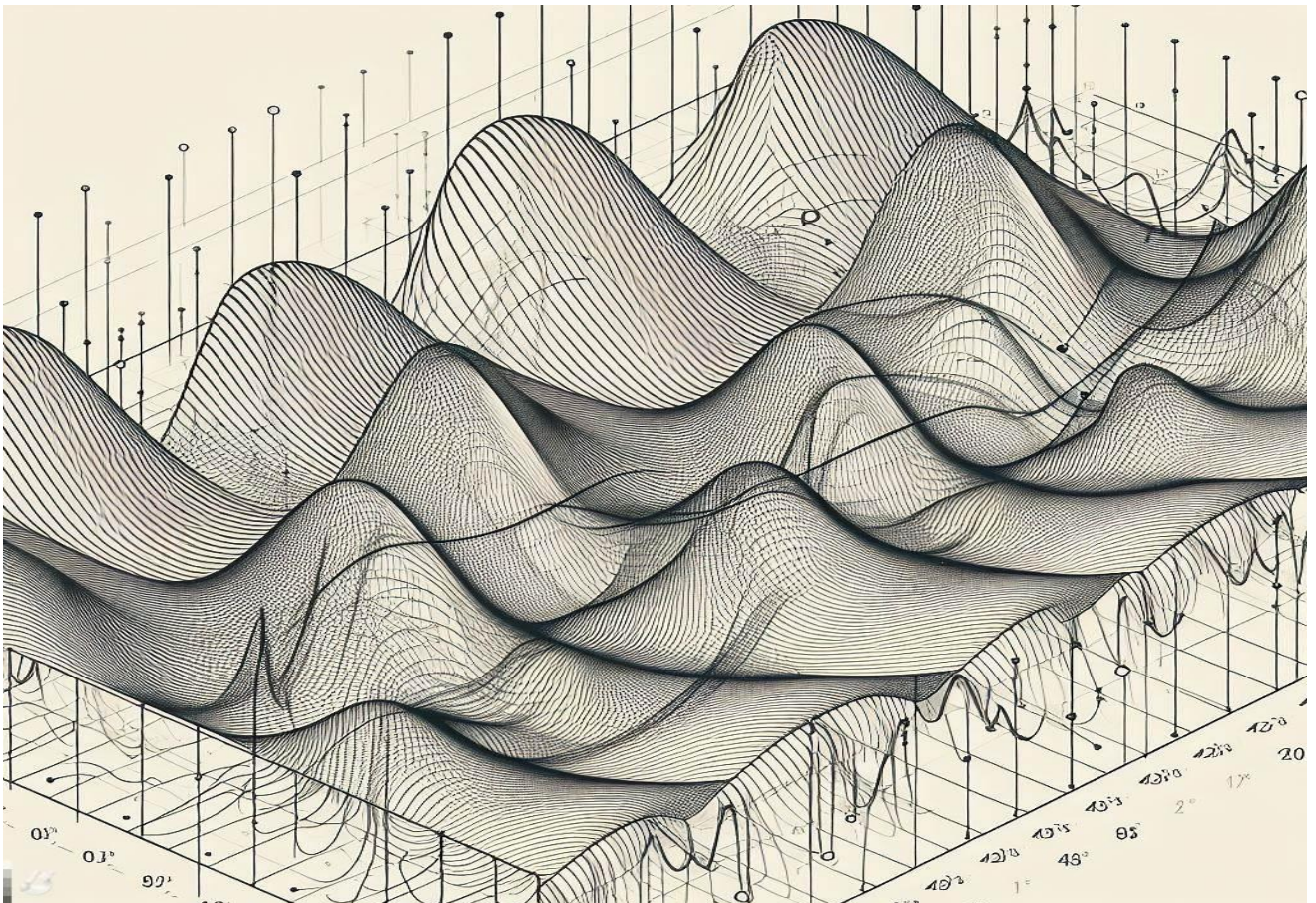


Propagation d'une onde à une dimension: Application aux cordes vibrantes

Auteurs : E.AKIN, E.EL HADJ

Proposé et supervisé par T. CALLEGARI
Responsable : P.CASTELLAN



Sommaire

I) Introduction

II) Résolution de l'équation de D'Alembert

III) Cas d'une corde fixée à ses deux extrémités

A) Cas d'une onde stationnaire

B) Cas d'une déformation initiale à vitesse nulle

1) Avec une impulsion

2) Avec un train d'onde

C) Cas d'une déformation nulle avec une certaine vitesse V

VI) Influence du pas de temps

VII) Cas d'une corde fixée à une seule extrémité

VIII) Architecture du code C

IX) Conclusion

X) Gestion du Projet

A) Matrice RACI

B) Matrice SWOT

C) Diagramme de Gantt

D) Bilans personnels

XI) Bibliographie

XII) Annexe

I) Introduction

Dans ce rapport, on s'intéresse au phénomène de propagation d'une onde, appliquée à une corde vibrante. Une onde correspond à une perturbation qui se propage à travers l'espace ou un milieu, transportant de l'énergie sans déplacement permanent de matière.

Les ondes peuvent prendre différentes formes, telles que les ondes sonores, les ondes lumineuses, les ondes électromagnétiques, et même les ondes sur une corde vibrante.

Celle-ci possède plusieurs caractéristiques, dont sa fréquence et sa longueur d'onde. La fréquence représente le nombre de cycles d'oscillation par unité de temps, tandis que la longueur d'onde est la distance entre deux points équivalents sur la vague.

Le projet propose une variété de scénarios pour visualiser la propagation d'ondes, offrant ainsi une exploration interactive des nuances de ce phénomène complexe. En synthèse, cette étude permet de mieux comprendre les implications physiques des paramètres sur la dynamique des ondes le long d'une corde vibrante.

Nous traiterons dans un premier temps la partie théorique qui se fera avec la résolution de l'équation de d'Alembert, qui permet de décrire le comportement des ondes se propageant dans un milieu homogène et isotrope. Les solutions de cette dernière seront ensuite utilisées pour la résolution numérique, à travers la méthode des différences finies. Par la suite, nous implémenterons les concepts théoriques en langage C afin de pouvoir modéliser les différentes ondes. Et pour finir, nous pourrons observer le comportement de ces ondes grâce au logiciel MatLab.

