого отдельного значения, принадлежащего участку непрерывности $F(x)$, также равна нулю, а вероятность принятия случайной величиной каждого из тех значений $x_1, x_2, \ldots$, в которых функция $F(x)$ совершает скачки, численно равна значениям соответствующих скачков.

Плотностью распределения вероятности (или плотностью распределения или дифференциальной функцией распределения) непрерывной СВ X называется такая неотрицательная кусочно-непрерывная функция $f(x)$, что при любых $x \in R$ выполняется равенство

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt. \qquad (1.11)$$

Для любой непрерывной СВ существует плотность распределения. Отметим важные свойства плотности распределения:

1) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1;$ (1.12)

2) $f(x)=F'(x)$ (1.13)

в точках непрерывности $F'(x)$.

Для непрерывной СВ X с плотностью распределения $f(x)$

$$P(a \le X < b)=\int_{a}^{b} f(x)dx. \qquad (1.14)$$

1.1.5. Операции над дискретными случайными величинами

Пусть заданы две дискретные случайные величины: СВ X, принимающая значения x_i с вероятностями $p_i = P(X = x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ и СВ Y, принимающая значения y_j с вероятностями $p_j = P(Y = y_j)$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Суммой (разностью, произведением) этих случайных величин называется дискретная СВ $Z = X + Y$ ($Z = X - Y$, $Z = X \cdot Y$), принимающая значения $z_{ij} = x_i + y_j$ ($z_{ij} = x_i - y_j$; $z_{ij} = x_i \cdot y_j$) с вероятностями $p_{ij} = P(X = x_i;\ Y = y_j)$ для всех указанных значений i и j. В случае совпадения некоторых сумм $x_i + y_j$ (разностей $x_i - y_j$, произведений $x_i \cdot y_j$) соответствующие вероятности складываются.

Произведением дискретной СВ X на число c называется дискретная случайная величина cX, принимающая значения cx_i с вероятностями $p_i = P(X = x_i)$.

Аналогично определяются сумма и произведение любого конечного числа дискретных случайных величин.

Две дискретные случайные величины X и Y называются *независимыми*, если события $(X = x_i) = A_i$ и $(Y = y_j) = B_j$ независимы для любых $i = 1, 2, \ldots, n$ и $j = 1, 2, \ldots, m$, то есть

$$P(X = x_i;\ Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j). \qquad (1.15)$$

В противном случае СВ X и СВ Y называются *зависимыми*. Несколько дискретных случайных величин называются *взаимно независимыми (независимыми в совокупности)*, если закон распределения любой из них не зависит от того, какие возможные значения приняли остальные величины.

1.2. Числовые характеристики случайных величин

Закон распределения полностью определяет случайную величину, однако при решении практических задач полезно знать некоторые числовые параметры, характеризующие существенные черты закона распределения случайной величины, ее числовые характеристики.

Важнейшими среди них являются характеристики положения: математическое ожидание $M(X)$, мода $M_0(X)$, медиана $M_Д(X)$ и другие; характеристики рассеивания: дисперсия $D(X)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ и другие.

1.2.1. Математическое ожидание

Математическим ожиданием дискретной СВ X называется сумма произведений всех ее возможных значений x_i на соответствующие им вероятности p_i:

$$M(X) = \sum_i x_i p_i. \qquad (1.16)$$

Если множество возможных значений СВ X счетно, то сумма, стоящая в правой части равенства будет представлять собой числовой ряд. Математическое ожидание таких СВ X будет существовать, если ряд $\sum_i^{\infty} x_i p_i$ сходится абсолютно.

Математическим ожиданием непрерывной СВ X с плотностью вероятности f(x) называется число

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx. \qquad (1.17)$$

Если $Y=\varphi(X)$ – функция случайного аргумента X, то

$$M(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)f(x)dx.$$

Если возможные значения X принадлежат интервалу $(a;в)$ или отрезку $[a;в]$, то

$$M(Y)=\int_{a}^{в}\varphi(x)f(x)dx.$$

Интеграл в правой части равенства (1.17) должен абсолютно сходиться (в противном случае для непрерывной СВ X $M(X)$ не определено).

Математическое ожидание смешанной случайной величины с функцией распределения $F(x)$ вычисляется по формуле

$$M(X)=\sum_i x_i p_i+\int_{(H)} x\cdot F'(x)dx,$$

где сумма распространяется на все точки разрыва функции распределения, а интеграл – на все участки ее непрерывности.

Математическое ожидание СВ X любого типа характеризует среднее ожидаемое значение СВ X.

1.2.2. Свойства математического ожидания

Основные свойства математического ожидания:

1) $M(c)=c$, где $c=\text{const}$;

2) $M(cX)=c\cdot M(X)$, где $c=\text{const}$;

3) $M(X+Y)=M(X)+M(Y)$;

4) $M(X_1+X_2+\ldots+X_n)=M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)$;

5) Для независимых случайных величин X и Y

$$M(X\cdot Y)=M(X)\cdot M(Y).$$

1.2.3. Дисперсия и среднее квадратическое отклонение

Дисперсией СВ X называется математическое ожидание квадрата отклонения этой СВ от ее математического ожидания.

$$D(X) = M(X - M(X))^2. \qquad (1.18)$$

Дисперсия характеризует разброс значений СВ X относительно ее математического ожидания. Из определения дисперсии следуют формулы для ее вычисления.

Для дискретной СВ X дисперсия вычисляется по формуле

$$D(X) = \sum_i (x_i - M(X))^2 \cdot p_i. \qquad (1.19)$$

Для непрерывной СВ X дисперсия находится по формуле

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 \cdot f(x)dx. \qquad (1.20)$$

С использованием свойств математического ожидания доказывается другая формула для нахождения дисперсии, которая удобна для практического применения:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2. \qquad (1.21)$$

Это соотношение позволяет записать формулы для вычисления дисперсии в другом виде:

$$D(X) = \sum_i x_i^2 \cdot p_i - (M(X))^2 \text{ для дискретной СВ } X;$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx - (M(X))^2 \text{ для непрерывной СВ } X.$$

Свойства дисперсии:

1) $D(c) = 0$, где $c = \text{const}$;

2) $D(c \cdot X) = c^2 \cdot D(X)$, где $c = \text{const}$;

3) Для независимых СВ X и СВ Y

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

4) Для независимых СВ X и СВ Y

$$D(X \cdot Y) = M(X^2) \cdot M(Y^2) - (M(X))^2 \cdot (M(Y))^2 \text{ или}$$

$$D(XY) = D(X)D(Y) + M^2(X)D(Y) + M^2(Y) \cdot D(X).$$

Средним квадратическим отклонением СВ X называется квадратный корень из ее дисперсии

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \qquad (1.22)$$

1.2.4. Центрированные и нормированные случайные величины

Центрированной случайной величиной, соответствующей СВ X называется разность между случайной величиной X и ее математическим ожиданием

$$\overset{\circ}{X} = X - M(X). \qquad (1.23)$$

Случайная величина называется *нормированной*, если ее дисперсия равна 1. Центрированная и нормированная случайная величина называется *стандартной*.

Стандартная случайная величина Z, соответствующая случайной величине X, находится по формуле:

$$Z = \frac{X - M(X)}{\sigma(X)}. \qquad (1.24)$$

1.2.5. Другие числовые характеристики

Мода дискретной СВ X определяется как такое возможное значение x_m, для которого

$$P(X = x_m) = \max_k P(X = x_k). \qquad (1.25)$$

Модой непрерывной СВ X называется действительное число $M_0(X)$, определяемое как точка максимума плотности распределения вероятностей $f(x)$.

Таким образом, мода СВ X есть ее наиболее вероятное значение, если такое значение единственно. Мода может не существовать, иметь единственное значение (унимодальное распределение) или иметь несколько значений (мультимодальное распределение).

Медианой непрерывной СВ X называется действительное число $M_D(X)$, удовлетворяющее условию

$$P(X < M_D(X)) = P(X \geq M_D(X)). \quad (1.26)$$

Начальным моментом m-го порядка СВ X (если он существует) называется действительное число α_m, определяемое по формуле

$$\alpha_m(X) = M(X^m) = \begin{cases} \sum\limits_k x_k^m \cdot p_k & \text{для дискретной СВ } X, \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^m \cdot f(x)dx & \text{для непрерывной СВ } X. \end{cases} \quad (1.27)$$

Центральным моментом m-го порядка СВ X (если он существует) называется число μ_m, определяемое по формуле

$$\mu_m(X) = M(X - M(X))^m = \begin{cases} \sum\limits_k (x_k - M(X))^m \cdot p_k & \text{для дискретной СВ} X, \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^m \cdot f(x)dx & \text{для непрерывной СВ} X. \end{cases} \quad (1.28)$$

Математическое ожидание СВ X есть ее первый начальный момент, а дисперсия – второй центральный.

Среди моментов высших порядков особое значение имеют центральные моменты 3-го и 4-го порядков.

Коэффициентом асимметрии ("скошенности") A(X) называется величина $A(X) = \dfrac{\mu_3(X)}{(\sigma(X))^3} = \dfrac{M(X - M(X))^3}{(D(X))^{3/2}}$.

Коэффициентом эксцесса ("островершинности") E(X) СВ X называется величина $E(X) = \dfrac{\mu_4(X)}{(\sigma(X))^4} - 3 = \dfrac{M(X - M(X))^4}{(D(X))^2} - 3$.

1.3. Некоторые законы распределения дискретных случайных величин

1.3.1. Геометрическое распределение

Дискретная СВ X имеет геометрическое распределение, если ее возможным значениям 0, 1, 2, …, m, … соответствуют вероятности, вычисляемые по формуле

$$P_m = P(X = m) = q^m \cdot p, \tag{1.29}$$

где $0 < p < 1$, $q = 1 - p$.

На практике геометрическое распределение встречается, когда производится ряд независимых попыток достигнуть какого-то результата A и вероятность появления события A в каждой попытке $P(A) = p$. СВ X – число бесполезных попыток (до первого опыта, в котором появится событие A), имеет геометрическое распределение с рядом распределения:

x_i	0	1	2	…	m	…
p_i	p	qp	q^2p	...	q^mp	...

и числовыми характеристиками:

$$M(X) = \frac{q}{p},\; D(X) = \frac{q}{p^2}. \tag{1.30}$$

Нередко рассматривают случайную величину $Y = X + 1$, равную числу попыток до получения результатов A, включая удавшуюся. Ряд распределения случайной величины Y имеет вид

$$Y_1 \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} 1 & 2 & 3 & \ldots & m & \ldots \\ \hline p_i & p_1 & p_2 & \ldots & q^{m-1}p & \ldots \end{array},$$

$$M(Y) = 1/p; \quad D(Y) = q/p^2. \tag{1.31}$$

Распределение случайной величины $Y = X + 1$ будем называть в дальнейшем «геометрическим распределением, начинающимся с единицы».

1.3.2. Гипергеометрическое распределение

Дискретная СВ X с возможными значениями 0, 1, …, m, …, M имеет гипергеометрическое распределение с параметрами N, M, n, если

$$p_m = P(X = m) = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}, \tag{1.32}$$

где $M \le N$, $m \le n$, $n \le N$, m, n, N, M – натуральные числа.

Гипергеометрическое распределение возникает в случаях, подобных следующему: имеется N объектов, из которых M обладают определенным признаком. Из имеющихся N объектов наудачу выбираются n объектов.

СВ X – число объектов с указанным признаком среди выбираемых, распределена по гипергеометрическому закону.

Гипергеометрическое распределение используется, в частности, при решении задач, связанных с контролем качества продукции.

1.3.3. Биномиальное распределение

Дискретная СВ X распределена по биномиальному закону, если она принимает значения 0, 1, 2, …, n с вероятностями:

$$p_m = P(X = m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}, \tag{1.33}$$

где $0 < p < 1$, $q = 1 - p$, $m = 0, 1, \ldots, n$.

Из схемы Бернулли следует, что СВ X – число появлений события A в серии из n независимых опытов, в каждом из которых событие A может появиться с вероятностью p, имеет биномиальное распределение. Для СВ X, имеющей биномиальное распределение с параметрами p и n,

$$M(X) = np, \;\; D(X) = npq. \tag{1.34}$$

Следует отметить, что гипергеометрическое распределение при n малых по сравнению с N (практически при $n < 0{,}1N$) приближается к биномиальному распределению с параметрами n и $p = \dfrac{M}{N}$.

Замечание 1. Для вычисления C_n^m при достаточно больших n и m применима формула Стирлинга:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n}.$$

Замечание 2. Для биномиальных вероятностей справедлива рекуррентная формула:

$$p_{m+1} = p(X = m+1) = \frac{p}{q} \cdot \frac{n-m}{m+1} \cdot p_m.$$

Замечание 3. Наиболее вероятное число успехов K_0 в серии из n независимых испытаний удовлетворяет неравенству:

$$np - q \le K_0 < np + p.$$

1.3.4. Предельные теоремы

При большом числе испытаний непосредственное вычисление вероятностей $P(X = m)$ и $P(m_1 \le X \le m_2)$ для СВ X, распределенной по биномиальному закону, становится громоздким, так как факториалы, входящие в формулу $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$, будут очень большими числами. В этом случае для вычисления указанных вероятностей можно использовать асимптотические (предельные) формулы.

Когда оба параметра p и q заметно отличны от 0, применяются локальная (1.35, 1.36) и интегральная формулы Муавра-Лапласа (1.38, 1.40).

$$P(X = m) \approx \frac{\varphi(x_m)}{\sqrt{npq}}, \tag{1.35}$$

где

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{1.36}$$

– плотность нормированной нормальной СВ X, а

$$x_m = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}. \tag{1.37}$$

$$P\left(m_1 \le X \le m_2\right) \approx \Phi\left(x_{m_2}\right) - \Phi\left(x_{m_1}\right), \qquad (1.38)$$

где
$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \qquad (1.39)$$

– функция Лапласа.

Имеются таблицы значений $\varphi(x)$ (таблица 1) и $\Phi(x)$ (таблица 2).

С помощью этих формул при $n \ge 100$ и $npq > 20$, как правило, удается получить искомые вероятности с точностью до трех-четырех знаков после запятой.

1.3.5. Распределение Пуассона

Дискретная СВ X называется *распределенной по закону Пуассона*, если ее возможные значения 0, 1, 2, …, m, …, а вероятность события ($X = m$) выражается формулой

$$P_m = P(X = m) = \frac{a^m}{m!} \cdot e^{-a} \quad (m = 0, 1, 2, ...), \qquad (1.40)$$

где $a > 0$. Распределение Пуассона зависит от одного параметра a. Для СВ X, распределенной по закону Пуассона,

$$M(X) = D(X) = a, \qquad (1.41)$$

то есть параметр a пуассоновского распределения равен одновременно $M(X)$ и $D(X)$. В этом состоит отличительная особенность распределения Пуассона, которая используется на практике (на основании опытных данных находят оценки для $M(X)$ и $D(X)$; если они близки между собой, то есть основание считать, что СВ X распределена по закону Пуассона).

Пуассоновское распределение является предельным для биномиального при $p \to 0$, $n \to \infty$, если $np = a = \text{const}$. Этим распределением можно пользоваться приближенно, если производится большое число независимых опытов, в каждом из которых событие A происходит с малой вероятностью. Примерами СВ X, имеющих распределение Пуассона, являются:

число опечаток в большом тексте, число бракованных деталей в большой партии; число α-частиц, испускаемых радиоактивным источником и так далее. При этом считается, что события появляются независимо друг от друга с постоянной интенсивностью, характеризующейся параметром $a = np$.

Замечание. Имеются специальные таблицы, пользуясь которыми можно найти P_m, зная m и a.

Распределение Пуассона встречается при рассмотрении потоков событий. *Потоком событий* называется последовательность однородных событий, наступающих одно за другим в случайные моменты времени.

Среднее число событий λ, приходящееся на единицу времени, называется *интенсивностью потока*. Величина λ может быть как постоянной, так и переменной $\lambda = \lambda(t)$.

Поток событий называется *потоком без последействия*, если вероятность попадания того или иного числа событий на какой-либо участок времени не зависит от того, сколько событий попало на любой другой непересекающийся с ним участок.

Поток событий называется *ординарным*, если вероятность появления на элементарном участке времени Δt двух или более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью появления одного события. Ординарный поток событий без последствия называется *пуассоновским.* Если события образуют пуассоновский поток, то число X событий, попадающих на любой участок времени $(t_0, t_0 + \tau)$, распределено по закону Пуассона:

$$p_m = \frac{a^m}{m!} \cdot e^{-a} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots),$$

где a – математическое ожидание числа событий, попадающих на участок:

$$a = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \lambda(t) dt, \tag{1.42}$$

где $\lambda(t)$ – интенсивность потока.

Если λ = const, то пуассоновский поток называется *стационарным пуассоновским* или *простейшим*. Для простейшего потока число событий, попадающих на любой участок времени длины τ, распределено по закону Пуассона с параметром $a = \lambda \cdot \tau$.

В качестве примеров потоков можно рассматривать поступления вызовов на АТС, на пункт неотложной медицинской помощи, прибытие самолетов в аэропорт, клиентов на предприятие бытового обслуживания, последовательность отказов элементов некоторого устройства.

1.4. Некоторые основные законы распределения непрерывных случайных величин

1.4.1. Равномерное распределение

Случайная величина X непрерывного типа называется *равномерно распределенной* на отрезке $[a, b]$ (подчиняется закону $R(a, b)$), если ее плотность распределения вероятности имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin [a,b] \\ \dfrac{1}{b-a}, & \text{если } x \in [a,b] \end{cases} \tag{1.43}$$

При этом для $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ справедливы формулы:

$$M(X) = \frac{a+b}{2}; \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}; \quad \sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}. \tag{1.44}$$

Равномерное распределение реализуется в экспериментах, в которых наудачу ставится точка на отрезке $[a, b]$ (X – абсцисса поставленной точки), а также в экспериментах по измерению тех или иных физических величин с округлением (здесь X – ошибка округления).

Равномерное распределение имеют ошибки грубых измерений при помощи инструментов с крупными делениями, когда измеряемое значение округляется до ближайшего целого (или до ближайшего меньшего, или до ближайшего большего). Например, ошибка (в см) измерения длины с помощью линейки с сантиметровыми делениями имеет равномерное распределение на участке $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, если округление производится до ближайшего целого, и на участке [0; 1], если до ближайшего меньшего. Также равномерное распределение имеет ошибка (в мин.) указания времени часами со скачущей минутной стрелкой $\left(\text{участок}\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]\text{или}\left[0; 1\right]\right)$. К случайным величинам, имеющим равномерное распределение, можно отнести также время ожидания пассажиром транспорта, курсирующего с определенным интервалом $[0, T]$, угол поворота φ хорошо уравновешенного колеса, если оно приводится во вращение и останавливается в результате трения.

1.4.2. Показательное распределение

Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону, если ее плотность распределения имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & \text{при } x \geq 0; \\ 0, & \text{при } x < 0. \end{cases} \qquad (1.45)$$

где λ – параметр распределения, $\lambda > 0$.

Числовые характеристики СВ X, имеющей показательное распределение вычисляются по формулам:

$$M(X) = \frac{1}{\lambda},\ D(X) = \frac{1}{\lambda^2},\ \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}. \qquad (1.46)$$

Показательное распределение часто встречается в теории массового обслуживания (время ожидания при техническом обслуживании, длительность телефонных разговоров, ежедневно регистрируемых на телефонной станции и другие), а также в теории надежности (срок безотказной работы радиоэлектронной аппаратуры).

Если имеется простейший поток событий с интенсивностью λ, то величина интервала времени T между двумя соседними событиями имеет показательное распределение с параметром λ.

1.4.3. Нормальное распределение

Непрерывная СВ X имеет нормальное распределение, если ее плотность распределения имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \tag{1.47}$$

где a и σ – параметры нормального распределения, $\sigma > 0$.

Функция распределения нормально распределенной СВ X определяется формулой:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt. \tag{1.48}$$

Числовые характеристики $M(X)$ и $D(X)$ соответственно равны: $M(X) = a$, $D(X) = \sigma^2$.

Важную роль в теории играет центрированная и нормированная СВ X, для которой $a = 0$, $\sigma = 1$. Иногда такое распределение СВ X называется *стандартным*. Плотность распределения нормальной стандартной СВ $\overset{o}{X}$ обозначается $\varphi(x)$, где

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, \tag{1.49}$$

Функция распределения стандартной СВ X имеет вид:

$$\widetilde{\Phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \tag{1.50}$$

и называется *функцией Лапласа*.

Для удобства вычислений вводят функцию

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \tag{1.51}$$

также называемую *функцией Лапласа* или *нормированной функцией Лапласа*.

Эти две функции связаны соотношениями:

$$\widetilde{\Phi}(x) = 0{,}5 + \Phi(x). \tag{1.52}$$

Функция Лапласа $\Phi(X)$ обладает свойствами:

1) $\Phi(0) = 0$, 2) $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ (нечетная функция); 3) $\Phi(+\infty) = 0{,}5$.

График плотности распределения вероятности нормально распределенной СВ X называется *нормальной кривой* или *кривой Гаусса*.

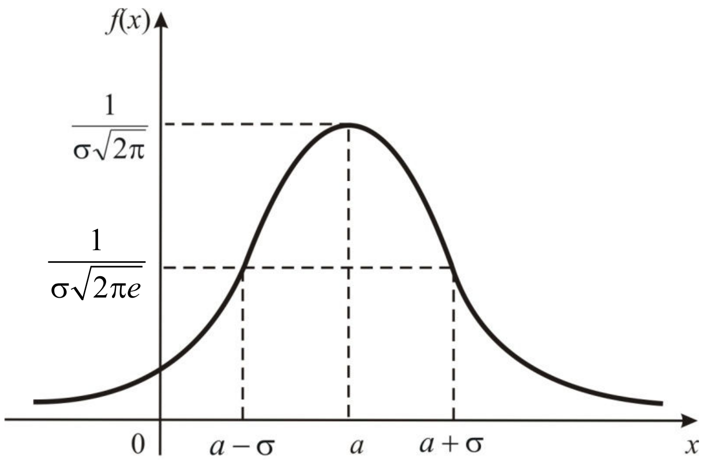


Рис. 3

Вероятность попадания значений СВ X, имеющей нормальное распределение с параметрами a и σ, на участок $(\alpha; \beta)$ выражается формулой:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right) \tag{1.53}$$

Если участок (α, β) симметричен относительно a, то вероятность попадания в него

$$P(|X-a|<l)=2\Phi\left(\frac{l}{\sigma}\right)=2\tilde{\Phi}\left(\frac{l}{\sigma}\right)-1, \quad (1.54)$$

где $l=\dfrac{\beta-\alpha}{2}$ – половина длины участка.

Нормальное распределение имеет исключительно важное значение в теории вероятностей.

Нормальному закону подчиняются при определенных условиях ошибки измерений, величины износа деталей в механизмах, ошибки стрельбы, величина шума в радиоприемном устройстве.

Главная особенность нормального закона распределения состоит в том, что он является предельным законом, к которому приближаются при определенных условиях другие законы распределения.

Например, при обработке деталей на станке-автомате, отклонение размеров деталей от номинального вызывается многими причинами. К ним относятся: колебание режима обработки, неточности установки и базировки деталей в приспособлении, износ режущего инструмента, неоднородность обрабатываемого материала, износ деталей станка и так далее. Каждая из этих причин влияет на размер деталей. Поэтому отклонение фактического размера детали от нормального можно представить как сумму большого числа отклонений, вызванных перечисленными выше причинами. Если слагаемые отклонения примерно одного порядка, то суммарное отклонение является случайной величиной, имеющей распределение, асимптотически приближающееся к нормальному.

