DOĞRUSAL MOMENTUM
VE
ÇARPIŞMALAR

Giriş:

Önceki bölümde incelediğimiz enerji korunumu yasası fizikteki önemli korunum yasalarından biridir. Korunduğu anlaşılan diğer büyüklükler arasında doğrusal momentum, açısal momentum ve elektrik yükü de vardır. Bu bölümde doğrusal momentum ve onun korunumunu ele alacağız.

8.1. Momentum ve Newton'un II. Yasası

Newton'un II. yasası;

$$\Sigma \vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \quad (8.1)$$

olarak yazılabilir. Dolayısıyla Newton'un II. yasası, parçacık üzerine etkiyen net kuvvetin parçacığın kütlesi ve hızının çarpımı $m\vec{v}$'nin zamanla değişimi hızına eşit olduğunu belirtir. Buna parçacığın momentumu veya doğrusal momentumu denir. Momentum için $\vec{P}$ sembolünü kullanırsak;

$$\vec{P} = m\vec{v} \quad (8.2)$$

olur. Kartezyen koordinatlar sisteminde;

$$P_x = mv_x$$
$$P_y = mv_y \quad (8.3)$$
$$P_z = mv_z$$

dolayısıyla,

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2} \quad (8.4)$$

olarak yazılabilir.

Bir parçacık üzerine etkiyen net kuvvet parçacığın momentumunun zamana bağlı değişim hızına eşittir.

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Newton'un II. yasasının} \\ \text{momentum cinsinden ifadesi} \end{array} \right) \quad (8.5)$$

Örnek 1. En iyi tenis oyuncularının servis atışlarında topun raketi terk ediş hızı 55 m/s olabilir. Topun kütlesi 60 g ve raketle temas süresi 4 milisaniye (ms) ise, top üzerindeki ortalama kuvveti kestiriniz. Bu kuvvet 60 kg kütleli bir kişiyi kaldırmaya yeter mi?

Çözüm

$$F_{ort} = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{m v_2 - m v_1}{\Delta t} = \frac{(0,060)(55) - 0}{0,004} \approx 800\,N$$

$$mg = (60)(9,8) = 590\,N$$

Sonuç: Evet, yeterlidir ve kaldırabilir.

8.2. Impuls (itme) - Momentum Teoremi

Bir parçacığın momentumu ($\vec{P} = m\vec{v}$) ve kinetik enerjisinin ($K = \frac{1}{2} m v^2$) ikisi de kütle ve hıza bağlıdır. Bu iki nicelik arasındaki temel fark nedir? Tamamen matematiksel olan yanıt momentum büyüklüğünün parçacığın süratiyle doğru orantılı bir vektör olduğu, kinetik enerjinin büyüklüğü ise süratin karesiyle doğru orantılı bir skaler olduğudur. Momentum - Kinetik enerji arasındaki fiziksel farkı görmek için önce momentuma çok yakın itme o linen niceliği tanımlayalım. Sabit net kuvvetin itmesi

$$\vec{J} = \sum \vec{F}(t_2 - t_1) = \sum \vec{F}\,\Delta t \quad \text{(sabit kuvvet varsayımı)} \quad (8.6)$$

olarak verilir. Sabit net kuvvet momentum cinsinden

$$\sum \vec{F} = \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} = \frac{\vec{P}_2 - \vec{P}_1}{t_2 - t_1} \quad (8.7)$$

olarak yazılırsa,

$$\sum \vec{F} \cdot (t_2 - t_1) = \vec{P}_2 - \vec{P}_1 \quad (8.8)$$

olur. Böylece itme,

$$\vec{J} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1 \quad \text{(İtme-Momentum Teoremi)} \quad (8.9)$$

dur. Bir parçacığın belirli bir zaman aralığında momentumundaki değişimi aynı zaman aralığında parçacık üzerine etkiyen net kuvvetin itmesine eşittir.

İtme-Momentum teorisi aynı zamanda kuvvetlerin sabit olmadığı durumlarda da geçerlidir.

$$\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{F}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{P}}{dt}\, dt = \int_{\vec{P}_1}^{\vec{P}_2} d\vec{P} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1 \quad (8.10)$$

İtmenin en genel tanımı

$$\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{F}\, dt \quad (8.11)$$

şeklindedir. Öyle bir ortalama net kuvvet ($\vec{F}_{ort}$) tanımlayabiliriz ki, $\sum \vec{F}$ sabit olmadığında bile itme

$$\vec{J} = \vec{F}_{ort}(t_2 - t_1) \quad (8.12)$$

olur.

İtme'de momentum gibi bir vektör olduğundan kartezyen koordinatlardaki bileşenleri;

$$J_x = \int_{t_1}^{t_2} \sum F_x \, dt = (F_{ort})_x (t_2 - t_1) = P_{2x} - P_{1x} = m v_{2x} - m v_{1x}$$

$$J_y = \int_{t_1}^{t_2} \sum F_y \, dt = (F_{ort})_y (t_2 - t_1) = P_{2y} - P_{1y} = m v_{2y} - m v_{1y}$$

$$J_z = \int_{t_1}^{t_2} \sum F_z \, dt = (F_{ort})_z (t_2 - t_1) = P_{2z} - P_{1z} = m v_{2z} - m v_{1z}$$

(8.1

Momentum ile kinetik enerji arasındaki temel farkı görece

İtme-Momentum teoremi;

$$\vec{J} = \vec{P_2} - \vec{P_1}$$

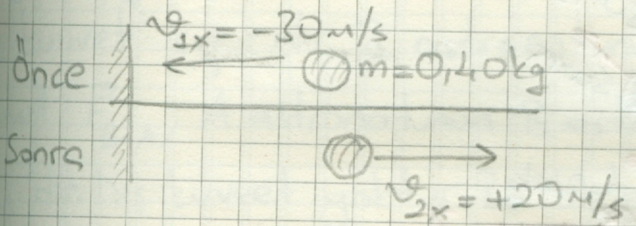
bize bir parçacığın momentumundaki değişmenin net kuvvetin etkin olduğu zaman içindeki itmeye bağlı olduğunu söyler: İtme, kuvvetin uygulandığı süre ile orantılıdır. Bu karşılık iş-enerji teoremi

$$W_{Top.} = K_2 - K_1 \quad (8,14)$$

parçacık üzerinde yapılan iş ile kinetik enerjinin değişmini be tir; toplam iş, net kuvvetin etkin olduğu mesafeye bağlıdır.

Örnek 2. Tuğla bir duvara karşı, 0,40 kg'lık bir topu fırlatıyorsunuz. Top yatay yönde 20 m/s hızla geri geliyor. (a) Topun duvara çarpma esnasında topa etki eden net kuvvetin itmesini bulunuz. (b) Top 0,010 s boyunca duvarla temas halinde kalıyorsa duvarın topa uyguladığı ortalama yatay kuvvetin değerini bulunuz.

Çözüm



a)

$$P_{1x} = m v_{1x} = (0{,}40)(-30) = -12 \text{ kg m/s}$$

$$P_{2x} = m v_{2x} = (0{,}40)(+20) = 8 \text{ kg m/s}$$

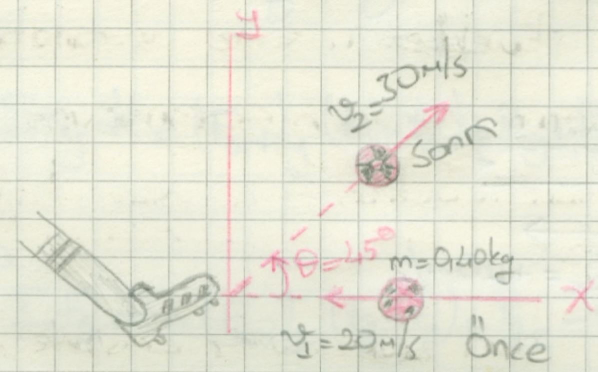
$$J_x = P_{2x} - P_{1x} = 8 - (-12) = 20 \text{ kg m/s}$$

b) Çarpışma süresi $t_2 - t_1 = \Delta t = 0{,}010$ s

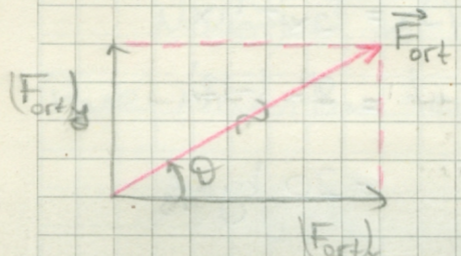
$$J_x = (F_{ort})_x (t_2 - t_1) = (F_{ort})_x \Delta t$$

$$(F_{ort})_x = \frac{J_x}{\Delta t} = \frac{20 \text{ N s}}{0{,}010 \text{ s}} = 2000 \text{ N}$$

Örnek 3. Bir futbol topunun kütlesi 0,40 kg'dır ve başlangıçta s doğru 20 m/s hızla hareket etmektedir. Top şut çekildikten sonra yatayla 45° açı yaparak sağa doğru 30 m/s hızla ilerlemeye başlar (Aşağıdaki şekil). Çarpışmanın $\Delta t = 0{,}010\,s$ sürdüğünü farz ederek net kuvvetin itmesini ve ortalama net kuvveti bulunuz.



Çözüm



$v_{1x} = -20$ m/s , $v_{1y} = 0$

$v_{2x} = v_{2y} = (30\ \text{m/s})(0{,}707) = 21{,}2$ m/s (Açıdan d

$$J_x = P_{2x} - P_{1x} = m\,(v_{2x} - v_{1x}) = (0{,}40\,kg)\big(21{,}2 - (-20)\big) = 16{,}5\ kg\,m/s$$

$$J_y = P_{2y} - P_{1y} = m(v_{2y} - v_{1y}) = (0{,}40)(21{,}2 - 0) = 8{,}5\ kg\,m/s$$

$$J = \sqrt{J_x^2 + J_y^2} = \ ?$$

Ortalama net kuvvetin bileşenleri;

$$(F_{ort})_x = \frac{J_x}{\Delta t} = 1650\ N$$

$$(F_{ort})_y = \frac{J_y}{\Delta t} = 850\ N$$

$$F_{ort} = \sqrt{(F_{ort})_x^2 + (F_{ort})_y^2} = 1{,}9 \times 10^3\ N$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{(F_{ort})_y}{(F_{ort})_x}\right) = 27°$$

8.3. Momentumun Korunumu

Herhangi bir sistemde sistemin bir parçacığının diğeri üzerinde uyguladığı kuvvete iç kuvvet denir. Sistemin dışından, sistemdeki parçacıklardan herhangi birine uygulanan, herhangi bir kuvvete dış kuvvet denir. Şekil 8.1'de iki astronot sıfır yerçekiminin olduğu uzay boşluğunda birbirini itmektedir. Bu iki astronota etkiyen dış kuvvet sıfırdır. B astronotunun A astronotuna uyguladığı kuvvet $\vec{F}_{B-A}$, A astronotunun B astronotuna uyguladığı kuvvet $\vec{F}_{A-B}$'dir. Dış kuvvet yoktur. Bu sisteme izole (yalıtılmış) sistem denir. Bu etki-tepki kuvvetleri momentumlar cinsinden;

$$\vec{F}_{B-A} = \frac{d\vec{P}_A}{dt} \quad ; \quad \vec{F}_{A-B} = \frac{d\vec{P}_B}{dt} \qquad (8.15)$$

dur. Bu kuvvetler büyüklükçe eşit fakat zıt yönlü olduğundan;

$$\vec{F}_{B-A} + \vec{F}_{A-B} = \frac{d\vec{P}_A}{dt} + \frac{d\vec{P}_B}{dt} = \frac{d(\vec{P}_A + \vec{P}_B)}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt} \qquad (8.16)$$

yazılabilir. Toplam momentumun zaman içindeki değişimi sıfırdır. Demek ki parçacıkların momentumları teker teker değişse bile sistemin toplam momentumu sabittir. Bu ilkeye momentumun korunumu ilkesi denir. Kısacası, dış kuvvetlerin vektörel toplamı sıfırsa sistemin toplam momentumu sabit kalır. Etkileşen ikiden fazla cisim var ise böyle bir sistemin toplam momentumu;

$$\vec{P} = \vec{P}_A + \vec{P}_B + \vec{P}_C + \cdots = m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B + m_C \vec{v}_C + \cdots \qquad (8.17)$$

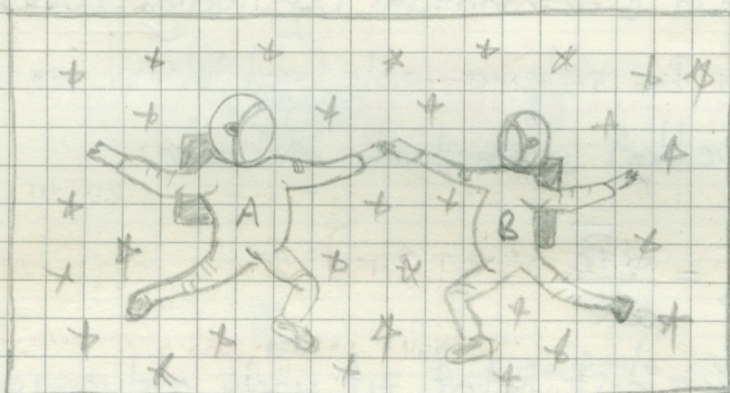
dır. Momentumun korunumu onun x, y, z bileşenlerininde korunumlu olduğu anlamına gelir. Momentumun korunumu problemlerinde momentumun bileşenlerini korumak en sağlıklı yoldur. Bileşenler cinsinden momentumun korunumu

$$\sum P_x^{\text{Etkileşmeden Önce}} = \sum P_x^{\text{Etkileşmeden Sonra}}$$

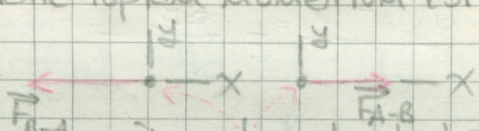
$$\sum P_y^{\text{Etkileşmeden Önce}} = \sum P_y^{\text{Etkileşmeden Sonra}}$$

$$\sum P_z^{\text{Etkileşmeden Önce}} = \sum P_z^{\text{Etkileşmeden Sonra}}$$

(8.18)



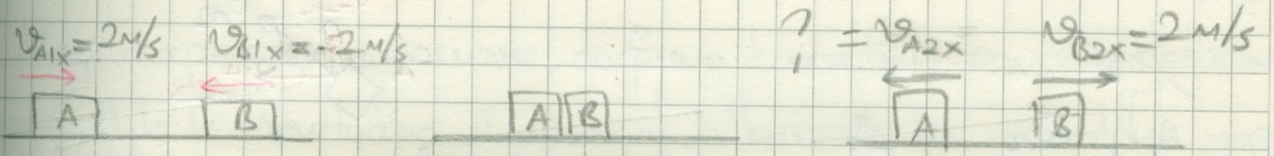
Bu iki astronotu etkileyen dış kuvvet yoktur.
Bu nedenle toplam momentum korunur.



İki astronotun birbirine uyguladığı kuvvetler, etki-tepki çiftidir.

Şekil 8.1. İki astronot sıfır yerçekiminin olduğu uzay boşluğunda birbirlerini itmektedir.

Örnek 4. İki kütle hava rayı üzerinde sürtünmesiz olarak birbirine doğru kayıyor (Şekil-a) ve sonra (Şekil-b) çarpışıyorlar. Çarpışmadan sonra B kütlesi +2 m/s son hızla hareket ediyor (Şekil-c). A kütlesinin son hızı nedir? Her iki kütlenin momentumlarının ve hızlarının değişimi birbirleriyle nasıl mukayese edilebilir?



(a) Çarpışmadan Önce (b) Çarpışma Anı (c) Çarpışmadan Sonra

Not: Her bir kütle üzerindeki toplam dikey kuvvet sıfırdır. Her kütleye etkiyen yatay net kuvvet ise bir kütlenin diğerine uyguladığı kuvvettir. İki kütleye etkiyen toplam yatay dış kuvvet sıfırdır. O halde momentum korunmaktadır.

