El modelo de Garch

En esta lectura aprenderemos sobre el modelo de GARCH, pues lo cual primero conoceremos su origen en los procesos ARCH propuestos por Engle (1982). Los modelos ARCH presentan ciertas desventajas que fueron diseñadas por Tim Bollerslev en 1986, por lo cual propuso los modelos GARCH, los cuales son una generalización del modelo ARCH. Seguidamente aprenderemos sobre el modelo GARCH(1,1), un modelo con pesos geométricamente decrecientes, muy común en las series financieras. Finalmente, para extender mejor el modelo GARCH(1,1) se terminará aplicando en un ejemplo, siguiendo los 4 pasos propuestos por Tsay (2005) para construir un modelo de volatilidad en una serie de rendimiento de activos.

En la valoración de activos financieros, la volatilidad juega un papel importante, ya que este concepto está ligado al riesgo de una cartera. Los modelos econométricos tradicionalmente pronosticaban una varianza constante, hasta que Engle (1982) propuso una nueva clase de procesos estocásticos denominados los procesos heterocedásticos condicionales autoregresivos o ARCH por sus siglas en inglés. Este modelo fue plasmado en el artículo investigativo llamado <<Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united Kingdom inflation>> donde el pronóstico de un periodo de la varianza ($Var[a_t|\mathcal{B}_{t-1}]$) (o "la volatilidad de $\mathcal{T}$ en el periodo t, condicionada a la volatilidad del periodo anterior") depende del ruido de esta misma, de ahí el nombre autoregresivo. En la lectura de modelos de series de tiempo absortada en el módulo 3 se introducen estos modelos como extensiones de $ARIMA(p,d,q)$ en esta lectura se profundizarán. Así, como se mencionó en la lectura de los modelos ARIMA Y ARIMA, los modelos ARCH involucran ecuaciones con funciones cuadráticas de los valores de los residuos históricos, o choques cuadráticos pasados. Matemáticamente un modelo $ARCH(q)$ asume:

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_m a_{t-m}^2$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i a_{t-i}^2$$

Donde ε_t es una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (iid) con media de cero y varianza de uno ($\varepsilon_t \sim iid(0,1)$); y q es orden del proceso ARCH. Este modelo es importante en el sector financiero, ya que la volatilidad de los rendimientos es condicional y además fluctúa a lo largo del tiempo, por lo que, los modelos predecesores a la familia ARCH no lográban modelar aquel comportamiento. En otras palabras, el modelo ARCH asume que la volatilidad de los retornos de una cartera depende de noticias pasadas o de activos pasados. Sin embargo, el proceso $ARCH(q)$ presentaba algunas desventajas tales como el uso de elevados rezagos (q) en el caso de las series financieras ese problema era muy frecuente. Además, tener un ARCH de un elevado orden se traduce en el sector financiero en ponderar más la volatilidad pasada que la reciente. Por otro lado, la estimación del modelo requiere que la varianza sea positiva y finita la cual es difícil de estimar. Estas desventajas han dado lugar a que el economista Tim Bollerslev en 1986 publicará un artículo denominado <<Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity>> o más conocido como el modelo GARCH. Este modelo es una generalización del modelo ARCH ya que "la varianza condicional no solo depende de los cuadrados de las perturbaciones, como en el modelo ARCH de Engle, sino que además también depende de las varianzas condicionales de periodos anteriores, es decir, de σ_t^2 pasados" (Arnate, 2018). Así, el proceso $GARCH(p,q)$ está dado por:

$$\varepsilon_t|\psi_t \sim iid(0, \sigma_t^2)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

Donde las condiciones suficientes (no necesarias) para que la varianza no sea negativa y se dé la estabilidad del modelo son: $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \forall i \in q$, $\beta_j > 0 \forall j \in q$ y $\alpha + \beta < 1$ el proceso se convierte en un proceso $ARMA(q)$, también si $p = 0$ y $q = 0$ entonces el proceso estocástico es ruido blanco. Se puede demostrar que un $GARCH(1,1)$ es un modelo $ARCH(\infty)$ con pesos geométricamente decrecientes. Esto se evidencia si se sustituye de manera recursiva, los retrasos en la ecuación de $GARCH(1,1)$ sugiriendo que este modelo puede ser una aproximación más razonable que altos órdenes de ARCH. Adicíonalmente en este modelo

