

Волгоградский государственный
технический университет

В. К. Михайлов

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПОЛУЧЕНИЯ ИНФОРМАЦИИ

Учебное пособие

Предназначено для студентов 2–3 курсов
инженерно-технических специальностей вузов.

Уровень изложения материала предусматривает знание студентом физики и математики
в объёме программы технических вузов. Изложение ведётся в системе СИ.



Волгоград
2023

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
ВВЕДЕНИЕ	5
1. Цель курса. Примеры	5
2. О термине «информация»	10
3. Измерения и их обработка	14
3.1. Понятие об измерении.....	14
3.2. Единицы измерения системы СИ	14
3.3. Первичные эталоны	15
3.4. Прямые и косвенные методы измерений	17
3.5. Оценка точности одного прямого измерения	18
3.6. Оценка точности многократных прямых измерений	18
3.7. Оценка точности косвенных измерений	19
3.8. Виды усреднения случайных величин	20
3.9. Обработка экспериментальных результатов методом наименьших квадратов	21
РАЗДЕЛ 1. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗМЕРЕНИЙ В ОБЛАСТИ МЕХАНИКИ ...	24
1. Измерение времени	24
1.1. Уравнение синусоидальных колебаний	25
1.2. Свободные колебания физического маятника	25
1.3. Автоколебания	27
1.4. Механические (маятниковые) часы	28
1.5. Электрические кварцевые часы	30
ПРИЛОЖЕНИЕ. Добротность колебательной системы	34
2. Измерения веса и массы	36
3. Определение ускорения свободного падения g	40
3.1. Определение g математическим маятником	40
3.2. Определение g на машине Атвуда	42
4. Определение коэффициента сухого трения	42
5. Определение скорости пули	45
5.1. Определение скорости пули баллистическим методом	45
5.2. Определение скорости пули кинематическим методом	46
6. Волны в упругой среде. Определение скорости звука в воздухе	47
6.1. Понятие волн в упругой среде	47
6.2. Плоские синусоидальные волны	48
6.3. Сферические волны	50
6.4. Звуковые волны в воздухе	51
6.5. Стоячие волны	52
6.6. Определение скорости звука в воздухе методом стоячей волны	53
РАЗДЕЛ 2. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗМЕРЕНИЙ В ОБЛАСТИ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕРМОДИНАМИКИ	55
1. Определение средней скорости молекул	55
2. Оценка размеров молекул	57
3. Измерение температуры	57
3.1. Эталон и единица температуры. Диаграмма фазового состояния воды	57
3.2. Средства измерения температуры – термометры	60

3.3. Контактные термометры	60
3.3.1. Газовый термометр постоянного объёма	60
3.3.2. Жидкостные термометры	61
3.3.3. Термометры сопротивления (терморезисторы)	62
3.3.4. Термоэлектрические датчики (термопары)	64

ВВЕДЕНИЕ

1. ЦЕЛЬ КУРСА. ПРИМЕРЫ

*Любую задачу можно решить,
если смотреть на неё достаточно долго.*

А. Б. Ходулёв

Целью курса является знакомство студента с экспериментальными и теоретическими методами и средствами получения информации о явлениях и процессах в природе. Эти методы основаны на использовании физических законов в области механики, термодинамики, электромагнетизма, оптики, астрофизики, атомной физики с применением математического аппарата для обработки и представления результатов в форме, удобной для восприятия и практического применения.

Как правило, для описания того или иного явления или процесса требуется комплексное использование законов из различных областей физики.

Хотя в основе получения знаний о процессах и явлениях в природе всегда лежит эксперимент, т. е. непосредственные наблюдения и измерения, часто, если непосредственный эксперимент технически затруднён или невозможен (например, в астрофизике или в термоядерных процессах), для исследования природных процессов используется их *моделирование* в лаборатории или на компьютере. Но поскольку всякая модель есть огрубление натурального процесса, выделение лишь его наиболее существенных, по мнению автора, параметров, то трудность здесь в том, чтобы в модели не упустить эти важные параметры, т. е. чтобы модель была по возможности *адекватной* исследуемому объекту или процессу, иначе из неё будут сделаны совершенно неверные выводы об этом процессе или объекте.

Искусство экспериментатора состоит в том, чтобы сравнительно простыми средствами уметь получать весьма богатую информацию о характеристиках и свойствах объектов. Это достигается на основе знания физических законов и владения математическим аппаратом. Вот несколько примеров применения физических законов к получению весьма интересной информации.

Пример 1. Оценить температуру накала вольфрамовой нити обычной 100-ваттной лампочки.

Решение. Здесь используется закон Джоуля-Ленца и линейное приближение температурной зависимости сопротивления металла:

$$R(T) = R_0(1 + \alpha \Delta T), \quad (1)$$

где R_0 – сопротивление металла при какой-либо фиксированной температуре T_0 , например, при $T_0 = 0^\circ\text{C}$; $\Delta T = T - T_0$, так что при $T_0 = 0$: $\Delta T = T$; α – термический коэффициент сопротивления, он находится из таблиц. График функции (1) показан на рис. 1.

Если измерить омметром сопротивление холодной 100-ваттной лампочки, то получим $R_{\text{хол}} = R_0 \approx 36$ Ом. Сопротивление вольфрамовой нити при полном накале:

$$R_{\text{гор}} = U^2/P = 220^2/100 = 484 \text{ Ом.}$$

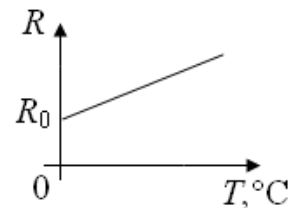


Рис. 1.

Из таблицы находим, что для вольфрама коэффициент $\alpha = 0,005 \text{ K}^{-1}$. Подставляя всё это в формулу (1), получаем температуру T вольфрамовой нити лампочки при полном накале:

$$T = \left(\frac{R_{\text{гор}}}{R_{\text{хол}}} - 1 \right) / \alpha \approx 2500^\circ\text{C}.$$

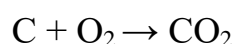
Это в 2,5 раза меньше температуры поверхности нашего Солнца 6000°C .

Пример 2. Оценить массу атмосферы Земли.

Задача решается на основе двух хорошо известных параметров: радиуса Земли: $R = 6400$ км и давления атмосферы на уровне моря $p_0 = 10^5$ Па. Полагая, что толщина слоя атмосферы невелика по сравнению с радиусом Земли, получаем $mg = p_0 S = p_0 4\pi R^2$, откуда $m = p_0 4\pi R^2/g \approx 5 \cdot 10^{18}$ кг.

Отсюда можно получить и ещё одну интересную оценку: а на сколько лет хватит атмосферного кислорода при нынешних темпах сжигания топлива (угля, нефти и газа) около 10 млрд тонн в год при условии, что кислород не пополнялся бы фитопланктоном океана, но и дополнительно не сжигался бы действующими вулканами и разными природными пожарами?

Решение. Масса кислорода в атмосфере Земли составляет примерно 20% от массы всего воздуха, т. е. около 10^{18} кг. В реакции сгорания угля



на 1 кг угля ($M = 12$ г/моль) приходится 3 кг кислорода ($M = 32$ г/моль). Значит, на сжигание 10 млрд тонн $= 10^{13}$ кг угля уйдёт $3 \cdot 10^{13}$ кг кислорода. Это за один год. Следовательно, при оговоренных условиях атмосферного кислорода хватило бы всего на $(5 \cdot 10^{18})/(3 \cdot 10^{13}) \approx 160$ тысяч лет.

Пример 3. Измерение радиуса Земли.

*Сосед учёный Галилея
был Галилея не глупее:
он знал, что вертится Земля.
Но у него была семья...*

Идея о шарообразности Земли принадлежит Пифагору (580 – 500 г.г. до н. э.), который пришёл к такому выводу, наблюдая тень Земли на диске Луны во время лунного затмения.

Одним из первых (не считая египетских жрецов) радиус Земли измерил хорезмский мыслитель и энциклопедист Мухаммед аль-Бируни (973 – 1050 г.). В отличие от своих предшественников, которые определяли радиус Земли, наблюдая за Солнцем из двух точек, разделённых сотнями километров вдоль Нила, аль-Бируни сделал это практически точно простым тригонометрическим методом, по углу α понижения морского горизонта при его наблюдении с горы. Метод заключается в следующем.

Если подняться даже на сравнительно невысокую гору, находящуюся на берегу моря, и задать горизонталь, поставив рядом достаточно широкий сосуд с водой, то далёкий горизонт моря будет виден не параллельным уровню воды в сосуде, а чуть ниже на небольшой угол α (рис. 2). Если измерить высоту холма h и угол понижения горизонта α , то по результатам этих измерений можно определить радиус Земли.

Покажем, что даже со сравнительно небольшого холма высотой $h = 350$ м этот угол α не будет слишком малым, а вполне заметным и измеримым даже простыми средствами, доступными исследователям 11-го века. Из рис. 2 видно, что

$$\cos \alpha = \frac{R}{R + h}.$$

При радиусе Земли $R = 6400$ км получается, что $\alpha = 0,6^\circ$ – очень даже заметный угол (так например, угловой размер диска Луны $\alpha = 0,5^\circ$) Этот угол и был измерен, а из него найден радиус Земли, причём достаточно точно даже по современным меркам.

Этот метод является ярким свидетельством того, как сравнительно простыми средствами можно получить, казалось бы, совершенно недоступную информацию.

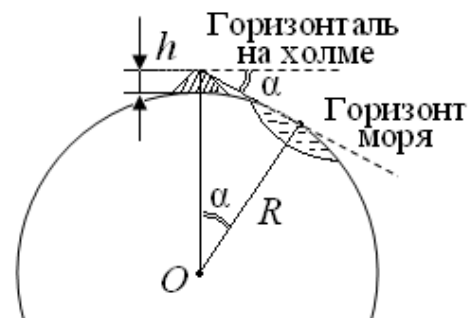


Рис. 2. Определение радиуса Земли тригонометрическим методом

Пример 4. Оценить, на сколько лет при современном уровне потребления энергии на Земле человечеству хватило бы тепловой энергии, выделенной из мирового океана при его охлаждении всего на 1° . Принять:

1) сейчас на Земле ежегодно сжигается 10 млрд тонн условного топлива (в пересчёте на нефть);

2) мировой океан занимает $2/3$ поверхности Земли, а его средняя глубина $h = 4$ км.

Решение. Как легко подсчитать на основе исходных данных, масса воды в мировом океане

$$m = \rho V = \rho(2/3)(4\pi R^2 h) \approx 10^{21} \text{ кг.}$$

Значит, при удельной теплоёмкости воды $c \approx 4000$ Дж/(кг·К) при охлаждении на 1°C океаны Земли выделяют $Q_{\text{выдел.}} = cm\Delta T = 4 \cdot 10^{24}$ Дж тепла.

Удельная теплота сгорания нефти $q \approx 40$ МДж/кг, значит, за год человечество потребляет $Q_{\text{потребл.}} = 4 \cdot 10^7 \cdot 10^{13} = 4 \cdot 10^{20}$ Дж энергии.

Таким образом, взятого из мирового океана тепла при его охлаждении всего на 1° человечеству хватило бы на $10^4 = 10000$ лет. Такой источник энергии при нынешнем уровне её потребления был бы для нас практически неисчерпаемым. Тем более, что такая потеря энергии океаном компенсировалась бы Солнцем. Действительно, при плотности потока солнечного излучения у поверхности Земли $I \approx 1,4$ кВт/м², за год Земля получает от Солнца $Q_{\text{Солн.}} = I \cdot \pi R^2 \cdot 365 \cdot 86400 \approx 5 \cdot 10^{24}$ Дж энергии, что как раз хватило бы на компенсацию охлаждения мирового океана всего за один год.

Замечание. Однако такой путь извлечения энергии невозможен в силу второго закона термодинамики (постулат Томсона):

невозможен круговой процесс, единственным результатом которого было бы получение механической энергии за счёт теплоты, извлечённой из теплового резервуара со всюду одинаковой температурой.

Пример 5. Самолёт (истребитель) летит на небольшой высоте со скоростью $v_c = 300$ м/с (1080 км/ч). Из-за трения о воздух его корпус нагревается. Оценить максимальную температуру такого нагрева, если температура окружающего воздуха $T_0 = 0^\circ\text{C}$. При какой скорости истребителя $v_{\text{пл}}$ его алюминиевый корпус начнёт плавиться, если температура плавления алюминия $T_{\text{пл}} = 658^\circ\text{C}$?

Ответ. $T = (T_0 + \frac{mv_c^2}{3k}) = 378 \text{ К} = 105^\circ\text{C}$, где $m = 29 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг – мас-

са «молекулы воздуха»; $v_{\text{пл}} = 750$ м/с = 2700 км/ч.

Решение. Согласно определению температуры как средней кинетической энергии молекул:

$$\frac{m\langle v_i^2 \rangle}{2} = \frac{3}{2}kT,$$

где $\langle v_i^2 \rangle$ – средний квадрат скоростей молекул, $m = 29 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг – масса «молекулы воздуха». Пусть $T = T_0$ – температура окружающего воздуха.

Тогда $\langle v_i^2 \rangle = \frac{3kT_0}{m}$ (при $T_0 = 273$ К тепловые скорости $v_i \approx 480$ м/с). Для самолёта, летящего со скоростью v_c , каждая молекула движется со скоростью $\mathbf{v} = \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_c$, так что для самолёта средний квадрат скоростей будет таким:

$$\langle v^2 \rangle = \langle (\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_c)^2 \rangle = \langle v_i^2 + 2\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_c + v_c^2 \rangle = \langle v_i^2 \rangle + v_c^2,$$

так как среднее значение $\langle 2\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_c \rangle = 0$ в силу хаотичной направленности скоростей молекул \mathbf{v}_i . Таким образом, температура T корпуса самолёта будет определяться уравнением:

$$\frac{3}{2}kT = \frac{m\langle v_i^2 \rangle}{2} + \frac{mv_c^2}{2} = \frac{3}{2}kT_0 + \frac{mv_c^2}{2},$$

откуда:

$$T = (T_0 + \frac{mv_c^2}{3k}) = (273 + \frac{mv_c^2}{3k}) \text{ К} = (\frac{mv_c^2}{3k}) ^\circ\text{C} = 105^\circ\text{C}.$$

Из условия $T = (T_0 + \frac{mv_{\text{пл}}^2}{3k}) = T_{\text{пл}} = (658 + 273) = 931 \text{ К}$, или $\frac{mv_{\text{пл}}^2}{3k} = 658$

находим: $v_{\text{пл}} = \sqrt{\frac{3k \cdot 658}{m}} = 750 \text{ м/с} \approx 2700 \text{ км/ч}.$

Есть и множество других примеров применения физических законов к получению информации, которую прямыми измерениями получить невозможно: определение размеров молекул, температуры Солнца и звёзд и их массы, направления передачи энергии по ЛЭП и др.

2. О ТЕРМИНЕ «ИНФОРМАЦИЯ»

В физике и математике каждому используемому термину предварительно даётся определение (поэтому физики и математики знают, о чём говорят, в отличие, скажем, от юристов и политиков).

Определений термина «информация» несколько, в зависимости от области его применения. Формально в качестве математического определения информации можно принять следующее:

Пусть имеются два объекта A и B различной природы, и первый описывается набором параметров $\{a_1, a_2, \dots, a_N\}$, а второй объект – набором $\{b_1, b_2, \dots, b_N\}$. И если каждому элементу a_k соответствует определённый b_k и отношения между параметрами b_k изоморфны отношениям между a_k , то говорят, что объект B несёт в себе *информацию* об объекте A . Эта информация не заключена ни в объекте B , рассматриваемом самим по себе, ни в A ; она существует именно в их отношении друг к другу.

Когда мы говорим, что объект B (например, фотография или мозг) принял информацию об A (например, о пейзаже местности), то между элементами $\{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ установились отношения, изоморфные отношениям между элементами $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. т. е. в B сформировался *образ* A .

Использование информации потребителями связано с её *транспортировкой* от источника к приёмнику. Транспортировка может осуществляться во времени и в пространстве. В первом случае говорят о *хранении* информации, во втором – о её *передаче*, или *канализации*.

Передача информации осуществляется сигналами. *Сигнал* – это физический процесс, параметры которого содержат информацию об объекте. *Каналами* передачи сигналов могут быть электромагнитные или звуковые волны, амплитуда, частота или другие параметры которых модулируются информационными сигналами.

Сигналы формируются, как правило, на базе либо синусоидальных колебаний, либо импульсов. В первом случае говорят, что *носитель* сигнала является *гармоническим*, а во втором – *импульсным* (рис. 2.1, а, б). В исходном состоянии носитель не содержит никакой информации. Процесс нанесения информации на носитель называется *модуляцией* и заключается в изменении одного или нескольких параметров носителя в соответствии с характером информации. Если носитель гармонический:

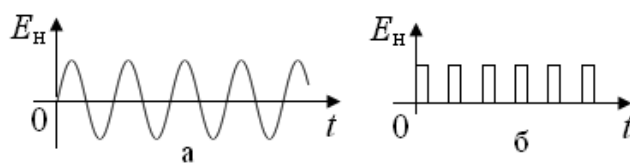


Рис. 2.1. Носители сигналов:
а – гармонический, б – импульсный

$$E = E_0 \sin \omega t,$$

то его модуляция может быть *амплитудной*: $E_0 = E_0(t)$, а может и *частотной*: $\omega = \omega(t)$ (рис. 2.2).

Если же носитель импульсный, то его модуляция может быть амплитудной: $E_0 = E_0(t)$, частотной $T = T(t)$ или широтноимпульсной $\tau = \tau(t)$, где E_0 – амплитуда импульсов, T – их период следования, τ – их длительность.

Математическая теория информации содержит и много других базовых понятий, например,

объём информации,
единица информации,
алфавит,
спектры сигналов,
каналы передачи (акустические, оптические, электрические, радио-),
скорость передачи сигналов по каналу,
пропускная способность канала,
способы разделения каналов и др.

Вот определения некоторых из этих понятий:

Сигналы, передаваемые от источника к приёмнику по каналу, могут быть *непрерывными* и *дискретными*. *Дискретные сигналы* состоят из счётного множества элементов, последовательных во времени.

Непрерывные сигналы представляются какой-либо физической величиной, меняющейся в данном интервале времени. Непрерывный сигнал всегда можно преобразовать в дискретный путём его *квантования* (дискретизации, или оцифровке) во времени. Это по разным причинам удобно, поэтому далее будем считать, что сигнал имеет дискретный характер.

Набор всевозможных элементов называется *алфавитом* источника, а сами элементы – *буквами*. Число букв в алфавите – это *объём алфавита*.

Дискретный сигнал, создаваемый источником, может быть представлен в виде набора букв, выбранных определённым образом из его алфавита. Каждая буква, т. е. каждый элемент алфавита, переносит тем больше информации, чем из большего числа элементов он выбран, т. е. чем богаче алфавит. Пусть Q – объём алфавита, а слово составляется из n букв. Тогда число N всевозможных комбинаций букв, т. е. число всевозможных слов, будет таким:

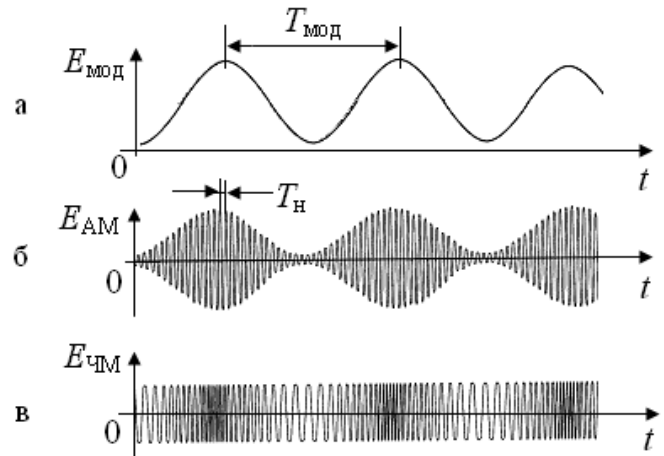


Рис. 2.2. Модуляция гармонического носителя:
а – модулирующий сигнал с периодом $T_{\text{мод}}$;
б – амплитудно модулированный сигнал;
в – частотно модулированный сигнал;
 $T_{\text{н}}$ – период носителя ($\omega_{\text{н}} = 2\pi/T_{\text{н}}$)

$$N = Q^n.$$

В качестве меры количества информации J принимается двоичный логарифм от числа N :

$$J = \log_2 N = n \log_2 Q. \quad (1)$$

Количество информации измеряется в *битах*. Простейший алфавит состоит из двух букв: 0 и 1, т. е. $Q = 2$. В этом случае слово, состоящее из одной буквы ($n=1$), несёт информацию в 1 бит:

$$J = 1 \cdot \log_2 2 = 1 \text{ бит.}$$

При кодировании сообщений по двоичной системе счисления слово, состоящее из n двоичных знаков (нулей и единиц), несёт количество информации $J = n \log_2 2 = n$ бит. Например, в двоичной системе трёхразрядное слово 101 (5 в десятичной системе) содержит 3 бита информации.

Пример 1. Роликовый пятиразрядный счётчик: $n = 5$, $Q = 10$ цифр.

На таком счётчике число всевозможных слов $N = Q^n = 10^5 = 100000$. Количество информации в одном слове $J = \log_2 N = 5 \log_2 10 \approx 15$ бит.

