I

MATRİS İŞLEMLERİ VE ÖZEL MATRİSLER

Matrisler büyük harflerle gösterilip; elemanları köşeli parantez içinde yazılır ve elemanların satırlar ve sütunlar şeklinde düzenlenmiş halini ifade eder. Matrisin kaç tane satır ve kaç tane sütundan ibaret olduğu da adının sağ alt köşesine yazılır. A_{mxn} ifadesi A matrisinin m tane satır, n tane sütundan ibaret olduğunu ifade eder. a_{ij} ise A matrisine ait i. satır ve j. sütunda bulunan elemanını gösterir.Böylece mxn tane elemanın oluşturduğu matris,

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ .... & .... & .... & \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} \end{bmatrix}$$ şeklinde gösterilebilir.

A_{mxn} matrisini,

$$A = \left[a_{ij}\right] \qquad \begin{matrix} i = 1,\ 2,\ \dots\ ,m \\ j = 1,\ 2,\ \dots\ ,n \end{matrix}$$

şeklinde göstermek de mümkündür.

A_{mxn} matrisi için mxn **tipin**de veya **mertebe**sindedir denir.

Yalnız bir sütundan ibaret olan m x1 lik matrisler **sütun vektörü**; yalnız bir satırdan ibaret olan 1x n lik matrisler de **satır vektörü** olarak adlandırılır.

ÖRNEK:

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} ; \; C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \; ; \; D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Burada, A matrisi üç bileşeni olan bir sütun vektörünü; B matrisi iki bileşeni olan bir sütun vektörünü ; C matrisi üç bileşenli bir satır vektörünü ve D ise dört bileşenli olan bir satır vektörünü göstermektedir.

1.1 MATRİSLERİN EŞİTLİĞİ

Aynı mertebeden iki matrisin karşılıklı elemanlarının hepsi birbirinin aynısı olursa bu iki matris eşittir.

$A_{mxn}=B_{mxn} \Leftrightarrow \forall i,j$ için $a_{ij}=b_{ij}$ dir.

ÖRNEK:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Verilen matrisler için; A≠B, B≠C, A=D yazılabilir. A≠B dir: Çünkü bu matrisler aynı mertebeden değildir. B≠C dir:Çünkü karşılıklı elemanların hepsi eşit değildir. A=D dir: Çünkü matrisler hem aynı mertebeden hem de karşılıklı elemanların hepsi eşittir.

1.2 MATRİSLERDE TOPLAMA VE ÇIKARMA

Aynı mertebeden iki matrisi toplamak(çıkarmak) için, bu matrislerin karşılıklı bütün elemanları toplanır(çıkarılır). Toplama(çıkarma) işlemi sonucunda yine aynı mertebeden bir matris elde edilir. A_{mxn} ve B_{mxn} matrislerini ele alırsak,

$$A_{mxn} \mp B_{mxn} = (a_{ij} \mp b_{ij}) \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, ..., m \\ j = 1, 2, ..., n \end{matrix}$$

yazılabilir.

ÖRNEK: Üç firmaya ait, 1996 yılı ilk 6 aylık döneminin mal ve hizmet üretimleri aşağıdaki şekildedir:

	I. FİRMA	II. FİRMA	III. FİRMA
Mal (Milyon Adet)	15	30	22
Hizmet(Milyar TL)	8	12	9

Aynı firmalar için yılın ikinci 6 aylık dönemi için, mal ve hizmet üretimleri aşağıdaki şekildedir:

	I. FİRMA	II. FİRMA	III. FİRMA
Mal (Milyon Adet)	20	23	18
Hizmet(Milyar TL)	12	13	11

Bu firmaların ilk 6 aylık üretimleri Ü1 , ikinci 6 aylık üretimleri Ü2 Matrisi ile gösterilirse,

$$Ü1 = \begin{bmatrix} 15 & 30 & 22 \\ 8 & 12 & 9 \end{bmatrix} \quad ; \quad Ü2 = \begin{bmatrix} 20 & 23 & 18 \\ 12 & 13 & 11 \end{bmatrix}$$

elde edilir. 1996 yıl sonu itibariyle her üç firmaya ait toplam mal ve hizmet üretimi miktarını bulmak için Ü1 + Ü2 matrisi belirlenmelidir. Buna göre,

$$Ü1+Ü2 = \begin{bmatrix} 15+20 & 30+23 & 22+18 \\ 8+12 & 12+13 & 9+11 \end{bmatrix}$$

$$\text{Toplam Üretim} = \begin{bmatrix} 35 & 53 & 40 \\ 20 & 25 & 20 \end{bmatrix}$$

elde edilir. O halde I. firmanın 1996 yıl sonu itibariyle mal üretimi 35 milyon adettir. III. firmanın 1996 yıl sonu itibariyle hizmet üretimi 20 milyar TL. dir.

* Matrislerde toplama işleminin A, B ve C aynı mertebeden matrisleri göstermek üzere,

A+B=B+A (Değişme özelliği)

A+(B+C)=(A+B)+C (Birleşme özelliği)

A+(-1)A=0 , (-1)A= -A (Ters eleman özelliği)

r ve s skaler değerler olmak üzere,

r(A+B)=rA+rB

(r.s)A=r(sA)
özellikleri yazılabilir.

* Matrislerde toplama işlemine göre birim eleman **sıfır matrisi** dir. Sıfır matrisi bütün elemanları sıfır olan matristir. Örneğin,

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi, 2x3 tipindeki matrislerin toplama işlemine göre birim elemanı olan matristir. Her mertebeden matris tipleri için uygun bir sıfır matrisi yazılabilir.

1.3 MATRİSLERİN BİR SKALER SAYI İLE ÇARPIMI

Bir A matrisinin bütün elemanları, sabit bir k sayısı ile çarpılmakla A nın k katı olan bir matris elde edilir.Bu matris kA ile gösterilir.

$$A = \left(a_{ij}\right)_{mxn} \quad \text{olmak üzere} \quad kA = \left(ka_{ij}\right)_{mxn} \quad \begin{matrix} i = 1, \ \ldots \ , m \\ j = 1, \ \ldots \ , n \end{matrix}$$

yazılabilir.Ayrıca,

1.A=A ; -1.A=-A ve 0.A=0 olur.

ÖRNEK: Matrislerde toplama-çıkarma işleminde verdiğimiz firmalara ait üretim matrislerini düşünelim. Örnekte düşünülen firmalar 1996 yılının ikinci 6 aylık yarısında, üretimlerini normal üretimlerinin 3 katına çıkardıklarına göre, 1996 yıl sonu itibariyle toplam üretimlerini bulalım:

İlk 6 aylık üretim matrisi ; $Ü1 = \begin{bmatrix} 15 & 30 & 22 \\ 8 & 12 & 9 \end{bmatrix}$

İkinci 6 aylık üretim matrisi ; $Ü2 = \begin{bmatrix} 20 & 23 & 18 \\ 12 & 13 & 11 \end{bmatrix}$

idi.

Düşünülen artışa göre, yıl sonu toplam üretim matrisi

$$\text{Toplam üretim} = Ü1 + 3Ü2 = \begin{bmatrix} 15 & 30 & 22 \\ 8 & 12 & 9 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 20 & 23 & 18 \\ 12 & 13 & 11 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 15 & 30 & 22 \\ 8 & 12 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 60 & 69 & 54 \\ 36 & 39 & 33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75 & 99 & 76 \\ 44 & 51 & 42 \end{bmatrix}$$

bulunur.

* Sabit bir sayıyla çarpmanın, matrislerde toplama işlemi üzerine dağılma özelliği vardır. Yani $k \in R$ olmak üzere,

k(A+B)=kA+kB=(A+B)k

yazılabilir.

1.4 MATRİSLERDE ÇARPMA

A_{mxn} ve B_{pxq} matrisleri verildiğine göre A.B çarpım matrisinin tanımlı olabilmesi için n=p olmalıdır. Demek ki, soldaki matrisin sütun sayısı ile sağdakinin satır sayısı eşit olmak koşuluyla çarpma işlemi yapılabilir.