II) Résolution de l'équation de d'Alembert

Notre point de départ est l'équation de d'Alembert, qui est la suivante:

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

$$\text{avec: } c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu_0}} \text{ et } T_0 = 30 \text{ N } \mu_0 = 100 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-1}$$

où: y est la fonction d'onde dépendante du temps t et de la position x, c la vitesse de propagation de l'onde.

La solution générale de l'équation de d'Alembert est souvent exprimée comme une somme de combinaison d'ondes progressives et régressives. La forme générale de la solution est:

$$y(x, t) = A \cdot \left(t - \frac{x}{c}\right) + B \cdot \left(t + \frac{x}{c}\right) = A \cdot \cos\left[\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{c}\right)\right] + B \cdot \left[\cos\frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{x}{c}\right)\right]$$

D'autre part, il existe des méthodes numériques de résolution d'équations avec des dérivées partielles telles que la méthode des différences finies pour ce genre de cas. En effet, celle-ci nous permet de discrétiser les domaines spatial (en point le long d'une corde) et temporel (en grilles avec des espacements réguliers).

L'idée ici est de partir de la formule de Taylor-Young, celle-ci nous permet d'approximer une fonction par une somme de monôme.

La formule de Taylor générale pour un polynôme, centrée en un point $x = a$ est donnée par:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots$$

La version simplifiée pour une petite perturbation autour du point x_0 est souvent utilisée,

où $h = (x - x_0)$

On a alors:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(a)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!}f^n(x_0) + (x - x_0)\gamma(h)$$

qui devient alors :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \dots + \frac{h^n}{n!}f^n(x_0) + h\gamma(h)$$

avec : $h\gamma(h) = 0$ car n est un entier naturel.

