II

DETERMİNANT

Determinant, kare matrisler üzerinde tanımlı skaler değerli bir fonksiyon olup,matrisin elemanlarına özel işlemler uygulanarak elde edilir. f: $A_{nxn} \rightarrow R$ dir. Determinant matrisle ilgili önemli bilgiler veren sabit bir değerdir.Det(A) veya $|A|$ şeklinde gösterilir.

2x2 tipindeki matrislerin determinantı , $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ olmak üzere, $|A| = a.d - b.c$ olarak bulunur.

ÖRNEK: $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 18 \end{bmatrix}$ ise $|A| = 3.18 - 8.5 = 54 - 40 = 14$ bulunur.

2.1 SARRUS KURALI

3x3 tipindeki matrislerin determinantını bulmak için uygulanır. Bu kurala göre, matrisin ilk iki satırı altına ilave edilip, esas köşegen ve paralelindeki elemanların çarpımlarının toplamından diğer köşegen üzerindeki ve paralelindeki elemanların çarpımları toplamı çıkarılır. Elde edilen değer matrisin determinantıdır.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ k & m & n \end{bmatrix} \text{ ise } |A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ k & m & n \end{vmatrix} = aen + dmc + kbf - kec - afm - dbn$$
$$\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \end{matrix}$$

olur.

ÖRNEK:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ ise } |A| \text{ yı bulalım:}$$

Sarrus kuralını uygularsak,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.1.1 + 0.1.3 + (-1).2.2 - (-1)(1).3 - 1.1.2 - 0.2.1$$
$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{matrix} \qquad = 1 - 4 + 3 - 2 = -2$$

bulunur.

MİNÖR: A matrisi nxn lik bir matris olsun. a_{ij} elemanı için i. satır ve j. sütun yok kabul edilerek oluşturulan (n-1) x (n-1) lik M_{ij} matrisinin determinantına a_{ij} elemanının minörü denir.

ÖRNEK: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi için a_{12} nin ve a_{23} ün minörlerini hesaplayalım:

a_{12} için; $M_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\quad |M_{12}| = 2$

a_{23} için , $M_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\quad |M_{23}| = 1 + 2 = 3$ bulunur.

KOFAKTÖR (İşaretli Minör): A matrisi nxn lik bir matris olsun. Her a_{ij} elemanı için, $c_{ij} = (-1)^{i+j}.|M_{ij}|$ şeklinde tanımlanan c_{ij} skaler sayısına a_{ij} elemanının kofaktörü denir.

Dikkat edilirse bir elemanın kofaktörü, elemanın satır ve sütun numaraları toplamı çift ise minör değerine, tek ise minörünün ters işaretlisine eşit olmaktadır.

ÖRNEK:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi için c_{12}, c_{33}, ve c_{22} kofaktör değerlerini hesaplayalım:

$c_{12} = (-1)^{1+2}.|M_{12}|$ dir. $\quad M_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ olduğundan, $c_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4$ bulunur.

$c_{33} = (-1)^{3+3}.|M_{33}|$ dir.

$M_{33} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olduğundan, $c_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ bulunur.

$c_{22} = (-1)^{2+2}.|M_{22}|$ dir. $\quad M_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ olduğundan

$c_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$ bulunur.

2.2 LAPLACE AÇILIMI

Bir matrisin determinantı, o matrisin seçilen bir satır veya sütununun elemanlarına göre, her elemanının kofaktörleri hesaplanıp, her kofaktörün ait olduğu elemanla çarpımlarının toplamı şeklinde ifade edilebilir. A_{nxn} için i. satır elemanlarına göre Laplace açılımı ile determinant,

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_{ij} \quad \text{(herhangi bir i. satır için)}$$

şeklinde, j. sütun elemanlarına göre Laplace açılımı ile determinant ise,

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} c_{ij} \quad \text{(herhangi bir j. sütun için)}$$

şeklinde ifade edilebilir.

nxn lik bir matrisin determinantı hesaplanırken,her seferinde her satırdan bir eleman alınmak suretiyle oluşturulan (n) li çarpımların toplamı alındığından (n!) tane çarpma işlemi yapılmaktadır.

