BÖLÜM

V

LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ bilinmeyenleri, a_{ij} ve b_i ler reel sabitleri göstermek üzere n bilinmeyenli bir lineer denklem sistemi,

$$
\begin{aligned}
&a_{11}.x_1+a_{12}.x_2+\cdots+a_{1n}.x_n=b_1\\
&a_{21}.x_1+a_{22}.x_2+\cdots+a_{2n}.x_n=b_2\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\\
&a_{m1}.x_1+a_{m2}.x_2+\cdots+a_{mn}.x_n=b_m
\end{aligned}
$$

şeklinde gösterilebilir. Bu denklem sistemini matrisel olarak yazarsak,

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A}
\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{X}
=
\underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{B}
\quad ; \quad A.X=B
$$

elde edilir. Burada A denklem sisteminin katsayılar matrisi, X bilinmeyenler vektörü,B ise sabitlerin vektörüdür. Sistemin lineerliği bilinmeyenlerin üslerinin 0 veya 1 olmasıdır. Lineer denklem sistemlerinde bilinmeyenlerin üssü 0 veya1 den farklı olamaz.
Örneğin $x + 2y^2 - z = 5$ denklemi lineer değildir.
$\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 7$ denklemi de lineer değildir,fakat $\sqrt{x} = u$ ve $\sqrt{y} = v$ dönüşümü yapılarak u ve v ye göre lineer hale getirilebilir.
A.X=B ifadesinde sistem ;

$B = \underline{0}$ olursa homojen lineer denklem sistemi,

$B \neq \underline{0}$ olursa homojen olmayan lineer denklem sistemi olarak adlandırılır.

5.1 HOMOJEN OLMAYAN LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

A.X=B ifadesinde, $C=[A \vdots B]$ şeklinde oluşturulan matris denklem sisteminin arttırılmış matrisi olarak adlandırılır. Buna göre,

* $r(A)= r(C)$ ise denklem sistemi tutarlıdır. Yani sistemin çözümü vardır.
* $r(A) \neq r(C)$ ise denklem sistemi tutarsızdır. Sistemin çözümü yoktur.

Bu başlıkta homojen olmayan lineer denklem sistemlerinin bazı çözüm yöntemleri tanıtılacaktır:

5.1.1 GAUSS-JORDAN YÖNTEMİ:

Tutarlı bir lineer denklem sistemi için, n bilinmeyen sayısını göstermek üzere(Yani $r(A) = r(C)=r$);

$n = r$ ise sistemin tek çözümü vardır.

$n > r$ ise n-r tane bilinmeyen keyfi değer alacak şekilde sistemin sonsuz çözümü vardır.

Bu yönteme göre $C=[A \vdots B]$ matrisi,satırca (sütunca) eşelon forma veya satırca (sütunca) indirgenmiş eşelon forma getirilerek sistemin çözümü belirlenebilir. Artırılmış matrisi satırca eşelon forma getirerek çözme yöntemi **Gauss-Jordan** yok etme yöntemi olarak bilinir.Bu yöntemde denklemler öyle sıralanır ki,

i)birinci denklemde x_1 bilinmeyeninin katsayısı olan a_{11} sıfırdan farklıdır.

ii) Her $i>1$ için D_i denklemi yerine $a_{11}D_i - a_{i1}D_1$ denklemi alınır.

$D_i \rightarrow a_{11}D_i - a_{i1}D_1$ böylece sisteme eşdeğer,

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \dots\ + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a'_{22}x_2 + \ \dots\ + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a'_{m2}x_2 + \ \dots\ + a'_{mn}x_n &= b'_m
\end{aligned}$$

sistemi oluşturulur.

iii) ilk iki işlem ikinci denklem sistemine de uygulanarak devam ettirilir.Böylece Katsayılar matrisinin eşelon formu elde edilir.

Buna göre;

- $r = n$ ise bir tek çözüm;
- $r < n$ ise sonsuz çözüm vardır.
- Şayet $0.x_1 + 0.x_2 + \ \dots\ + 0.x_n = b'_n$ durumu elde edilirse

denklemler uygunsuzdur (tutarsızlık), bu durumda çözüm yoktur.

ÖRNEK:

$$\left.\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\
2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 1 \\
-x_1 + x_2 - 2x_3 &= -1
\end{aligned}\right\} \text{ sistemini çözünüz.}$$

ÇÖZÜM: Gauss Yoketme yöntemini uygulayalım:

$D_2 \rightarrow D_2 - 2D_1$

$D_3 \rightarrow D_3 + D_1$ işlemleri uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
x_1+2x_2+x_3&=0 \\
-3x_2-4x_3&=1 \\
3x_2-x_3&=-1
\end{aligned}$$

sistemi elde edilir.