Условия, при которых эти случайные величины $Y_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$ и $Z_n=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ асимптотически нормальны, составляют содержание различных формулировок центральной предельной теоремы для одинаково распределенных и различно распределенных случайных величин.

Теорема 1. Если случайные величины X_1, X_2, …, X_n независимы, одинаково распределены и имеют конечные $M(X_i) = a$ и $D(X_i) = \sigma^2 > 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n - n\cdot a}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) = \tilde{\Phi}(x).$$

Теорема 2 (Ляпунова). Если случайные величины X_1, X_2, …, X_n независимы и имеют конечные $M(X_i) = a_i$, $D(X_i) = \sigma_i^2$, $M\left(\left|X_i - a_i\right|^3\right) = C_i^3$, тогда

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{Y_n - M(Y_n)}{\sigma(Y_n)} < x\right) = \tilde{\Phi}(x),$$

где $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $M(Y_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i$, $\sigma(Y_n) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}$,

если $\lim_{n\to\infty} \frac{C_n}{\sigma(Y_n)} = 0$, $C_n = \sqrt[3]{\sum_{i=1}^{n} C_i^3}$.

1.5. Системы двух дискретных случайных величин

1.5.1. Таблица распределения и функция распределения системы

Во многих практических задачах результат опыта описывается не одной, а двумя или более случайными величинами. В случае двух случайных величин говорят о *системе двух случайных величин* (X, Y) (или *двумерной случайной величине* (X, Y)).

Геометрически систему двух случайных величин (X, Y) можно интерпретировать как случайную точку на плоскости.

Закон распределения системы (X, Y) двух дискретных случайных величин в случае конечного числа значений можно задать формулой

$$p_{ij} = P\left(X = x_i, Y = y_j\right),\ i = 1\ \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m \tag{1.55}$$

или с помощью таблицы с двойным ходом

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\dots$	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$	p_{2m}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\dots$	p_{nm}

(1.56)

где $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P_{ij} = 1$.

При этом

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} &= \sum_{j=1}^{m} P\left(X = x_i, Y = y_j\right) = P\left(X = x_i\right); \\ \sum_{i=1}^{n} p_{ij} &= \sum_{i=1}^{n} P\left(X = x_i, Y = y_j\right) = P\left(Y = y_j\right). \end{aligned} \quad (1.57)$$

Функцией распределения системы СВ (X, Y) называется функция $F(x, y)$, которая для любых действительных чисел x и y равна вероятности совместного появления двух событий ($X < x$) и ($Y < y$), то есть

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y), \quad (1.58)$$

где событие ($X < x$, $Y < y$) означает произведение событий ($X < x$) и ($Y < y$).

Геометрически каждое значение функции $F(x, y)$ определяет вероятность попадания случайной точки (X, Y) в заштрихованной прямой угол с вершиной в точке (x, y)

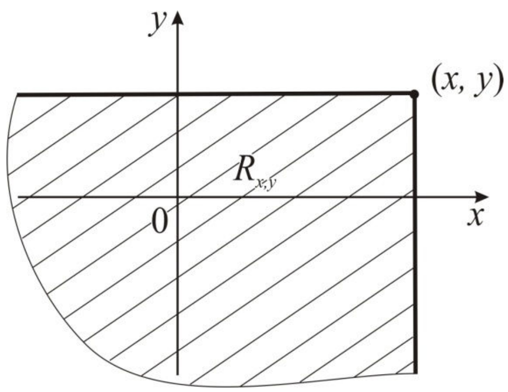


Рис. 4

Вероятность попадания случайной точки (X, Y) в прямоугольник D со сторонами, параллельными координатным осям, находится по формуле:

$$P(x_1 \le X < x_2, y_1 \le Y < y_2) = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1). \quad (1.59)$$

1.5.2. Свойства двумерной функции распределения

1. $0 \le F(x, y) \le 1$;

2. $F(x, y)$ не убывает по каждому из своих аргументов (при фиксированном другом аргументе): $F(x_2, y) \ge F(x_1, y)$ при $x_2 > x_1$;

$$F(x, y_2) \ge F(x, y_1) \text{ при } y_2 > y_1.$$

3. $F(x, y)$ непрерывна слева по каждому из своих аргументов;

4. $F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = F(-\infty, -\infty) = 0$, где, например, $F(x, -\infty)$ означает $\lim\limits_{y \to -\infty} F(x, y)$;

5. $F(+\infty, +\infty) = 1$;

6. $F(x, +\infty) = F_1(x) = F_X(x)$, $F(+\infty, y) = F_2(y) = F_Y(y)$, где $F_1(x)$ и $F_2(y)$ – функции распределения СВ X и Y соответственно.

Значение $F(x, y)$ функции распределения в случае системы (X, Y) двух дискретных СВ находится суммированием всех вероятностей p_{ij} с индексами i, j для которых $x_i < x$, $y_j < y$, т. е.

$$F(x, y) = \sum_{x_i < x} \sum_{y_j < y} p_{ij}. \quad (1.60)$$

1.5.3. Независимые случайные величины

Случайные величины X и Y называются *независимыми*, если независимыми являются события ($X < x$) и ($Y < y$) для любых действительных чисел x и y. В противном случае случайные величины называются *зависимыми*.

Из определения независимости СВ X и Y следует равенство, которое можно положить в основу равносильного определения:

$$F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y). \quad (1.61)$$

В случае системы двух дискретных случайных величин (X, Y) необходимым и достаточным условием их независимости является равенство

$$P(X = x_i,\ Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j), \tag{1.62}$$

выполняющееся для любых $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$.

1.5.4. Условные законы распределения

Условным законом распределения одной из СВ, входящих в систему (X, Y), называется закон ее распределения, найденный при условии, что другая СВ приняла определенное значение (или попала в некоторый интервал).

В частности, в случае системы двух дискретных случайных величин (X, Y) *условным законом распределения СВ Y при условии $X = x_i$* называется совокупность вероятностей

$$P\left(Y = y_j \middle| X = x_i\right) = \frac{P\left(X = x_i, Y = y_j\right)}{P\left(X = x_i\right)},\ j = 1, \ldots, m,\ i = 1, \ldots, n. \tag{1.63}$$

Аналогично определяется условный закон распределения дискретной СВ X при условии $Y = y_j$.

1.5.5. Математическое ожидание и дисперсия системы дискретных случайных величин

Математическим ожиданием двумерной СВ (X, Y) называется совокупность двух МО $M(X)$ и $M(Y)$, определяемых равенствами:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i p_{ij} \ \text{ и } \ M(Y) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} y_j p_{ij}. \tag{1.64}$$

Точка ($M(X)$, $M(Y)$) определяет центр распределения системы.

Математическое ожидание СВ $\varphi(X, Y)$, являющейся функцией компонент X и Y двумерной СВ (X, Y), для дискретного случая находится по формуле:

$$M\left(\varphi(X,Y)\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\varphi\left(x_i,y_j\right)\cdot p_{ij}. \qquad (1.65)$$

Дисперсии компонент системы СВ (X, Y) находятся по формулам:

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(x_i-a_x\right)^2 p_{ij} \text{ и } D(Y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(y_i-a_y\right)^2 p_{ij}, \qquad (1.66)$$

где

$$a_x = M(X),\ a_y = M(Y). \qquad (1.67)$$

Пара ($D(X)$, $D(Y)$) характеризует рассеивание системы.

Пусть (X, Y) – система дискретных случайных величин. *Условное математическое ожидание дискретной СВ Y при условии $X = x_i$* определяется равенством:

$$M\left(Y \mid X=x_i\right)=M\left(Y \mid x_i\right)=\sum_{i=1}^{m} y_j p\left(y_j \mid x_i\right), \qquad (1.68)$$

где

$$p(y_j \mid x_i) = p(Y = y_j \mid X = x_i). \qquad (1.69)$$

Аналогично

$$M\left(X \mid Y=y_j\right)=M\left(X \mid y_j\right)=\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p\left(x_i \mid y_j\right). \qquad (1.70)$$

1.5.6. Корреляционный момент и коэффициент корреляции

Для характеристики связи между величинами X и Y служит корреляционный момент K_{XY}, который для дискретных СВ вычисляется по формуле

$$K_{XY}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(x_i-a_x\right)\left(y_j-a_y\right)\cdot p_{ij}. \qquad (1.71)$$

Корреляционный момент можно также находить по формуле

$$K_{XY} = M(XY) - M(X)\cdot M(Y), \qquad (1.72)$$

где $M(XY)$ для дискретного случая вычисляется по формуле

$$M(XY)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j p_{ij} \qquad (1.73)$$

Если СВ X и Y независимы, то $K_{XY} = 0$. Таким образом, если $K_{XY} \neq 0$, то СВ X и Y зависимы.

Коэффициент корреляции r_{XY} двух СВ X и Y есть безразмерная величина, определяемая равенством

$$r_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}, \tag{1.74}$$

где σ_x и σ_y – средние квадратические отклонения соответственно величин X и Y.

Коэффициент корреляции характеризует степень линейной зависимости случайных величин X и Y.

1.5.7. Свойства коэффициента корреляции. Линейная среднеквадратическая регрессия

1. Коэффициент корреляции по абсолютной величине не превосходит 1, то есть $|r_{XY}| \leq 1.$

2. Если X и Y независимы, то

$$r_{XY} = 0.$$

3. Если X и Y связаны линейной зависимостью, т. е.

$$Y = aX + b,\ a \neq 0,$$

то $|r_{XY}| = 1,$ причем $r_{XY} = 1$ при $a > 0$ и $r_{XY} = -1$ при $a < 0$.

4. Если $|r_{XY}| = 1,$ то случайные величины X и Y связаны линейной функциональной зависимостью.

Пусть (X, Y) двумерная случайная величина. Представим приближенно Y в виде линейной функции величины X: $Y \simeq q(X) = \alpha X + \beta.$ Параметры α и β можно определить методом наименьших квадратов.

Линейная среднеквадратическая регрессия Y на X имеет вид

$$q(X) = m_y + r_{XY} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X - m_x), \text{ где}$$

$$m_x = M(X), \quad m_y = M(Y), \quad \sigma_x = \sqrt{D(X)}, \quad \sigma_y = \sqrt{D(Y)},$$

$r_{XY} = \dfrac{M_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$ – коэффициент корреляции величин Y на X.

Коэффициент $r_{XY} \dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$ называют коэффициентом регрессии Y на X. Уравнение прямой среднеквадратической регрессии Y на X имеет вид

$$y - m_y = r_{XY} \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - m_x),$$

а уравнение прямой среднеквадратической регрессии X на Y задается формулой

$$x - m_x = r_{XY} \frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - m_y).$$

Обе прямые регрессии проходят через точку $(m_x; m_y)$, которую называют центром совместного распределения величин X и Y.

2. РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ПРИМЕРОВ

2.1. Произвольные дискретные распределения

Пример 1. Дискретная СВ X задана рядом распределения.

X	1	2	4	6	8
P	0,3	0,2	0,1	0,3	0,1

Найти: 1) функцию распределения $F(x)$;

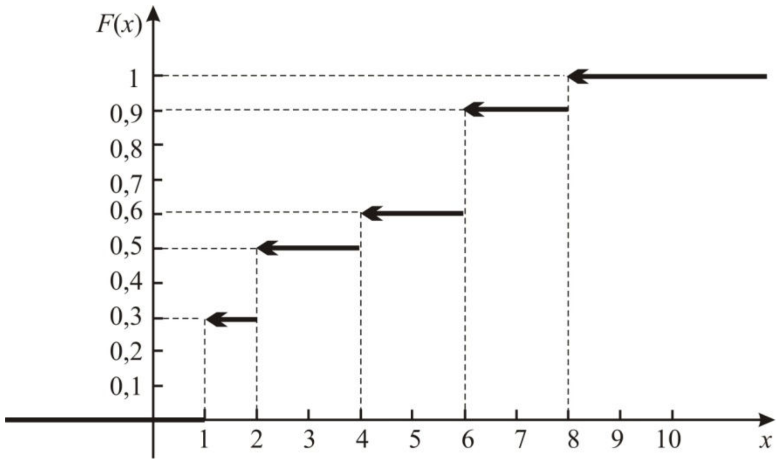
2) $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, моду $M_0(X)$;

3) $P(2 \le X < 8)$.

Решение. 1) Найдем функцию распределения $F(x)$ и построим ее график. Для дискретной СВ X по формуле (1.8)

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i).$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 1, \\ 0{,}3 \text{ при } 1 < x \le 2, \\ 0{,}5 \text{ при } 2 < x \le 4, \\ 0{,}6 \text{ при } 4 < x \le 6, \\ 0{,}9 \text{ при } 6 < x \le 8, \\ 1 \text{ при } x > 8. \end{cases}$$



2) Найдем числовые характеристики распределения ДСВ X. По определению математическое ожидание $M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$.

$$M(X) = 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,1 + 6 \cdot 0,3 + 8 \cdot 0,1 =$$
$$= 0,3 + 0,4 + 0,4 + 1,8 + 0,8 = 3,7.$$

Для вычисления дисперсии $D(X)$ используем формулу (1.21)

$$D(X) = M\left(X^2\right) - \left(M(X)\right)^2, \text{ где } M\left(X^2\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i.$$

$$M\left(X^2\right) = 1^2 \cdot 0,3 + 2^2 \cdot 0,2 + 4^2 \cdot 0,1 + 6^2 \cdot 0,3 + 8^2 \cdot 0,1 =$$
$$= 0,3 + 0,8 + 1,6 + 10,8 + 6,4 = 19,9$$
$$D(X) = 19,9 - (3,7)^2 = 6,21.$$

По формуле (1.22) найдем среднее квадратическое отклонение,

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{6,21} \approx 2,49.$$

Данное распределение является бимодальным, так как максимальная вероятность $p = 0,3$ соответствует двум значениям СВ X.

$$M_0 = 1 \text{ или } M_0 = 6$$

3) Найдем вероятность $P(2 \le X < 8)$.

При непосредственном вычислении вероятность равна

$$P(2 \le X < 8) = P(X = 2) + P(X = 4) + P(X = 6) = 0,2 + 0,1 + 0,3 = 0,6$$

Если используем функцию распределения, то получим тот же результат.

$$P(2 \le X < 8) = F(8) - F(2) = 0,9 - 0,3 = 0,6.$$

Пример 2. В партии из 10 изделий 6 изделий высшего сорта и 4 первосортных. Наудачу выбираются 3 изделия. Составить ряд распределения случайной величины X – числа изделий первого сорта среди отобранных. Найти $M(X)$ и $\sigma(X)$.

Решение. Дискретная случайная величина X может принимать следующие значения: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$. Распределение СВ X – гипергеометрическое, с параметрами $N = 10$, $M = 4$, $n = 3$.

В соответствии с общей формулой (1.31)

$$P_m = P(X = m) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$

можно утверждать, что для рассматриваемого примера

$$P_m = \frac{C_4^m C_6^{3-m}}{C_{10}^3}.$$

Используя эту формулу, получим:

$$P(X=0) = \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{6};\quad P(X=1) = \frac{C_4^1 C_6^2}{C_{10}^3} = \frac{1}{2};$$

$$P(X=2) = \frac{C_4^2 C_6^1}{C_{10}^3} = \frac{3}{10};\quad P(X=3) = \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{30}.$$

Выполним проверку:

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{3}{10} + \frac{1}{30} = 1.$$

Составим ряд распределения случайной величины X:

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

Найдем $M(X)$ по формуле (1.16)

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

$$M(X) = 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{3}{10} + \frac{3}{30} = 1{,}2.$$

По формуле (1.22)

$$\sigma(x) = \sqrt{D(X)}$$

найдем среднее квадратическое отклонение, при этом для вычисления дисперсии $D(X)$ воспользуемся формулой (1.21)

$$D(X) = M\left(X^2\right) - \left(M(X)\right)^2,\ \text{где}\ M\left(X^2\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i.$$

Тогда $M\left(X^2\right) = 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{3}{10} + 9 \cdot \frac{1}{30} = 2;$

$$D(X) = 2 - 1{,}44 = 0{,}56;\ \sigma(X) = \sqrt{0{,}56} \approx 0{,}75.$$

Пример 3. В партии из 10 изделий 6 изделий высшего сорта и 4 первосортных. Наудачу по одному, одно за другим, без возвращения в партию выбираются изделия до тех пор, пока не будет выбрано изделие высшего сорта. Составить ряд распределения случайной величины X – числа отобранных при этом изделий первого сорта. Найти $F(X)$ и $M(X)$.

Решение. Множество возможных значений дискретной случайной величины X: $\{0; 1; 2; 3; 4\}$.

Найдем вероятности, соответствующие этим значениям.

Пусть событие A_i – i-ое выбранное изделие первого сорта. Тогда $\overline{A_i}$ – i-ое выбранное изделие высшего сорта. Так как события A_i зависимые, то при определении вероятностей $P(X = x_i)$ будем использовать теорему умножения вероятностей для зависимых сомножителей.

$$P(X=0)=P(\overline{A}_1)=\frac{3}{5};$$

$$P(X=1)=P(A_1\cdot\overline{A}_2)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(\overline{A}_2)=\frac{4}{10}\cdot\frac{6}{9}=\frac{4}{15};$$

$$P(X=2)=P(A_1\cdot A_2\cdot\overline{A}_3)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)\cdot P_{A_1A_2}(\overline{A}_3)=\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{6}{8}=\frac{1}{10};$$

$$P(X=3)=P(A_1\cdot A_2\cdot A_3\cdot\overline{A}_4)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)\cdot P_{A_1A_2}(A_3)\cdot P_{A_1A_2A_3}(\overline{A}_4)=$$
$$=\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{6}{7}=\frac{1}{35};$$

$$P(X=4)=P(A_1\cdot A_2\cdot A_3\cdot A_4)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)\cdot P_{A_1A_2}(A_3)\cdot P_{A_1A_2A_3}(A_4)=$$
$$=\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{1}{7}=\frac{1}{210}.$$

Выполним проверку:

$$\frac{6}{10}+\frac{4}{15}+\frac{1}{10}+\frac{1}{35}+\frac{1}{210}=1.$$

Составим ряд распределения СВ X:

x_i	0	1	2	3	4
p_i	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{210}$

Найдем функцию распределения $F(x)$. Для этого разделим числовую ось на непересекающиеся промежутки возможными значениями случайной величины X и найдем значения $F(x)$ на каждом из промежутков, используя формулу (1.8)

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i).$$

$(-\infty; 0]$ $F(x) = P(X < x) = 0;$

$(0; 1]$ $F(x) = P(X < x) = P(X = 0) = \frac{3}{5};$

$(1; 2]$ $F(x) = P(X < x) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{3}{5} + \frac{4}{15} = \frac{13}{15};$

$(2; 3]$ $F(x) = P(X < x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{13}{15} + \frac{1}{10} = \frac{29}{30};$

$(3; 4]$ $F(x) = P(X < x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) =$
$\frac{29}{30} + \frac{1}{35} = \frac{209}{210};$

$(4; +\infty)$ $F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 1.$

Итак,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0; \\ \frac{3}{5}, & \text{при } 0 < x \le 1; \\ \frac{13}{15}, & \text{при } 1 < x \le 2; \\ \frac{29}{30}, & \text{при } 2 < x \le 3; \\ \frac{209}{210}, & \text{при } 3 < x \le 4; \\ 1 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

Найдем $M(X)$ по формуле (1.16)

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

$$M(X)=0\cdot\frac{3}{5}+1\cdot\frac{4}{15}+2\cdot\frac{1}{10}+3\cdot\frac{1}{35}+\frac{4}{210}=\frac{4}{7}.$$

2.2. Биномиальное распределение и асимптотические формулы

Пример 1. По мишени производят четыре независимых выстрела. Вероятность попасть в мишень при каждом выстреле равна 0,8.

Для СВ X – числа возможных попаданий в мишень, составить ряд распределения и найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Решение. Четыре независимых выстрела по мишени можно рассматривать как последовательность из четырех независимых испытаний, в каждом из которых событие A (попадание в мишень при одном выстреле) может появиться с вероятностью 0,8.

Поэтому СВ X имеет биномиальное распределение с параметрами p = 0,8 и n = 4. Используя формулу (1.33) $P(X=m)=C_n^m\cdot p^m\cdot q^{n-m}$, где $q = 1 - p$, получим

$$P(X=0)=C_4^0\cdot 0{,}8^0\cdot 0{,}2^4=\frac{4!}{0!\cdot 4!}\cdot 1\cdot 0{,}2^4=1\cdot 1\cdot 0{,}2^4=0{,}0016$$

$$P(X=1)=C_4^1\cdot 0{,}8^1\cdot 0{,}2^3=\frac{4!}{1!\cdot 3!}\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2^3=4\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2^3=0{,}0256$$

$$P(X=2)=C_4^2\cdot 0{,}8^2\cdot 0{,}2^2=\frac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot 0{,}8^2\cdot 0{,}2^2=6\cdot 0{,}8^2\cdot 0{,}2^2=0{,}1536$$

$$P(X=3)=C_4^3\cdot 0{,}8^3\cdot 0{,}2=\frac{4!}{3!\cdot 1!}\cdot 0{,}8^3\cdot 0{,}2=4\cdot 0{,}8^3\cdot 0{,}2=0{,}4096$$

$$P(X=4)=C_4^4\cdot 0{,}8^4\cdot 0{,}2^0=\frac{4!}{4!\cdot 0!}\cdot 0{,}8^4\cdot 1=1\cdot 0{,}8^4\cdot 1=0{,}4096$$

Поверка: $\sum p_i = 1$.

X	0	1	2	3	4
P	0,0016	0,0256	0,1536	0,4096	0,4096

Найдем числовые характеристики СВ X, распределенной по биномиальному закону.

$$M(X) = n \cdot p = 4 \cdot 0{,}8 = 3{,}2$$

$$D(X) = n \cdot p \cdot q = 4 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}64$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8$$

Пример 2. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течение времени T равна 0,001. Найти вероятность того, что за время T откажут ровно два элемента.

Пусть СВ X – число элементов, которые могут отказать за время T. Так как p мало, а n достаточно велико, то искомую вероятность вычислим приближенно по формуле Пуассона (1.41)

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \text{ где } \lambda = n \cdot p = 1000 \cdot 0{,}001 = 1.$$

$$P_{1000}(X = 2) = \frac{1^2}{2!} e^{-1} \approx 0{,}184.$$

Пример 3. Вероятность выхода из строя изделия за время испытания на надежность p = 0,05. Какова вероятность того, что за время испытаний 100 изделий выйдут из строя:

1) не менее 4 изделий,
2) ровно 5 изделий.

1) По условию $n = 100$, $p = 0{,}05$, $q = 1 - p = 0{,}95$.

Решение. Воспользуемся интегральной теоремой Муавра-Лапласа

$$P(k_1; k_2) = \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Значения функции Лапласа $\Phi(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ возьмем из таблицы 2.

$$P(4\le k)=P(4\le k\le 100)=\Phi\left(\frac{100-0{,}05\cdot 100}{\sqrt{100\cdot 0{,}05\cdot 0{,}95}}\right)-\Phi\left(\frac{4-0{,}05\cdot 100}{\sqrt{100\cdot 0{,}05\cdot 0{,}95}}\right)\approx$$

$$\approx \Phi(43{,}6)-\Phi(-0{,}46)=\Phi(43{,}6)+\Phi(0{,}46)=0{,}5+0{,}1772=0{,}6772\approx 0{,}68$$

2) Воспользуемся локальной теоремой Муавра – Лапласа (1.35)

$$P_n(k)=\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\varphi(x),\ \text{где}\ \varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\ \ x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}$$

$x=\frac{5-100\cdot 0{,}05}{\sqrt{100\cdot 0{,}05\cdot 0{,}95}}=0.$ Из таблицы находим значение функции

$$\varphi(0) = 0{,}3989.$$

$$P_{100}(5)\approx\frac{1}{\sqrt{4{,}75}}\cdot 0{,}3989\approx 0{,}183.$$

2.3. Функции одного и двух дискретных случайных аргументов. Совместное распределение двух дискретных случайных величин

Пример 1. Заданы законы распределения двух независимых величин X и Y:

x_i	1	2	3
p_i	0,3	0,5	0,2

и

y_i	1	2
p_i	0,6	0,4

Найти законы распределения случайных величин $Z = X - Y$ и $W = XY$.