Çözüm

Çarpışmadan önceki momentum (P_x): $P_x^{(önce)} = m_A v_{A1x} + m_B v_{B1x} = (0,5)(2) + (0,3)(-2) = 0,40$ kg m/s

$P_x^{(önce)} = P_x^{(sonra)}$ $\quad P_x^{(önce)} = m_A v_{A2x} + m_B v_{B2x}$; $v_{A2x} = \dfrac{P_x - m_B v_{B2x}}{m_A} = \dfrac{0,40 - (0,3)(2)}{0,50}$

$\boxed{v_{A2x} = -0,40 \text{ m/s}}$

A kütlesinin x-doğrultusundaki momentum değişimi;

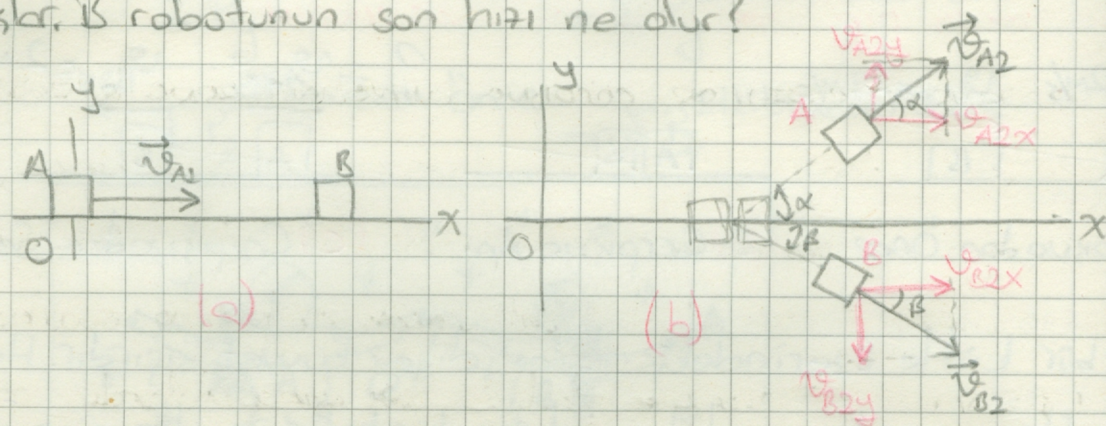
$m_A v_{A2x} - m_A v_{A1x} = (0,50)(-0,40) - (0,50)(2) = -1,2$ kg m/s

B kütlesinin x-doğrultusundaki momentum değişimi;

$m_B v_{B2x} - m_B v_{B1x} = (0,30)(2) - (0,30)(-2) = 1,2$ kg m/s

Her iki kütlenin momentum değişimlerinin büyüklükleri birbirine eşit, fakat değişim yönleri birbirine zıttır. Aynı durum hız farkları içinde geçerlidir.

Örnek 5. Şekil a'da sürtünmesiz yüzeyde birbirlerine doğru koşan iki robotu gösteriyor. Robot A'nın kütlesi 20kg olup x-ekseni boyunca başlangıçta 2 m/s süratle ilerlemektedir; kütlesi 12 kg olan ve çarpmadan önce hareketsiz duran B robotuna çarpar. Çarpışmadan sonra A robotu x-ekseni ile 30° açı yapan yönde 1 m/s süratle ilerlemeye başlar. B robotunun son hızı ne olur?



Çözüm

$$P_x^{(\text{önce})} = P_x^{(\text{sonra})}$$

$$m_A v_{A1x} + m_B v_{B1x} = m_A v_{A2x} + m_B v_{B2x}$$

$$v_{B2x} = \frac{m_A v_{A1x} + m_B v_{B1x} - m_A v_{A2x}}{m_B} =$$

$$v_{B2x} = \frac{[(20kg)(2m/s) + (12kg)(0) - (20kg)(1m/s)\cos 30°]}{12kg}$$

$$v_{B2x} = 1{,}89\ m/s$$

$$P_y^{(\text{önce})} = P_y^{(\text{sonra})}$$

$$m_A v_{A1y} + m_B v_{B1y} = m_A v_{A2y} + m_B v_{B2y}$$

$$v_{B2y} = \frac{m_A v_{A1y} + m_B v_{B1y} - m_A v_{A2y}}{m_B} = \frac{(20kg)(0) + (12kg)(0) - (20kg)(1m/s)\sin}{12kg}$$

$$v_{B2y} = -0{,}83\ m/s$$

$$v_{B_2} = \sqrt{(v_{B_{2x}})^2 + (v_{B_{2y}})^2} = \sqrt{(1{,}89)^2 + (-0{,}83)^2}$$

$$v_{B_2} = 2{,}1 \ m/s$$

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{v_{B_{2y}}}{v_{B_{2x}}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-0{,}83}{1{,}89}\right) = \boxed{-24{,}°}$$

Çarpışmalarda Enerji ve Momentum Korunumu

Çoğu çarpışmalar sırasında çarpışma kuvvetinin zamanla değişimini bilmeyiz. Öyle ki Newton'un II. yasasını kullanarak bir çözümleme yapmak çok zor veya olanaksızdır. Ancak enerji ve momentumun korunumu yasaları ve çarpışma öncesi bilgileri kullanarak çarpışma sonrasına ait bir dizi parametreyi hesaplayabiliriz. Bazı çarpışmalarda çarpışma öncesi toplam kinetik enerji, çarpışma sonrası toplam kinetik enerjiye eşittir;

Çarpışma öncesi toplam kinetik enerji = Çarpışma sonrası toplam kinetik enerji

$$\frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 = \frac{1}{2} m_A v_A'^2 + \frac{1}{2} m_B v_B'^2 \qquad (9.19)$$

Momentumun yanısıra kinetik enerjininde korunduğu bu tür çarpışmalara esnek çarpışmalar denir.

Kinetik enerjinin korunmadığı çarpışmalara esnek olmayan çarpışmalar denir. Kaybolan kinetik enerji, çoğunlukla ısıl enerji olmak üzere, başka bir enerji şekline dönüşür, öyle ki toplam enerji her zaman korunmuş olur. Bu durumda;

$$K_A + K_B = K_A' + K_B' + (\text{Isısal veya başka türde enerjiler}) \qquad (9.20)$$

yazılabilir.

8.5. Bir Boyutta Esnek Çarpışmalar

Şimdi momentumun ve kinetik enerjinin korunumu yasaları bir doğru üzerinde kafa kafaya çarpışan iki küçük cisim çarpışmasına uygulayalım. Bu iki cisim Şekil 8.2'deki gibi çarpışmadan önce v_A ve v_B $(v_A > v_B)$ hızları ile x-ekseni boyunca hareket ettiğini varsayalım. Çarpışmadan sonra kütlelerinin hızları Şekil 8.2'deki gibi v_A' ve v_B' olsun. Momentumun korunumu

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v_A' + m_B v_B' \qquad (8.21)$$

Kinetik enerjinin korunumu ise;

$$\frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 = \frac{1}{2} m_A v_A'^2 + \frac{1}{2} m_B v_B'^2 \qquad (8.22)$$

olur. Momentumun korunumundan

$$m_A (v_A - v_A') = m_B (v_B' - v_B) \qquad (8.23)$$

Kinetik enerjinin korunumundan ise;

$$m_A (v_A^2 - v_A'^2) = m_B (v_B'^2 - v_B^2) \qquad (8.24)$$

elde edilir. Bu bağıntı

$$m_A (v_A - v_A')(v_A + v_A') = m_B (v_B' - v_B)(v_B' + v_B) \qquad (8.25)$$

yazılabilir. Bu bağıntı momentum bağıntısıyla oranlanırsa;

$$v_A + v_A' = v_B' + v_B \qquad (8.26)$$

$$v_A' = \left(\frac{m_A - m_B}{m_A + m_B}\right) v_A + \frac{2 m_B}{m_A + m_B} v_B$$

$$v_B' = \left(\frac{2 m_A}{m_A + m_B}\right) v_A + \left(\frac{m_B - m_A}{m_A + m_B}\right) v_B$$

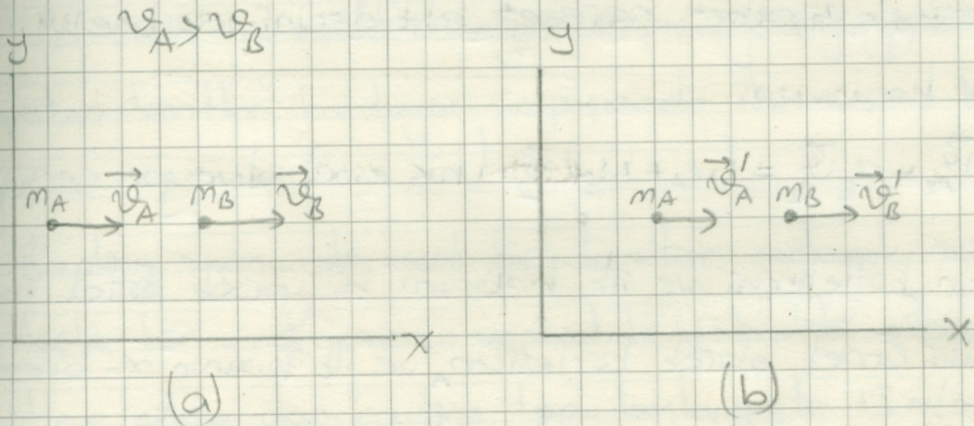
veya;

$$v_A - v_B = v_B' - v_A' \qquad (8.27)$$

veya;

$v_A - v_B = -(v_A' - v_B')$ bulunur.

İlginç sonuç bize şunu söylemektedir: Kütleleri ne olursa olsun, iki cismin kafa kafaya esnek çarpışmasında, iki cismin çarpışmadan sonraki bağıl hızları, çarpışmadan önceki ile aynı, fakat ters yöndedir.



Şekil 8.2. Kütleleri m_A, m_B olan 2 küçük cisim (a) çarpışmadan önce, (b) çarpışmadan sonra.

8.6. Esnek olmayan Çarpışmalar

Kinetik enerjinin korunmadığı çarpışmalara esnek olmayan çarpışmalar denir. Başlangıçtaki kinetik enerjinin bir kısmı ısıl veya potansiyel enerji gibi başka türden enerjilere dönüştüğünde çarpışma sonrasındaki kinetik enerji başlangıçtaki toplam kinetik enerjiden daha düşüktür. Fakat serbest kalan (kimyasal veya nükleer) bir potansiyel enerji söz konusu olduğunda bunun tersi de söz konusu olabilir; bu durumda çarpışma sonrasında toplam kinetik enerji başlangıçtaki değerinden daha yüksek olabilir. Patlama olayları buna örnek olabilir.

8.7. Hiç esnek olmayan çarpışma

İki topun (A ve B) tamamen esnek olmayan çarpışma sonrasında kinetik enerji ve momentumun ne durduğunu inceleyelim. Şekil 8.3'teki gibi üzerlerinde yapışkan bantlar olan iki topun çarpıştıktan sonra $\vec{v}_2$ ortak hızıyla beraber hareket ettiklerini düşünelim. Böylece momentumun korunumu

$$m_A \vec{v}_{A1} + m_B \vec{v}_{B1} = (m_A + m_B)\vec{v}_2 \quad \text{(hiç esnek olmayan çarpışma)}$$

olur. Cisimlerin kütlelerini ve ilk hızlarını biliyorsak ortak son hız $\vec{v}_2$ bulunabilir. Örnek olarak kütlesi m_A ve ilk hızının x-bileşeni $v_{Ax,1}$ olan bir cisim, kütlesi m_B olan duran ($v_{B1x}=0$) bir cisme esnek olmayarak çarpıyor. Denklem 8.28'den her iki cismin çarpışmadan sonraki ortak son hızları v_{2x}'in x-bileşeni;

$$v_{2x} = \frac{m_A}{m_A + m_B} v_{A1x} \quad \left(\begin{array}{l}\text{hiç esnek olmayan çarpışma} \\ \text{B çarpışmadan önce durgun}\end{array}\right) \quad (8.$$

Tamamen esnek olmayan bu çarpışmadan sonra toplam kinetik enerjinin azaldığını gösterelim. Hareket sadece x-ekseni boyunca dır ve çarpışmadan önce ve sonra kinetik enerjiler sırasıyla K_1 ve dir.

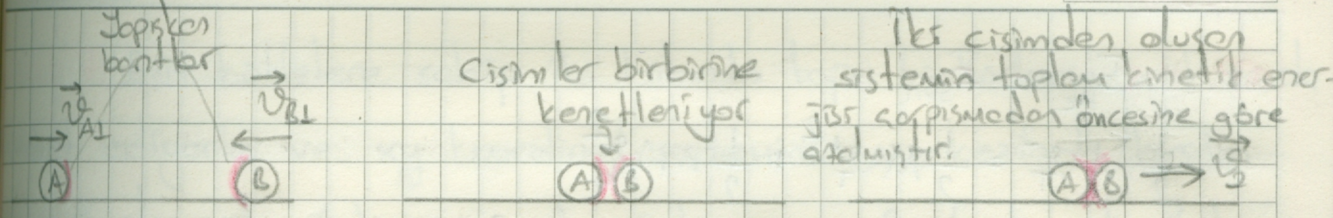
$$K_1 = \frac{1}{2} m_A v_{A1x}^2$$

$$K_2 = \frac{1}{2}(m_A + m_B) v_{2x}^2 = \frac{1}{2}(m_A + m_B)\left(\frac{m_A}{m_A + m_B}\right) v_{A1x}^2 \quad (8.30)$$

Buradan kinetik enerjilerin oranı;

$$\frac{K_2}{K_1} = \frac{m_A}{m_A + m_B} \quad (8.31)$$

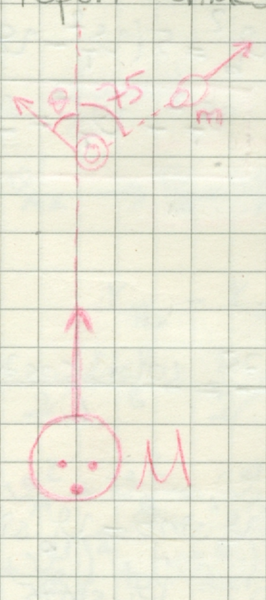
olduğu görülür.



(a) Çarpışmadan Önce (b) Hiç esnek olmayan çarpışma (c) Çarpışmadan Sonra

Şekil 8.3. İki cisim hiç esnek olmayan çarpışmaya uğruyorlar. Topların önüne yapışkan bantlar konuluyor. Çarpışmada iki cisim birbirlerine kenetleniyor.

Örnek 6. Bowling oyununda sert bir devrilme sağlamak için, bowling topu lobutlarla bir yanak vuruşu yapmalıdır (şekildeki gibi). Lobutun katı kütleye sahip olan bowling topu başlangıçta 13 m/s ile hareket etmektedir. Lobut topun ilk yönünden 75° açıyla devrilir. Sunları hesaplayınız: (a) Lobutun ve (b) topun çarpışmadan hemen sonraki süratlerini ve (c) topun saptırılacağı açıyı. Çarpışmanın esnek olduğunu varsayınız ve topun dönmesini ihmal ediniz.