Пример 2. Страница книги: $p = 33$ строки и $q = 60$ число букв в строке, т. е. сообщение страницы (слово) состоит из $n = pq = 2000$ букв, а алфавит пусть содержит $Q = 32$ буквы. Тогда страница книги содержит

$$J = n \log_2 Q = 2000 \log_2 32 = 2000 \cdot 5 = 10000 \text{ бит} = 10 \text{ кбит информации.}$$

Пример 3. Пусть один кадр изображения на экране содержит

$$n = 1000 \cdot 1000 = 10^6$$

дискретных элементов, и каждый элемент имеет $Q = 1024$ градации цвета и яркости. Тогда каждый кадр изображения несёт

$$J = n \log_2 Q = 10^6 \log_2 1024 = 10^7 \text{ бит} = 10 \text{ Мбит информации.}$$

И если в секунду передаётся 50 кадров, то скорость передачи информации по видеоканалу в этом случае будет 500 Мбит/с.

Известно, однако, что пропускная способность зрительного канала ЦНС человека составляет не более 50 – 100 бит/с, и тем не менее, человек как-то «понимает» содержание кадра. Это связано с тем, что мозг человека воспринимает и обрабатывает далеко не всю поступающую на сетчатку глаза информацию, а только наиболее ценную для него часть, необходимую мозгу для устранения неопределённости в собственной модели наблюдаемого объекта и построение его цельного образа. Если такой модели объекта в мозгу нет, то он такой объём информации не воспримет, т. е. он совершенно не запомнит за одну секунду произвольный набор из 500 млн нулей и единиц.

Замечание. Восемь бит составляют один *байт*: $1 \text{ Б} = 8 \text{ бит}$. Он содержит 8 двоичных разрядов ($n = 8$): $1 \text{ Б} = 8 \log_2 2 = 8 \text{ бит}$. Два или более байта образуют *слово*. Множество слов – это *файл*.

Однако для целей нашего курса эти формальные определения и термины по существу не потребуются. Поэтому за основу достаточно принять нестрогое, «житейское» понятие об информации как о некоем «сообщении», «сведениях о чём-либо», хотя по существу такое «определение» выражает одно неопределённое понятие через другое.

Кстати, термины «знать» или «понимать» что-либо также имеют весьма туманное содержание. Ведь «*знать*», или «*понимать*» какой-либо закон – это нечто большее, чем просто уметь произнести соответствующую формулировку или записать формулу, например, формулу закона Ома. Считается, что человек понимает данное явление или закон, если он с его помощью может решать определённый класс задач, может предсказать его следствия, знать пределы его применимости, базовые принципы, на которых основано данное утверждение. Всё это касается, в том числе, и закона Ома, у которого, как известно, существуют довольно жёсткие границы его применимости.

3. ИЗМЕРЕНИЯ И ИХ ОБРАБОТКА

3.1. Понятие об измерении

Измерить физическую величину – значит количественно сравнить её с однородной *эталонной величиной*, принятой за единицу.

Первичные эталоны хранятся в ведущих европейских лабораториях при фиксированных температуре и влажности, например, эталон массы, эталон длины, эталон времени. Первичные эталоны воспроизводят данную величину с наивысшей точностью.

Образцовые средства измерения (меры) – это копии с первичных эталонов, хранящиеся в национальных лабораториях многих стран и служащие для поверки и градуировки по ним *рабочих средств измерения*.

Рабочие средства контроля предназначены для непосредственного контроля и поверки измерительных приборов в различных метрологических лабораториях. Они выпускаются промышленностью в массовом количестве и находятся в органах метрологического контроля предприятий.

Измерительные приборы разделяются на *классы точности*. Так например, для стрелочных электроизмерительных приборов (амперметров, вольтметров и др.) существует девять классов точности:

- 0.05, 0.1, 0.2 – прецизионные (высокоточные) приборы,
- 0.5, 1.0, 1.5 – лабораторные приборы,
- 2.0, 2.5, 4.0 – технические приборы.

3.2. Единицы измерения системы СИ

Далее при изложении данного курса везде будем использовать принятую в физике с 1960 г. систему единиц СИ (SI – System International of Units), которая содержит шесть *основных* и три *дополнительных* единицы:

кг (килограмм) – масса (m), м (метр) – длина (l), с (секунда) – время (t), К (кельвин) – термодинамическая температура (T), А (ампер) – электрический ток (I), кд (кандела) – сила света (I_v);	}	– основные единицы;
радиан – плоский угол (рад), стерадиан – пространственный угол (ср), моль – количество вещества (моль).	}	– дополнительные единицы.

Все остальные единицы – ньютон, джоуль, ватт, фарад и др. – являются *производными* и выражаются через основные. Так например, **кулон** (Кл, электрический заряд) – это *производная* единица СИ и определяется как заряд, переносимый током $I = 1$ А за время $t = 1$ с: $1 \text{ Кл} = 1 \text{ А} \cdot 1 \text{ с}$. Измерено, что величина элементарного заряда: $e \approx 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

3.3. Первичные эталоны

Механика имеет дело с тремя *первичными физическими эталонами*, которые хранятся в одной из лабораторий под Парижем. Это эталоны *массы, длины и времени*.

1. **Масса m** некоторого тела – это количество вещества, содержащегося в этом теле (здесь налицо тавтология, ибо не определено понятие «количество вещества»). Измерить массу тела – значит сравнить её с массой некоторого *эталонного тела*, масса которого принимается за единицу.

Единицей массы в системе СИ является **килограмм** (кг). **Килограмм** – это масса эталонного Pt-Ir цилиндра ($D = 39$ мм, $h = 39$ мм). Практически один килограмм равен массе 1 дм^3 чистой воды при температуре 4°C .

2. **Длина l** (расстояние между двумя точками). Измерение длины отрезка означает количественное сравнение его размеров с *эталонной длиной*.

Единицей длины в системе СИ является **метр** (м). Раньше (до 1960 г.) эталоном метра служило расстояние между двумя тончайшими штрихами, нанесёнными на Pt-Ir стержне. Однако с годами такой способ определения метра стал неудовлетворительным, так как при микроскопном рассмотрении штрихов они оказались слишком широкими и неопределённость расстояния между ними стала уже неприемлемой. Поэтому в 1960 году был введён более точный – атомно-спектроскопический эталон метра:

$1 \text{ м} = 1650763,73 \lambda$, где λ – длина волны оранжевого света, излучаемого атомом криптона ^{86}Kr при электронном переходе $5d_2 \rightarrow 2p_{10}$. Это давало уже 9 знаков точности, т. е. один метр определялся с точностью до 1 нм (или 1 километр – с точностью до 1 мкм) !

Замечание. Раньше в царской России единицами длины служили такие уже подзабытые единицы, как: дюйм ($1 \text{ дюйм} \approx 2,5 \text{ см}$), пядь (длина ступни), вершок ($1 \text{ вершок} \approx 4,5 \text{ см}$ – две фаланги указательного пальца взрослого человека), аршин ($1 \text{ аршин} = 16 \text{ вершков} \approx 71 \text{ см}$), сажень ($1 \text{ сажень} \approx 2 \text{ м}$), верста ($1 \text{ верста} = 500 \text{ саженей} \approx 1 \text{ км}$).

3. **Время t** . Время между двумя событиями в одном и том же месте считается измеренным, если параллельно с этими событиями наблюдается некоторый эталонный физический процесс (часы), который *постулируется* периодическим.

Единицей времени в системе СИ является секунда (с). **Секунда** – это промежуток времени, в течение которого совершается $N = 9\,192\,631\,770$ колебаний излучения, соответствующего определённому электронному переходу в атоме ^{133}Cs . Столь высокая точность в 10 знаков соответствует точности часов ± 1 секунда за 300 лет! Это позволяет наблюдать эффекты

изменения темпа времени даже в несильно отличающихся гравитационных полях, например, на Земле на уровне моря и на высоте 1 км.

А вот определения других основных и дополнительных единиц СИ:

4. **Электрический ток I** в системе СИ измеряется в амперах. **Ампер** – это ток, который, протекая по каждому из двух тонких прямых бесконечно длинных проводов, находящихся в вакууме на расстоянии 1 м друг от друга, создаёт между ними погонную силу взаимодействия $F_0 = 2 \cdot 10^{-7}$ Н/м.

5. Термодинамическая температура T в системе СИ измеряется в **кельвинах**: $1 \text{ К} = 1/273,16$ часть температуры тройной точки воды, т. е. точки на диаграмме состояния, в которой вода может одновременно сосуществовать в трёх агрегатных состояниях – твёрдом, жидком и газообразном. Экспериментально тройная точка может воспроизводиться с точностью до 0,0001 К. Связь со шкалой Цельсия: $\Delta T = 1 \text{ К} = 1^\circ\text{C}$ (но температура $T, \text{ К} = T, ^\circ\text{C} + 273$).

6. **Кандела** – это сила света монохроматического источника мощностью $P = 1/693$ Вт, с длиной волны $\lambda = 555$ нм (зелёный), излучаемого в телесный угол $\alpha = 1$ ср.

7. **Моль** вещества – это количество этого вещества, в котором содержится столько же его структурных единиц (атомов, молекул), сколько атомов содержится в 0,012 кг углерода C^{12} . Это число равно $6,02 \cdot 10^{23}$ (штук).

8. **Радииан** (рад) – это плоский угол между двумя радиусами окружности радиусом R , которые вырезают на ней дугу длиной $l = R$. Так как длина окружности $l = 2\pi R$, то *развёрнутый* угол $\alpha = l/R = 2\pi$ рад. А так как во внесистемных градусах этот же угол равен 360° , то соотношение между радианной и градусной мерами плоских углов будет такой:

$$1 \text{ рад} = 360^\circ / (2\pi) \approx 57,3^\circ.$$

9. **Стерadian** (ср) – это пространственный угол при вершине конуса, которая находится в центре сферы радиусом R , а основание конуса вырезает на сфере площадку площадью $S = R^2$. Так как площадь сферы $S = 4\pi R^2$, то *полный пространственный угол* $\Omega = 4\pi$ ср.

Замечание 1. Кроме градуса, внесистемными единицами измерения плоских углов являются *угловая минута* и *угловая секунда*:

$$1^\circ = 60' = 3600'',$$

так что $1 \text{ рад} \approx 206000''$. В этих единицах удобно указывать угловые размеры удалённых объектов. Или угловые разрешения оптических приборов. Так например, угловые размеры дисков Солнца и Луны при взгляде с Земли примерно одинаковы (это случайно) и равны около $32'$. Угловое разрешение человеческого глаза составляет примерно $2'$, а вот у современных

интерференционных оптических телескопов оно достигает $0,0001''$! Чтобы представить себе столь высокое разрешение, вот пример: как легко подсчитать, одна угловая секунда – это 1 мм с расстояния 200 м; следовательно, такой телескоп разрешит (т. е. различит) с расстояния 2000 км две точки, расстояние между которыми 1 мм. С помощью таких телескопов удаётся непосредственно измерять размеры наиболее крупных звёзд.

Замечание 2. Если параметры процессов или объектов – время, размеры, масса, энергия, напряжение, ток, ёмкость и др. – очень малы или очень велики по сравнению с базовыми (секунда, метр, ампер, паскаль и т. д.), то к базовым терминам используют десятичные приставки: милли-, микро-, нано-, кило-, мега-, гига- и т. д.: $1 \text{ мА} = 10^{-3} \text{ А}$, $1 \text{ мкА} = 10^{-6} \text{ А}$, $1 \text{ нА} = 10^{-9} \text{ А}$, $1 \text{ кА} = 10^3 \text{ А}$, $1 \text{ мкс} = 10^{-6} \text{ с}$, $1 \text{ ГБ} = 10^9 \text{ Б}$, $1 \text{ пФ} = 10^{-12} \text{ Ф}$, $1 \text{ кПа} = 10^3 \text{ Па}$.

В следующей таблице приведены наиболее часто используемые в физике десятичные приставки: их названия, обозначения и степени десяти:

Таблица 3.1. Десятичные приставки к названиям базовых терминов.

Обозначение и название	Степень 10-ти
Т – тера	10^{12}
Г – гига	10^9
М – мега	10^6
к – кило	10^3
д – деци	10^{-1}
с – санти	10^{-2}
м – милли	10^{-3}
мк – микро	10^{-6}
н – нано	10^{-9}
п – пико	10^{-12}
ф – фемто	10^{-15}

3.4. Прямые и косвенные методы измерений

В основе любых измерений лежат физические законы и определения.

Методы измерений можно разделить на *прямые* и *косвенные*. В первом случае измеряемая величина определяется непосредственно по шкале прибора. Во втором – она определяется расчётом по результатам измерений других, связанных с нею величин.

Измерить какую-либо величину непосредственно удаётся лишь в редких случаях. Это, например,

- вес тела – определяется прямо по показаниям весов,
- температура – прямо по показанию термометра,
- размеры тела – прямо по линейке.

В большинстве же случаев искомую величину приходится вычислять на основе прямых измерений других, связанных с нею величин. Так например, ускорение свободного падения в данном месте Земли можно определить по измерениям периода качаний (T) математического маятника и длины его нити (l) на основе известной формулы: $T = 2\pi\sqrt{l/g}$. Сопротивление проводника можно вычислить по результатам измерений тока и напряжения на нём: $R = U/I$. Скорость пули непосредственно спидометром не измеришь, но её можно определить баллистическим методом – по отстрелу в висящий на нити мешок с песком и измерению угла его отклонения.

3.5. Оценка точности одного прямого измерения

При определении многих физических величин прямым методом часто достаточно одного прямого измерения прибором. Так например, нет смысла при постоянных условиях многократно измерять выходное напряжение генератора, температуру в комнате, длину стержня, вес тела. В этом случае результат измерения величины x записывается в виде:

$$x = x_0 \pm \Delta x_{\text{пр}},$$

где x_0 – измеряемое значение величины x , $\Delta x_{\text{пр}}$ – абсолютная погрешность данного прибора.

Абсолютная погрешность прибора $\Delta x_{\text{пр}}$ определяется его конструкцией и качеством, и превзойти её невозможно никаким методом измерений на нём. Прибор не может дать больше того, что заложено в его конструкции. Для более точных измерений надо взять прибор более высокого класса. Так например, если термометр имеет точность до 1°C , то, сколько бы мы им ни меряли, ни усредняли, точности $0,1^\circ$ на нём не добиться. Линейкой с миллиметровыми делениями никак невозможно измерить длину стержня с точностью до $0,1$ мм. Поэтому результаты измерений такими приборами следует записывать, например, в виде:

$$T = 24 \pm 1^\circ \text{C}, \quad l = 250 \pm 1 \text{ мм}.$$

Для более точного измерения длины надо взять, например, штангенциркуль (точность $0,05$ мм) или микрометр (точность $0,01$ мм). Или термометр с более точной шкалой: $T = 36,5^\circ \text{C}$ ($\Delta T = 0,1^\circ \text{C}$).

3.6. Оценка точности многократных прямых измерений

Часто возникают ситуации, когда при повторных измерениях величины x в одинаковых условиях получаются хоть и близкие, но заметно отличающиеся значения x_1, x_2, \dots, x_n . В этом случае говорят, что величина x имеет *случайный*, или *статистический* характер. Случайной величиной может быть, например, время падения шарика с крыши, измеряемое секундоме-

ром с точностью до 0,01 с. Или длина комнаты, измеряемая короткой линейкой с точностью до 1 мм.

Если измеряемая величина x имеет случайный характер, то наилучшей её оценкой является среднее арифметическое из проделанных n измерений:

$$x = \langle x \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Погрешность $\Delta x_{\text{сл}}$, которая называется *случайной*, оценивается по формуле:

$$\Delta x_{\text{сл}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\Delta x_i|,$$

где $\Delta x_i = x_i - \langle x \rangle$ – погрешность отдельного измерения.

При наличии и систематической (приборной) погрешности $\Delta x_{\text{пр}}$ (а она есть всегда и указывается либо на шкале прибора, либо в его паспорте), *абсолютная погрешность* измерений определяется по формуле:

$$\Delta x = \sqrt{(\Delta x_{\text{сл}})^2 + (\Delta x_{\text{пр}})^2}. \quad (3.1)$$

И тогда результат измерений величины x записывается в виде:

$$x = \langle x \rangle \pm \Delta x. \quad (3.2)$$

Из (3.1) видно, что если $\Delta x_{\text{сл}} \ll \Delta x_{\text{пр}}$, то достаточно и одного измерения. Если же величина x имеет явно выраженный случайный характер, то в учебной лаборатории необходимо выполнить 4–5 её измерений.

Замечание. Случайную погрешность $\Delta x_{\text{сл}}$ можно уменьшить, взяв более грубый прибор. Например, если длину комнаты измерять с точностью не до 1 мм, а до 10 см, то случайная погрешность может оказаться вообще нулевой. Но тогда в ещё большей степени возрастёт величина $\Delta x_{\text{пр}}$, так что общая абсолютная погрешность (3.1) увеличится.

Определение. Безразмерная величина

$$\delta = \frac{\Delta x}{\langle x \rangle} \cdot 100\% \quad (3.3)$$

называется *относительной погрешностью* измерений.

Результат измерений величины x часто удобно записывать в виде:

$$x = \langle x \rangle \pm \delta\%.$$

Однако для некоторых величин, например, температуры в градусах Цельсия, где результатом усреднения может оказаться 0°C , форма записи (3.3) неприемлема, а только (3.2).

3.7. Оценка точности косвенных измерений

Пусть искомая величина f является функцией от непосредственно измеряемых величин x и y : $f = f(x, y)$. Тогда наилучшее значение f будет таким:

$$f = \langle f \rangle = f(\langle x \rangle, \langle y \rangle).$$

В качестве абсолютной погрешности косвенного определения величины f при этом можно принять величину Δf , вычисляемую по правилам дифференцирования:

$$\Delta f = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \Delta y,$$

где Δx и Δy определяются по формуле (3.1).

Относительная погрешность определения расчётной величины f

$$\delta_f = \frac{\Delta f}{\langle f \rangle} \cdot 100\%.$$

Пример 1. Пусть $f = ax + by$. Тогда $\Delta f = a\Delta x + b\Delta y$, $\delta_f = \frac{a\Delta x + b\Delta y}{a\langle x \rangle + b\langle y \rangle}$.

Пример 2. Пусть $f = xy$, тогда $\Delta f = \langle y \rangle \Delta x + \langle x \rangle \Delta y$, $\delta_f = \frac{\Delta x}{\langle x \rangle} + \frac{\Delta y}{\langle y \rangle} = \delta_x + \delta_y$.

Пример 3. Пусть $f = e^{\alpha x}$. Тогда $\Delta f = \alpha e^{\alpha x} \Delta x = \alpha \langle f \rangle \Delta x$, $\delta_f = \alpha \Delta x = \alpha x \delta_x$.

Пример 4. Пусть $f = x/y$, тогда $\Delta f = \frac{\langle y \rangle \Delta x + \langle x \rangle \Delta y}{\langle y \rangle^2}$, $\delta_f = \frac{\Delta x}{\langle x \rangle} + \frac{\Delta y}{\langle y \rangle} = \delta_x + \delta_y$.

Пример 5. Пусть $f = x^n$, где n – число, тогда $\Delta f = n\langle x \rangle^{n-1} \Delta x$, $\delta_f = n \frac{\Delta x}{\langle x \rangle} = n\delta_x$.

3.8. Виды усреднения случайных величин

Есть много способов оценки среднего значения результатов измерений. Однако при небольших разбросах экспериментальных величин и разного рода их средние будут отличаться друг от друга несильно. Пусть, например, есть два числа: $x_1 = 9$, $x_2 = 10$. Тогда их *среднее арифметическое*

$$\langle x \rangle_{\text{ар}} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = 9,50, \quad (3.4)$$

среднее геометрическое

$$\langle x \rangle_{\text{геом}} = \sqrt{x_1 x_2} = 9,49,$$

среднее гармоническое

$$\frac{1}{\langle x \rangle_{\text{гарм}}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \right), \text{ т. е. } \langle x \rangle_{\text{гарм}} = 2 \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2} = 9,47,$$

среднее квадратичное

$$\langle x \rangle_{\text{кв}}^2 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2), \text{ т. е. } \langle x \rangle_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}} = 9,51. \quad (3.5)$$

Кроме того, в каждом способе усреднения отдельным числам могут придаваться разные *веса*, в зависимости от их важности или надёжности. Так например, если число x_1 в два раза надёжнее, чем x_2 , то, скажем, в среднем арифметическом ему придаётся вес $p_1 = 2$, а числу x_2 – вес $p_2 = 1$. И тогда

$$\langle x \rangle_{\text{весовое}} = \frac{1}{p_1 + p_2} (p_1 x_1 + p_2 x_2) = \frac{1}{2+1} (9 \cdot 2 + 10 \cdot 1) = 9,33. \quad (3.6)$$

У всех средних есть лишь одно общее свойство:

$$x_{\min} < \langle x \rangle < x_{\max}.$$

Замечание 1. Если числа отличаются не очень сильно, скажем, не более, чем на 10%, то все средние также будут отличаться незначительно. А вот если отличие чисел велико, то и все средние будут отличаться существенно. Так например, если $x_1 = 1$, а $x_2 = 999$, то $\langle x \rangle_{\text{ар}} = 500$, а $\langle x \rangle_{\text{геом}} \approx 30$.

Замечание 2. Если чисел не два, а несколько, n , то формулы (3.4)–(3.6) принимают вид:

$$\text{среднее арифметическое: } \langle x \rangle_{\text{ар}} = \frac{\sum x_i}{n};$$

$$\text{среднее квадратичное: } \langle x \rangle_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}};$$

$$\text{среднее весовое: } \langle x \rangle_{\text{весовое}} = \frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i}; \text{ обычно сумма весов нормируется на}$$

$$\text{единицу: } \sum p_i = 1, \text{ и тогда } \langle x \rangle_{\text{весовое}} = \sum p_i x_i.$$

Замечание 3. Среднеквадратичная погрешность

$$\langle \Delta x \rangle_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{\sum (\Delta x_i)^2}{n}}$$

называется также *дисперсией*, или разбросом случайной величины x .