A_{mxn} , B_{nxq} ise A.B= C_{mxq} olmak üzere, çarpım matrisinin c_{ij} elemanları için,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \qquad \begin{array}{l} i = 1, \ldots, m \\ j = 1, \ldots, q \end{array}$$

yazılabilir.

Görüldüğü gibi çarpım matrisi soldaki matrisin satır sayısı kadar satıra ve sağdaki matrisin sütun sayısı kadar sütuna sahip bir matris olmaktadır.

ÖRNEK 1:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \; ; \; B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere, A.B matrisini bulalım:

Görüldüğü gibi A matrisi 2x3 lük B matrisi 3x1 liktir. C=A.B matrisi 2x3 3 x1=2x1 lik olacaktır.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 + 2.(-1) + 1.1 \\ 1.1 + 0.(-1) + (-1).1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Örnekten de görüleceği gibi matrislerde çarpma işleminin değişme özelliği yoktur. A.B≠B.A dır. Hatta , A.B tanımlıyken B.A tanımsız bile olabilir.

Matrislerde çarpma işlemi, kullanımı en yaygın olan işlemdir. Optimizasyon problemlerinde, en uygun durumu belirlemede, matrislerde çarpma işlemi kullanılır.

ÖRNEK: Bir kasabada bulunan iki marketteki üç ürüne ait fiyatlar:

$$\begin{array}{c} \overbrace{M_1 \quad M_2}^{\text{Marketler}} \\ F = \begin{bmatrix} 20 & 19,5 \\ 2,8 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \left.\vphantom{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}\right\} \text{Fiyatlar (TL)}$$

olarak verilmiştir.

Bu marketlerden alış veriş yapmayı düşünen 3 alıcının, ilgili üç ürüne duydukları ihtiyaç matrisi de,

$$\text{İ}=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}2 & 10 & 3\\ 10 & 5 & 4\\ 1 & 10 & 5\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{c}A_1\\ A_2\\ A_3\end{array}$$

olarak verilmiştir.

Buna göre hangi alıcı, hangi marketten alış verişi tercih etmeli ki ihtiyaçlarını en ucuza karşılamış olsun?

$\text{İ}_{3x3}.F_{3x2}$ çarpımı, toplam ödeme matrisini elde etmemizi sağlar. Buna göre;

$$\text{Toplam Ödeme}=\begin{bmatrix}2 & 10 & 3\\ 10 & 5 & 4\\ 1 & 10 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}20 & 19{,}5\\ 2{,}8 & 3\\ 4 & 4\end{bmatrix}=\begin{array}{c}\overbrace{\begin{array}{cc}M_1 & M_2\end{array}}^{\text{Marketler}}\\ \left.\begin{bmatrix}\underline{80} & 81\\ 230 & \underline{226}\\ \underline{68} & 69{,}5\end{bmatrix}\right\}\end{array}\begin{array}{l}\text{Birinci Alıcı}\\ \text{İkinci Alıcı}\\ \text{ÜçüncüAlıcı}\end{array}$$

Çarpım sonucuna göre; Birinci müşteri için en uygun alış veriş I. markette, ikinci müşteri için ise II. markettedir. Üçüncü müşterinin de I. marketi tercih etmesi en uygun olacaktır.

1.4.1 ÇARPMA İŞLEMİNİN ÖZELLİKLERİ

A, B ve C çarpılabilen ve toplanabilen matrisler olmak üzere,

- A.(B+C)= A.B+A.C (Çarpmanın toplama üzerine dağılımı)
- (A+B)C=A.C+B.C
- r bir skaler olmak üzere r(AB)=(rA)B=A(rB)
- A.(B.C)=(A.B).C (Birleşme özelliği)
- AB=BA ise A ve B değişmeli matrislerdir.
- AB= -BA ise A ve B ters değişmeli matrislerdir.