$D_3 \rightarrow D_3 + D_2$ işlemini uygularsak,

$$\begin{aligned}
x_1+2x_2+x_3&=0 \\
-3x_2-4x_3&=1 \\
-5x_3&=0
\end{aligned}$$

oluşur.

Buna göre $x_3=0$, $x_2= -1/3$ ve $x_1=2/3$ bulunur.

Yapılan bu işlemlerin artırılmış matrisin satırca eşelon forma getirilmesi olduğunu görebiliriz:

$$[A \vdots B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[S_3+S_1]{S_2-2S_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{S_3+S_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right]$$ şimdi son satırdan başlayarak her satırın denklem karşılığından, her adımda bir bilinmeyen bulunursa,

$x_3=0$, $x_2=-1/3$ ve $x_1=2/3$ çözümü elde edilir.

Demek ki Ç={(2/3,-1/3,0)} çözüm kümesidir.

ÖRNEK:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 9x_3 &= 6 \\ 4x_1 + x_2 + 6x_3 &= 7 \\ 2x_1 - 4x_2 + 21x_3 &= 10 \end{aligned}$$

sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM:

$D_2 \rightarrow D_2 - 2D_1$

$D_3 \rightarrow D_3 - D_1$ işlemleri uygulanırsa;

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 9x_3 &= 6 \\ 3x_2 - 12x_3 &= -5 \\ -3x_2 + 12x_3 &= 4 \end{aligned}$$

olur.

Şimdi de $D_3 \rightarrow D_3 + D_2$ uygulayalım;

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 9x_3 &= 6 \\ 3x_2 - 12x_3 &= -5 \\ 0.x_2 - 0.x_3 &= -1 \end{aligned}$$

bulunur. O halde denklemler uygunsuzdur(tutarsızdır).Sistemin çözümü yoktur. Ç= $\emptyset$ dir.

- C=$[A \vdots B]$ matrisi satırca indirgenmiş eşelon forma getirilerek sistemin çözümünü bulmaya **Gauss-Jordan** indirgeme yöntemi denir.

ÖRNEK 1:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= -4 \end{aligned}$$

Lineer denklem sisteminin çözüm kümesi nedir?

ÇÖZÜM:

Sistemin matrisel olarak gösterimi,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ -4 \end{bmatrix}$$ şeklindedir.

Artırılmış matris, $$C = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \\ 1 & -1 & -1 & -4 \end{array}\right]$$ olur.

Rank durumunu inceleyerek sistemin tutarlılığını dolayısıyla çözümünü belirleyelim:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \\ 1 & -1 & -1 & -4 \end{array}\right] \overset{\substack{s_2-s_1 \\ s_3-s_1}}{\approx} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right] \overset{\substack{s_2/2 \\ -s_3/2}}{\approx} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\overset{s_2+s_1}{\approx} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \overset{\substack{s_1-\frac{3}{2}s_3 \\ s_2-\frac{1}{2}s_3}}{\approx} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \text{ bulunur.}$$

Çözümde r(A)=r(C)=3 olduğu görülmektedir. O halde sistem tutarlıdır. Ayrıca n=3 olduğundan sistemin tek çözümü vardır. Sistemin bu çözümü artırılmış matrisin satırca indirgenmiş eşelon formunda B vektörünün yerinde oluşan değerlerdir. Buna göre sistemin çözümü;

$x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$

olmaktadır. Ç={(1,2,3)} yazılabilir.

ÖRNEK 2:

$$\begin{aligned} x_1-x_2+x_3&= 2 \\ x_1+x_2+2x_3&= 9 \\ x_1+x_2+x_3&= 7 \\ x_1-x_2-x_3&= -4 \end{aligned}$$

Lineer denklem sisteminin çözümünü yapalım:

ÇÖZÜM:

Denklemin matrisel karşılığı,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ 7 \\ -4 \end{bmatrix}$$

olur. Artırılmış matrisi oluşturup çözüme gidelim,

$$C=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & -1 & -4 \end{array}\right] \overset{\substack{s_2-s_1 \\ s_3-s_1 \\ s_4-s_1}}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix} \overset{\substack{s_2/2 \\ s_3/2 \\ s_4/2}}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\overset{s_3-s_2}{\approx}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2}\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1\\ 0 & 0 & -1 & -3\end{bmatrix}\overset{-2s_3}{\approx}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2}\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -1 & -3\end{bmatrix}\overset{s_4+s_3}{\approx}\left[\begin{array}{ccc:c}1 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2}\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{array}\right]$$

r (A)=3 ve r(C)=4 olduğu görülmektedir.r(A)≠r(C) olup, sistem tutarsızdır.Denklem sisteminin çözümü yoktur. Ç=∅ olur.