Dans le cas de notre problème on a, en partant de l'équation de d'Alembert:

Dans le domaine spatial:

$$f(x + h, t) = f(x, t) + h \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} + h^2 \frac{\partial^2 f(x, t)}{2! \partial x^2} + h^3 \frac{\partial^3 f(x, t)}{3! \partial x^3}$$

$$f(x - h, t) = f(x, t) - h \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} + h^2 \frac{\partial^2 f(x, t)}{2! \partial x^2} - h^3 \frac{\partial^3 f(x, t)}{3! \partial x^3}$$

qui devient alors:

$$y(x + h, t) = y(x, t) + h \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} + h^2 \frac{\partial^2 y(x, t)}{2! \partial x^2} + h^3 \frac{\partial^3 y(x, t)}{3! \partial x^3}$$

$$y(x - h, t) = y(x, t) - h \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} + h^2 \frac{\partial^2 y(x, t)}{2! \partial x^2} - h^3 \frac{\partial^3 y(x, t)}{3! \partial x^3}$$

en faisant ainsi la somme de ces deux termes on obtient:

$$y(x + h, t) + y(x - h, t) = 2y(x, t) + 2h^2 \frac{\partial^2 y(x, t)}{2! \partial x^2}$$

$$\text{d'où: } \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = \frac{y(x+h, t) + y(x-h, t) - 2y(x, t)}{h^2}$$

Dans le domaine temporel:

$$f(x, t + ht) = f(x, t) + ht \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} + ht^2 \frac{\partial^2 f(x, t)}{2! \partial t^2} + ht^3 \frac{\partial^3 f(x, t)}{3! \partial t^3}$$

$$f(x, t - ht) = f(x, t) - ht \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} + ht^2 \frac{\partial^2 f(x, t)}{2! \partial t^2} - ht^3 \frac{\partial^3 f(x, t)}{3! \partial t^3}$$

qui devient alors:

$$y(x, t + ht) = y(x, t) + ht \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} + ht^2 \frac{\partial^2 y(x, t)}{2! \partial t^2} + ht^3 \frac{\partial^3 y(x, t)}{3! \partial t^3}$$

$$y(x, t - ht) = y(x, t) - ht \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} + ht^2 \frac{\partial^2 y(x, t)}{2! \partial t^2} - ht^3 \frac{\partial^3 y(x, t)}{3! \partial t^3}$$

en faisant ainsi la somme de ces deux termes on obtient:

$$y(x, t + ht) + y(x, t - ht) = 2y(x, t) + 2ht^2 \frac{\partial^2 y(x, t)}{2! \partial t^2}$$

$$\text{d'où : } \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = \frac{y(x, t+ht) + y(x, t-ht) - 2y(x, t)}{ht^2}$$

On se sert de nos résultat précédent, et on remplace dans l'équation de D'Alembert, on a alors:

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = \frac{y(x+h, t) + y(x-h, t) - 2y(x, t)}{h^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{y(x, t+ht) + y(x, t-ht) - 2y(x, t)}{ht^2}$$

ainsi, on aura donc à l'instant t+ht:

$$y(x, t + ht) = 2y(x, t) - y(x, t - ht) + c^2 \frac{ht^2}{h^2} [y(x + h, t) + y(x - h, t) - 2y(x, t)]$$

On a alors pour la mise en place de l'implémentation:

$$y(i, j + 1) = 2y(i, j) - y(i, j - 1) + c^2 \frac{ht^2}{h^2} [y(i + 1, j) + y(i - 1, j) - 2y(i, j)]$$

avec i notre échantillonnage de l'espace le long de la corde et j la discrétisation temporelle.

III) Cas d'une corde fixée à ses deux extrémités

A) Cas d'une onde stationnaire

Dans le cas d'une onde stationnaire, on se déplace vers l'extrémité de la corde tendue, en produisant un ensemble d'onde (ondes incidentes). Une fois arrivées au bout de la corde, celles-ci se réfléchissent et repartent en sens inverse et ce en changeant de signe (ondes réfléchies).

La corde est donc soumise en continu à des ondes incidentes venant de la gauche et à des ondes réfléchies venant de la droite.

