BÖLÜM 3: İKİ ve ÜÇ BOYUTTA HAREKET

Tarih / Date : ..../......../...........

3.1. Konum ve Hız Vektörleri

Bir parçacığın uzaydaki hareketini inceleyebilmek için önce onun konumunu belirlemeliyiz. Belli bir anda P noktasında olan bir parçacık düşünelim. Parçacığın bu andaki konum vektörü $\vec{r}$ koordinat sisteminin başlangıç noktasından P noktasına uzanan vektördür (Şekil 3.1). Dolayısıyla;

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \qquad (3.1)$$

olarak ifade edilir. Parçacığın ortalama hızı (Bknz. Şekil 3.2)

$$\vec{v}_{ort} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{(x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \qquad (3.2)$$

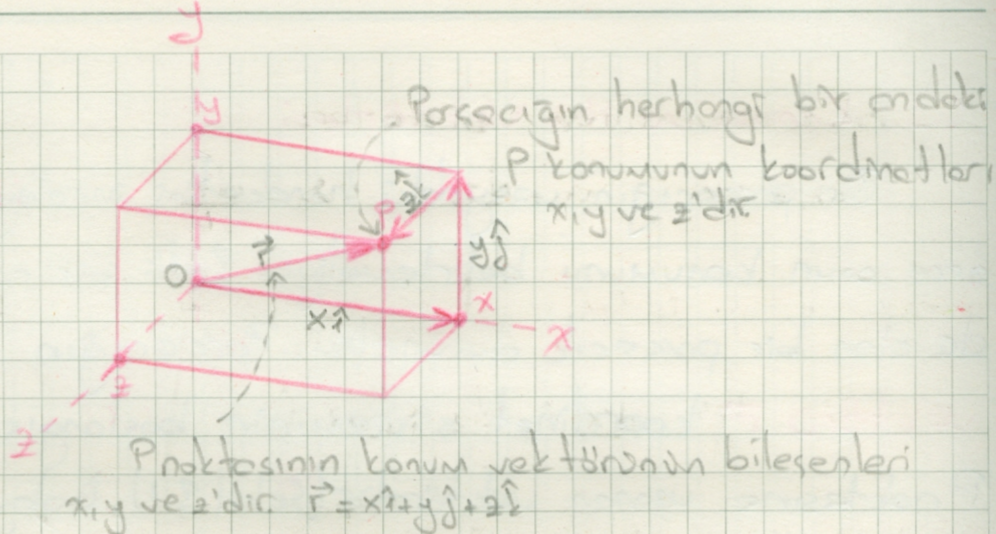
olur.

Anlık hız ise

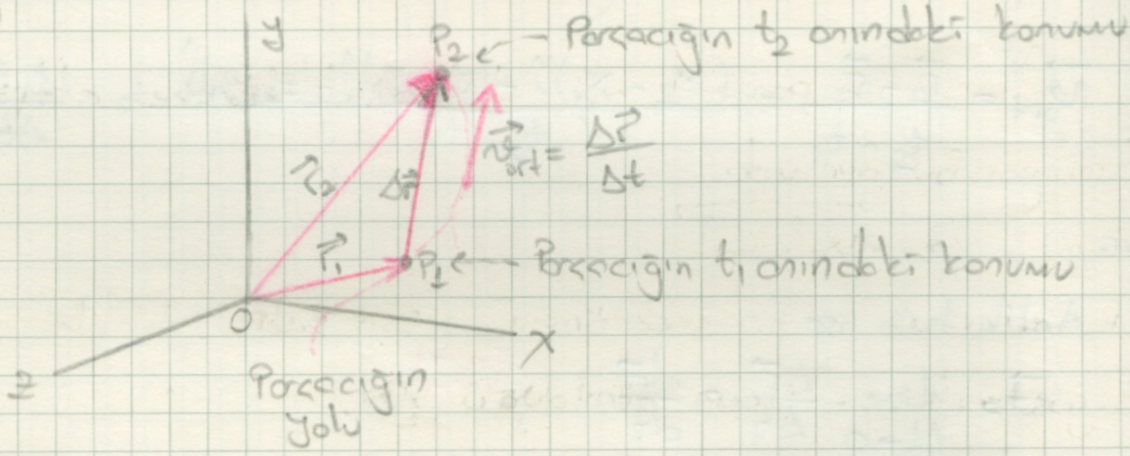
$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \qquad (3.3)$$

Hız vektörü $\vec{v}$'nin herhangi bir andaki büyüklüğü parçacığın o andaki sürati v, yönü de parçacığın o anda hareket ettiği yöndür.

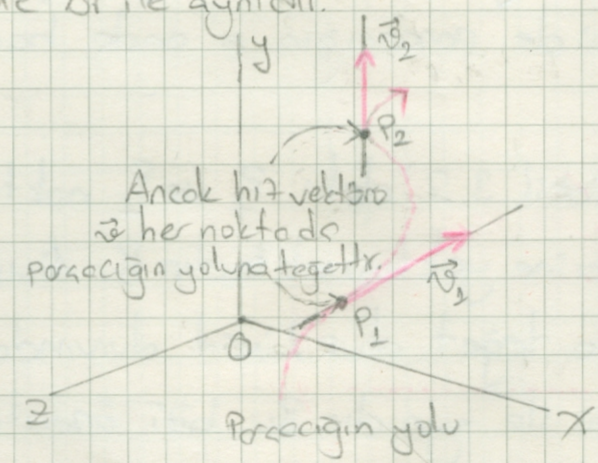
Dikkat ederseniz; Şekil 3.2'deki P_1 ve P_2 noktaları Δt sıfıra gittiğinde birbirlerine yaklaşmaktadır. Bu limitte $\Delta \vec{r}$ vektörü parçacığın yoluna teğet olur. Limit durumda $\Delta \vec{r}$'nin yönü anlık hız $\vec{v}$'nin yönü ile aynıdır. Bu bizi önemli bir sonuca götürür. Parçacığın yolu üzerindeki herhangi bir noktada anlık hız vektörü yola o noktada teğettir (Bknz. Şekil 3.3)



Şekil 3.1: Orijinden P noktasına uzanan konum vektörü $\vec{r}$'nin bileşenleri x, y ve z'dir. Parçacığın uzayda takip ettiği yol genelde bir eğridir.



Şekil 3.2: P_1 ve P_2 noktaları arasındaki ortalama hız $\vec{v}_{ort}$'ın yönü yerdeğiştirme $\Delta \vec{r}$ ile aynıdır.



Şekil 3.3: $\vec{v}_1$ ve $\vec{v}_2$ vektörleri Şekil 3.2'deki P_1 ve P_2 noktalarındaki anlık hızdır.

Anlık hızın x, y ve z bileşenleri

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} \qquad (3.4)$$

olarak verilir. Birim vektörler cinsinden hız vektörü;

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k} \qquad (3.5).$$

biçiminde yazılır. Anlık hız vektörünün büyüklüğü;

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \qquad (3.6)$$

dir.

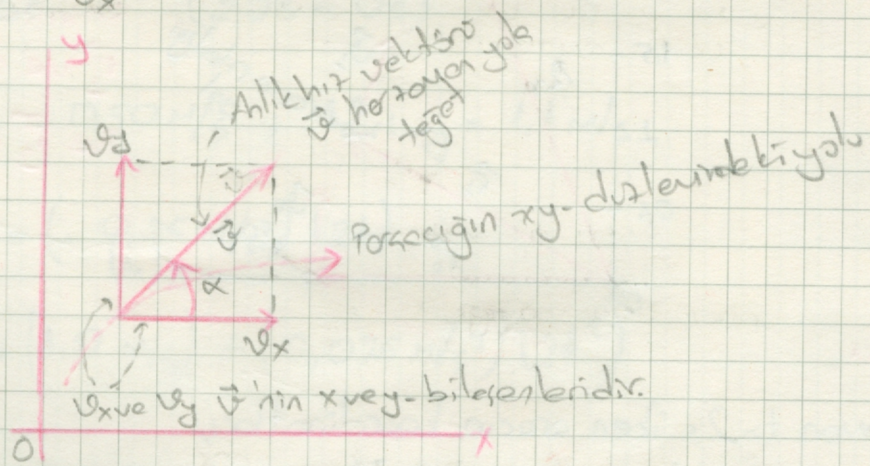
Şekil 3.4'te parçacık x,y düzleminde hareket ettiği hali gösteriliyor. Bu durumda

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \qquad (3.7)$$

olarak verilir. Anlık hız vektörünün yönü şekil 3.4'teki α açısıyla gösterilir. Şekilden görüldüğü gibi,

$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x} \qquad (3.8)$$

dir.



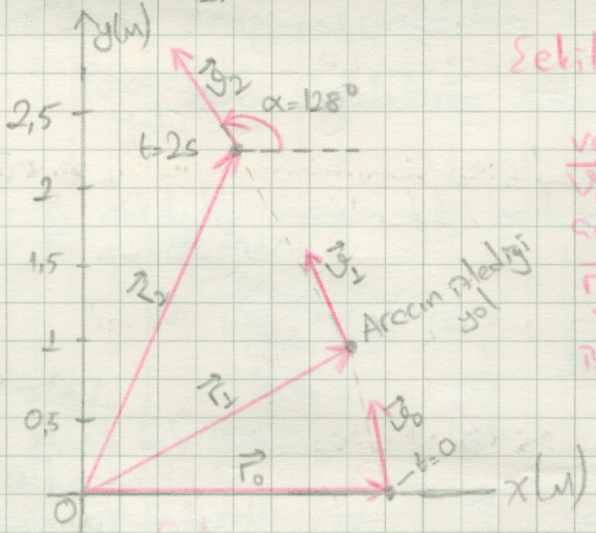
Şekil 3.4. xy-düzlemindeki bir hareket için iki hız bileşeni

Örnek 1: Bir robot araç Mars'ta inceleme yapmaktadır. Onu Mars'a indiren aracın konduğu yeri koordinat sisteminin başlangıç noktası, Mars yüzeyini de xy- düzlemi olarak alınız. Robot aracı bir nokta olarak kabul edelim; x ve y koordinatları zamanın fonksiyonu olarak,

$$x = 2{,}0\,m - (0{,}25\,m/s^2)\,t^2$$

$$y = (1{,}0\,m/s)\,t + (0{,}025\,m/s^3)\,t^3$$

ile verilmiştir. (a) Aracın koordinatlarını ve taşıyıcı araçtan uzaklığını t=2s anında bulunuz. (b) Aracın yerdeğiştirme ve ortalama hız vektörlerini t=0 ve t=2,0 s aralığı için bulunuz. (c) Aracın t=2,0 s'deki anlık hızı bileşenler cinsinden ifade ediniz, büyüklüğünü ve yönünü belirtiniz.



Şekil 3.5: t=0 anında aracın konum vektörü $\vec{r}_0$ ve anlık hız vektörü $\vec{v}_0$'dır. Aynı şekilde t=1s anındaki vektörler; $\vec{r}_1$ ve $\vec{v}_1$, t=2s anındakiler ise $\vec{r}_2$ ve $\vec{v}_2$'dir.

ÇÖZÜM

(a) Zaman t=2s iken aracın koordinatları;

$$x = 2{,}0\,m - (0{,}25\,m/s^2)(2{,}0\,s)^2 = 1{,}0\,m$$

$$y = (1{,}0\,m/s)(2{,}0\,s) + (0{,}025\,m/s^3)(2{,}0\,s)^3 = 2{,}2\,m$$

Aracın başlangıç noktasından bu zaman içinde olan mesafesi

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(1{,}0\,m)^2+(2{,}2\,m)^2} = 2{,}4\,m$$

(b) Yerdeğiştirme ve ortalama hızı bulmak için konum vektörü $\vec{r}$'yi zamanın fonksiyonu olarak yazarız.