ÖRNEK 3:

$$x_1+2x_2-x_3=5$$
$$2x_1+4x_2-2x_3=10$$
$$x_1+x_2+x_3=4$$

denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM:

Sistemin matrisel karşılığı;

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 4 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ 10\\ 4\end{bmatrix}$$

şeklindedir. Artırılmış matrisi oluşturarak çözüm yapalım:

$$C=\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 2 & -1 & 5\\ 2 & 4 & -2 & 10\\ 1 & 1 & 1 & 4\end{array}\right]\overset{\substack{s_2-2s_1\\ s_3-s_1}}{\approx}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1\end{bmatrix}\overset{s_2\leftrightarrow s_3}{\approx}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 5\\ 0 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\overset{-s_2}{\approx}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 5\\ 0 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\overset{s_1-2s_2}{\approx}\begin{bmatrix}1 & 0 & 3 & 3\\ 0 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

r(A)=r(C)=2 olduğundan sistem tutarlıdır.n=3 olduğundan 3-2=1 bilinmeyen keyfi değer almak üzere, sistemin sonsuz çözümü vardır.Keyfi değer alacak bilinmeyen x_3 tür.Buna göre, x_3=a olsun;

$$\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & 3 & 3\\ 0 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]\begin{cases}x_1+3a=3 & \rightarrow x_1=3(1-a)\\ x_2-2a=1 & \rightarrow x_2=1+2a\end{cases}$$

bulunur.

Ç={(3-3a,1+2a,a)}

elde edilir.

$$C=[A\vdots B]=\left[\begin{array}{ccccc|c}1&2&1&1&3&-1\\2&-1&1&-1&-2&0\\1&3&4&1&1&2\\4&2&-1&1&5&-4\end{array}\right]\xrightarrow[S_4-4S_1]{\substack{S_2-2S_1\\S_3-S_1}}\begin{bmatrix}1&2&1&1&3&-1\\0&-5&-1&-3&-8&2\\0&1&3&0&-2&3\\0&-6&-5&-3&-7&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[S_4+6S_3]{S_2+5S_3}\begin{bmatrix}1&2&1&1&3&1\\0&0&14&-3&-18&17\\0&1&3&0&-2&3\\0&0&13&-3&-19&18\end{bmatrix}\longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0&\frac{4}{3}&-\frac{5}{3}\\0&1&0&0&-5&6\\0&0&1&0&1&-1\\0&0&0&1&\frac{32}{3}&\frac{31}{3}\end{bmatrix}$$

$$x_1+\frac{4}{3}x_5=-\frac{5}{3}\rightarrow x_1=-\frac{4x_5+5}{3}$$
$$x_2-5x_5=6\rightarrow x_2=6+5x_5$$
$$x_3+x_5=-1\rightarrow x_3=-1-x_5$$
$$x_4+\frac{32}{3}x_5=\frac{31}{3}\rightarrow x_4=\frac{31-32x_5}{3}$$ bulunur.

$x_5=k$ olmak üzere çözüm kümesi $\left\{\begin{bmatrix}-\frac{4}{3}\\5\\-1\\-\frac{32}{3}\end{bmatrix}k+\begin{bmatrix}\frac{5}{3}\\6\\-1\\\frac{31}{3}\end{bmatrix}\ \middle|\ k\in R\right\}$ dir.

SORU 4)

$$\left.\begin{array}{l}x-3z=-3\\2x+ay-z=-2\\x+2y+az=1\end{array}\right\}$$ sisteminin

i)Tek çözümü olması için ,

ii)Çözümsüz olması için,

iii)Birden fazla çözümü olması için, a hangi değerleri almalıdır?

ÇÖZÜM:

Artırılmış matrisi oluşturarak çözelim:

$$\begin{pmatrix}1&0&-3&-3\\2&a&-1&-2\\1&2&a&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{satırca eşelon formu}}\begin{bmatrix}1&0&0&-\frac{3a+3}{a+5}\\0&1&0&\frac{4}{a+5}\\0&0&1&\frac{4}{a+5}\end{bmatrix}$$ elde edilir.

$a\neq-5$ ise sistemin tek çözümü vardır. $a=-5$ için sistemin çözümü yoktur. Sistemin birden fazla çözümünün olması mümkün değildir. Çünkü arttırılmış matrisin rankı bilinmeyen sayısı olan 3 den az olamaz.