Решение. Найдем возможные значения случайной величины Z. Для этого определим $z_{ij} = x_i - y_j$ и расположим найденные значения в порядке возрастания:

$$z_{11}=x_1-y_1=0,\quad z_{12}=1-2=-1,\quad z_{21}=2-1=1,\quad z_{22}=2-2=0,$$

$$z_{31}=3-1=2,\qquad z_{32}=3-2=1.$$

Множество возможных значений $CBZ:\{-1;0;1;2\}$.

Определим соответствующие им вероятности:

$p_1 = P(Z = -1) = P(X = 1,\ Y = 2) = P((X = 1) \cdot (Y = 2)) =$

$$= P(X = 1) \cdot P(Y = 2) = 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}12;$$

$p_2 = P(Z = 0) = P((X = 1,\ Y = 1) + (X = 2,\ Y = 2)) =$

$$= P(X = 1) \cdot P(Y = 1) + P(X = 2) \cdot P(Y = 2) = 0{,}3 \cdot 0{,}6 + 0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}38;$$

$p_3 = P(Z = 1) = P((X = 2,\ Y = 1) + (X = 3,\ Y = 2)) =$

$$= P(X = 2) \cdot P(Y = 1) + P(X = 3) \cdot P(Y = 2) = 0{,}5 \cdot 0{,}6 + 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}38;$$

$p_4 = P(Z = 2) = P(X = 3,\ Y = 1) = P(X = 3) \cdot P(Y = 1) = 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}12.$

При вычислении вероятностей p_i используются правила вычисления вероятностей произведения независимых событий и суммы несовместных событий.

Ряд распределения СВ Z имеет вид:

z_i	-1	0	1	2
p_i	0,12	0,38	0,38	0,12

Контроль: $\sum_{i=1}^{4} p_i = 1.$

Аналогично находим ряд распределения случайной величины $W = X \cdot Y$.

Найдем $w_{ij} = x_i y_j$: $w_{11} = 1 \cdot 1 = 1$, $w_{12} = 1 \cdot 2 = 2$, $w_{21} = 2 \cdot 1 = 2$, $w_{22} = 2 \cdot 2 = 4$, $w_{31} = 3 \cdot 1 = 3$, $w_{32} = 3 \cdot 2 = 6$.

Тогда $w_1 = w_{11} = 1$, $w_2 = w_{21} = w_{12} = 2$, $w_3 = w_{31} = 3$, $w_4 = w_{22} = 4$, $w_5 = w_{32} = 6$.

$p_1 = P(W = 1) = P(X = 1,\ Y = 1) = P(X = 1) \cdot (Y = 1) = 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}18;$

$p_2 = P(W = 2) = P((X = 1,\ Y = 2) + (X = 2,\ Y = 1)) =$

$$= P(X = 1) \cdot P(Y = 2) + P(X = 2) \cdot P(Y = 1) = 0{,}3 \cdot 0{,}4 + 0{,}5 \cdot 0{,}6 = 0{,}42;$$

$p_3 = P(W = 3) = P(X = 3,\ Y = 1) = P(X = 3) \cdot P(Y = 1) = 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}12;$

$p_4 = P(W = 4) = P(X = 2,\ Y = 2) = P(X = 2) \cdot P(Y = 2) = 0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}20;$

$p_5 = P(W = 6) = P(X = 3,\ Y = 2) = P(X = 3) \cdot P(Y = 2) = 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}08.$

Ряд распределения СВ W имеет вид:

w_i	1	2	3	4	6
p_i	0,18	0,42	0,12	0,20	0,08

Контроль: $\sum_{i=1}^{5} p_i = 1$.

Пример 2. Задана таблица распределения двумерной случайной величины (X, Y):

$X \backslash Y$	-1	1	2
1	0,15	0,2	0,25
2	0,2	0,1	0,1

Определить: а) безусловные законы распределения СВ X и Y;

б) функцию распределения $F(x; y)$ двумерной СВ $(X; Y)$;

в) $P(X \le Y)$;

г) условный закон распределения СВ Y при $X = x_2$ и $M(Y/X = x_2)$;

д) зависимость или независимость компонент X и Y;

е) центр рассеивания: точку $(M(X); M(Y))$;

ж) закон распределения случайной величины $Z = XY$;

з) коэффициент корреляции r_{xy}.

Решение. а) Суммируя вероятности в первой и второй строках таблицы, найдем вероятности возможных значений СВ X: $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$.

$P(X = x_1) = P(X = 1) = 0{,}15 + 0{,}2 + 0{,}25 = 0{,}6$;

$P(X = x_2) = P(X = 2) = 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}4$.

Суммируя вероятности в каждом из столбцов таблицы, определим вероятности соответствующих значений СВ Y: $y_1 = -1$, $y_2 = 1$, $y_3 = 2$:

$P(Y = y_1) = P(Y = -1) = 0{,}15 + 0{,}2 = 0{,}35$;

$P(Y = y_2) = P(Y = 1) = 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}3$;

$P(Y = y_3) = P(Y = 2) = 0{,}25 + 0{,}1 = 0{,}35$.

Законы распределения СВ X и Y имеют вид:

x_i	1	2
p_i	0,6	0,4

,

y_i	–1	1	2
p_i	0,35	0,3	0,35

.

б) Функцию распределения заданной двумерной СВ (X; Y) найдем, используя формулу (1.60)

$$F(x;y) = \sum_{x_i<x}\sum_{y_j<y} p_{ij}.$$

Если $x \le 1$ или $y \le -1$, то $F(x; y) = 0$ (события $(X < x)$ или $(Y < y)$ при этом являются невозможными).

Если $1 < x \le 2$ и $-1 < y \le 1$, то $F(x; y) = P(X = 1; Y = -1) = 0{,}15$.

Если $1 < x \le 2$ и $1 < y \le 2$, то $F(x; y) = P(X = 1; Y = -1) + P(X = 1; Y = 1) = 0{,}15 + 0{,}2 = 0{,}35$.

Если $1 < x \le 2$ и $y > 2$, то $F(x; y) = P(X = 1; Y = -1) + P(X = 1; Y = 1) + P(X = 1; Y = 2) = 0{,}6$.

Если $x > 2$ и $-1 < y \le 1$, то $F(x; y) = P(X = 1; Y = -1) + P(X = 2; Y = -1) = 0{,}15 + 0{,}2 = 0{,}35$.

Если $x > 2$ и $1 < y \le 2$, то $F(x; y) = P(X = 1; Y = -1) + P(X = 2; Y = -1) + P(X = 1; Y = 1) + P(X = 2; Y = 1) = 0{,}15 + 0{,}2 + 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}65$.

Если $x > 2$ и $y > 2$, то $F(x; y) = P(X = 1; Y = -1) + P(X = 2; Y = -1) + P(X = 1; Y = 1) + P(X = 2; Y = 1) + P(X = 1; Y = 2) + P(X = 2; Y = 2) = 0{,}15 + 0{,}2 + 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}25 + 0{,}1 = 1$.

Таким образом, функцию распределения данной системы дискретных случайных величин можно задать таблицей

$F(x; y) =$

при	$y \le -1$	$-1 < y \le 1$	$1 < y \le 2$	$y > 1$
$x \le 1$	0	0	0	0
$1 < x \le 2$	0	0,15	0,35	0,6
$x > 2$	0	0,35	0,65	1

в) $P(X \le Y) = P(X = 1; Y = 1) + P(X = 1; Y = 2) + P(X = 2; Y = 2) = 0{,}2 + 0{,}25 + 0{,}1 = 0{,}55$.

г) Условные вероятности значений СВ Y при $X = x_2$ найдем по формуле (1.63)

$$P\left(Y = y_j / X = x_i\right) = \frac{P\left(X = x_i, Y = y_j\right)}{P\left(X = x_i\right)};$$

$P(X = x_2) = (X = 2) = 0,4;$

$$P\left(Y = -1/X = 2\right) = \frac{0,2}{0,4} = 0,5; \; P\left(Y = 1/X = 2\right) = \frac{0,1}{0,4} = 0,25;$$

$$P\left(Y = 2/X = 2\right) = \frac{0,1}{0,4} = 0,25.$$

Таким образом условный закон распределения СВ Y при $X = 2$ имеет вид

y_j	–1	1	2
$P\left(Y = y_j / X = 2\right)$	0,5	0,25	0,25

$$M\left(Y/X = 2\right) = -1 \cdot 0,5 + 1 \cdot 0,25 + 2 \cdot 0,25 = -0,5 + 0,25 + 0,5 = 0,25.$$

д) Так как безусловный и условный законы распределения СВ Y не совпадают, то случайные величины X и Y зависимы. В этом можно было убедиться и другим способом: $P(X = 2;\ Y = 1) = 0,1$; $P(X = 2) \cdot P(Y = 1) = 0,4 \cdot 0,3 = 0,12$; $0,1 \neq 0,12$.

е) Используя найденные законы распределения составляющих X и Y вычислим $M(X)$ и $M(Y)$:

$M(X) = 1 \cdot 0,6 + 2 \cdot 0,4 = 1,4$; $M(Y) = (-1) \cdot 0,35 + 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,35 = 0,65$.

Точка (1,4; 0,65) – центр рассеивания двумерной случайной величины $(X; Y)$.

ж) Так как случайные величины X и Y зависимы, то удобнее находить закон распределения случайной величины $Z = XY$ по закону распределения двумерной СВ $(X; Y)$.

Возможные значения случайной величины Z:

$z_1 = -2$, $z_2 = -1$, $z_3 = 1$, $z_4 = 2$, $z_5 = 4$.

Определим соответствующие им вероятности:

$p_1 = P(Z = -2) = P(X = 2;\ Y = -1) = 0,2;$

$p_2 = P(Z = -1) = P(X = 1;\ Y = -1) = 0{,}15;$

$p_3 = P(Z = 1) = P(X = 1;\ Y = 1) = 0{,}2;$

$p_4 = P(Z = 2) = P(X = 2;\ Y = 1) + P(X = 1;\ Y = 2) = 0{,}1 + 0{,}25 = 0{,}35;$

$p_5 = P(Z = 4) = P(X = 2;\ Y = 2) = 0{,}1.$

Ряд распределения СВ Z имеет вид:

z_i	–2	–1	1	2	4
p_i	0,2	0,15	0,2	0,35	0,1

з) Коэффициент корреляции r_{XY} найдем по формуле (1.74)

$$r_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma_x \sigma_y},$$

используя для определения корреляционного момента K_{XY} соотношение (1.72)

$K_{XY} = M(XY) - M(X) \cdot M(Y).$

$M(XY) = M(Z) = -2 \cdot 0{,}2 - 1 \cdot 0{,}15 + 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}35 + 4 \cdot 0{,}1 = -0{,}4 - 0{,}15 +$ $+ 0{,}2 + 0{,}7 + 0{,}4 = 0{,}75.$

$M(XY)$ можно также находить по формуле (1.73) $M(XY) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i y_j p_{ij}$. При этом $M(XY) = 1(-1) \cdot 0{,}15 + 2(-1) \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 1 \cdot 0{,}1 +$ $+ 1 \cdot 2 \cdot 0{,}25 + 2 \cdot 2 \cdot 0{,}1 = -0{,}15 - 0{,}4 + 0{,}2 + 0{,}2 + 0{,}5 + 0{,}4 = 0{,}75.$

Так как $M(X) = 1{,}4$ и $M(Y) = 0{,}65$, то $K_{XY} = 0{,}75 - 1{,}4 \cdot 0{,}65 = 0{,}75 - 0{,}91 =$ $= -0{,}16.$

Вычисляем средние квадратические отклонения составляющих по формулам

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)} = \sqrt{M\left(X^2\right) - \left(M(X)\right)^2},$$

$$\sigma_y = \sqrt{D(Y)} = \sqrt{M\left(Y^2\right) - \left(M(Y)\right)^2}.$$

Так как законы распределения случайных величин X^2 и Y^2 имеют вид:

x_i^2	1	4
p_i	0,6	0,4

и

y_j^2	1	4
p_j	0,65	0,35

,

то $M(X^2) = 1 \cdot 0{,}6 + 4 \cdot 0{,}4 = 0{,}6 + 1{,}6 = 2{,}2$;

$D(X) = 2{,}2 - (1{,}4)^2 = 2{,}2 - 1{,}96 = 0{,}24$;

$M(Y^2) = 1 \cdot 0{,}65 + 4 \cdot 0{,}35 = 0{,}65 + 1{,}4 = 2{,}05$;

$D(Y) = 2{,}05 - (0{,}65)^2 = 2{,}05 - 0{,}4225 = 1{,}6275$;

$$\sigma(X) = \sigma_x = \sqrt{0{,}24};\ \sigma(Y) = \sigma_y = \sqrt{1{,}6275};\ r_{XY} = \frac{-0{,}16}{\sqrt{0{,}3666}} \approx \frac{-0{,}16}{0{,}604} \approx -0{,}26.$$

2.4. Произвольные непрерывные распределения

Пример 1. Непрерывная СВ X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ -\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{2x}{5} & \text{при } 0 \le x \le 5, \\ 1 & \text{при } x > 5. \end{cases}$$

Найти: 1) плотность распределения $f(x)$; 2) $M(X)$; 3) $P(1 < X < 2)$; 4) найти вероятность того, что в трех независимых испытаниях СВ X примет ровно два раза значения из интервала (1, 2).

Решение. 1) Найдем $f(x) = F'(x)$.

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ -\dfrac{2x}{25} + \dfrac{2}{5} & \text{при } 0 \le x \le 5, \\ 0 & \text{при } x > 5. \end{cases}$$

2) Используя формулу (1.17) для нахождения математического ожидания непрерывной СВ X, найдем

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot xdx + \int_{0}^{5} x\left(-\frac{2x}{25} + \frac{2}{5}\right)dx + \int_{5}^{+\infty} 0 \cdot xdx =$$

$$\int_{0}^{5}\left(-\frac{2x^2}{25} + \frac{2}{5}x\right)dx = \left.\left(-\frac{2x^3}{75} + \frac{x^2}{5}\right)\right|_0^5 = -\frac{10}{3} + 5 = \frac{5}{3}.$$

3) Вероятность того, что СВ X примет значения, заключенные в интервале (1, 2), по формуле (1.10) равна

$$P(1<X<2)=F(2)-F(1)=-\frac{4}{25}+\frac{4}{5}+\frac{1}{25}-\frac{2}{5}=\frac{2}{5}-\frac{3}{25}=\frac{7}{25}=0,28.$$

4) Для нахождения искомой вероятности применим формулу Бернулли. Здесь $n = 3$, $m = 2$, $p = 0{,}28$, $q = 1 - p = 0{,}72$.

$$p_3(2)=C_3^2\cdot 0,28^2\cdot 0,72=3\cdot 0,28^2\cdot 0,72\approx 0,17.$$

Пример 2. Задана функция $f(x)$

$$f(x)=\begin{cases} A\left(x^3+1\right), & x\in[0;2]\ ; \\ 0, & x\notin[0;2]\ . \end{cases}$$

Определить значение параметра A, при котором эта функция задает плотность распределения вероятности некоторой СВ X. Найти $F(X)$, $P(1 < X < 3)$, $M(X)$, $D(X)$.

Решение. Используя свойство нормированности плотности распределения $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$, определим значение параметра A, при котором данная функция задает плотность распределения вероятности некоторой непрерывной СВ X.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{0}0dx+\int\limits_{0}^{2}A\left(x^3+1\right)dx+\int\limits_{2}^{\infty}0dx=A\left.\left(\frac{x^4}{4}+x\right)\right|_0^2=A\cdot(4+2)=A\cdot 6=1\Rightarrow$$

$$A=\frac{1}{6}.$$

Тогда $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{6}\left(x^3+1\right), & x\in[0;2]\ ; \\ 0, & x\notin[0;2]\ . \end{cases}$

Найдем функцию распределения $F(x)$, используя формулу (1.10)

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

При $x \in (-\infty, 0]$ $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}0dt=0;$

при $x \in (0,\,2]$ $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dt + \frac{1}{6}\int\limits_{0}^{x}\left(t^3+1\right)dt = \frac{1}{6}\left(\frac{x^4}{4}+x\right)$;

при $x > 2$ $F(x) = \frac{1}{6}\int\limits_{0}^{2}\left(t^3+1\right)dt = \frac{1}{6}\left(\frac{t^4}{4}+t\right)\Bigg|_0^2 = \frac{1}{6}(4+2) = 1.$

Имеем $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \frac{1}{6}\left(\frac{x^4}{4}+x\right) & \text{при } 0 \le x < 2, \\ 1 & \text{при } x \ge 2. \end{cases}$

Найдем числовые характеристики:

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx = \frac{1}{6}\int\limits_{0}^{2} x\left(x^3+1\right)dx = \frac{1}{6}\left(\frac{x^5}{5}+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{1}{6}\left(\frac{32}{5}+2\right) = \frac{42}{6\cdot 5} = \frac{7}{5}.$$

$$M\left(X^2\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx = \frac{1}{6}\int\limits_{0}^{2} x^2\left(x^3+1\right)dx = \frac{1}{6}\left(\frac{x^6}{6}+\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{1}{6}\left(\frac{32}{3}+\frac{8}{3}\right) = \frac{20}{9}.$$

$$D(X) = M\left(X^2\right) - \left(M(X)\right)^2 = \frac{20}{9} - \frac{49}{25} = \frac{59}{225}.$$

$$P(1 < X < 3) = \int\limits_{1}^{3} f(x)dx = \frac{1}{6}\int\limits_{1}^{2}\left(x^3+1\right)dx + \int\limits_{2}^{3} 0dx = \frac{1}{6}\left(\frac{x^4}{4}+x\right)\Bigg|_1^2 = \frac{1}{6}\left(6-\frac{5}{4}\right) = \frac{19}{24}.$$

2.5. Нормальное, равномерное и показательное распределения

Пример 1. Математическое ожидание нормально распределенной непрерывной СВ X $M(X) = 6$, а среднее квадратическое отклонение $\sigma(X) = 2$.

Найти: 1) вероятность попадания значений СВ X в интервал (2; 9);

2) $P(|X-a| < 3)$;

3) интервал, симметричный относительно a, в который попадают значения СВ X с вероятностью $\gamma = 0{,}9642$.

Решение. 1) Найдем вероятность попадания значений СВ X в интервал (2; 9).

$$P(2 < X < 9) = \Phi\left(\frac{9-6}{2}\right) - \Phi\left(\frac{2-6}{2}\right) = \Phi(1,5) - \Phi(-2) = \Phi(1,5) + \Phi(2) \approx$$
$$\approx 0,4332 + 0,4772 = 0,9104.$$

Значения функции Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ взяты из таблицы. Учтено свойство нечетности функции $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

2) Определим вероятность $P(|X-a| < 3)$.

Так как $a = M(X) = 6$ и $\sigma = \sigma(X) = 2$, то $P(|X-a| < 3) = P(|X-6| < 3) =$

$$= 2\Phi\left(\frac{3}{2}\right) = 2\Phi(1,5) \approx 2 \cdot 0,4332 = 0,8664.$$

3) Найдем интервал, симметричный относительно a, в который попадают значения СВ X с вероятностью $\gamma = 0,9642$.

$P(|X-6| < \delta) = 2\Phi\left[\frac{\delta}{2}\right] \approx 0,9642.$ Из таблицы значений функции Лапласа находим $\frac{\delta}{2} = 2,1,$ то есть $\delta = 4,2$. Тогда $-4,2 < X - 6 < 4,2$ и $1,8 < X < 10,2$.

Пример 2. Случайная величина T (час.) – время безотказной работы прибора имеет показательное распределение. Найти вероятность того, что прибор проработает без ремонта не менее 600 часов, если среднее время безотказной работы приборов этого типа равно 400 часам.

Решение. $M(T) = 400$ час., следовательно, по формуле (1.46) $\lambda = \frac{1}{400}$.

Так как для показательного распределения $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{при } x \ge 0, \\ 0, & \text{при } x < 0, \end{cases}$ то

$$P(T \ge 600) = 1 - P(T < 600) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{600}{400}}\right) = e^{-1,5} \approx 0,223.$$

Пример 3. Случайная величина X распределена равномерно на отрезке $[a,\ b]$. Найти вероятность попадания случайной величины X на отрезок $[\alpha,\ \beta]$, целиком содержащийся внутри отрезка $[a,\ b]$.

Решение. Воспользуемся формулой $P(\alpha \le X \le \beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx,$ где плотность вероятности $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b]\ ; \\ 0, & x \notin [a,b]\ . \end{cases}$

Тогда

$$P(\alpha \le X \le \beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \cdot x \Big|_{\alpha}^{\beta} = \frac{\beta - \alpha}{b-a}.$$

Таким образом $P(\alpha \le X \le \beta) = \dfrac{\beta - \alpha}{b-a}.$

Пример 4. Электропоезда идут строго по расписанию с интервалом 20 мин. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к платформе, будет ожидать очередной электропоезд более 10 мин., а также среднее время ожидания.

Решение. X – время ожидания (мин.) электропоезда, можно считать равномерно распределенной случайной величиной с плотностью:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{20}, & x \in [0,\ 20]; \\ 0, & x \notin [0,\ 20]. \end{cases}$$

Тогда

$$P(10 \le X \le 20) = \int\limits_{10}^{20} \frac{1}{20} \cdot dx = \frac{1}{20} x \Big|_{10}^{20} = \frac{1}{20}(20 - 10) = \frac{1}{2}.$$

$M(X)=\int\limits_0^{20}\frac{1}{20}\cdot xdx=\frac{1}{20}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{20}=10$ и это среднее время ожидания электропоезда.

Пример 5. Автомат изготавливает втулки. Втулка считается годной, если отклонение X ее диаметра от проектного размера по абсолютной величине меньше 1мм. Считая, что случайная величина X распределена нормально со средним квадратическим отклонением $\sigma = 0,5$ мм и математическим ожиданием $a = 0$, найти сколько будет годных втулок среди 100 изготовленных, а так же вероятность того, что отклонение от проектного размера будет не менее 0,4 мм и не более 0,8 мм.

Решение. Воспользуемся формулой (1.54) $(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$ при $\delta = 1$, $\sigma = 0,5$ и $a = 0$.

Получим

$$P(|X|<1)=2\Phi\left(\frac{1}{0,5}\right)=2\Phi(2)=2\cdot 0,4772\approx 0,9544.$$

Отсюда следует, что примерно 95 втулок из 100 окажутся годными.

Для нахождения вероятности того, что отклонение от проектного размера будет не менее 0,4 мм и не более 0,8 мм воспользуемся формулой (1.53)

$P(\alpha\le X\le\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$ при $a = 0$, $\sigma = 0,5$, $\alpha = 0,4$, $\beta = 0,8$.

$$P(0,4\le X\le 0,8)=\Phi\left(\frac{0,8-0}{0,5}\right)-\Phi\left(\frac{0,4-0}{0,5}\right)=\Phi(1,6)-\Phi(0,8)\approx$$
$$\approx 0,4452-0,2881=0,1571.$$

Значения функции $\Phi(x)$ находим по таблице.

3. ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

ВАРИАНТ 1

Задача 1. Дискретная случайная величина X ($CB\ X$) задана рядом распределения:

x_i	8	10	15	30	40
p_i	0,1	0,2	0,3	0,1	0,3

Найти: 1) функцию распределения $F(x)$; 2) числовые характеристики: математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$, моду $M_0(X)$; 3) вероятность $P(8 \le X < 30)$. Построить многоугольник распределения и график $F(x)$.

Задача 2. Каждый из стрелков стреляет по мишени один раз. Вероятность того, что первый, второй и третий стрелки попадут в мишень при одном выстреле, соответственно равны 0,8; 0,6 и 0,9. Для $CB\ X$ – общего числа попаданий в мишень при указанных условиях, составить ряд распределения и найти $F(x)$, $M(X)$, $\sigma(X)$ и $D(X)$.

Задача 3. Вероятность появления некоторого события A в каждом опыте равна 0,6. Требуется: 1) построить ряд распределения дискретной $CB\ X$ – числа появлений события A в четырех независимых опытах; 2) оценить вероятность того, что в серии из 80 независимых опытов это событие появится не менее 60 раз.

Задача 4. Дискретная $CB\ X$ задана рядом распределения:

x_i	–2	–1	0	1	2	3	4
p_i	0,05	0,10	0,15	?	0,15	0,20	0,10

Найти ряд распределения $CB\ Y = -2X^2 + 3$, $M(Y)$ и $D(Y)$.

Задача 5. Непрерывная $CB\ X$ задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \sin x & \text{при } 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 1 & \text{при } x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти: а) плотность распределения $f(x)$; б) $M(X)$; в) $P\left(0 < X < \frac{\pi}{3}\right)$;

г) вероятность того, что в трех независимых испытаниях *СВ X* ровно два раза примет значения, принадлежащие интервалу $\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$.

Задача 6. Задана функция $f(x) = \begin{cases} A\left(2x - x^2\right), & x \in [0; 2], \\ 0, & x \notin [0; 2]. \end{cases}$

Определить значение параметра A, при котором эта функция задает плотность распределения вероятностей некоторой непрерывной *СВ X*. Найти $F(x)$, $P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right)$, $M(X)$ и $D(X)$. Построить график $F(x)$.

Задача 7. Заданы $M(X) = 14$ и $\sigma(X) = 3$ нормально распределенной непрерывной *СВ X*. Найти:

1) вероятность $P(7 < X < 19)$;

2) вероятность $P(|X - a| < 2)$;

3) симметричный относительно a интервал, в который попадают значения *СВ X* с вероятностью $\gamma = 0{,}8385$.

Задача 8. Шкала секундомера имеет цену деления 0,2 с. Отсчет времени делается с точностью до целого деления с округлением в ближайшую сторону. Ошибку отсчета при указанных условиях можно считать равномерно распределенной случайной величиной.

Найти вероятность того, что отсчет времени по этому секундомеру будет произведен с ошибкой а) менее 0,05 с; б) не менее 0,01 с и не более 0,05 с.

ВАРИАНТ 2

Задача 1. Дискретная случайная величина X ($CB\ X$) задана рядом распределения:

x_i	–2	–1	2	5	7
p_i	0,2	0,2	0,1	0,3	0,2

Найти: 1) функцию распределения $F(x)$; 2) числовые характеристики: математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$, моду $M_0(X)$; 3) вероятность $P(-2 \leq X < 5)$. Построить многоугольник распределения и график $F(x)$.

Задача 2. В лотерее 100 билетов, из которых 10 выигрышных. Некто покупает 4 билета. Для $CB\ X$ – числа выигрышных билетов среди тех, что будут куплены, составить ряд распределения и найти $F(x)$, $M(X)$, $\sigma(X)$.

Задача 3. Отчеты составляются независимо один от другого. Вероятность допустить ошибку при составлении каждого отчета равна 0,3. Требуется: 1) построить ряд распределения $CB\ X$ – числа отчетов с ошибками среди четырех составляемых; вычислить $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$; 2) оценить вероятность того, что при составлении 50 отчетов будет равно 20 отчетов с ошибками.

Задача 4. Известно, что дискретная $CB\ X$ может принимать только два значения $x_1 = -2$ и $x_2 = 3$ и ее математическое ожидание $M(X) = 1{,}5$. Составить ряды распределения $CB\ X$ и $CB\ Z = |X| - 2$. Найти $F(z)$ и $\sigma(Z)$.

Задача 5. Непрерывная $CB\ X$ задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 3, \\ \frac{1}{4}(x-3)^2 & \text{при } 3 \leq x \leq 5, \\ 1 & \text{при } x > 5. \end{cases}$$

Найти: 1) плотность распределения $f(x)$; 2) $M(X)$ и $D(X)$; 3) $P(1 < X < 4)$; 4) вероятность того, что в трех независимых испытаниях *СВ X* ровно один раз примет значение, принадлежащее интервалу (1; 4).

Задача 6. Задана функция $f(x) = \begin{cases} A\sqrt{x} & \text{при } x \in [0;1], \\ 0 & \text{при } x \notin [0;1]. \end{cases}$

Определить значение параметра A, при котором эта функция задает плотность распределения вероятностей некоторой непрерывной *СВ X*. Найти $F(x)$, $P\left(\frac{1}{2} \le X < \frac{3}{2}\right)$, $M(X)$, $D(X)$. Построить график $F(x)$.

Задача 7. Заданы $M(X) = 12$ и $\sigma(X) = 2$ нормально распределенной непрерывной *СВ X*. Найти:

1) вероятность $P(5 < X < 16)$;

2) вероятность $P(|X - a| < 3)$;

3) симметричный относительно a интервал, в который попадают значения *СВ X* с вероятностью $\gamma = 0{,}4515$.

Задача 8. Случайная ошибка измерения некоторой детали подчинена нормальному закону с параметром $\sigma = 20$ мм. Найти вероятность того, что: а) измерение детали произведено с ошибкой, не превосходящей по модулю 22 мм; б) ни в одном из двух произведенных измерений ошибка не превысит по модулю 22 мм.

ВАРИАНТ 3

Задача 1. Дискретная случайная величина X (CB X) задана рядом распределения:

x_i	1	4	5	7	9
p_i	0,3	0,1	0,1	0,4	0,1

Найти: 1) функцию распределения $F(x)$; 2) числовые характеристики: математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$, моду $M_0(X)$; 3) вероятность $P(1 \le X < 7)$. Построить многоугольник распределения и график $F(x)$.

Задача 2. Из трех спортсменов, вошедших в молодежную сборную страны на соревнованиях по прыжкам в высоту, один может пройти квалификационные старты с вероятностью 0,9, второй с вероятностью 0,8 и третий с вероятностью 0,6. Для CB X – количества спортсменов сборной, которые пройдут в следующий круг соревнований, составить ряд распределения и найти $M(X)$, $\sigma(X)$.

Задача 3. Производится серия независимых выстрелов по цели. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,8. Требуется: 1) построить ряд распределения CB X – числа попаданий при трех выстрелах; 2) оценить вероятность того, что при 100 выстрелах будет не менее 90 попаданий.

Задача 4. Дискретная случайная величина X (CB X) задана рядом распределения:

x_i	–3	–2	–1	1	4
p_i	0,1	0,2	0,3	0,2	?

Найти ряд и функцию распределения CB $Y = 2X + 1$, $M(Y)$ и $D(Y)$.

Задача 5. Непрерывная CB X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<-1, \\ \dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{3} & \text{при } -1\le x\le 2, \\ 1 & \text{при } x>2. \end{cases}$$

Найти: 1) плотность распределения $f(x)$; 2) $M(X)$ и $D(X)$; 3) $P(-2{,}3 < X < 1{,}5)$; 4) вероятность того, что в трех независимых испытаниях *СВ X* ровно два раза примет значения, принадлежащие интервалу (–2,3; 1,5).

Задача 6. Задана функция $f(x)=\begin{cases} A\cos 3x & \text{при } 0\le x\le \dfrac{\pi}{6}, \\ 0 & \text{при } x\notin\left[0;\dfrac{\pi}{6}\right]. \end{cases}$

Определить значение параметра A, при котором эта функция задает плотность распределения вероятностей некоторой непрерывной *СВ X*. Найти $F(x)$, $P\left(\dfrac{\pi}{12}\le X<\pi\right)$ и $M(X)$. Построить график $F(x)$.

Задача 7. Заданы $M(X) = 13$ и $\sigma(X) = 4$ нормально распределенной непрерывной *СВ X*. Найти:

1) вероятность $P(7<X<20)$;

2) вероятность $P(|X-a|<4)$;

3) симметричный относительно a интервал, в который попадают значения *СВ X* с вероятностью $\gamma = 0{,}9973$.

Задача 8. Известно, что время ремонта телевизора есть случайная величина X, распределенная по показательному закону, при этом среднее время ремонта телевизора составляет две недели. Найти вероятность того, что на ремонт привезенного в мастерскую телевизора потребуется: а) менее 10 дней; б) от 9 до 12 дней.

ВАРИАНТ 4

Задача 1. Дискретная случайная величина X (CB X) задана рядом распределения:

x_i	–10	–5	1	3	4
p_i	0,1	0,1	0,4	0,1	0,3

Найти: 1) функцию распределения $F(x)$; 2) числовые характеристики: математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$, моду $M_0(X)$; 3) вероятность $P(-10 \le X < 1)$. Построить многоугольник распределения и график $F(x)$.

Задача 2. У дежурного имеется 5 разных ключей от разных комнат. Вынув наудачу ключ, он пробует открыть дверь одной из комнат. Для дискретной CB X – числа попыток открыть дверь (проверенный ключ второй раз не используется) составить ряд распределения и найти $F(x)$ и $M(X)$.

Задача 3. Вероятность изготовления детали с заданными параметрами точности из стандартной заготовки для каждой детали равна 0,8.

Требуется: 1) построить ряд распределения CB X – числа деталей с заданными точностными характеристиками, которые будут изготовлены из пяти стандартных заготовок; 2) оценить вероятность того, что будет изготовлено 70 деталей с заданными точностными характеристиками из 90 заготовок.

Задача 4. Заданы законы распределения независимых дискретных CB X и Y:

x_i	1	2	3
p_i	?	0,5	0,2

y_i	2	4
p_i	0,6	?

Составить ряд распределения CB $Z = Y - X$. Найти $M(Z)$ и $D(Z)$.

Задача 5. Непрерывная CB X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<-\pi, \\ \frac{1}{2}(\cos x+1) & \text{при } -\pi \le x \le 0, \\ 1 & \text{при } x>0. \end{cases}$$

Найти: 1) плотность распределения $f(x)$; 2) $M(X)$; 3) $P\left(-\frac{\pi}{3}<X<\frac{\pi}{2}\right)$;

4) вероятность того, что в четырех независимых испытаниях *СВ* X ровно три раза примет значения, принадлежащие интервалу $\left(-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right)$.

Задача 6. Задана функция $f(x)=\begin{cases} Ax & \text{при } x\in[0;4], \\ 0 & \text{при } x\notin[0;4]. \end{cases}$

Определить значение параметра A, при котором эта функция задает плотность распределения вероятностей некоторой непрерывной *СВ* X. Найти $F(x)$, $P(-1\le X<2)$, $M(X)$ и $D(X)$. Построить график $F(x)$.

Задача 7. Заданы $M(X)$ = 16 и $\sigma(X)$ = 2 нормально распределенной непрерывной *СВ* X. Найти:

1) вероятность $P(10<X<20)$;

2) вероятность $P(|X-a|<3)$;

3) симметричный относительно a интервал, в который попадают значения *СВ* X с вероятностью γ = 0,9281.

Задача 8. Рост взрослого мужчины является *СВ* X, распределенной по нормальному закону с параметрами a = 175 см и σ = 10 см. Найти вероятность того, что рост случайно выбранного мужчины окажется: а) менее 180 см; б) не менее 170 см и не более 175 см.

ВАРИАНТ 5

Задача 1. Дискретная случайная величина X ($CB\ X$) задана рядом распределения:

x_i	20	40	50	70	80
p_i	0,2	0,1	0,4	0,2	0,1

Найти: 1) функцию распределения $F(x)$; 2) числовые характеристики: математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$, моду $M_0(X)$; 3) вероятность $P(40 \le X < 80)$. Построить многоугольник распределения и график $F(x)$.

Задача 2. Мишень состоит из круга и двух концентрических колец. Попадание в круг дает 6 очков, в кольцо 2 дает 4 очка, а попадание в кольцо 3 дает два очка. Вероятности попадания в круг и кольца 2 и 3 соответственно равны 0,2; 0,3 и 0,5. Для дискретной $CB\ X$ – суммы выбитых очков в результате трех попаданий, составить ряд распределения и найти $F(x)$, $M(X)$, $\sigma(X)$.

Задача 3. Автоматическая линия состоит из n независимо работающих однотипных станков. Вероятность того, что станок потребует наладки в течение смены для каждого станка равна 0,3. Требуется: 1) построить ряд распределения $CB\ X$ – числа станков, которым потребуется наладка в течение смены, если $n = 4$; 2) оценить вероятность того, что за смену потребуют наладки 20 станков, если $n = 100$.

Задача 4. Совместное распределение дискретных $CB\ X$ и Y задано таблицей:

X \ Y	0	4	9
1	0,20	0,15	0,10
4	0,30	0,20	0,05

Составить закон распределения $CB\ Z = Y + X$. Найти $M(Z)$ и $D(Z)$.

Задача 5. Непрерывная *СВ X* задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<4, \\ \frac{1}{2}\sqrt{x}-1 & \text{при } 4\le x\le 16, \\ 1 & \text{при } x>16. \end{cases}$$

Найти: 1) плотность распределения $f(x)$; 2) $M(X)$ и $D(X)$;

3) $P(3 < X < 9)$; 4) вероятность того, что в четырех независимых испытаниях *СВ X* ровно два раза примет значения, принадлежащие интервалу (3; 9).

Задача 6. Задана функция $f(x)=\begin{cases} A\sin x & \text{при } x\in[-\pi;0], \\ 0 & \text{при } x\notin[-\pi;0]. \end{cases}$

Определить значение параметра *A*, при котором эта функция задает плотность распределения вероятностей некоторой непрерывной *СВ X*. Найти $F(x)$, $P\left(-\frac{\pi}{4}\le X\le\frac{\pi}{4}\right)$, $M(X)$. Построить график $F(x)$.

Задача 7. Заданы $M(X) = 10$ и $\sigma(X) = 4$ нормально распределенной непрерывной *СВ X*. Найти:

1) вероятность $P(5 < X < 16)$;

2) вероятность $P(|X-a| < 2)$;

3) симметричный относительно *a* интервал, в который попадают значения *СВ X* с вероятностью $\gamma = 0{,}5161$.

Задача 8. Минутная стрелка электрических часов перемещается скачком в конце каждой минуты. Случайная величина *X* – разница между временем, показываемым на табло и истинным временем имеет равномерное распределение. Найти вероятность того, что в некоторый момент времени часы укажут время, которое отличается от истинного: а) не менее, чем на 10 с и не более, чем на 25 с; б) не менее, чем на 25 с.

ВАРИАНТ 6

Задача 1. Дискретная случайная величина X ($CB\ X$) задана рядом распределения:

x_i	–5	–3	–1	1	3
p_i	0,2	0,2	0,1	0,4	0,1

Найти: 1) функцию распределения $F(x)$; 2) числовые характеристики: математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$, моду $M_0(X)$; 3) вероятность $P(-3 \le X < 1)$. Построить многоугольник распределения и график $F(x)$.

Задача 2. В группе 12 студентов, из которых 5 живут в общежитии. По списку наудачу отбираются 4 студента. Для $CB\ X$ – количества проживающих в общежитии студентов среди тех, кто будет отобран, составить ряд распределения и найти $F(x)$, $M(X)$ и $D(X)$.

Задача 3. При изготовлении однотипных деталей на устаревшем оборудовании каждая деталь может оказаться бракованной с вероятностью 0,1. Построить ряд распределения $CB\ X$ – числа бракованных деталей среди четырех, которые будут изготовлены. Оценить вероятность того, что среди 900 изготовленных деталей бракованных будет три, если после смены оборудования вероятность брака для каждой детали станет равной 0,002.

Задача 4. Дискретная $CB\ X$ задана рядом распределения:

x_i	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
p_i	0,15	?	0,25	0,30	0,10	0,05

Найти ряд распределения $CB\ Y = 2\sin^2 X$, $M(Y)$ и $D(Y)$.

Задача 5. Непрерывная *СВ X* задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<0, \\ -\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{x}{2} & \text{при } 0\le x\le 4, \\ 1 & \text{при } x>4. \end{cases}$$

Найти: 1) плотность распределения $f(x)$; 2) $M(X)$, $\sigma(X)$; 3) $P(1 < X < 3)$; 4) вероятность того, что в четырех независимых испытаниях *СВ X* ровно два раза примет значения, принадлежащие интервалу (1; 3).

Задача 6. Задана функция $f(x)=\begin{cases} A(3-x) & \text{при } x\in[0;3], \\ 0 & \text{при } x\notin[0;3]. \end{cases}$

Определить значение параметра A, при котором эта функция задает плотность распределения вероятностей некоторой непрерывной *СВ X*. Найти $F(x)$, $P(1\le X\le 2)$, $M(X)$ и $D(X)$. Построить график $F(x)$.

Задача 7. Заданы $M(X) = 11$ и $\sigma(X) = 3$ нормально распределенной непрерывной *СВ X*. Найти:

1) вероятность $P(6<X<18)$;

2) вероятность $P(|X-a|<1)$;

3) симметричный относительно a интервал, в который попадают значения *СВ X* с вероятностью $\gamma = 0{,}9973$.

Задача 8. Срок безотказной работы телевизора данной марки представляет собой случайную величину, распределенную по нормальному закону с параметрами $a = 12$ лет и $\sigma = 2$ года. Найти вероятность того, что в телевизор проработает без ремонта: а) от 9 до 12 лет; б) не менее 10 лет.

ВАРИАНТ 7

Задача 1. Дискретная случайная величина X ($CB\ X$) задана рядом распределения:

x_i	2	4	8	10	12
p_i	0,2	0,1	0,2	0,3	0,2

Найти: 1) функцию распределения $F(x)$; 2) числовые характеристики: математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$, моду $M_0(X)$; 3) вероятность $P(2 \le X < 10)$. Построить многоугольник распределения и график $F(x)$.

Задача 2. Рабочий обслуживает 4 независимо работающих станка. Вероятность того, что в течение часа станок не потребует внимания рабочего для первого станка равна 0,7; для второго – 0, 75; для третьего – 0,8; для четвертого – 0,9. Для дискретной $CB\ X$ – число станков, которые не потребуют внимания рабочего в течение часа, составить ряд распределения и найти $F(x)$, $M(X)$ и $D(X)$.

Задача 3. Имеется n независимо работающих станков. Построить ряд распределения $CB\ X$ – числа станков, работающих в данный момент времени, если $n = 6$, а вероятность того, что станок работает в данный момент времени равна 0,9; вычислить $M(X)$ и $D(X)$. Оценить вероятность того, что на предприятии, у которого $n = 180$ и вероятность работы для каждого станка равна 0,98, число работающих в данный момент станков будет не менее 170.

Задача 4. Заданы законы распределения независимых дискретных $CB\ X$ и Y:

x_i	1	2	4
p_i	0,3	?	0,5

y_i	–2	–1
p_i	?	0,4

Составить ряд распределения $CB\ Z = XY + 2$. Найти $M(Z)$ и $D(Z)$.

Задача 5. Непрерывная $CB\ X$ задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<-\dfrac{\pi}{6}, \\ \sin x+\dfrac{1}{2} & \text{при } -\dfrac{\pi}{6}\le x\le \dfrac{\pi}{6}, \\ 1 & \text{при } x>\dfrac{\pi}{6}. \end{cases}$$

Найти: 1) плотность распределения $f(x)$; 2) $M(X)$; 3) $P\left(-\dfrac{\pi}{2}<X<0\right)$;

4) вероятность того, что в трех независимых испытаниях *СВ X* ровно один раз примет значение, принадлежащее интервалу $\left(-\dfrac{\pi}{2};\,0\right)$.

Задача 6. Задана функция $f(x)=\begin{cases} x, & x\in[0;1], \\ A(2-x), & x\in(1;2], \\ 0, & x\notin[0;2]. \end{cases}$

Определить значение параметра *A*, при котором эта функция задает плотность распределения вероятностей некоторой непрерывной *СВ X*. Найти $F(x)$, $P\left(\dfrac{1}{2}\le X\le\dfrac{3}{2}\right)$, $M(X)$ и $D(X)$. Построить график $F(x)$.

Задача 7. Заданы $M(X)=12$ и $\sigma(X)=2$ нормально распределенной непрерывной *СВ X*. Найти:

1) вероятность $P(7<X<15)$;

2) вероятность $P(|X-a|<3)$;

3) симметричный относительно *a* интервал, в который попадают значения *СВ X* с вероятностью $\gamma = 0{,}2358$.

Задача 8. Время *T* (в часах) до выхода из строя радиостанции подчинено показательному закону распределения с плотностью

$$f(t)=\begin{cases} 0{,}2\cdot e^{-0{,}2t} & \text{при } t\ge 0, \\ 0 & \text{при } t<0. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что радиостанция сохранит работоспособность: а) от 1 до 5 часов работы; б) более 4 часов работы.

ВАРИАНТ 8

Задача 1. Дискретная случайная величина X (CB X) задана рядом распределения:

x_i	–10	–8	–6	2	6
p_i	0,4	0,1	0,1	0,2	0,2

Найти: 1) функцию распределения $F(x)$; 2) числовые характеристики: математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$, моду $M_0(X)$; 3) вероятность $P(-10 \le X < 2)$. Построить многоугольник распределения и график $F(x)$.

Задача 2. Вероятность того, что стрелок попадет в мишень при одном выстреле, равна 0,8. Стрелку выдаются патроны до тех пор, пока он не промахнется, но не более 5 патронов. Для CB X – числа выстрелов, которые произведет стрелок, составить ряд распределения и найти $F(x)$, $M(X)$ и $D(X)$.

Задача 3. В техническом устройстве n независимо работающих элементов, каждый из которых за время T может отказать с вероятностью 0,15. Требуется: 1) построить ряд распределения CB X – числа элементов, которые могут отказать за время T, если $n = 5$; вычислить $M(X)$, $D(X)$; 2) оценить вероятность того, что за время T откажут ровно 13 элементов, если $n = 100$.

Задача 4. Дискретная CB X может принимать два значения: x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Известно, что $p_2 = 0{,}6$, $M(X) = 0{,}8$, $D(X) = 2{,}16$. Составить ряд распределения CB $Z = X^2 - 1$, найти $M(Z)$ и $D(Z)$.

Задача 5. Непрерывная CB X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \dfrac{x^2}{4} & \text{при } 0 \le x \le 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Найти: 1) плотность распределения $f(x)$; 2) $M(X)$ и $D(X)$; 3) $P(0 < X < 1)$; 4) вероятность того, что в пяти независимых испытаниях *СВ* X ровно три раза примет значения, принадлежащие интервалу (0; 1).

Задача 6. Задана функция

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{A}{x} & x \in [1; e], \\ 0 & x \notin [1; e]. \end{cases}$$

Определить значение параметра A, при котором эта функция задает плотность распределения вероятностей некоторой непрерывной *СВ* X. Найти $F(x)$, $P(2 \le X \le 4)$, $M(X)$ и $D(X)$. Построить график $F(x)$.