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} = [2{,}0\,m - (0{,}25\,m/s^2)t^2]\hat{i} + [(1{,}0\,m/s)t + (0{,}025\,m/s^3)t^3]\hat{j}$$

$t=0$ iken konum vektörü $\vec{r}_0$

$$\vec{r}_0 = (1{,}0\,m)\hat{i} + (0\,m)\hat{j}$$

Problemin (a) şıkkından konum vektörü $\vec{r}_2$'nin $t=2\,s$'deki değeri

$$\vec{r}_2 = (1{,}0\,m)\hat{i} + (2{,}2\,m)\hat{j}$$

O halde $t=0\,s$ ile $t=2\,s$ arasındaki yerdeğiştirme

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_0 = (1{,}0\,m)\hat{i} + (2{,}2\,m)\hat{j} - (2{,}0\,m)\hat{i}$$

$$= (-1\,m)\hat{i} + (2{,}2\,m)\hat{j}$$

$$\vec{v}_{ort} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{(-1{,}0\,m)\hat{i} + (2{,}2\,m)\hat{j}}{(2{,}0\,s - 0\,s)} = (-0{,}50\,m/s)\hat{i} + (1{,}1\,m/s)\hat{j}$$

$$v_{ort-x} = -0{,}50\,m/s \; ; \; v_{ort-y} = 1{,}1\,m/s$$

(c)

$$v_x = \frac{dx}{dt} = (-0{,}25\,m/s^2)(2t)$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = (1{,}0\,m/s) + (0{,}025\,m/s^3)(3t^2)$$

$$v = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} = (-0{,}50\,m/s^2)t\,\hat{i} + [1{,}0\,m/s + (0{,}075\,m/s^3)t^2]\hat{j}$$

Tarih / Date : ..../......./...........

t=2 s iken anlık hızın bileşenleri

$$v_x = (-0,50\,m/s^2)(2,0\,s) = -1,0\,m/s$$

$$v_y = 1,0\,m/s + (0,075\,m/s^3)(2,0\,s)^2 = 1,3\,m/s$$

t=2 s anında anlık hızın büyüklüğü de (yani sürat)

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-1,0\,m/s)^2 + (1,3\,m/s)^2}$$

$$v = 1,6\,m/s$$

Pozitif x eksenine göre $\vec{v}$'nin yönü α açısı ile verilir, buna göre

$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{1,3\,m/s}{-1,0\,m/s} = -1,3 \qquad \boxed{\alpha = 128^\circ}$$

3.2. İvme Vektörü

Şekil 3.6'da bir araba virajlı bir yolda hareket etmektedir. Arabanın P_1 noktasındaki hızı $\vec{v}_1$ ve P_2 noktasındaki hızı ise $\vec{v}_2$'dir. Bu hızların hem yönleri hem de büyüklükleri farklı olabilir. $\Delta t = t_2 - t_1$ zaman aralığında hızdaki değişim $\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \Delta\vec{v}$ (Bknz Şekil 3.6 b) ise bu zaman aralığında arabanın ortalama ivmesi

$$\vec{a}_{ort} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \qquad (3.9)$$

olarak verilir. Şekil 3.6 c'de görüldüğü gibi ortalama ivmenin yönü hızdaki değişimin yönüyle aynıdır. Ortalama ivmenin x-bileşeni

$$\hat{a}_{ort-x} = \frac{(v_{2x} - v_{1x})}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \qquad (3.10)$$

olarak yazılabilir. P_1 noktasındaki anlık ivme $\vec{a}$'yı ortalama ivmenin P_2 noktası P_1'e yaklaşırken ve hem $\Delta\vec{v}$ hem de Δt sıfıra yaklaşırken ki limiti olarak tanımlarız. Anlık ivme aynı zamanda anlık hızın zamana göre türevidir. Doğrusel harekütle kısıtlı olmadığımız için anlık ivme bir vektördür. (Bknız şekil 3.7). Bu vektör

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (3.11)$$

İvme vektörünün her bileşeni hız vektörünün aynı bileşeninin türevidir.

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} \quad (3.12)$$

Birim vektörler cinsinden;

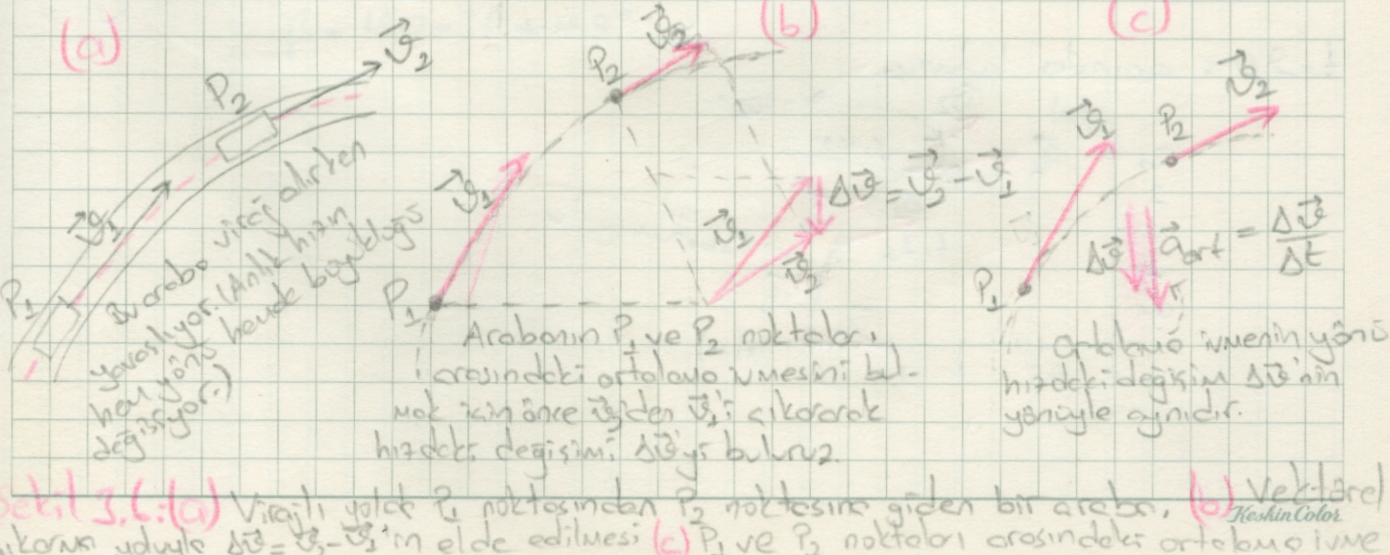
$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k} \quad (3.13)$$

Hızın her bileşeni aynı konum bileşeninin türevi olduğundan, ivme bileşenleri a_x, a_y ve a_z'yi

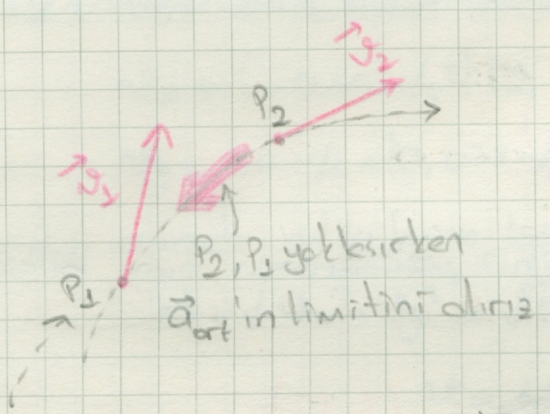
$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{d^2z}{dt^2} \quad (3.14)$$

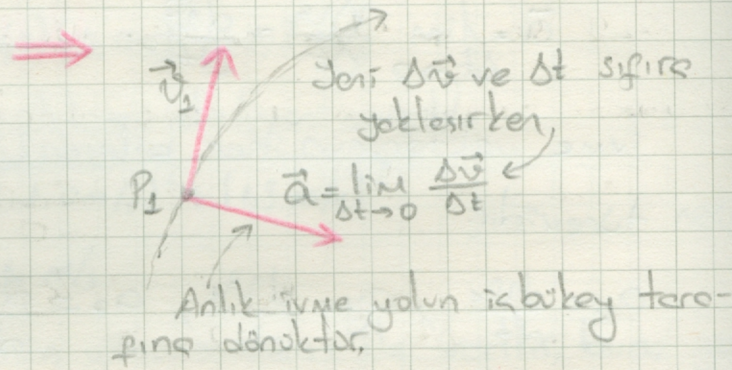
şeklinde yazabiliriz. İvme vektörü $\vec{a}$'nın kendisi de şu şekilde ifade edilir:

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k}} \quad (3.15)$$



Şekil 3.6: (a) Virajlı yolda P_1 noktasından P_2 noktasına giden bir araba. (b) Vektörel çıkarma yoluyla $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$'in elde edilmesi (c) P_1 ve P_2 noktaları arasındaki ortalama ivme $a_{ort} = \Delta\vec{v}/\Delta t$





P_1 noktasındaki anlık ivme $\vec{a}$'yı bulmak için

Şekil 3.7. Şekil 3.6'daki P_1 noktasındaki anlık ivme $\vec{a}$.

Örnek 2. Örnek 1'deki Mars gezgini robota geri dönelim. Anlık hızın herhangi bir andaki bileşenlerini

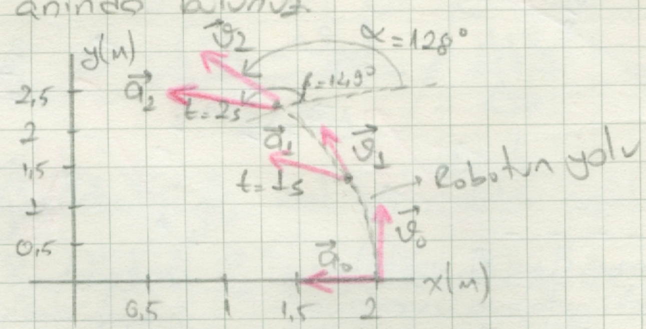
$$v_x = \frac{dx}{dt} = (-0{,}25\ m/s^2)(2t)$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = 1\ m/s + (0{,}025\ m/s^3)(3t^2)$$

şeklinde ve hız vektörü de;

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} = (-0{,}50\ m/s^2)t\,\hat{i} + \left[1\ m/s + (0{,}075\ m/s^3)t^2\right]\hat{j}$$

olarak bulmuştuk. (a) $t=0$ ile $t=2{,}0\ s$ zaman aralığındaki ortalama ivme vektörünün bileşenlerini bulunuz. (b) Anlık ivmeyi $t=2{,}0\ s$ anında bulunuz.



Tarih / Date : ..../......../..........

Çözüm

(a) $t=0$'da $\rightarrow$ $v_x = 0\ m/s$, $v_y = 1\ m/s$

$t=2$'de $\rightarrow$ $v_x = -1{,}0\ m/s$, $v_y = 1{,}3\ m/s$

Bu zaman aralığındaki ortalama ivme bileşenleri;

$$a_{ort-x} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{-1{,}0\ m/s - 0\ m/s}{2-0} = -0{,}5\ m/s^2$$

$$a_{ort-y} = \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = \frac{1{,}3\ m/s - 1\ m/s}{2-0} = 0{,}15\ m/s^2$$

(b)

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -0{,}50\ m/s^2 \ , \ a_y = \frac{dv_y}{dt} = (0{,}075\ m/s^3)(2t)$$

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} = (-0{,}50\ m/s^2)\hat{i} + (0{,}15\ m/s^3)t\hat{j}$$

$t=2\ s$'de anlık ivmenin bileşenleri;

$$a_x = -0{,}50\ m/s^2 \ , \ a_y = (0{,}15\ m/s^3)(2s) = 0{,}30\ m/s^2$$

Bu andaki ivme vektörü

$$\vec{a} = (-0{,}50\ m/s^2)\hat{i} + (0{,}30\ m/s^2)\hat{j}$$

$$a = \sqrt{(-0{,}5)^2 + (0{,}3)^2} = 0{,}58\ m/s^2$$

$$\tan\beta = \frac{a_y}{a_x} = \frac{0{,}30}{-0{,}50} = -0{,}6$$

$$\beta = 180 - 31 = 12{,}9^\circ$$

Tarih / Date : ..../......../...........

Örnek 3. Bir parçacık koordinat merkezini $\vec{v} = (3{,}00\,\hat{i})$ m/s ilk hızı ve $\vec{a} = (-1{,}00\,\hat{i} - 0{,}500\,\hat{j})$ m/s sabit ivmesi ile terk ediyor. En büyük x-koordinatına ulaştığında (a) hızı ve (b) konum vektörü nedir?

Çözüm

a)
$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt}$$

$$\int_0^t a_x\,dt = \int_{v_0}^{v_x} v_x \qquad \int_0^t a_y\,dt = v_y$$

$$v_y = a_y t$$

$$v_x - v_{0x} = a_x t \qquad v_y = -0{,}5\,t = (-0{,}5)(3)$$

$$v_x = v_{0x} + a_x t \qquad v_y = -1{,}5 \text{ m/s}$$

$$0 = v_0 - 1{,}0\,t$$

$$\boxed{t = v_0 = 3\text{s}}$$

b)
$$x = v_0 t - 0{,}5\,t^2 \qquad y = \frac{1}{2} a_y t^2 = -\frac{1}{2} 0{,}5\,(3)^2$$

$$= (3)(3) - 0{,}5\,(3)^2 \qquad = -2{,}25 \text{ m}$$

$$= 9 - 4{,}5 = 4{,}5 \text{ m}$$

$$\vec{r} = (4{,}5 \text{ m})\,\hat{i} + (-2{,}25 \text{ m})\,\hat{j}$$

Tarih / Date : ..../......./...........

Örnek 4. Sadece yatay xy düzleminde hareket eden bir parçacığın ivmesi, $\vec{a}$ m/s^2 ve t s biriminde olmak üzere $\vec{a} = 3t\hat{i} + 4t\hat{j}$ ile veriliyor. t=0 anında parçacığın konumu $\vec{r}_0 = (20{,}0\,m)\hat{i} + (40{,}0\,m)\hat{j}$ konum vektörü ile belirlenmekte olup, bu anda parçacığın hızı $\vec{v}_0 = (5{,}00\,m/s)\hat{i} + (2{,}00\,m/s)\hat{j}$, olarak veriliyor. t=4,00 s'de (a) birim vektör gösteriminde parçacığın hızı ve (b) hareket yönü ile x-ekseninin pozitif yönü arasındaki açı nedir? (c) hareketlinin konum vektörü ($\vec{r}$)nü birim vektörler cinsinden ifade ediniz.