Matrislerdeki çarpma işleminin sayılardan farklı özellikleri vardır:

- AB=0 ise A ve/veya B nin sıfır matrisi olması gerekmez.
- AB=AC ise B=C olması gerekmez.
- AB=A ise B nin birim matris olması gerekmez.

ÖRNEK 1: $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ matrisleri için,

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

bulunur. $A.B=0$ olmasına rağmen , $A\neq 0$ ve $B\neq 0$ dır.

ÖRNEK 2:

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}4 & 3 & -2\\ 3 & 1 & -1\end{bmatrix}\quad \text{ve}\quad C=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix}$$

matrislerini düşünelim.

$$A.C=\begin{bmatrix}-1 & 5\\ -1 & 5\end{bmatrix}\qquad \text{ve}\qquad B.C=\begin{bmatrix}-1 & 5\\ -1 & 5\end{bmatrix}$$

olur.

Görüldüğü gibi A.C=B.C olmaktadır. Ancak A≠B dir.

ÖRNEK 3:

$$A=\begin{bmatrix}17 & -12\\ 6/13 & 17/26\end{bmatrix}\ \text{ve}\ B=\begin{bmatrix}3\\ 4\end{bmatrix}$$

matrislerini alalım.

$$A.B=\begin{bmatrix}3\\ 4\end{bmatrix}$$

bulunur. A.B=B olmasına rağmen, A birim matris değildir.

ÖRNEK 4:

$\begin{bmatrix}1 & -3\\ -3 & 5\end{bmatrix}.A=\begin{bmatrix}-3 & -1\\ 1 & 17\end{bmatrix}$ eşitliğini sağlayan A matrisi nedir?

A matrisi 2x2 tipinde bir matristir. $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ alırsak

$\begin{bmatrix}1 & -3\\ -3 & 5\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a-3c & b-3d\\ -3a+5c & -3b+5d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & -1\\ 1 & 17\end{bmatrix}$ olmalıdır. Buna

göre $a-3c=-3$, $b-3d=-1$, $-3a+5c=1$ ve $-3b+5d=17$ olmalıdır. Bu sistemin çözümünden $a=3$, $b=-\frac{23}{2}$, $c=2$ ve $d=-\frac{7}{2}$ bulunur.

ÖRNEK 5:

$A=\begin{bmatrix}1 & 9\\ -3 & -\frac{25}{3}\end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix}k & 3\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ şeklinde tanımlı matrisler olup değişmeli matris oldukları bilindiğine göre k ne olmalıdır?

AB=BA eşitliği sağlanacak şekilde k belirlenmelidir.

$$\begin{bmatrix}1 & 9\\ -3 & -\frac{25}{3}\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}k & 3\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k & 3\\ -1 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & 9\\ -3 & -\frac{25}{3}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k-9 & 12 \\ -3k+\frac{25}{3} & -9-\frac{25}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k-9 & 9k-25 \\ -4 & -9-\frac{25}{3} \end{bmatrix}$$ olmalıdır. $9k-25=12$ ve $-3k+\frac{25}{3}=-4$

elde edilir. $k=\frac{37}{9}$ bulunur.

1.5 ÖZEL MATRİSLER

* ***Kare Matris:***

Satır ve sütun sayıları birbirine eşit olan, A_{nxn} tipindeki matrislerdir.

ÖRNEK:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ matrislerini düşünelim:

A matrisi 2x2 lik ve B matrisi 3x3 lük kare matrislerdir.

* Bir A_{nxn} kare matrisi için, i=j olmak üzere a_{ii} şeklindeki elemanlar A matrisinin köşegen elemanları adını alır. Buna bağlı olarak bir kare matrisin köşegen elemanları toplamı o **matrisin İz** 'i olarak adlandırılır.

$$İz(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$ şeklinde gösterilir.

i>j olmak üzere, a_{ij} şeklindeki elemanlar köşegenin altında olan elemanlardır.

i<j olmak üzere, a_{ij} şeklindeki elemanlar köşegenin üstünde olan elemanlardır.