SORU 5)

$$\left.\begin{array}{r} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=1 \end{array}\right\}$$ sisteminin çözümlerini a ya göre irdeleyiniz.

ÇÖZÜM: Sisteme ait artırılmış matrisi oluşturarak çözüm yapalım:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{satırca eşelon formu}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & -a^2-a+2 & 1-a \end{bmatrix}$$

$a \neq -2$ ve $a \neq 1$ ise tek çözüm vardır. a=1 ise sonsuz çözüm olur (2 keyfi değişken seçilir), a= 2 ise çözüm yoktur (boş küme) .

SORU 6) x + 2y –3z + 2w = 2
2x + 5y –8z+ 6w = 5
3x + 4y – 5z + 2w = 4 sisteminin çözümü nedir?

ÇÖZÜM: Gauss Jordan İndirgeme yöntemiyle çözelim:

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -8 & 6 & 5 \\ 3 & 4 & -5 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_3-3S_1]{S_2-2S_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & -4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_3+2S_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_1-2S_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ matris indirgenmiş eşelon forma gelmiştir.

Buna göre,Rank(A)=Rank(C)= 2 , n = 4 , 4 – 2 = 2 keyfi değişken vardır.

z ve w keyfi değişkenler olmak üzere çözüm; $\left.\begin{array}{r} x=-z+2w \\ y=1+2z-2w \end{array}\right\}$ dir.

Küme olarak z=s ve w=t alınırsa $Ç = \left\{ \begin{bmatrix} -s+2t \\ 1+2s-2t \\ s \\ t \end{bmatrix} \mid s,t \in R \right\}$ bulunur.

Veya $Ç= \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mid s,t \in R \right\}$ şeklinde yazılabilir.

SORU 7) $2x + y - 3z = 5$
$3x-2y+2z=5$
$5x - 3y - z = 16$ sisteminin çözümü nedir?

ÇÖZÜM: Gauss Jordan İndirgeme yöntemine göre,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & -1 & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_2-S_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & -3 & 5 & 0 \\ 5 & -3 & -1 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{S_2 \leftrightarrow S_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \\ 5 & -3 & -1 & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_3-5S_1]{S_2-2S_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & -13 & 5 \\ 0 & 12 & -26 & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_2-(S_3/2)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 12 & -26 & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_3-12S_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -26 & 52 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_1+3S_2]{-S_3/26}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_1-5S_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$ matris indirgenmiş

eşelon forma gelmiştir.Buna göre,Rank(A)=Rank(C)=3 , n =3 olduğundan tek çözüm vardır.
x=1 , y= -3 , z= -2 dir.

SORU 8) $x + 2y + 3z = 3$
$2x + 3y + 8z = 4$
$3x + 2y + 17z = 1$ sisteminin çözümü nedir?

ÇÖZÜM:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 17 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[S_3-3S_1]{S_2-2S_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & 8 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{-S_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & 8 & -8 \end{array}\right] \xrightarrow{S_3+4S_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{S_1-2S_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$ sonsuz çözüm vardır. z keyfi değer olmak üzere,

x= -1-7z ; y=2+2z bulunur.

Çözüm $\{(-1-7z),(2+2z),z\}$ dir. Bir diğer gösterim şekli

z=k olmak üzere $Ç=\left\{\begin{bmatrix}-7\\2\\1\end{bmatrix}k+\begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix} \mid k\in R\right\}$ olur.

SORU 9) $x - 3y + 5z = 30$
$2x + 4y - 3z = -15$
$-6x + y + 4z = 7$ denklem sisteminin çözümü nedir?

ÇÖZÜM:

$$(A \mid B) = \begin{pmatrix}1 & -3 & 5 & 30\\2 & 4 & -3 & -15\\-6 & 1 & 4 & 7\end{pmatrix} \xrightarrow[S_3+6S_1]{S_2-2S_1} \begin{pmatrix}1 & -3 & 5 & 30\\0 & 10 & -13 & -75\\0 & -17 & 34 & 187\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-S_3/17 \leftrightarrow S_2} \begin{pmatrix}1 & -3 & 5 & 30\\0 & 1 & -2 & -11\\0 & 10 & -13 & -75\end{pmatrix} \xrightarrow[S_1+3S_2]{S_3-10S_2} \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -3\\0 & 1 & -2 & -11\\0 & 0 & 7 & 35\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{S_3/7} \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -3\\0 & 1 & -2 & -11\\0 & 0 & 1 & 5\end{pmatrix} \xrightarrow[S_2+2S_3]{S_1+S_3} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\0 & 1 & 0 & -1\\0 & 0 & 1 & 5\end{pmatrix}$$

rank=3 olduğundan tek çözüm vardır.Bu çözüm Gauss Jordan indirgeme yöntemine göre son sütunda oluşan değerlerdir. x=2 ; y= -1 ; z=5 dir.