3.9. Обработка экспериментальных результатов методом наименьших квадратов

Одним из самых распространённых способов усреднения многократных измерений является *метод наименьших квадратов* (МНК), который, в свою очередь, имеет несколько вариантов. Идея метода наименьших квадратов состоит в следующем.

Пусть теория предсказывает, что зависимость одной физической величины (y) от другой (x) является линейной, т. е. описывается функцией

$$y = ax + b. \quad (3.7)$$

И пусть при экспериментальной проверке линейности (3.7), а также с целью определения коэффициентов a и b получена серия экспериментальных точек

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n), \quad (3.8)$$

где n – число измерений. Если $n > 2$, то задача проведения прямой по множеству этих точек является, вообще говоря, неоднозначной. В связи с этим, возникает задача: как провести прямую, наиболее хорошо проходящую через множество точек (3.8)? Термину «наиболее хорошо», или «оптимально», может быть придан разный смысл, т. е. приняты разные *критерии оптимальности* аппроксимирующей прямой. Обычно принимается следующий критерий: оптимальной считается такая прямая (3.7), для которой функционал

$$S = \sum_{i=1}^n (\Delta y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i^{\text{теор}} - y_i)^2 = \sum_{i=1}^n ((ax_i + b) - y_i)^2 \rightarrow \min, \quad (3.9)$$

где x_i и y_i – экспериментальные значения x и y (рис. 3.1).

Условие минимума функционала (3.9) даёт два уравнения для определения коэффициентов a и b оптимальной прямой:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0. \quad (3.10)$$

Дифференцируя (3.9) сначала по a , а затем по b , получаем:

$$\left. \begin{aligned} \sum x_i (ax_i + b - y_i) &= 0, \\ \sum (ax_i + b - y_i) &= 0; \end{aligned} \right\}$$

или:

$$\left. \begin{aligned} a \left(\sum x_i^2 \right) + b \left(\sum x_i \right) &= \sum x_i y_i, \\ a \left(\sum x_i \right) + b n &= \sum y_i. \end{aligned} \right\}$$

Отсюда выражаем искомые коэффициенты a и b через координаты экспериментальных точек (3.8):

$$a = \frac{n \left(\sum x_i y_i \right) - \left(\sum x_i \right) \left(\sum y_i \right)}{n \left(\sum x_i^2 \right) - \left(\sum x_i \right)^2}, \quad b = \frac{1}{n} \left(\sum y_i - a \sum x_i \right). \quad (3.11)$$

Замечание. 1. Если, согласно теории, прямая (3.7) заведомо должна проходить через начало координат, т. е. $b = 0$, то оптимизируется только наклон прямой, т. е. только коэффициент a . В этом случае из уравнений (3.10) остаётся только первое. Оно даёт:

$$a = \left(\sum x_i y_i \right) / \left(\sum x_i^2 \right). \quad (3.12)$$

Замечание. 2. Линейная аппроксимация вида (3.7) является лишь частным случаем многих других аппроксимирующих функций. Так например,

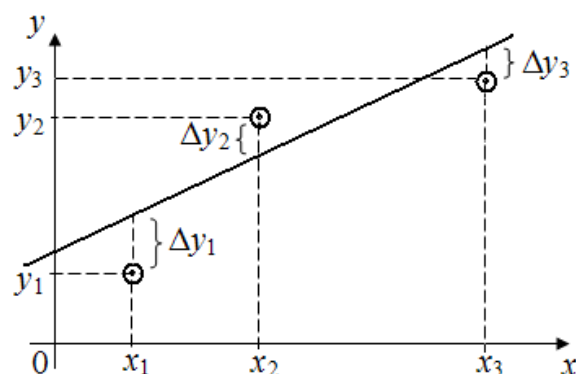


Рис. 3.1. Проведение оптимальной прямой методом наименьших квадратов

если экспериментальную серию точек (3.8) требуется аппроксимировать квадратичной зависимостью вида

$$y = ax^2 + bx + c,$$

то коэффициенты a , b и c оптимальной параболы определяются минимизацией функционала

$$S = \sum \left[(ax_i^2 + bx_i + c) - y_i \right]^2$$

по параметрам a , b и c , т. е. из системы уже трёх уравнений:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial c} = 0.$$

Пример. Провести прямую $y = ax + b$, наилучшим образом проходящую через три точки $(0, 0)$, $(1, 1)$ и $(2, 1)$.

Решение. Подставляя $(x_1 = 0, y_1 = 0)$, $(x_2 = 1, y_2 = 1)$, $x_3 = 2, y_3 = 1)$ в формулу (3.11), получаем: $a = 0,5$, $b = 1/6$. Значит, наилучшей прямой, проходящей через эти точки будет такая: $y = 0,5x + 1/6$ (рис. 3.2, а).

Если же через эти три точки надо провести прямую, заведомо проходящую через ноль, т. е. $b = 0$, то по формуле (3.12) получаем: $a = 3/5$, и искомая прямая будет такой: $y = (3/5)x$ (рис. 3.2, б).

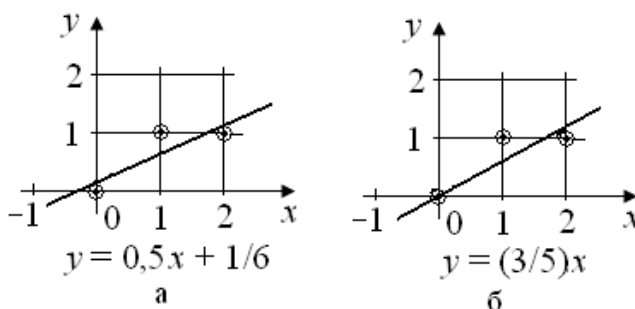


Рис. 3.2. Оптимальные прямые, проходящие через три точки: $y = ax + b$ (а) и $y = ax$ (б).

В нижеследующих разделах рассматриваются физические основы, а также методы и средства измерений различных величин в областях механики, термодинамики, электромагнетизма, оптики и квантовой физики. Причём основное внимание будет уделено физическим основам электромагнитных измерений.

РАЗДЕЛ 1. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗМЕРЕНИЙ В ОБЛАСТИ МЕХАНИКИ

1. ИЗМЕРЕНИЕ ВРЕМЕНИ

Естественной системой для измерения времени первоначально служила Земля. В этой системе секунда определялась как $1/86400$ периода вращения Земли вокруг своей оси. Однако вращение Земли по разным причинам оказалось недостаточно удобным эталоном для физических измерений, поэтому впоследствии в качестве базовой системы для определения секунды был взят астрономический год – период движения Земли вокруг Солнца. Погрешность определения секунды стала меньше, но и она со временем оказалась недостаточной.

Как отмечалось, в 1960 г. в качестве единицы времени был принята «спектроскопическая секунда» – промежуток времени, в течение которого совершается $N = 9\,192\,631\,770$ колебаний излучения, соответствующего определённому электронному переходу в атоме ^{133}Cs . Столь высокая точность в 10 знаков соответствует точности часов ± 1 секунда за 300 лет! Потом появилась «водородная секунда», связанная с электронными переходами в атоме водорода. Она легче воспроизводилась и была ещё на порядок выше.

Практически в качестве приборов для измерения времени (*часов*) выбирается тот или иной периодический процесс, который достаточно стабилен и не очень сложно воспроизводим. Применяемые на практике часы условно можно разделить на механические (маятниковые), электрические (кварцевые) и атомные. У механических часов точность хода не очень высока – порядка нескольких секунд в сутки, зато они просты в изготовлении и массово выпускаются вплоть до нашего времени. Электрические (кварцевые) часы имеют точность на один-два порядка выше. Атомные часы используются только в качестве эталонных мер в специализированных лабораториях. Остановимся подробнее на принципе работы механических и электрических часов.

В основе работы всяких механических часов лежит периодический процесс колебаний *маятника*. К типовым маятникам относятся: *пружин-*

ный – шарик на пружине, *математический* – небольшой шарик на длинной нити, *физический* – твёрдое тело, способное качаться на горизонтальной оси в поле тяжести Земли, и *крутильный* – колёсико с прикреплённой к нему спиральной пружинкой, способное совершать крутильные колебания вокруг своей оси. Общим для всех типов маятников является то, что их колебания описываются одним и тем же *уравнением колебаний*.

1.1. Уравнение синусоидальных колебаний

Определение. Дифференциальное уравнение второго порядка вида

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (1.1)$$

называется уравнением *свободных незатухающих* синусоидальных (гармонических) колебаний. В этом уравнении $x = x(t)$ – текущее смещение колеблющейся точки от положения равновесия, ω – параметр, называемый *собственной частотой* колебательной системы.

Уравнение (1.1) называется так потому, что его общим решением является функция

$$x(t) = X \sin(\omega t + \varphi), \quad (1.2)$$

описывающая синусоидальный колебательный процесс с угловой частотой ω и амплитудой X . Период таких колебаний $T = 2\pi/\omega$ (рис. 1.1). Амплитуда X – это максимальное отклонение от положения равновесия. Выражение $(\omega t + \varphi)$, стоящее под знаком синуса, называется *фазой колебаний*, а угловой параметр φ – *начальной фазой*. Угловая частота ω имеет размерность «рад/с». Прямой подстановкой легко проверить, что функция (1.2) действительно является общим решением уравнения (1.1), т. е. обращает его в тождество.

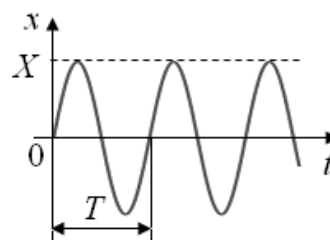


Рис. 1.1

Значения параметров X и φ в решении (1.2) определяются из *начальных условий*, т. е. из конкретного способа возбуждения колебаний.

Если окажется, что движение какого-либо тела описывается дифференциальным уравнением вида (1.1), то это движение будет представлять собой синусоидальные (гармонические) колебания вида (1.2).

Рассмотрим, для определённости, колебания, *физического маятника*, каковым по существу являются маятники всевозможных механических настенных и напольных часов.

1.2. Свободные колебания физического маятника

Определение. Физическим маятником называется твёрдое тело произвольной формы, способное свободно качаться на горизонтальной оси в поле тяжести. Таким телом может быть стержень, кольцо или диск на горизонтальной оси, не проходящей через центр масс.

Итак, пусть твёрдое тело массой m подвешено на горизонтальной оси O (рис. 1.2). Выведем его из равновесия и отпустим. Оно начнёт качаться. Составим уравнение его движения и покажем, что оно совпадает с уравнением колебаний (1.1). Поскольку здесь мы имеем движение твёрдого тела с закреплённой осью, то это будет вращательное движение и его следует описывать уравнением вращения:

$$I\varepsilon = I\ddot{\alpha} = M,$$

где I – момент инерции тела относительно оси вращения O , M – момент силы тяжести mg относительно этой же оси O , $\varepsilon = \ddot{\alpha}$ – угловое ускорение тела. Из рис. 1.2 видно, что момент силы mg :

$$M = mgl \sin \alpha \approx mgl \alpha, \quad (5.3)$$

где l – расстояние от оси вращения O до центра масс C . Но так как этот момент является *возвращающим*, т. е. он действует на тело против направления отклонения α , то следует записать:

$$M = -mgl \alpha.$$

И тогда уравнение вращения тела примет вид:

$$\ddot{\alpha} + \omega^2 \alpha = 0, \quad (1.4)$$

где обозначено: $\omega^2 = mgl/I$. Видно, что это уравнение совпадает с (1.1), значит, тело (маятник) будет совершать синусоидальные колебания, описываемые функцией (1.2), и период этих колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}} \quad (1.5)$$

Замечание 1. Приближение (1.3), приводящее к уравнению синусоидальных колебаний (1.4), справедливо лишь при условии, что колебания маятника будут *малыми*. Термин «малые» означает, что максимальное отклонение тела от положения равновесия (амплитуда колебаний) будет невелико: $\alpha_{\max} \ll 1$, так что $\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$. Иначе уравнение колебаний было бы нелинейным и его решение не было бы синусоидальной функцией типа (5.2), а период его колебаний зависел бы от амплитуды.

Замечание 2. В выражении $\alpha_{\max} \ll 1$ угол α , конечно же, надо брать в радианах, т. е. $\alpha \ll 1$ рад, т. е. $\alpha \ll 57^\circ$, т. е. $\alpha \leq 5^\circ$. Таким образом, малым следует считать отклонение, не превышающее $5-6^\circ$.

Если колебания физического маятника возбуждать, отклоняя тело на некоторый угол α_0 и затем отпуская его, то, как несложно показать, его колебания будут проходить по закону: $\alpha = \alpha_0 \cos \omega t$ с периодом (1.5).

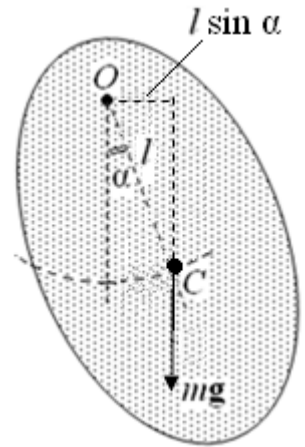


Рис. 1.2. Физический маятник

Пример 1. Найти период колебаний кольца радиусом $R = 10$ см, подвешенного на гвозде. Колебания происходят в плоскости кольца (рис. 1.3).

Решение. Момент инерции кольца относительно точки подвеса O определяем из теоремы Штейнера: $I_O = I_C + mR^2 = 2mR^2$. Следовательно,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_O}{mgR}} = 2\pi \sqrt{\frac{2R}{g}} \approx 0,9 \text{ с.}$$

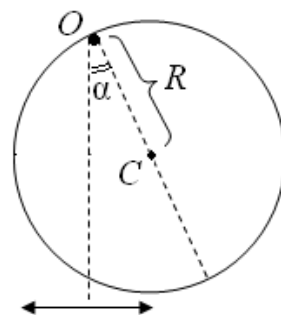


Рис. 1.3. Качание кольца, подвешенного в точке O

Пример 2. Найти период колебаний стержня длиной $l = 20$ см, шарнирно закреплённого на верхнем конце.

Решение. Момент инерции стержня относительно точки подвеса $I = ml^2/3$. Расстояние между точкой подвеса и центром масс $a = l/2$. Следовательно,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mga}} = 2\pi \sqrt{\frac{2l}{3g}} \approx 0,73 \text{ с.} \quad (1.6)$$

1.3. Автоколебания

Уравнение (1.1) описывает именно *свободные* синусоидальные колебания того или иного маятника.

Определение. Колебания называются *свободными*, если они происходят в первоначально выведенной из равновесия системе без дальнейшего поступления в неё энергии от внешних источников. Если же колебания в системе поддерживаются периодическим поступлением в неё энергии извне, то они называются *вынужденными*.

Свободные колебания реальных механических (и электрических) систем всегда являются *затухающими*, т. е. с убывающей до нуля амплитудой. При этом первоначально запасённая колебательной системой энергия в конечном итоге превращается в тепло. Уравнение же (1.1) описывает некий *идеализированный процесс* незатухающих свободных колебаний, когда в идеализированной колебательной системе отсутствует трение, приводящее к потерям (диссипации) энергии и убыванию амплитуды.

Для того, чтобы колебания маятника продолжались сколь угодно долго с постоянной амплитудой, т. е. чтобы они стали *незатухающими*, необходима периодическая «подкачка» в него энергии от внешних источников, т. е. воздействие на него внешней периодической силы. Однако колебания могут быть незатухающими и без периодической внешней силы, т. е. когда сам внешний источник энергии не обладает колебательными свойствами, но отбор энергии от него происходит периодически; и этим периодическим отбором управляет сама колебательная система. Такие колебания называются *автоколебаниями*.

Примеры механических автоколебаний:

- 1) колебания струны у скрипки при равномерном движении смычка;
- 2) гудение проводов при сильном постоянном ветре;
- 3) гудение воздуха в духовой трубе, в свистке;
- 4) скрежещущий звук лезвия при его поперечном движении по стеклу;
- 5) дёргание ножек стола, когда его двигают по шероховатому полу.

В некоторых случаях автоколебания носят почти гармонический характер и происходят с частотой свободных колебаний системы; такие автоколебания называются *квазилинейными*. В других случаях они резко отличаются от гармонических и представляют собою чередование очень быстрых, почти скачкообразных, и сравнительно медленных процессов. В этом случае автоколебания называются *релаксационными*. Примеры 4 и 5 – это типичные механические релаксационные колебания.

На рис. 1.4 показаны графики различных видов колебаний.

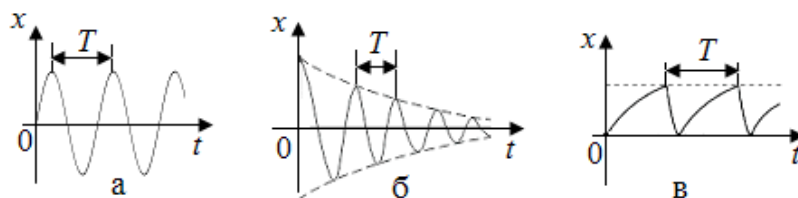


Рис. 1.4. Различные виды колебаний: а – синусоидальные незатухающие, б – синусоидальные затухающие, в – релаксационные

1.4. Механические маятниковые часы

Обратимся теперь к принципу работы механических маятниковых часов. Здесь мы рассмотрим простейшую механическую *автоколебательную* систему – обыкновенные маятниковые часы – одно из многочисленных устройств для измерения времени. Основными элементами таких часов являются *храповое колесо* (или *храповик*) с косыми зубцами и дугообразная планка с парой зубцов – *анкер*¹ (рис. 1.5). Храповик приводится во вращение подвешенной на цепи гирей (или пружиной, если часы пружинные), которая и является для часов источником энергии. С храповиком связаны стрелки часов, а с анкером – маятник, который качает анкер. Маятник в часах может

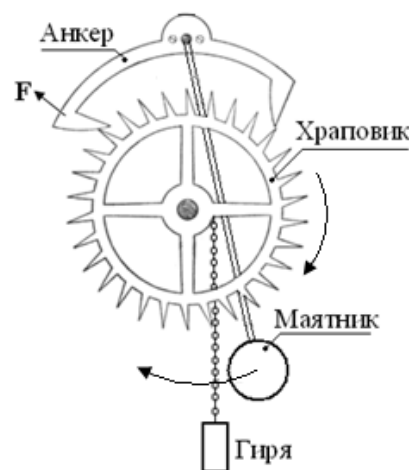


Рис. 1.5. Анкерный механизм маятниковых часов. Стрелки показывают направление движения храповика и маятника в данной фазе колебаний.

¹ Немецкое слово *анкер* означает *якорь*.

быть и крутильным (часы ручные, настольные), но мы, для определённости, будем полагать, что маятник физический. Анкер регулирует периодическую подачу энергии от гири к маятнику, поддерживая его колебания. В показанной на рисунке фазе колебаний очередной зубец храповика давит на левый зубец анкера вверх (сила F), заставляя маятник при этом двигаться влево. После прохождения маятником нижнего положения левый зубец анкера соскальзывает с зубца храповика, храповик немного поворачивается, но правый зубец анкера тут же захватывается одним из правых зубцов храповика, который теперь толкает анкер, а вместе с ним и маятник вправо. Далее всё повторяется. В итоге маятник в первый полупериод получает импульс в одну сторону, а во второй – в другую. За один период колебаний маятника храповик поворачивается ровно на один зубчик.

Если трение в оси храповика и между зубцами невелико (а механизм всегда имеет хорошую смазку), то незатухающие колебания маятника происходят с частотой, практически равной его собственной. А при небольшой амплитуде колебаний маятника в $5 - 6^\circ$ (а это так) эта частота достаточно стабильна и вычисляется по формуле физического маятника.

Недостатком маятниковых часов является существенная зависимость точности их хода от температуры, поскольку от температуры зависит длина их маятника, а значит, в силу формулы (1.5), и период колебаний.

Пример. Пусть, для простоты, маятником часов является стержень и его период колебаний описывается формулой (1.6), т. е. можно считать, что период T пропорционален \sqrt{l} , где l – длина стержня. И пусть часы настроены так, что при температуре $t_0 = 20^\circ\text{C}$ эти часы идут точно. При повышении температуры t стержень немного удлинится, значит, период T увеличится и ход часов замедлится. Оценим замедление хода таких часов за сутки при температуре $t = 30^\circ$, если температурный коэффициент длины для стали $\alpha = 10^{-5} \text{ K}^{-1}$.

Решение. При небольших изменениях температуры Δt° длина стержня меняется линейно: $l = l_0(1 + \alpha \Delta t)$. Отсюда относительное изменение длины при $\Delta t = 10^\circ$:

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{l}{l_0} - 1 = \alpha \Delta t = 10^{-4}.$$

А так как период колебаний стержня $T \sim \sqrt{l}$, то относительное увеличение периода при нагревании стержня на 10° (см. **Пример 5**, разд. 3.7, $n = 1/2$):

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \frac{1}{2} \frac{\Delta l}{l_0} = 5 \cdot 10^{-5}.$$

А поскольку в сутках 86400 секунд, т. е. порядка 10^5 секунд, то за сутки часы отстанут примерно на 5 секунд.

Считается, что часы с анкерным механизмом были изобретены Гюйгенсом (или Гуком?) около 1660 г.