ÇÖZÜM

(a) $a_x = \dfrac{dv_x}{dt}$

$$\int_{v_{0x}}^{v_x} dv_x = \int_0^t a_x\,dt = \int_0^t 3t\,dt$$

$$v_x - v_{0x} = \frac{3t^2}{2}$$

$$v_x(4) = 5 + \frac{3t^2}{2} = 29\ m/s$$

$a_y = \dfrac{dv_y}{dt}$

$$\int_{v_{0y}}^{v_y} dv_y = \int_{t=0}^{t} a_y\,dt$$

$$v_y = 2 + 2t^2$$

$$v_y(4) = 34\ m/s$$

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j}$$

$$\vec{v} = (29\ m/s)\hat{i} + (34\ m/s)\hat{j}$$

(b)

$$\tan\alpha = \frac{34}{29} = 1{,}17 \rightarrow \alpha = 49{,}53^\circ$$

(c) $v_x = \dfrac{dx}{dt} \Rightarrow \displaystyle\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t v_x\,dt \Rightarrow x - x_0 = \int \left(5 + \frac{3t^2}{2}\right)dt$

$$x - x_0 = 5t + \frac{t^3}{2} \Rightarrow x(4) = x_0 + 5t + \frac{t^3}{2} = 72\ m$$

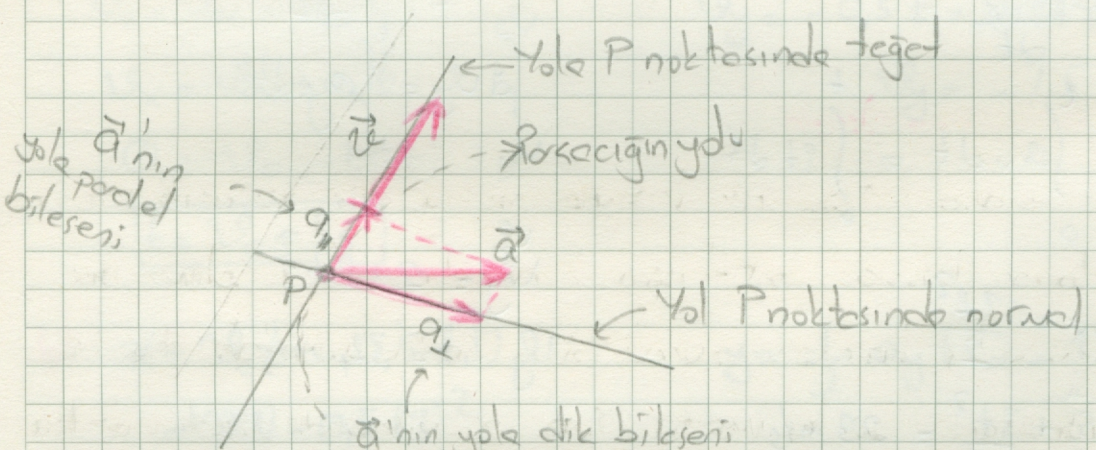
$v_y = \dfrac{dy}{dt} \Rightarrow \displaystyle\int_{y_0}^{y} dy = \int_0^t v_y\,dt \Rightarrow y(4) = y_0 + 2t + \frac{2t^3}{3} = 90{,}6\,m$

$$\boxed{\vec{r} = 72\hat{i} + 90{,}6\hat{j}}$$

KeskinColor

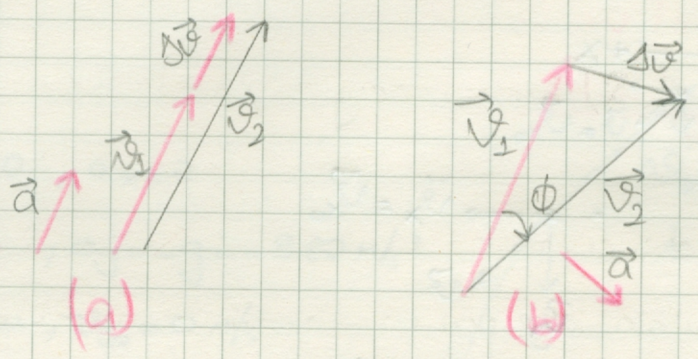
3.3. İvmenin Paralel ve Dik Bileşeni

İvme vektörü ($\vec{a}$) bir parçacığın süratindeki, hareket yönündeki veya hem süratinde hemde hareket yönündeki değişimleri gösterir. Parçacığın hareket yoluna paralel (yani hıza paralel) ivme bileşeninin bize parçacığın süratindeki değişiklikler hakkında bilgi verdiğini belirtmek yararlıdır; hareket yoluna dik (dolayısıyla hızada dik) ivme bileşenleri ise hareket yönündeki değişiklikler hakkında bilgi verir. Bu bileşenler şekil 3.8'de $a_{\parallel}$ ve $a_{\perp}$ olarak gösterilmiştir.



Şekil 3.8: İvme iki bileşenine ayrılabilir; parçacığın yoluna paralel (yani yolun teğeti yönünde) bir $a_{\parallel}$ bileşeni ile yola dik (yani yolun normali yönünde) bir $a_{\perp}$ bileşeni.

Şekil 3.9a'da ivmenin sadece paralel bileşeni vardır ($a_{\perp}=0$). Böylece ivme parçacığın hızının büyüklüğünü değiştirir fakat yönünü değiştirmez. Şekil 3.9b'de ise ivmenin dik bileşeni vardır ($a_{\parallel}=0$). Böylece ivme hızın yönünü değiştirir ama büyüklüğünü değiştirmez



İvme parçacığın hızına paralel
- Hızın büyüklüğünü değiştirir ama yönünü değiştirmez.
- Parçacık değişken süratle doğrusal hareket yapar.

İvme parçacığın hızına dik
- Hızın yönünü değiştirir ama büyüklüğünü değiştirmez.
- Parçacık eğri üzerinde sabit süratle ilerler.

Şekil 3.9. İvmenin parçacığın hızına (a) paralel, (b) dik etkisi.

3.4. Yatay Atış Hareketi

Yatay (x-yönde) v_{x0} ilk hızıyla yatay bir masanın kenarından yuvarlanan küçücük bir topun hareketini inceleyelim. Bu hareket yatay atış hareketi olarak bilinir. Şekil 3.10'da topun hareketinin yörüngesi gösterilmiştir. Top x-yönünde herhangi bir ivmeye sahip olmadığından $a_x = 0$ ve $v_x = v_{x0}$ 'dır. Bu durumda yataydaki yer değiştirme;

$$x = v_{x0}\, t \qquad (3.16)$$

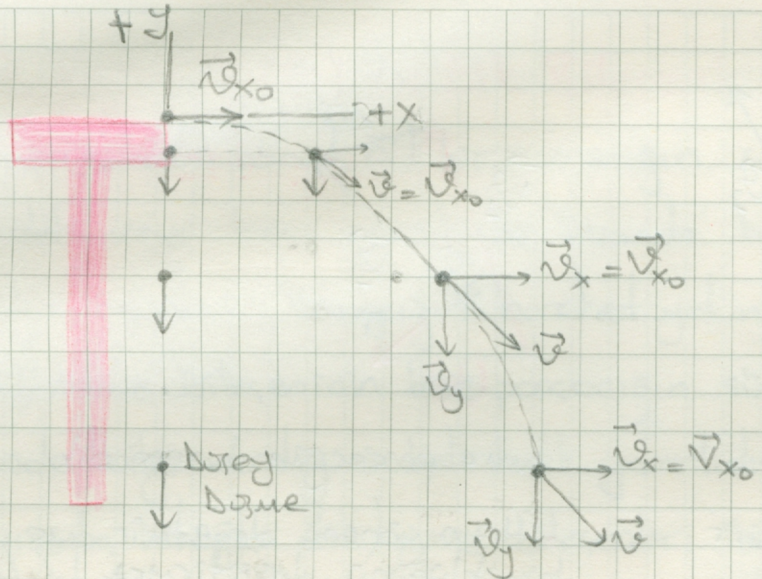
olur.

Top masadan ayrıldıktan sonra düşey olarak aşağı doğru etkiyen "g" yerçekimi ivmesine maruz kalır. Böylece;

$$\boxed{a_y = -g} \quad \text{ve} \quad \boxed{v_y = -gt} \quad \text{ve} \quad \boxed{y = -\frac{1}{2}gt^2}$$

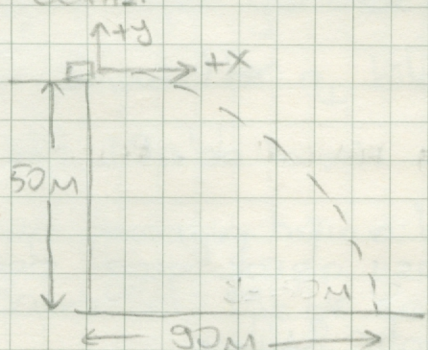
olur.

(3.17)



Şekil 3.10. Yatay olarak fırlatılan küçük bir topun yatay atış hareketi. Kesikli siyah çizgi cismin yörüngesini göstermektedir. Her noktada hız vektörü $\vec{v}$ hareket yönündedir ve yörüngeye teğettir

Örnek 5. Bir filmde motosiklet üzerindeki bir dublör sürücü yatay doğrultuda hızlandıktan sonra 50,0 m derinliğindeki bir uçurumun kenarından uçmaktadır. Uçurumun tabanından 90.0 m ötede, kameraların bulunduğu yer seviyesine inebilmek için motosiklet ne kadar bir yatay hızla uçurumun tepesinden ayrılmalıdır? Hava direncini ihmal ediniz.



Çözüm

Bilinenler

$x_0 = y_0 = 0$, $a_x = 0$

$x = 90\,m$, $a_y = -g = -9{,}80\,m/s^2$

$y = -50\,m$, $v_{y_0} = 0\,m/s$

Bilinmeyenler

v_{0x}

t

$$y = -\frac{1}{2} g t^2$$

$$-50 = -\frac{1}{2}(9{,}80)t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2 \times 50}{9{,}8}} = \underline{3{,}19\,s}$$

$$x = v_{0x} t$$

$$v_{0x} = \frac{x}{t} = \frac{90}{3{,}19} = 28{,}2\,m/s$$

3.5. Eğik Atış Hareketi

Şekil 3.11'de $t=0$ anında başlangıç noktasından yatayla α_0 açısı yapacak şekilde $\vec{v}_0$ ilk hızıyla atılan bir cismin eğik atış hareketi gösterilmiştir. Cismin hareketinin koordinatları

$$x = (v_0 \cos\alpha_0) t \quad \text{ve} \qquad (3.18)$$

$$y = (v_0 \sin\alpha_0) t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad (3.19)$$

dir. Hızının x ve y bileşenleri ise;

$$v_x = v_0 \cos\alpha_0 \qquad (3.20)$$

$$v_y = v_0 \sin\alpha_0 - gt \qquad (3.21)$$

olarak verilir. Herhangi bir anda cismin başlangıç noktasına olan konum vektörü

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} \qquad (3.22)$$

olarak ifade edilir. Konum vektörünün büyüklüğü;

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (3.23)$$

dur.

Tarih / Date : ....../....../..........

Cismin hız vektörü

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} \quad (3.24)$$

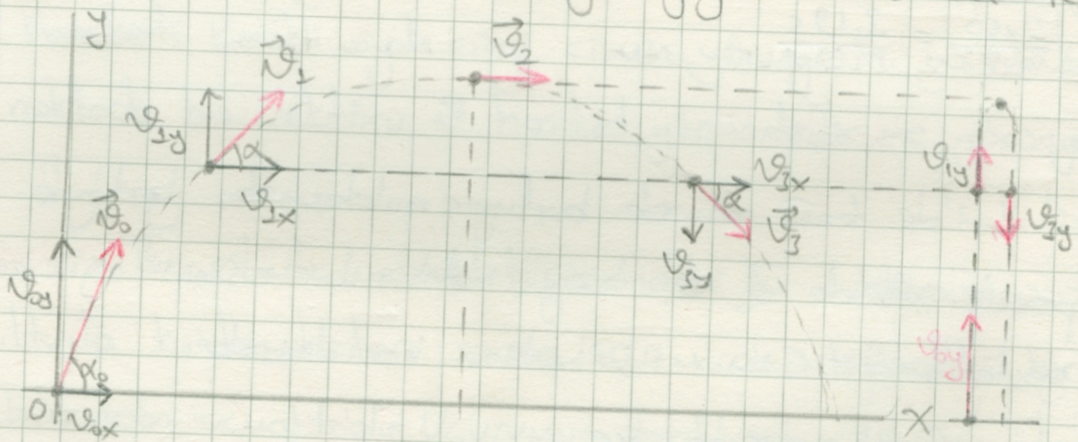
Büyüklüğü ise;

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (3.25)$$

olarak verilir. Hızın yönü, pozitif x-ekseni ile yaptığı α cinsinden

$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x} \quad (3.26)$$

olarak ifade edilir. Hız vektörü, yörüngeye her noktada teğettir.