Задача 7. Заданы $M(X) = 15$ и $\sigma(X) = 3$ нормально распределенной непрерывной *СВ* X. Найти:

1) вероятность $P(9 < X < 20)$;

2) вероятность $P(|X - a| < 2)$;

3) симметричный относительно a интервал, в который попадают значения *СВ* X с вероятностью $\gamma = 0{,}4039$.

Задача 8. При штамповке деталей автоматом контролируется диаметр детали X – нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием (проектная длина), равным 60 мм и средним квадратическим отклонением $\sigma = 3$ мм. Найти вероятность того, что диаметр наудачу взятой детали окажется: а) более 61 мм; б) не менее 55 мм и не более 62 мм.

ВАРИАНТ 9

Задача 1. Дискретная случайная величина X ($CB\ X$) задана рядом распределения:

x_i	3	5	7	11	13
p_i	0,1	0,1	0,3	0,3	0,2

Найти: 1) функцию распределения $F(x)$; 2) числовые характеристики: математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$, моду $M_0(X)$; 3) вероятность $P(5 \le X < 11)$. Построить многоугольник распределения и график $F(x)$.

Задача 2. На соревнованиях по прыжкам в длину каждому участнику предоставляют по три попытки. Для одного из участников первый прыжок может быть зачетным с вероятностью 0,7, второй с вероятностью 0,8, а третий – с вероятностью 0,9. Для $CB\ X$ – числа прыжков, которые войдут в зачет для этого прыгуна, составить ряд распределения и найти $F(x)$, $M(X)$ и $D(X)$.

Задача 3. В среднем в двух случаях из пяти каждый из работающих приборов может исправно работать дольше установленного срока. Требуется: 1) построить ряд распределения дискретной $CB\ X$ – числа приборов, работающих дольше установленного срока, среди четырех приборов, взятых наудачу из большой партии; вычислить $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$; 2) оценить вероятность того, что из взятых наудачу из большой партии приборов, число таких, которые проработают дольше установленного срока, будет не менее 70 и не более 100, если $n = 200$.

Задача 4. Совместное распределение дискретных $CB\ X$ и Y задано таблицей:

X \ Y	0	2	3
1	0,15	0,20	0,10
4	0,20	0,30	0,05

Составить ряд распределения $CB\ Z = |X - Y|$. Найти $M(Z)$ и $D(Z)$.

Задача 5. Непрерывная *СВ X* задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<3, \\ \frac{1}{3}(x-2)^2-\frac{1}{3} & \text{при } 3\le x\le 4, \\ 1 & \text{при } x>4. \end{cases}$$

Найти: 1) плотность распределения $f(x)$; 2) $M(X)$ и $D(X)$; 3) $P(2 < X < 3{,}5)$; 4) вероятность того, что в четырех независимых испытаниях *СВ X* ровно три раза примет значения, принадлежащие интервалу (2; 3,5).

Задача 6. Задана функция

$$f(x)=\begin{cases} A\cos x, & x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right], \\ 0, & x\notin\left[0;\frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

Определить значение параметра A, при котором эта функция задает плотность распределения вероятностей некоторой непрерывной *СВ X*. Найти $F(x)$, $P\left(\frac{\pi}{4}\le X\le\frac{\pi}{3}\right)$, $M(X)$ и $D(X)$. Построить график $F(x)$.

Задача 7. Заданы $M(X) = 17$ и $\sigma(X) = 4$ нормально распределенной непрерывной *СВ X*. Найти:

1) вероятность $P(12 < X < 22)$;

2) вероятность $P(|X-a|<3)$;

3) симметричный относительно a интервал, в который попадают значения *СВ X* с вероятностью $\gamma = 0{,}9973$.

Задача 8. Катера отплывают от пристани с интервалом 30 мин. Пассажир, не зная расписания, подходит к пристани в произвольный момент времени. Время ожидания можно считать непрерывной случайной величиной X, имеющей равномерное распределение. Найти вероятность того, что: а) $10\le X\le 20$; б) $X\ge 15$.

ВАРИАНТ 10

Задача 1. Дискретная случайная величина X ($CB\ X$) задана рядом распределения:

x_i	–4	–2	1	3	5
p_i	0,2	0,2	0,3	0,2	0,1

Найти: 1) функцию распределения $F(x)$; 2) числовые характеристики: математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$, моду $M_0(X)$; 3) вероятность $P(-4 \le X < 3)$. Построить многоугольник распределения и график $F(x)$.

Задача 2. В группе 15 студентов, среди которых четверо имеют отличные оценки по философии. Преподаватель, не знакомый с группой, вызывает к доске трех человек. Для $CB\ X$ – количества отличников по философии среди тех, кто будет вызван, составить ряд распределения и найти $M(X)$ и $D(X)$.

Задача 3. Вероятность обрыва нити на каждом из веретен ткацкого станка в произвольный момент времени равна 0,2. Построить ряд распределения $CB\ X$ – числа обрывов нити в произвольный момент времени у четырех веретен, вычислить $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

Оценить вероятность того, что при обслуживании 800 веретен будет ровно три обрыва в произвольный момент времени, если вероятность обрыва для каждого веретена равна 0,002.

Задача 4. Дискретная $CB\ X$ задана рядом распределения:

x_i	–4	0	4	6
p_i	0,1	0,4	0,3	?

Найти: ряд распределения $CB\ Y = \frac{1}{4}|X|$, $F(y)$, $M(Y)$ и $\sigma(Y)$.

Задача 5. Непрерывная *СВ X* задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<1, \\ \dfrac{1}{2}\sqrt{x}-\dfrac{1}{2} & \text{при } 1\le x\le 9, \\ 1 & \text{при } x>9. \end{cases}$$

Найти: 1) плотность распределения $f(x)$; 2) $M(X)$ и $D(X)$; 3) $P(2 < X < 7)$; 4) вероятность того, что в четырех независимых испытаниях *СВ X* ровно два раза примет значения, принадлежащие интервалу (2; 7).

Задача 6. Задана функция

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{A}{1+x^2}, & x\in[0;1], \\ 0, & x\notin[0;1]. \end{cases}$$

Определить значение параметра A, при котором эта функция задает плотность распределения вероятностей некоторой непрерывной *СВ X*. Найти $F(x)$, $P\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}} < X < \sqrt{3}\right)$, $M(X)$ и $D(X)$. Построить график $F(x)$.

Задача 7. Заданы $M(X) = 18$ и $\sigma(X) = 5$ нормально распределенной непрерывной *СВ X*. Найти:

1) вероятность $P(11 < X < 24)$;

2) вероятность $P(|X-a| < 4)$;

3) симметричный относительно a интервал, в который попадают значения *СВ X* с вероятностью $\gamma = 0{,}7699$.

Задача 8. Случайное отклонение контролируемого размера отливаемой болванки от стандарта подчинено нормальному закону с параметрами $a = 45$ дм, $\sigma = 0{,}2$ дм. Найти вероятность того, что: а) контролируемый размер выбранной наудачу болванки не менее 44,8 дм и не более 45,2 дм; б) среди двух выбранных наудачу болванок отклонение контролируемого размера от стандарта не превзойдет 0,2 дм.

ВАРИАНТ 11

Задача 1. Дискретная случайная величина X (CB X) задана рядом распределения:

x_i	2	4	6	10	12
p_i	0,4	0,2	0,1	0,1	0,2

Найти: 1) функцию распределения $F(x)$; 2) числовые характеристики: математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$, моду $M_0(X)$; 3) вероятность $P(4 \le X < 12)$. Построить многоугольник распределения и график $F(x)$.

Задача 2. Охотник стреляет по дичи до первого попадания, но успевает сделать не более трех выстрелов. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,6. Для CB X – числа патронов, которые будут израсходованы, составить ряд распределения и найти $M(X)$ и $\sigma(X)$.

Задача 3. Некоторое событие может появиться в каждом из независимых опытов с вероятностью 0,7. Требуется: 1) построить ряд распределения CB X – числа непоявлений этого события в трех опытах, вычислить $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$; 2) оценить вероятность того, что в 100 независимых опытах число появлений этого события будет менее 20.

Задача 4. Заданы законы распределения независимых дискретных CB X и Y:

x_i	0	1	2
p_i	0,2	?	0,4

y_j	2	3
p_j	0,4	?

Составить закон распределения CB $Z = У - X$. Найти $F(z)$, $M(Z)$ и $D(Z)$.

Задача 5. Непрерывная *СВ X* задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<2,\\ \dfrac{1}{16}(x-2)^2 & \text{при } 2\le x\le 6,\\ 1 & \text{при } x>6. \end{cases}$$

Найти: 1) плотность распределения $f(x)$; 2) $M(X)$ и $D(X)$; 3) $P(1 < X < 5)$; 4) вероятность того, что в трех независимых испытаниях *СВ X* точно два раза примет значения, принадлежащие интервалу (1; 5).

Задача 6. Задана функция

$$f(x)=\begin{cases} A\sin x, & x\in[0;\pi],\\ 0, & x\notin[0;\pi]. \end{cases}$$

Определить значение параметра *A*, при котором эта функция задает плотность распределения вероятностей некоторой непрерывной *СВ X*. Найти $F(x)$, $P\left(\dfrac{\pi}{4}\le X\le\dfrac{\pi}{2}\right)$, $M(X)$. Построить график $F(x)$.

Задача 7. Заданы $M(X) = 21$ и $\sigma(X) = 6$ нормально распределенной непрерывной *СВ X*. Найти:

1) вероятность $P(14 < X < 30)$;

2) вероятность $P(|X-a| < 5)$;

3) симметричный относительно *a* интервал, в который попадают значения *СВ X* с вероятностью $\gamma = 0{,}6872$.

Задача 8. Время ожидания обслуживания у автозаправочной станции является случайной величиной *X*, распределенной по показательному закону со средним временем ожидания 4 мин. Найти вероятность следующих событий: а) 2 мин. $\le X \le$ 6 мин.; б) $X \ge 5$ мин.

ВАРИАНТ 12

Задача 1. Дискретная случайная величина X ($CB\ X$) задана рядом распределения:

x_i	–7	–5	–4	–3	1
p_i	0,1	0,2	0,3	0,2	0,2

Найти: 1) функцию распределения $F(x)$; 2) числовые характеристики: математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$, моду $M_0(X)$; 3) вероятность $P(-5 \le X < 1)$. Построить многоугольник распределения и график $F(x)$.

Задача 2. Испытуемый прибор состоит из четырех элементов. Вероятность отказа за время t элемента с номером i $p_i = 0{,}2 + 0{,}1(i-1)$. Для $CB\ X$ – числа элементов, которые откажут за время t, составить ряд распределения и найти $F(x)$, $M(X)$ и $\sigma(X)$.

Задача 3. При каждом из нескольких независимых выстрелов вероятность попадания в цель равна 0,7. Требуется: 1) построить ряд распределения $CB\ X$ – числа непопаданий в цель при четырех выстрелах; вычислить $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$; 2) оценить вероятность того, что при 80 выстрелах будет 30 непопаданий.

Задача 4. Дискретная $CB\ X$ задана рядом распределения:

x_i	–2	–1	0	1	2	3	4
p_i	0,05	?	0,15	0,25	0,15	0,20	0,10

Составить ряд распределения $CB\ T = \cos\dfrac{\pi X}{3} + 1$, найти $M(T)$ и $D(T)$.

Задача 5. Непрерывная $CB\ X$ задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < \dfrac{\pi}{4}, \\ -\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + 1 & \text{при } \dfrac{\pi}{4} \le x \le \dfrac{3\pi}{4}, \\ 1 & \text{при } x > \dfrac{3\pi}{4}. \end{cases}$$

Найти: 1) плотность распределения $f(x)$; 2) $M(X)$; 3) $P\left(0 < X < \frac{\pi}{2}\right)$;

4) вероятность того, что в четырех независимых испытаниях *СВ X* ровно три раза примет значения, принадлежащие интервалу $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Задача 6. Задана функция

$$f(x) = \begin{cases} \frac{A}{x}, & x \in [1; e], \\ 0, & x \notin [1; e]. \end{cases}$$

Определить значение параметра A, при котором эта функция задает плотность распределения вероятностей некоторой непрерывной *СВ X*. Найти $F(x)$, $P\left(\frac{1}{e} \le X < 2\right)$, $M(X)$ и $\sigma(X)$. Построить график $F(x)$.

Задача 7. Заданы $M(X) = 12$ и $\sigma(X) = 3$ нормально распределенной непрерывной *СВ X*. Найти:

1) вероятность $P(8 < X < 16)$;

2) вероятность $P(|X - a| < 3)$;

3) симметричный относительно a интервал, в который попадают значения *СВ X* с вероятностью $\gamma = 0{,}9973$.

Задача 8. Масса обитающих в Байкале омулей есть случайная величина X, подчиненная нормальному закону с параметрами $a = 450$ г (средний вес) и $\sigma = 20$ г. Найти вероятность того, что масса выловленного омуля составит: а) более 400 г; б) от 390 г до 470 г.

ВАРИАНТ 13

Задача 1. Дискретная случайная величина X (CB X) задана рядом распределения:

x_i	10	12	14	16	20
p_i	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Найти: 1) функцию распределения $F(x)$; 2) числовые характеристики: математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$, моду $M_0(X)$; 3) вероятность $P(12 \le X < 20)$. Построить многоугольник распределения и график $F(x)$.

Задача 2. В коробке имеется 10 теннисных мячей, из которых 5 новых. Наудачу из коробки вынимают 4 мяча. Для CB X – числа новых мячей среди тех, что будут отобраны, составить ряд распределения и найти $F(x)$ и $\sigma(X)$.

Задача 3. Проводятся несколько независимых расчетов. При проведении каждого расчета вероятность допустить ошибку равна 0,2. 1) Построить ряд распределения CB X – числа расчетов без ошибок среди пяти проводимых; вычислить $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$. 2) Оценить вероятность того, что при проведении 100 расчетов число расчетов без ошибок будет не менее 90.

Задача 4. Задан закон распределения вероятностей дискретной двумерной случайной величины:

Y	X			
	26	30	41	50
2	0,05	0,12	0,08	0,04
3	0,09	0,30	0,11	0,21

Найти: 1) законы распределения составляющих X и Y; 2) закон распределения CB $Z = X + Y$, $M(Z)$ и $D(Z)$.

Задача 5. Непрерывная *СВ X* задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{при } x<1, \\ \dfrac{1}{20}x^2-\dfrac{1}{20}x \quad \text{при } 1\le x\le 5, \\ 1 \quad \text{при } x>5. \end{cases}$$

Найти: 1) плотность распределения $f(x)$; 2) $M(X)$ и $\sigma(X)$; 3) $P(2 < X < 4)$; 4) вероятность того, что в четырех независимых испытаниях *СВ X* ровно два раза примет значения, принадлежащие интервалу (2; 4).

Задача 6. Задана функция

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{A}{4+x^2}, & x\in\left[0;2\sqrt{3}\right], \\ 0, & x\notin\left[0;2\sqrt{3}\right]. \end{cases}$$

Определить значение параметра A, при котором эта функция задает плотность распределения вероятностей некоторой непрерывной *СВ X*. Найти: $F(x)$, $P\left(0\le X<\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$, $M(X)$ и $\sigma(X)$. Построить график $F(x)$.

Задача 7. Заданы $M(X) = 10$ и $\sigma(X) = 2$ нормально распределенной непрерывной *СВ X*. Найти:

1) вероятность $P(7<X<13)$;

2) вероятность $P(|X-a|<2)$;

3) симметричный относительно a интервал, в который попадают значения *СВ X* с вероятностью $\gamma = 0{,}9722$.

Задача 8. Время работы сотового телефона без подзарядки – случайная величина, имеющая показательный закон распределения. Найти вероятность того, что телефон проработает без подзарядки: а) от 2 до 4 дней; б) более 3 дней, если среднее время работы телефона без подзарядки равно 4 дням.

ВАРИАНТ 14

Задача 1. Дискретная случайная величина X ($CB\ X$) задана рядом распределения:

x_i	–8	–4	–2	2	5
p_i	0,2	0,2	0,2	0,1	0,3

Найти: 1) функцию распределения $F(x)$; 2) числовые характеристики: математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$, моду $M_0(X)$; 3) вероятность $P(-8 \le X < -2)$. Построить многоугольник распределения и график $F(x)$.

Задача 2. Для контроля качества партии из 5 приборов производятся последовательные испытания приборов на надежность. Каждый следующий прибор испытывается только в том случае, если предыдущий оказался надежным. Вероятность выдержать испытание для каждого прибора равна 0,9. Для $CB\ X$ – числа испытаний, которые будут произведены, составить ряд распределения и найти $M(X)$ и $\sigma(X)$.

Задача 3. Вероятность оказаться бракованной для каждой из независимо изготовленных на производственном участке деталей равна 0,05. Построить ряд распределения $CB\ X$ – числа годных деталей среди пяти изготовленных; вычислить $M(X)$ и $\sigma(X)$.

Оценить вероятность того, что среди 1000 производимых деталей окажутся ровно две бракованные, если вероятность оказаться бракованной для каждой детали будет равна 0,003.

Задача 4. Дискретная $CB\ X$ задана рядом распределения:

x_i	–2	–1	2	7
p_i	0,2	0,3	?	0,1

Найти: 1) ряд и функцию распределения $CB\ Y = \sqrt{X+2}$; 2) $M(Y)$ и $D(Y)$.

Задача 5. Непрерывная *СВ X* задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<-1, \\ x^3+1 & \text{при } -1\le x\le 0, \\ 1 & \text{при } x>0. \end{cases}$$

Найти: 1) плотность распределения $f(x)$; 2) $M(X)$ и $\sigma(X)$; 3) $P\left(-2<X<-\frac{1}{2}\right)$; 4) вероятность того, что в четырех независимых испытаниях *СВ X* ровно три раза примет значения, принадлежащие интервалу $\left(-2;-\frac{1}{2}\right)$.

Задача 6. Задана функция $f(x)=\begin{cases} A\sqrt{x}, & x\in[0;4], \\ 0, & x\notin[0;4]. \end{cases}$

Определить значение параметра A, при котором эта функция задает плотность распределения вероятностей некоторой непрерывной *СВ X*. Найти $F(x)$, $P\left(\frac{1}{4}\le X<1\right)$, $M(X)$ и $D(X)$. Построить график $F(x)$.

Задача 7. Заданы $M(X) = 13$ и $\sigma(X) = 3$ нормально распределенной непрерывной *СВ X*. Найти:

1) вероятность $P(9<X<17)$;

2) вероятность $P(|X-a|<3)$;

3) симметричный относительно a интервал, в который попадают значения *СВ X* с вероятностью $\gamma = 0{,}8664$.

Задача 8. Один из размеров детали, произведенной станком с числовым программным управлением, есть случайная величина X, подчиненная нормальному закону с параметрами $a = 10$ см и $\sigma = 0{,}2$ см. Найти вероятность того, что: а) размер произведенной детали будет отличаться от среднего по модулю не более, чем на σ; б) размер произведенной детали будет не менее 9,6 см и не более 10,1 см.

ВАРИАНТ 15

Задача 1. Дискретная случайная величина X ($CB\ X$) задана рядом распределения:

x_i	2	5	7	9	13
p_i	0,1	0,2	0,3	0,2	0,2

Найти: 1) функцию распределения $F(x)$; 2) числовые характеристики: математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$, моду $M_0(X)$; 3) вероятность $P(5 \le X < 13)$. Построить многоугольник распределения и график $F(x)$.

Задача 2. В партии из 8 деталей имеется 6 деталей первого сорта и 2 детали второго сорта. Наудачу, одна за другой без возращения в партию, отбираются детали до тех пор, пока не будет выбрана деталь первого сорта. Для $CB\ X$ – числа отобранных при этом деталей второго сорта, составить ряд распределения и найти $F(x)$, $M(X)$ и $\sigma(X)$.

Задача 3. На участке независимо друг от друга работают n однотипных станков. Вероятность того, что станок потребует наладки в течение смены для каждого станка равна 0,4.

1) Построить ряд распределения $CB\ X$ – числа станков, которые не потребуют наладки в течение смены среди трех работающих; вычислить $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

2) Оценить вероятность того, что число станков, которые не потребуют наладки в течение смены, будет не менее 50 и не более 70, если $n = 100$.

Задача 4. Дискретная $CB\ X$ задана рядом распределения:

x_i	–4	0	4	6
p_i	?	0,4	0,3	0,2

Найти: 1) ряд и функцию распределения $CB\ Y = 2X + 1$;

2) $M(Y)$ и $D(Y)$.

Задача 5. Непрерывная *СВ X* задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<0, \\ \dfrac{1}{15}(x+1)^2-\dfrac{1}{15} & \text{при } 0\le x\le 3, \\ 1 & \text{при } x>3. \end{cases}$$

Найти: 1) плотность распределения $f(x)$; 2) $M(X)$ и $\sigma(X)$; 3) $P(1<X<2)$; 4) вероятность того, что в четырех независимых испытаниях *СВ X* точно один раз примет значение, принадлежащее интервалу (1, 2).

Задача 6. Задана функция $f(x)=\begin{cases} Ax^2, & x\in[0;2], \\ 0, & x\notin[0;2]. \end{cases}$

Определить значение параметра *A*, при котором эта функция задает плотность распределения вероятностей некоторой непрерывной *СВ X*. Найти $F(x)$, $P(-1<X\le 1)$, $M(X)$ и $D(X)$. Построить график $F(x)$.

Задача 7. Заданы $M(X)=14$ и $\sigma(X)=2$ нормально распределенной непрерывной *СВ X*. Найти:

1) вероятность $P(11<X<18)$;

2) вероятность $P(|X-a|<4)$;

3) симметричный относительно *a* интервал, в который попадают значения *СВ X* с вероятностью $\gamma=0{,}9973$.

Задача 8. Испытываются два независимо работающих элемента. Длительность времени безотказной работы элемента имеет показательное распределение со средним значением для 1-го элемента 20 часов, 2-го – 25 часов. Найти вероятность того, что: за промежуток времени длительностью 10 часов: а) оба элемента будут работать; б) откажет только один элемент; в) хотя бы один элемент откажет.

ВАРИАНТ 16

Задача 1. Дискретная случайная величина X ($CB\ X$) задана рядом распределения:

x_i	–2	–1	1	4	5
p_i	0,2	0,3	0,2	0,2	0,1

Найти: 1) функцию распределения $F(x)$; 2) числовые характеристики: математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$, моду $M_0(X)$; 3) вероятность $P(-1 \le X < 4)$. Построить многоугольник распределения и график $F(x)$.

Задача 2. Три исследователя, независимо один от другого, производят измерения некоторой физической величины. Вероятность того, что первый исследователь допустит ошибку при считывании показаний прибора, равна 0,1. Для второго и третьего исследователей эта вероятность соответственно равна 0,15 и 0,2. X – количество ошибок, которые допустят все исследователи при однократном измерении этой величины. Для $CB\ X$ составить ряд распределения и найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

Задача 3. Изделие с заданными характеристиками можно изготовить из каждой заготовки с вероятностью 0,7. Построить ряд распределения $CB\ X$ – числа изделий с нарушением заданных характеристик, которые можно изготовить из четырех заготовок, вычислить $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$. Оценить вероятность того, что число изделий с нарушением заданных характеристик, производимых из 160 заготовок, будет не менее 20 и не более 80.

Задача 4. Дискретная $CB\ X$ задана рядом распределения:

x_i	–4	0	4	6
p_i	?	0,4	0,3	0,2

Найти: 1) ряд распределения $CB\ Z = X - M(X)$; 2) функцию распределения $F(z)$; 3) $M(Z)$ и $D(Z)$.