O halde bir kare matrisin ,bir elemanının yerini belirten indislere bakılarak o elemanın köşegene göre durumunu tayin etmek mümkündür.

ÖRNEK:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$ matrisini ele alalım.

$İz(A)=\sum_{i=1}^{4} a_{ii} = 1+6+0+9=16$ bulunur.a_{22}= 6 köşegeni oluşturan elemandır. a_{31}= -1 köşegenin alt bölgesindedir. a_{24} = 8 köşegenin üst bölgesindedir. a_{33} = 0 köşegeni oluşturan elemandır.

* Kare matrisler için $n \in N^+$ olmak üzere;

$$A^n = \underbrace{A.A \ldots A}_{n \text{ tane}}$$

yazılabilir. Burada önemli bir nokta, A^0 ın birim matris (I) olacağı her zaman söylenemez.

ÖRNEK: $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ matrisini düşünelim, A^2 ve A^3 matrislerini hesaplayalım:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 18 & 31 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A.A.A = A^2.A = \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 18 & 31 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 43 & 74 \\ 111 & 191 \end{bmatrix}$$

bulunur.

***** ***Köşegen Matris***

Köşegen elemanları dışındaki bütün elemanları "0" olan kare matrislere köşegen matris denir.

$$A = \lfloor a_{ij} \rfloor_{nxn} \qquad \begin{cases} a_{ij} = 0 & i \neq j \text{ için} \\ a_{ij} \neq 0 & \text{En az bir } i = j \text{ için} \end{cases}$$

ÖRNEK:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \text{ matrislerini alalım.}$$

A ve B matrisleri köşegen matrislerdir.

* A ve B aynı mertebeden köşegen matrisler olmak üzere, AB=BA dır (Değişme özelliği vardır). Çarpım, sadece köşegen elemanları çarpılarak bulunur.

$A.B=(a_{ij}.b_{ij})$ $i,j=1,2,...,n$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ ve } B=\begin{bmatrix} b_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & b_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & b_{nn} \end{bmatrix} \text{köşegen matrislerinin çarpımı}$$

$$A.B=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22}b_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix} = BA \text{ olur.}$$

$a_{ii}.b_{ii}=b_{ii}.a_{ii}$ olduğundan AB=BA nın doğruluğu gösterilmiş olur. Yani köşegen matrislerde işlemler sayılardaki özelliklere sahiptir.

* Köşegen matrislerin kuvvetlerini bulmak için köşegen elemanların kuvvetlerini almak yeterlidir. $k \in \mathbf{Z}^+$ olmak üzere, A_{nxn} köşegen matrisi için $A^k_{nxn} = (a^k_{ii})$ yazılabilir.

ÖRNEK:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

olmak üzere; A.B, B.A, A^2 ve B^3 matrislerini hesaplayalım.

$$A.B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

$$B.A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$ O halde AB=BA dır.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

$$B^3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{bmatrix}$$ elde edilir.

- ***Skaler Matris:***

Köşegen üzerindeki elemanları birbirine eşit olan köşegen matrislere skaler matris denir.

ÖRNEK:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

matrisleri skaler matrislerdir.

* Köşegen elemanları 1 olan skaler matris **birim matris** adını alır. Birim matris genellikle I_n şeklinde gösterilir. Bunun anlamı nxn lik matrislerin birimi demektir.

$$I = [a_{ij}]_{nxn} \; ; \qquad a_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \text{ ise} \\ 1 & i = j \text{ ise} \end{cases}$$

Birim matris ,matrislerde çarpma işlemine göre, matrislerin birim elemanı olma özelliği gösterir. Dolayısıyla, A_{nxn} olmak üzere,

$$A.I_n = I_n.A = A \quad \text{ve} \quad (I_n)^k = I_n$$

olur.

* O halde her skaler matris, birim matrisin sabit bir katı olarak ifade edilebilir.

ÖRNEK:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$ skaler matrislerini ele alırsak,

$$A = 3\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3I \quad \text{ve} \quad B = 7I$$ yazılabilir.