SORU 10) $x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 6x_5 = -20$
$4x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 6x_4 + x_5 = 8$
$5x_1 + x_2 - 33x_4 - 16x_5 = 76$ sistemini çözünüz.

ÇÖZÜM:

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & -2 & 7 & 6 & -20\\4 & 5 & -3 & -6 & 1 & 8\\5 & 1 & 0 & -33 & -16 & 76\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{satırca eşelon formu}} \begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{1}{7} & -\frac{53}{7} & -\frac{27}{7} & \frac{124}{7}\\0 & 1 & -\frac{5}{7} & \frac{34}{7} & \frac{23}{7} & -\frac{88}{7}\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Rank 2 dir , n = 5, 5 – 2 = 3 bilinmeyen keyfi değer alır:

$$x_1 = \frac{124+27x_5+53x_4-x_3}{7} \text{ ve } x_2 = \frac{-88-23x_5-34x_4+5x_3}{7}$$ bulunur.

SORU 11) $x - y + 2z = 8$
$3x + y - z = 1$
$2x + 3y + z = 16$ sistemini çözünüz.

ÇÖZÜM: Gauss Jordan indirgeme yöntemiyle çözelim:

5.1.2 CRAMER YÖNTEMİ:

AX=B ifadesinde, A nxn tipinde bir matris, X ve B ise nx1 tipinde birer vektör olmak üzere, A düzgün matris ise sisteme **Normal Sistem** denir, bu durumda sisteminin tek çözümü olur. Bu çözüm Cramer yöntemi ile $x_i=\frac{\Delta_i}{\Delta}$ (i=1,2,..,n) şeklinde bulunabilir.Buradaki Δ ve Δ_i ifadeleri determinant değerleri olup,aşağıdaki teoremde tanımlanmıştır.

TEOREM:

$$a_{11}.x_1+a_{12}.x_2+\cdots+a_{1n}.x_n=b_1$$
$$a_{21}.x_1+a_{22}.x_2+\cdots+a_{2n}.x_n=b_2$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{n1}.x_1+a_{n2}.x_2+\cdots+a_{nn}.x_n=b_n$$

AX=B denklem sistemi için ,

$\Delta=|A|$ ve $\Delta_i=|A_i|$ ise Δ determinantında i. sütun B vektörü ile değiştirilmek suretiyle oluşan determinant değeri olmak üzere sistemin çözümü ;

$$x_i=\frac{\Delta_i}{\Delta} \quad (i=1,2,..,n)$$

şeklinde bulunan değerlerdir.

İSPAT: $|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$ determinantında iki yanı x_1 ile çarpalım,

$$x_1.|A|=\begin{vmatrix} a_{11}.x_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}.x_1 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}.x_1 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

olur.Şimdi oluşan determinantta ikinci sütunu x_2, üçüncü sütunu x_3 ,...., n. sütunu x_n ile çarpıp birinci sütuna ilave edersek;

$$\begin{vmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{nn}x_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

oluşur. Bu son determinantta birinci sütun, denklem sistemimizi oluşturan denklemlerdir. Dolayısıyla bu sütunun her bir elemanı B vektörünün bir bileşenidir. Buna göre,

$$|\Delta_1|=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \dots a_{1n} \\ b_2 & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

elde edilir. Benzer şekilde $x_2.|A| = \Delta_2, \ldots, x_n.|A| = \Delta_n$ bulunur. O halde $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$ (i=1,2,..,n) olduğu ispatlanmış olur.

Cramer yönteminde aşağıdaki durumlar söz konusudur:

i) $\Delta \neq 0$ ise sistemin bir ve yalnız bir çözümü vardır.
ii) $\Delta = 0$ ve Δ_k ların hepsi 0 ise sistemin çözümü belirsizdir.Çünkü
$x_k = \Delta_k / \Delta$ dır ; $\Delta_k = 0$ ve $\Delta = 0$ ise $x_k = \dfrac{0}{0}$ olacağından belirsizdir.
iii) $\Delta = 0$ ve Δ_k lardan en azından bir tanesi sıfırdan farklı ise o zaman sistemin çözümü mümkün değildir.

Δ_k determinantında x_k lı terimlerin katsayıları yerine karşı taraftaki sabitler vektörü konulmuştur.Böylece,

$$x_k = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 & .. & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n & .. & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} & .. & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nk} & .. & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

yazılabilir.