К настоящему времени изобретены десятки других спусковых механизмов часов, более эффективных, чем вышеописанный, и при стабильной температуре дающих точность хода до десятых долей секунды в сутки.

Замечание. В часах с заводной пружиной крутильные колебания совершает колёсико на тонкой спиральной пружинке, а энергия в анкерный механизм поступает от этой заводной пружины.

1.5. Электрические кварцевые часы

Принцип работа электрических кварцевых часов основан на *обратном пьезоэффекте* в кристалле кварца.

У некоторых диэлектрических кристаллов при их механической деформации (сжатии или растяжении) происходит выделение на поверхности связанных электрических зарядов ($+\sigma'$, $-\sigma'$), т. е. поляризация (рис. 1.6). Такие кристаллы называются *пьезоэлектриками*, а сам

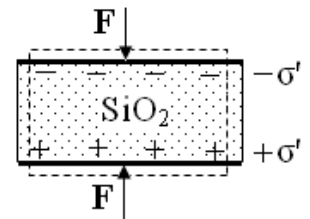


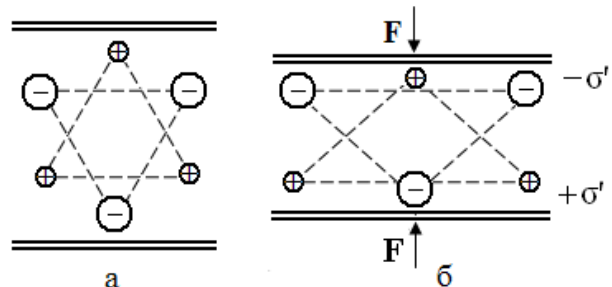
Рис. 1.6. Пьезоэффект

эффект поляризации кристалла при его деформации – *пьезоэлектрическим эффектом*, или просто – *пьезоэффектом*. Пьезоэффектом могут обладать только ионные кристаллы, не имеющие центра симметрии, такие, как титанат бария (BaTiO_3), сульфат цинка (ZnS), сегнетова соль, а также природные и искусственные кристаллы кварца (SiO_2) – наиболее распространённого на Земле соединения.

Механизм возникновения поляризации при сжатии образца показан на рис. 1.7. Суммарные заряды на поверхностях образца при его сжатии уже не равны нулю, образец поляризуется и приобретает дипольный момент.

Рис. 1.7. Механизм пьезоэффекта в ионном кристалле:

а – кристалл не деформирован,
б – кристалл деформирован (сжат)



При этом возникающая между поверхностями образца разность потенциалов может быть весьма большой даже при сравнительно небольших механических напряжениях. Так например, если пластинку кварца площадью $S = 1 \times 1 \text{ см}^2$ и толщиной $h = 0,5 \text{ см}$ сжать с силой $F = 10 \text{ Н}$, то на её гранях появится разность потенциалов (напряжение) $u = Eh = 30 \text{ В}$. Это много. Применяя вместо кварца более сильные пьезоэлектрики, например, сегнетову соль ($\text{Na K C}_4 \text{ H}_4 \text{ O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$) можно получить напряжения в несколько киловольт (!), что используется, например, в пьезозажигалках.

Однако в основе работы кварцевых часов лежит *обратный пьезоэффект*: если к вырезанной определённым образом пластинке кварца приложить внешнее электрическое напряжение, то она будет слегка деформироваться – сжиматься или растягиваться, в зависимости от знака напряжения.

Если приложенное к такой пластинке переменное напряжение будет иметь частоту, совпадающую с собственной частотой механических колебаний пластинки, то в пластинке наступит резонанс. А поскольку собственная *добротность* пластинки очень большая ($Q \sim 10^5 - 10^6$), т. е. резонансная кривая имеет очень узкую полосу $\Delta\omega/\omega = 1/Q$, то пластинка кварца может служить для стабилизации частоты генераторов электрических колебаний, что и используется в кварцевых часах.

Электронный блок кварцевых часов состоит из генератора электрических колебаний (микросхемы) и *кварцевого резонатора*, на резонансной частоте которого стабилизируются колебания генератора. Это позволяет достичь точности хода кварцевых часов порядка 10^{-6} , т. е. 0,1 с/сут. Температурная зависимость точности хода также невелика: $\Delta\omega/\omega \sim 10^{-8}$ на 1°C , т. е. около 1 мс в сутки на 1°C .

Физически кварцевый резонатор в часах представляет собой вакуумированную цилиндрическую капсулу диаметром около 1 мм и длиной 5 мм с двумя выводами для подвода к кристаллу кварца сигнала от микросхемы. В капсуле находится

сам кристалл, вырезанный в виде U-образного камертона (рис. 1.8). При поступлении на кристалл напряжения два колена камертона совершают встречные колебания с высокостабильной резонансной частотой

$$f_0 = 32768 \text{ Гц}$$

(именно такой, и ни герца больше, ни герца меньше; для этого при изготовлении кристалл подвергается тщательной прецизионной обработке). Выбор именно такой частоты связан с тем, что затем она последовательно 15 раз делится на два, т. е. уменьшается в 2^{15} раза, и в результате с выхода делителя частоты снимаются импульсы частотой ровно 1 Гц, т. е. с периодом следования $T = 1 \text{ с}$. Эти импульсы затем и поступают на секундную стрелку, а после деления на 60 – и на минутную, а ещё на 60 – на часовую.

Так работают кварцевые электрические, а точнее – электромеханические часы. В цифровых кварцевых часах импульсы с периодом 1 с преобразуются не в поворот стрелок, а поступают на цифровое табло.

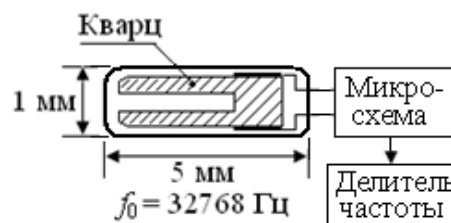
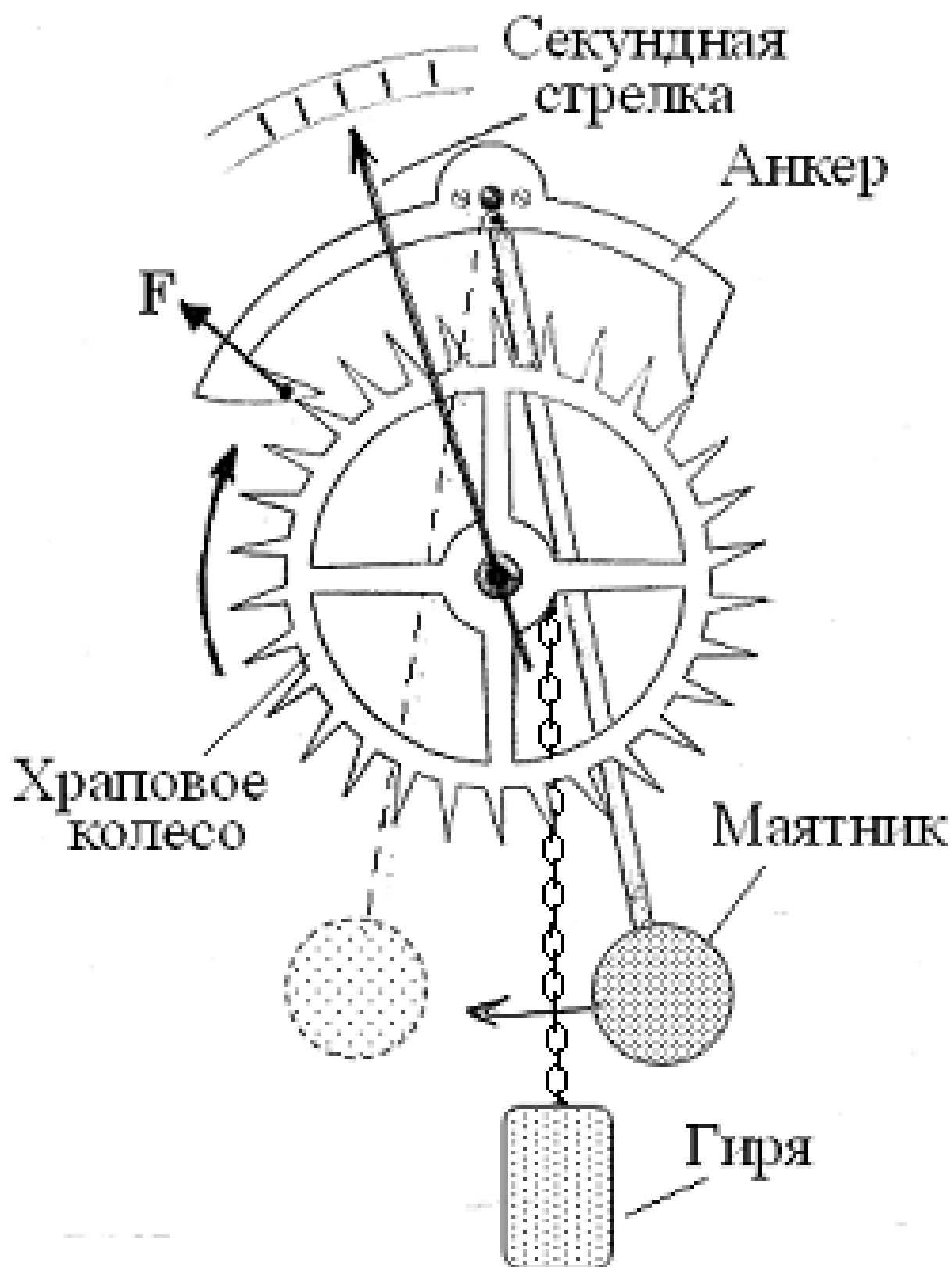


Рис. 1.8. Кварцевый резонатор

Прямой и обратный пьезоэффекты находят широкое применение в средствах диагностики и измерений в технике, биологии и медицине: датчики звука, манометры, микрофоны, измерители вибраций, ультразвуковые излучатели (УЗИ). Так например, ультразвук используется для диагностики в медицине и в дефектоскопии материалов. Для измерений глубин морей и рек, расстояний и скоростей тел в гидролокации (ультразвуковые эхолоты).

ПРИЛОЖЕНИЕ 1.

Анкерный механизм маятниковых часов



ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Добротность колебательной системы

Как отмечалось, при наложении на пластинку кварца внешнего электрического напряжения в ней появится *механическое* напряжение и она будет слегка деформироваться – сжиматься или растягиваться, в зависимости от знака приложенного напряжения. А если это напряжение синусоидальное: $u = U \sin \omega t$, то толщина пластинки h также будет меняться по синусоидальному закону (рис. П1, а).

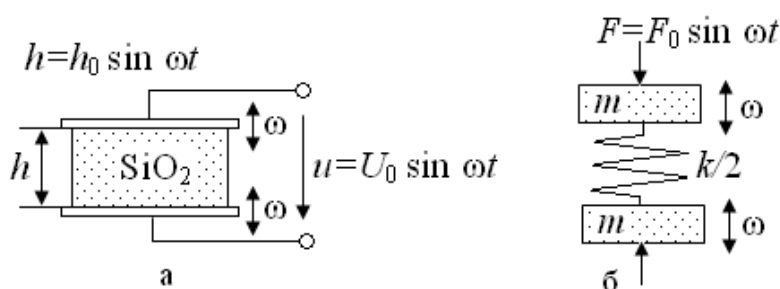


Рис. П1. Колебания пластинки кварца при наложении на неё синусоидального напряжения (а) и механический аналог – колебания двух грузов, связанных пружиной (б)

На рис. П1, б показан механический аналог колебательной системы кварца – пара грузов m , связанных пружинкой жёсткостью $k/2$. Легко показать, что собственная частота противофазных колебаний этих грузов

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}. \quad (\text{П1})$$

Если на грузы воздействовать внешней синусоидальной силой

$$F = F_0 \sin \omega t,$$

то они будут совершать вынужденные колебания с частотой ω этой силы:

$$x = X \sin \omega t,$$

причём амплитуда X этих колебаний будет зависеть от частоты ω приложенной силы. Эта зависимость $X(\omega)$ называется *амплитудно-частотной характеристикой* (АЧХ) колебательной системы. Вид соответствующей амплитудной резонансной кривой показан на рис. П2. На этом рисунке X_0 –

деформация пружины при воздействии на грузы постоянной силы F_0 . При увеличении частоты ω действующей силы F_0 амплитуда колебаний растёт. И когда эта частота становится равной собственной: $\omega = \omega_0 = \sqrt{k/m}$, амплитуда колебаний достигает максиму-

ма, который в Q раз превышает исходную деформацию X_0 , где Q – безраз-

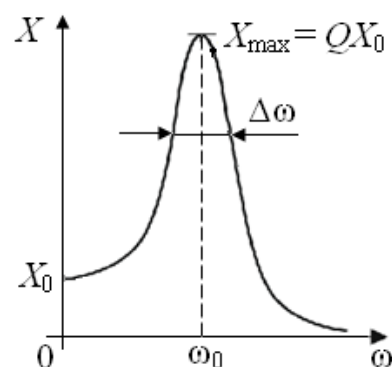


Рис. П2. Амплитудная резонансная кривая (АЧХ)

мерный коэффициент пропорциональности, называемый *добротностью* колебательной системы. В этом случае говорят, что в системе наступил *резонанс*. Добротность Q зависит от потерь энергии в системе при колебаниях: чем они меньше, тем больше Q , и тем выше и уже амплитудная резонансная кривая. В идеальном варианте системы без потерь её резонансная кривая бесконечно узкая и бесконечно высокая. Можно показать, что добротность Q выражается через параметры резонансной кривой простым соотношением:

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega},$$

где $\Delta\omega$ – ширина резонансной кривой (рис. П2) на уровне $X = X_{\max}/\sqrt{2}$, ω_0 – резонансная (собственная) частота колебательной системы. Из общего вида АЧХ на рис. П2 можно заключить, что добротность соответствующей колебательной системы $Q \approx 4$. Это очень мало. У хороших математических маятников она значительно больше и превышает 100.

Теперь обратимся к кварцевому резонатору, показанному на рис. П1, а. Как отмечалось, его добротность Q составляет $10^5 \dots 10^6$. Это очень много! Это означает, что при собственной частоте резонатора $f_0 = 100$ кГц ширина его резонансной кривой $\Delta\omega = \omega_0/Q$ будет чрезвычайно узка – не более 1 Гц. Поэтому пластинка кварца может служить для стабилизации частоты генераторов электрических колебаний, что и используется в кварцевых часах.

2. ИЗМЕРЕНИЯ ВЕСА И МАССЫ

До середины 17 века считали, что вес тела и его масса – это одно и то же, это просто сила притяжения тела Землёй. Однако эксперименты с маятниковыми часами показали, что вес тела и его масса – не одно и то же. Вес тела не постоянен, а зависит от широты местности. А масса m – это количество вещества, содержащееся в теле, *мера его инертности*, она не зависит от места на Земле. Инертность тела выражается в том, что для изменения его скорости (а точнее – импульса) на заданную величину на тело должна действовать сила F в течение некоторого времени Δt : $\Delta p = F\Delta t$.

Замечание. Если в классической механике масса тела есть величина постоянная, то в релятивистской механике она зависит от скорости тела:

$$m = m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}, \quad (2.1)$$

где m_0 – масса покоя, $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость света в вакууме. Масса m , определяемая выражением (2.1), называется *релятивистской массой*.

Как отмечалось, в качестве эталона массы была принята масса специально изготовленного эталонного Pt-Ir цилиндра ($D = 39$ мм, $h = 39$ мм). Эта международная единица массы названа *килограммом*. Практически один килограмм равен массе 1 дм³ чистой воды при температуре 4° С. Не следует, однако, думать, что когда надо измерить массу какого-либо тела, надо каждый раз бегать и сравнивать его с эталоном массы. Практически массу тела в большинстве случаев измеряют его *взвешиванием*, а приборы для измерения веса называют *весами*.

И, хотя вес тела из-за вращения Земли зависит от широты места, но практически точность такого определения массы оказывается достаточной. Более того, если взвешивание производить не на пружинных весах, а на *рычажных* (рис. 2.2), когда производится *сравнение* массы данного тела с массой эта-

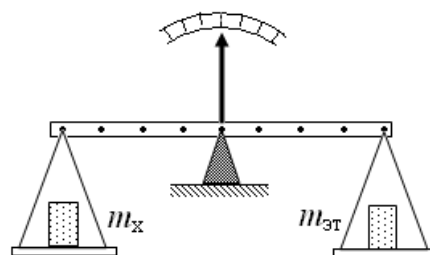


Рис. 2.2. Рычажные весы

лонных гирь, то результат такого взвешивания уже не будет зависеть от широты места, а определяться только точностью изготовления этих эталонных гирь. И только в специальных случаях массу тела невозможно определить его взвешиванием, а только по его взаимодействию с другими телами. Например, взвешиванием нельзя определить массу небесных тел; или массу атомов. Бессмысленно взвешивать тела и в космосе, где вес отсутствует (невесомость), да и само понятие веса не определено.

Посмотрим, как зависит вес тела P на Земле от широты местности φ . Прежде всего отметим, что *вес* – это сила давления $F_{\text{давл}}$, с которой тело действует на неподвижную относительно него подставку (весы). По третьему закону Ньютона, с такой же силой $F_{\text{давл}}$ и эта подставка действует на тело.

Задачу удобно решать в *неинерциальной системе* вращающейся Земли. В этой системе на тело массой m (на человека) действуют сила тяжести mg , направленная к центру Земли, сила нормального давления $\mathbf{F}_{\text{давл}}$ со стороны поверхности Земли и центробежная сила инерции

$$\mathbf{F}_{\text{ц.б}} = m\omega^2 r = m\omega^2 R \cos \varphi,$$

где R – радиус Земли, $r = R \cos \varphi$ – расстояние до оси вращения, φ – широта над экватором, $\omega = 2\pi/T$ – угловая скорость вращения Земли, $T = 86400$ с – период её вращения (рис 2.3). Центробежная сила и даёт уменьшение веса тела. Так как тело по вертикали не движется, то сумма проекций всех сил на радиус R равна нулю:

$$F_{\text{давл}} + F_{\text{ц.б}} \cos \varphi = mg.$$

Отсюда сила давления, она же вес тела:

$$F_{\text{давл}} = P = mg - F_{\text{ц.б}} \cos \varphi = mg - m\omega^2 R \cos^2 \varphi.$$

Таким образом, если $\varphi \neq 90^\circ$, т. е. это не полюс, то вес тела

$$P = m(g - \omega^2 R \cos^2 \varphi) < mg.$$

Наибольшее уменьшение веса будет на экваторе ($\varphi = 0$):

$$P = m(g - \omega^2 R) = m(g - (2\pi/T)^2 R).$$

Полагая $R = 6,4 \cdot 10^6$ м, $T = 86400$ с, $g = 9,8$ м/с², получаем относительное уменьшение веса на экваторе по сравнению с весом на полюсе:

$$\delta = \frac{\Delta P}{P} = \frac{P_{\text{полюс}} - P_{\text{эkv}}}{P_{\text{полюс}}} = 1 - \frac{P_{\text{эkv}}}{P_{\text{полюс}}} = 1 - \frac{mg - m\omega^2 R}{mg} = \frac{\omega^2 R}{g} = \frac{4\pi^2 R}{gT^2} = 0,003 = 0,3\%$$

(это означает, что 1 кг на экваторе будет весить на 3 г меньше)).

На других широтах оно ещё меньше и для большинства практических задач этим различием можно пренебречь.

Замечание. Вращение Земли и наличие вследствие этого центробежных сил приводит к тому, что наша Земля – не точный шар, а слегка сплюснутый эллипсоид, у которого, как можно показать, полярный и экваториальный радиусы немного отличаются (примерно на 11 км).

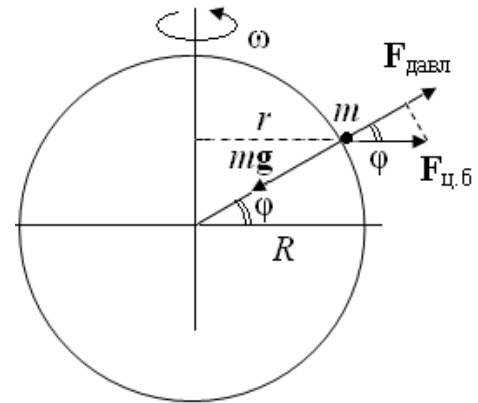


Рис. 2.3. К определению веса тела на Земле

Как отмечалось, взвешиванием нельзя определить массу небесных тел, как и массу атомов. Массы таких объектов определяются на основе законов механики и электромагнетизма.

Пример 1. Определить массу Солнца M , если известно, что радиус орбиты Земли $R = 150$ млн км.

Решение. Уравнение движения Земли по орбите вокруг Солнца:

$$m\omega^2 R = F_{\text{гп}} = G \frac{mM}{R^2},$$

где m – масса Земли, M – масса Солнца, $G = 1/(15 \cdot 10^9)$ ед СИ – гравитационная постоянная, $\omega = 2\pi/T$ – угловая скорость движения Земли по орбите, $T = 1$ год $= 365 \times 86400$ с – период. Отсюда получаем:

$$M = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2} = 2,0 \cdot 10^{30} \text{ кг.}$$

Пример 2. Спутник движется по круговой орбите на небольшой высоте над планетой. Измерены радиус планеты $R = 6,4 \cdot 10^6$ м (это Земля) и период обращения спутника $T = 85$ мин. Определить массу M планеты.