(16)

ÇÖZÜM:

(a) $E_{ilk} = E_{son}$

$$\frac{1}{2}Mv_T^2 = \frac{1}{2}Mv_T'^2 + \frac{1}{2}mv_b^2$$

$$\frac{1}{2}(5\cancel{m})v_T^2 = \frac{1}{2}(5\cancel{m})v_T'^2 + \frac{1}{2}\cancel{m}v_b^2$$

$$5v_T^2 = 5v_T'^2 + v_b^2 \Rightarrow \boxed{v_b^2 = 5(v_T^2 - v_T'^2)}$$

$P_x^{(ilk)} = P_x^{(son)}$

$$-Mv_T'\sin\theta + mv_b\sin 75 = 0$$

$$\boxed{5v_T'\sin\theta = v_b\sin 75}$$

$P_y^{(ilk)} = P_y^{(son)}$

$$Mv_T = Mv_T'\cos\theta + mv_b\cos 75$$

$$\boxed{5v_T'\cos\theta = 5v_T - v_b\cos 75}$$

$$5v_T'\sin\theta = v_b\sin 75$$

$$+\ 5v_T'\cos\theta = 5v_T - v_b\cos 75$$

$$25v_T'^2 = v_b^2\sin^2 75 + 25v_T^2 - 10v_T v_b\cos 75 + v_b^2\cos^2 75$$

$$25(v_T'^2 - v_T^2) = v_b^2 - 10v_T v_b\cos 75$$

$$v_b^2 = 5(v_T^2 - v_T'^2)$$

$$\boxed{v_T^2 - v_T'^2 = \frac{v_b^2}{5}}$$

$$\overset{5}{\cancel{25}}\left(-\frac{v_b^{\cancel{2}}}{\cancel{5}}\right) = \cancel{v_b}(v_b - 10v_T\cos 75)$$

$$6v_b = 10v_T\cos 75 \Rightarrow v_b = \frac{10v_T\cos 75}{6} = \frac{10(13)\cos 75}{6} \approx \boxed{5{,}61\ m/s}$$

(b)

$$v_b^2 = 5(v_T^2 - v_T'^2)$$

$$5v_T'^2 = 5v_T^2 - v_b^2$$

$$v_T' = \sqrt{v_T^2 - \frac{v_b^2}{5}} = \sqrt{(13)^2 - \frac{(5{,}61)^2}{5}}$$

$$v_T' = 12{,}75\ m/s \approx \boxed{13\ m/s}$$

(c)

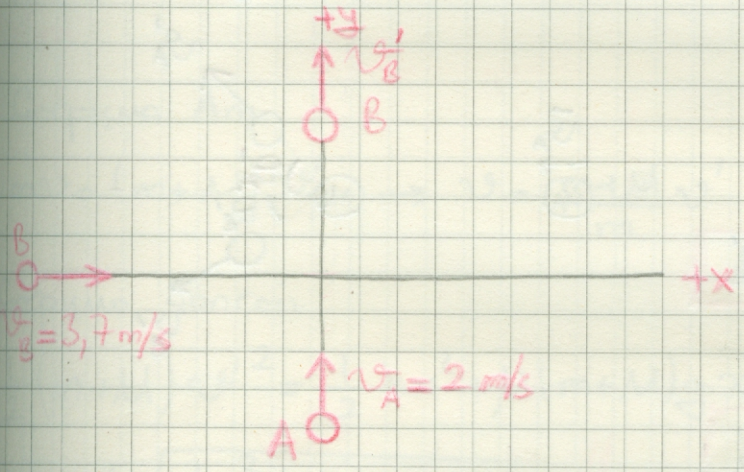
$$5v_T'\sin\theta = v_b\sin 75$$

$$\sin\theta = \frac{v_b\sin 75}{5v_T'} = \frac{(5{,}61)\sin 75}{5(12{,}75)}$$

$$\theta = \sin^{-1}(0{,}0850)$$

$$\boxed{\theta = 4{,}87^\circ}$$

Örnek 7. Eşit kütlelere sahip iki bilardo topu birbirlerine dik açıda hareket ediyorlar ve xy koordinat sisteminin merkezinde karşılaşıyorlar. Başlangıçta A topu y ekseni boyunca 2 m/s hızıyla, B topu x ekseni boyunca 3,7 m/s hızı ile hareket etmektedir. Çarpışmadan (esnek olduğu varsayılacaktır) sonra ikinci top +y boyunca hareket etmektedir (şekildeki gibi). A topunun son yönü nedir ve topların süratleri nedir?



Çözüm

$$P_x^{(\text{önce})} = P_x^{(\text{sonra})} \qquad P_y^{(\text{önce})} = P_y^{(\text{sonra})}$$

$$m v_B = m v_{Ax}' \rightarrow \boxed{v_B = v_{Ax}'} \qquad m v_A = m v_{Ay}' + m v_B' \rightarrow \boxed{v_A = v_{Ay}' + v_B'}$$

$$K_{\text{ilk}} = K_{\text{son}}$$

$$\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{m} v_A^2 + \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{m} v_B^2 = \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{m} v_A'^2 + \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{m} v_B'^2$$

$$v_A^2 + v_B^2 = v_A'^2 + v_B'^2 \leftarrow \; v_B = v_{Ax}', \quad v_A = v_{Ay}' + v_B'$$

$$(v_{Ay}' + v_B')^2 + (v_{Ax}')^2 = v_A'^2 + v_B'^2$$

$$v_{Ay}'^2 + 2 v_{Ay}' v_B' + v_B'^2 + v_{Ax}'^2 = v_A'^2 + v_B'^2 \leftarrow \; v_A'^2 = v_{Ax}'^2 + v_{Ay}'^2$$

$$\cancel{v_A'^2} + \cancel{v_B'^2} + 2 v_{Ay}' v_B' = \cancel{v_A'^2} + \cancel{v_B'^2}$$

$$2 v_{Ay}' v_B' = 0 \rightarrow v_B' \neq 0 \text{ ve } v_{Ay}' = 0\text{'dır.}$$

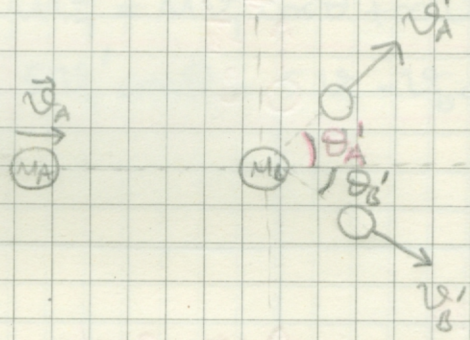
A – x yönündedir.

Böylece
$v_A' = v_{Ax}' = v_B = 3,7$ m/s
$v_B' = v_A = 2$ m/s

Örnek 8. Kütlesi $m_A = 0{,}120$ kg olan bilardo topu A, $v_A = 2{,}80$ m/s hızıyla başlangıçta durgun ve kütlesi $m_B = 0{,}140$ kg olan B bilardo topu ile çarpışıyor. Çarpışma sonunda A topu 30°'lik bir açıyla saçılarak $v'_A = 2{,}10$ m/s hızıyla uzaklaşıyor. (a) x-ekseni A'nın ilk yönü olduğuna göre, momentumun x ve y yönlerindeki bileşenlerini veren denklemleri yazınız. (b) Bu denklemleri B topunun v'_B hızı ve θ'_B açısı için çözünüz. Çarpışmanın esnek olduğu varsayımını yapmayınız!

Çözüm

(a)



$$p_x^{(\text{önce})} = p_x^{(\text{sonra})}$$

$$\boxed{m_A v_A = m_A v'_A \cos\theta'_A + m_B v'_B \cos\theta'_B}$$

$$p_y^{(\text{önce})} = p_y^{(\text{sonra})}$$

$$\boxed{0 = m_A v'_A \sin\theta'_A - m_B v'_B \sin\theta'_B}$$

(b)

$$\tan\theta'_B = \frac{\sin\theta'_B}{\cos\theta'_B} = \frac{\dfrac{m_A v'_A \sin\theta'_A}{m_B v'_B}}{\dfrac{m_A(v_A - v'_A\cos\theta'_A)}{m_B v'_B}} = \frac{v'_A \sin\theta'_A}{v_A - v'_A\cos\theta'_A}$$

$$\theta'_B = \tan^{-1}\left(\frac{v'_A\sin\theta'_A}{v_A - v'_A\cos\theta'_A}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{(2{,}10\ \text{m/s})\sin 30°}{2{,}80\ \text{m/s} - (2{,}10\ \text{m/s})(\cos 30°)}\right) = \boxed{46{,}9°}$$

$$v'_B = \frac{m_A v'_A \sin\theta'_A}{m_B \sin\theta'_B} = \frac{(0{,}120\ \text{kg})(2{,}10\ \text{m/s})\sin 30}{(0{,}140\ \text{kg})\sin 46{,}9°} = \boxed{1{,}23\ \text{m/s}}$$

........./........./.........

Örnek 9. Kütlesi $m = 0{,}0010$ kg olan bir mermi, kütlesi $M = 0{,}999$ kg olarak verilen bir bloğa gömmekte, bu sırada blokta bir yayı ($k = 120$ N/m) $x = 0{,}050$ m sıkıştırdıktan sonra durmaktadır. Masa ile blok arasındaki kinetik sürtünme katsayısı $\mu = 0{,}50$ ise (a) merminin ilk hızı nedir? (b) Merminin ilk kinetik enerjisinin hangi kesri blokla mermi arasındaki çarpışmada kaybedilmiştir? (tahtaya zarar verme, ısının artması vs. için kullanılan)

Çözüm

a) Çarpışma Anı

$$mv = (m+M)v' \rightarrow v = \frac{m+M}{m}v'$$

Çarpışma Sonrası

$$\frac{1}{2}(m+M)v'^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \mu(m+M)gx$$

$$v' = \sqrt{\frac{kx^2}{m+M} + 2\mu g x} \Leftrightarrow v = \frac{m+M}{m}v'$$

$$v = \frac{m+M}{m}\sqrt{\frac{kx^2}{m+M} + 2\mu g x} = \frac{1}{1\times10^{-3}}\sqrt{\frac{(120)(0{,}5)^2}{1} + 2(0{,}5)(9{,}8)(0{,}05)}$$

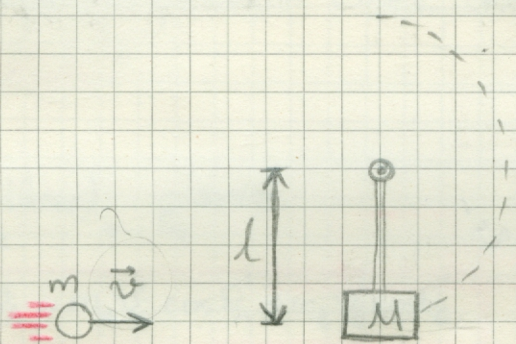
$$\boxed{v = 888{,}8 \text{ m/s}}$$

b) $$\frac{K_{ilk} - K_{son}}{K_{ilk}} = \frac{\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}(m+M)v'^2}{\frac{1}{2}mv^2}$$

$$= 1 - \frac{(m+M)v'^2}{mv^2} = 1 - \frac{(m+M)}{m}\left(\frac{m}{m+M}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{m}{m+M} = \frac{M}{m+M} = \boxed{0{,}999}$$

Örnek 10. Kütlesiz, l uzunluğunda bir çubuğun ucuna bağlı M kütlesinden oluşan bir sarkacın üst ucu, sürtünmesiz bir eksen etrafında dönebilmektedir. Bir m kütlesi, şekilde gösterildiği gibi, v hızı ile M kütlesine gömülmektedir. Sarkacın (m kütlesi gömülmüş olarak) kesik çizgilerle gösterilen yayı tamamlayıp en üst noktayı aşacak şekilde harekete geçirecek en küçük v değerini hesaplayınız.



Çözüm

Enerjinin korunumundan;

$$K_{Alt} = U_{üst}$$

$$\frac{1}{2}(m+M)v_{Alt}^2 = (m+M)g(2l)$$

$$v_{Alt} = 2\sqrt{gl}$$

$$P_{ilk} = P_{alt}$$

$$mv = (m+M)v_{alt}$$

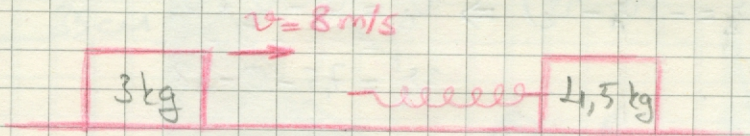
$$v = \frac{m+M}{m}v_{alt}$$

$$v = \frac{2(m+M)}{m}\sqrt{gl}$$

olur.

......../......../........

Örnek 11. 3 kg'lık bir blok sürtünmesiz bir masa üstünde, kütlesi 4,5 kg olan durgun ikinci bir kütleye doğru hareket etmektedir. Hooke yasasına uyan ve yay sabiti $k = 850$ N/m olan bir yay ikinci kütleye iliştirilmiştir ve hareketli kütle ona çarptığında yay sıkışacaktır. (a) Yayın en büyük sıkışması ne olur? (b) Çarpışma sonrasında blokların son hızları ne olur? (c) Çarpışma esnek midir? (yayın kütlesini ihmal ediniz.)



Çözüm

$m_A = 3$ kg, $m_B = 4,5$ kg

$P_{ilk} = P_{son}$

$m_A v_A = (m_A + m_B) v'$

$v' = \dfrac{m_A}{m_A + m_B} v_A$

$E_{ilk} = E_{son}$

$\frac{1}{2} m_A v_A^2 = \frac{1}{2}(m_A + m_B) v'^2 + \frac{1}{2} k x^2$

$x = \sqrt{\frac{1}{k}\left[m_A v_A^2 - (m_A + m_B) v'^2\right]}$

v' hızı x denkleminde yerine yazılırsa;

$x = \sqrt{\frac{1}{k}\left(\frac{m_A m_B}{m_A + m_B}\right) v_A^2} = \sqrt{\frac{1}{850}\left(\frac{(3)(4,5)}{3 + 4,5}\right)(8\,\text{m/s})^2} \cong 0,37\,\text{m}$

$v' = -(v'_A - v'_B)$

$v'_A = v_A\left(\frac{m_A - m_B}{m_A + m_B}\right) = (8)\frac{(3 - 4,5)}{(3 + 4,5)} = -1,6$ m/s

$v'_B = v_A \frac{2 m_A}{m_A + m_B} = 8\,\frac{2(3)}{(3 + 4,5)} = 6,4$ m/s

Örnek 12. Kütlesi 0,220 kg olan bir top 7,5 m/s'lik bir hızla hareket ederken, başlangıçta durgun bir topla kafa kafaya çarpışıyor. Çarpışmadan hemen sonra, hareketli top 3,8 m/s hızıyla geriye dönüyor. (a) Hedef durumundaki topun çarpışma sonrasındaki hızını ve (b) bu topun kütlesini hesaplayınız.

Çözüm

(a) $v_A = 7{,}5$ m/s (hareketli top)

$v_B = 0$

$v_A' = -3{,}8$ m/s

$$v_A - v_B = -(v_A' - v_B') \Rightarrow v_B' = v_A - v_B + v_A'$$

$$v_B' = 7{,}5 - 0 - 3{,}8$$

$$v_B' = 3{,}7 \text{ m/s}$$

(b)

$$P_{ilk} = P_{son}$$

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v_A' + m_B v_B'$$

$$m_B = m_A \left(\frac{v_A - v_A'}{v_B' - v_A} \right) = 0{,}22 \left(\frac{7{,}5 - (-3.8)}{3{,}7} \right) = 0{,}67 \text{ kg}$$

Örnek 13. 0,45 kg'lik bir hokey topu, 4,80 m/s hızıyla doğuya doğru hareket ederken, durmakta olan 0,900 kg'lik bir top ile kafa kafaya çarpışıyor. Tümüyle esnek bir çarpışma olduğunu varsayarsak, çarpışma sonrasında her bir cismin sürati ve yönü ne olacaktır?