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

Donde σ_{t-1}^2 es el primer rezago del error y σ_{t-1}^2 es el primer rezago de la varianza condicional. Si en este modelo tiene una persistencia en la volatilidad igual a $1(\alpha_1 + \beta_1 \approx 1)$ entonces se le denomina IGARCH o GARCH integrado. Esto significa que la parte autoregresiva del GARCH tiene raíz unitaria y se asemeja a los modelos ARIMA. Una característica importante del GARCH en las series financieras es que el impacto de los activos al cuadrado sobre las rentabilidades es persistente, lo que significa los choques poseen un efecto más duradero en las series y que la varianza a largo plazo es indefinida (Tsay, 2005).

Por otro lado, cuando este modelo tiene una persistencia en la volatilidad menor que $1(\alpha_1 + \beta_1 < 1)$ significa que en el largo plazo, el último termino se vuelve cada vez menos significativo y se genera una reversión a la media, que se puede observar directamente en los gráficos de sigma, por ejemplo, del paquete de rugarch, como se muestra en la siguiente figura que muestra el comportamiento de la volatilidad estimada del activo BPI entre 2017 y 2021.

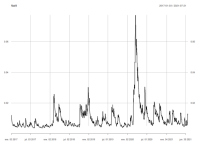

Fig. Ejemplo de volatilidades estimadas con reversión a la media. Elaboración propia.

Así el modelo $GARCH(1,1)$ es uno de los modelos más comunes en las series financieras. Para entender mejor el modelo se va a realizar un ejemplo, el cual se enumerará con base en los 4 pasos propuestos por Tsay (2005) para construir un modelo de volatilidad en una serie de rendimiento de activos:

1. Especificar la ecuación de la media por medio de probar la dependencia serial en los datos y_t si es necesario, construir un modelo econométrico (por ejemplo, un modelo ARMA) para eliminar cualquier dependencia.
2. Saque los residuos de la ecuación de la media y úselos para probar los efectos ARCH.
3. Si existen efectos ARCH especifique un modelo de volatilidad y realice una estimación conjunta de las ecuaciones de media y volatilidad.
4. Comprueba si el modelo se ajusta, de lo contrario regístrelo.

Por simplicidad, tomemos este ejemplo donde no existe correlación serial, ACF es ruido blanco y la ecuación de la media es:

$$r_t = \mu + a_t$$

Donde los residuales son:

$$a_t = R_t - \mu$$

Luego, con los residuales al cuadrado se prueba si hay heterocedasticidad condicional. A lo anterior se le conoce como probar si hay efectos ARCH, para ello se plantea la siguiente prueba de hipótesis en la serie de Amazon:

$$H_0 : a_t = 0$$

$$H_1 : Alternativa\ a\ la\ forma\ extendida$$

Esta prueba se le conoce como Lagrange Multiplier Test of Engle (1982), también se puede probar la misma hipótesis con el test de Box-Ljung. Con ayuda de R se calcula y el resultado es el siguiente:

```
        ARCH LM-test; Null hypothesis: no ARCH effects

data:  AMZN$RET_D
Chi-squared = 49.34, df = 4, p-value = 4.958e-10
```

Fig 1. Resultado Lagrange multiplier test of Engle (1982)
Elaboración propia

```
        Box-Ljung test

data:  ut^2
X-squared = 65.853, df = 4, p-value = 1.701e-13
```

Fig 2. Resultado Box-Ljung test
Elaboración propia

Por lo tanto, se rechaza la hipótesis nula ya que el p-value es menor a una significancia del 5%. Lo anterior significa que existen efectos ARCH. Se puede estimar el modelo, cuyo proceso se puede hacer mediante el análisis del resultado de la prueba de Lagrange Multiplier que demuestra qué rezagos son significativos. De manera general, si los primeros rezagos son significativos, es un indicativo que un modelo ARCH pudieso ser suficiente para captar el efecto heterocedástico. De lo contrario, si hay rezagos de órdenes mayores relevantes, una opción es emplear modelos GARCH tales como el GARCH(1,1), usualmente empleada en series de rendimientos financieros.