Dans ce type de phénomène, certains points ne bougent pas: ce sont les nœuds. Les extrémités de la corde sont les points d'abscisse $x=0$ et $x=L$.

D'où nos conditions limites suivantes: $y(0, t) = 0$ (1) et $y(L, t) = 0$ (2).

Pour la condition (1), on a: $y(0, t) = A \cdot \cos\left[\frac{2\pi}{T}t\right] + B \cdot \left[\cos\frac{2\pi}{T}t\right] = 0$ d'où: $A = -B$.

Par ailleurs:

$$y(x, t) = A \cdot \cos\left[\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{c}\right)\right] + B \cdot \left[\cos\frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{x}{c}\right)\right] = 2A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

On en déduit alors qu'une onde stationnaire n'est rien d'autre que la somme de deux ondes progressives de même amplitudes se propageant dans des sens opposés

Pour la condition (2), comme la corde est fixée en l'extrémité $x = L$, il faut que là en tout temps, la corde ne puisse bouger, donc: $y(L, t) = 2A\sin Kx \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$. Or, cela n'est possible (pour tout t) que si: $\sin(K \cdot L) = 0$ donc $K \cdot L = n \cdot \pi$

Or, $K = \frac{2\pi}{\lambda}$ d'où: $\frac{2\pi}{\lambda} \cdot L = n \cdot \pi$ ainsi: $\lambda = \frac{2L}{n}$.

On obtient alors: $y(L, t) = 2A\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$. En s'intéressant aux variations spatiales, et donc qu'au terme " $\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ ", ce qui conduit à $\sin\left(\frac{n\pi 0}{L}\right) = \sin\left(\frac{n\pi L}{L}\right) = 0$.

Le mode fondamentale ($n=1$) correspond à une demi-longueur d'onde entre les extrémités. Les modes suivants ($n=2,3,\dots$) ont deux, trois etc, demi-longueurs d'ondes entre les extrémités.

Dans la suite de ce rapport, nous traiterons les différents types de déformations

La normalisation peut être effectuée pour s'assurer que l'ensemble de l'onde reste dans une plage appropriée pour la représentation discrète. Si l'amplitude l'onde est telle sans la division par 100, les valeurs excéderaient la plage acceptable, d'où la division par 100, pour ramener ces valeurs dans une plage plus raisonnable.

La représentation des expressions des ondes sous la forme de fonctions gaussiennes associées à des écart-types, et à des normalisation, est pratique pour plusieurs raisons, souvent liées à des phénomènes physiques.

En effet, les fonctions gaussiennes sont souvent faciles à manipuler mathématiquement, celles-ci sont bien localisées dans le temps et dans l'espace, ce qui les rends utiles pour la représentation des propagations d'ondes dont les caractéristiques sont centrées autour d'une certaines positions ou d'une certaine durée. L'écart-type (σ) contrôle la largeur de la distribution influençant ainsi la localisation temporelle et spatiale de l'onde. D'autre part, la constante $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ assure que l'énergie totale de l'onde reste constante (conservation de l'énergie).

B) Cas d'une déformation initiale à vitesse nulle

Dans ce cas-ci les conditions limites sont les mêmes que celles d'une onde stationnaire. D'où $y(0,t) = 0$ (1) et $y(L,t) = 0$ (2).

1) Avec une impulsion

Dans ce cas on a : $y(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, en effet on lâche la corde sans vitesse initiale. Le terme $(x-\mu)$ nous permet de nous placer au centre de la gaussienne.

2) Train d'onde

Un train correspond mathématiquement à une multiplication d'une impulsion par une onde stationnaire.

C) Cas d'une déformation nulle avec une certaine vitesse V

Dans ce cas on a: $y(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-h-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, correspondant toujours à l'équation d'une gaussienne. Ici à la différence du dernier point on a l'influence du pas spatiale dû à la vitesse.