Şekil 3.11: Hava direnci ihmal edilirse atılan bir cismin yörüngesi sabit hızlı yatay hareket ile sabit ivmeli düşey hareketin birleşimidir.

Cisim maksimum yüksekliğe çıktığında y yönündeki hızı $v_y = 0$ olduğundan

$$v_y(t_{çıkış}) = v_0 \sin\alpha_0 - g t_ç = 0$$

$$t_ç = \frac{v_0 \sin\alpha_0}{g} \quad (3.27)$$

$$y_{maks.}(t_ç) = v_0 \sin\alpha_0 t_ç - \frac{1}{2} g t_ç^2$$

$$= \frac{(v_0 \sin\alpha_0)^2}{g} - \frac{1}{2} g \frac{(v_0 \sin\alpha_0)^2}{g^2}$$

$$y_{maks} = \frac{(v_0 \sin\alpha_0)^2}{g}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha_0}{2g} \quad (3.28)$$

Tarih / Date : ....../....../..........

Cismin havada kalma süresi $t_{uçuş}$

$$t_{uçuş} = 2t_{çıkış} = 2\frac{v_0 \sin\alpha_0}{g} \quad (3.29)$$

olur. Yatayda gideceği maksimum mesafe (menzil)

$$x_{menzil} = (v_0 \cos\alpha_0)\, t_{uçuş}$$

$$= \frac{v_0^2 (2\cos\alpha_0 \sin\alpha_0)}{g}$$

$$x_{menzil} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha_0}{g} \quad (3.30)$$

olarak bulunur.

$\alpha_0 = 45°$ olduğunda menzil maksimumdur.

Yataydaki yerdeğiştirmeden

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha_0}$$

bulunur.

$$y = v_0 \sin\alpha_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

formülünde zamanı yerine yazarsak

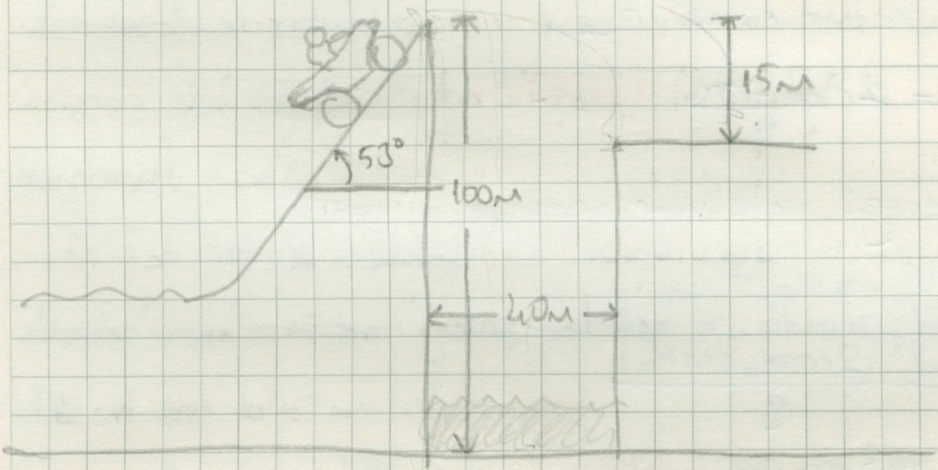
$$y = \tan(\alpha_0)\, x - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\alpha_0} x^2 \quad (3.31)$$

yörünge denklemi elde edilir.

Örnek 6. Bir motosikletlinin son gösterisi motosikletiyle nehrin üstünden atlamaya çalışmaktadır. Kalkış rampasının açısı 53°, nehrin genişliği 40m'dir. Karşı kıyı kalkış rampasından 15m daha alçaktadır ve nehir 100m derinliğinde bir kanyondan akmaktadır. (a) Motosikletlinin nehri geçebilmek için rampadaki sürati en az ne olmalıdır? (b) Eğer sürati bunun yarısı kadar ise düşeceği yeri bulunuz.

Keskin Color

Tarih / Date : ..../......../...........



Çözüm

(a) $y = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$

$-15 = (v_0 \sin 53) t - \frac{1}{2} g t^2$

$x = v_0 \cos 53\, t$

$v_0 t = \frac{40}{\cos 53} = 66{,}47\,m$

$v_0 t = 66{,}47 \longrightarrow v_0 = \frac{66{,}47}{3{,}727} = 17{,}8\,m/s$

$-15 = (66{,}47)\sin 53 - (4{,}90) t^2$

$t = \sqrt{\frac{(66{,}47)\sin 53 + 15}{4{,}90}} = \underline{3{,}727\,s}$

(b) $V_0 = 17{,}8/2 = 8{,}8\ m/s$

$y = (v_0 \sin\alpha_0) t - \frac{1}{2} g t^2$

$-100 = 7{,}1 t - 4{,}9 t^2$

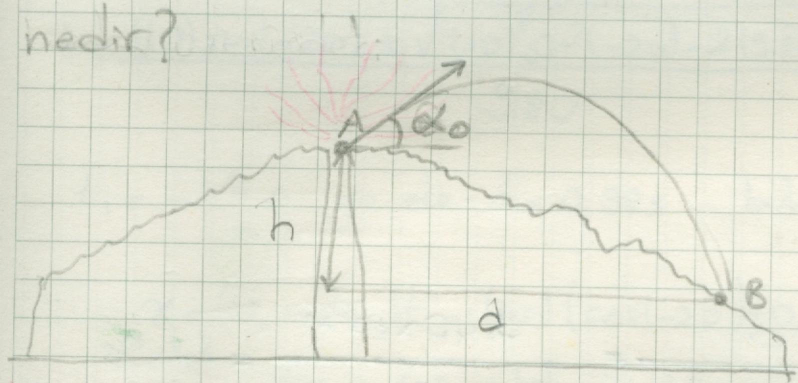
$4{,}9 t^2 - 7{,}1 t - 100 = 0$

$t = \frac{1}{9{,}80}\left(7{,}11 \mp \sqrt{(7{,}11)^2 - 4(4{,}90)(-100)}\right)$

$t = 0{,}726 \pm 4{,}57 \Rightarrow \boxed{t = 5{,}30\,s}$

$x = (v_0 \cos 53) t = (5{,}36)(5{,}30) = 28{,}4\,m$

Örnek 7. Yanardağ patlamaları sırasında volkan bacasından kaya parçaları fırlatılabilir; eğik atış yapan bu parçalara volkanik bombalar adı verilir. Şekildeki gibi Japonyadaki Fuji dağının kesiti görülüyor. (a) Baca ağzındaki A noktasından yatayla $\theta_0 = 35^\circ$ açıyla fırlatılan bir bombanın, yanardağın eteklerinde, A noktasından dikey olarak $h = 3,30$ km yatay olarak $d = 9,40$ km uzaklıkta bulunan B noktasına düşmesi için ilk sürati ne olmalıdır? (b) Uçuş süresi nedir?



Çözüm

(a) yörünge denkleminden yola çıkarak direk hıza ulaşılabilir:

$$y = (\tan\alpha_0)x - \frac{g}{2V_0^2\cos^2\alpha_0}x^2$$

Bu eşitlikten V_0^2'yi çekersek;

$$V_0^2 = \frac{gx^2}{2\cos^2\alpha_0\left((\tan\alpha_0)x - y\right)},$$

Yanardağdan çıkan kaya B noktasına çarptığında

$x = d$, $y = -h$ olacağından

$\hookrightarrow$

$$v_0^2 = \frac{g d^2}{2\cos^2\alpha_0\left((\tan\alpha_0)d-(-h)\right)}$$

$$v_0^2 = \frac{g d^2}{2\cos^2\alpha_0\left((\tan\alpha_0)d+h\right)}$$

Değerleri yerine yazarsak;

$$v_0^2 = \frac{(9{,}80\,m/s^2)(9{,}40\times10^3\,m)^2}{2\cos^2 35\left((\tan 35)(9{,}40\times10^3\,m)+3{,}3\times10^3\,m\right)} = 65{,}30\times10^3\,m/s$$

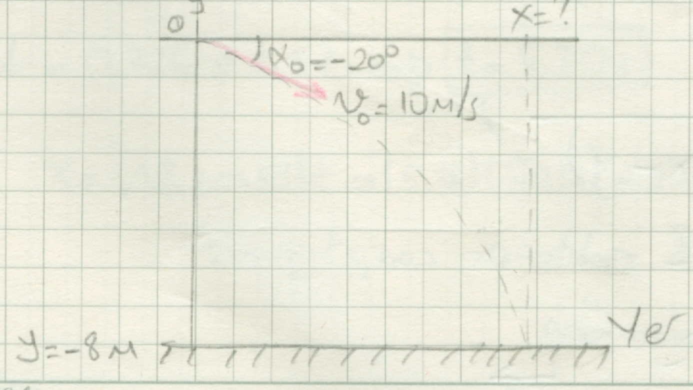
$$v_0 = 255{,}53\,m/s$$

(b)

$$x = v_0\cos\alpha_0\,t$$

$$t = \frac{x}{v_0\cos\alpha_0} = \frac{d}{v_0\cos\alpha_0} = \frac{9{,}40\times10^3\,m}{(255{,}53)\cos 35} = 44{,}9\,s \approx \underline{45\,s}$$

Örnek 8. Yerden 8m yükseklikteki pencerenizden bir top atıyorsunuz. Top elinizden çıktığı anda 10 m/s süratle yatayla aşağı doğru 20° açıyla atılmıştır. Top pencerenizden ne kadar yatay mesafede yere düşecektir? Hava direncini ihmal ediniz.



Çözüm

$$y = v_0 \sin(\alpha_0)\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\frac{1}{2} g t^2 - v_0 \sin(\alpha_0) t + y = 0$$

$$t = \frac{v_0 \sin(\alpha_0) \pm \sqrt{(-v_0 \sin\alpha_0)^2 - 4\left(\frac{1}{2} g\right) y}}{2\left(\frac{1}{2} g\right)}$$

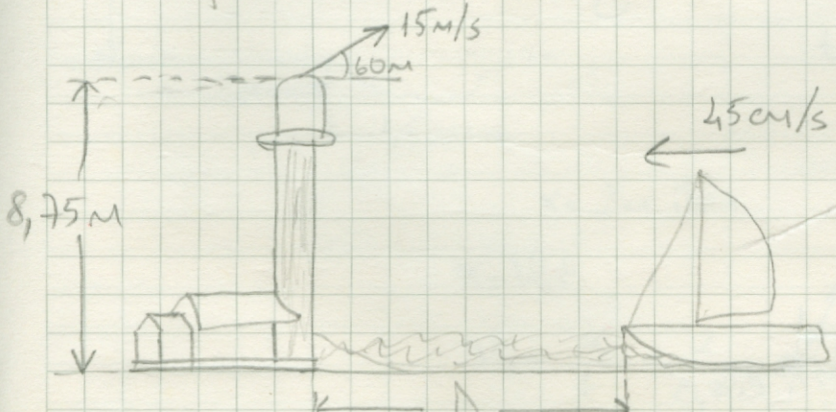
$$t = \frac{v_0 \sin(\alpha_0) \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha_0 - 2gy}}{g}$$

$$t = \frac{(10)\sin(-20) \pm \sqrt{(10)^2 \sin^2(-20) - 2(9{,}80)(-8)}}{9{,}80}$$

$t_1 = -1{,}7$ s ya da $t = 0{,}98$ s bulunur.

$$x = (v_0 \cos\alpha_0) t = (10)(\cos(-20))(0{,}98) = 9{,}2\,m$$

Örnek 9. Bir gemi rıhtıma 45 cm/s süratle yaklaşırken, kıyıdaki bir kulenin tepesinden gemiye yatayla 60° ve 15 m/s hızla bir alet atılacaktır. Kule gemi güvertesinden 8,75 m daha yüksektir. Bu aletin geminin tam önüne düşmesi için gemi hangi D mesafesinde iken alet atılmalıdır?



Tarih / Date : ..../......../............

Çözüm

$a_y = -9{,}80\,m/s^2 \quad v_{0x} = v_0 \cos\alpha_0 = 7{,}50\,m/s$

$v_{0y} = v_0 \sin\alpha_0 = 13\,m/s$

$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$

$-8{,}75 = 13t - 4{,}9t^2$

$4{,}9t^2 - 13t - 8{,}75 = 0$

$$t_1 = \frac{1}{2(4{,}90)}\left[13 \mp \sqrt{(-13)^2 + 4(4{,}90)(8{,}75)}\right] = 3{,}21\,s$$

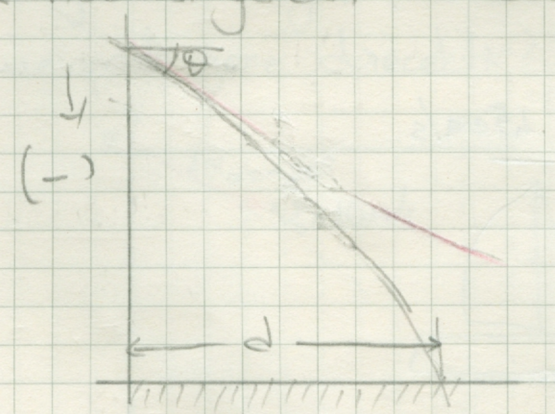
$x = v_{0x}t = (7{,}50)(3{,}21) = 24{,}1\,m$

$x_{yedk.} = vt = (0{,}45\,m/s)(3{,}21) = 1{,}44\,m$

$D = 24{,}1 + 1{,}44$

$\boxed{D = 25{,}5\,m}$

Örnek 10. Bir uçak 290 km/sa hızla yatayla $\theta = 30°$ açıyla dalmakta iken pilot, radar aldatıcı bir cisim bırakıyor (Aşağıdaki şekil). Bırakılış noktası ile cismin yere çarptığı nokta arasındaki yatay uzaklık $d = 700\,m$'dir. (a) Cismin havada kalma süresi nedir? (b) Bırakılma noktası yerden ne kadar yüksektedir?