* Kare olmayan matrislerin çarpma işlemine göre birim elemanı olan birim matris, sağdan ve soldan çarpma işlemine göre değişiklik gösterir, şöyle ki;

A_{mxn} tipinde bir matris olmak üzere,

$A_{mxn}I_n = I_mA_{mxn} = A_{mxn}$ şeklindedir.

ÖRNEK: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -4 & 7 \end{bmatrix}_{2x3}$ matrisini ele alalım.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -4 & 7 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -4 & 7 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$ Demek ki

$A.I_3 = I_2 .A = A$ olmaktadır.

- ***Üçgensel Matrisler:***

Köşegenin altındaki elemanlarının hepsi sıfır olan kare matrisler üst üçgen matris, köşegenin üstündeki elemanlarının hepsi sıfır olan kare matrisler ise alt üçgen matris olarak adlandırılır. A_{nxn} olmak üzere,

$i>j$ iken $a_{ij} = 0$ ise A üst üçgen matristir.
$i<j$ iken $a_{ij} = 0$ ise A alt üçgen matristir.

Üçgensel matrisler $\forall i$ için $a_{ii}=0$ ise **tam üçgensel matris** adını alırlar.
Köşegen matrisler hem üst üçgen, hem de alt üçgen olma özelliği göstermektedirler.

ÖRNEK:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad C=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

A matrisi üst üçgensel matris, B matrisi alt üçgensel matris , C ve D matrisleri ise tam üçgensel matrislerdir.

- ***Simetrik Matris:***

A matrisi nxn lik bir kare matris olmak üzere, bu matrisin elemanları arasında $i \neq j$ için $a_{ij}=a_{ji}$ eşitliği yazılabiliyorsa, böyle matrislere Simetrik Matris denir.

ÖRNEK:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 8 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$ matrisi simetrik bir matristir.

Görüldüğü gibi simetrik bir matrisin köşegen elemanlarının eşit olması gerekmez.

- ***Ters Simetrik Matris:***

$A=(a_{ij})$ matrisi nxn lik bir kare matris olmak üzere, bu matrisin elemanları

$i=j$ iken $a_{ij}=0$

$i\neq j$ iken $a_{ij}=-a_{ji}$

eşitliklerini sağlıyorsa böyle matrislere ters simetrik matris denir.

ÖRNEK:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$ matrisi ters simetrik bir matristir.

Örnekten de görülebileceği gibi, ters simetrik matrislerin izi sıfırdır. Ayrıca ters simetrik matrislerin bütün elemanları toplamı sıfırdır.

<u>TEOREM:</u> Her kare matris, biri simetrik ve diğeri ters simetrik iki matrisin toplamı şeklinde yazılabilir.

İSPAT: A matrisi nxn lik bir matris olmak üzere,

$B=(b_{ij})_{nxn}$ ve $b_{ij}=\dfrac{a_{ij}+a_{ji}}{2}$; $C=(c_{ij})_{nxn}$ ve $c_{ij}=\dfrac{a_{ij}-a_{ji}}{2}$

şeklinde tanımlanan B ve C matrisleri için A=B+C olmaktadır.

Bu matrislerden B matrisi $b_{ij}=b_{ji}$ olup, simetrik matristir. B matrisinin köşegen elemanları A matrisi ile aynıdır.

C matrisi ise $c_{ij}=-c_{ji}$ ve $c_{ii}=0$ olup, ters simetrik matris olma özelliği göstermektedir.

ÖRNEK:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 8 & 3 & -2 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisini simetrik ve ters simetrik iki matrisin toplamı olarak yazalım. Teoremdeki tanımlamaya göre, simetrik olan B matrisini oluşturalım,

$$b_{12}=\frac{a_{12}+a_{21}}{2}=\frac{4+8}{2}=6 \;; \qquad b_{13}=\frac{5+1}{2}=3 \;;$$

$$b_{23}=\frac{-2+6}{2}=2$$; ... Köşegen elemanları $b_{11}=2$, $b_{22}=3$, $b_{33}=0$

$$B=\begin{bmatrix}2&6&3\\6&3&2\\3&2&0\end{bmatrix}$$ bulunur.