VI) Influence du pas de temps

On se place à présent dans le contexte où la corde n'a pas de vitesse initiale,

Le CFL (Condition de Courant-Friedrichs-Lewy) est une condition cruciale dans la simulation numérique de la propagation d'une onde. Cette condition impose une relation entre le pas de temps, la distance spatiale entre les points de discrétisation, et la vitesse de propagation de l'onde. En respectant la condition CFL, on assure la stabilité numérique du modèle, évitant ainsi des instabilités indésirables.

On a d'après cette condition: $CFL = \frac{v \cdot \Delta t}{\Delta x} \leq C$

- v , la vitesse de propagation de l'onde
- Δt , le pas de temps
- Δx , le pas spatiale entre les points de discrétisation
- C , une constante spécifique qui dépend de notre méthode de différences finies.

Cette inégalité garantit la convergence de notre système, c'est-à-dire que le produit de la vitesse de propagation, du pas spatial, et temporelle soit inférieur à une certaine valeur.

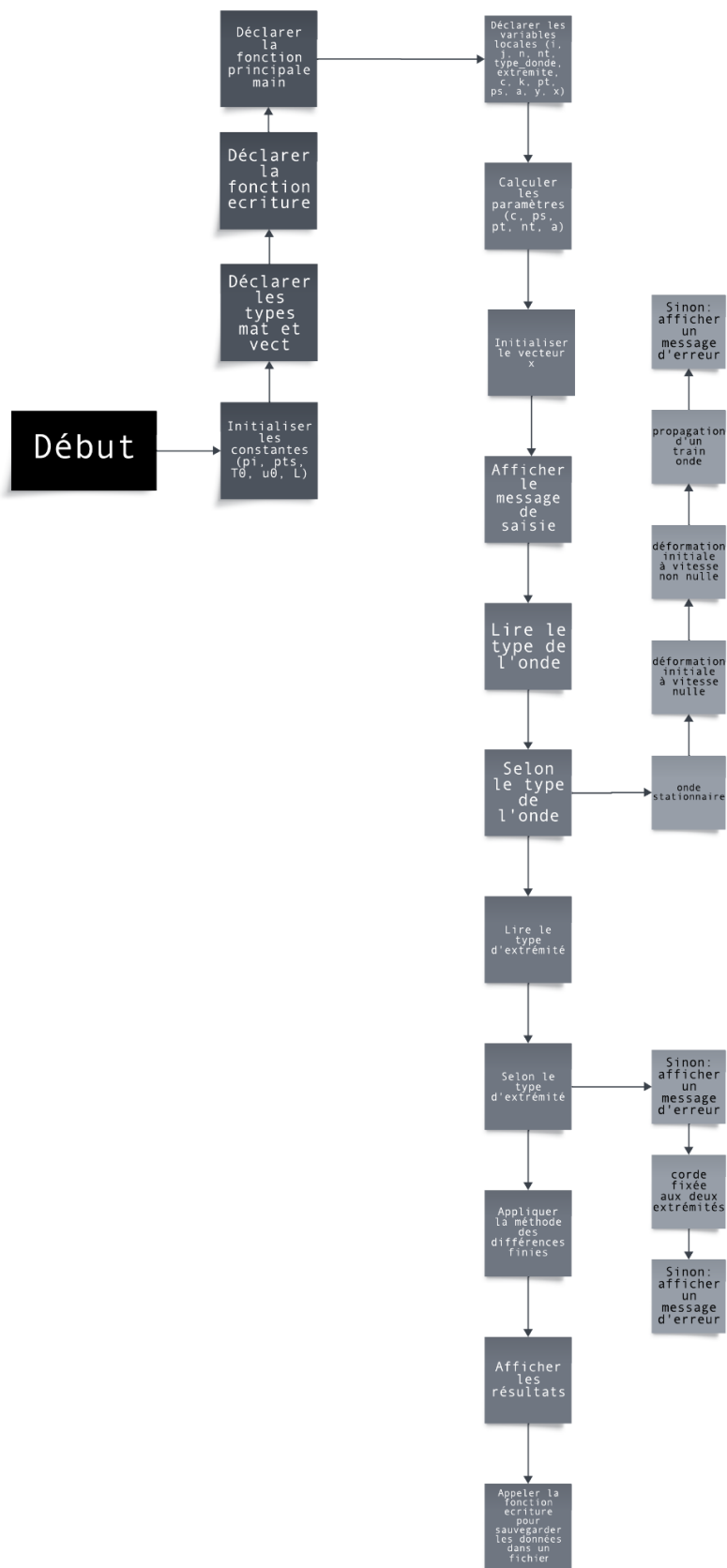
VII) Cas d'une corde fixée à une seule extrémité