Çözüm

$v = 290\ km/sa = 80,56\ m/s$

$d = v_0 \cos\alpha_0 t$

$700 = (80,56)\cos(-30)\, t$

$t = \dfrac{700}{(80,56)\cos(-30)} = 10,03\ s$

$y = v_0 \sin(\alpha_0) t - \frac{1}{2} g t^2$

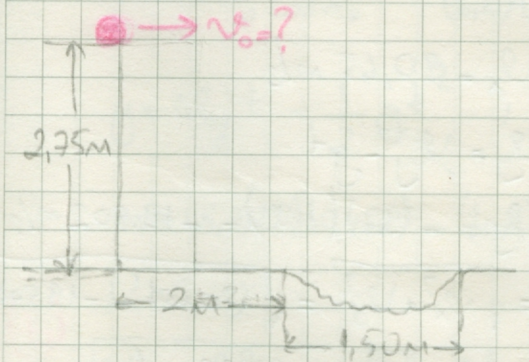
$y = 80,56 \sin(-30)(10,03) - \frac{1}{2}(9,8)(10,03)^2$

$= -404 - 492,94$

$= -896,95\ m \approx$ [illegible]

$h = 897\ m$

Örnek 11. Küçük bir bilye v_0 hızla 2,75 m yükseklikteki yatay bir platformdan yuvarlanarak düşer. Hava direncinden etkilenmez. Şekilde görüldüğü gibi, yerde, platformun kenarından 2,0 m mesafede büyük bir çukur vardır. Bilyenin doğrudan çukura düşeceği sürat v_0 aralığını bulunuz.



Çözüm

$-y = -\frac{1}{2} g t^2$

$t = \sqrt{\dfrac{2y}{g}} = \sqrt{\dfrac{2(2,75)}{9,8}} = 0,749\ s$

$x = 2m$ iken

$x = v_0 t$

$v_0 = \dfrac{x}{t} = \dfrac{2}{0,749} = 2,670\ m/s$

$x = 3,50m$ iken

$x = v_0 t$

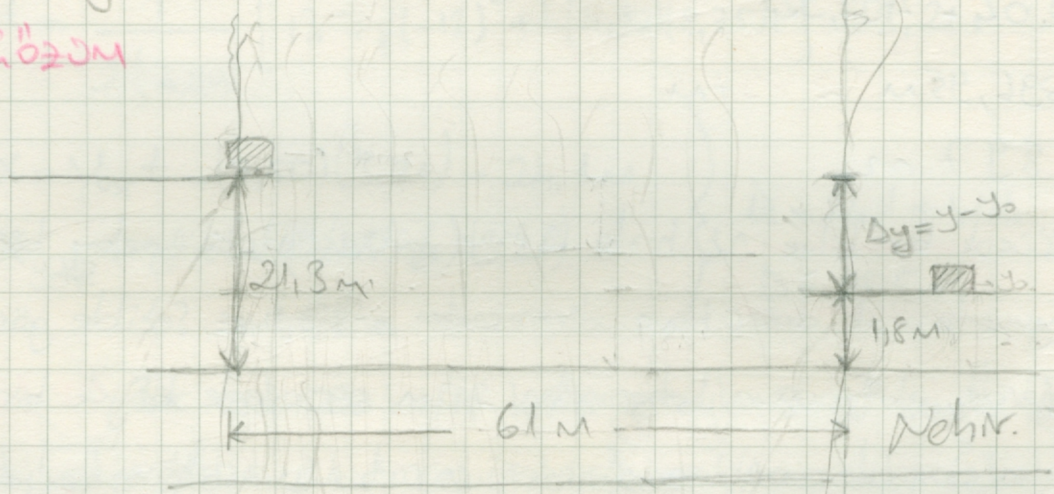
$v_0 = \dfrac{x}{t} = \dfrac{3,50}{0,749} = 4,672\ m/s$

$\boxed{2,67 \leq v_0 \leq 4,67}$

Keskin Color

Örnek 12. Nehrin Üstünden Atlamak Bir araba fırtına sırasında bir köprüye gelir. Ancak sular köprüyü götürmüştür. Sürücü karşıya geçmek zorunda olduğundan nehrin üstünden arabayla atlamaya karar verir. Kendi tarafında yol, nehirden 21,3 m ve karşı tarafta sadece 1,8 m yüksektir. Nehrin genişliği de 61,0 m dir. **(a)** Nehrin üstünden atlayabilmek için arabanın sürati en az ne olmalıdır? **(b)** Bu durumda arabanın sürati tam karşı kıyıda yere inmeden önce nedir?

Çözüm



(a)

$$y = y_0 + \cancel{v_{0y}}^{0} t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$y - y_0 = -\frac{1}{2} g t^2$$

$$-21,3 - (-1,8) = -4,9 t^2$$

$$-19,5 = -4,9 t^2$$

$$\boxed{t = 1,99\,s}$$

$$x = v_x t$$

$$v_x = \frac{x}{t} = \frac{61\,m}{1,99\,s} = 30,65\,m/s$$

(b)

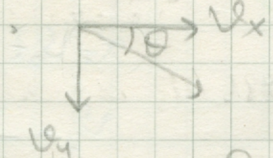
$$v_x = 30,65\,m/s$$

$$v_y = \cancel{v_{0y}}^{0} - g t$$

$$v_y = -(9,8)(1,99) = -19,502\,m/s$$

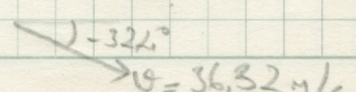
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(30,65)^2 + (-19,502)^2}$$

$$\boxed{v = 36,32\,m/s}$$



$$\tan\theta = \frac{-19,502}{30,65}$$

$$\theta = -32,4^\circ \approx 32^\circ$$



Örnek 13. Bir karnavalda, bir parayı ufak bir çanağa atabilirseniz peluş bir zürafa kazanıyorsunuz. Çanak; parayı attığınız düzeyden daha yüksekteki bir rafta ve atış noktasından 2,1 m yatay mesafede durmaktadır. Parayı yatayla 60° açıyla ve 6,4 m/s hızla atarsanız çanağa düşüyor. (a) Rafın, paranın elinizden çıktığı noktadan yüksekliği ne kadardır? (b) Para, çanağa düşmeden hemen önce hızının düşey bileşeni nedir?

ÇÖZÜM

(a)

$$x = v_0 \cos\alpha_0 \, t$$

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha_0} = \frac{2,1}{(6,4)(\cos 60)} = 0,656 \text{ s}$$

$$y = v_{oy} t - \frac{1}{2} g t^2 \quad ; \quad v_{oy} = v_0 \sin 60° = (6,4) \sin 60 = 5,542 \text{ m/s}$$

$$h = (5,542)(0,656) - (4,9)(0,656)^2 = 1,526 \text{ m}$$

(b)

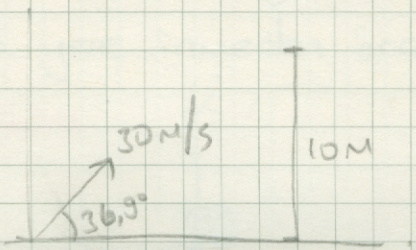
$$v_y = v_{oy} - gt = v_0 \sin\alpha_0 - gt$$

$$= 5,542 - (9,8)(0,656)$$

$$= -0,886 \text{ m/s} \approx -0,89 \text{ m/s}$$

Örnek 14. Bir birinci lig oyuncusu beyzbol topuna vurarak yataydan 36,9° açıyla 30 m/s hız kazandırmıştır. Hava direncini ihmal edebilirsiniz. Topun atıldığı noktadan 10,0 m yükseklikte olduğu iki zamanı bulunuz. (b) (a) şıkkında bulduğunuz iki zamanda topun yatay ve düşey hız bileşenlerini bulunuz. (c) Top vurulduğu yükseklik seviyesine geri döndüğünde hızının büyüklüğü ve yönü ne olacaktır?

Çözüm



$$v_{0x} = v_0 \cos 36{,}9° = 23{,}99 \text{ m/s}$$

$$v_{0y} = v_0 \sin 36{,}9° = 18{,}012 \text{ m/s}$$

(a)

$$v_{sy}^2 = v_{0y}^2 - 2gy$$

$$v_{sy} = \sqrt{(18{,}012)^2 - 2(9{,}8)(10)}$$

$$v_{sy} = 11{,}33 \text{ m/s}$$

$$v_{sy} = v_{0y} - g t_1$$

$$t_1 = \frac{v_{0y} - v_{sy}}{g} = \frac{18{,}012 - 11{,}33}{9{,}8}$$

$$\boxed{t_1 = 0{,}681 \text{ s}}$$

$$\cancel{v_y}^{0} = v_{sy} - g t_2 \quad ; \quad t_2 = t_{çıkış}$$

$$v_{sy} = g t_ç \rightarrow t_ç = v_{sy}/g$$

$$t_ç = \frac{11{,}33}{(9{,}8)} = 1{,}156 \text{ s}$$

$$t_2 = t_ç + t_{in} + t_1$$

$$t_2 = 2t_ç + t_1 = 2(1{,}156) + 0{,}681$$

$$\boxed{t_2 = 2{,}99 \text{ s}}$$

(b) $t_1 = 0{,}681$ s iken;

$$v_y = v_{0y} - gt = 18{,}012 - (9{,}8)(0{,}681) = 11{,}33$$

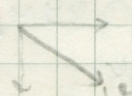
$$v_x = v_{0x} = 23{,}99 \text{ m/s}$$

$t_2 = 2{,}99$ s iken;

$$v_y = v_{0y} - gt = 18{,}012 - (9{,}8)(2{,}99) \cong -11{,}3 \text{ m/s}$$

$$v_x = v_{0x} = 23{,}99 \text{ m/s}$$

(c)



$$\tan\theta = \frac{-18{,}012}{23{,}99}$$

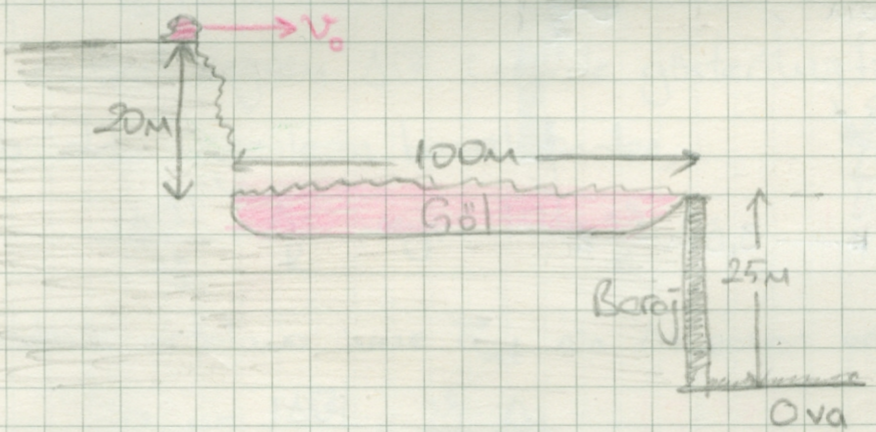
$$\theta \cong -36{,}9°$$

$$\vec{v} = 23{,}99\hat{i} - 18{,}012\hat{j}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(23{,}99)^2 + (18{,}012)^2}$$

$$v = 29{,}99 \text{ m/s} \approx 30 \text{ m/s}$$

Örnek 15. 76 kg'lik bir kaya bir baraj göletinin kenarında bulunan 20,0 m yükseklikteki bir uçurumun üstündeki düzlükte yuvarlanmaktadır. Uçurumun dibinden 100m ileride dik baraj duvarı vardır. Barajın tepesi ve gölet aynı seviyededir (Bkz: Aşağıdaki şekil). Barajın ilerisinde, baraj duvarından 25 m aşağıda düz bir ova vardır. (a) Kayanın baraj duvarına çarpmadan ovaya düşebilmesi için sürati en az ne olmalıdır? (b) Kaya ovaya barajın duvarından ne kadar ilerisinde düşer?