Şimdi de ters simetrik olan C matrisini oluşturalım:

$$c_{12}=\frac{a_{12}-a_{21}}{2}=\frac{4-8}{2}=-2\ ; \qquad c_{13}=\frac{5-1}{2}=2\ ;$$

$$c_{23}=\frac{-2-6}{2}=-4$$; ... Köşegen elemanları $c_{11}=0$, $c_{22}=0$, $c_{33}=0$

$$C=\begin{bmatrix}0&-2&2\\2&0&-4\\-2&4&0\end{bmatrix}$$ bulunur. A=B+C olan B ve C matrisleri simetrik ve ters simetrik matrisler olarak bulunmuştur.

- ***Markov Matrisi:***

$A=(a_{ij})_{nxn}$ matrisi bir kare matris olup tüm elemanları [0,1] aralığında olup, her satır veya sütunundaki elemanları toplamı da 1 oluyorsa böyle matrislere Markov Matrisi denir. Bu matrislerin her elemanı bir olasılık ifade eder. Markov matrislerinin kuvvetleri de yine bir Markov Matrisi olur.

ÖRNEK:

$$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\1&0\end{bmatrix}$$ olarak tanımlanan A matrisi Markov Matrisidir.

Her elemanı $0\le a_{ij}\le 1$ şartını sağlamakta ve her satırındaki elemanlarının toplamı 1 olmaktadır. Şimdi A^2 matrisini bulup, Markov matrisi olduğunu gösterelim.

$$A^2=AA=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{7}{9}&\frac{2}{9}\\\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

Görüldüğü gibi, A^2 matrisinin elemanları da [0,1] aralığında değerler olup, aynı zamanda her satırındaki elemanlar toplamı da 1 dir.

- ***İdempotent Matris:***

A bir kare matris olmak üzere, $A^2 = A$ oluyorsa, böyle matrislere idempotent matris denir.

ÖRNEK:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{matrisini düşünelim.}$$

$$A^2=\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

O halde A matrisi idempotent' tir.

Bu durumda, I_n birim matrisinin idempotent olduğu görülmektedir. Çünkü $I^2=I$ olacağı açıktır.
Ayrıca idempotent matrisler için, $A^2 = A$ olacağından
$A^3=A^2=A$ olur. Genelleştirirsek $n \in N$ ve $n \geq 2$ olmak üzere $A^n=A$ olduğu görülmektedir.

- ***Peryodik Matris:***

A bir kare matris ve $k \in Z^+$ olmak üzere $A^{k+1} = A$ oluyorsa, A matrisi peryodik matris olarak adlandırılır. k ların en küçüğüne ise A matrisinin peryodu denir. İdempodent matrislerde $A^2=A$ olduğundan, peryod 1 dir.

- ***İnvolutif Matris:***

A bir kare matris olmak üzere $A^2 = I$ oluyorsa, böyle matrislere involutif matris denir. İnvolutif matrislerde, $A^{-1} = A$ olmaktadır. (A^{-1}, A matrisinin tersidir). İnvolutif matrislerde n. kuvvet;

$$A^n=\begin{cases} A & \text{n tek ise} \\ I & \text{n çift ise} \end{cases} \qquad \text{Olur.}$$

ÖRNEK:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{matrisinin involutif olduğunu gösterelim:}$$

$$A^2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olur. O halde A involutif matristir.

İnvolutif matrisler de peryodik olup, peryodu 2 dir.

- ***Nilpotent Matris:***

A bir kare matris ve $k \in \mathbf{Z}^+$ olmak üzere, $A^k = 0$ oluyorsa A matrisine nilpotent(etkisiz) matris, k ların en küçüğüne de A nın nilpotentlik(etkisizlik) derecesi veya indeksi denir.

ÖRNEK:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$ matrisinin nilpotentlik derecesini bulalım:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix};$$

$$A^3 = A^2.A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olur.O halde A matrisinin nilpotentlik derecesi üç tür.