Pour créer une onde stationnaire sur une corde vibrante, les conditions limites dépendent des extrémités de la corde. Si les deux extrémités sont fixes (conditions de

Dirichlet), l'amplitude est toujours nulle à ces points, et la corde doit avoir une longueur correspondant à un nombre impair de demi-longueurs d'onde. Si les deux extrémités sont libres (conditions de Neumann), la dérivée de l'amplitude est nulle aux extrémités, et la longueur de la corde doit correspondre à un nombre entier de demi-longueurs d'onde. Si une extrémité est fixe et l'autre est libre, la longueur de la corde doit correspondre à un nombre entier de demi-longueurs d'onde.

En effet, dans ce cas on a les conditions limites suivantes: $y(0, t) = 0$ et $\frac{\partial y(L, t)}{\partial x} = 0$

VIII) Architecture du code C



IX) Conclusion

Ce projet a constitué une exploration approfondie de la propagation d'une onde monodimensionnelle, nous offrant une compréhension plus profonde de ses aspects positionnels et temporels. Nous avons abordé le sujet avec une double approche, combinant une étude théorique physique, notamment des aspects mathématiques liés à l'équation de D'Alembert, avec une résolution numérique utilisant la méthode des différences finies.

La recherche documentaire associée à ce projet a joué un rôle crucial, nous fournissant des connaissances approfondies et des perspectives éclairantes. L'implémentation pratique de ces concepts en langage C a constitué une étape essentielle, nous permettant de mettre en œuvre les modèles théoriques dans un environnement informatique.

Au-delà de la complexité du code, ce projet a été une expérience stimulante qui a renforcé nos compétences en programmation et approfondi notre compréhension des phénomènes ondulatoires. La résolution numérique a été particulièrement instructive, soulignant l'importance des méthodes computationnelles dans l'analyse de problèmes physiques complexes.

En fin de compte, ce projet a été une aventure académique et technique très enrichissante. Il a contribué à notre formation en informatique, tout en élargissant notre compréhension des ondes et de la modélisation numérique. Cette expérience laissera des empreintes durables dans notre parcours académique et nous préparera de manière significative pour des projets similaires à l'avenir.

X) Gestion de projet

A. Matrice RACI

Matrice RACI		Nom des parties prenantes		
Responsable: M. Castellan				
Encadrant: T.Callegari				
Sujet: Propagation d'une onde à une dimension.				
Application aux cordes vibrantes.				
Tâches		El Hacen	Emre	Callegari
	Mise en place des réunions	A	A	-
	Introduction/contexte/problematique	R - A	R	A
	Recherche des méthodes de résolution	I	R	A
	Résolution numérique (partie théorique)	R	R	I
	Résolution numérique (implémentation)	A	R	I
	Méthode des différences finies	R	A	I
	Structuration du contenu	A	R	I
	Gestion de projet	R - A	R	-
	Remise du rapport	R	A	I
	Préparation soutenance	R	R	-
	Suivi bibliographique	R	R	I
R : Qui est chargé de mener à bien le projet				
A : Qui valide				
C : Qui peut aider, apporter son expertise ou son avis				
I : Qui doit être tenu informé de l'avancée du projet				
En résumé, la matrice RACI devrait fournir une perspective claire sur la manière dont les responsabilités sont réparties comment elles contribuent aux objectifs globaux, et comment elles peuvent être gérées de manière efficace tout au long du projet.				