Решение. Так как высота орбиты небольшая, то её радиус можно принять равным радиусу самой планеты. Тогда уравнение движения спутника по орбите вокруг планеты:

$$m\omega^2 R = F_{\text{гп}} = G \frac{mM}{R^2},$$

где m – масса спутника, M – масса планеты, $G = 1/(15 \cdot 10^9)$ ед СИ – гравитационная постоянная, $\omega = 2\pi/T$ – угловая скорость движения спутника по орбите, $T = 85$ мин $= 85 \times 60$ с – период. Отсюда получаем:

$$M = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2} = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ кг.}$$

Пример 3. Массы атомов (в частности, – изотопов, что особенно важно) измеряются с помощью прибора, называемого *масс-спектрометр*.

На рис. 2.4 показана схема масс-спектрометра. В ионизаторе A образуются ионы X^+ исследуемого вещества X , которые ускоряются потенциалом $U = 10$ кВ и выходят параллельным потоком через узкую щель d . Попадая затем в поперечное однородное магнитное поле $B = 1$ Тл, они движутся по окружности и падают на фотопластинку Φ , вызывая её почернение. Определить массовое число A вещества X , если радиус окружности $R = 8$ см.

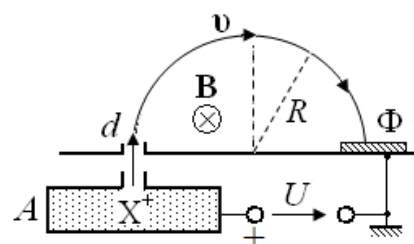


Рис. 2.4. Масс-спектрометр

Массовое число A – это сумма числа протонов и нейтронов в ядре:

$$A = Z + N,$$

где Z – число протонов, оно равно атомному номеру элемента в таблице Менделеева. Например, ядро урана U_{92}^{235} содержит 92 протона и $235 - 92 = 143$ нейтрона, так что здесь $A = 235$.

Решение. Ускорившись потенциалом U , ионы X^+ приобретают скорость v , которая определяется из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = eU,$$

где $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл – заряд иона X^+ (однократно ионизированного атома), m – его масса. Отсюда скорость входа ионов в магнитное поле

$$v = \sqrt{2 \frac{e}{m} U}. \quad (2.2)$$

В поле \mathbf{B} на ионы действует сила Лоренца $F_{\text{л}} = evB$, перпендикулярная скорости, которая заставляет ионы двигаться по окружности. Радиус R этой окружности определяется из уравнения движения:

$$\frac{mv^2}{R} = F_{\text{л.с}} = evB.$$

Сокращая v и учитывая (2.2), отсюда получаем:

$$\frac{e}{m} = \frac{2U}{(RB)^2}. \quad (2.3)$$

Величина « e/m » (Кл/кг) называется *удельным зарядом* заряженной частицы. Однако здесь массу иона m удобно выражать не в килограммах, а в единицах $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг – в массе протона: $m = Am_p$, так что

$$\frac{e}{m} = \frac{1}{A} \left(\frac{e}{m_p} \right).$$

Это удобно потому, что отношение (e/m_p) есть табличная величина: с хорошей точностью $e/m_p = 10^8$ Кл/кг. И тогда (2.3) принимает вид:

$$\frac{1}{A} \left(\frac{e}{m_p} \right) = \frac{2U}{(RB)^2},$$

откуда

$$A = \left(\frac{e}{m_p} \right) \frac{(RB)^2}{2U}.$$

Подставляя сюда численные значения, получаем: $A = 32$, т. е. это, скорее всего, однократно ионизированный ион серы S_{16}^{32} массой $m = 32 m_p$.

Вот примерно так «взвешивают» объекты, которые нельзя положить на весы.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЯ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ g

Есть много методов измерения свободного падения g у поверхности Земли. Рассмотрим два из них, самые простые: с помощью маятника, например, математического, и с помощью машины Атвуда – двух грузиков на нити, перекинутой через блок.

3.1. Определение g математическим маятником

Математический маятник – это маленький тяжёлый шарик, подвешенный на невесомой и нерастяжимой нити длиной l (рис. 3.1). Несложно показать, как и ранее для физического маятника, что период колебаний математического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{l/g}. \quad (3.1)$$

Отсюда

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}.$$

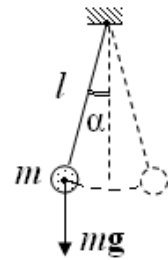


Рис. 3.1. Математический маятник

Для более точного определения периода T измеряют время t нескольких колебаний, например, десяти, и тогда $T = t/10$.

Причинами ограничения точности измерения g таким косвенным методом являются следующие:

1. Сопротивление воздуха при колебаниях; для его уменьшения маятник устанавливают в вакууме. В воздухе колебания будут заметно затухать и их период будет заметно отличаться от периода идеальных незатухающих колебаний. Можно показать, что

$$\frac{T_{\text{ид}}}{T_{\text{затух}}} = \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \approx 1 - \frac{1}{8Q^2},$$

где Q – добротность колебательной системы. При $Q = 10$: $T_{\text{ид}}/T_{\text{затух}} = 99,9\%$.

2. Конечные размеры шарика; это приводит к тому, что маятник становится не совсем математическим и формула (3.1) для его периода будет уже неточна.

3. Деформация нити при колебаниях: при прохождении шариком нижнего положения натяжение нити увеличивается и она слегка удлиняется.

4. Ограниченная точность измерения периода T .

5. Приближённость самой формулы (3.1): она выводится только для *малых колебаний*. Если бы задача о колебаниях грузика решалась точно, то уравнение его колебаний было бы не таким:

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = 0,$$

а таким:

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \sin \alpha = 0.$$

Его пришлось бы решать численными методами, а период колебаний маятника $T = 2\pi/\omega_0$ в этом случае стал бы зависеть от амплитуды.

Практически колебания считаются *малыми*, если допустима замена:

$$\sin \alpha \approx \alpha \text{ [рад]}$$

(угол α здесь надо брать, разумеется, в радианах). Это справедливо для углов $\alpha \leq 5-6^\circ$. Действительно, например, для $\alpha = 6^\circ$:

$$\frac{\sin \alpha}{\alpha} = \frac{0,1045}{0,1047} = 0,998,$$

т. е. отличие составляет 0,2%. Это вносит свою погрешность в определение g .

Все эти десятые доли процента, казалось бы, практически значения не имеют, однако, при некоторых специальных исследованиях такая точность может оказаться слишком низкой. Это касается, например, исследований различных аномалий плотности под поверхностью Земли (залежей тяжёлых железных руд, больших подземных водных резервуаров и др.), где изменение g может составлять сотые доли процента и меньше.

Есть и другие маятниковые методы измерения ускорения свободного падения g , например, с помощью *оборотного маятника*. Этот метод более точен, но и его описание более громоздко.

Пример. Под поверхностью Земли имеются залежи руды в форме шара радиусом $r = 1$ км, центр которого лежит на глубине $h = 1,2$ км. Плотность руды $\rho = 2\rho_0$, где ρ_0 – средняя плотность Земли. Определить относительное изменение $\Delta T/T$ периода колебаний математического маятника над месторождением руды. Радиус Земли $R = 6400$ км.

Решение. Ускорение свободного падения над месторождением руды

$$g = G \frac{M}{R^2} + G \frac{m}{h^2} = g_0 + G \frac{m}{h^2},$$

где g_0 – ускорение вдали от месторождения, M – масса Земли, m – масса тяжёлого шара на глубине h . Относительное изменение ускорения:

$$\frac{\Delta g}{g_0} = \frac{g - g_0}{g_0} = \frac{g}{g_0} - 1 = \frac{m}{M} \frac{R^2}{h^2} = \frac{\rho r^3}{\rho R^3} \frac{R^2}{h^2} = \frac{r^3}{Rh^2}.$$

Период колебаний математического маятника $T = 2\pi\sqrt{l/g} = kg^{-1/2}$. Тогда его

малое приращение: $\Delta T = -\frac{1}{2} g^{-3/2} \Delta g$, а относительное изменение периода:

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{1}{2} \frac{\Delta g}{g_0} = -\frac{r^3}{2Rh^2} = 5 \cdot 10^{-5}.$$

Это означает что если вдали от месторождения маятник делает 100000 колебаний, то над месторождением за то же время он сделает 100005.

3.2. Определение g на машине Атвуда

В самом простейшем виде «машина Атвуда» – это всего лишь два грузика массами m_1 и m_2 , подвешенные на лёгкой нерастяжимой нити, перекинутой через лёгкий и без трения блок (рис. 3.2). Эта конструкция позволяет определять g при небольших скоростях грузов, что существенно уменьшает силу сопротивления воздуха при их движении. Метод определения g здесь заключается в следующем.

Так как нить нерастяжимая, то ускорения a грузов одинаковы, а так как блок лёгкий и без трения, то силы натяжения нити F по обе стороны блока тоже одинаковы. Пусть $m_2 > m_1$, тогда уравнения движения грузов будут такими:

$$F - m_1 g = m_1 a,$$

$$m_2 g - F = m_2 a.$$

Складывая эти уравнения почленно, получаем:

$$g = a \frac{m_2 + m_1}{m_2 - m_1}.$$

Массы грузов можно измерить очень точно на аналитических весах. Главную погрешность здесь вносит измерение ускорения грузов a . Его можно определить, например, измерением времени t прохождения грузами предварительно замеренного расстояния s . Тогда из кинематического уравнения $s = at^2/2$ получаем: $a = 2s/t^2$. Если массы грузов отличаются несильно, то скорость их движения будет небольшой, а значит и сопротивление воздуха также будет небольшим, во всяком случае значительно меньшим, чем при свободном падении.

Погрешность косвенного определения g таким методом складывается из погрешностей прямых измерений масс грузов, расстояния s и времени t . Но главный вклад в погрешность здесь дают несовершенства самой конструкции «машины Атвуда»: трение в блоке и масса блока, а также трение грузов о воздух при их движении.

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА СУХОГО ТРЕНИЯ

При движении одного тела по поверхности другого возникает сила, препятствующая этому движению. Эта сила называется *силой сухого трения* $F_{\text{тр}}$. Она возникает из-за микрошероховатостей соприкасающихся поверхностей (рис. 4.1). При движении одного тела по другому эти шероховатости частично разрушаются, что приводит к нагреванию тел.

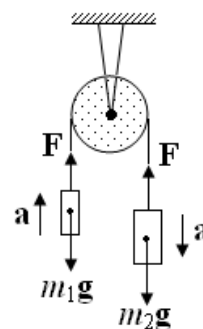


Рис. 3.2. Машина Атвуда

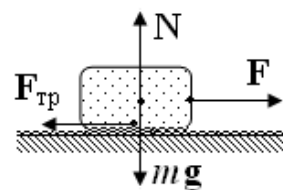


Рис. 4.1. Механизм возникновения трения

Если к телу, лежащему на горизонтальной поверхности, приложить силу \mathbf{F} , плавно увеличивая её от нуля, то сначала тело не сдвинется. Его удерживает неподвижным *сила трения покоя* $\mathbf{F}_{\text{тр.покоя}}$, равная внешней силе \mathbf{F} и противоположная ей (рис. 4.1). Но при достаточном увеличении силы \mathbf{F} тело начинает двигаться равномерно. Это происходит, когда эта внешняя сила сравнивается с *максимальной силой трения покоя* $\mathbf{F}_{\text{тр.покоя}}^{\text{max}}$, которая теперь становится *силой трения скольжения*:

$$\mathbf{F}_{\text{тр.покоя}}^{\text{max}} = \mathbf{F}_{\text{тр.скольж}} \equiv \mathbf{F}_{\text{тр}},$$

которую далее будем называть просто *силой трения* $\mathbf{F}_{\text{тр}}$. При дальнейшем увеличении силы \mathbf{F} тело будет двигаться ускоренно с ускорением

$$\mathbf{a} = (\mathbf{F} - \mathbf{F}_{\text{тр}})/m.$$

Опыт показывает, что:

1) сила сухого трения скольжения $\mathbf{F}_{\text{тр}}$ практически не зависит от скорости тела \mathbf{v} и всегда направлена против вектора \mathbf{v} (рис. 4.2);

2) сила $\mathbf{F}_{\text{тр}}$ пропорциональна силе \mathbf{N} нормального давления тела на поверхность:

$$F_{\text{тр}} = \mu N,$$

где коэффициент μ называется *коэффициентом трения скольжения*. Если тело движется по горизонтальной поверхности, то сила \mathbf{N} по величине равна силе mg и противоположна ей, и тогда $F_{\text{тр}} = \mu mg$ (рис. 4.1). Коэффициент трения μ зависит от материала трущихся поверхностей, качества их обработки и их загрязнённости. Обычно он лежит в пределах $0,2 \dots 0,8$, но иногда может лежать и вне этих пределов. Например:

сталь по стали: $\mu = 0,15$,

дерево по дереву: $\mu = 0,2 \dots 0,5$,

резина по асфальту: $\mu = 0,8 \dots 1,0$.

Силы трения имеют принципиальное значение при передаче движения от одного тела к другому: без трения ни человек, ни машины не смогли бы сдвинуться с места; невозможны были бы никакие фрикционные и ремённые передачи, никакие повороты машин на горизонтальных дорогах и т. д.. Всем хорошо известно, что на скользкую ледяную горку не может без разгона подняться ни человек, ни машина.

Пример. До какой скорости надо разогнать машину, чтобы преодолеть скользкий подъём длиной $l = 50$ м с углом наклона $\alpha = 20^\circ$, если коэффициент трения колёс о дорогу $k = 0,21$? Все колёса ведущие, двигатель постоянно работает.

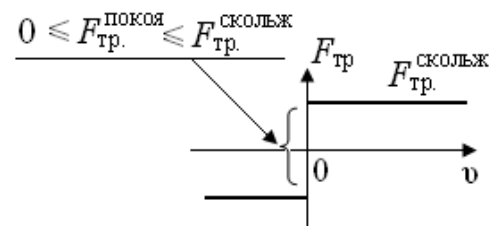


Рис. 4.2. Зависимость силы трения от скорости

Ответ. $v = \sqrt{2gl(\sin \alpha - k \cos \alpha)} = 12 \text{ м/с}$. При $k > \tan \alpha = 0,36$ машина преодолеет такой подъём и без разгона.

Как и другие физические величины, коэффициент трения μ можно определять разными методами. Отметим простейший из них: на основе соскальзывания тела с наклонной плоскости.

Положим тело на наклонную плоскость. И пусть сначала оно удерживается от соскальзывания силой трения покоя. Будем постепенно увеличивать угол наклона α . При некотором $\alpha = \alpha_0$ тело начнёт двигаться. Это означает, что так называемая «скатывающая сила» $F_{\text{ск}} = mg \sin \alpha_0$ сравнялась с максимальной силой трения покоя и стала равной силе трения скольжения $F_{\text{тр}}$ (рис. 4.3). По определению, $F_{\text{тр}} = \mu N$, а сила нормального давления, как видно из того же рис. 4.3, $N = mg \cos \alpha_0$. Таким образом, условием начала движения тела по наклонной плоскости будет следующее:

$$mg \sin \alpha_0 = \mu mg \cos \alpha_0.$$

Этот предельный угол начала движения и даёт способ определения коэффициента трения μ двух данных поверхностей:

$$\mu = \tan \alpha_0.$$

При дальнейшем увеличении угла наклона α тело будет скользить по наклонной плоскости равноускоренно с ускорением

$$a = \frac{mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha}{m} = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha).$$

Это соотношение даёт ещё один способ определения коэффициента трения μ – динамический: по измерению угла α и соответствующего ускорения тела a . Ускорение же a можно определить, задав расстояние s вдоль наклонной плоскости и измерив время t прохождения телом этого расстояния:

$$a = 2s/t^2.$$

Погрешности косвенных измерений μ каждым из этих методов определяются погрешностями прямых измерений входящих сюда величин: α , s , t .

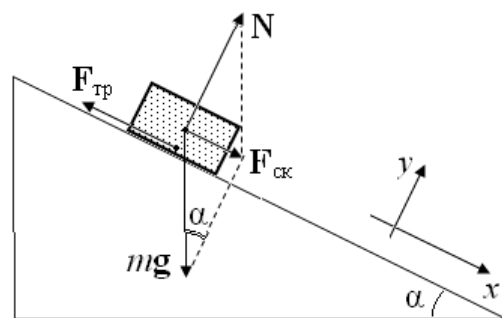


Рис. 4.3. Брусok на наклонной плоскости

5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ПУЛИ

5.1. Определение скорости пули баллистическим методом

Очевидно, что измерить скорость пули с помощью линейки и секундомера нельзя. Для этого существует простой и эффективный метод – *баллистический*. Он заключается в отстреле пули в подвешенную на шнуре неподвижную мишень – мешок с песком известной массы M и последующего измерения *баллистического отброса* мишени – угла α отклонения нити при условии, что пуля в мишени остаётся, а не пробивает её.

Определение. Метод измерения называется *баллистическим*, если время τ воздействия на подвижную часть установки настолько мало по сравнению с периодом T её собственных колебаний, что за это время τ она не успевает заметно сместиться от равновесия. Единственным следствием этого короткого воздействия будет появление у подвижной части некоторого начального импульса p .

В основе баллистического метода измерения лежат два физических принципа – закон *сохранения импульса* и закон *сохранения энергии*.

Итак, пусть пуля массой m , летящая горизонтально, попадает в шар массой M , висящий на шнуре длиной l , и застревает в нём. В результате шар отклоняется на максимальный угол α – так называемый *баллистический отброс* (рис. 5.1). По легко измеряемым величинам m , M , l и α требуется определить скорость пули v .

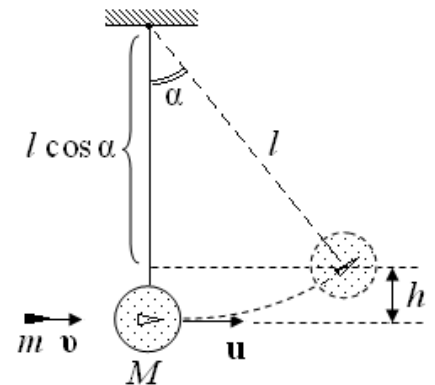


Рис. 5.1. Баллистический метод определения скорости пули

Задача решается в два этапа. Сначала, по закону сохранения импульса, определяется стартовая скорость u шара с застрявшей в нём пулей:

$$mv = (m + M)u, \quad (5.1)$$

$$u = v \frac{m}{M + m}. \quad (5.2)$$

Замечание. Так как взаимодействие пули и шара является *абсолютно неупругим*, то здесь кинетическая энергия пули не сохраняется, а почти полностью переходит в тепло. Сохраняется только импульс (5.1).

На втором этапе применяем закон сохранения энергии: стартовая кинетическая энергия шара с пулей полностью переходит в потенциальную, когда шар с пулей, отклонившись на угол α (рис. 5.1), поднимается на высоту $h = l(1 - \cos \alpha)$:

$$\frac{(M + m) u^2}{2} = (M + m)gh = (M + m)gl(1 - \cos \alpha).$$

Подставляя сюда начальную скорость шара u из (5.2), получаем искомую скорость пули:

$$v = \frac{(M + m)}{m} \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha)} \approx \frac{M}{m} \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha)}. \quad (5.3)$$

Пример. Пуля массой $m = 4$ г, летящая горизонтально, попадает в шар массой $M = 800$ г, висящий на нити длиной $l = 90$ см, и застревает в нём. Шар отклонился на угол $\alpha = 60^\circ$. Найти скорость пули v .

Решение. Подставляя исходные данные в (5.3), получаем: $v = 600$ м/с.

5.2. Определение скорости пули кинематическим методом

Есть ещё один простой способ определения скорости пули – *кинематический*. Он заключается в следующем.

Два одинаковых бумажных или пластиковых диска закреплены на общей оси, которая может вращаться от мотора. Диски закреплены на некотором расстоянии s друг от друга (рис. 5.2).

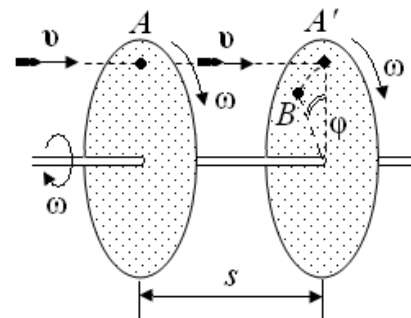


Рис. 5.2. Кинематический метод определения скорости пули

Выстрел делается вдоль оси, так что пуля пробивает оба диска на одинаковом расстоянии от оси. Если бы диски были неподвижны, то входное (точка A) и выходное (точка A') отверстия на дисках лежали бы точно друг против друга, так что при последующем сдвигании дисков вплотную отверстия бы совместились.

Если же диски синхронно вращаются с некоторой угловой скоростью ω , то входное (A) и выходное (B) отверстия уже не будут лежать друг против друга. Действительно, пока пуля летит расстояние s , диски повернутся на некоторый угол ϕ , и второй диск будет пробит в точке B , которая к концу времени полёта пули $t = s/v$ (где v – скорость пули) займёт положение точки A' . Угол поворота дисков за это время $\phi = \omega t = \omega(s/v)$.

После этого мотор выключают, диски сдвигают вплотную и измеряют угол ϕ между отверстиями A и B . И тогда искомая скорость пули

$$v = \frac{\omega s}{\phi} = \frac{2\pi v s}{\phi}$$

(здесь угол ϕ – в радианах, а угловая скорость v – в об/с).

Измерив v , s и ϕ , определяем искомую скорость пули v .

Сделаем оценку угла поворота дисков ϕ за время полёта пули между ними. Для этого возьмём характерные величины: $v = 200$ м/с, $v = 50$ об/с, $s = 20$ см. Это даёт: $\phi = 2\pi v s / v \approx 18^\circ$.