- ***Asal Determinant:*** Matrisin rankını veren determinanttır.

Rank(A)= r ise,

$$\Delta_A = D_A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} \end{vmatrix}$$

şeklindedir.Bu durumda $x_1, x_2 \ldots, x_r$ değişkenlerine ***Asal Değişkenler*** ; geriye kalan n-r tane değişkene de ***Keyfi Değişkenler*** denir.

- ***Karakteristik Determinant:*** Asal değişkenin katsayılar determinantına (r+1) inci satır olmak üzere geriye kalan (n-r) tane denklemin her birindeki asal bilinmeyenlerin katsayıları,son sütuna da denklemlerin sağındaki sabitler (b_i değerleri) yazılarak elde edilen determinantlardır.

$$\Delta_k = D_K = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} & \ldots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} & \ldots & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} & \ldots & b_r \\ a_{r+k1} & a_{r+k2} & \ldots & a_{r+kr} & \ldots & b_{r+k} \end{vmatrix}$$

- $\Delta = |A| = 0$ olması halini göz önüne alalım: Asal determinant

yazılır. Buna karşılık gelen tüm karakteristik determinantlar oluşturulur.
Tümü sıfır ise çözüm vardır. Aksi halde çözüm yoktur.
Homojen olmayan lineer denklem sistemlerinde ,sistemi oluşturan denklem sayısı m, bilinmeyen sayısı n olmak üzere üç durum incelenebilir:

- **m = n HALİ:** Bilinmeyen sayısı denklem sayısına eşitse,

rank(A)= r olmak üzere; r=m=n ise tek çözüm vardır. r<m=n ise asal determinant belirlenip,karakteristik determinantlara bakılır; hepsi sıfır ise keyfi değişkenlere bağlı sonsuz çözüm vardır;en az biri sıfır değilse çözüm yoktur.

ÖRNEK:

$$2x+y+z=6$$
$$x-2y+z=-1$$
$$3x-y+2z=4$$

Çözümünün olup olmadığını araştırınız.

ÇÖZÜM: m=n=3 tür.

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ dır. O halde rank=3 değildir.Asal determinantı belirleyelim:

$D_A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4-1 = -5 \neq 0$ Rank(A) = 2 olur.Karakteristik determinant;

$D_K = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ dır. Çözüm yoktur çünkü $\Delta = 0$ iken sıfır olmayan

karakteristik determinant vardır.

ÖRNEK:

$$2x_1+5x_2+7x_3-x_4=12$$
$$3x_1-x_2+4x_3+2x_4=3$$
$$5x_1+x_2+3x_3+6x_4=-13$$
$$9x_1-6x_2+4x_3+11x_4=-19$$

sisteminin çözümü nedir?

ÇÖZÜM:

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & 6 \\ 9 & -6 & 4 & 11 \end{vmatrix} = 0$ dır. O halde rank <4 tür. Rank= 3 olabilir mi?

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 97 \neq 0$$ dır. O halde asal determinanttır ve rank=3 tür ;

x_1, x_2, x_3 asal değişkenlerdir. Karakteristik determinanta bakalım:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 & 12 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 3 & -13 \\ 9 & -6 & 4 & -19 \end{vmatrix} = 0$$ dır. Çözüm vardır.

$2x_1+5x_2+7x_3 = 12+x_4$
$3x_1-x_2+4x_3 = 3 - 2x_4$
$5x_1+x_2+3x_3 = -13 -6x_4$
sisteminden çözüm x_4 'e bağlı olarak Cramer yöntemi ile yapılırsa,

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 12+x_4 & 5 & 7 \\ 3-2x_4 & -1 & 4 \\ -13-6x_4 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}} \; ; \; x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 12+x_4 & 7 \\ 3 & 3-2x_4 & 4 \\ 5 & -13-6x_4 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}} \text{ ve}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 & 12+x_4 \\ 3 & 4 & 3-2x_4 \\ 5 & 3 & -13-6x_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}}$$ bulunur.

- **m<n HALİ:** Bilinmeyen sayısı denklem sayısından çoksa

$A=[a_{ij}]$ $1\leq i \leq m$; $1 \leq j \leq n$ ve rank(A)= r olsun. r=m veya r<m olabilir. r=m ise karakteristik determinanta bakılır. Bu halde karakteristik determinantın bir satırı 0 olacağından çözüm vardır.

Şayet r<m ise rank denklem sayısından az olur. Karakteristik determinantlar sıfır olmalıdır.

ÖRNEK:

$6x-5y-3z = 2$
$x+y+5z = -7$ sisteminin çözümü nedir?