B. Matrice SWOT

MATRICE SWOT



C. Diagramme de Gantt:



DAILY GANTT CHART TEMPLATE

Propagation d'une onde sur une corde

AKIN Emre et EL HADJ El Hacem

Université Toulouse III - Paul Sabatier

20-Nov-23

START DATE

16-Dec-23

END DATE

[illegible]

D. Bilans personnels :

AKIN Emre : Ce projet m'a apporté une compréhension approfondie des concepts liés aux ondes et aux vibrations, tout en me confrontant à divers défis informatiques. La traduction d'une dérivée nulle d'une fonction à deux variables en deux boucles for s'est avérée être un défi stimulant. Cela m'a permis de développer mes compétences en programmation et d'approfondir ma réflexion en informatique.

Les difficultés rencontrées lors de l'écriture du programme ont notamment été liées à l'utilisation du switch case en langage C, qui s'est révélée plus complexe que prévu. La nécessité de traduire des concepts physiques, tels que la déformation initiale d'une corde, en langage informatique a demandé une réflexion approfondie et la compréhension précise du fonctionnement des structures de contrôle.

Travailler sur la méthode des différences finies pour modéliser le phénomène physique a également posé des défis, mais ces difficultés ont été des opportunités d'apprentissage. Comprendre comment deux boucles fonctionnent simultanément pour résoudre des équations aux dérivées partielles a été une expérience enrichissante, renforçant ainsi ma capacité à aborder des problèmes complexes.

La collaboration avec mon collègue Hacen a ajouté une dimension collaborative au projet, favorisant les échanges d'idées et renforçant notre compréhension mutuelle. Le soutien du professeur M. CALLEGARI a été précieux pour surmonter les obstacles et approfondir la compréhension du phénomène physique sous-jacent.

En conclusion, ce projet a constitué une étape importante dans mon apprentissage, m'offrant des enseignements tant sur le plan informatique que sur le plan conceptuel. Les défis rencontrés ont renforcé ma détermination à poursuivre mes études en robotique, en mettant en lumière l'importance de la programmation et de la modélisation informatique dans le domaine de la physique appliquée.

El Hacen : Ce projet de modélisation de la propagation d'une onde en langage C a été une aventure captivante pour moi. Mon objectif était de renforcer mes compétences en informatique et de me plonger dans la modélisation numérique des phénomènes physiques.

L'étape initiale m'a conduit à comprendre les fondements théoriques de la physique des ondes et à les traduire en code informatique. Cette phase a représenté un défi stimulant, en particulier lors de la mise en œuvre d'un algorithme pour simuler la déformation d'une corde en réponse à une onde stationnaire. Les subtilités des boucles et des tableaux en langage C m'ont demandé une attention particulière, mais cela a renforcé ma compréhension des équations aux dérivées partielles et des méthodes numériques.

Le choix de modéliser différents types d'ondes et de définir les conditions aux limites a été une décision cruciale, offrant des enseignements approfondis en modélisation numérique. Cependant, le temps accordé pour le projet était limité, ce qui a posé des défis supplémentaires. J'ai dû faire preuve de diligence et de résilience pour surmonter ces obstacles et livrer un projet de qualité dans les délais impartis.

L'utilisation du switch case pour gérer les différents types d'ondes a été plus complexe que prévu, nécessitant une compréhension approfondie des structures de contrôle avancées en langage C. Travailler en étroite collaboration avec mon collègue a été enrichissant, car nous avons partagé des idées, résolu des problèmes ensemble et renforcé nos compétences mutuelles.

En résumé, malgré les contraintes de temps, ce projet a été une expérience d'apprentissage immersive qui a amélioré mes compétences en programmation, tout en me plongeant dans le monde passionnant de la modélisation numérique des ondes. Ces compétences seront certainement utiles dans mes futurs projets et études en informatique et en modélisation.