ÇÖZÜM

(a)

$$y = -\frac{1}{2} g t^2 \qquad x = v_{0x} \cdot t$$

$$-20 = -\frac{1}{2}(9,8)t^2 \qquad v_x = \frac{x}{t} = \frac{100}{2,02} = 49,50\,m$$

$$t = 2,02\,s$$

(b)

$$y = -\frac{1}{2} g t^2$$

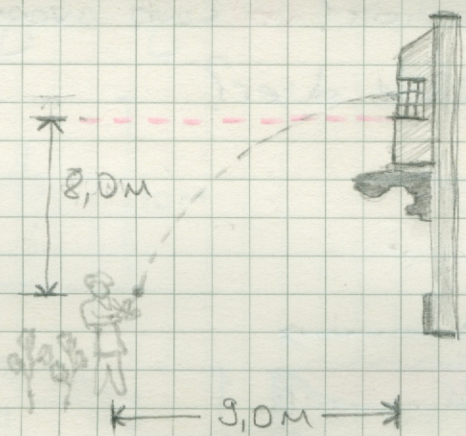
$$-45 = -\frac{1}{2}(9,8)t^2 \qquad x_{menzil} = 100 + x = v_{0x}\, t$$

$$\underline{t = 3,03\,s} \qquad 100 + x = (49,50)(3,03)$$

$$100 + x = 149,98$$

$$\boxed{x \cong 50\,m}$$

Örnek 16. Romeo, Juliet'in penceresine küçük çakıl taşlarını yavaşça fırlatıyor ve taşların hızlarının yalnızca yatay bileşeni ile pencereye çarpmasını istiyor. Kendisi, Juliet'in penceresinin 8,0 m aşağısında gül bahçesinin yanında ve duvar tabanından 9,0 m uzakta duruyor (Aşağıdaki şekil). Taşlar, Juliet'in penceresine çarptıklarında ne kadar hızla gitmektedir?



Çözüm

$$\cancel{v_s^2}^{\,0} = v_{oy}^2 - 2gy$$

$$v_{oy} = \sqrt{2gy} = \sqrt{2(9,8)(8)} = 12,52 \ m/s$$

$$\cancel{v_y}^{\,0} = v_{oy} - gt$$

$$v_{oy} = gt \rightarrow t = \frac{v_{oy}}{g}$$

$$t = \frac{12,52}{9,8} = 1,277 \ s$$

$$x = v_{ox} t \Rightarrow v_{ox} = \frac{x}{t} = \frac{9}{1,277}$$

$$\boxed{v_x = 7,047 \ m/s}$$

3.6. Düzgün Dairesel Hareket

Bir parçacığın daire üzerinde sabit süratle hareketine düzgün dairesel hareket denir. Sabit süratle ve sabit yarıçaplı bir virajı giren otomobil düzgün dairesel hareket yapar. İvmenin hareket yönüne teğet bir bileşeni yoktur. Bu yüzden sürat sabit kalmaktadır. İvme vektörü yola dik ve içeriye dönüktür. Bu durumda hızın yönü değişir fakat sürat kalır. Şekil 3.11 a'da sabit süratle hareket eden bir parçacık gösterilmiştir. Δt zamanında parçacık P_1 noktasından P_2 noktasına hareket etmiştir. Bu hareket süresinde hızdaki vektörel değişim $\Delta\vec{v}$ 3.11 b'de gösterilmiştir. Şekil 3.11 a ve 3.11 b'deki üçgenlerin benzerliğinden;

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{v_1} = \frac{\Delta s}{R} \quad \text{veya} \quad |\vec{v}| = \frac{v_1}{R}\Delta s \qquad (3.32)$$

Bu nedenle ortalama ivme $\vec{a}_{ort}$'nin Δt zaman aralığındaki büyüklüğü

$$a_{ort} = \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \frac{v_1}{R}\frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad (3.33)$$

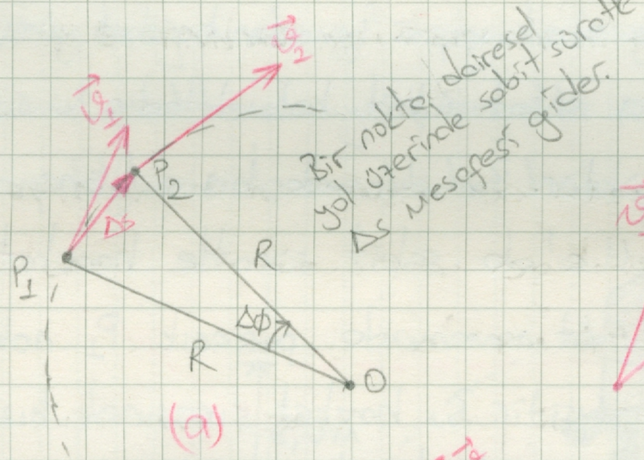
P_1 noktasındaki anlık ivme $\vec{a}$'nın büyüklüğü a, bu ifadenin, P_2 noktası P_1'e yaklaşırkenki limitidir.

$$a = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{v_1}{R}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v_1}{R}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad (3.34)$$

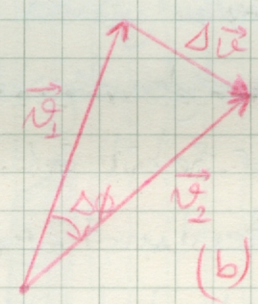
Öte yandan $\Delta s/\Delta t$'nin limiti P_1 noktasındaki sürat v_1'dir. P_1 yol üzerinde herhangi bir nokta olabileceğinden alt indislere gerek duymuyoruz; v'yi herhangi bir noktadaki sürat olarak alıyoruz o halde,

$$a_{rad} = \frac{v^2}{R} \quad (\text{düzgün dairesel hareket}) \qquad (3.35)$$

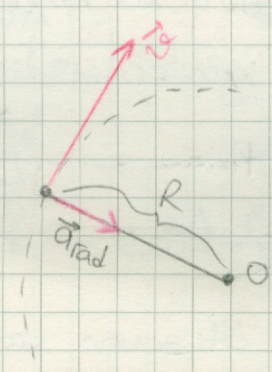
Burada "rad" alt indisini kullanmamızın nedeni anlık ivmenin her noktada yarıçap doğrultusunda, yani radyal olarak içeri, merkeze doğru olduğunu anımsatmak içindir.



(a)



(b) Yerdeğiştirmeye karşı gelen hızdaki değişim ve ortalama ivme

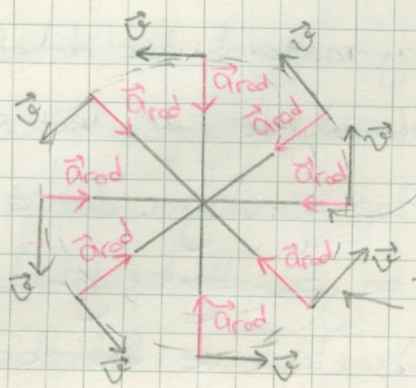


(c) Anlık ivme

Şekil 3.11: Bir daire üzerinde sabit süratle hareket eden bir parçacığın hızındaki değişiklik Δv, ortalama ivmesi a_{ort} ve anlık ivmesi a_{rad}'ın bulunması.

İvme herzaman dairenin merkezine doğru yöneldiği için bazen merkezcil ivme olarak ta adlandırılır. Şekil 3.12'de düzgün dairesel hareket yapan bir parçacığın çeşitli noktalardaki hız ve ivme vektörlerinin yönü gösterilmiştir.

Tarih / Date : ....../....../..........



İvmenin büyüklüğü sabit ama yönü sürekli değişiyor.

İvme ve hız herzaman birbirine dik

Şekil 3.12. Düzgün dairesel hareket yapan cisim için hız ve ivme.

Örnek 17: Aston Martin V8 Vantage spor arabanın "yanal ivmesi" 0,96 g = (0,96)(9,8 m/s²) = 9,4 m/s²'dir. Bu değer arabanın yoldan kaymadan yapabileceği en büyük merkezcil ivmedir. Araba sabit 40 m/s (yaklaşık 144 km/sa) hızla giderken alabileceği en keskin virajın yarıçapı nedir? (Yolda viraj almayı kolaylaştırmak için eğim olmadığını varsayınız).

Çözüm

$$a_{rad} = \frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{v^2}{a_{rad}}$$

$$R = \frac{(40\,m/s)^2}{(9{,}4\,m/s^2)} = 170{,}2\,m$$

Örnek 18: Bir atlıkarınca'ya binenler sabit süratle 5,0 m yarıçaplı bir daire üzerinde hareket edip bir turu 4 s'de tamamlıyorlar. İvmelerini bulunuz.

Çözüm

$$v = \frac{2\pi R}{T} \; ; \; a_{rad} = \frac{v^2}{R}$$

$$a_{rad} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} = \frac{4\pi^2 (5{,}0\,m)}{(4{,}0\,s)^2} = 12{,}33\,m/s^2$$

→ Bulduğumuz bu sonucun doğruluğunu kontrol etmek için önce sürati bulup sonra radyal ivmeyi hesaplayacağız.

Sürat → $v = \frac{2\pi R}{T}$ idi. O halde;

$$v = \frac{2\pi (5{,}0\,m)}{4\,s} = 7{,}853\,m/s$$

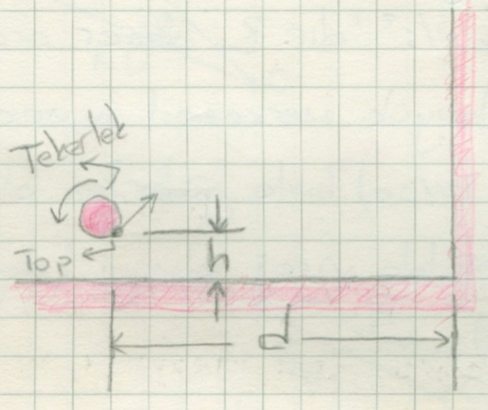
$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{(7{,}853)^2}{(5\,m)} = 12{,}33\,m/s^2$$

olarak bulunur.

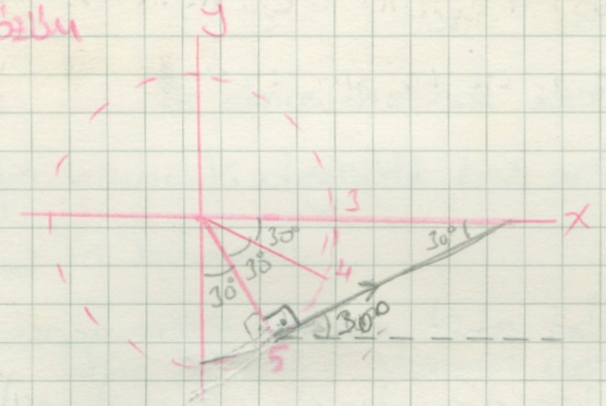
Keskin Color

Tarih / Date : ..../......./...........

Örnek 19: Aşağıdaki şekilde 20,0 cm yarıçapında bir tekerleğin çevresinde, saat yönünün tersine, 5,00 msn periyotlu bir düzgün çembersel hareket yapan bir plastik top görülüyor. Sonra top, saat 5 konumunda (sanki bir saatin ön yüzündeymiş gibi) yerinden fırlıyor. Tekerleği yerden h=1,20m yükseklikte ve duvardan d=2,50m uzakta iken terk ediyor. Top duvara yerden ne kadar yükseklikte çarpar?