Çözüm

$m_A = 0{,}450$ kg , $v_A = 4{,}80$ m/s

$m_B = 0{,}9$ kg , $v_B = 0$

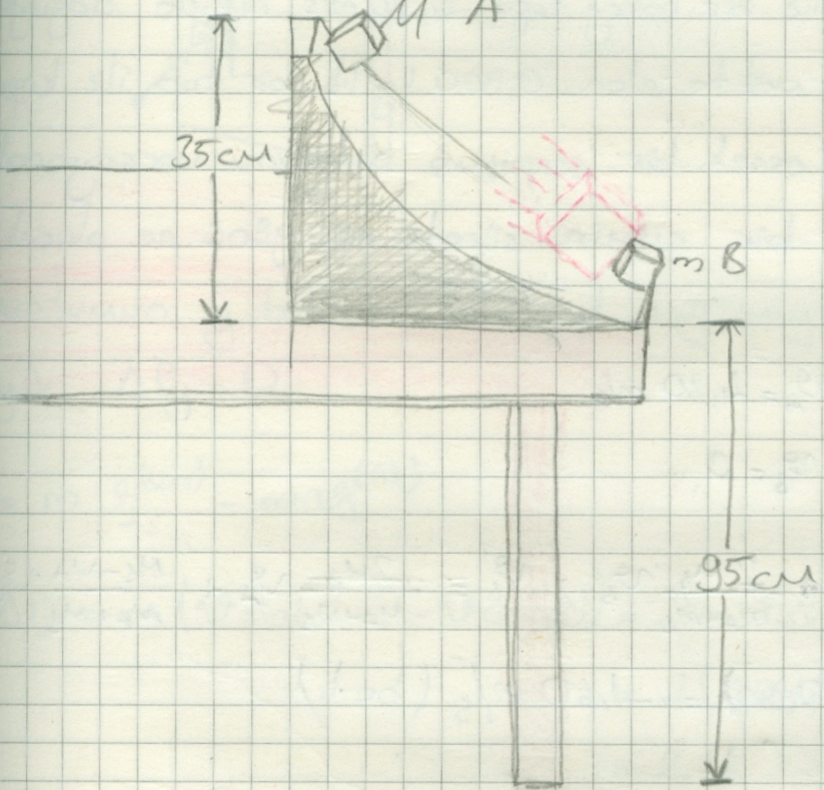
$$v_A - \cancel{v_B}^{\,0} = -(v_A' - v_B') \Rightarrow v_B' = v_A + v_A'$$

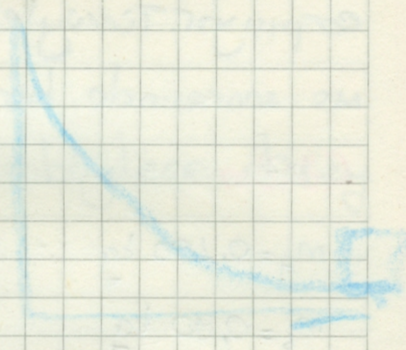
$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v_A' + m_B v_B'$$

$$m_A v_A = m_A v_A' + m_B (v_A + v_A')$$

$$v_A' = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} v_A = \frac{-0{,}45}{35} (4{,}80) = -1{,}60 \text{ m/s}$$

Örnek 13. Bir fizik laboratuvarında bir küp, sürtünmesiz bir eğik düzlemde şekilde gösterildiği gibi kayarken, eğik düzlemin dibinde durmakta olan kendisinin yarı kütlesindeki diğer bir küpe esnek olarak çarpar. Eğik düzlemin yüksekliği 35 cm iken masada yerden 0,95 m yukarıda ise her bir küpün düşeceği yeri hesaplayınız. [İpucu: Küpler masayı yatay hızlarla terk ederler.]





Çözüm

$$Mgh = \frac{1}{2} M v_A^2 \rightarrow v_A = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9,8)(0,35)} = 2,619 \text{ m/s}$$

Tam çarptığı anda $v_B = 0$ olur.

Esnek çarpışma için;

$$v_A - v_B = -(v_A' - v_B') \Rightarrow v_B' = v_A + v_A'$$

$$m_A v_A = m_A v_A' + m_B (v_A + v_A') \quad // \; m_A = 2m, \; m_B = m$$

$$2m v_A = 2m v_A' + m (v_A + v_A') \rightarrow v_A' = \frac{v_A}{3} = \frac{2,619}{3} = 0,873 \text{ m/s}$$

⟶ devamı arkada

$$\vartheta_B' = \vartheta_A + \vartheta_A' = 2{,}619 + 0{,}873 = 3{,}492 \ m/s$$

$$y = \frac{1}{2} g t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{2(0{,}95)}{9{,}8}} = 0{,}44 s$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta x_A^M &= \vartheta_A' t = (0{,}873)(0{,}44) = 0{,}384 \ m \\ \Delta x_B^m &= \vartheta_B' t = (3{,}492)(0{,}44) = 1{,}536 \ m \end{aligned}\right\} \text{bulunur.}$$

Örnek 14. 0,45 kg'lik bir hokey topu 4,80 m/s hızıyla doğuya doğru hareket ederken durmakta olan 0,900 kg'lik bir top ile kafa kafaya çarpışıyor. Tümüyle esnek bir çarpışma olduğunu varsayarak, çarpışma sonrasında her bir cismin sürati ve yönü ne olacaktır?

Çözüm

$m_A = 0{,}450$ kg $\vartheta_A = 4{,}80$ m/s

$m_B = 0{,}90$ kg $\vartheta_B = 0$

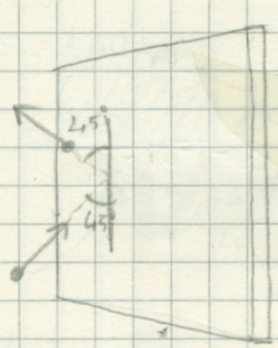
$$\vartheta_A' = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B}\vartheta_A + \frac{2m_B}{m_A + m_B}\vartheta_B \ ; \ \vartheta_B' = \frac{2m_A}{m_A + m_B}\vartheta_A + \frac{m_B - m_A}{m_A + m_B}\vartheta_B$$

$$\vartheta_A' = \frac{(0{,}450 - 0{,}90)}{0{,}450 + 0{,}90}(4{,}80) = -1{,}60 \ m/s \ (\text{batı})$$

$$\vartheta_B' = \frac{2(0{,}450)}{0{,}450 + 0{,}90}(4{,}80) = 3{,}20 \ m/s \ (\text{doğu}$$

......../......../........

Örnek 15. Kütlesi $m = 0,060$ kg ve sürati $v = 25$ m/s olan bir tenis topu bir duvara $45°$ açı yaparak çarpıyor ve aynı süratle geri yansıyor (şekilde görüldüğü gibi). Topa aktarılan itmeyi (yön ve büyüklük olarak) değeri nedir?



Çözüm

Momentumun y bileşeni (düşey) değişmiyor, böylece düşey impuls yok. $\Delta P_y = 0$

$$\Delta P_\perp = m v_\perp^{(son)} - m v_\perp^{(ilk)}$$

$$I = \Delta P_\perp = m(v \sin 45 - (-v \sin 45)) = 2 m v \sin 45$$

$$= 2(0,060)(25) \sin 45$$

$$= 2,12 \text{ kgm/s (sola doğru)}$$

Örnek 16. 0,145 kg'lik bir beyzbol topu 35 m/s'lik hızla hareket ederken yatay olarak bir beyzbol sopası tarafından 56 m/s'lik bir hızla geriye gönderiliyor. Sopa ile top arasındaki temas süresi 5×10^{-3} s ise, top ile sopa arasındaki kuvveti (bu süre içinde sabit olduğunu varsayın) hesaplayınız.

Çözüm

$$\Delta P = F_{ort}\,\Delta t = m\,\Delta v$$

$$F_{ort} = m\frac{\Delta v}{\Delta t} = (0{,}145)\frac{(56-(-35))}{5\times10^{-3}}$$

$$\boxed{F_{ort} = 2640\,N}$$

Örnek 17. $\vec{A} = (4\hat{i}+5\hat{j}-2\hat{k})$ m/s hızıyla hareket eden $m_A = 2$ kg kütlesi durgun haldeki $m_B = 3$ kg kütlesi ile çarpışıyor. Çarpışmadan hemen sonra m_A kütlesi $\vec{A} = (-2\hat{i}+3\hat{k})$ m/s hızıyla hareket etmektedir. m_B kütlesinin çarpışmadan sonraki hızını hesaplayınız. Çarpışma süresince iki kütleye başka hiçbir dış kuvvetin etkisinin olmadığını varsayınız.

Çözüm

$$m_1\vec{v}_1 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2'$$

$$\vec{v}_2' = \frac{m_1}{m_2}(\vec{v}_1 - \vec{v}_1') = \frac{2}{3}\left[(4\hat{i}+5\hat{j}-2\hat{k}) - (-2\hat{i}+3\hat{k})\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[6\hat{i}+5\hat{j}-5\hat{k}\right]$$

$$= (4\hat{i}+3{,}3\hat{j}-3{,}3\hat{k})\,m/s$$

Örnek 16. 0,145 kg'lık bir beyzbol topu 35 m/s'lik hızla hareket ed[erken] yatay olarak bir beyzbol sopası tarafından 56 m/s'lik bir h[ızla] geriye gönderiliyor. Sopa ile top arasındaki temas süresi 5×10^{-3} s ise, [top] ile sopa arasındaki kuvveti (bu süre içinde sabit olduğunu varsayı[nız]) hesaplayınız.

Çözüm

$$\Delta P = F_{ort}\,\Delta t = m\Delta v$$

$$F_{ort} = m\frac{\Delta v}{\Delta t} = (0,145)\frac{(56-(-35))}{5\times10^{-3}}$$

$$\boxed{F_{ort} = 2640\,N}$$

Örnek 17. $\vec{A} = (4\hat{i}+5\hat{j}-2\hat{k})$ m/s hızıyla hareket eden $m_A = 2$ kg kütlesi d[urur] haldeki $m_B = 3$ kg kütlesi ile çarpışıyor. Çarpışmadan hemen sonra m_A kütlesi $\vec{A} = (-2\hat{i}+3\hat{k})$ m/s hızıyla hareket etmektedir. m_B kütlesinin çarpışmadan sonraki hızını hesaplayınız. Çarpışma süresinde iki kü[tleye] başka hiçbir dış kuvvetin etkisinin olmadığını varsayınız.

Çözüm

$$m_1\vec{v}_1 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2'$$

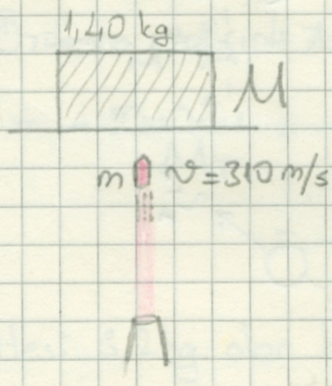
$$\vec{v}_2' = \frac{m_1}{m_2}(\vec{v}_1 - \vec{v}_1') = \frac{2}{3}\left[(4\hat{i}+5\hat{j}-2\hat{k})-(-2\hat{i}+3\hat{k})\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[6\hat{i}+5\hat{j}-5\hat{k}\right]$$

$$= (4\hat{i}+3{,}3\hat{j}-3{,}3\hat{k})\,m/s$$

......./......./........

nek 17. Bir mermi, ince ve yatay bir tabaka üzerine durmakta lan 1,40 kg'lık tahta bloğa doğru düşey olarak (şekildeki gibi) ateş-nmiştir. Eğer kütlesi 24g olan mermi 310 m/s süratindeyse, mermi ne girdikten sonra blok havada ne kadar yükselir?



özüm

$$mv = (m+M)v'$$

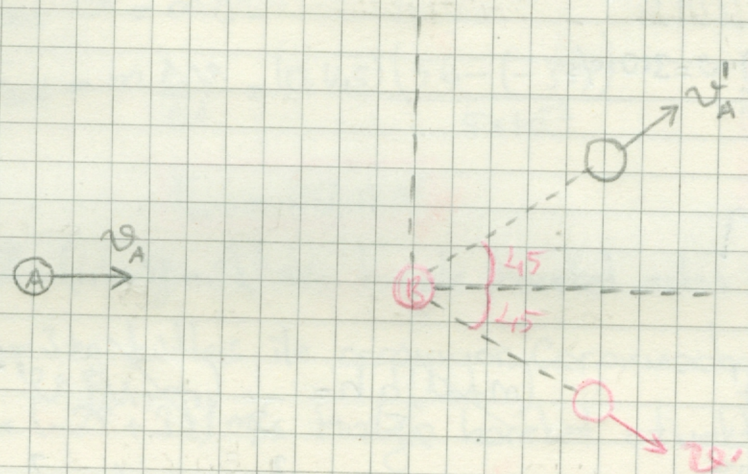
$$v' = \frac{m}{m+M} v$$

$$\cancel{(m+M)} g h = \frac{1}{2} \cancel{(m+M)} v'^2$$

$$h = \frac{v'^2}{2g} = \frac{1}{2g}\left(\frac{m^2}{(m+M)^2} v^2\right)$$

$$h = \frac{1}{2(9,8)}\left(\frac{0,024(310)}{0,024+1,4}\right)^2 = 1,392\ m \approx 1,4\ m$$

Örnek 18. Bilardo topu A $\vartheta_A = 3$ m/s hızı ile +x yönünde hareket ederken eşit kütleli ve başlangıçta durmakta olan B topu ile çarpışıyor. A topu x ekseninin yukarısına ve B topu x ekseninin aşağısına doğru olmak üzerine toplar x ekseninden 45° açılar yaparak uzaklaşıyorlar. Yani şekilde gösterildiği gibi $\theta_A' = 45°$, $\theta_B' = 45°$ dir. Bu iki topun çarpışmadan sonraki hızları nedir?



Çözüm

$$P_y^{(ilk)} = P_y^{(son)}$$

$$0 = m\vartheta_A' \sin 45 - m\vartheta_B' \sin 45$$

$$\vartheta_A' = \vartheta_B'$$

$$P_x^{(ilk)} = P_x^{(son)}$$

$$\cancel{m}\vartheta_A = \cancel{m}\vartheta_A' \cos 45 + \cancel{m}\vartheta_B' \cos 45$$

$$\vartheta_A = 2\vartheta_A' \cos 45$$

$$\vartheta_A' = \vartheta_B' = \frac{\vartheta_A}{2\cos 45} = \frac{3}{2(\cos 45)} = 2{,}12 \text{ m}$$

....../....../......

Örnek 19. 620 m/s'lik bir hıza sahip 0,020 kg'lık bir merminin kütlesi 0,020 kg'lık bir merminin kütlesi 5 kg olan bir tüfekte yarattığı geri tepme hızını bulunuz.

Çözüm

$$m_M v_M + M_T v_T = m_M v_M' + M_T v_T'$$

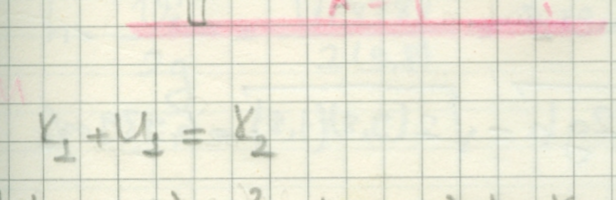
$$0 + 0 = m_M v_M' + M_T v_T'$$

$$v_T' = -\frac{m_M v_M'}{M_T} = -\frac{(0{,}02)(620)}{5}$$

$$= -2{,}48\ m/s \approx -2{,}5\ m/s$$

Örnek 20. Kütlesi 3,2 kg olan bir ayakkabı kutusu şekildeki gibi sürtünmesiz bir masa üzerinde kayarak h=0,40 m yükseklikteki masanın kenarında duran 2 kg'lık bir balerin ayakkabısı kutusuyla çarpışıyor. Kütlesi 3,2 kg olan kutunun çarpışmadan önceki sürati 3 m/s'dir. Eğer kutular, çarpıştıkları taraftaki paket bantları ile birbirlerine yapışırsa, yere düşmeden hemen önceki kinetik enerjileri ne olur?