- ***Matris Polinomu:***

a_j ler skaler sayılar olmak üzere, $f(x)= a_0+a_1x+a_2x^2+ \ \ldots \ +a_nx^n$
polinomu için $f(A)$ matris polinomu $f(A)= a_0I+a_1A+a_2A^2+ \ \ldots \ +a_nA^n$ şeklindeki matristir. $f(A)$ sıfır matrisi olursa A ya $f(x)$ in sıfırı veya kökü denir. $f(A)$ yazılırken a_0 yerine a_0I yazılacağına ve sıfırın sıfır matris olarak alınması gerektiğine dikkat edilmelidir.

ÖRNEK: $f(x)=2x^2 - 3x +5$ ve $g(x)= x^2 +3x - 10$ fonksiyonları veriliyor.
$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ matrisine göre $f(A)$ ve $g(A)$ matris polinomları nedir?

ÇÖZÜM:

$$A^2=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

$$f(A)=2A^2-3A+5I \rightarrow f(A)=2\begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{bmatrix}-3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}+5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 16 & -18 \\ -27 & 61 \end{bmatrix}$$

$$g(A)= A^2+3A -10I \rightarrow g(A)=\begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{bmatrix}+3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}-10\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur.
Görüldüğü gibi A matrisi, $g(x)$ in bir sıfırıdır.

- A mxn lik x in bir polinom matrisi olmak üzere ; bu matrisin

türevi ve integrali aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\frac{dA}{dx} = \left[\frac{d}{dx} a_{ij}(x)\right] \quad ; \quad \int_{x_0}^{x_1} A(x)dx = \left[\int_{x_0}^{x_1} a_{ij}(x)dx\right]$$

yani her eleman için ayrı işlem yapılır.

ÖRNEK: A=$\begin{bmatrix} 3x & e^{2x} \\ \sqrt{x} & x^2 \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor. $\dfrac{dA}{dx}$ nedir?

ÇÖZÜM: $\dfrac{dA}{dx} = \begin{bmatrix} \dfrac{d}{dx}(3x) & \dfrac{d}{dx}(e^{2x}) \\ \dfrac{d}{dx}(\sqrt{x}) & \dfrac{d}{dx}(x^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2e^{2x} \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & 2x \end{bmatrix}$ bulunur.

ÖRNEK: A=$\begin{bmatrix} 2 & x \\ e^x & 0 \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor. $\int_0^1 A\,dx$ integralini hesaplayınız.

ÇÖZÜM: $\int_0^1 A\,dx = \int_0^1 \begin{bmatrix} 2 & x \\ e^x & 0 \end{bmatrix} dx = \begin{bmatrix} \int_0^1 2\,dx & \int_0^1 \mathrm{x}\,dx \\ \int_0^1 \mathrm{e}^x dx & \int_0^1 0\,dx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \dfrac{1}{2} \\ e-1 & 0 \end{bmatrix}$ olur.

1.6 BİR MATRİSİN DEVRİĞİ

Bir matrisin satırlarını sütun,ya da sütunlarını satır yapmak suretiyle oluşturulan yeni matrise bu matrisin devriği (transpozesi) denir.

A matrisi mxn lik bir matris ise, onun devriği nxm lik bir matris olur ve A' ile gösterilir. Devrik matris A^t veya A^T ile de gösterilebilir. Bir matrisin devriği alındığında, satır vektörleri sütun vektörü ve sütun vektörleri de satır vektörü olmaktadır. Bu durumda köşegen matrislerin devrikleri de aynı köşegen matris olur.

ÖRNEK:

A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$ matrisinin devriği; $A' = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$ matrisidir.

B = $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ matrisinin devriği $B' = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ dir.

ÖZELLİKLER:

A ve B birer matris olmak üzere,

i) (A')'=A

ii) (A ± B)'=A'±B'

iii) (A.B)'=B'.A'

iv) (kA)'=kA'

v) A'=A ise A simetrik bir matristir.(A nxn tipinde)

vi) A' = - A ise A ters simetrik bir matristir. (A nxn tipinde)