Точность косвенного измерения скорости пули этим методом определяется точностью задания исходных величин s и v и измерения угла ϕ .

6. ВОЛНЫ В УПРУГОЙ СРЕДЕ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ЗВУКА В ВОЗДУХЕ

6.1. Понятие волн в упругой среде

Пусть в каком-то месте упругой среды (твёрдой, жидкой или газообразной) возбуждаются синусоидальные колебания её частиц:

$$s(t) = A \sin(\omega t), \quad (6.1)$$

где A – амплитуда колебаний, ω – угловая частота, s – смещение данной частицы от её положения равновесия. Тогда, передаваясь от одной частицы к другой, эти колебания будут распространяться в упругой среде, вообще говоря, по всем направлениям с некоторой скоростью v , зависящей от свойств среды и, возможно, от частоты ω . В этом случае говорят, что в среде распространяются *упругие волны*.

То, что волна в среде бежит со скоростью v , не означает, что сами частицы среды движутся вместе с волной: каждая частица только колеблется около своего положения равновесия по закону (6.1) и скорость её колебательного движения ds/dt – не то же самое, что скорость волны v ; v – это только скорость передачи колебаний от одной частицы к другой. Причём колебания частиц в волне могут происходить как вдоль направления бега волны, так и поперёк его. В первом случае волны называются *продольными*, а во втором – *поперечными*.

На рис. 6.1 показан пример продольных и поперечных волн в длинном упругом стержне: если по стержню ударить поперёк его длины, то вдоль него побежит поперечная волна (рис. 6.1, а), т. е. каждая его частица будет колебаться поперёк бега волны; а если ударить в торец стержня, то по нему побежит продольная волна растяжений и сжатий (рис. 6.1, б).

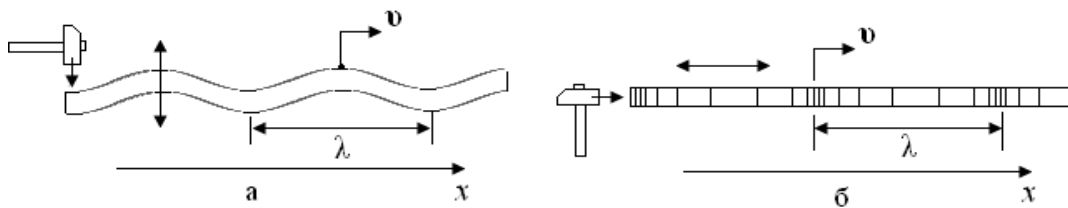


Рис. 6.1. Поперечная (а) и продольная (б) волны в стержне, бегущие вдоль него.

Двойной стрелкой показаны направления колебаний частиц в стержне.

Длина волны λ – это расстояние, которое волна пробегает за период колебаний T частиц среды: $\lambda = vT = v(2\pi/\omega)$.

В жидких и газообразных средах могут существовать лишь продольные волны, а в твёрдых средах, где есть сопротивление сдвигу, могут быть и продольные, и поперечные, причём скорости этих волн будут различны.

Замечание. В воде, могут бежать и поперечные волны, но эти волны *поверхностные*. Частицы воды в них качаются поперёк направления бега волны.

Если колебания распространяются в сплошной изотропной среде от точечного источника по всем направлениям (например, при взрыве гранаты в глубине воды), то волна называется *сферической*, а если только в одном направлении (вдоль оси x), то – *плоской*. Плоские волны (поперечные и продольные) показаны на рис. 6.1, а, б.

Одним из важных понятий волнового процесса является *фронт волны*. Если возбуждение волны в среде было кратковременным, например, удар или взрыв, то фронтом волны называется геометрическое место точек, до которого колебания дошли к моменту времени t . Так что в случае сферической волны в *изотропной* среде фронтом будет сфера, радиус которой растёт со скоростью v , а если волна плоская, то фронтом будет плоскость, перпендикулярная оси x и бегущая вдоль этой оси со скоростью v .

Если же колебания осциллятора, возбуждающего волны в среде, происходят непрерывно по синусоидальному закону (6.1), то определение фронта волны будет иное, и оно будет дано ниже (это любая поверхность в пространстве, на которой фаза волны постоянна).

В следующем разделе рассмотрим простейший тип упругих волн – *плоские синусоидальные волны*, бегущие вдоль оси x .

6.2. Плоские синусоидальные волны

Пусть имеется шнур, натянутый вдоль оси x . И пусть левый конец этого шнура (при $x = 0$) начинает совершать синусоидальные колебания

$$s(0, t) = A \sin \omega t, \quad (6.2)$$

перпендикулярные оси x с периодом $T = 2\pi/\omega$. Вдоль шнура побежит волна с некоторой скоростью v , зависящей от натяжения шнура и от его плотности. Это означает, что точка шнура с координатой $x > 0$ начнёт совершать такие же синусоидальные колебания, но с запаздыванием на время $\tau = x/v$ относительно точки $x = 0$ (рис. 6.2). Это запаздывающее колебание частиц шнура в точке $x > 0$ записывается в виде:

$$s(x, t) = A \sin \omega(t - \tau) = A \sin \omega(t - x/v). \quad (6.3)$$

Функция (6.3) описывает *плоскую синусоидальную волну* (в данном случае – поперечную), бегущую вправо вдоль оси x со скоростью v (рис. 6.3). В этой функции A – амплитуда волны, ω – её угловая частота, $\omega(t - x/v)$ – её фаза, v – скорость

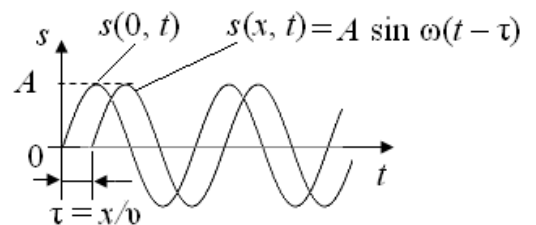


Рис. 6.2. Запаздывание колебаний шнура в точке $x > 0$

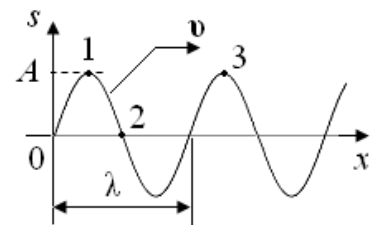


Рис. 6.3. Мгновенный профиль синусоидальной волны, бегущей вдоль оси x со скоростью v

распространения волны, $\lambda = vT$ – длина волны, т. е. расстояние, которое волна пробегает за период T .

Функцию (6.3), однако, принято записывать в симметричном относительно x и t виде, вводя величину

$$k = \omega/v,$$

называемую *волновым числом*. И тогда (6.3) принимает вид:

$$s(x, t) = A \sin(\omega t - kx). \quad (6.4)$$

А так как $\omega = 2\pi/T$, а $vT = \lambda$, то волновое число

$$k = 2\pi/\lambda. \quad (6.5)$$

Таким образом, если $T = 2\pi/\omega$ – это *временной период* волны, то $\lambda = 2\pi/k$ – это её *пространственный период* (рис. 6.3).

Остановимся подробнее на понятии «фаза волны». Фаза φ – это аргумент синуса. В функции (6.4) это величина $(\omega t - kx)$. Она измеряется в единицах π и определяет положение точки на синусоиде. Например, в точке 1, находящейся на гребне волны, фаза $\varphi = \pi/2$, а в точке 2 на переднем урезе волны фаза $\varphi = \pi/2 + \pi/4 = (3/4)\pi$ (в этой точке на волне стараются удержаться серфингисты). В точке 3 фаза $\varphi = (\pi/2 + 2\pi)$, так что разность фаз $\Delta\varphi$ между точками 1 и 3 равна 2π , что эквивалентно $\Delta\varphi_{13} = 0$, так как точка 3 эквивалентна точке 1:

$$\sin(\omega t - kx + 2\pi) = \sin(\omega t - kx).$$

Итак, фазу в точке 3 можно считать равной фазе в точке 1: $\varphi_3 = \varphi_1 = \pi/2$. В этом случае говорят, что точки 1 и 3 в волне колеблются *синфазно*, т. е. одновременно достигают максимумов и проходят через нули.

Под «скоростью волны v » понимается скорость движения её фазы (т. е., например, точки 1 на рис. 6.4) вдоль оси x . Эта скорость определяется условием постоянства фазы:

$$\omega t - kx = \text{const}, \quad (6.6)$$

т. е. $d(\omega t - kx) = 0$. Отсюда получаем, что скорость волны v – это скорость бега её фазы (6.6), или *фазовая скорость*:

$$v = \frac{dx}{dt}.$$

Теперь можно дать определение фронта синусоидальной волны: *фронт* – это поверхность в пространстве, на которой фаза волны постоянна. В частности, фронтом плоской синусоидальной волны (6.4), бегущей вдоль оси x , является *любая бесконечная плоскость* (6.6), перпендикулярная оси x и движущаяся вдоль оси x с фазовой скоростью v . Причём не имеет значения – продольная это волна или поперечная. Таким образом, координата фронта плоской волны такая: $x(t) = (\omega/k)t = vt$.

Продольные волны, т. е. волны разрежений и сжатий, описываются точно такой же функцией (6.4), только в них колебания частиц $s(x, t)$ происходят не поперёк оси x , а вдоль неё (рис. 6.4).

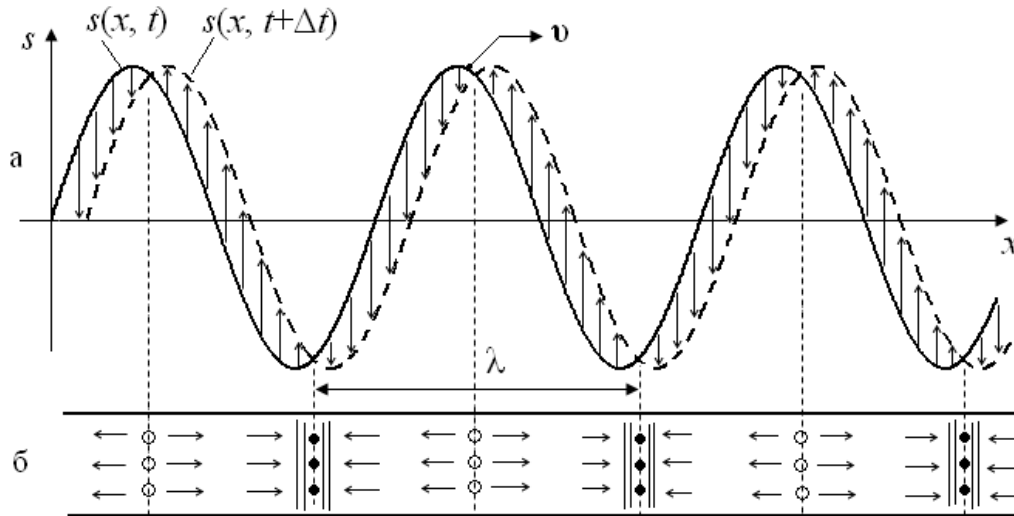


Рис. 6.4. Продольная бегущая вправо синусоидальная волна.

а – мгновенные профили волны $s(t)$ в моменты t и $(t + \Delta t)$ (стрелки \uparrow соответствуют движению частиц среды вправо, а стрелки \downarrow – влево);

б – картина движений (скоростей) частиц среды в продольной волне:

○ – области разрежений среды, ● – области сжатий среды.

6.3. Сферические волны

Пусть источник волн находится в безграничной изотропной среде. Хотя всякий реальный источник имеет некоторую протяжённость, но если рассматривать волны от него на расстояниях, значительно превышающих его размеры, то источник можно считать *точечным*. Волны, порождаемые точечным источником в изотропной среде, называются *сферическими*:

$$s(r, t) = A(r) \sin(\omega t - kr).$$

Фронтами этих волн будут уже не плоскости, а концентрические сферы:

$$\omega t - kr = \text{const},$$

радиусы которых растут со временем со скоростью v : $r(t) = (\omega/k)t = vt$, а их амплитуда A уже не постоянна, как у плоских волн, а убывает по закону:

$$A \sim 1/r,$$

что требует закон сохранения энергии.

Замечание 1. Сферические волны могут быть только продольными. Их поперечность не допускает сферическая симметрия их фронта.

Замечание 2. Среда называется *изотропной*, если её свойства в любой её точке одинаковы по всем направлениям. Иначе она называется *анизотропной*. Типично анизотропной средой является кристалл кварца (SiO_2).

6.4. Звуковые волны в воздухе

Волны, распространяющиеся в любой упругой среде, в частности, – в воздухе, и имеющие частоту в пределах 20 Гц – 20 кГц, т. е. воспринимаемые человеческим ухом как звук, называются *звуковыми*.

Звуковые волны в воздухе – это *продольные волны*. Их частота ν определяет высоту тона звука, а амплитуда A – громкость звука. Звук частотой $\nu > 20$ кГц называется *ультразвуком*, а звук с частотой $\nu < 20$ Гц – *инфразвуком*. Инфра- и ультразвук человеческим ухом не слышны.

Скорость звука в газах зависит от вида газа и от его температуры:

$$\nu = \sqrt{\gamma \frac{RT}{M}}, \quad (6.7)$$

где $\gamma = C_p/C_v$ – показатель адиабаты (для воздуха $\gamma = 1,4$), M – молярная масса газа, T – его абсолютная температура, $R = 8,31$ Дж/(моль·К) – газовая постоянная. При нормальных условиях, т. е. при температуре $T = 273$ К и давлении $p = 10^5$ Па скорость звука в воздухе $\nu = 340$ м/с. В воде скорость звука $\nu \approx 1500$ м/с.

При переходе волны из одной среды в другую меняется её скорость, но частота ν остаётся неизменной. Следовательно, меняется длина волны:

$$\lambda = \nu T = \nu / \nu.$$

Пример 1. Найти длину звуковой волны в воздухе на пределе слышимости, т. е. на частоте $\nu = 20$ кГц, а также на частоте 2 кГц, где чувствительность человеческого уха максимальна.

Решение. При скорости $\nu = 340$ м/с длина волны $\lambda = \nu / \nu = 17$ мм. На частоте 2 кГц длина волны $\lambda = 17$ см.

Пример 2. Оценить частоту ультразвука, испускаемого летучей мышью.

Решение. Чтобы волна заметно отразилась от маленькой мушки или комарика, которых ловит летучая мышь, и была услышана ухом мыши, надо, чтобы длина волны была бы меньше характерных размеров d этой мушки (рис. 6.5):

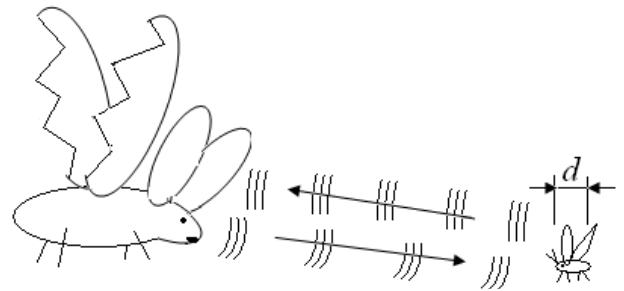


Рис. 6.5

$$\lambda = \nu T = \nu / \nu \leq d.$$

Отсюда частота ультразвука, испускаемого мышью, $\nu = \nu / d$. Полагая характерный размер мушки $d \approx 3,4$ мм, получаем: $\nu \approx 100$ кГц. Такой ультразвук человек не услышит.

6.5. Стоячие волны

Стоячие звуковые волны образуются при наложении (суперпозиции) двух одинаковых плоских волн, бегущих навстречу друг другу.

Пусть плоская звуковая волна падает нормально на преграду и отражается от неё без потерь, т. е. с той же амплитудой A . Для дальнейшего преграду удобно поместить в плоскости $x = 0$, падающую волну направить справа налево против оси x , а отражённую от преграды – вдоль оси x , как показано на рис. 6.6.

Запишем выражения для волн, бегущих *против* оси x (падающей) и *по* оси x (отражённой):

$$\begin{cases} s_{\text{пад.}}(x, t) = A \sin(\omega t + kx), \\ s_{\text{отр.}}(x, t) = A \sin(\omega t - kx + \pi). \end{cases} \quad (6.8)$$

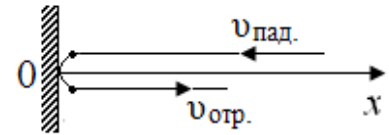


Рис. 6.6. Отражение плоской звуковой волны от преграды

Здесь π – сдвиг фазы волны при её отражении от преграды.

Установим теперь характер результирующего волнового процесса при наложении (суперпозиции) падающих и отражённых волн:

$$\begin{aligned} s(x, t) &= s_{\text{пад}} + s_{\text{отр}} = A[\sin(\omega t + kx) + \sin(\omega t - kx + \pi)] = \\ &= A[\sin(\omega t + kx) - \sin(\omega t - kx)]. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta,$$

после сокращений получаем:

$$s_{\text{рез.}}(x, t) = 2A \sin kx \cdot \cos \omega t. \quad (6.9)$$

Формула (6.9) описывает синусоидальные колебания частиц среды (воздуха) с частотой ω , амплитуда которых зависит от координаты x :

$$A_{\text{рез.}} = 2A |\sin kx| = 2A |\sin 2\pi x/\lambda|. \quad (6.10)$$

Колебательный процесс, описываемый функцией (6.9), называется *стоячей волной*.

Таким образом, стоячая волна образуется в результате наложения (суперпозиции) двух одинаковых, но противоположно направленных бегущих волн. Распределение амплитуд колебаний в стоячей волне, определяемое функцией (6.10), показано на рис. 6.7.

Сечения на оси x , где амплитуда колебаний $A_{\text{рез.}} = 0$, называются *узлами* стоячей волны, а сечения, где $A_{\text{рез.}} = 2A$, – *пучностями*. Из рис. 6.7 видно, что координаты узлов

$$x_{\text{узн.}} = n \frac{\lambda}{2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

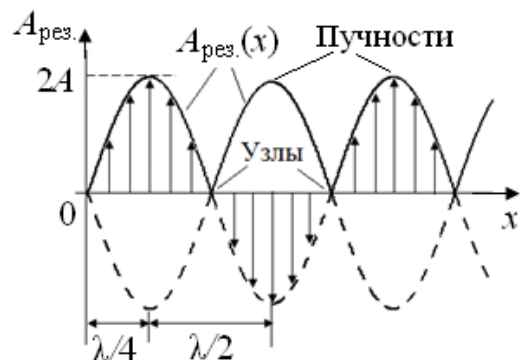


Рис. 6.7. Распределение амплитуд колебаний в стоячей волне

а координаты пучностей

$$x_{\text{пучн.}} = \frac{\lambda}{4} + n \frac{\lambda}{2} = (2n+1) \frac{\lambda}{4} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

В отличие от картины бегущей волны (рис. 6.2, 6.3, 6.4), картинка стоячей волны (рис. 6.7) не бежит вдоль оси x , а только её соседние пучности противофазно «мигают» с частотой ω .

6.6. Определение скорости звука в воздухе методом стоячей волны

Идея определения скорости звука в воздухе методом стоячей волны состоит в следующем. В трубе, закрытой с обоих концов, могут происходить только такие собственные колебания столба воздуха, при которых на длине трубы l укладывается целое число полуволн (рис. 6.8):

$$l_n = n \frac{\lambda}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (6.11)$$

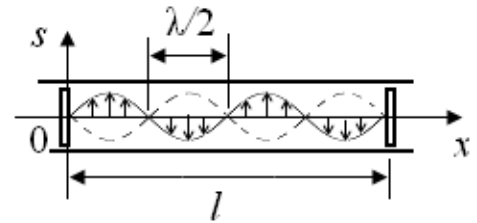


Рис. 6.8. Стоячие волны в трубе, закрытой с обоих концов (здесь $l = 4(\lambda/2)$)

Это следует из того, что на жёсткой границе отражения должен быть *узел стоячей волны*.

Пусть теперь на левом торце трубы (рис. 6.8), установлен вибратор, например, пьезокристалл, совершающий синусоидальные колебания с частотой ν . Тогда в столбе воздуха будет возбуждаться продольная волна с длиной $\lambda = \nu T = \nu/\nu$. Волна побежит вдоль трубы, отразится от её правого торца, затем побежит назад к левому торцу и отразится от него. И если при отражении от левого торца она окажется не синфазной с излучаемой волной, то волны будут взаимно подавлять друг друга, и звук в трубе будет практически не слышен. Если же длина трубы такова, что выполняется условие (6.11), то при отражении волны от левого торца отражённая и излучаемая волны будут *синфазны*, и они будут усиливать друг друга. В трубе устанавливается режим стоячих волн, или *резонансный режим*, при котором труба будет издавать довольно громкий звук на частоте вибратора.

Отсюда метод определения скорости звука будет заключаться в следующем. На одном торце трубы, например, на левом (рис. 6.9), устанавливается звуковой излучатель с известной частотой ν , а на некотором расстоянии l от него в трубе ставится подвижный поршень, возможно, с микрофоном, выведенным на осциллограф.

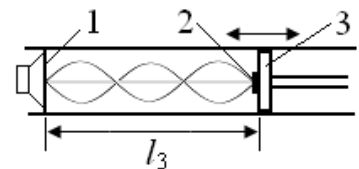


Рис. 6.9. Установка для определения скорости звука.
1 – излучатель, 2 – микрофон,
3 – подвижный поршень

Включают излучатель. Поршень начинают двигать вправо. И как только выполнится условие (6.11), в трубе наступит резонанс и явно будет слышно усиление громкости звука на частоте излучателя ν , либо же это отчётливо будет видно на осциллографе, соединённом с микрофоном. Если поршень продолжать двигать в том же направлении, то при расстоянии $l_{n+1} = (n + 1) \frac{\lambda}{2}$ вновь будет резкое усиление звучания резонатора. Разность

$$\Delta l_n = l_{n+1} - l_n = \lambda/2$$

и даст полуволну. Отсюда длина волны $\lambda = 2\Delta l_n$, и искомая скорость звука

$$v = \lambda\nu = 2\nu \Delta l_n.$$

Смещение Δl_n измеряется линейкой.