Задача 5. Непрерывная *СВ X* задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{при } x<\dfrac{\pi}{6}, \\ -\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+1 \quad \text{при } \dfrac{\pi}{6}\le x\le\dfrac{2\pi}{3}, \\ 1 \quad \text{при } x>\dfrac{2\pi}{3}. \end{cases}$$

Найти: 1) плотность распределения $f(x)$; 2) $M(X)$; 3) вероятность того, что *СВ X* примет значение в интервале $\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$; 4) вероятность того, что в трех независимых испытаниях *СВ X* ровно два раза примет значения, принадлежащие интервалу $\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$. Построить графики $F(x)$ и $f(x)$.

Задача 6. Задана функция $f(x)=\begin{cases} A(3-x), & x\in[0;3], \\ 0, & x\notin[0;3]. \end{cases}$

Определить значение параметра A, при котором эта функция задает плотность распределения вероятностей некоторой непрерывной *СВ X*. Найти $F(x)$, $P(2\le X<4)$, $M(X)$, $D(X)$. Построить график $F(x)$.

Задача 7. Заданы $M(X)=16$ и $\sigma(X)=3$ нормально распределенной непрерывной *СВ X*. Найти:

1) вероятность $P(12<X<20)$;

2) вероятность $P(|X-a|<2)$;

3) симметричный относительно a интервал, в который попадают значения *СВ X* с вероятностью $\gamma=0{,}6319$.

Задача 8. Некто ожидает телефонный звонок между 18:00 и 19:00 часами. Время ожидания звонка есть непрерывная случайная величина X, имеющая равномерное распределение на отрезке [18, 19]. Найти вероятность того, что звонок поступит: а) в промежутке от 18 часов 20 минут до 18 часов 45 минут; б) позже 18 часов 30 минут.

ВАРИАНТ 17

Задача 1. Дискретная случайная величина X (*СВ* X) задана рядом распределения:

x_i	2	3	4	7	8
p_i	0,1	0,1	0,2	0,2	0,4

Найти: 1) функцию распределения $F(x)$; 2) числовые характеристики: математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$, моду $M_0(X)$; 3) вероятность $P(1 \le X < 5)$. Построить многоугольник распределения и график $F(x)$.

Задача 2. Нужная студенту информация может содержаться на одном из четырех сайтов с вероятностями 0,6; 0,5; 0,7; 0,4 соответственно (эти вероятности студенту не известны). X – количество сайтов, на которых эта информация будет находиться во время поиска. Составить ряд распределения и найти $F(x)$, $M(X)$ и $\sigma(X)$.

Задача 3. Датчики могут быть активированы независимо один от другого. Вероятность активации в данный момент для каждого датчика равна 0,8. Построить ряд распределения *СВ* X – числа датчиков из пяти, которые могут быть активированы в данный момент; вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$; оценить вероятность того, что число неактивированных датчиков будет равно десяти, если общее число датчиков 200, а вероятность активации в данный момент для каждого датчика равна 0,96.

Задача 4. Дискретная *СВ* X задана законом распределения:

x_i	–2	–1	0	1	2	3
p_i	0,10	0,20	0,30	0,25	?	0,05

Найти ряд распределения *СВ* $Y = 2X^2 - 3$, $M(Y)$ и $\sigma(Y)$.

Задача 5. Непрерывная *СВ* X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -1, \\ \frac{1}{8}(x+1)^3 & \text{при } -1 \le x \le 1, \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Найти: 1) плотность распределения $f(x)$; 2) $M(X)$, $D(X)$; 3) вероятность того, что *СВ X* примет значение в интервале $\left(0; \frac{1}{2}\right)$; 4) вероятность того, что в трех независимых испытаниях *СВ X* ровно три раза примет значения, принадлежащие интервалу $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Задача 6. Задана функция $f(x) = \begin{cases} A\cos 2x, & x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right], \\ 0, & x \notin \left[0; \frac{\pi}{4}\right]. \end{cases}$

Определить значение параметра A, при котором эта функция задает плотность распределения вероятности некоторой непрерывной *СВ X*. Найти: $F(x)$, $P\left(\frac{\pi}{8} \le X < \frac{\pi}{2}\right)$, $M(X)$, $D(X)$. Построить график $F(x)$.

Задача 7. Заданы $M(X) = 17$ и $\sigma(X) = 4$ нормально распределенной непрерывной *СВ X*. Найти:

1) вероятность $P(11 < X < 21)$;

2) вероятность $P(|X - a| < 2)$;

3) симметричный относительно a интервал, в который попадают значения *СВ X* с вероятностью $\gamma = 0{,}6827$.

Задача 8. Деталь, изготовленная автоматом, считается годной, если отклонение ее контролируемого размера от проектного не превосходит 5 мм. Случайные отклонения X контролируемого размера от проектного подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma = 2$ мм и математическим ожиданием $a = 0$. Найти вероятность того, что отклонение контролируемого размера не будет превосходить по модулю 1 мм. Сколько процентов годных деталей изготавливает автомат?

ВАРИАНТ 18

Задача 1. Дискретная случайная величина X (CB X) задана рядом распределения:

x_i	–14	–10	–8	–6	2
p_i	0,2	0,1	0,2	0,2	0,3

Найти: 1) функцию распределения $F(x)$; 2) числовые характеристики: математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$, моду $M_0(X)$; 3) вероятность $P(-11 \le X < -1)$. Построить многоугольник распределения и график $F(x)$.

Задача 2. В урне 4 белых и 3 черных шара. Из нее наудачу извлекают 3 шара. Для CB X – числа белых шаров среди извлеченных, составить ряд распределения и найти $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

Задача 3. Вероятность того, что нить накаливания электрической лампочки может перегореть за время t для каждой лампочки равна 0,15. Лампочки перегорают независимо друг от друга. Построить ряд распределения CB X – числа лампочек из четырех работающих, которые могут перегореть за время t, вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Оценить вероятность того, что за время t перегорит не менее четырех и не более пяти лампочек из 1000, если вероятность перегореть за время t для каждой лампочки равна 0,003.

Задача 4. Законы распределения числа очков, выбиваемых каждым из двух стрелков (X и Y соответственно) таковы:

x_i	8	9	10
p_i	0,1	0,5	?

y_i	8	9	10
p_i	0,2	?	0,5

Составить ряд и функцию распределения случайной величины Z – суммы очков, выбиваемых этими стрелками. Найти $M(Z)$ и $D(Z)$.

Задача 5. Непрерывная *СВ X* задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<0,\\ -\dfrac{x^2}{4}+x & \text{при } 0\le x\le 2,\\ 1 & \text{при } x>2. \end{cases}$$

Найти: 1) плотность распределения $f(x)$; 2) $M(X)$ и $D(X)$; 3) вероятность того, что *СВ X* примет значение в интервале (0,5; 1,5); 4) вероятность того, что в четырех независимых испытаниях *СВ X* ровно два раза примет значения, принадлежащие интервалу (0,5; 1,5).

Задача 6. Задана функция $f(x)=\begin{cases} A\sin x, & x\in\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right],\\ 0, & x\notin\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]. \end{cases}$

Определить значение параметра *A*, при котором эта функция задает плотность распределения вероятностей некоторой *СВ X*. Найти $F(x)$, $P\left(\dfrac{2\pi}{3}\le X\le\dfrac{3\pi}{4}\right)$, $M(X)$, $D(X)$. Построить график $F(x)$.

Задача 7. Заданы $M(X) = 15$ и $\sigma(X) = 3$ нормально распределенной непрерывной *СВ X*. Найти:

1) вероятность $P(10<X<19)$;

2) вероятность $P(|X-a|<5)$;

3) симметричный относительно *a* интервал, в который попадают значения *СВ X* с вероятностью $\gamma = 0{,}9973$.

Задача 8. Время безотказной работы радиоаппаратуры является случайной величиной *X*, распределенной по показательному закону с параметром $\lambda = 0{,}02$. Найти: а) среднее время работы радиоаппаратуры в часах; б) вероятность того, что радиоаппаратура не выйдет из строя в течение 40 часов.

ВАРИАНТ 19

Задача 1. Дискретная случайная величина X ($CB\ X$) задана рядом распределения:

x_i	1	3	5	8	10
p_i	0,4	0,2	0,1	0,2	0,1

Найти: 1) функцию распределения $F(x)$; 2) числовые характеристики: математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$, моду $M_0(X)$; 3) вероятность $P(2 \le X < 4)$. Построить многоугольник распределения и график $F(x)$.

Задача 2. В коробке 4 белых и 3 черных шара. Из нее последовательно вынимают шары до появления белого шара. Для $CB\ X$ – числа извлеченных шаров составить ряд распределения и найти $M(X)$ и $\sigma(X)$.

Задача 3. Появление события A в каждом из серии независимых опытов может наблюдаться с вероятностью 0,5. 1) Построить ряд распределения $CB\ X$ – числа появлений события A в пяти опытах, вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$. 2) Оценить вероятность того, что в 90 опытах число появлений события A будет не менее 30 и не более 80.

Задача 4. Дискретная $CB\ X$ задана рядом распределения:

x_i	?	0	3
p_i	0,1	?	0,4

Составить ряд распределения $CB\ Z = |X - 1|$. Найти $F(z)$ и $D(Z)$, если $M(X) = 1$.

Задача 5. Непрерывная $CB\ X$ задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \frac{1}{9}x^2 & \text{при } 0 \le x \le 3, \\ 1 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

Найти: 1) плотность распределения $f(x)$; 2) $M(X)$ и $D(X)$; 3) вероятность того, что *СВ X* примет значение в интервале (1; 2,5); 4) вероятность того, что в четырех независимых испытаниях *СВ X* точно три раза примет значения, принадлежащие интервалу (1; 2,5).

Задача 6. Задана функция

$$f(x)=\begin{cases} A\left(5x-x^2\right), & x\in[0;5]\ , \\ 0, & x\notin[0;5]\ . \end{cases}$$

Определить значение параметра A, при котором эта функция задает плотность распределения вероятностей некоторой непрерывной *СВ X*. Найти $F(x)$, $P(1 \le X < 3)$, $M(X)$, $D(X)$. Построить график $F(x)$.

Задача 7. Заданы $M(X) = 19$ и $\sigma(X) = 4$ нормально распределенной непрерывной *СВ X*. Найти:

1) вероятность $P(14 < X < 23)$;

2) вероятность $P(|X-a| < 3)$;

3) симметричный относительно a интервал, в который попадают значения *СВ X* с вероятностью $\gamma = 0{,}3899$.

Задача 8. Деталь, изготовленная на штамповочном станке, считается годной, если отклонение ее контролируемого размера от стандарта не превышает 10 мм, при этом случайные отклонения X контролируемого размера от стандарта подчиняются нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma = 4$ мм и $a = 0$ мм (станок не дает систематических отклонений от стандарта). Найти вероятность того, что отклонение от стандарта контролируемого размера не превысит 5 мм, а также процент годных деталей, производимых станком.

ВАРИАНТ 20

Задача 1. Дискретная случайная величина X ($CB\ X$) задана рядом распределения:

x_i	–20	–10	–8	–2	2
p_i	0,1	0,2	0,2	0,3	0,2

Найти: 1) функцию распределения $F(x)$; 2) числовые характеристики: математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$, моду $M_0(X)$; 3) вероятность $P(-15 \le X < 0)$. Построить многоугольник распределения и график $F(x)$.

Задача 2. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,95 для первого сигнализатора и 0,9 для второго. Для $CB\ X$ – количества сигнализаторов, срабатывающих при аварии, составить ряд распределения и найти $F(x)$, $M(X)$ и $\sigma(X)$.

Задача 3. Каждая из одинаковых деталей может прослужить дольше установленного срока в среднем в двух случаях из трех.

1) Построить ряд распределения $CB\ X$ – числа деталей, которые могут прослужить дольше установленного срока, среди пяти деталей, взятых наудачу из большой партии; вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

2) Оценить вероятность того, что из 100 взятых наудачу деталей точно 6 деталей прослужат дольше установленного срока.

Задача 4. Совместное распределение дискретных $CB\ X$ и Y задано таблицей:

X \ Y	0	4	9
1	0,2	0,15	0,10
4	0,3	0,20	0,05

Составить ряд распределения $CB\ Z = X + \sqrt{Y}$. Найти $M(Z)$ и $D(Z)$.

Задача 5. Непрерывная *CB X* задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 1, \\ \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{8} & \text{при } 1 \le x \le 3, \\ 1 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

Найти: 1) плотность распределения $f(x)$; 2) $M(X)$ и $D(X)$; 3) вероятность того, что *CB X* примет значение в интервале (1,5; 2,5); 4) вероятность того, что в трех независимых испытаниях *CB X* ровно два раза примет значения, принадлежащие интервалу (1,5; 2,5).

Задача 6. Задана функция $f(x) = \begin{cases} A\sqrt{2-x}, & x \in [1; 2], \\ 0, & x \notin [1; 2]. \end{cases}$

Определить значение параметра A, при котором эта функция задает плотность распределения вероятностей некоторой непрерывной *CB X*. Найти $F(x)$, $P(0 \le X \le 1{,}5)$ $M(X)$, $D(X)$. Построить график $F(x)$.

Задача 7. Заданы $M(X) = 11$ и $\sigma(X) = 2$ нормально распределенной непрерывной *CB X*. Найти:

1) вероятность $P(8 < X < 14)$;

2) вероятность $P(|X - a| < 2)$;

3) симметричный относительно a интервал, в который попадают значения *CB X* с вероятностью $\gamma = 0{,}9426$.

Задача 8. Автобусы некоторого маршрута идут по расписанию с интервалом 10 мин. Считая случайную величину X – время ожидания автобуса распределенной равномерно, найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус: а) менее 5 минут; б) от 2 до 4 минут.

ВАРИАНТ 21

Задача 1. Дискретная случайная величина X ($СВ\ X$) задана рядом распределения:

x_i	2	5	7	10	12
p_i	0,2	0,2	0,1	0,2	0,3

Найти: 1) функцию распределения $F(x)$; 2) числовые характеристики: математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$, моду $M_0(X)$; 3) вероятность $P(3 \le X < 9)$. Построить многоугольник распределения и график $F(x)$.

Задача 2. В партии, содержащей 20 изделий, имеются четыре изделия со скрытыми дефектами. Наудачу отбирают три изделия для проверки их качества. Для $СВ\ X$ – числа дефектных изделий, которые будут содержаться в указанной выборке, составить ряд распределения и найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

Задача 3. Прибор содержит n независимо работающих элементов, каждый из которых с вероятностью 0,2 может выйти из строя за время t. Требуется: 1) построить ряд и функцию распределения $СВ\ X$ – числа элементов не вышедших из строя за время t, если $n = 6$; вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$; 2) оценить вероятность того, что при $n = 200$ число не вышедших из строя за время t элементов будет не менее 150 и не более 190.

Задача 4. Дискретная $СВ\ X$ задана законом распределения:

x_i	2	3	?
p_i	0,3	?	0,2

Составить ряд распределения $СВ\ Z = 2X - 1$. Найти $F(z)$ и $D(Z)$, если $M(X) = 1$.

Задача 5. Непрерывная *СВ X* задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<-\dfrac{\pi}{4}, \\ -\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+1 & \text{при } -\dfrac{\pi}{4}\le x\le \dfrac{\pi}{4}, \\ 1 & \text{при } x>\dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Найти: 1) плотность распределения $f(x)$; 2) $M(X)$, 3) вероятность того, что *СВ X* примет значение в интервале $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$; 4) вероятность того, что в трех независимых испытаниях *СВ X* только один раз примет значение, принадлежащее интервалу $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Задача 6. Задана функция $f(x)=\begin{cases} A\cdot\dfrac{1}{x^2}, & x\in[1;2], \\ 0, & x\notin[1;2]. \end{cases}$

Определить значение параметра A, при котором эта функция задает плотность распределения вероятностей некоторой непрерывной *СВ X*. Найти $F(x)$, $P\left(-1\le X<\dfrac{1}{2}\right)$, $M(X)$, $D(X)$. Построить график $F(x)$.

Задача 7. Заданы $M(X) = 18$ и $\sigma(X) = 3$ нормально распределенной *СВ X*. Найти:

1) вероятность $P(14<X<22)$;

2) вероятность $P(|X-a|<3)$;

3) симметричный относительно a интервал, в который попадают значения *СВ X* с вероятностью $\gamma = 0{,}9973$.

Задача 8. Отклонение размера детали от стандарта представляет собой случайную величину X, распределенную нормально с математическим ожиданием $a = 4$ см и средним квадратическим отклонением $\sigma = 0{,}2$ см. Найти процент деталей, размер которых отклоняется от a не более, чем на σ, а также вероятность следующего события: $0{,}1\text{см} \le X \le 0{,}3$ см.

ВАРИАНТ 22

Задача 1. Дискретная случайная величина X ($СВ$ X) задана рядом распределения:

x_i	–8	–4	–2	3	8
p_i	0,1	0,1	0,3	0,3	0,2

Найти: 1) функцию распределения $F(x)$; 2) числовые характеристики: математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$, моду $M_0(X)$; 3) вероятность $P(-5 \le X < 1)$. Построить многоугольник распределения и график $F(x)$.

Задача 2. Вероятность того, что при опускании одной монеты автомат срабатывает правильно, равна 0,98. Имеется 5 монет. Для $СВ$ X – числа израсходованных монет до первого правильного срабатывания автомата или использования всех монет составить ряд распределения и найти $F(x)$, $M(X)$ и $\sigma(X)$.

Задача 3. Производятся независимые выстрелы по цели. Вероятность попасть в цель при каждом выстреле равна 0,6.

1) Построить ряд распределения $СВ$ X – числа возможных попаданий при пяти выстрелах; вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

2) Оценить вероятность того, что при 80 выстрелах число попаданий будет не менее 40 и не более 70.

Задача 4. Заданы ряды распределения независимых случайных величин X и Y:

x_i	0	1	3
p_i	$\frac{1}{2}$	?	$\frac{1}{8}$

y_i	0	1
p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Составить ряд и функцию распределения $СВ$ $Z = X + Y$, найти $M(Z)$ и $D(Z)$.

Задача 5. Непрерывная случайная величина X ($CB\ X$) задана функцией распределения $F(x)$

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<2,\\ -x^2+6x-8 & \text{при } 2\le x\le 3,\\ 1 & \text{при } x>3. \end{cases}$$

Найти: 1) плотность распределения $f(x)$; 2) $M(X)$, $D(X)$; 3) вероятность того, что $CB\ X$ примет значение в интервале (1; 2,5); 4) вероятность того, что в четырех независимых испытаниях $CB\ X$ ровно два раза примет значения, принадлежащие интервалу (1; 2,5).

Задача 6. Задана функция $f(x)=\begin{cases} 2x, & x\in[0,1],\\ A(3-x), & x\in(1,3],\\ 0, & x\notin[0,3]. \end{cases}$

Определить значение параметра A, при котором эта функция задает плотность распределения вероятностей некоторой $CB\ X$. Найти: $F(x)$, $P\left(\frac{1}{2}\le X\le 2\right)$, $M(X)$, $D(X)$. Построить график $F(x)$.

Задача 7. Заданы $M(X) = 10$ и $\sigma(X) = 5$ нормально распределенной $CB\ X$. Найти:

1) вероятность $P(4<X<16)$;

2) вероятность $P(|X-a|<2)$;

3) симметричный относительно a интервал, в который попадают значения $CB\ X$ с вероятностью $\gamma = 0{,}9108$.

Задача 8. Средняя продолжительность разговора по телефону равна 3 минутам. Считая, что время разговора по телефону есть случайная величина X, распределенная по показательному закону, найти вероятность следующих событий: а) 2 мин. $\le X \le$ 5 мин.; б) $X \ge 4$ мин.

ВАРИАНТ 23

Задача 1. Дискретная случайная величина X (*СВ* X) задана рядом распределения:

x_i	1	5	9	13	15
p_i	0,3	0,1	0,1	0,1	0,4

Найти: 1) функцию распределения $F(x)$; 2) числовые характеристики: математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$, моду $M_0(X)$; 3) вероятность $P(3 \le X < 13)$. Построить многоугольник распределения и график $F(x)$.

Задача 2. В контрольную работу по математике включены задачи по четырем темам. Студент может решить задачи по каждой из первых двух тем с вероятностью 0,8, по третьей теме с вероятностью 0,6, а по четвертой – с вероятностью 0,4. Для *СВ* X – количества задач, которые будут решены студентом на контрольной работе, составить ряд распределения и найти $F(x)$, $M(X)$ и $\sigma(X)$.

Задача 3. Проверка нескольких документов ведется независимо друг от друга. Вероятность допустить ошибку при проверке одного документа для каждого документа равна 0,1. Построить ряд распределения *СВ* X – числа документов, в которых ошибка не будет обнаружена, среди трех проверяемых; вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$. Оценить вероятность того, что при проверке 40 документов будет ровно шесть проверенных с ошибкой.

Задача 4. Дискретная *СВ* X задана рядом распределения:

x_i	–2	–1	0	1	2	3
p_i	?	0,20	0,30	0,25	0,10	0,05

Найти ряд распределения *СВ* $Y = \sin\left(\frac{\pi}{3}X\right)$, $M(Y)$ и $D(Y)$.

Задача 5. Непрерывная *СВ X* задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<0, \\ \frac{1}{2}(1-\cos x) & \text{при } 0\le x\le \pi, \\ 1 & \text{при } x>\pi. \end{cases}$$

Найти: 1) плотность распределения $f(x)$; 2) $M(X)$; 3) вероятность того, что *СВ X* примет значение в интервале $\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$; 4) вероятность того, что в четырех независимых испытаниях *СВ X* ровно три раза примет значения, принадлежащие интервалу $\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$.

Задача 6. Задана функция $f(x)=\begin{cases} A\sqrt{x}, & x\in[1;4], \\ 0, & x\notin[1;4]. \end{cases}$

Определить значение параметра A, при котором эта функция задает плотность распределения вероятностей некоторой непрерывной *СВ X*. Найти: $F(x)$, $P(0\le X\le 2)$ $M(X)$, $D(X)$. Построить график $F(x)$.

Задача 7. Заданы $M(X)=14$ и $\sigma(X)=3$ нормально распределенной непрерывной *СВ X*. Найти:

1) вероятность $P(10<X<18)$;

2) вероятность $P(|X-a|<3)$;

3) симметричный относительно a интервал, в который попадают значения *СВ X* с вероятностью $\gamma=0{,}9281$.

Задача 8. Случайная ошибка измерения X подчинена нормальному закону с параметрами $a=5$, $\sigma=0{,}5$. Найти вероятность того, что: а) ошибка измерения не превосходит среднего квадратического отклонения; б) ошибка измерения не менее 0,4 и не более 0,9.

ВАРИАНТ 24

Задача 1. Дискретная случайная величина X ($CB\ X$) задана рядом распределения:

x_i	–12	–8	–4	–2	4
p_i	0,1	0,2	0,1	0,2	0,4

Найти: 1) функцию распределения $F(x)$; 2) числовые характеристики: математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$, моду $M_0(X)$; 3) вероятность $P(-10 \le X < 0)$. Построить многоугольник распределения и график $F(x)$.

Задача 2. Устройство состоит из трех элементов, работающих независимо. Вероятность безотказной работы (за время t) первого, второго и третьего элементов соответственно равны 0,6; 0,7 и 0,8. $CB\ X$ – количество элементов, которые откажут за время t. Для $CB\ X$ составить ряд распределения и найти $F(x)$, $M(X)$ и $\sigma(X)$.

Задача 3. В исследовательской лаборатории имеются n однотипных независимо работающих приборов. Вероятность того, что прибор может потребовать настройки в течение часа, для каждого прибора равна 0,2. Требуется: 1) построить ряд распределения $CB\ X$ – числа приборов, которые могут потребовать настройки в течение часа, если $n = 5$; вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$; 2) оценить вероятность того, что число приборов, потребующих настройки в течение часа, будет ровно 20, если $n = 80$.