Çözüm



$$P_1 = P_2$$

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_2$$

$$v_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

$$v_2 = \frac{3{,}2}{3{,}2+2}(3) = 1{,}846\ m/s$$

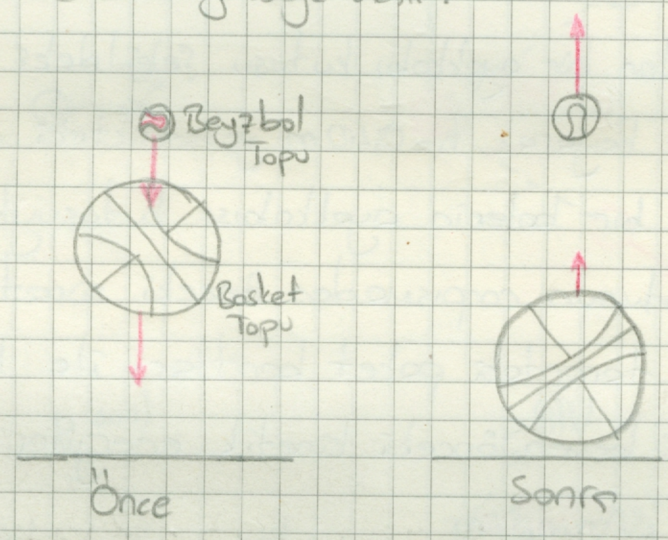
$$K_1 + U_1 = K_2$$

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_1^2 + (m_1 + m_2) g h = K_2$$

$$\frac{1}{2}(3{,}2+2)(3)^2 + (3{,}2+2)(9{,}8)(0{,}40) = K_2$$

$$K_2 = 29{,}2\ \text{joule}$$

Örnek 21. Kütlesi m olan küçük bir top kütlesi M=0,63 kg olan daha bü bir topla üst üste durmaktadır (şekilde bir beyzbol topu ve birde basketb topu örneğinde gösterildiği gibi, aralarında küçük bir mesafe bırakarak) ve her ikisi de h=1,8 m yükseklikten, aynı anda bırakılıyor. (Topların yarıçaplarının h yüksekliğine göre ihmal edilebilir kadar küçük olduğunu varsayınız.) (a) Eğer, büyük top yerden elastik olarak geri sıçrarsa ve sonra küçük büyük top üzerinden elastik olarak geri sıçrarsa, büyük topun küçük top çarpıştıktan sonra durması için m'nin değeri ne olmalıdır? (b) Ondan s küçük top ne kadar yükseğe ulaşır?

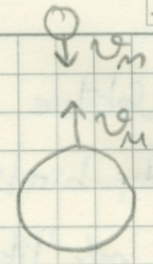


Çözüm

(a) $v = gt$; $h = \frac{1}{2} g t^2$

$$h = \frac{1}{2} g \left(\frac{v}{g}\right)^2$$

$$h = \frac{v^2}{2g} \rightarrow v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9,8)(1,8)} = 5,939 \text{ m/s}$$



$$v_A' = \left(\frac{m_A - m_B}{m_A + m_B}\right) v_A + \frac{2m_B}{m_A + m_B} v_B$$

$$v_A' = \left(\frac{m_A - m_B}{m_A + m_B}\right) v_A + \frac{2m_B}{m_A + m_B} (-v_A)$$

$$v_A' = \left(\frac{m_A - m_B - 2m_B}{m_A + m_B}\right) v_A$$

$$0 = \frac{m_A - 3m_B}{m_A + m_B} v_A \Rightarrow m_A - 3m_B = 0$$

$$m_A = 3m_B \Rightarrow \boxed{m_B = \frac{m_A}{3}} = \frac{0{,}63}{3} = 0{,}21\,\text{kg}$$

$$v_B' = \frac{2m_A}{m_A + m_B} v_A + \frac{m_B - m_A}{m_A + m_B} v_B$$

$$= \frac{2m_A}{m_A + m_B} v_A + \frac{m_B - m_A}{m_A + m_B} (-v_A)$$

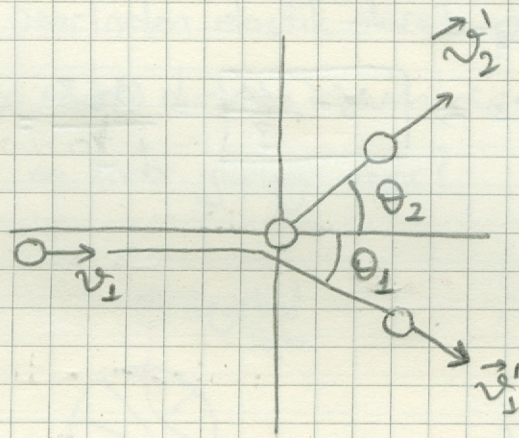
$$= \left(\frac{2m_A - m_B + m_A}{m_A + m_B}\right) v_A$$

$$= \frac{3m_A - m_B}{m_A + m_B} v_A = \frac{9m_B - m_B}{4m_B} v_A = \frac{8}{4} v_A = 2v_A = 11{,}878\ \text{m/s}$$

$$\cancel{m_B} g h = \frac{1}{2} \cancel{m_B} v_B'^2$$

$$h = \frac{v_B'^2}{2g} = \frac{(11{,}878)^2}{2(9{,}8)} = 7{,}19\,\text{m} \approx 7{,}2\,\text{m}$$

Örnek 22. Şekilde 1. bilardo topu 2,2 m/s'lik bir süratle giderken duran özdeş bir 2. bilardo topuyla çarpışıyor. Çarpışmadan sonra 2. top, 1,1 m/s'lik bir süratle ve $\theta_2 = 60°$'lik bir açıyla hareket ediyor. Çarpışmadan sonra, 1. topun hızının (a) büyüklüğü ve (b) yönü nedir? (c) Verilenler, elastik mi yoksa inelastik bir çarpışma için midir?



Çözüm

$$P_x^{(önce)} = P_x^{(sonra)} \qquad P_y^{(önce)} = P_y^{(sonra)}$$

$$\cancel{m} v_1 = \cancel{m} v_1' \cos\theta_1 + \cancel{m} v_2' \cos\theta_2 \qquad 0 = -\cancel{m} v_1' \sin\theta_1 + \cancel{m} v_2' \sin\theta_2$$

$$v_1 = v_1' \cos\theta_1 + v_2' \cos\theta_2 \qquad v_1' = \frac{v_2' \sin\theta_2}{\sin\theta_1}$$

$$v_1 = v_1' \cos\theta_1 + v_2' \cos\theta_2$$

$$v_1 = v_2' \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1} \cos\theta_1 + v_2' \cos\theta_2$$

$$v_1 - v_2' \cos\theta_2 = v_2' \cot\theta_1 \sin\theta_2$$

$$\tan\theta_1 = \frac{v_2' \sin\theta_2}{v_1 - v_2' \cos\theta_2} = \frac{(1,1)\sin 60}{2,2 - (1,1)(\cos 60)}$$

$$\tan\theta_1 = 0,577 \; ; \; \boxed{\theta_1 = 30°}$$

b)

$$v_1' = \frac{v_2' \sin\theta_2}{\sin\theta_1} = \frac{(1,1)\sin 60}{\sin 30} = 1,90\ m/s$$

c) $\frac{1}{2}\cancel{m}v_1^2 = \frac{1}{2}\cancel{m}v_1'^2 + \frac{1}{2}\cancel{m}v_2'^2$

$$v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2$$

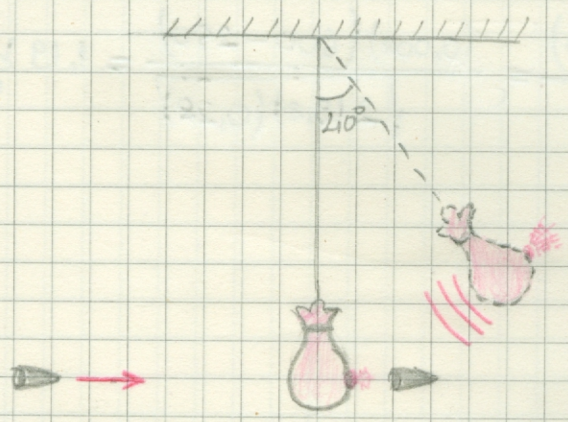
$$(2,2)^2 = (1,9)^2 + (1,1)^2$$

$$4,84 = 3,61 + 1,21$$

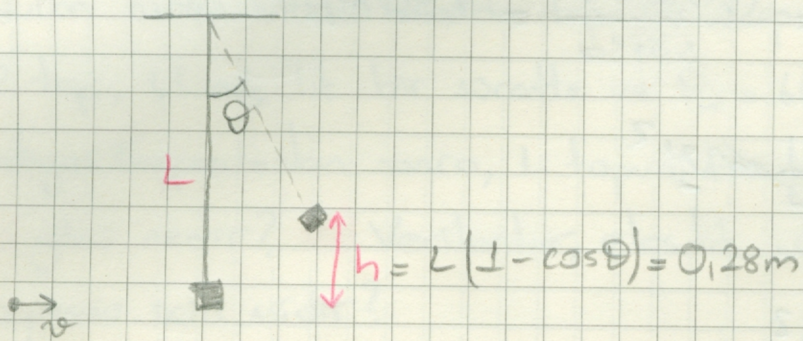
$4,84 \approx 4,82$ Momentum ve Kinetik Enerji korunduğu için çarpışma elastik'tir.

Örnek 23. Küçük bir kum torbası $L = 1,2m$ uzunluğundaki iple tavana asılmıştır. Yatay doğrultuda $v_0 = 600\ m/s$ hızıyla gelen $m = 8$ gr kütleli bir mermi torbayı delerek $v = 250 m/s$ hızla torbayı terk eder (şekildeki gibi). Kum torbası maksimum $\theta = 40°$ yükselirse kütlesi nedir?

[Kaynak: Temel Fizik Fishbone, Bölüm 8]



Çözüm



$$m_{mermi} v_0 = M_T v_T + m_m v$$

$$v_T = \frac{m_m (v_0 - v)}{M_T}$$

$$\frac{1}{2} \cancel{M_T} v_T^2 = \cancel{M_T} g h$$

$$v_T^2 = 2gh$$

$$\frac{m_m^2 (v_0 - v)^2}{M_T^2} = 2gh$$

$$M_T = \frac{m_m (v_0 - v)}{\sqrt{2gh}} = \frac{(0{,}008)(600-250)}{\sqrt{2(9{,}8)(0{,}28)}} = 1{,}19 \text{ kg}$$

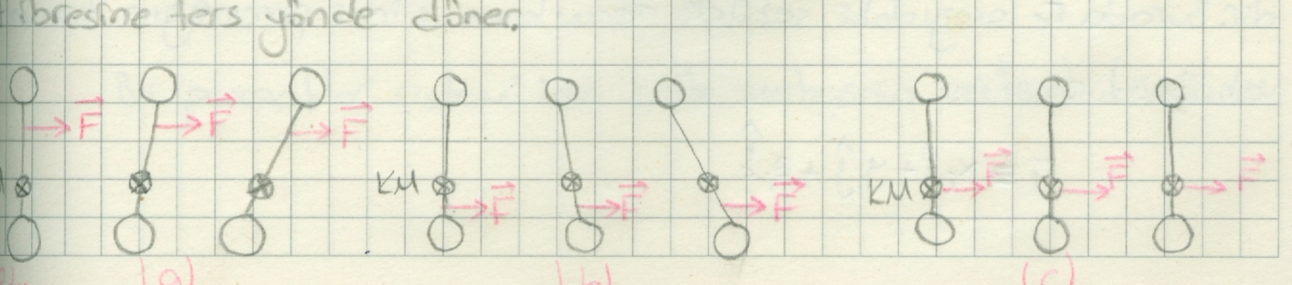
8.8. Kütle Merkezi

Bu kesimde mekanik bir sistemin bütününün hareketini sistemin tle merkezi olarak adlandırılan özel bir nokta yardımıyla açıklaya- ğız. Mekanik sistem bir kap içindeki atomlar gibi bir parçacıklar temi veya havada takla atan jimnastikçi gibi büyük bir cisim ola- ir. Mekanik sistemin, sanki bütün kütlesinin kütle merkezinde ğunlaşmış gibi hareket ettiğini göreceğiz. Dahası sisteme etkiyen oplam dış kuvvet $(\sum \vec{F}_{dış})$ ve sistemin toplam kütlesi M ise, kütle erkezi;

$$\vec{a} = \frac{\sum \vec{F}_{dış}}{M}$$

vmesiyle hareket eder. Yani sistem sanki dış kuvvet kütle merkezine rleşmiş M kütleli tek bir parçacığa uygulanıyormuş gibi hareket der.

Hafif katı bir çubukla bağlanmış parçacık çiftinden ibaret r sistemi ele alalım (Bkz Şekil 8.41). Sistemin kütlesini, kütle merkezinin ri sistemin ortalama konumu olarak düşünebiliriz. Kütle merkezi parça- ıkları bağlayan bir çizgi üzerinde bir yerde ve büyük kütleye daha kındır. Eğer tek bir kuvvet çubuk üzerinde küçük kütleye yakın r noktaya uygulanırsa sistem saat ibresi yönünde döner. Kuvvet çu- k üzerinde büyük kütleye yakın bir noktaya uygulanırsa sistem at ibresine ters yönde döner.

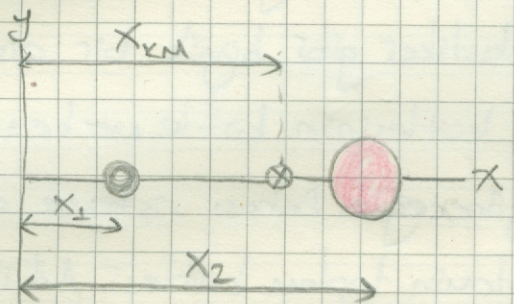


(a) (b) (c)

Örneğin Şekil 8.5'teki sistemin kütle merkezi

$$x_{KM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

olarak tanımlanır.



Şekil 8.5. x-ekseni üzerindeki iki parçacığın kütle merkezi, iki parçacık arasında büyük kütleye daha yakın olan x_{KM} noktasındadır.

Üç boyutlu çok parçacıklı sistemin kütle merkezinin koordinat

$$x_{KM} = \sum_i \frac{m_i x_i}{M}, \quad y_{KM} = \sum_i \frac{m_i y_i}{M}, \quad z_{KM} = \sum_i \frac{m_i z_i}{M}$$

Burada M toplam kütledir ve $M = \sum_i m_i$'dir.