Для увеличения точности определения скорости v поршень продолжают двигать в том же направлении, пока снова не выполнится условие (6.11). Получившийся ряд значений Δl_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) усредняется.

Пример. Пусть частота генератора звука $\nu = 1200$ Гц. При движении поршня вправо усиление громкости звука происходит при длинах воздушного столба $l_n = 14, 27, 42$ и 56 см. Тогда

$$\Delta l_{\text{cp}} = \frac{\lambda}{2} = \frac{13 + 15 + 14}{3} = 14 \text{ см.}$$

И скорость звука $v = \lambda\nu = 2\nu \Delta l_{\text{cp}} = 2400 \cdot 0,14 = 336$ м/с.

РАЗДЕЛ 2. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗМЕРЕНИЙ В ОБЛАСТИ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕРМОДИНАМИКИ

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СРЕДНЕЙ СКОРОСТИ МОЛЕКУЛ

Температура – это мера средней кинетической энергии хаотического (теплового) движения молекул. Эта связь определяется уравнением:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2}kT,$$

где m – масса молекулы, v – её средняя скорость теплового движения, T – абсолютная (термодинамическая) температура, $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – константа Больцмана. Отсюда для каждой данной температуры T можно определить среднюю тепловую скорость молекул:

$$v = \sqrt{\frac{3kT}{m}}. \quad (1.1)$$

Замечание. Тепловое (хаотическое) движение молекул не путать с движением упорядоченным, когда происходит макроскопический массоперенос вещества – поток, или конвекция. Там скорость молекул – это скорость потока, например, ветра, которая обычно невелика.

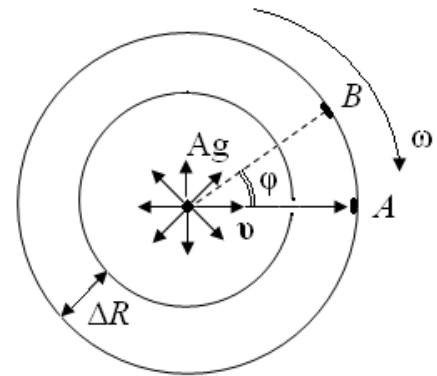


Рис. 1.1. Определение средней скорости молекул

Для экспериментальной проверки формулы (1.1) Штерном в 1920 году был предложен следующий опыт. Два коаксиальных цилиндра, жёстко связанных друг с другом, могут вращаться вокруг их оси (рис. 1.1). В стенке внутреннего цилиндра сделана узкая продольная щель небольшой длины. По оси цилиндров натянута тонкая серебряная проволока. Воздух из цилиндров откачан.

Пусть сначала цилиндры неподвижны. Если через проволоку пропускать ток, то она нагревается и, испаряясь, испускает атомы серебра (Ag^{108}), скорость v которых определяется температурой T проволоки. При этом некоторые атомы Ag пролетают через щель внутреннего цилиндра и, попадая на внешний, образуют на его внутренней поверхности узкую полоску серебра A (рис. 1.1).

Если теперь вращать блок этих цилиндров с некоторой угловой скоростью ω , то атомы Ag , пролетающие через щель, продолжают лететь между цилиндрами вдоль радиуса со скоростью v , но попадают уже не в ту же точку A , а в точку B , которая, пока атомы летят, занимает место точки A

напротив щели. Заметим, что, хотя щель и вращается, но так как осевая проволока испускает атомы Ag по всем радиальным направлениям, какие-то атомы в щель обязательно попадут. Время пролёта атомов Ag между цилиндрами:

$$t = \Delta R/v,$$

где $\Delta R = R_2 - R_1$ – ширина зазора между цилиндрами. За это время цилиндры повернутся на угол

$$\varphi = \omega t = \omega \frac{\Delta R}{v},$$

так что тёмная полоска серебра будет проходить уже через точку B , которая теперь займёт место точки A напротив щели. Измерив угол φ (в радианах, разумеется), и зная ω и ΔR , теперь определяем скорость v атомов Ag:

$$v = \frac{\omega \Delta R}{\varphi} = \frac{2\pi v \Delta R}{\varphi}. \quad (1.2)$$

Результат измерения v по формуле (1.2) при известной температуре T показал полное согласие с уравнением (1.1), согласно которому средняя кинетическая энергия молекул пропорциональна абсолютной температуре.

Замечание 1. Так как не все атомы серебра имеют одинаковую скорость (1.1), а некоторый тепловой разброс скоростей, а (1.1) – лишь их *средняя* скорость, то полоска серебра в точке B на внешнем цилиндре будет значительно шире щели внутреннего цилиндра. Поэтому при измерении угла φ берётся середина этой полоски.

Замечание 2. Прежде, чем ставить какой-либо эксперимент, всегда необходимо сделать предварительные оценки ожидаемых результатов при заданных исходных параметрах, иначе можно ничего не увидеть. В частности, относительно данного опыта: а с какой скоростью v (об/с) надо крутить цилиндры, чтобы угол смещения φ тёмных полосок на внешнем цилиндре был бы не слишком маленьким и вполне определённым, а не намазывал бы кратное число оборотов? Для этого надо задать какие-то разумные исходные параметры.

Пусть в данном опыте исходные параметры такие: $T = 1000$ К (727°C), $\Delta R = 10$ см, средняя скорость атомов Ag¹⁰⁸:

$$v = \sqrt{\frac{3kT}{m_{\text{Ag}}}} = \sqrt{\frac{3kT}{108 m_p}} = 479 \text{ м/с},$$

где $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг – масса протона. И пусть угловая скорость вращения цилиндров $\nu = 200$ об/с. Тогда ожидаемый угол смещения полоски

$$\varphi = \frac{2\pi \nu \Delta R}{v} = 0,131 \text{ рад} \approx 15^\circ; \text{ – вполне измеряемая величина.}$$

2. ОЦЕНКА РАЗМЕРОВ МОЛЕКУЛ

Оценим характерные размеры небольших молекул на примере молекулы H_2O . Молярная масса воды $M = 0,018$ кг/моль, значит моль воды весит 18 граммов. Известно также, что плотность воды $\rho = 1$ г/см³, значит, один моль занимает объём $V = 18 \text{ см}^3 = 18 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$. А так как один моль содержит $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ молекул, то на одну молекулу H_2O приходится объём $V_{\text{H}_2\text{O}} = V/N_A = 30 \cdot 10^{-30} \text{ м}^3$. Тогда характерные размеры молекулы H_2O

$$l \sim \sqrt[3]{V_{\text{H}_2\text{O}}} = \sqrt[3]{30 \cdot 10^{-30}} \approx 3 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 0,3 \text{ нм} = 3 \text{ \AA}.$$

Небольшие молекулы других веществ имеют размеры того же порядка.

Казалось бы, в чём проблема измерения размеров молекул, если их можно так легко определить «не выходя из-за стола»? Ответ: а легко потому, что здесь мы воспользовались готовым числом Авогадро $N_A = 6 \cdot 10^{23}$, определить которое нелегко.

Но оценить размер молекулы H_2O можно и не обращаясь к числу Авогадро. Для этого достаточно определить массу молекулы с помощью масс-спектрометра (**РАЗДЕЛ 1, п. 2, Пример 3**): $m = 18 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 30 \cdot 10^{-24} \text{ г}$. Значит, в одном грамме воды содержится $N = (1/30) \cdot 10^{24}$ молекул, и они занимают объём $V = 1 \text{ см}^3$. Тогда на одну молекулу приходится объём $V_{\text{H}_2\text{O}} = 30 \cdot 10^{-24} \text{ см}^3$, а её характерные линейные размеры

$$l \sim \sqrt[3]{V_{\text{H}_2\text{O}}} \approx 3 \cdot 10^{-8} \text{ см} = 3 \cdot 10^{-10} \text{ м}.$$

Таким образом, результат получился таким же, как и с использованием числа Авогадро.

3. ИЗМЕРЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ

3.1. Эталон температуры. Диаграмма фазового состояния воды

Как отмечалось, температура – это мера средней кинетической энергии хаотического движения молекул. Эта связь определяется уравнением:

$$\frac{m\bar{v}^2}{2} = \frac{3}{2}kT, \quad (3.1)$$

где m – масса молекулы, \bar{v} – её средняя скорость теплового движения, T – абсолютная (термодинамическая) температура, $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – константа Больцмана.

Многие физические свойства вещества зависят от температуры:

- объём тела, а следовательно и его размеры;
- агрегатное состояние вещества;
- удельное сопротивление металлов и полупроводников;
- тепловое излучение тел;

- ЭДС термоэлемента (термоЭДС);
- скорость звука;
- вязкость и др.

Некоторые из этих величин используются для измерения температуры.

Для обеспечения единства температурных измерений служит *эталон* температуры – Кельвин, что обеспечивает воспроизводство любых температур от 1,5 К до 2800 К. На основе сравнения с эталоном значения температур передаются *образцовым приборам* – германиевым (1,5 – 14 К) и платиновым (14 – 900 К) термометрам сопротивления, платиновым термопарам (600 – 1000°C) и оптическим пирометрам (выше 1000°C), по которым градуируются *рабочие приборы* – термометры.

В 1976 году международная конференция по мерам и весам установила, что температура 1 К – это $1/273,16$ часть реперной точки – *тройной точки воды*. *Тройная точка воды* – это температура и давление, при которых могут сосуществовать три фазы воды – твёрдая (лёд), жидкая (вода) и газообразная (пар). Она соответствует температуре $T = 0,008^\circ\text{C}$ (273,16 К) при давлении $p = 611 \text{ Па} = 4,58 \text{ мм. рт. ст.}$

На рис. 3.1 показана диаграмма фазового состояния воды (масштаб по оси p искажён), на которой представлены три фазовых состояния воды и точка их сосуществования (тройная точка). Из диаграммы видно, что тройная точка воды примерно соответствует температуре плавления льда при нормальном атмосферном давлении.

На диаграмме также отмечена точка кипения воды при нормальном давлении и *критическая точка*.

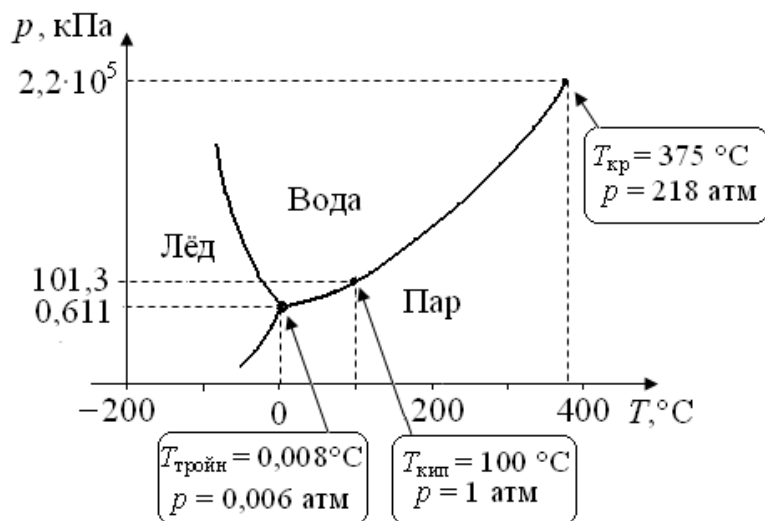


Рис. 3.1. Диаграмма фазового состояния воды

Определение 1. Точка кипения воды $T_{\text{кип}}$ – это температура, при которой давление *насыщенного пара* воды становится равным атмосферному.

Зависимость давления насыщенного пара воды от температуры показана на рис. 3.2. Видно, что с ростом температуры давление насыщенного пара растёт. Растёт также и его плотность. А вот плотность воды наоборот – уменьшается из-за её расширения при нагревании. Так что при некоторой температуре $T_{\text{кр}}$, называемой *критической*, кривые их плотности соединя-

ются, т. е. плотность воды становится равной плотности её насыщенного пара. (рис. 3.3). Для воды $T_{кр} = 375^\circ\text{C}$, $p_{кр} = 218$ атм, $\rho_{кр} = 320$ кг/м³.

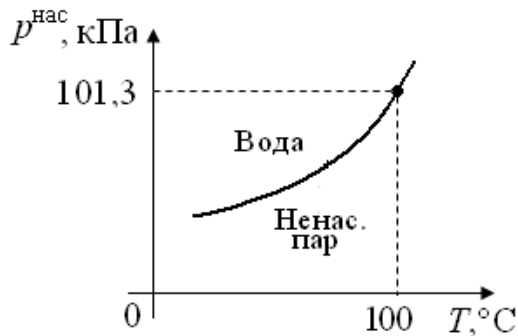


Рис. 3.2. Зависимость давления насыщенного пара от температуры

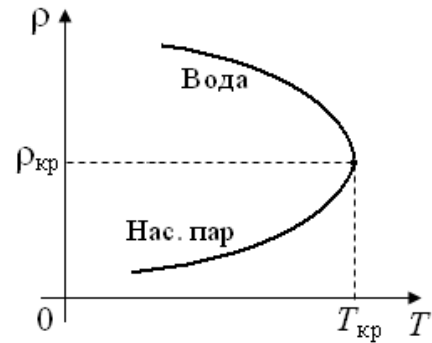


Рис. 3.3. Зависимость плотности воды и её насыщенного пара от температуры

Определение 2. Критической называется температура, при которой исчезают различия в физических свойствах между водой и её насыщенным паром.

При критической температуре плотность воды становится минимальной, плотность её насыщенного пара максимальной, а удельная теплота парообразования – нулевой.

А вот, к примеру, критические параметры для жидкой двуокиси углерода: $T_{кр} = 31^\circ\text{C}$, $p_{кр} = 73$ атм, $\rho_{кр} = 470$ кг/м³.

А в её тройной точке: $T_{тройн} = -56^\circ\text{C}$, $p = 500$ кПа = 5 атм.

Итак, в системе СИ температура измеряется в кельвинах. Как легко подсчитать из формулы (3.1), температуре $T = 1$ К соответствует средняя кинетическая энергия молекул $W_k = (3/2)k = 2 \cdot 10^{-23}$ Дж.

В быту используется шкала Цельсия, которая строится так: точке кипения воды приписывают значение 100° , точке замерзания 0° . И весь этот температурный интервал делят на 100 равных частей. Температурный интервал один кельвин равен одному градусу Цельсия: $\Delta T = 1 \text{ К} = 1^\circ\text{C}$, а температуры шкал Кельвина (T_K) и Цельсия (T_C) связаны соотношением

$$T_K = T_C + 273,15.$$

Температура $T = 0 \text{ К} = -273,15^\circ\text{C}$ называется *абсолютным температурным нулём*. Как следует из (7.3) при абсолютном нуле прекращается всякое движение молекул ($v = 0$). *Третий закон термодинамики* утверждает невозможность достижения абсолютного нуля никакими способами. К абсолютному нулю можно подойти очень близко (и в настоящее время подходят до 10^{-6} К), но достичь его точно – никогда. Да и само понятие «точно» в физике не имеет смысла.

3.2. Средства измерения температуры – термометры

Средства измерения температуры делятся на контактные и бесконтактные. К контактным относятся термометры газовые, жидкостные (ртутные и спиртовые), термопары, термометры сопротивления (металлические и полупроводниковые) и др. Действие всех контактных термометров, как отмечалось, основано на зависимости их параметров (объёма, давления, электрического сопротивления, ЭДС) от температуры. А вот, например, действие кварцевых термометров основано на зависимости резонансной частоты пьезокварца от температуры.

Идея применения контактных термометров при измерении температуры среды состоит в том, что при непосредственном контакте термометра со средой в течение некоторого времени их температуры выравниваются. Отсюда следуют, по крайней мере, два недостатка контактных термометров, ведущих к уменьшению их точности: 1) их масса должна быть значительно меньше массы тела, температура которого измеряется, иначе процесс измерения существенно изменит температуру тела; 2) время выравнивания температур рабочего вещества термометра и исследуемого тела в идеале должно быть бесконечно большим, но практически оно может быть всё-таки весьма значительным.

К бесконтактным термометрам относятся пирометры.

При градуировке термометра может быть использована как шкала Кельвина, так и шкала Цельсия.

Первые термометры появились около 1600 года (термоскоп Галилея), а сам термин «термометр» – в 1636 году.

Рассмотрим сначала принцип действия контактных термометров, а к бесконтактным обратимся в разд. 8.4.

3.3. Контактные термометры

3.3.1. Газовый термометр постоянного объёма

Практически измерение температуры с помощью газового термометра постоянного объёма основано на использовании зависимости давления идеального газа от его абсолютной температуры:

$$p = nkT, \quad (3.2)$$

где $n = N/V$ концентрация молекул газа, V – его объём, $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана. Эта формула является одной из форм уравнения состояния идеального газа.

Замечание. Идеальным называется газ, в котором взаимодействия между молекулами сводятся к упругим столкновениям. Это означает, что силами притяжения между молекулами можно пренебречь, а силы упругого отталкивания проявляются лишь в ничтожно малых интервалах времени при их столкновениях друг с другом. Всякий реальный газ при достаточном разрежении близок по свойствам к идеальному. При комнатной температуре и атмосферном давлении такие газы, как кислород, азот, а особенно водород и гелий очень близки по свойствам к идеальному. А такие газы, как H_2O , NH_3 , CO_2 при тех же условиях уже заметно отличаются от идеального. При очень низких же температурах, вблизи от температуры их конденсации, уже все реальные газы по свойствам сильно отличаются от идеального.

Устройство такого газового термометра показано на рис. 3.4. Давление в термометре измеряется ртутным манометром. Шкала столбика ртутного манометра проградуирована в $^{\circ}\text{C}$. При $T = -273,15^{\circ}\text{C}$ давление газа $p = 0$, как и должно быть по формуле (3.2).

Ввиду громоздкости конструкции газовые термометры обычно используются лишь в специальных физических экспериментах.

3.3.2. Жидкостные термометры

В повседневной практике для измерения температуры используются жидкостные термометры – ртутные или спиртовые, в основе работы которых лежит свойство жидкости при нагревании увеличивать свой объём. При этом следует иметь в виду, что, как отмечалось, при измерениях температуры масса термометра должна быть значительно меньше массы тела, температура которого измеряется.

Ртутные термометры используются, главным образом, в лабораториях при измерении сравнительно высоких температур, а спиртовые – в быту и на улице, на морозе. Это объясняется тем, что уже при температуре -39°C ртуть замерзает (а морозы бывают и -50); а вот этиловый спирт замерзает лишь при -114°C . Зато кипит ртуть при $T_{\text{кип}} = 357^{\circ}\text{C}$, а спирт кипит уже при 78°C , т. е. температуру кипения воды спиртовым термометром измерить нельзя: спирт закипит и стеклянная трубка, в которой он находится, лопнет.

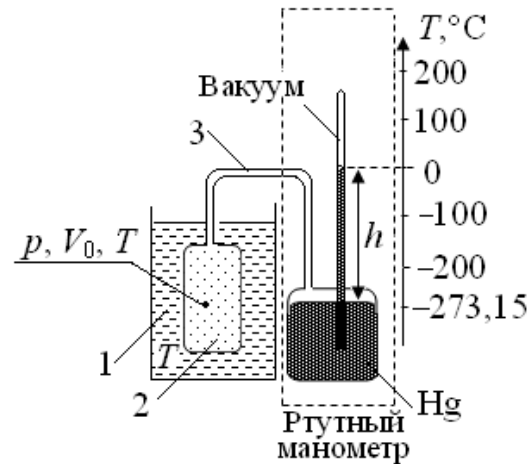


Рис. 3.4. Газовый термометр постоянного объёма:

1 – исследуемая среда; 2 – идеальный газ; 3 – узкая трубка. $V_0 = \text{const}$, $p(T) = \rho gh(T)$.

3.3.3. Термометры сопротивления (терморезисторы)

Терморезисторы – это металлические или полупроводниковые элементы, активное сопротивление которых зависит от температуры. При не слишком больших изменениях температуры эту зависимость можно аппроксимировать линейным приближением:

$$R(T) = R_0(1 + \alpha \Delta T), \quad (3.3)$$

где R_0 – сопротивление элемента при некоторой базовой температуре T_0 , например, 20°C (или 0°C), $\Delta T = T - T_0$ – изменение температуры, α – температурный коэффициент сопротивления.

В связи с этим, терморезисторы применяются для измерения температуры в широком диапазоне – от -270°C до 1600°C с точностью до $0,005^\circ\text{C}$. Из металлических терморезисторов наибольшее распространение получили медные (Cu) и платиновые (Pt). У них температурный коэффициент сопротивления $\alpha = (4-6) \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$. Это означает, что при изменении температуры на 1°C их сопротивление изменяется на 0,4–0,6 %. Для измерения высоких температур, свыше 1600°C , в терморезисторах используют тугоплавкие металлы: вольфрам ($T_{\text{пл}} = 3416^\circ\text{C}$) и молибден ($T_{\text{пл}} = 2620^\circ\text{C}$).

Медные терморезисторы выпускаются серийно и обозначаются ТСМ (термосопротивления медные). Они выполняются из проволоки диаметром 0,1 мм и имеют сопротивление $R_0 = 100 \text{ Ом}$ при 0°C .