ÇÖZÜM:

m=2 ve n=3 olduğundan rank(A)=2 veya 1 olabilir.

$D_A = \begin{vmatrix} 6 & -5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6+5 = 11 \neq 0$ rank=2 olur.

Karakteristik determinant,

$$D_K=\begin{vmatrix}6 & -5 & 2\\ 1 & 1 & -7\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=0$$ bulunur. O halde x,y asal bilimeyenler z ise keyfi bilinmeyendir.

$6x-5y=2+3z$ sistemi Cramer yöntemi ile çözülürse;
$x+y=-7-5z$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}2+3z & -5\\ -7-5z & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}6 & -5\\ 1 & 1\end{vmatrix}} \quad \text{ve} \quad y=\frac{\begin{vmatrix}6 & 2+3z\\ 1 & -7-5z\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}6 & -5\\ 1 & 1\end{vmatrix}}$$ bulunur.

ÖRNEK:

$x+3y-2z+7t+6w=-20$
$4x+5y-3z-6t+w=8$
$5x+y-33t-16w=76$ sisteminin çözümü nedir?

ÇÖZÜM:

n=5, m=3 olduğundan rank en çok 3 olabilir.

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & -2 & 7 & 6\\ 4 & 5 & -3 & -6 & 1\\ 1 & 1 & 0 & -33 & -16\end{bmatrix} \xrightarrow[C_5+16C_1]{\substack{C_2-C_1\\ C_4+33C_1}} \begin{bmatrix}1 & 2 & -2 & 40 & 22\\ 4 & 1 & -3 & 126 & 65\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

rank=2 olur. $D_A=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & 5\end{vmatrix}\neq 0$; $D_K=\begin{vmatrix}1 & 3 & -20\\ 4 & 5 & 8\\ 5 & 1 & 76\end{vmatrix}=0$ dır.

Üç keyfi değişkenli çözüm vardır.

$x+3y=-20+2z-7t-6w$
$4x+5y=8+3z+6t-w$ sistemi Cramer yöntemi ile çözülürse;

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-20+2z-7t-6w & 3\\ 8+3z+6t-w & 5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & 5\end{vmatrix}} \quad \text{ve} \quad y=\frac{\begin{vmatrix}1 & -20+2z-7t-6w\\ 4 & 8+3z+6t-w\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & 5\end{vmatrix}}$$ bulunur.

- **m>n HALİ:** Denklem sayısı fazla ise çözüm için karakteristik determinant 0 olmalıdır.

ÖRNEK: $2x+3y=9$
$x-4y=-1$ sisteminin çözümü nedir?
$3x+4y=13$

ÇÖZÜM:

$D_A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -11 \neq 0$ rank 2 demektir. $D_K = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 1 & -4 & -1 \\ 3 & 4 & 13 \end{vmatrix} = 0$ olur.

x,y asal bilinmeyenlerdir.

2x+3y= 9 x=3
x-4y= -1 y=1 bulunur.Bu değerler son denklemi sağlıyorlar mı?
3.3+4.1=13 sağlıyorlar. O halde sistemin çözümü (3,1) tür.

ÖRNEK:
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= -4 \end{aligned}$$
denklem sisteminin çözümünü Cramer yöntemiyle yapınız.

ÇÖZÜM:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \text{ ve } |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1-1-2-1+2-1 = -4$$
$$\begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{matrix}$$

bulunur.(Sarrus kuralı uygulandı)

$|A| \neq 0$ ve n=3 olduğundan Cramer yöntemi uygulanabilir.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 9 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & -1 \end{vmatrix}, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 9 & 2 \\ 1 & -4 & -1 \end{vmatrix}, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & -4 \end{vmatrix}$$

bulunur.(Teoreme göre yazıldı.)

$\Delta_1 = -4$, $\Delta_2 = -8$ ve $\Delta_3 = -12$ dir. Buna gşre $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 2$ *ve* $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 3$

olur. Ç={(1,2,3)} dır.

5.1.3 TERS MATRİS YÖNTEMİ:

Cramer yöntemindeki şartlar geçerli olmak üzere,homojen olmayan lineer denklem sistemleri ters matris yöntemiyle de çözülebilir.

AX=B eşitliğinin iki yanı A nın ters matrisi ile genişletilirse sistemin çözüm vektörü bulunur: $X=A^{-1}.B$ olur.

ÖRNEK:
$$\begin{aligned} x+2y-3z&=1 \\ 2x-y+z&=1 \\ x+3y-4z&=2 \end{aligned}$$
sisteminin çözümünü ters matris yöntemiyle bulunuz.