Задача 4. Совместное распределение дискретных $CB\ X$ и Y задано рядом:

X \ Y	0	2	3
1	0,15	0,20	0,10
4	0,20	0,30	0,05

Составить ряд распределения $CB\ Z = X + 2Y$. Найти $M(Z)$ и $D(Z)$.

Задача 5. Непрерывная случайная величина X ($CB\ X$) задана функцией распределения $F(x)$

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<1,\\ \dfrac{9}{8}-\dfrac{1}{8}(4-x)^2 & \text{при } 1\le x\le 3,\\ 1 & \text{при } x>3.\end{cases}$$

Найти: 1) плотность распределения $f(x)$; 2) $M(X)$ и $D(X)$; 3) вероятность того, что $CB\ X$ примет значение принадлежащее интервалу (0; 2); 4) вероятность того, что в четырех независимых испытаниях $CB\ X$ четыре раза примет значения, принадлежащие интервалу (0; 2).

Задача 6. Задана функция $f(x)=\begin{cases} A(x-2), & x\in[2;3]\ ,\\ 0, & x\notin[2;3]\ .\end{cases}$

Определить значение параметра A, при котором эта функция задает плотность распределения вероятностей некоторой непрерывной $CB\ X$. Найти $F(x)$, $P(1 < X < 2{,}5)$, $M(X)$, $D(X)$. Построить график $F(x)$.

Задача 7. Заданы $M(X) = 22$ и $\sigma(X) = 4$ нормально распределенной непрерывной $CB\ X$. Найти:

1) вероятность $P(16<X<27)$;

2) вероятность $P(|X-a|<4)$;

3) симметричный относительно a интервал, в который попадают значения $CB\ X$ с вероятностью $\gamma = 0{,}9973$.

Задача 8. Случайная величина X, численно равная времени работы осциллографа (в часах) до выхода из строя, имеет плотность распределения

$$f(x)=\begin{cases} 0{,}002\cdot e^{-0{,}002x} & \text{при } x\ge 0,\\ 0 & \text{при } x<0.\end{cases}$$

Найти среднее время работы осциллографа $M(X)$, а также вероятность того, что осциллограф проработает от 400 до 600 часов.

ВАРИАНТ 25

Задача 1. Дискретная случайная величина X (CB X) задана рядом распределения:

x_i	2	8	10	14	16
p_i	0,2	0,1	0,2	0,2	0,3

Найти: 1) функцию распределения $F(x)$; 2) числовые характеристики: математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$, моду $M_0(X)$; 3) вероятность $P(6 \leq X < 12)$. Построить многоугольник распределения и график $F(x)$.

Задача 2. В команде 16 спортсменов, из которых 6 перворазрядников. Наудачу выбирают трех спортсменов. Для CB X – числа перворазрядников среди спортсменов, которые будут отобраны, составить ряд распределения и найти $F(x)$, $M(X)$ и $\sigma(X)$.

Задача 3. Мастерская производит однотипные изделия. Вероятность производства бракованного для каждого из них равна 0,15. Построить ряд распределения CB X – возможного числа бракованных изделий среди трех, произведенных в мастерской; вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$. Оценить вероятность того, что будет одно бракованное изделие среди 800, если вероятность брака для каждого изделия равна 0,001.

Задача 4. Дискретная CB X задана рядом распределения:

x_i	–2	?	3
p_i	?	0,4	0,4

Составить ряд распределения CB $Z = X^2$, если $M(X) = 1,2$. Найти $M(Z)$ и $\sigma(Z)$.

Задача 5. Непрерывная случайная величина X(CB X) задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<-\dfrac{\pi}{12}, \\ 0{,}5\sin 6x+0{,}5 & \text{при } -\dfrac{\pi}{12}\le x\le \dfrac{\pi}{12}, \\ 1 & \text{при } x>\dfrac{\pi}{12}. \end{cases}$$

Найти: 1) плотность распределения $f(x)$; 2) $M(X)$; 3) вероятность того, что CB X примет значение в интервале $\left(0;\dfrac{\pi}{18}\right)$; 4) вероятность того, что в трех независимых испытаниях CB X ровно два раза примет значения, принадлежащие интервалу $\left(0;\dfrac{\pi}{18}\right)$.

Задача 6. Задана функция $f(x)=\begin{cases} Ax(x+2), & x\in[0;2], \\ 0, & x\notin[0;2]. \end{cases}$

Определить значение параметра A, при котором эта функция задает плотность распределения вероятностей некоторой непрерывной CB X. Найти: $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $P(-1\le X\le 1)$. Построить график $F(x)$.

Задача 7. Заданы $M(X)=12$ и $\sigma(X)=3$ нормально распределенной непрерывной CB X. Найти:

1) вероятность $P(7<X<17)$;

2) вероятность $P(|X-a|<2)$;

3) симметричный относительно a интервал, в который попадают значения CB X с вероятностью $\gamma=0{,}9836$.

Задача 8. Срок безотказной работы бытового прибора представляет собой случайную величину X, распределенную по нормальному закону с параметрами $a=10$ лет и $\sigma=0{,}9$ года. Найти вероятность того, что прибор проработает: а) менее 9 лет; б) от 8 до 12 лет.

ВАРИАНТ 26

Задача 1. Дискретная случайная величина X (*СВ* X) задана рядом распределения:

x_i	–2	–1	1	4	6
p_i	0,4	0,2	0,1	0,1	0,2

Найти: 1) функцию распределения $F(x)$; 2) числовые характеристики: математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$, моду $M_0(X)$; 3) вероятность $P(0 \le X < 5)$. Построить многоугольник распределения и график $F(x)$.

Задача 2. Вероятность того, что студент найдет в библиотеке нужную ему книгу, для каждой из четырех доступных для студента библиотек равна 0,4. Для *СВ* X – числа библиотек, которые посетит студент, составить ряд распределения и найти $F(x)$, $M(X)$ и $\sigma(X)$.

Задача 3. Деталь с заданными параметрами из каждой заготовки можно изготовить с вероятностью 0,6. Требуется: 1) построить ряд распределения *СВ* X – возможного числа деталей с заданными параметрами среди тех, которые будут изготовлены из четырех заготовок; вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$; 2) оценить вероятность того, что будут изготовлены 65 деталей с заданными параметрами из 100 заготовок.

Задача 4. Случайный вектор (X, Y) распределен по закону, заданному таблицей:

X \ Y	–1	0	1
0	0,1	0,2	0,1
1	0,2	0,3	0,1

Найти ряд распределения *СВ* $Z = X \cdot Y$, $F(z)$ и $M(Z)$.

Задача 5. Непрерывная случайная величина X (CB X) задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{при } x<-\dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sin x \quad \text{при } -\dfrac{\pi}{2}\le x\le \dfrac{\pi}{2}, \\ 1 \quad \text{при } x>\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти: 1) плотность распределения $f(x)$; 2) $M(X)$; 3) вероятность того, что CB X примет значение в интервале $\left(-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{6}\right)$; 4) вероятность того, что в трех независимых испытаниях CB X ровно два раза примет значения, принадлежащие интервалу $\left(-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{6}\right)$.

Задача 6. Задана функция $f(x)=\begin{cases} A(x+1), & x\in[-1,0), \\ A(1-x), & x\in[0,1], \\ 0, & x\notin[-1,1]. \end{cases}$ Определить значение параметра A, при котором эта функция задает плотность распределения вероятностей некоторой непрерывной CB X. Найти $F(x)$, $P\left(-\frac{1}{2}<X<\frac{1}{2}\right)$, $M(X)$, $D(X)$. Построить график $F(x)$.

Задача 7. Заданы $M(X)=11$ и $\sigma(X)=4$ нормально распределенной непрерывной CB X. Найти:

1) вероятность $P(6<X<16)$;

2) вероятность $P(|X-a|<3)$;

3) симметричный относительно a интервал, в который попадают значения CB X с вероятностью $\gamma=0{,}8064$.

Задача 8. Цена деления шкалы рычажных весов, установленных в лаборатории, равна 1 г. При измерении массы химических компонентов производится измерение с точностью до целого деления с округлением в ближайшую сторону. Ошибка измерения является случайной величиной X, распределенный равномерно. Найти вероятность того, что ошибка измерения массы: а) не превысит 0,2 г; б) будет заключена между значениями 0,2 г и 0,4 г.

ВАРИАНТ 27

Задача 1. Дискретная случайная величина X ($CB\ X$) задана законом распределения:

x_i	2	5	9	13	16
p_i	0,1	0,2	0,3	0,1	0,3

Найти: 1) функцию распределения $F(x)$; 2) числовые характеристики: математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$, моду $M_0(X)$; 3) вероятность $P(3 \le X < 12)$. Построить многоугольник распределения и график $F(x)$.

Задача 2. Мишень состоит из внутреннего круга № 1 и двух концентрических колец с номерами 2 и 3. Попадание в круг № 1 дает 10 очков, в кольцо № 2 дает 5 очков, а попадание в кольцо № 3 штрафуется одним очком. Вероятности попадания в круг № 1 и кольца № 2 и № 3 соответственно равны 0,5; 0,3 и 0,2. Для $CB\ X$ – случайной суммы выбитых очков в результате трех попаданий, составить ряд распределения и найти $F(x)$, $M(X)$ и $\sigma(X)$.

Задача 3. С 13 до 14 часов каждый из n человек, независимо один от другого, может оказаться в столовой с вероятностью 0,85.

Построить ряд и функцию распределения $CB\ X$ – возможного числа посетителей столовой в этот промежуток времени, если $n = 5$, вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Оценить вероятность того, что число посетителей столовой в указанный промежуток времени будет равно 135, если $n = 150$ и вероятность для каждого из них оказаться в столовой с 13 до 14 часов равна 0,84.

Задача 4. Известно, что дискретная $CB\ X$ может принимать только два значения $x_1 = -2$ и $x_2 = 3$ и ее математическое ожидание $M(X) = 1{,}5$. Составить ряды распределения $CB\ X$ и $CB\ Z = |X| - 2$. Найти $F(z)$ и $\sigma(Z)$.

Задача 5. Непрерывная случайная величина X ($СВ\ X$) задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<0, \\ -x^2+2x & \text{при } 0\le x\le 1, \\ 1 & \text{при } x>1. \end{cases}$$

Найти: 1) плотность распределения $f(x)$; 2) $M(X)$, $D(X)$;

3) $P\left(-1<X<\frac{1}{2}\right)$; 4) вероятность того, что в четырех независимых испытаниях $СВ\ X$ ровно два раза примет значения, принадлежащие интервалу $\left(-1;\ \frac{1}{2}\right)$.

Задача 6. Задана функция $f(x)=\begin{cases} A\cos 2x, & x\in\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right], \\ 0, & x\notin\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]. \end{cases}$

Определить значение параметра A, при котором эта функция задает плотность распределения вероятностей некоторой $СВ\ X$. Найти $F(x)$, $P\left(0<X<\frac{\pi}{2}\right)$, $M(X)$, $D(X)$. Построить график $F(x)$.

Задача 7. Заданы $M(X)$ = 13 и $\sigma(X)$ = 3 нормально распределенной непрерывной $СВ\ X$. Найти:

1) вероятность $P(9<X<17)$;

2) вероятность $P(|X-a|<2)$;

3) симметричный относительно a интервал, в который попадают значения $СВ\ X$ с вероятностью γ = 0,9973.

Задача 8. Случайная величина X распределена по показательному закону с параметром λ = 0,4. Найти дифференциальную функцию распределения $f(x)$, а также вероятность попадания значений случайной величины X в интервал [2,5; 5].

ВАРИАНТ 28

Задача 1. Дискретная случайная величина X ($CB\ X$) задана рядом распределения:

x_i	–20	–10	–2	2	10
p_i	0,2	0,2	0,3	0,2	0,1

Найти: 1) функцию распределения $F(x)$; 2) числовые характеристики: математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$, моду $M_0(X)$; 3) вероятность $P(-15 < X \le 0)$. Построить многоугольник распределения и график $F(x)$.

Задача 2. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. На зачете студенту предлагается 5 вопросов. $CB\ X$ – число вопросов, на которые студент даст правильный ответ на зачете. Для $CB\ X$ составить ряд распределения и найти $F(x)$, $M(X)$ и $\sigma(X)$.

Задача 3. Несколько анализаторов чистоты воздуха работают независимо друг от друга. Построить ряд и функцию распределения $CB\ X$ – числа отказавших за промежуток времени T анализаторов из пяти имеющихся, если вероятность отказа для каждого анализатора равна 0,1. Вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$. Оценить вероятность того, что за указанный промежуток времени могут отказать четыре анализатора из 900 работающих, если вероятность отказа любого из них равна 0,001.

Задача 4. Задано распределение вероятностей двумерной случайной величины:

$Y \backslash X$	3	10	12
4	0,17	0,13	0,25
5	0,10	0,30	0,05

Найти: 1) законы распределения составляющих X·и Y; 2) ряд распределения случайной величины $Z = Y - X$, $M(Z)$ и $D(Z)$.

Задача 5. Непрерывная *СВ X* задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{при } x<-\dfrac{\pi}{6}, \\ \dfrac{1}{2}+\sin x \quad \text{при } -\dfrac{\pi}{6}\le x\le\dfrac{\pi}{6}, \\ 1 \quad \text{при } x>\dfrac{\pi}{6}. \end{cases}$$

Найти: 1) плотность распределения $f(x)$; 2) $M(X)$; 3) $P\left(-\dfrac{3\pi}{4}<X<0\right)$; 4) вероятность того, что в четырех независимых испытаниях *СВ X* ровно три раза примет значения, принадлежащие интервалу $\left(-\dfrac{3\pi}{4};\,0\right)$.

Задача 6. Задана функция $f(x)=\begin{cases} A\ln x, & x\in[1,e], \\ 0, & x\notin[1,e]. \end{cases}$

Определить значение параметра *A*, при котором эта функция задает плотность распределения вероятностей некоторой непрерывной *СВ X*. Найти $F(x)$, $P\left(\dfrac{1}{2}<X<2\right)$, $M(X)$, $D(X)$. Построить график $F(x)$.

Задача 7. Заданы $M(X)=15$ и $\sigma(X)=4$ нормально распределенной непрерывной *СВ X*. Найти:

1) вероятность $P(10<X<20)$;

2) вероятность $P(|X-a|<3)$;

3) симметричный относительно *a* интервал, в который попадают значения *СВ X* с вероятностью $\gamma=0{,}9786$.

Задача 8. Дальность полета снарядов артиллерийской установки есть случайная величина, подчиненная нормальному закону с параметрами $a=1500$ м и $\sigma=15$ м. Найти вероятность того, что: а) отклонение от среднего значения не превысит среднего квадратического отклонения; б) отклонение будет не менее 10 м и не более 20 м.

ВАРИАНТ 29

Задача 1. Дискретная случайная величина X ($CB\ X$) задана рядом распределения:

x_i	2	5	6	13	16
p_i	0,1	0,2	0,2	0,2	0,3

Найти: 1) функцию распределения $F(x)$; 2) числовые характеристики: математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$, моду $M_0(X)$; 3) вероятность $P(4 \le X < 12)$. Построить многоугольник распределения и график $F(x)$.

Задача 2. Автомобиль на пути к месту назначения встретит 5 светофоров, каждый из которых пропустит его с вероятностью $\frac{1}{3}$. $CB\ X$ – число светофоров, которые пройдет автомобиль до первой остановки или до прибытия к месту назначения. Для $CB\ X$ составить ряд распределения и найти $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$.

Задача 3. Каждый из n независимо работающих датчиков может отказать за время T с вероятностью 0,1.

Построить ряд и функцию распределения $CB\ X$ – возможного числа датчиков, которые откажут за время T, если $n = 4$; вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Оценить вероятность того, что при $n = 300$ за время T может отказать ровно 25 датчиков.

Задача 4. Дискретная $CB\ X$ может принимать только два значения X_1 и X_2, причем $X_1 < X_2$. Известно, что $P_1 = 0,3$, $M(X) = 2,4$ и $D(X) = 0,84$. Найти ряд распределения $CB\ X$. Составить ряд распределения $CB\ Z = 2X - 5$, найти $M(Z)$ и $D(Z)$.

Задача 5. Непрерывная случайная величина X (CB X) задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<0, \\ \dfrac{-x^2+6x}{9} & \text{при } 0\le x\le 3, \\ 1 & \text{при } x>3. \end{cases}$$

Найти: 1) плотность распределения $f(x)$; 2) $M(X)$, $D(X)$; 3) $P(1<X<2)$; 4) вероятность того, что в четырех независимых испытаниях CB X четыре раза примет значения, принадлежащие интервалу (1, 2).

Задача 6. Задана функция $f(x)=\begin{cases} A\left(x^2-2\right), & x\in[2;4], \\ 0, & x\notin[2;4]. \end{cases}$

Определить значение параметра A, при котором эта функция задает плотность распределения вероятностей некоторой CB X. Найти $F(x)$, $P(1<X<3)$, $M(X)$, $D(X)$. Построить график $F(x)$.

Задача 7. Заданы $M(X)=16$ и $\sigma(X)=4$ нормально распределенной непрерывной CB X. Найти:

1) вероятность $P(11<X<21)$;

2) вероятность $P(|X-a|<4)$;

3) симметричный относительно a интервал, в который попадают значения CB X с вероятностью $\gamma = 0{,}5761$.

Задача 8. Ошибка X измерения, производимого прибором, есть случайная величина, распределенная нормально. Систематической ошибки прибор не имеет, $\sigma = 0{,}01$. Найти вероятность следующих событий: а) $|X|\le\sigma$; б) $-0{,}02\le X\le 0$.

ВАРИАНТ 30

Задача 1. Дискретная случайная величина X ($СВ\ X$) задана рядом распределения:

x_i	–10	–6	–2	2	9
p_i	0,2	0,1	0,4	0,2	0,1

Найти: 1) функцию распределения $F(x)$; 2) числовые характеристики: математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$, моду $M_0(X)$; 3) вероятность $P(-7 \le X < 7)$. Построить многоугольник распределения и график $F(x)$.

Задача 2. Нужная студенту для написания реферата информация содержится на трех сайтах. Вероятность того, что студент сможет найти эту информацию в течении t минут для каждого из сайтов соответственно равна 0,6; 0,5; 0,8. $СВ\ X$ – количество сайтов, на которых студент найдет нужную ему информацию, если на каждом из сайтов он будет проводить поиск не более чем t минут. Для $СВ\ X$ составить ряд распределения и найти $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$.

Задача 3. Каждый из анализаторов газовой среды может проработать дольше установленного срока в среднем в трех случаях из четырех.

Построить ряд и функцию распределения $СВ\ X$ – числа анализаторов, которые смогут проработать дольше установленного срока, среди шести случайно отобранных из большой партии; вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Оценить вероятность того, что из 150 взятых случайно анализаторов число работающих дольше установленного срока будет не менее 100.

Задача 4. Дискретная $СВ\ X$ задана рядом распределения:

x_i	–1	0
p_i	?	0,6

СВ Y – число появлений события *A* в серии из двух независимых испытаний, в каждом из которых $P(A) = 0{,}4$. Составить ряд распределения *СВ* $Z = X + Y$. Найти $M(Z)$ и $D(Z)$.

Задача 5. Непрерывная случайная величина *X*(*СВ X*) задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -1, \\ -x^2 + 1 & \text{при } -1 \le x \le 0, \\ 1 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Найти: 1) плотность распределения $f(x)$; 2) $M(X)$; 3) $P(-2 < X < -0{,}5)$; 4) вероятность того, что в трех независимых испытаниях *СВ X* ровно 2 раза примет значения, принадлежащие интервалу $(-2; -0{,}5)$.

Задача 6. Задана функция $f(x) = \begin{cases} \dfrac{A}{x}, & \text{при } x \in \left[1; e^2\right], \\ 0, & \text{при } x \notin \left[1; e^2\right]. \end{cases}$

Определить значение параметра *A*, при котором эта функция задает плотность распределения вероятностей некоторой непрерывной *СВ X*. Найти: $F(x)$, $P\left(\dfrac{1}{e} < X < e\right)$, $M(X)$, $D(X)$. Построить график $F(x)$.

Задача 7. Заданы $M(X) = 17$ и $\sigma(X) = 3$ нормально распределенной непрерывной *СВ X*. Найти:

1) вероятность $P(10 < X < 23)$;

2) вероятность $P(|X - a| < 4)$;

3) симметричный относительно *a* интервал, в который попадают значения *СВ X* с вероятностью $\gamma = 0{,}9973$.

Задача 8. Случайная величина *X* – время безотказной работы лампочки подчинена показательному закону распределения, причем среднее время работы лампочки 800 часов. Найти вероятность того, что: а) лампочка проработает от 400 до 700 часов; б) лампочка проработает более 600 часов.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Задан закон распределения двумерной случайной величины (X,Y). Найти уравнения прямых регрессии *Y* на *X* и *X* на *Y*.

X/Y	–2	2	3	4
–2	0,03	0,02	0,06	0,04
0	0,03	0,10	0,10	0,09
2	0,05	0,08	0,20	0,20

2. Задан закон распределения двумерной случайной величины (X,Y). Найти уравнения прямых регрессии *Y* на *X* и *X* на *Y*.

X/Y	–2	–1	0	2
–1	0,02	0,05	0,04	0,10
2	0,03	0,08	0,05	0,20
4	0,02	0,05	0,06	0,30

3. Задан закон распределения двумерной случайной величины (X,Y). Найти уравнения прямых регрессии *Y* на *X* и *X* на *Y*.

X/Y	–4	–2	1	2
–2	0,06	0,05	0,05	0,03
0	0,17	0,06	0,10	0,10
1	0,10	0,10	0,07	0,11

4. Задан закон распределения двумерной случайной величины (X,Y). Найти уравнения прямых регрессии *Y* на *X* и *X* на *Y*.

X/Y	0	1	2	4
–1	0,04	0,02	0,04	0,02
2	0,18	0,05	0,07	0,10
3	0,05	0,15	0,15	0,13

5. Задан закон распределения двумерной случайной величины (X, Y). Найти уравнения прямых регрессии *Y* на *X* и *X* на *Y*.

X/Y	0	2	3	5
–2	0,05	0,07	0,10	0,08
1	0,10	0,09	0,10	0,05
2	0,15	0,08	0,12	0,01

6. Задан закон распределения двумерной случайной величины (X, Y). Найти уравнения прямых регрессии *Y* на *X* и *X* на *Y*.

X/Y	–1	0	2	4
–2	0,04	0,05	0,07	0,05
1	0,05	0,08	0,09	0,08
2	0,10	0,12	0,10	0,17

7. Задан закон распределения двумерной случайной величины (X, Y). Найти уравнения прямых регрессии *Y* на *X* и *X* на *Y*.

X/Y	–2	0	2	4
–3	0,04	0,08	0,05	0,04
–1	0,08	0,09	0,06	0,07
2	0,14	0,12	0,12	0,11

8. Задан закон распределения двумерной случайной величины (X, Y). Найти уравнения прямых регрессии *Y* на *X* и *X* на *Y*.

X/Y	–2	1	3	6
–2	0,02	0,07	0,09	0,09
0	0,04	0,08	0,16	0,11
3	0,05	0,08	0,11	0,10

9. Задан закон распределения двумерной случайной величины (X,Y). Найти уравнения прямых регрессии *Y* на *X* и *X* на *Y*.