Çözüm



$$T = \frac{2\pi R}{V} \Rightarrow v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2(3,14)(20\times10^{-2})}{(5\times10^{-3})} = 251,2 \text{ m/s}$$

$$d = V_0 \cos(\alpha) t \Rightarrow t = \frac{d}{V_0 \cos\alpha} = \frac{2,5}{(251,2)\cos 30°} = 0,0115 \text{ s}$$

Tarih / Date : ..../......../...........

$$y = V_0(\sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$$
$$= (251,2)(\sin 30°)(0,0115) - \frac{1}{2}(9,8)(0,0115)^2$$
$$= 1,4457$$
$$y + h = 1,44 + 1,22$$
$$= 2,644\ m$$

Not: Bu soru direk yörünge denkleminden de çözülenebilir.

$$y = (\tan\alpha_0)x - \frac{g}{2V_0^2\cos^2\alpha_0}x^2$$

3.7. Teğetsel ve Radyal İvme

Şekil 3.13'te gösterildiği gibi bir parçacığın hızının hem doğrultuca hem de büyüklükçe değiştiği eğrisel bir yol boyunca hareketini inceleyelim. Hız vektörü daima yola teğettir. Ancak $\vec{a}$ vektörünün doğrultusu noktadan noktaya değişir. Bu iki vektör iki tane bileşene ayrılabilir. Birisi $\vec{a}_r$ radyal bileşen vektörü (merkezcil ivme) öteki $\vec{a}_T$ teğetsel bileşen vektörüdür. O halde ivme

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_T \qquad (3.36)$$

olur. Teğetsel ivme $\vec{a}_T$ parçacığın hızının büyüklüğündeki değişiminden kaynaklanır. Anî hıza paraleldir ve büyüklüğü,

$$a_T = \frac{d|\vec{v}|}{dt} \qquad (3.37)$$

formülüyle verilir. Radyal ivme daha önce tanımlandığı gibi hız vektörünün doğrultusundaki değişiminden kaynaklanır ve büy-

KeshinColor

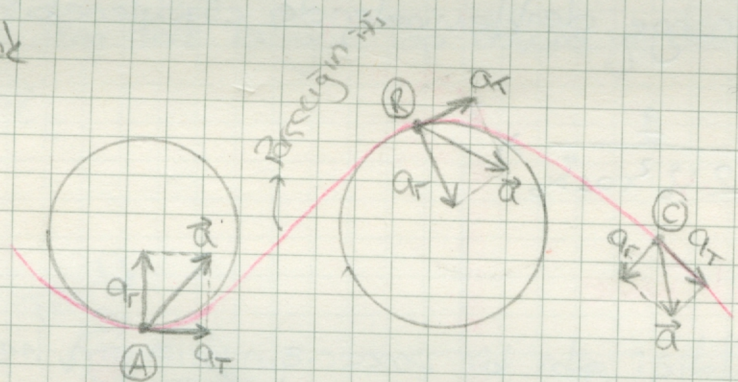
lece;

$$a_r = \frac{v^2}{r} \qquad (3.38)$$

olur. Böylece ivmenin büyüklüğü

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_T^2} \qquad (3.39)$$

olarak

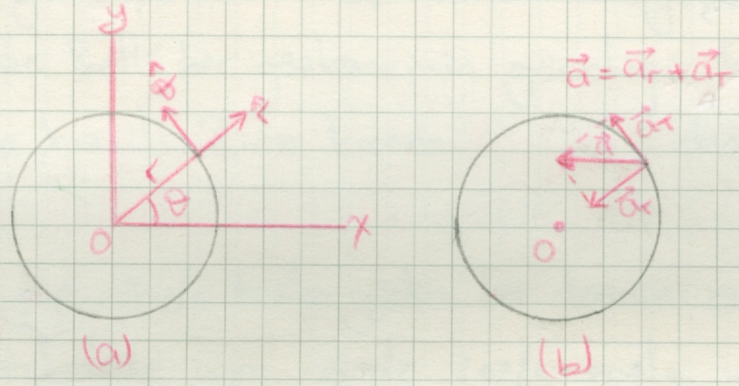


Şekil 3.13. Bir parçacığın xy düzleminde yer alan herhangi bir eğrisel yörüngedeki hareketi. $\vec{v}$ (daima yörüngeye teğet) hız vektörünün doğrultusu ve büyüklüğü değişirse, parçacığın $\vec{a}$ ivmesinin bileşen vektörleri, $\vec{a}_T$ teğetsel ivme vektörü ve $\vec{a}_r$ radyal ivme vektörüdür.

Dairesel yörüngede hareket eden parçacığın ivmesini birim vektörler cinsinden yazmak uygundur. Bunu, $\hat{r}$ ve $\hat{\theta}$ birim vektörlerini tanımlayarak yaparız. Burada, $\hat{r}$ yarıçap vektörü boyunca uzanan ve dairenin merkezinden dışa doğru radyal olarak yönelen bir birim vektör ve $\hat{\theta}$, daireye teğet bir birim vektördür. $\hat{\theta}$'nın doğrultusu artan θ doğrultusundadır, burada θ pozitif x-ekseninden itibaren saat yönünün aksi yönünde ölçülmektedir. Hem $\hat{r}$ hem de $\hat{\theta}$'nın "parçacıkla birlikte hareket ettiğine" ve böylece zamanla değiştiğine dikkat ediniz. Bu gösterim şeklini kullanarak toplam ivmeyi;

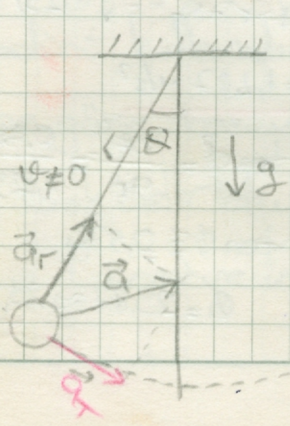
$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_r = \frac{d|\vec{v}|}{dt}\hat{\theta} - \frac{v^2}{r}\hat{r} \qquad (3,40)$$

olarak ifade edebiliriz. Bu vektörler Şekil 3.14 b'de gösterilmiştir. Denklem (3,40)'ta v^2/r terimindeki eksi işareti radyal ivmenin daima, $\hat{r}$ ile aksi yönde, radyal olarak içeriye doğru yönelik olduğunu gösterir.



Şekil 3.14: (a) $\hat{r}$ ve $\hat{\theta}$ birim vektörlerinin tanımı. (b) Eğri bir yol (Herhangi bir anda r yarıçaplı bir dairenin parçası olan) boyunca hareket eden bir parçacığın toplam $\vec{a}$ ivmesi radyal ve teğet bileşenlerin toplamıdır. Radyal bileşen eğrinin merkezine yöneliktir. İvmenin teğet bileşeni sıfır olursa, parçacık düzgün dairesel hareket yapar.

Örnek 20: 0,5m uzunluğunda bir sicimin ucuna bağlanan bir top, şekildeki gibi, yerçekiminin etkisi altında düşey bir daire çevresinde sallanmaktadır. Sicim düşeyle θ=20°'lik açı yaptığı zaman, top 1,5m/s lik hıza sahiptir. (a) İvmenin bu andaki radyal bileşenini bulunuz.



Çözüm

θ=20°'de $\quad a_T = g\sin 20° = 3,4\,m/s^2$

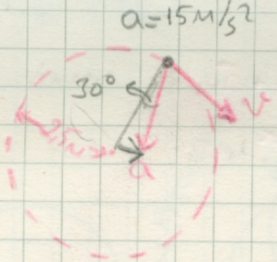
$$a_r = \frac{v^2}{r} = \frac{(1,50\,m/s)^2}{0,5m} = 4,5\,m/s^2$$

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_T^2} = \sqrt{(3,4)^2 + (4,5)^2} = 5,6\,m/s^2$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{a_T}{a_r}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3,4}{4,5}\right) = 37°$$

Tarih / Date : ..../......./...........

Örnek 21: Şekilde belli bir anda 2,5 m yarıçaplı daire çevresinde saat yönünde hareket eden bir parçacığın toplam ivmesini ve hızını göstermektedir. Bu anda (a) merkezcil ivmeyi, (b) parçacığın hızını, (c) teğetsel ivmesini bulunuz.



Çözüm

(a) $a = 15\ m/s$

$$a_r = a\cos 30° = 15 \cdot \cos 30° = 12{,}99 \approx 13\ m/s^2$$

(b) $a_r = \dfrac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{r\,a_r}$

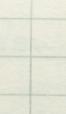
$$v = \sqrt{(2{,}5)(13)} = 5{,}70\ m/s$$

(c)

$$a_T = a\sin 30° = 15 \cdot \sin 30 = 7{,}5\ m/s$$

Örnek 22: Bir tren, bir virajı dönerken hızı 15 s içinde 90 km/sa 'den 50 km/sa 'e düşürmektedir. Virajın yarıçapı 150 m 'dir. Trenin hızı 50 km/sa 'e ulaştığı anda ivmeyi hesaplayınız.

Çözüm



$$a_r = \frac{v^2}{r} = \frac{(13{,}88\ m/s)^2}{150\ m} = 1{,}286\ m/s^2 \approx 1{,}29\ m/s^2$$

$$a_T = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{13{,}88 - 25}{15} = \frac{-11{,}12\ m/s}{15\ s} = -0{,}741\ m/s^2$$

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_T^2} = \sqrt{(1{,}29)^2 + (0{,}741)^2}$$

$$a = 1{,}487\ m/s^2$$

$$\tan\phi = \frac{a_T}{a_r} = \frac{0{,}741}{1{,}29}$$

$$\tan\phi = 0{,}574$$

$$\phi = 29{,}87 \approx 29{,}9°$$

3.8. Bağıl Hız

Yavaş giden bir arabayı solladığınızda onun geri gidiyormuş gibi göründüğünü farketmişsinizdir. Genelde iki gözlemci hareket eden bir cismin hızını ölçtüklerinde eğer gözlemcilerden biri diğerine göre farklı hızda hareket ediyorsa farklı sonuçlar bulacaklardır. Belli bir gözlemcinin gördüğü hız cismin o gözlemciye göre hızıdır. Buna kısaca Bağıl Hız denir.

3.8.1. Bir Boyutta Bağıl Hız

Bir yaya 3m/s hızla giden bir trenin orta koridorunda ve trenin hareketiyle aynı yönde 1m/s hızla yürümektedir (Bakınız Şekil 3.15a) Trende oturmakta olan bir yolcuya göre bu yolcunun hızı 1 m/s'dir. Kavşakta durmuş trenin geçmesini bekleyen bisikletliye göre trenin hızı 1m/s + 3m/s = 4m/s'dir. Başka gözlemcilere göre başka hızlarda tanımlanabilir. Buradan hareketle, ilkesel olarak, elinde 1m çubuğu ve bir kronometre olan her gözlemci bir gözlem çerçevesidir. Bir gözlem çerçevesi bir koridor sistemi ve bir zaman skalasından oluşur.

Şimdi bisikletlinin (yere göre sabit olan) gözlem çerçevesi için A sembolünü ve trenle birlikte hareket eden çerçeve için de B sembolünü kullanalım. Doğrusal harekette bir P noktasının A çerçevesine göre konumunun $x_{P/A}$ ve B çerçevesine göre konumunun $x_{P/B}$ olarak belirtelim. (Bkz Şekil 3.15b) A çerçevesinin başlangıç noktasının P çerçevesine göre konumu $x_{B/A}$'dır. Böylece

$$x_{P/A} = x_{P/B} + x_{B/A} \qquad (3.41)$$

dur. Bu eşitliğin türevini alırsak;

$$\frac{dx_{P/A}}{dt} = \frac{dx_{P/B}}{dt} + \frac{dx_{B/A}}{dt} \quad \text{veya}$$

(3.42)

$$v_{P/A-x} = v_{P/B-x} + v_{B/A-x}$$ (doğru üzerinde bağıl hız)

dur. Şekil 3.15a'daki yolcuya dönersek A bisikletlinin gözlem çerçevesi, B trenin gözlem çerçevesiyse ve P noktası yolcuyu gösteriyorsa yukarıdaki denklem kullanılarak yolcunun B trenine göre hızı;

$$v_{P/B-x} = +1,0 \text{ m/s}$$

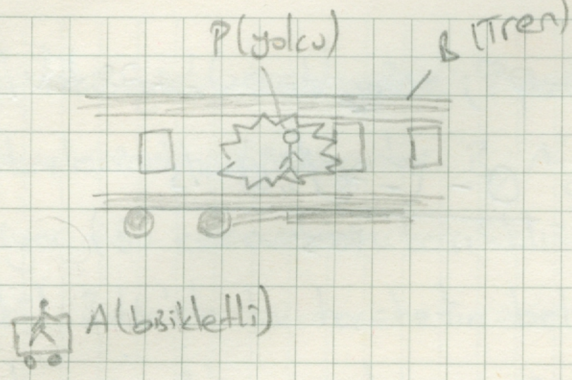
Trenin durgun bisikletçiye göre hızı;

$$v_{B/A-x} = +3,0 \text{ m/s}$$

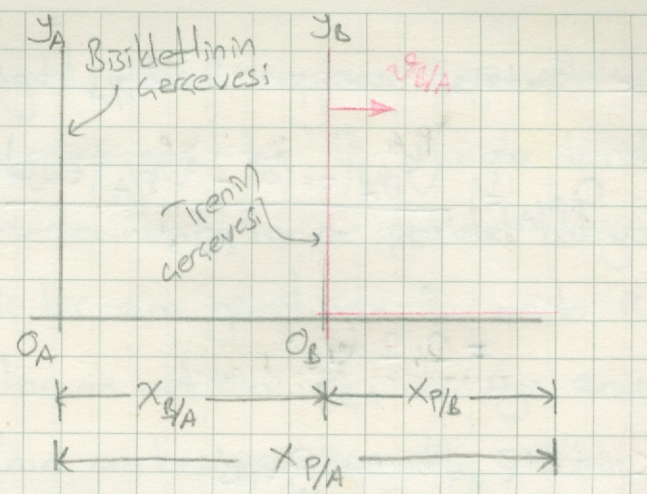
Böylece yolcunun durgun bisikletliye göre hızı;

$$v_{P/A-x} = v_{P/B-x} + v_{B/A-x} = 1 + 3 = 4 \text{ m/s}$$

dır.



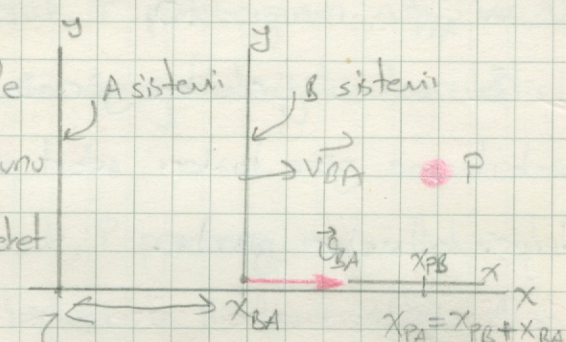
(a)



(b)

Şekil 3.15: (a) Trende yürüyen bir yolcu. (b) Bisikletçinin gözlem çerçevesi ve trenin gözlem çerçevesine göre yolcunun konumu.