Gracia ayuda de la libreria rugarch se estima el modelo y arroja el siguiente resultado:

```
*---------------------------------*
*          GARCH Model Fit        *
*---------------------------------*

Conditional Variance Dynamics
-----------------------------------
GARCH Model     : sGARCH(1,1)
Mean Model      : ARFIMA(0,0,0)
Distribution    : std

Optimal Parameters
------------------------------------
        Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
mu      0.001538    0.000295   5.2166  0.0e+00
omega   0.000030    0.000007   4.1312  3.6e-05
alpha1  0.174299    0.031018   5.4452  0.0e+00
beta1   0.758951    0.037232  20.3845  0.0e+00
shape   4.060983    0.382787  11.2248  0.0e+00


Weighted Ljung-Box Test on Standardized Squared Residuals
------------------------------------
                        statistic p-value
Lag[1]                     0.4518  0.5211
Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][5]    1.3830  0.7686
Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][9]    2.0928  0.8936
d.o.f=2

Weighted ARCH LM Tests
------------------------------------
            Statistic Shape Scale P-value
ARCH Lag[3]    0.4321 0.500 2.000  0.5110
ARCH Lag[5]    0.4365 1.440 1.667  0.9022
ARCH Lag[7]    0.8047 2.315 1.543  0.9431
```

Fig. 3 Modelo GARCH(1,1) con distribución t-Student para AMZN
Elaboración propia

Como se muestra en la figura 3, con una significancia del 5 %, se puede concluir que no se rechaza la hipótesis nula debido a que el p-value es mayor que la significancia por ende ya no hay efecto ARCH. Así, la volatilidad estimada a través de un modelo estándar GARCH(1,1) o sGARCH(1,1) se muestra en la figura 4.

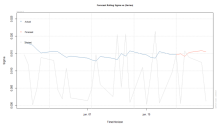

Fig. 4 Gráfico del pronóstico de la volatilidad con un modelo GARCH(1,1) para AMZN
Elaboración propia

En conclusión, el modelo $GARCH(p,q)$ recoge elevados de curtosis y es un modelo que no necesita de muchos rezagos, lo cual es una ventaja ya que la estimación es más sencilla. Además, modela bien el comportamiento de la varianza a través del tiempo (Heterocedasticidad Condicional) de los retornos financieros y otra serie de tiempo univariada, al igual que modela los clústeres de volatilidad. Sin embargo, este modelo asume que tanto los errores positivos como negativos influencian la volatilidad de manera simétrica. En otras palabras, la información buena o mala impactará de igual manera al modelo de volatilidad. A lo anterior se le denomina efecto Leverage y es la práctica suele ser un supuesto erróneo (Arnate, 2018) y por lo cual existe una amplia familia de modelos GARCH que buscan modelar de mejor forma estos efectos.

Referencias

Arnate, K., 2018. MODELOS ARCH Y GARCH. Aplicación a series financieras. Pregrado. Universidad de Barcelona. Disponible en: http://diposit.ub.edu/dspace/bitstream/2445/125023/3/memoria.pdf

Castañón, H., 2011. Especificación y Estimación de los MODELOS ARCH. [online] Cepal.org. Disponible en: https://www.cepal.org/sites/default/files/events/files/jcc_11-2011.bravo-castaas.modelosarch.mp_.pdf

Engle, R. (1982). Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. Econometrica, 50(4), 987-1007. doi:10.2307/1912773.

Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. Journal of econometrics, 31(3), 307-327.

Ruffo Lerza, Eduardo & Guevara, Luis & Alarcón, Carlos. (2014). Aplicación de la metodología GARCH al precio de cierre en la Bolsa de Valores de Lima. Industrial Data. 15. 096. 10.15381/idata.v15i2.6977.

Tsay, R. S. (2005). Analysis of financial time series (Vol. 543). John wiley & sons.

Marcar como completo