XI) Bibliographie

- [Paquet d'onde - Wikiwand](#)
- [Propriétés des ondes \(matheux.ovh\)](#)
- [Microsoft Word - Eq d'Alembert.doc \(unisciel.fr\)](#)
- « Onde sur une corde vibrante », Wikipédia
- « Equation D'onde de La Corde | PDF | Équation d'onde | Vagues »

XII) Annexe

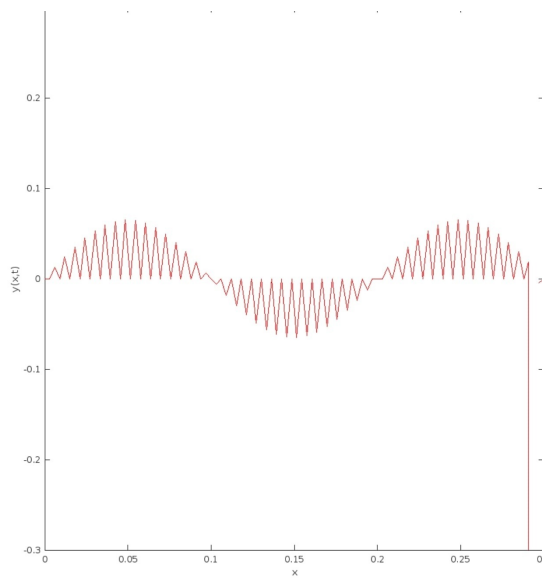


figure 1: onde stationnaire avec mode de rang 3

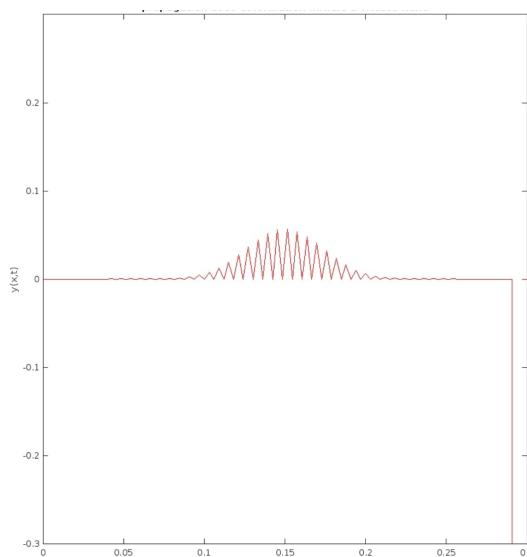


figure 2: déformation initiale à vitesse nulle d'une impulsion

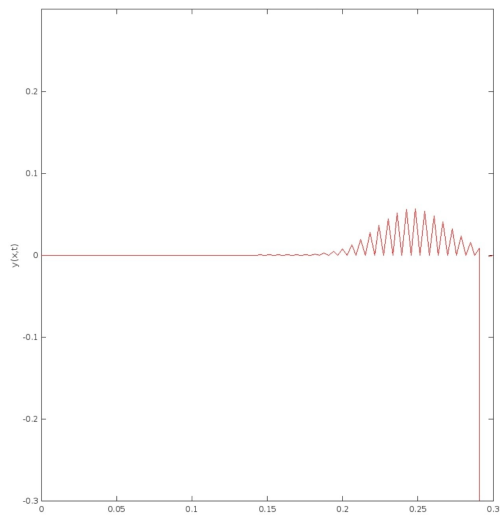


figure 3: déformation initiale à vitesse non nulle d'une impulsion

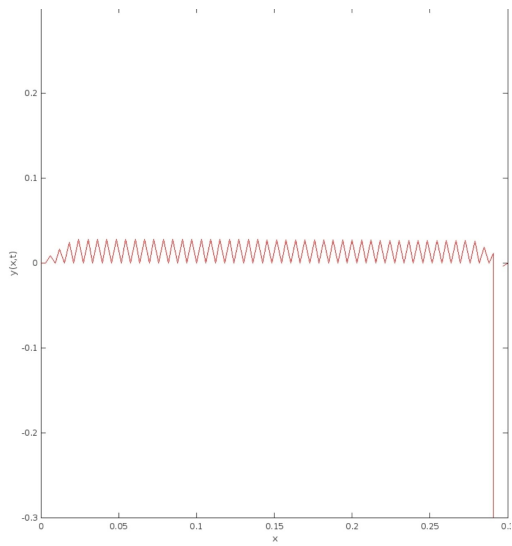


figure 4 : déformation initiale à vitesse nulle d'un train d'onde