X/Y	–3	1	2	5
0	0,05	0,08	0,11	0,06
2	0,06	0,09	0,09	0,05
4	0,08	0,18	0,11	0,04

10. Задан закон распределения двумерной случайной величины (X,Y). Найти уравнения прямых регрессии *Y* на *X* и *X* на *Y*.

X/Y	–3	–2	1	3
–2	0,05	0,19	0,10	0,05
0	0,07	0,11	0,07	0,05
4	0,08	0,09	0,08	0,06

11. Задан закон распределения двумерной случайной величины (X,Y). Найти уравнения прямых регрессии *Y* на *X* и *X* на *Y*.

X/Y	–2	2	3	6
–3	0,18	0,17	0,10	0,08
–2	0,10	0,11	0,07	0,04
0	0,04	0,04	0,03	0,04

12. Задан закон распределения двумерной случайной величины (X,Y). Найти уравнения прямых регрессии *Y* на *X* и *X* на *Y*.

X/Y	–3	–1	2	4
–3	0,08	0,09	0,09	0,03
–2	0,08	0,13	0,13	0,03
0	0,08	0,12	0,09	0,05

13. Задан закон распределения двумерной случайной величины (X,Y). Найти уравнения прямых регрессии *Y* на *X* и *X* на *Y*.

X/Y	–5	–3	–2	2
–1	0,18	0,13	0,08	0,07
0	0,11	0,11	0,06	0,05
4	0,09	0,07	0,03	0,02

14. Задан закон распределения двумерной случайной величины (X,Y). Найти уравнения прямых регрессии *Y* на *X* и *X* на *Y*.

X/Y	–1	0	3	4
–2	0,11	0,14	0,06	0,01
2	0,10	0,11	0,07	0,06
4	0,07	0,15	0,09	0,03

15. Задан закон распределения двумерной случайной величины (X,Y). Найти уравнения прямых регрессии *Y* на *X* и *X* на *Y*.

X/Y	–3	0	2	4
–2	0,15	0,16	0,09	0,09
–1	0,08	0,15	0,10	0,05
2	0,04	0,05	0,03	0,01

16. Задан закон распределения двумерной случайной величины (X,Y). Найти уравнения прямых регрессии *Y* на *X* и *X* на *Y*.

X/Y	–3	–1	0	3
2	0,16	0,11	0,08	0,08
3	0,13	0,10	0,08	0,07
4	0,05	0,07	0,03	0,04

17. Задан закон распределения двумерной случайной величины (X,Y). Найти уравнения прямых регрессии *Y* на *X* и *X* на *Y*.

X/Y	0	1	3	6
–2	0,04	0,15	0,10	0,04
2	0,16	0,11	0,10	0,05
3	0,06	0,13	0,03	0,03

18. Задан закон распределения двумерной случайной величины (X, Y). Найти уравнения прямых регрессии *Y* на *X* и *X* на *Y*.

X/Y	–2	0	2	5
–1	0,15	0,13	0,07	0,06
2	0,13	0,15	0,08	0,04
4	0,06	0,05	0,05	0,03

19. Задан закон распределения двумерной случайной величины (X, Y). Найти уравнения прямых регрессии *Y* на *X* и *X* на *Y*.

X/Y	–4	–2	0	3
–3	0,16	0,15	0,10	0,04
1	0,09	0,09	0,07	0,02
2	0,10	0,10	0,05	0,03

20. Задан закон распределения двумерной случайной величины (X, Y). Найти уравнения прямых регрессии *Y* на *X* и *X* на *Y*.

X/Y	–4	0	2	4
–2	0,12	0,10	0,10	0,05
1	0,09	0,13	0,03	0,04
2	0,10	0,15	0,05	0,04

21. Случайная величина *X* распределена равномерно на отрезке $[0;3]$. Найти плотность распределения случайной величины $Y = X^3$ и ее математическое ожидание.

22. Случайная величина *X* имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 2$. Найти плотность распределения случайной величины $Y = e^{-2X}$ и ее математическое ожидание.

23. Случайная величина *X* имеет равномерное распределение на отрезке $[0;1]$. Найти плотность распределения случайной величины $Y = e^{X-1}$ и ее математическое ожидание.

24. Случайная величина X распределена равномерно на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Найти плотность распределения случайной величины $Y=\sin X$ и ее математическое ожидание.

25. Случайная величина X распределена равномерно на отрезке $[0;\pi]$. Найти плотность распределения случайной величины $Y=\cos X$ и ее математическое ожидание.

26. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $a=0$ и $\sigma=5$. Найти плотность распределения случайной величины $Y=3X$ и ее математическое ожидание.

27. Случайные величины X и Y независимы, причем X имеет нормальное распределение с параметрами $a=2$ и $\sigma=0{,}5$, а Y – равномерное распределение на отрезке $[0;4]$. Найти: $M\left(X+2XY-1\right)$, $D\left(2X-4Y-5\right)$.

28. Случайные величины X и Y независимы, причем X имеет показательное распределение с параметром $\lambda=0{,}5$, а Y – равномерное распределение на отрезке $[0;3]$. Найти: $M\left(X-2XY+3\right)$, $D\left(3XY+1\right)$.

29. Случайные величины X и Y независимы, причем X имеет показательное распределение с параметром $\lambda=0{,}5$, а Y – нормальное распределение с параметрами $a=2$ и $\sigma=0{,}2$. Найти: $M\left(2X+3XY-5\right)$, $D\left(2XY-3\right)$.

30. Случайные величины X и Y независимы, причем X имеет нормальное распределение с параметрами $a=1$ и $\sigma=0{,}4$, а Y – равномерное распределение на отрезке $[1;4]$. Найти: $M\left(3XY-Y^2+5\right)$, $D\left(2X-3Y+1\right)$.

31. Случайные величины X и Y независимы, причем X имеет равномерное распределение на отрезке $[-2;6]$, а Y – показательное распределение с параметром $\lambda=0{,}4$. Найти: $M\left(3X^2-XY-4\right)$, $D\left(2XY-4Y+3\right)$.

32. Случайные величины X и Y независимы, причем X имеет показательное распределение с параметром $\lambda=0{,}2$, а Y – нормальное распределение с параметрами $a=2$ и $\sigma=0{,}1$. Найти: $M\left(2X^2-3XY+5\right)$, $D\left(3XY+2Y-1\right)$.

ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

1. Задан закон распределения двумерной случайной величины (X,Y).

X/Y	–2	1	2	4
0	0,13	0,05	0,03	0,05
1	0,10	0,17	0,10	0,02
3	0,12	0,09	0,04	0,10

Найти уравнения прямых регрессии *Y* на *X* и *X* на *Y*.

Решение. Прямая регрессии *Y* на *X* задается уравнением $y-m_y=r_{XY}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$, а прямая регрессии *X* на *Y* имеет вид $x-m_x=r_{XY}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\left(y-m_y\right)$, где m_x и m_y математические ожидания случайных величин *X* и *Y*, а σ_x и σ_y их средние квадратические отклонения.

$r_{XY}=\frac{K_{XY}}{\sigma_x\sigma_y}$ – коэффициент корреляции случайных величин *X* и *Y*,

$K_{XY}=\sum_i\sum_j x_i y_j\cdot p_{ij}$ – корреляционный момент.

Найдем одномерные законы распределения составляющих системы и их числовые характеристики.

Y	–2	1	2	4
P	0,35	0,31	0,17	0,17

$$M(Y)=\sum y_j p_j=-2\cdot 0,35+1\cdot 0,31+2\cdot 0,17+4\cdot 0,17=0,63$$

$$M(Y^2)=\sum y_j^2 p_j=4\cdot 0,35+1\cdot 0,31+4\cdot 0,17+16\cdot 0,17=5,11$$

$$D(Y)=M(Y^2)-\left(M(Y)\right)^2=5,11-0,63^2=4,7131$$

$$\sigma(Y)=\sqrt{D(Y)}\approx 2,171$$

X	0	1	3
P	0,26	0,39	0,35

$$M(X)=\sum x_i p_i = 0\cdot 0,26+1\cdot 0,39+3\cdot 0,35=1,44$$

$$M(X^2)=\sum x_i^2 p_i = 0^2\cdot 0,26+1^2\cdot 0,39+3^2\cdot 0,35=3,54$$

$$D(X)=M(X^2)-\left(M(X)\right)^2=3,54-1,44^2=1,4664$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}\approx 1,211$$

Найдем корреляционный момент и коэффициент корреляции.

$$K_{XY}=\sum_i\sum_j x_i y_j p_{ij}=-2\cdot 0\cdot 0,13+(-2)\cdot 1\cdot 0,1+(-2)\cdot 3\cdot 0,12+1\cdot 0\cdot 0,05+$$

$$+1\cdot 1\cdot 0,17+1\cdot 3\cdot 0,09+2\cdot 0\cdot 0,03+2\cdot 1\cdot 0,1+2\cdot 3\cdot 0,04+4\cdot 0\cdot 0,05+$$

$$+4\cdot 1\cdot 0,02+4\cdot 3\cdot 0,1=1,24$$

$$r_{XY}=\frac{K_{XY}}{\sigma_x\sigma_y}\approx\frac{1,24}{2,171\cdot 1,211}\approx 0,47$$

Составим уравнение прямой регрессии Y на X

$$y-0,63=0,47\cdot\frac{2,171}{1,211}(x-1,44)$$

$$y=0,843x-0,583$$

Составим уравнение прямой регрессии X на Y

$$x-1,44=0,47\cdot\frac{1,211}{2,171}(y-0,63)$$

$$x=0,262y+1,275$$

2. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)=\cos x$ на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, вне этого отрезка $f(x)=0$. Найти плотность распределения случайной величины $Y=X^2$ и ее математическое ожидание.

Решение. Так как функция $\varphi(x)=x^2$ для рассматриваемых значений x строго возрастающая, то плотность $g(y)$ будем искать по формуле: $g(y)=f(\psi(y))\cdot|\psi'(y)|$, где $\psi(y)=\sqrt{y}$ является обратной функцией для $y=x^2$ на заданном отрезке.

$$\psi'(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}, \text{ тогда } g(y)=\left(\cos\sqrt{y}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}} \text{ при } y\in\left[0;\frac{\pi^2}{4}\right].$$

Найдем математическое ожидание случайной величины Y по формуле $M(Y)=\int\limits_a^b yg(y)dy$

$$M(Y)=\int\limits_0^{\frac{\pi^2}{4}} y\cdot\left(\cos\sqrt{y}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}dy=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi^2}{4}}\sqrt{y}\cos dy=\left|\begin{array}{l} y=t^2 \\ t=\sqrt{y} \\ dy=2tdt \\ 0\le t\le\frac{\pi}{2}\end{array}\right|=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\cos tdt=\left|\begin{array}{ll} u_1=t^2 & du_1=2tdt \\ d\upsilon_1=\cos tdt & \upsilon_1=\sin t\end{array}\right|=$$

$$=t^2\sin t\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin tdt\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\left(\frac{\pi^2}{4}\sin\frac{\pi}{2}-0\right)-2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin tdt=\left|\begin{array}{ll} u_2=t & du_2=dt \\ d\upsilon_2=\sin tdt & \upsilon_2=-\cos t\end{array}\right|=$$

$$=\frac{\pi^2}{4}-2\left(-t\cos t\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos tdt\right)=\frac{\pi^2}{4}-2\left(-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}+0+\sin t\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=$$

$$=\frac{\pi^2}{4}-2\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right)=\frac{\pi^2}{4}-2=\frac{\pi^2-8}{4}$$

Математическое ожидание случайной величины Y можно также найти по формуле $M(Y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)f(x)dx$, не находя предварительно $g(y)$.

В нашем случае формула примет вид $M(Y)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x dx$

Дважды интегрируя по частям, получим $M(Y)=\dfrac{\pi^2-8}{4}$.

3. Случайные величины X и Y независимы, причем X имеет нормальное распределение с параметрами $a=4$ и $\sigma=2$, а Y – равномерное распределение на отрезке $[1;3]$. Найти: $M(2X+3Y+1)$, $M\left(XY-2X^2+3Y^2\right)$, $D(5X-3Y+2)$, $D(3XY+2X)$.

Решение. Для нормально распределенной случайной величины X с плотностью распределения

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}},\ M(X)=a,\ D(X)=\sigma^2,$$

а для случайной величины X с равномерным на отрезке $[a;b]$ распределением $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in[a;b],\\ 0, & x\notin[a;b],\end{cases}$ $M(X)=\dfrac{a+b}{2}$; $D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$

Так как $M(X)=a=4$, $M(Y)=\dfrac{1+3}{2}=2$, $M(1)=1$, то, используя линейные свойства математического ожидания, получаем

$$M(2X+3Y+1)=2M(X)+3M(Y)+M(1)=2\cdot4+3\cdot2+1=15.$$

Так как случайные величины X и Y независимы, то

$$M(XY)=M(X)\cdot M(Y)=4\cdot2=8.$$

Найдем $M(X^2)$ и $M(Y^2)$ из соотношений $D(X)=M(X^2)-M^2(X)$, $D(Y)=M(Y^2)-M^2(Y)$. Тогда

$M(X^2)=D(X)+M^2(X)=2^2+4^2=4+16=20;$

$$M(Y^2) = D(Y) + M^2(Y) = \frac{(3-1)^2}{12} + 2^2 = \frac{4}{12} + 4 = \frac{1}{3} + 4 = \frac{13}{3}.$$

Используя линейные свойства математического ожидания, получаем

$$M(XY - 2X^2 + 3Y^2) = M(XY) - 2M(X^2) + 3M(Y^2) = 8 - 2\cdot 20 + 3\cdot\frac{13}{3} =$$

$$= 21 - 40 = -19.$$

По свойствам дисперсии $D(CX) = C^2 D(X)$, $D(C) = 0$, где C – константа. Для независимых X и Y справедливы соотношения

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y) \text{ и}$$

$$D(XY) = D(X)D(Y) + M^2(X)D(Y) + M^2(Y)\cdot D(X).$$

Так как $D(X) = 4$, $D(Y) = \frac{1}{3}$, $M(X) = 4$, $M(Y) = 2$, то, используя указанные формулы, получаем

$$D(5X - 3Y + 2) = 5^2\cdot D(X) + (-3)^2 D(Y) + D(2) = 25\cdot 4 + 9\cdot\frac{1}{3} + 0 = 103;$$

$$D(3XY + 2X) = 9D(XY) + 4D(X) = 9\left(4\cdot\frac{1}{3} + 16\cdot\frac{1}{3} + 4\cdot 4\right) + 4\cdot 4 =$$

$$= 9\left(\frac{20}{3} + 16\right) + 16 = 3\cdot 20 + 160 = 220.$$

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гмурман, В. Е*. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике [Текст] : учеб. пособие для студ. вузов / В. Е. Гмурман. – М.: Юрайт, 2011. – 404 с. – ISBN 978-5-9916-1266-1.

2. *Бородин, А. Н*. Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики [Текст] : учеб. пособие / А. Н. Бородин. – СПб.: Лань, 2011. – 254 с. – ISBN 978-5-8114-0442-1

3. *Бородин, А. Н.* Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики [Электронный ресурс] : учеб. пособие / А. Н. Бородин. – СПб. : Лань, 2011. – 256 с. – ISBN 978-5-8114-0442-1 – (ЭБС «Лань»). – Режим доступа : http://e.lanbook.com/books/element.php?pll_id=2026

4. *Свешников, А. А*. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций [Электронный ресурс] : учеб. пособие / А. А. Свешников. – СПб.: Лань, 2013. – 448 с. – ISBN 978-5-8114-0708-8 – (ЭБС «Лань»). – Режим доступа : http://e.lanbook.com/ books/element.php?pll_id=5711

5. *Свешников, А. А*. Прикладные методы теории вероятностей [Электронный ресурс] : Учебник / А. А. Свешников. – СПб.: Лань, 2012. – 480 с. – ISBN 978-5-8114-1219-8. – (ЭБС «Лань»). – Режим доступа : http://e.lanbook.com/ books/element.php?pll_id=3184

6. *Гмурман, В. Е*. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие / В. Е. Гмурман. – М.: Высшее образование, 2007. – 478 с. – ISBN 978-5-9692-0150-7.

7. *Ивашев-Мусатов, О. С*. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс] : Учебник и практикум для академ. бакалавриата / О. С. Ивашев-Мусатов. – М.: Юрайт, 2017. – 224 с. – ISBN 978-5-534-01359-7. – (ЭБС «Юрайт»). – Режим доступа : https://biblio-online.ru/ book/819CE9FO-B5DC-42E6-9ADE-531260CC2EA3

8. Практикум и индивидуальные задания по курсу теории вероятностей (типовые расчеты) [Электронный ресурс] / В. А. Болотюк, Л. А. Болотюк, А. Г. Гринь, И. П. Гринь и др. – СПб.: Лань, 2012. – 288 с. – ISBN 978-5-8114-1287-7. – (ЭБС «Лань»). – Режим доступа : http://e.lanbook.com/ books/element.php?pll_id=3800

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица П. 1

Значения функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблица П. 2

Значения функции $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

X	**Ф** *(X)*	*X*	**Ф** *(X)*	*X*	**Ф** *(x)*	*X*	**Ф** *(X)*
0,00	0,0000	0,24	0,0948	0,48	0,1844	0,72	0,2642
0,01	0,0040	0,25	0,0987	0,49	0,1879	0,73	0,2673
0,02	0,0080	0,26	0,1026	0,50	0,1915	0,74	0,2703
0,03	0,0120	0,27	0,1064	0,51	0,1950	0,75	0,2734
0,04	0,0160	0,28	0,1103	0,52	0,1985	0,76	0,2764
0,05	0,0199	0,29	0,1141	0,53	0,2019	0,77	0,2794
0,06	0,0239	0,30	0,1179	0,54	0,2054	0,78	0,2823
0,07	0,0279	0,31	0,1217	0,55	0,2088	0,79	0,2852
0,08	0,0319	0,32	0,1255	0,56	0,2123	0,80	0,2881
0,09	0,0359	0,33	0,1293	0,57	0,2157	0,81	0,2910
0,10	0,0398	0,34	0,1331	0,58	0,2190	0,82	0,2939
0,11	0,0438	0,35	0,1368	0,59	0,2224	0,83	0,2967
0,12	0,0478	0,36	0,1406	0,60	0,2257	0,84	0,2995
0,13	0,0517	0,37	0,1443	0,61	0,2291	0,85	0,3023
0,14	0,0557	0,38	0,1480	0,62	0,2324	0,86	0,3051
0,15	0,0596	0,39	0,1517	0,63	0,2357	0,87	0,3078
0,16	0,0636	0,40	0,1554	0,64	0,2389	0,88	0,3106
0,17	0,0675	0,41	0,1591	0,65	0,2422	0,89	0,3133
0,18	0,0714	0,42	0,1628	0,66	0,2454	0,90	0,3159
0,19	0,0753	0,43	0,1664	0,67	0,2486	0,91	0,3186
0,20	0,0793	0,44	0,1700	0,68	0,2517	0,92	0,3212
0,21	0,0832	0,45	0,1736	0,69	0,2549	0,93	0,3238
0,22	0,0871	0,46	0,1772	0,70	0,2580	0,94	0,3264
0,23	0,0910	0,47	0,1808	0,71	0,2611	0,95	0,3289

X	**Φ** *(X)*	*X*	**Φ** *(X)*	*X*	**Φ** *(x)*	*X*	**Φ** *(X)*
0,96	0,3315	1,37	0,4147	1,78	0,4625	2,36	0,4909
0,97	0,3340	1,38	0,4162	1,79	0,4633	2,38	0,4913
0,98	0,3365	1,39	0,4177	1,80	0,4641	2,40	0,4918
0,99	0,3389	1,40	0,4192	1,81	0,4649	2,42	0,4922
1,00	0,3413	1,41	0,4207	1,82	0,4656	2,44	0,4927
1,01	0,3438	1,42	0,4222	1,83	0,4664	2,46	0,4931
1,02	0,3461	1,43	0,4236	1,84	0,4671	2,48	0,4934
1,03	0,3485	1,44	0,4251	1,85	0,4678	2,50	0,4938
1,04	0,3508	1,45	0,4265	1,86	0,4686	2,52	0,4941
1,05	0,3531	1,46	0,4279	1,87	0,4693	2,54	0,4945
1,06	0,3554	1,47	0,4292	1,88	0,4699	2,56	0,4948
1,07	0,3577	1,48	0,4306	1,89	0,4706	2,58	0,4951
1,08	0,3599	1,49	0,4319	1,90	0,4713	2,60	0,4953
1,09	0,3621	1,50	0,4332	1,91	0,4719	2,62	0,4956
1,10	0,3643	1,51	0,4345	1,92	0,4726	2,64	0,4959
1,11	0,3665	1,52	0,4357	1,93	0,4732	2,66	0,4961
1,12	0,3636	1,53	0,4370	1,94	0,4738	2,68	0,4963
1,13	0,3708	1,54	0,4382	1,95	0,4744	2,70	0,4965
1,14	0,3729	1,55	0,4394	1,96	0,4750	2,72	0,4967
1,15	0,3749	1,56	0,4406	1,97	0,4756	2,74	0,4969
1,16	0,3770	1,57	0,4418	1,98	0,4761	2,76	0,4971
1,17	0,3790	1,58	0,4429	1,99	0,4767	2,78	0 4973
1,18	0,3810	1,59	0,4441	2,00	0,4772	2,80	0,4974
1,19	0,3830	1,60	0,4452	2,02	0,4783	2,82	0,4976
1,20	0,3849	1,61	0,4463	2,04	0,4793	2,84	0,4977
1,21	0,3869	1,62	0,4474	2,06	0,4803	2,86	0,4979
1,22	0,3883	1,63	0,4484	2,08	0,4812	2,88	0,4980
1,23	0,3907	1,64	0,4495	2,10	0,4821	2,90	0,4981
1,24	0,3925	1,65	0,4505	2,12	0,4830	2,92	0,4982
1,25	0,3944	1,66	0,4515	2,14	0,4838	2,94	0,4984
1,26	0,3962	1,67	0,4525	2,16	0,4846	2,96	0,4985
1,27	0,3980	1,68	0,4535	2,18	0,4854	2,98	0,4986
1,28	0,3997	1,69	0,4545	2,20	0,4861	3,00	0,49865
1,29	0,4015	1,70	0,4554	2,22	0,4868	3,20	0,49931
1,30	0,4032	1,71	0,4564	2,24	0,4875	3,40	0,49966
1,31	0,4049	1,72	0,4573	2,26	0,4881	3,60	0,499841
1,32	0,4066	1,73	0,4582	2,28	0,4887	3,80	0,499928
1,33	0,4082	1,74	0,4591	2,30	0,4893	4,00	0,499968
1,34	0,4099	1,75	0,4599	2,32	0,4898	4,50	0,499997
1,35	0,4115	1,76	0,4608	2,34	0,4904	5,00	0,499997

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Марина Израилевна **Андреева**
Регина Евгеньевна **Горелик**
Олег Константинович **Чесноков**
Наталья Вячеславовна **Чигиринская**

**СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ
И ЗАКОНЫ ИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ**

Учебно-методическое пособие

2-е издание, переработанное и дополненное

Редактор *Л. Н. Рыжих*

Темплан 2019 г. (учебники и учебные пособия). Поз. № 125.
Подписано в печать 21.11.2019. Формат 60x84 1/16. Бумага газетная.
Гарнитура Times. Печать офсетная. Усл. печ. л. 7,44. Уч.-изд. л. 5,57.
Тираж 50 экз. Заказ

Волгоградский государственный технический университет.
400005, г. Волгоград, просп. В. И. Ленина, 28, корп. 1.

Отпечатано в типографии ИУНЛ ВолгГТУ.
400005, г. Волгоград, просп. В. И. Ленина, 28, корп. 7.