Kütle merkezinin yeri de $\vec{r}_{KM}$ konum vektörü ile gösterilir. Buna göre;

$$\vec{r}_{KM} = x_{KM}\hat{i} + y_{KM}\hat{j} + z_{KM}\hat{k}$$

$$\vec{r}_{KM} = \frac{\sum_i m_i x_i \hat{i} + \sum_i m_i y_i \hat{j} + \sum_i m_i z_i \hat{k}}{M}$$

$$\vec{r}_{KM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M}$$

dir. Burada $\vec{r}_i$ aşağıdaki şekilde tanımlanan i'inci parçacığın konum vektörüdür.

$$r_i \equiv x_i\hat{i} + y_i\hat{j} + z_i\hat{k}$$

Katı bir cismin kütle merkezini bulmak oldukça zor olmamakla birlikte, tartıştığımız temel düşünce uygulanabilir. Genel katı bir cismi Şekil 8.6'daki gibi çok sayıda parçacıklar sistemi olarak adlandırabiliriz. Böylece kütle merkezinin x-koordinatı;

$$x_{KM} \approx \frac{\sum_i x_i \Delta m_i}{M}$$

$$x_{KM} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{\sum_i x_i \Delta m_i}{M} = \frac{1}{M}\int x\,dm$$

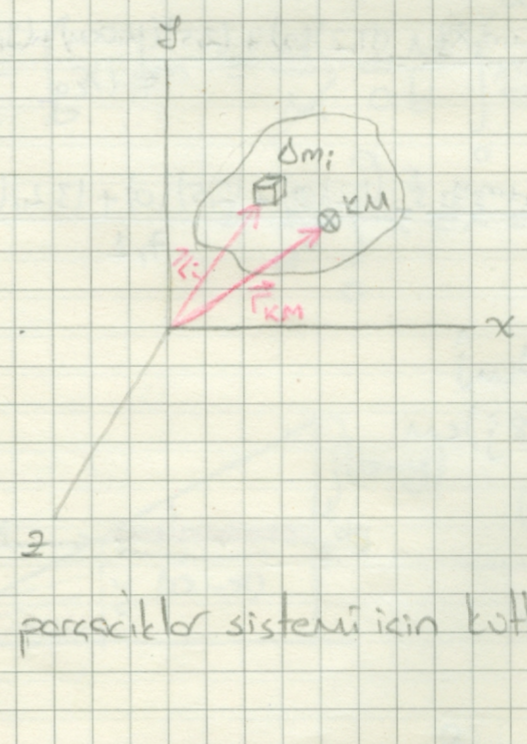
Benzer biçimde y_{KM} ve z_{KM} için aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$y_{KM} = \frac{1}{M}\int y\,dm \quad , \quad z_{KM} = \frac{1}{M}\int z\,dm$$

Katı bir cismin kütle merkezinin vektörel konumunu da;

$$\vec{r}_{KM} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\,dm$$

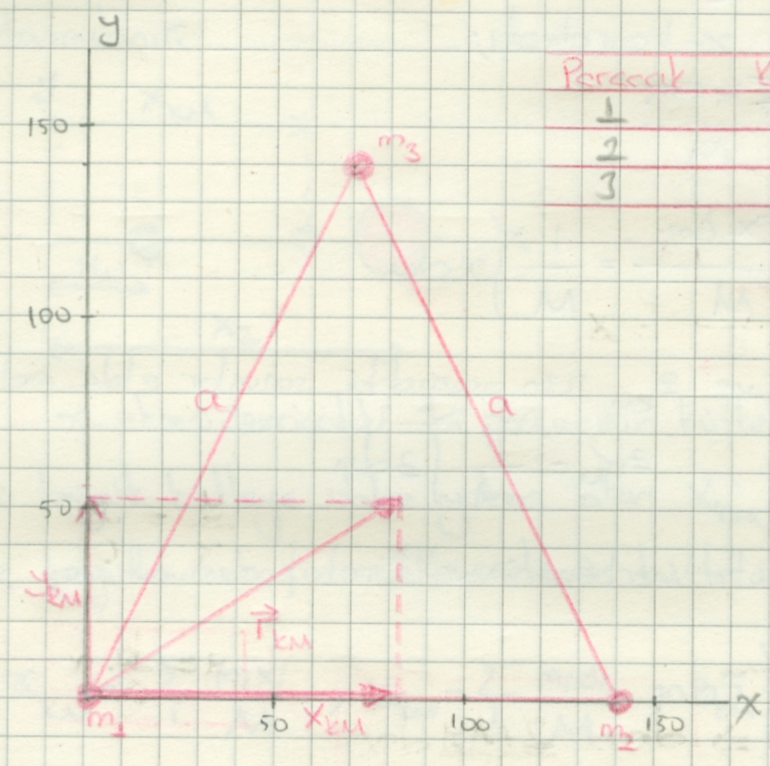
şeklinde yazabiliriz.



Şekil 8.6. Bir parçacıklar sistemi için kütle merkezinin vektörel konumu

(33)

Örnek: Kütleleri $m_1 = 1{,}2\ kg$, $m_2 = 2{,}5\ kg$ ve $m_3 = 3{,}4\ kg$ olan üç parçacık kenar uzunluğu $a = 140\ cm$ olan bir eşkenar üçgen oluşturmaktadır. Bu sis- temin kütle merkezi neredesdir?



Parçacık	Kütle (kg)	x (cm)	y (cm)
1	1,2	0	0
2	2,5	140	0
3	3,4	70	120

Çözüm

$$x_{KM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{3} m_i x_i = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{M} = \frac{(1{,}2)(0) + (2{,}5)(140\,cm) + (3{,}4)(70\,cm)}{7{,}1\ kg} = 8$$

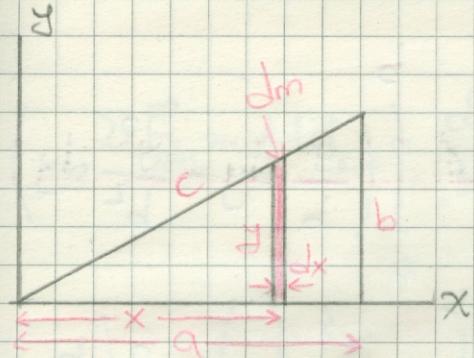
$$y_{KM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{3} m_i y_i = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{M} = \frac{(1{,}2)(0) + (2{,}5)(0) + (3{,}4)(120\,cm)}{7{,}1} = 58c$$

$$\vec{r}_{KM} = x_{KM}\hat{i} + y_{KM}\hat{j}$$

$$\vec{r}_{KM} = (83\hat{i} + 58\hat{j})\,cm$$

......../......../........

Örnek : Şekildeki dik üçgenin kütlesi M'dir. Cismin birim alan başına kütlesinin sabit olduğunu göz önüne alarak kütle merkezinin koordinatlarını bulunuz.



Çözüm

$$\frac{ab}{2} \qquad M$$

$$y\,dx \qquad dm$$

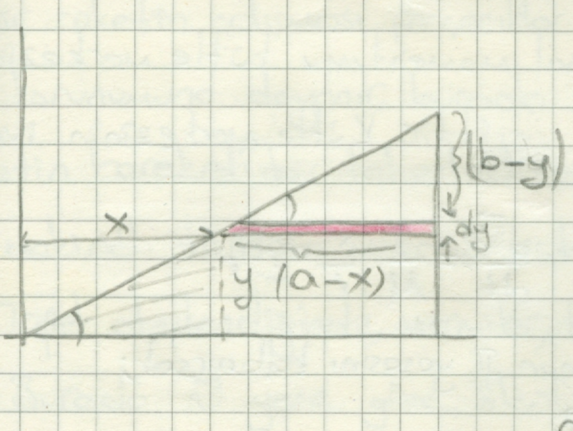
$$\frac{ab}{2} dm = M y\,dx \Rightarrow \boxed{dm = \frac{2My}{ab} dx}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$$

$$\boxed{y = \frac{b}{a} x}$$

$$x_{km} = \frac{1}{M} \int x\,dm = \frac{1}{\cancel{M}} \frac{2\cancel{M}}{ab} \int_0^a xy\,dx = \frac{2}{a\cancel{b}} \int_0^a x\left(\frac{\cancel{b}}{a}\right) x\,dx$$

$$= \frac{2}{a^2} \int_0^a x^2\,dx = \frac{2}{a^2} \left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a = \boxed{\frac{2}{3} a}$$



$$\frac{ab}{2} \qquad M$$

$$(a-x)\,dy \qquad dM$$

$$\boxed{dM = \frac{2M(a-x)}{ab} dy}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y} \Rightarrow \boxed{x = \frac{a}{b} y}$$

$$dm = \frac{2M}{ab}\left(a - \frac{a}{b}y\right)dy$$

$$= 2M\left(\frac{1}{b} - \frac{y}{b^2}\right)dy$$

$$y_{KM} = \frac{1}{M}\int y\,dm = \frac{1}{\cancel{M}}(2\cancel{M})\int_0^b\left(\frac{y}{b}dy - \frac{y^2}{b^2}dy\right)$$

$$= 2\left(\frac{y^2}{2b}\Big|_0^b - \frac{y^3}{3b^2}\Big|_0^b\right) = 2\left(\frac{b}{2} - \frac{b}{3}\right)$$

$$y_{KM} = 2\left(\frac{b}{6}\right) = \boxed{\frac{1}{3}b}$$

89. Kütle Merkezinin Hareketi

Kütle merkezinin hızı

$$\vec{v}_{KM} = \frac{d\vec{r}_{KM}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\sum_i m_i\vec{v}_i}{M}$$

burada $\vec{v}_i$, i'nci parçacığın hızıdır. Bu eşitlik yeniden düzenlenerek;

$$M\vec{v}_{KM} = \sum_i m_i\vec{v}_i = \sum_i \vec{P}_i = \vec{P}_{Top} \quad (v_i,\ i'nci\ parçacığın\ hızı)$$

elde edilir. O halde sistemin doğrusal momentumu kütle merkezinin hızı ile toplam kütlenin çarpımına eşittir. Kütle merkezinin ivmesi

$$\vec{a}_{KM} = \frac{d\vec{v}_{KM}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{a}_i$$

Bu ifadeyi yeniden düzenler ve Newton'un II. yasasını kullanırsak;

$$M\vec{a}_{KM} = \sum_i m_i\vec{a}_i = \sum_i \vec{F}_i$$

...uruz. Burada $\vec{F_i}$, i'nci parçacığın üzerindeki kuvvettir. Yukarıdaki ...ağıntıda bütün iç kuvvetleri toplayınca kuvvet çiftleri birbirini ...ok eder ve sistem üzerindeki net kuvvet sadece dış kuvvet dur. ...öylece;

$$\sum \vec{F}_{dış} = M\vec{a}_{KM} = \frac{d\vec{P}_{TOP}}{dt}$$

...ur.

Bir cismi veya parçacıklar topluluğu dış kuvvetlerin etkisinde ...olduğunda, kütle merkezi, sanki tüm kütle bu noktada yoğunlaşmış ...sistem üstündeki bütün dış kuvvetlerin toplamı olan net kuvvet ...kütle merkezi noktasına tatbik edilmiş gibi hareket eder.

Eğer bileşke dış kuvvet sıfırsa;

$$\frac{d\vec{P}_{TOP}}{dt} = M\vec{a}_{KM} = 0$$

...ve buradan,

$$\vec{P}_{TOP} = M\vec{v}_{KM} = sabit \quad (\sum \vec{F}_{dış} = 0 \text{ iken})$$

...abilir.

...10. Roket Hareketi

Bir roketin çalışması parçacıklar sisteminde olduğu üzere, momen...umun korunumuna dayanır, burada sistem roket ve yaktığı yakıttır. ...r roketin hareketi bir tekerlekli araba ile onun üstüne monte ...ilen makinalı tüfeğin mekanik sistemi incelenerek daha iyi anlaşı...labilir. Tüfek ateşlendiğinde, mermiler, bir doğrultuda $m\vec{v}$ momentumunu ...azanır. Burada $\vec{v}$ yere göre ölçülür. Ateşlenen her mermi için tüfek ...tekerlekli sistem zıt yönde dengeleyici bir momentum kazanır. Yani merminin tüfek üzerindeki geri tepme kuvveti tüfek ve sistemi ivmelendirir. Saniyede n tane mermi ateşlenirse tüfek üzerindeki ortalama kuvvet;

$$\vec{F}_{ort} = nm\vec{v}$$

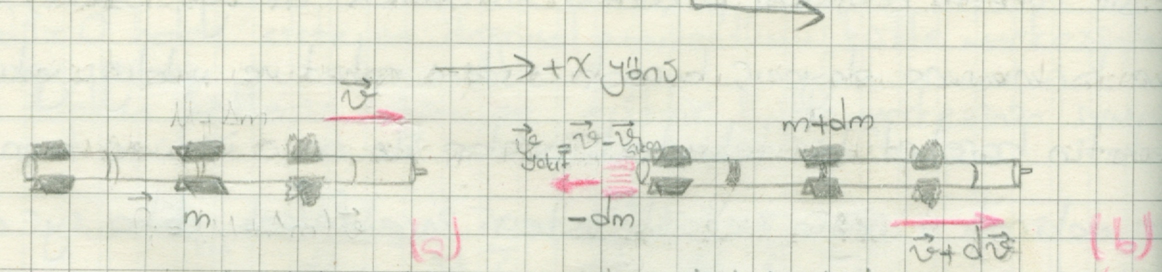
olur.

Uzayın derinliklerinde yerçekimi ve hava direnci olmayan bir ortamda ateşlenen bir roketi ele alalım. Roketin kütlesi m olsun. Roket yakıtını tükettikçe m değişecektir. Roketin t anında momentumu $P_1 = mv$'dir. Δt zaman aralığında roketin kütlesi dm kadar değişir. Roketin kütlesi zamanla azaldığına göre dm negatif bir niceliktir. Yani Δt zaman aralığında pozitif $-dm$ kütlesi yakılıp dışarı atılır. Dışarı atılan yakıtın rokete göre bağıl hızı v_{egz} olsun; yakıt roketin ilerlediği yöne zıt yönde dışarı atılmaktadır. Bu nedenle yakıtın hızı $-v_{egz}$ olacaktır. Koordinat sistemimizde yanmış yakıtımızın x-hızı;

$$v_{yakıt} = v + (-v_{egz}) = v - v_{egz}$$

olacaktır ve atılan kütle $(-dm)$'nin momentumun x-bileşeni;

$$(-dm)v_{yakıt} = (-dm)(v - v_{egz})$$



Şekil 8.7. Uzayın derinliklerinde yerçekimsiz ortamda ilerleyen roket. (a) t[anında] roketin kütlesi m ve hızın x-bileşeni v. (b) T+dt anında, roketin kütlesi m+dm (dm negatif olmak zorundadır) ve hızın x-bileşeni v+dv'dir. Yanmış yakıtın

...zının x-bileşeni $v_{yakıt} = v - v_{egzoz}$ ve kütlesi $-dm$'dir. (dm negatif ...duğundan, dm'yi pozitif yapmak için negatif işareti konulmalıdır.

...il 8.7, dt zaman aralığından sonra roketin ve içindeki kullanıl...mış yakıtın x-hızının v'den $v+dv$'ye çıkacağını, kütlesinin ise ...den $m+dm$'e ineceğini (dm'nin negatif olduğunu hatırlayın) göste...r. Roketin bu andaki momentumu;

$$(m+dm)(v+dv)$$

...acaktır. Roket ve yakılan yakıtın $t+dt$ anında momentumu P_2'nin ...plam x-bileşeni;

$$P_2 = (m+dm)(v+dv) + (-dm)(v - v_{egz})$$

Yaptığımız ilk varsayımda roket ve yakıt bir yalıtılmış (izole) ...temdir. Demek ki, toplam momentum korunmakta ve sistemin ...plam momentumunun x-bileşeni t ve $t+dt$ anlarında aynı değerleri ...aktadır; yani, $P_1 = P_2$. O halde,

$$mv = (m+dm)(v+dv) + (-dm)(v - v_{egz})$$

...ifadeyi basitleştirelim;

$$m\,dv = -dm\,v_{egz.} - dm\,dv$$

...rada $(-dm\,dv)$ terimi göz ardı edilebilir, çünkü diğer büyüklerden ...daha küçük olan iki küçük niceliğin çarpımıdır. Bu terimi ihmal ...ip, eşitliği dt'ye bölelim ve eşitliği yeniden düzenleyelim;

$$m\frac{dv}{dt} = -v_{egz}\frac{dm}{dt}$$

...rada dv/dt roketin ivmesidir. Bu denklemin sol tarafı (kütle çarpı ...) net kuvvet F'ye veya rokete uygulanan itme kuvvetine eşittir,

$$F = -v_{egz}\frac{dm}{dt}$$

Bu itme kuvveti, hem tüketilen yakıtın rokete göre göreceli hızı v_{egz} hem de zaman birimi başına tüketilen yakıtın kütlesi $-dm/dt$ ile doğru orantılıdır. (dm/dt'nin negatif olduğunu hatırl... bu oran roket kütlesindeki değişim miktarıdır, o halde F po... tiftir.)