Örnek 21



Yandaki şekilde Barbara'nın Alex'e göre hızının sabit ve $v_{BA}=52$ km/sa olduğunu ve P'nin x-eksenin negatif yönünde hareket ettiğini varsayalım. (a) Eğer Alex, P arabasının hızını sabit ve $v_{PA}=-78$ km/sa olarak ölçüyorsa, Barbara hangi v_{PB} hızını ölçecektir? (b) Eğer P arabası fren yaparak t=10 s içinde Alex'in arabasına göre (dolayısıyla yere göre) durmuş olsa, Alex'e göre a_{PA} ivmesi ne olur? (c) P arabasının frenleme sırasında Barbara'ya göre a_{PB} ivmesi nedir?

Çözüm

(a) $v_{P/A}=v_{P/B}+v_{B/A}$; A: Alex; B: Barbara ; P: Araba

$v_{P/B}=v_{P/A}-v_{B/A}=-78-52$

$=-130$ km/sa

(b) $t=10\,s$ sonra $v_{P/A}(t=10)=0$; $v_{P/A}(t=0s)=-78$ km/sa

$$a_{P/A}=\frac{v_{P/A}(t=10)-v_{P/A}(t=0)}{10\,s}=\frac{0-(-78/3,6)\,m/s}{10\,s}$$

$$=2,2\ m/s^2$$

(c) $t=10$ iken $a_{P/B}$

$v_{P/B}(t=10)=v_{P/A}-v_{B/A}$

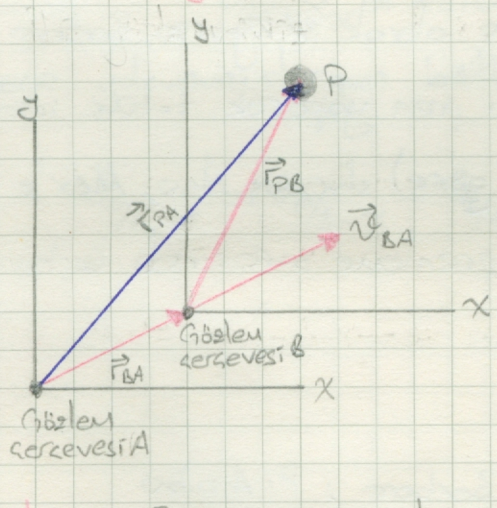
$=0-52=-52$ km/sa

$$a_{P/B}=\frac{v_{P/B}(t=10s)-v_{P/B}(t=0)}{10}$$

$$=\frac{(-52-(-130))/3,6}{10}=2,2\ m/s$$

Not: Bu sonucu önceden görmüş olmamız gerekirdi: Alex ve Barbara'nın birbirlerine göre hızları sabit olduğundan, arabanın ivmesi için aynı değeri bulmaları gerekir.

3.8.2. İki boyutta göreli hareket



Şekil 3.16: B referans sistemi A'ya göre sabit iki boyutlu bir hıza sahiptir. B'nin A'ya göre konum vektörü $\vec{r}_{BA}$'dır. P parçacığının konum vektörleri A'ya göre $\vec{r}_{PA}$ ve B'ye göre $\vec{r}_{PB}$'dir.

İki gözlemcimiz gene P parçacığını A ve B referans çerçevelerinin merkezlerinden gözlüyorlar. B, A'ya göre sabit bir $\vec{v}_{BA}$ hızıyla hareket ediyor. (Bu çerçevelerin karşılıklı eksenleri birbirlerine paralel kalıyor) Şekil 3.16'da bu hareketin belirli bir anı görülüyor. Bu anda B'nin merkezinin A'nın merkezine göre konum vektörü $\vec{r}_{BA}$'dır. Aynı zamanda P parçacığının konum vektörleri, A'nın merkezine göre $\vec{r}_{PA}$, B'nin merkezine göre $\vec{r}_{PB}$'dir. Bu üç konum vektörünün alt değişkenlerinin yönleri yeniden ayarlanırsa

$$\vec{r}_{P/A} = \vec{r}_{P/B} + \vec{r}_{B/A} \qquad (3.43)$$

olur. Bu denklemin zaman türevini alırsak, P parçacığının $\vec{v}_{P/A}$ ve $\vec{v}_{P/B}$ hızlarının iki gözlemciye göre ilişkilerini aşağıdaki gibi kurabiliriz:

$$\vec{v}_{P/A} = \vec{v}_{P/B} + \vec{v}_{B/A} \qquad (3.44)$$

Bu bağıntının zamana göre türevini alırsak, P parçacığının gözlemcilerimize göre $\vec{a}_{P/A}$ ve $\vec{a}_{P/B}$ ivmelerini birbirleri ile ilişkilendirebiliriz. Ama $\vec{v}_{B/A}$ sabit olduğundan, zaman türevi sıfırdır. Bu nedenle şu bulunur:

$$\vec{a}_{P/A} = \vec{a}_{P/B} \qquad (3.45)$$

Tek boyutlu harekette olduğu gibi, şöyle bir kuralımız var: Birbirlerine göre sabit hızla hareket etmekte olan farklı referans çerçevelerindeki gözlemciler, hareket eden parçacıkta aynı ivmeyi ölçeceklerdir.

Tarih / Date : ....../....../..........

Örnek 2: Durgun suda bir botun hızı $v_{B/S} = 1,85\ m/s$ 'dir. Bu bot akıntı hızı Batıya doğru 1,20 m/s olan nehrin tam karşısına yöneliyor. (a) Botun kıyıya göre hızı (büyüklüğü ve yönü) nedir? (b) Eğer nehir 110 m genişlikte ise karşıya geçmek ne kadar zaman alacaktır.

Çözüm

(a) B → botu, S → suyu, K ise durgun olan kıyıyı göstersin.

Böylece;

$$\vec{v}_{B/K} = \vec{v}_{B/S} + \vec{v}_{S/K}$$

$$\vec{v}_{B/K} = 1,85\hat{j} - 1,2\hat{i}$$

$$v_{B/K} = \sqrt{v_{B/S}^2 + v_{S/K}^2} = \sqrt{(1,85)^2 + (-1,2)^2} = 2,21\ m/s$$

Şekildeki $\tan\theta$

$$\tan\theta = \frac{v_{S/K}}{v_{B/S}} = \frac{(1,20)}{(1,85} = 0,6486$$

$$\theta = 33°$$

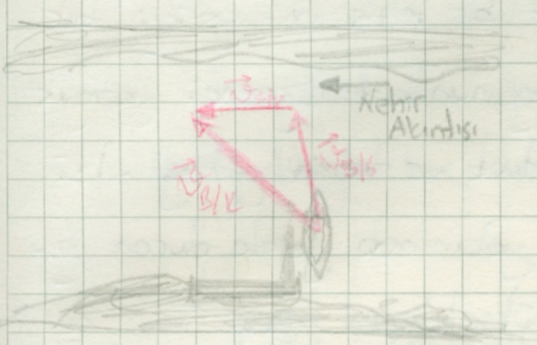
(b) Nehirin genişliğini D ile gösterirsek:

$$t = \frac{D}{v_{B/S}} = \frac{110}{1,85} = 59,5\ s$$

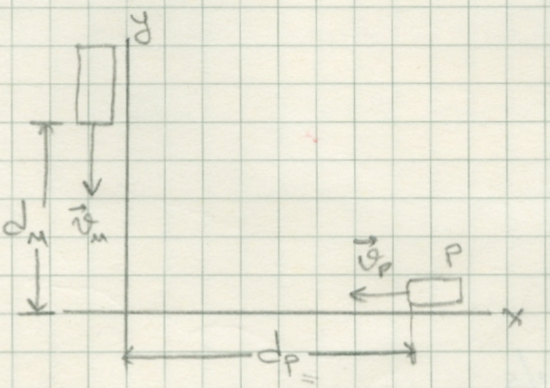
Bu sürede botun akıntı yönünde sürüklenmesi

$$D = v_{S/K}\,t = (1,2)(59,5) = 71,4\ m$$

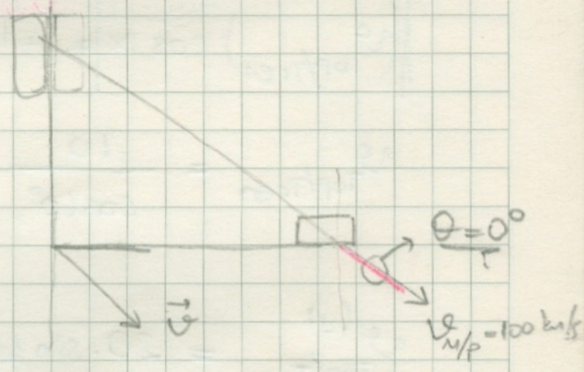
KeshinColor



Örnek 25: İki yol şekilde görüldüğü gibi kesişiyorlar. Gösterilen anda, bir P polis arabası kavşaktan $d_P = 800$ m uzakta olup $v_P = 80$ km/sa hızla hareket etmektedir. M araç sürücüsü de kavşaktan $d_M = 600$ m uzakta olup $v_M = 60$ km/sa hızla hareket etmektedir. (a) Birim vektör gösteriminde, araç sürücüsünün polis arabasına göre hızı nedir? (b) Şekilde gösterilen durum için (a) şıkkında bulunan hızın iki aracı birleştiren doğruyla yaptığı açı nedir? (c) Eğer arabalar hızlarını korurlarsa, arabalar kavşağa yaklaştıkça (a) ve (b) yanıtları değişir mi?



(b)



(c) (a) ve (b) yanıtları değişmez.

ÇÖZÜM

(a) $v_{P/y} = 80$ km/sa

$v_{M/y} = 60$ km/sa

$$\vec{v}_{M/y} = \vec{v}_{M/P} + \vec{v}_{P/y}$$

$$-60\hat{j} = \vec{v}_{M/P} - 80\hat{i}$$

$$\vec{v}_{M/P} = 80\hat{i} - 60\hat{j}$$

$$v_{M/P} = \sqrt{80^2 + 60^2} = 100 \text{ km/sa}$$

Tarih / Date : ....../......./..........

✓

Örnek 26: Bir fen öğrencisi, 10 m/s'lik sabit bir hızla düz, yatay bir ray boyunca giden trenin üstü açık yük vagonundadır. Öğrenci yatayla 60°'lik açı yaptığını tahmin ettiği doğrultuda ve trenin gittiği aksi yönde havaya bir top fırlatır. Vagonun yakınında yerde duran öğrencinin öğretmeni, topun düşey olarak yükseldiğini görür. Top ne kadar yükselir?

Çözüm

$$\vec{v}_{Top/Yere} = \vec{v}_{Top/Tren} + \vec{v}_{Tren/Yer}$$

$$\left| v^{(x)}_{Top/Yer} \right| = 0 = \left| v^{(x)}_{Top/Tren} \right| + \left| v^{(x)}_{Tren/Yer} \right|$$

$$\left| v^{(x)}_{Top/Tren} \right| = -\left| v^{(x)}_{Tren/Yer} \right|$$

$$\left| v^{(x)}_{Top/Tren} \right| = -10 \text{ m/s}$$

$$\left| \left(v_{Top/Tren} \right) \cos\alpha \right| = +10 \text{ m/s}$$

$$v_{Top/Tren} = \frac{10}{\cos 60^\circ} = 20 \text{ m/s}$$

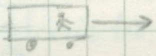
$$v^{(y)}_{Top/Tren} = 20 \cdot \sin 60^\circ = 17{,}32 \text{ m/s}$$

$$y_{maks} = \frac{\left(v^{(y)}_{Top/Tren} \right)^2}{2g} = \frac{(17{,}32)^2}{2(9{,}8)} = 15{,}31 \text{ m}$$

Örnek 27: Kar taneleri 8 m/s sabit süratle dik olarak düşüyorlar. Yatay düz bir yolda 50 km/sa süratle araba kullanan bir gözlemciye göre, kar taneleri dikeyle kaç derecelik bir açı yapıyormuş gibi gözükür?

ÇÖZÜM

$$\vec{v}_{K/y} = -(8{,}00\,m/s)\,\hat{j}$$

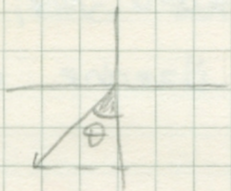


$$\vec{v}_{A/y} = 50\,km/sa = 13{,}88\,m/s\,\hat{i}$$

$$v_{K/y} = v_{K/A} + v_{A/y}$$

$$-8\hat{j} = v_{K/A} + 13{,}88\,\hat{i}$$

$$v_{K/A} = -13{,}88\,\hat{i} - 8\hat{j}$$



$$\tan\theta = \frac{-13{,}88}{-8} = 1{,}735$$

$$\theta = 60{,}4^\circ \approx \underline{60^\circ}$$