ÇÖZÜM: (A | I | B) bölünmüş matrisini oluşturup elemanter işlemler uygulanarak $(\underbrace{A^{-1}A}_{I} | \underbrace{A^{-1}I}_{A^{-1}} | \underbrace{A^{-1}B}_{X})$ ifadesinin oluşması sağlanacaktır.

Böylece $(A \mid I \mid B) \longrightarrow (I \mid A^{-1} \mid X)$ olacaktır.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \end{bmatrix} \;;\; B=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$ dir.Buna göre

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc:c} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$ olur.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[S_3-S_1]{S_2-2S_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 7 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-S_2/5}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -7/5 & 2/5 & -1/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_3-S_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/5 & 1/5 & 2/5 & 0 & 3/5 \\ 0 & 1 & -7/5 & 2/5 & -1/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 2/5 & -7/5 & 1/5 & 1 & 4/5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\frac{5}{2}S_3 \\ S_2+\frac{7}{5}S_3 \\ S_1+\frac{1}{5}S_3}} \left[\begin{array}{ccc:ccc:c} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -9/2 & 1/2 & 7/2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -7/2 & 1/2 & 5/2 & 2 \end{array}\right]$$

Böylece çözüm olarak x=1 ; y=3 ; z=2 bulunur.

SORU 1.)

x-y+2z=3
x+y-2z=1
x+3y-6z= -1 sisteminin çözümünü Cramer yöntemiyle yapınız.

ÇÖZÜM:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -6 \end{vmatrix}=0$$ dır.Sıfırdan farklı bir minör $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ olur.

O halde ilk iki denklem asaldır. Çözüm olabilmesi için karakteristik determinant sıfır olmalıdır.

$$\Delta_k=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}=0$$ O halde sistem tutarlıdır.

İlk iki denklemden z keyfi değerler almak üzere,

z=k, x=2, y=2k-1 bulunur.

SORU 2.)

2x+y+3z=1
-x+y-2z= -1
x+2y+z=2 sisteminin çözümünü Cramer yöntemiyle yapınız.

ÇÖZÜM:

$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0$ dır. Asal determinant $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\neq 0$ dır.

$\Delta_k=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}\neq 0$ dır.Denklemler tutarlı olmayıp, çözüm imkansızdır.

SORU 3.) $x+y+z = 4$
$3x-2y+z = 6$
$2x+y-2z = 0$ denklem sisteminin çözüm kümesi nedir?

ÇÖZÜM: Sistemin matrisel olarak ifadesi,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$ şeklindedir.

$|A|=\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -5 & -2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}=18\neq 0$ olduğundan,

Cramer yöntemiyle çözüm yapılabilir.İlgili determinantlar hesaplanırsa,

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 6 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 6 & -3 \end{vmatrix}=30$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}=2.4=8$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 7 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 7 & 6 \end{vmatrix}=-(-6-28)=34$$

Bulunur. Buna göre,

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{30}{18}=\frac{5}{3}\quad ;\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{8}{18}=\frac{4}{9}\quad ;\quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{34}{18}=\frac{17}{9}$$

elde edilir. $Ç=\{(\frac{5}{3},\frac{4}{9},\frac{17}{9})\}$ olur.

SORU 4.) $3x+4y = 10$
$2x-2y = -5$ denklem sisteminin çözümünün olması için k
$6x+ky = 30$ ne olmalıdır?

ÇÖZÜM: İlk iki denklemin çözümünün üçüncü denklemi sağlaması durumunda sistemin çözümü vardır. Buna göre,

$3x+4y= 10$
$2x-2y= -5$ sistemi için,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -14 \; ; \; \Delta_x = \begin{vmatrix} 10 & 4 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = 0 \; ; \; \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -35$$

bulunur. O halde sistemin çözümü;

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 0 \quad \text{ve} \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-35}{-14} = \frac{5}{2}$$

bulunur. $(0, \frac{5}{2})$ ikilisi üçüncü denklemi sağlamalıdır.

$$6.0 + \frac{5}{2}k = 30 \Rightarrow \frac{5}{2}k = 30 \Rightarrow 5k = 60, \quad k = 12 \quad \text{olmalıdır.}$$

SORU 6.)
$3x+4y =26$
$2x-2y =-6$
$6x+ky =37$ sisteminin çözümünün olabilmesi için k ne olmalıdır?

ÇÖZÜM: İlk 2 denklemde $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$ dır. x,y Cramer yöntemi ile çözülebilir.

3. Denklemin sağlaması için

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 26 \\ 2 & -2 & -6 \\ 6 & k & 37 \end{vmatrix} = 0 \qquad 70k-350=0 \Rightarrow k=5 \text{ olmalıdır.}$$