Roketin ivmesinin x-bileşeni;

$$a = \frac{dv}{dt} = -\frac{v_{egz}}{m}\frac{dm}{dt}$$

v_{egz} pozitif olduğu için bu oran pozitiftir (v_{egz}'un egzos sürati olduğunu hatırlayalım) ve dm/dt negatiftir. Yakıt tüketildikçe roket kütlesi m sürekli olarak azalacaktır. Eğer v_{egz} ve dm/dt sabitse, roket bütün yakıtını tüketene kadar ivmesi artmaya devam edece...

t=0 anında kütle m_0 ve hız v_0 ise

$$\int_{v_0}^{v} dv = -\int_{m_0}^{m} v_{egz}\frac{dm}{m} = -v_{egz}\int_{m_0}^{m}\frac{dm}{m}$$

$$v - v_0 = -v_{egz}\ln\left(\frac{m}{m_0}\right)$$

olur. m_0/m oranı, ilk kütlenin yakıtı kullandıktan sonraki kütle... bölümüdür. Uzay araçlarında bu oranın maksimum sürat kazanımı için mümkün olduğu kadar büyük olmasına çalışılır; bunun anlamı roketin kalkıştaki kütlesinin taşıdığı yakıtın kütlesine yakın olma... Bu durumda, roketin son hızının büyüklüğü, gazın dışarı atılma... v_{egz}'dan göreceli olarak çok daha büyük olacaktır; yani $\ln\left(\frac{m_0}{m}\right) > 1$,

$\frac{m_0}{m} > e = 2,718281...$

Roketi ileri iten etki (itici kuvvet) çıkan egzoz gazları tarafından rokete aktarılan kuvvete eşittir. Bu kuvvet aşağıdaki gibidir,

$$\text{itici kuvvet} = m\frac{dv}{dt} = \left| v_{egz}\frac{dm}{dt} \right| .$$

...halde itici kuvvet, çıkan gaz hızı ve kütle değişme hızı (yanma ...ide denir) arttıkça artar.

Örnek . (a) İlk kütlesi $m_0 = 850$ kg olan bir roket, $\frac{dm}{dt} = 2,3$ kg/s ...e yakıt tüketmektedir. Roketin motoruna göre gazların çıkış ...ızı 2800 m/s'dir. Motorun rokete sağladığı itici kuvvet nedir? ...Roketin başlangıç ivmesi nedir?

Çözüm

...)
$$F^{(itici)} = v_{egz}\frac{dm}{dt} = (2800)(2,3) = 6440 \text{ N}$$

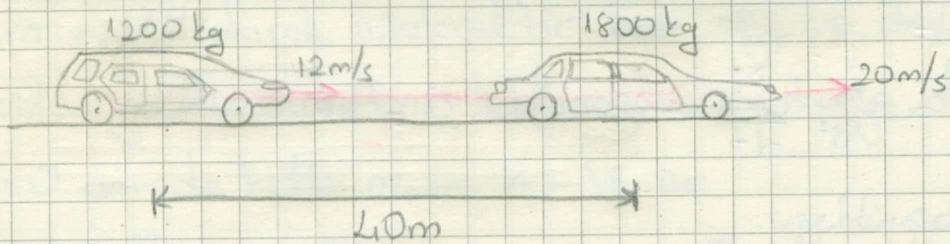
...) ivmenin büyüklüğü

$$F^{(itici)} = ma$$

...ağıntısından bulunabilir. Burada m roketin herhangi bir andaki ...ütlesidir. Yakıt tüketildikçe m azalırken a artar. a'nın ilk ...değerini aradığımızdan kütlenin ilk değeri m_0 kullanmalıyız.

$$a = \frac{F}{m_i} = \frac{6440}{850} = 7,6 \ m/s^2$$

Örnek . Kütlesi 1200 kg olan bir station vagon araba, düz bir otoyolda 12 m/s hızla ilerlemektedir. Kütlesi 1800 kg olan diğer bir araç 20 m/s hızla ilerlerken, kütle merkezi station vagonun kütle merkezinin 40 m önünde bulunmaktadır (Aşağıdaki şekil). (a) Bu iki otomobilden oluşan sistemin kütle merkezinin konumunu bulunuz. (b) Sistemin toplam momentumunun büyüklüğünü eldeki verilere göre bulunuz. (c) Sistemin kütle merkezinin süratini bulunuz. (d) Sistemin toplam momentumunu, kütle merkezinin süratini kullanarak bulunuz. Cevabınızı (b) şıkkıyla karşılaştırınız.



Çözüm

(a)
$$x_{KM} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1+m_2} = \frac{1200(0) + 1800(40)}{3000} = 24 m$$

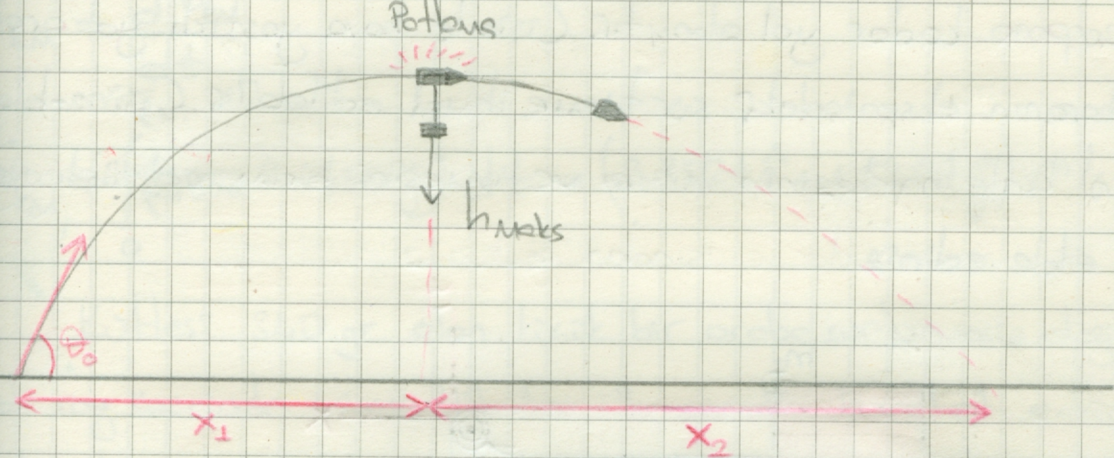
(b)
$$P = m_1 v_1 + m_2 v_2 = 1200(12) + 1800(20) = 5{,}04 \times 10^4 \text{ kg m/s}$$

(c)
$$v_{KM} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1+m_2} = \frac{5{,}04\times 10^4}{3000} = 16{,}8 \text{ m/s}$$

(d)
$$P = M\, v_{KM} = (3000)(16{,}8) = 5{,}04\times 10^4 \text{ kgm/s}$$

......../......../........

Örnek . Bir top mermisi, yatayla $\theta_0 = 60°$'lik açıyla ve 20 m/s'lik bir $\vec{v}_0$ ilk hızıyla atılıyor. Mermi, en yüksek noktadayken, patlayarak eşit kütleli iki parçaya bölünüyor (şekildeki gibi). Patlamadan hemen sonraki sürati sıfır olan bir parça, dik olarak düşüyor. Bölgenin düz bir yüzeye sahip olduğunu ve hava direncinin olmadığını varsayarak, ikinci parçanın ne kadar uzağa düştüğünü bulunuz.



Çözüm.

$$h_{maks} = \frac{v_0^2 \sin^2\theta_0}{2g} = \frac{20^2 (\sin 60)^2}{2(9,8)} = 15,306 \text{ m}$$

$$h_{maks} = \frac{1}{2} g t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2 h_{maks}}{g}} = \sqrt{\frac{2(15,306)}{9,8}} = 1,76 \text{ s}$$

$$x_1 = v_0 \cos\theta_0 \, t = 20 \cos 60 (1,76) = 17,6 \text{ m}$$

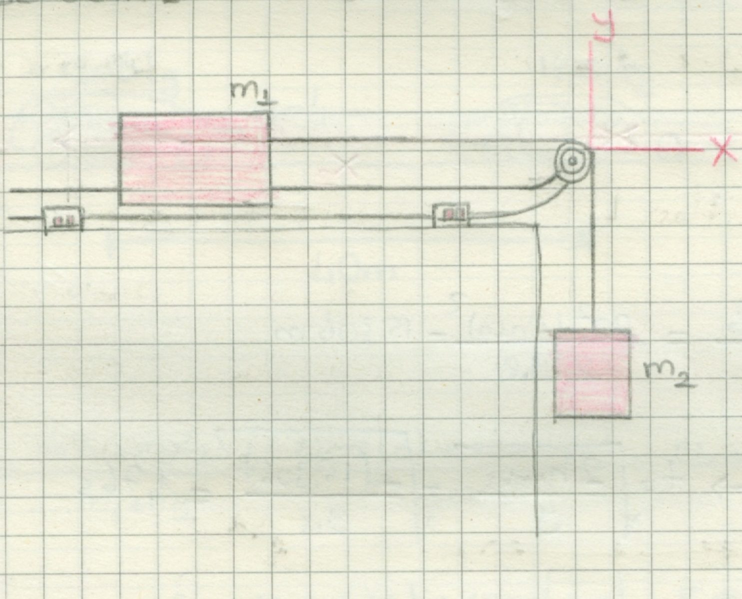
$$P_{ilk}^{(\text{Patlamadan önce})} = P_{son}^{(\text{Patlamadan sonra})}$$

$$m v_0 \cos\theta_0 = \frac{m}{2} v_0' \Rightarrow v_0' = 2 v_0 \cos\theta = 20 \text{ m/s}$$

$$x_2 = v_0' t = (20)(1,76) = 35,2 \text{ m}$$

$$x = x_1 + x_2 = 17,6 + 35,2 = 52,8 \text{ m}$$

Örnek . Şekilde asılı bir bloğa bir sicimle bağlı olan, hava yastıklı bir yoldaki cismi göstermektedir. Cismin kütlesi $m_1 = 0,6$ ve merkezinin xy koordinatları $(-0,500 m, 0 m)$'dir; blok ise $m_2 = 0,400$ kg kütleli olup merkezinin xy koordinatları $(0, -0,100 m)$ dir. Sicimin ve makaranın kütlesi ihmal edilebilir. Cisim hareketsiz haldeyken serbest bırakılmış ve hem cisim hem de blok, cisim makaraya çarpana kadar yol almıştır. Cisimle hava yastıklı yol arasında ve makaranın eksenindeki sürtünme ihmal edilebilir. Cisim-blok sisteminin kütle merkezinin hızını ve ivmesini birim vektörler gösterimiyle elde ediniz.



Çözüm

Newton'un II. kanunundan m_1 ve m_2 kütlelerinin ivmesi

$$a = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2} = \frac{(0,400)(9,8)}{(0,600+0,400)} = 3,92 \ m/s^2$$

$$\vec{a}_1 = +3,92\hat{\imath}$$

$$\vec{a}_2 = -3,92\hat{\jmath}$$

$$a_{KM}^{(x)} = \frac{m_1 a_1}{m_1+m_2} = \frac{0{,}600(3{,}92)}{1} = 2{,}352\ m/s^2$$

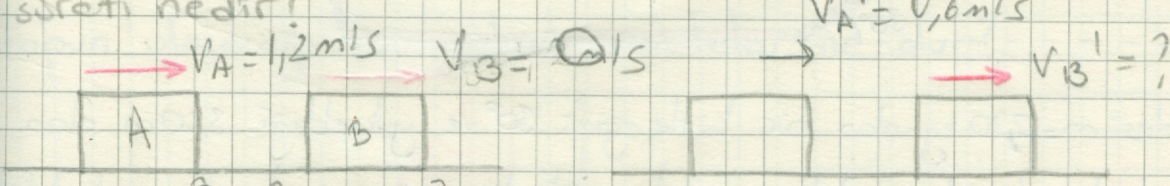
$$a_{KM}^{(y)} = \frac{m_2 a_2}{m_1+m_2} = \frac{0{,}400(-3{,}92)}{1} = -1{,}568\ m/s^2$$

$$\vec{a}_{KM} = (2{,}352\,\hat{i} - 1{,}568\,\hat{j})\ m/s^2$$

$$\vec{a}_{KM} = \frac{d\vec{v}_{KM}}{dt}$$

$$\vec{v}_{KM} = \int_0^t (2{,}352\,\hat{i} - 1{,}568\,\hat{j})\,dt = (2{,}352t\,\hat{i} - 1{,}568t\,\hat{j})\ m/s$$

rnek . Kütlesi 340 gr olan küçük bir araba, sürtünmesiz doğrusal r havalı ray üzerinde 1,2 m/s'lik bir ilk süratle hareket ederken langıçta duran ve kütlesi bilinmeyen diğer bir araçla elastik rpışma yapıyor. Çarpışmadan sonra, ilk araç aynı yönde 0,66 m/s ile reketine devam ediyor. (a) İkinci aracın kütlesi nedir? (b) Çarpışmadan sonraki sürati nedir? (c) İki araçlı bu sistemin kütle merkezinin sürati nedir?



$m_A = 340^0$ $m_B = ?$

Çözüm

$$v_A' = \left(\frac{m_A - m_B}{m_A+m_B}\right)v_A + \left(\frac{2m_B}{m_A+m_B}\right)v_B \qquad v_A - v_B = -(v_A' - v_B')$$

$$v_B' = \left(\frac{2m_A}{m_A+m_B}\right)v_A + \left(\frac{m_B - m_A}{m_A+m_B}\right)v_B$$

(a) $v'_A = \left(\dfrac{m_A - m_B}{m_A + m_B}\right) v_A$

$$\frac{v'_A}{v_A} = \left(\frac{m_A - m_B}{m_A + m_B}\right) \Rightarrow \frac{0,66}{1,20} = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B}$$

$$m_A - 0,55\, m_A = m_B + 0,55\, m_B$$

$$0,45\, m_A = 1,55\, m_B$$

$$m_B = \frac{0,45}{1,55} m_A = 98,70 \text{ gram}$$

(b) $v'_B = \left(\dfrac{2m_A}{m_A + m_B}\right) v_A$

$$v'_B = \left(\frac{2(340)}{340 + 98,70}\right) 1,2$$

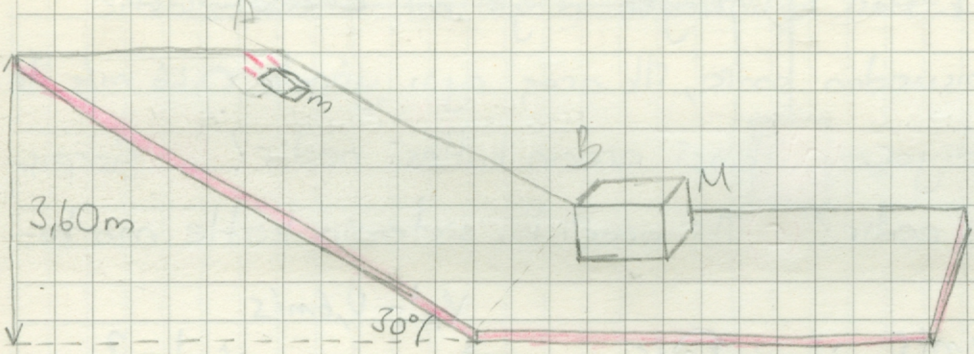
$$v'_B = 1,86 \text{ m/s}$$

(c) $(M_1 + M_2)\, v_{KM} = P$

$$v_{KM} = \frac{m_A v_A + m_B \cancel{v_B}^{\,0}}{m_A + m_B}$$

$$\boxed{v_{KM} = 0,930 \text{ m/s}}$$

Örnek :



Kütlesi m = 2,20 kg olan bir kütle, eğimi 30° ve yüksekliği 3,60 m olan bir eğik düzlemden kaymakta ve taban düzlemi üzerinde durgun haldeki M = 7 kg'lık blokla (şekildeki gibi) çarpışmaktadır. (Eğimin dibinde yumuşak bir geçiş olduğunu varsayınız.) Çarpışma esnekse ve sürtünme yok sayılabilirse (a) blokların çarpışma sonrasındaki süratlerini ve (b) küçük kütlenin eğik düzlemde ne kadar geriye doğru yol alır?