Платиновые терморезисторы обозначаются ТСП (термосопротивления платиновые). Они выполняются из проволоки диаметром 0,05 мм, намотанной на слюдяную пластинку с нарезкой, и также имеют сопротивление $R_0 = 100 \text{ Ом}$ при 0°C . Пластика помещена в стеклянную капсулу длиной 50 мм и диаметром 5 мм с четырьмя выводами – двумя токовыми и двумя потенциальными (рис. 3.5, а).

Современные металлические термометры сопротивления выполняются из тонких слоёв золота или платины, наплавленных на подложку.

Материалом для изготовления полупроводниковых терморезисторов (термисторов) служат оксиды марганца. Внешне многие из них похожи на обычные резисторы (рис. 3.5, б).

Температурный коэффициент сопротивления термисторов на полтора порядка больше, чем у металлических, причём он *отрицательный*: $\alpha \approx -6 \cdot 10^{-2} \text{ K}^{-1}$, т. е. при нагревании их сопротивление уменьшается (рис. 3.6). Это связано с тем, что при нагревании полупроводника растёт число свободных носителей (электронов) в его зоне проводимости.

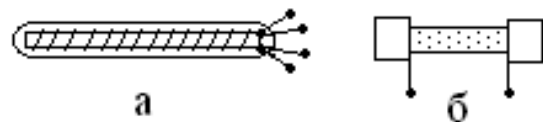


Рис. 3.5. Платиновый (а) и полупроводниковый (б) термометры сопротивления

Замечание. У металлов это число тоже растёт, но их в зоне проводимости металла и без того много. А рост сопротивления металлов при нагревании определяет рост числа столкновений электронов с узлами решётки при их продвижении по металлу с дрейфовой скоростью.

Можно показать, что зависимость сопротивления полупроводника от температуры имеет следующий вид (рис. 3.6):

$$R = R_0 e^{\frac{\Delta E}{2kT}}, \quad (3.4)$$

где ΔE – ширина запрещённой зоны данного полупроводника. Обычно у полупроводников ширина ΔE лежит в пределах 0,5...2,0 эВ. Так например, $\Delta E_{\text{Ge}} = 0,66$ эВ, $\Delta E_{\text{Si}} = 1,1$ эВ, $\Delta E_{\text{Se}} = 1,8$ эВ.

Существенным недостатком полупроводниковых терморезисторов по сравнению с металлическими является непостоянство температурного коэффициента сопротивления: с ростом температуры он сильно падает, т. е. термистор имеет нелинейную характеристику $R(T)$. Однако, из-за сравнительно высокой чувствительности полупроводниковые терморезисторы служат для измерения мощности электромагнитного излучения в диапазоне от видимой части спектра до микроволновой.

Основной характеристикой терморезисторов является *чувствительность* S , которая определяется как относительно изменение его сопротивления $\Delta R/R$, делённое на вызвавшее это изменение приращение температуры:

$$S = \frac{1}{R} \frac{dR}{dT}. \quad (3.5)$$

Замечание. Чувствительность S , определяемая формулой (3.5), это не совсем то же, что температурный коэффициент сопротивления α , который из формулы (3.3) такой:

$$\alpha = \frac{1}{R_0} \frac{dR}{dT}.$$

Если, например, для металлов коэффициент $\alpha = \text{const}$, то чувствительность S для них с ростом температуры уменьшается, так как в знаменателе (3.5) сопротивление R растёт в соответствии с (3.3). Чувствительность полупроводниковых терморезисторов с ростом температуры уменьшается ещё сильнее.

При использовании терморезисторов в качестве *датчиков* систем автоматики и управления они включаются мостовые схемы (см. разд. 7.4.2). При этом различают их два основных режима работы. В первом темпера-

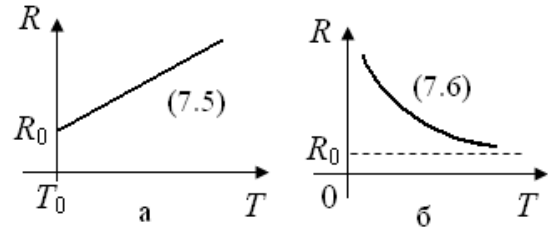


Рис. 3.6. Зависимость сопротивления от температуры:

а – у металлов, б – у полупроводников

тура терморезистора определяется практически только температурой окружающей среды. Ток через терморезистор, очень мал и практически не нагревает его.

Во втором режиме терморезистор нагревается проходящим по нему током, а его температура (а следовательно, — и его сопротивление) определяется условиями теплоотдачи, например, интенсивностью его обдува (рис. 3.7).

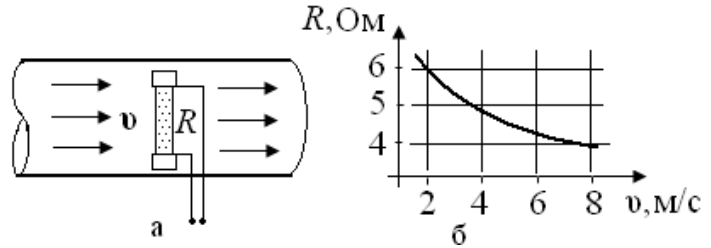


Рис. 3.7. Терморезистор в качестве датчика скорости газового потока (а) и его характеристика (б)

3.3.4. Термоэлектрические датчики (термопары)

Принцип действия термоэлектрических датчиков (далее — термопар) как средств измерения температуры основан на *эффекте Зеебека*, который заключается в том, что в замкнутой цепи, составленной из двух разнородных проводников (или полупроводников) возникает электрический ток, если температуры мест их соединения (спаев) различны (рис. 3.8).

Зеебек в 1824 году экспериментально установил, что возникающая при этом в цепи *термоЭДС* при этом в цепи *термоЭДС* \propto пропорциональна перепаду температур спаев:

$$\mathcal{E} = \alpha \Delta T, \quad (3.6)$$

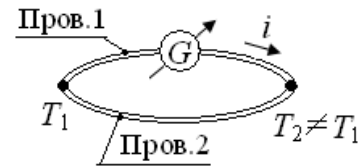


Рис. 3.8. Термопара

где $\Delta T = T_2 - T_1$ — разность температур «горячего» и «холодного» спаев, $\alpha = \Delta \mathcal{E} / \Delta T$ — коэффициент, называемый *удельной термоЭДС*.

Формула (3.6) позволяет использовать термопару в качестве измерителя температуры какого-либо тела или среды. Действительно, если спай №1 поместить в среду с заранее известной температурой T_1 , например, в тающий лёд при $T_1 = 0^\circ\text{C}$, то прикладывая спай №2 к исследуемому телу и измеряя ЭДС, наводимую в термопаре, по формуле (7.8) можно определить температуру T_2 этого тела. Правда, при этом необходимо предварительно *откалибровать* данную термопару, т. е. на основе промеров ЭДС на телах с известными температурами найти коэффициент α , причём может оказаться, что он сам не постоянен, а зависит от температуры.

Замечание. Явление, обратное эффекту Зеебека, называется *явлением Пельтье*. Оно заключается в том, что при прохождении тока в цепи, состоящей из двух различных проводников (рис. 3.8), на их контактах выделяется тепло Q , пропорциональное прошедшему по цепи заряду:

$$Q = kq = k i t.$$

Механизм (т. е. физическая сущность) возникновения термоЭДС объясняется наличием в металлах свободных электронов, которые хаотически движутся между положительными узлами кристаллической решётки. Чтобы покинуть данный металл, электрон должен совершить определённую *работу выхода*, которая равна энергии связи электрона с решёткой данного металла и которая различна у разных металлов. Если два разнородных металла 1 и 2 привести в контакт, то они будут обмениваться электронами. Пусть работа выхода A_1 из металла 1 меньше, чем A_2 из металла 2. Тогда из металла 1 в 2 в единицу времени будет перетекать больше электронов, чем из 2 в 1. В результате в пограничном слое металла 1 появится избыточный положительный заряд, а в пограничном слое металла 2 – отрицательный. На границе раздела металлов возникнет контактная разность потенциалов

$$\Delta\varphi_{21} = (A_2 - A_1)/e$$

(e – заряд электрона), которая создаст электрическое поле \mathbf{E} , препятствующее дальнейшему разделению зарядов. Если два таких проводника соединить в контур, то это поле \mathbf{E} в этом контуре будет играть бы роль сторонней силы и создаст ЭДС \mathcal{E}_1 , равную $\Delta\varphi_{21}$. И под действием этой ЭДС в контуре пошёл бы некоторый ток i . Но тока в контуре не будет, потому что в нём есть и второй такой же контакт (рис. 6.10, а), в котором при той же температуре будет наводиться такая же ЭДС \mathcal{E}_2 , но противоположно направленная, так что при одинаковой температуре контактов (спаев) суммарная ЭДС по контуру будет нулевой. Но это так, если температуры спаев одинаковы. Если же они различны, скажем, $T_2 > T_1$, как на рис. 3.9, а, то ЭДС на спаях уже не будут равны, а \mathcal{E}_2 будет больше, чем \mathcal{E}_1 . Это потому, что контактная разность потенциалов $\Delta\varphi$ зависит от температуры, и в спаях 2 она будет больше, чем в спаях 1. Таким образом, если температуры спаев различны, то в контуре будет действовать ЭДС (термоЭДС)

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1$$

пропорциональная разности температур спаев (формула (3.6), и пойдёт термоток $i = \mathcal{E}/r$, где r – сопротивление контура (рис. 3.9, б).

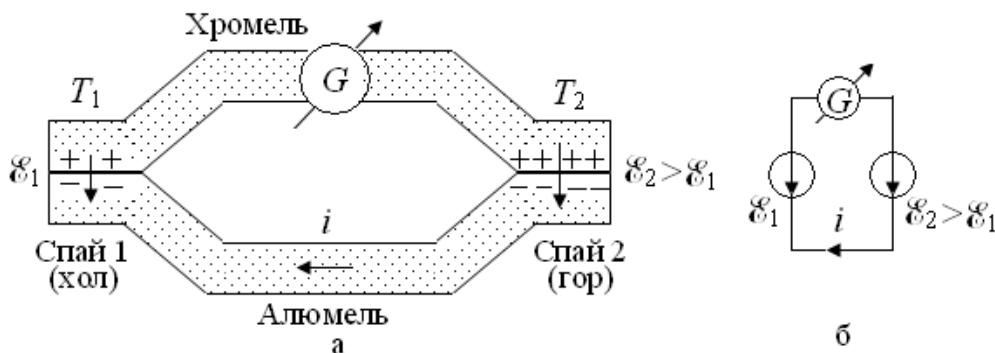


Рис. 3.9. Термопара с разными температурами спаев (а) и её эквивалентная схема (б)

Термопары нашли применение в промышленных измерительных устройствах и в системах автоматики. Пределы измерений термопар – от 0°C до 1600°C с точностью до $0,5^{\circ}$. Способ соединения двух проводов в термопаре – сваркой, спайкой или скруткой – не имеет значения.

Наибольшее распространение получили термопары «хромель–алюмель», «хромель–копель» и «медь–константан». Хромель – это сплав следующего состава: $89\% \text{ Ni} + 10\% \text{ Cr} + 1\% \text{ Fe}$; алюмель – это тоже сплав: $94\% \text{ Ni} + 2\% \text{ Mn} + 2\% \text{ Al} + 1\% \text{ Si} + 1\% \text{ Fe}$; копель: сплав $55\% \text{ Cu} + 45\% \text{ Ni}$; константан: $43\% \text{ Ni} + 55\% \text{ Cu} + 2\% \text{ Mn}$. Для измерения высоких температур применяют термопары из тугоплавких металлов – вольфрама ($T_{\text{пл}} = 3416^{\circ}\text{C}$) и молибдена ($T_{\text{пл}} = 2620^{\circ}\text{C}$). Впрочем, температуры, превышающие $1500\text{--}1600^{\circ}\text{C}$, при которых уже плавится большинство металлов и сплавов, измеряются бесконтактным инфракрасным термометром – *пирометром*¹.

Основными характеристиками термопар являются диапазон рабочих температур и чувствительность (удельная термоЭДС). Самую высокую чувствительность имеет термопара «хромель–копель», у неё $\alpha = 69 \text{ мкВ/К}$. У термопары «хромель–алюмель» она также высока: $\alpha = 41 \text{ мкВ/К}$. У термопары «медь–константан» $\alpha = 40 \text{ мкВ/К}$. Впрочем, на широких температурных интервалах, в несколько сотен градусов, коэффициент α немного не постоянен, так что для правильных измерений термопару предварительно необходимо откалибровать в интересующем интервале температур, причём холодный спай обычно поддерживают при температуре тающего льда, т. е. при 0°C , а если такового нет, то при комнатной, надёжно измеряемой хорошим термометром.

Так как термоЭДС у термопар сравнительно невелики, то для их непосредственного измерения надо использовать высокочувствительные гальванометры магнитоэлектрической системы.

На рис. 3.9, а показана термопара «хромель–алюмель». В её контур включён гальванометр G для измерения тока или термоЭДС (смотря как гальванометр прокалиброван – в вольтах или в амперах). А на рис. 3.10 – её практическое использование для измерения температуры T_2 . В какую ветвь включать милливольтметр – безразлично.

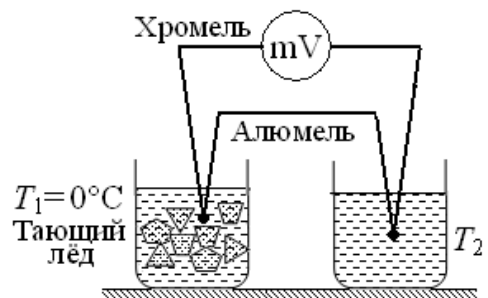


Рис. 3.10. Измерение температуры T_2 термопарой

¹⁾ Принцип измерения температуры пирометром рассматривается в РАЗДЕЛЕ 4.

РАЗДЕЛ 3. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗМЕРЕНИЙ В ОБЛАСТИ ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМА

Курс

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПОЛУЧЕНИЯ ИНФОРМАЦИИ

Группа ИИТ-273, 373. Весна – осень 2023 г.

4-й семестр: лек. 32, сем. 32, лаб. 32; зачёт

5-й семестр: лек. 32, сем. 32, лаб. 32; экз.

В каждом семестре студент выполняет одну индивидуальную семестровую работу. Эта работа выполняется в форме реферата на заданную тему объёмом 10-20 страниц с последующим докладом и обсуждением на семинаре перед группой (время доклада 15-20 минут). Поиск и подбор материала по теме реферата студент осуществляет самостоятельно. Тема реферата выдаётся студенту через 3-4 недели после начала семестра. Слушания докладов начинаются примерно через месяц после получения темы.

Реферат представляется на листах формата А4 с односторонней записью и должен иметь название, цель, оглавление, основной печатный текст с межстрочным интервалом 1,15 (возможен рукописный текст), заключение и список литературы по теме. В реферате желательно не «умничать» в изобилии формул, смысл которых автор не совсем понимает, зато давать иллюстративный материал в виде рисунков и графиков.

Итоговая оценка на зачёте или экзамене выставляется на основе:

- 1) активности студента на семинарах в семестре;
- 2) качества выполнения реферата и соответствующего доклада у доски;
- 3) оценок за выполнение лабораторных работ;
- 4) устного ответа на экзамене или зачёте.

ОБЩИЕ ТРЕБОВАНИЯ К ПРЕДСТАВЛЕНИЮ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ И ВЫЧИСЛЕНИЙ

После проведения измерений необходимо провести их обработку, которая включает в себя расчёты, иногда довольно сложные, оценку погрешностей, построение графиков. Результаты представляются в виде отчёта.

Далее приводятся несколько общих советов, а точнее – требований к представлению результатов измерений и вычислений.

1. Запись чисел

Измеряемые величины обычно содержат от двух до четырёх значащих цифр. Расчётные величины должны представляться, как правило, с тремя цифрами. Иногда удаётся получить четыре, а иногда приходится довольствоваться двумя. Число значащих цифр в результате надо уметь обосновать, а не писать, «сколько даёт калькулятор». Если цифр записано меньше, чем дали измерения, то точность потеряна, а если больше, то запись результата расценивается как безграмотная

Если списывается показание прибора, то количество значащих цифр в числе должно соответствовать приборной точности. Результат косвенных измерений должен содержать столько значащих цифр, сколько даёт самый грубый прибор при базовых прямых измерениях. Так например, если ток через проводник измеряется с точностью до двух цифр ($i = 65$ мА), а напряжение на нём – до четырёх ($u = 79,45$ В), то сопротивление проводника должно вычисляться с округлением до двух значащих цифр:

$$R = \frac{u}{i} = \frac{79,45}{0,065} = 1,2 \text{ кОм} = 1,2 \cdot 10^3 \text{ Ом.}$$

Примеры.

- 1) $i = 2,53$ А – три значащие цифры; $i = 2,5$ А – две (но $i = 2,50$ А – уже три).
- 2) $i = 0,25$ А = 250 мА – две, но $i = 0,250$ А = 250 мА – три, так как здесь последний ноль является уже значащей цифрой, он показывается прибором;
- 3) $i = 5$ мА = 0,005 А = $5 \cdot 10^{-3}$ А – одна значащая цифра, но $i = 5,0 \cdot 10^{-3}$ А = 5,0 мА – две значащие цифры.

Ещё один показательный пример: определение ускорения свободного падения из формулы $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ на основе прямых измерений длины нити l и периода колебаний математического маятника T .

Пусть длина нити: $l = 50 \pm 1$ см, т. е. в системе СИ $l = 0,50$ м, а приборная ошибка $\Delta l = 0,01$ м. И пусть период T измерен секундомером с точностью до 0,01 с: $T = 1,43 \pm 0,01$ с. Поскольку здесь наименее точно измерена длина – только до двух знаков, то и результат g получится с точностью не более двух знаков:

$$g = 4\pi^2 l / T^2 = 9,6 \pm \Delta g \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Вычислим это Δg на основе оценки: $\Delta g = \left| \frac{\partial g}{\partial l} \right| \Delta l + \left| \frac{\partial g}{\partial T} \right| \Delta T$. Это даёт:

$$\Delta g = 4\pi^2 \left(\frac{1}{T^2} \Delta l + \frac{2l}{T^3} \Delta T \right) \approx 0,3 \text{ м/с}^2.$$

Таким образом, окончательно получаем: $g = 9,6 \pm 0,3 \text{ м/с}^2$. Так себе точность, около 3%. А ведь относительные погрешности прямых измерений длины и времени были поменьше: $\delta_l = \frac{\Delta l}{l} = 2\%$, $\delta_T = \frac{\Delta T}{T} \approx 0,7\%$. И это характерно: при всякой обработке результатов измерений точность может только теряться, но никак не расти. И задача здесь в том, чтобы потери точности не были слишком большими.

Замечание. Пусть искомая величина f зависит от нескольких, например, двух переменных x и y , которые измеряются непосредственно с относительными погрешностями $\delta_x = \frac{\Delta x}{x}$ и $\delta_y = \frac{\Delta y}{y}$. Тогда её относительная погрешность $\delta_f = \frac{\Delta f}{f} = \frac{1}{f} \left(\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \Delta y \right)$, как правило, больше, чем любая из δ_x и δ_y (хотя может быть и меньше: для функции $f = e^{kx}$ при $kx < 1$: $\delta_f < \delta_x$).

2. Расчёты

Все расчёты ведутся только в системе СИ. А окончательный результат может быть представлен в любой удобной внесистемной форме (например, угол – в градусах, время – в минутах, масса – в граммах или в тоннах и т. д.).

3. Графики

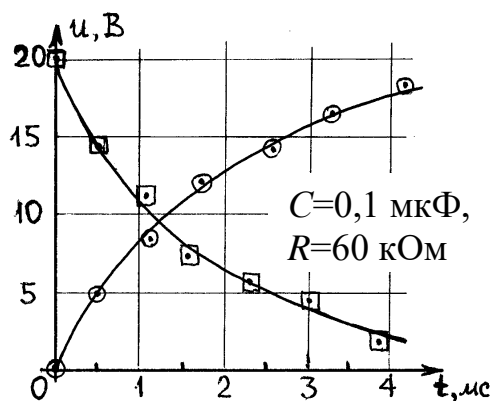
Общие требования к графикам следующие:

- графики представляются на миллиметровом или на клеточном листе прямо в рабочей тетради; их можно выполнять чернилами или хорошо отточенным мягким карандашом; или же на принтере;
- график должен занимать большую часть отведённого для него поля как по вертикали, так и по горизонтали; для этого надо правильно выбирать разметку осей;
- разметка осей должна быть равномерной и кратной целому числу клеток; на осях x и y указываются соответствующие величины и их размерности; на осях наносится по 3–5 опорных чисел, кратных 2, 5 или 10, но никак не 3, 6, 7 и т. д.; перегружать оси градуировочными числами не следует;

- отсчёты по осям x и y могут начинаться не обязательно от нуля, а от того числа, с которого представляет интерес изображаемая величина;
- экспериментальные результаты наносятся на график точками с какими-нибудь обводами, например, так: \odot , \square или \triangle , и через них проводится *плавная* кривая (или прямая, смотря что ожидается), проходящая через все точки *наилучшим* образом (хотя бы в визуальном смысле);
- для построения простых (монотонных) графиков обычно достаточно 6–8 экспериментальных точек, тогда как для сравнительно сложных кривых, типа амплитудно-частотной характеристики (АЧХ), нужно, минимум, 12–15 точек, чтобы ими были обозначены все детали кривой;
- график должен иметь название и, возможно, некоторые комментирующие сведения.

Пример 1.

Кривые заряда (\square) и разряда (\odot) конденсатора через резистор.



Пример 2.

Амплитудно-частотная характеристика последовательного контура.