Çözüm

a) $\cancel{m}gh = \frac{1}{2}\cancel{m}v_A^2$

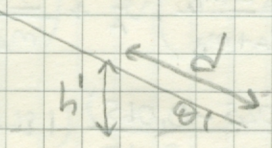
$$v_A = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9,8)(3,60)} = 8,40 \text{ m/s}$$

$$v_A' = \left(\frac{m_A - m_B}{m_A + m_B}\right) v_A = \frac{2,2-7}{2,2+7}(8,4) = -4,382 \text{ m/s}$$

$$v_B' = \left(\frac{2m_A}{m_A + m_B}\right) v_A = \frac{2(2,2)}{(2,2+7)}(8,4) = 4,01 \text{ m/s}$$

b)

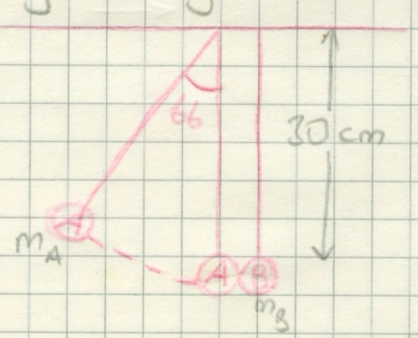
$$\cancel{m}gh' = \frac{1}{2}\cancel{m}v_A'^2$$



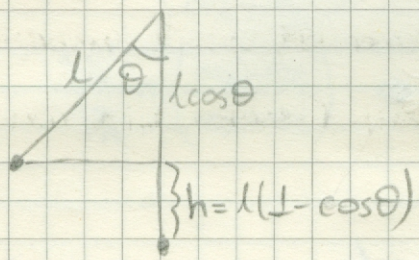
$$h' = \frac{v_A'^2}{2g} = \frac{(-4,382)^2}{2(9,8)} = 0,98 \text{ m}$$

$$d = \frac{h'}{\sin\theta} = \frac{0,98}{\sin 30} = \underline{\underline{1,96 \text{ m}}}$$

Örnek • Kütleleri $m_A = 45$ gr ve $m_B = 65$ gr olan iki top şekilde görüldüğü gibi birer iple tavana asılıdırlar. Hafif top düşeyle 66° açı yapacak şekilde ayrılır ve serbest bırakılır. (a) Hafif topun çarpışmadan hemen önceki hızı nedir? (b) Çarpışma sonrasında her bir topun hızları ne olur? (c) Bu esnek çarpışmadan sonra her topun ulaşacağı en yüksek noktalar ne olur?



Çözüm



(a) $\cancel{m_A} g h = \frac{1}{2} \cancel{m_A} v_A^2$

$$v_A = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gl(1-\cos\theta)}$$

$$v_A = \sqrt{2(9{,}8)(0{,}30)(1-\cos 66)}$$

$$v_A = 1{,}868 \text{ m/s}$$

$v_A = 1{,}868$ m/s ; $v_B = 0$

(b) $v_A' = \left(\frac{m_A - m_B}{m_A + m_B}\right) v_A + \left(\frac{2m_B}{m_A + m_B}\right) v_B$

$$v_A' = \frac{(0{,}045 - 0{,}065)}{0{,}045 + 0{,}065}(1{,}868)$$

$$v_A' = -0{,}34 \text{ m/s}$$

$v_B' = \left(\frac{2m_A}{m_A + m_B}\right) v_A + \left(\frac{m_B - m_A}{m_A + m_B}\right) v_B$

$$v_B' = \frac{2(0{,}045)}{(0{,}045 + 0{,}065)}(1{,}868)$$

$$v_B' = 1{,}53 \text{ m/s}$$

(c)

$$\frac{1}{2} \cancel{m_A} v_A'^2 = \cancel{m_A} g h_A$$

$$h_A = \frac{v_A'^2}{2g} = \frac{(-0{,}34)^2}{2(9{,}8)}$$

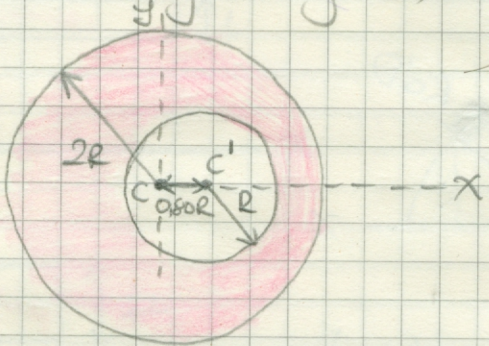
$$h_A = 5{,}9 \times 10^{-3} \text{ m} \approx 6 \text{ mm}$$

$$\frac{1}{2} \cancel{m_B} v_B'^2 = \cancel{m_B} g h_B$$

$$h_B = \frac{v_B'^2}{2g} = \frac{(1{,}53)^2}{2(9{,}8)}$$

$$= 0{,}120 \text{ m}$$

rnek . Yarıçapı 2R olan dairesel bir plakanın içinde R yarıçaplı bir lım kesilerek alınmıştır. Daha küçük çemberin C' merkezi büyük çemberin merkezinden 0,80R uzaktadır (Aşağıdaki şekil). Plakanın KM'nin numu nedir? (İpucu: Çıkarmayı deneyiniz.)



Çözüm

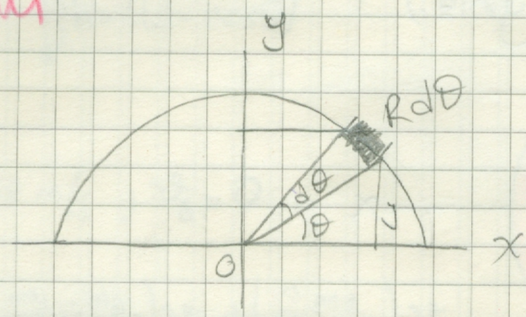
$$x_{KM} = \frac{M_{2R}\,x_{2R} - M_R\,x_R}{M_{2R} - M_R} =$$

$$= \frac{0 - \pi R^2 (0{,}80R)}{\pi(2R)^2 - \pi R^2} = \frac{-\cancel{\pi}(0{,}8)R^3}{3\cancel{\pi}R^2}$$

$$x_{KM} = -\frac{0{,}8}{3}R$$

Örnek. Düzgün ince bir tel yarıçapı r olan bir yarım çember şeklinde bükülmüştür. Kütle merkezinin koordinatlarını tam çemberin merkezindeki orijine göre hesaplayınız.

Çözüm



$x_{km} = 0$ (simetriden dolayı)

$$y_{km} = \frac{1}{M}\int y\,dm$$

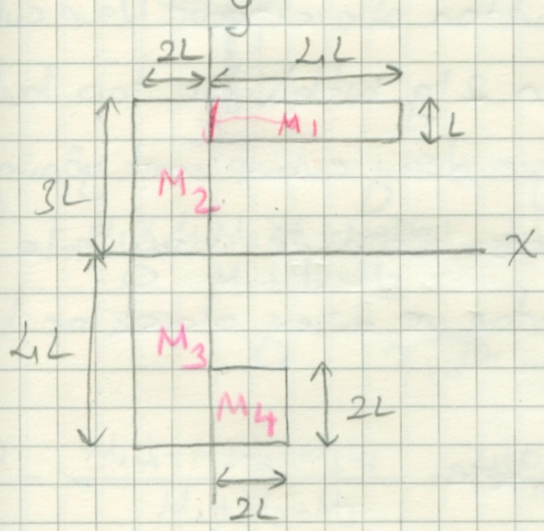
$$= \frac{1}{\cancel{M}}\int (R\sin\theta)\left(\frac{\cancel{M}}{\pi \cancel{R}}\right) R\,d\theta$$

$$= \frac{R}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\theta\,d\theta = -\frac{R}{\pi}\left(\cos\theta\Big|_0^{\pi}\right) = -\frac{R}{\pi}\left(\overbrace{\cos\pi - \cos 0}^{-2}\right)$$

$$= \frac{2R}{\pi}$$

$$\left(x_{km}, y_{km}\right) = \left(0, \frac{2R}{\pi}\right)$$

Örnek: Eğer $L=5cm$ ise şekildeki düzgün plakanın kütle merkezinin (a) x koordinatı ve (b) y koordinatı nedir?



Çözüm

$$\left.\begin{matrix} M_1 = 4L^2, & M_2 = 6L^2 \\ M_3 = 8L^2, & M_4 = 4L^2 \end{matrix}\right\} M_T = 22L^2$$

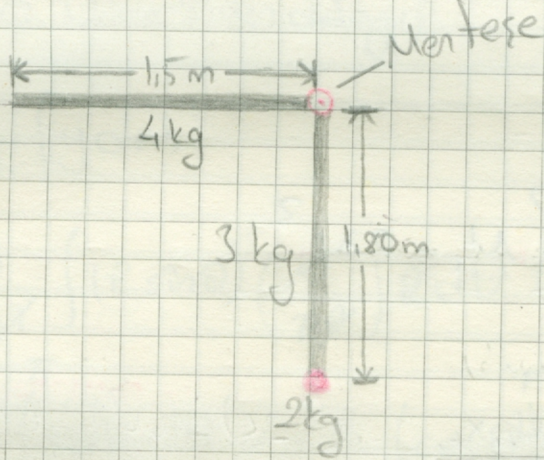
$$x_{KM} = \frac{M_1 x_1 + M_2 x_2 + M_3 x_3 + M_4 x_4}{M_T}$$

$$= \frac{4L^2(2L) + (6L^2)(-L) + (8L^2)(-L) + 4L^2(L)}{22L^2} = -0{,}454\,cm$$

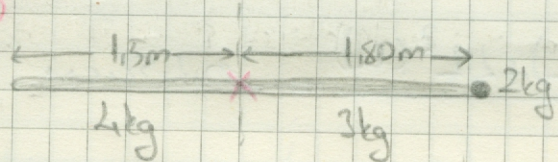
$$y_{KM} = \frac{M_1 y_1 + M_2 y_2 + M_3 y_3 + M_4 y_4}{M_T}$$

$$= \frac{4L^2\left(\frac{5}{2}L\right) + (6L^2)\left(\frac{3L}{2}\right) + (8L^2)(-2L) + (4L^2)(-3L)}{22L^2} = -2{,}045\,cm$$

Örnek. Bir makine parçası 4 kg kütleli ve 1,5 m uzunluğunda düz bir çubuk ve bu çubuğa dik olarak menteşelenmiş, 3 kg kütleli ve 1,8 m uzunluğunda benzer diğer bir çubuktan oluşmaktadır. Uzun çubuğun bir ucunda, küçük ama yoğun olan 2 kg kütleli bir top bulunmaktadır (bknz aşağıdaki şekil). Eğer düşey çubuk saat yönünün tersine 90° döndürülüp, makine parçası bütünüyle yatay hale getirilirse, parçanın kütle merkezi yatay ve düşey olarak ne kadar hareket eder?



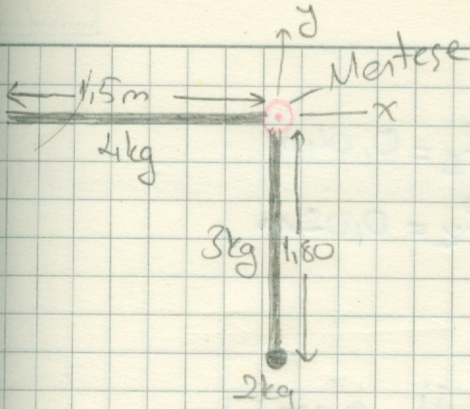
Çözüm



$$x_{KM}^{(i)} = \frac{M_1 x_1 + M_2 x_2 + M_3 x_3}{M_1 + M_2 + M_3} = \frac{(4)(-0{,}750) + (3)(0{,}900) + 2(1{,}80)}{4+3+2}$$

$$x_{KM}^{(i)} = 0{,}366\ m$$

$$y_{KM}^{(i)} = 0$$



$$x_{KM}^{(son)} = \frac{M_1X_1 + M_2X_2 + M_3X_3}{M_1+M_2+M_3} = \frac{4(-0,750)+3(0)+2(0)}{4+3+2}$$

$$x_{KM}^{(son)} = -0,333\ m$$

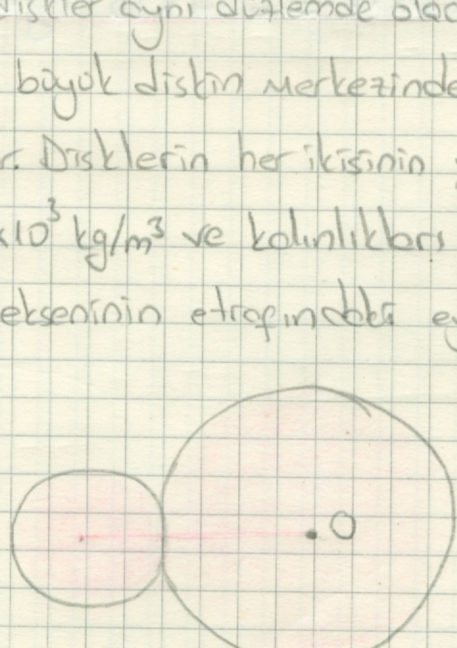
$$y_{KM}^{(son)} = \frac{M_1y_1 + M_2y_2 + M_3y_3}{M_1+M_2+M_3} = \frac{4(0)+3(-0,900)+2(-1,80)}{4+3+2}$$

$$y_{KM}^{(son)} = -0,700\ m$$

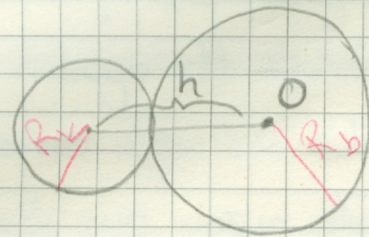
$$y_{KM}^{(son)} - y_{KM}^{(ilk)} = -0,700 - 0 = \boxed{-0,700\ m}$$

$$x_{KM}^{(son)} - x_{KM}^{(ilk)} = -0,333 - (0,366) = -0,699\ m \approx \boxed{-0,700\ m}$$

..nek. Şekilde yarıçapı $R_K = 2cm$ olan küçük bir disk, yarıçapı $R_B = 4cm$ ..n daha büyük bir diske, diskler aynı düzlemde olacak şekilde yapıştırıl-..ş olarak görülüyor. Diskler, büyük diskin merkezinden dik olarak geçen ..sen etrafında dönebiliyorlar. Disklerin her ikisinin yoğunlukları düzgün ..ğılmış olup değeri $1,40 \times 10^3\ kg/m^3$ ve kalınlıkları 5mm'dir. Bu iki ..kten oluşan sistemin O ekseninin etrafındaki eylemsizlik momenti ..dir?



Çözüm



$R_B = 0{,}04m$

$R_K = 0{,}02m$

$$M_B = \pi R_B^2 (z)\, \rho = \pi (0{,}04)^2 (0{,}005)(1{,}40\times10^3) = 0{,}0351 \text{ kg}$$

$$M_K = \pi R_K^2 (z)\, \rho = \pi (0{,}02)^2 (0{,}005)(1{,}40\times10^3) = 8{,}792\times10^{-3} \text{ kg}$$

$$I = \frac{1}{2} M_B R_B^2 + \left(\frac{1}{2} M_K R_K^2 + M_K h^2 \right)$$

$$I = \frac{1}{2} M_B R_B^2 + \frac{1}{2} M_K R_K^2 + M_K (R_K + R_B)^2$$

$$I = \frac{1}{2} M_B R_B^2 + M_K \left(\frac{R_K^2}{2} + (R_K + R_B)^2 \right)$$

$$I = \frac{1}{2}(0{,}0351)(0{,}04)^2 + (8{,}792\times10^{-3})\left(\frac{(0{,}02)^2}{2} + (0{,}02+0{,}04)^2 \right)$$

$$I = 2{,}8\times10^{-5} + 3{,}340\times10^{-5} = 6{,}14\times10^{5} \text{ kgm}^2$$