ÖRNEK:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$ matrisinin determinant değerini Laplace açılımı ile hesaplayalım:

Laplace açılımı ile determinant hesaplanırken,çarpma işlemi sayısını azaltmak için sıfırı fazla olan satır veya sütuna göre açılım tercih edilir. Bu amaçla A matrisinin 2. satır elemanlarına göre Laplace açılımını yaparsak.

$$|A| = \sum_{j=1}^{3} a_{2j}.c_{2j} \qquad \text{olacaktır.}$$

$$|A| = 0.(-1)^3.\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 1.(-1)^4.\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 2.(-1)^5.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

=0+(5–9) –2.(4–6)
= –4+4=0

bulunur.Şimdi aynı determinantı 3. sütuna göre Laplace açılımı yaparak bulalım:

$$|A| = \sum_{i=1}^{3} a_{i3}.c_{i3} \qquad \text{olacaktır. Buna göre,}$$

$$|A| = 3.(-1)^4.\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 2.(-1)^5.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 5.(-1)^6.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

=3.(–3) –2.(4–6)+5.(1)
= –9+4+5
=0 bulunur.

2.3 DETERMİNANTIN ÖZELLİKLERİ

* Bir matris ile onun devriğinin determinantı aynıdır.

ÖRNEK: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 18 \end{bmatrix}$ matrisini alalım: $|A|$=18-15=3 elde edilir.

$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 18 \end{bmatrix}$ ve $|A^t| = 18 - 15 = 3$ bulunur. O halde $|A| = |A^t|$ olmaktadır.

* Bir satır (veya sütun) elemanlarının tümü sıfır olan determinantın değeri sıfırdır.

ÖRNEK: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ matrisini alalım:

2.sütun elemanlarının tümü sıfır olduğundan $|A| = 0$ bulunur.

* İki satır (veya sütun) elemanları aynı veya orantılı olan determinantın değeri sıfırdır.

ÖRNEK: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ matrisini alalım:

1.ve 3. sütun elemanları aynı olduğundan $|A| = 0$ bulunur.

* Bir determinantta iki satır (veya sütun) kendi aralarında yer değiştirirse, determinant değeri işaret değiştirir.

ÖRNEK: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ matrisini alalım:

$|A| = 2$ bulunur. (Sarrus kuralı uygulanabilir.)A matrisinin ilk iki satırını yer değiştirirsek,

$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ elde edilir. $|B| = -2$ bulunur.

B matrisi A matrisinin iki satırı yer değiştirilerek elde edildiğinden determinant değeri işaret değiştirmiştir.

* Sadece bir satır (veya sütun) elemanlarının tümü sabit bir sayıyla çarpılmak suretiyle determinantın o sabitle çarpımı bulunmuş olur.

ÖRNEK : $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2$ olarak bulmuştuk. $3.|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 6$

bulunur. Dikkat edilirse sadece birinci sütun elemanları 3 ile çarpılmış olmasına rağmen determinant değeri 3 ile çarpılmış olmaktadır.

Bu özelliği genelleştirmek mümkündür. A nxn lik bir matris ve k reel bir sabit olmak üzere, B=kA şeklindeki B matrisi için,

$|B| = k^n.|A|$ olarak yazılabilir.

ÖRNEK: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$ ve B=5A olmak üzere ,

B matrisinin determinantı, $|B| = 5^2.|A|$ olur. $|A| = 3$ olduğundan

$|B| = 25.3 = 75$ bulunur.

* Bir determinantın, herhangi bir satır (veya sütun) elemanları reel bir sabitle çarpılıp diğer bir satıra (sütuna) eklense (çıkarılsa) determinant değeri değişmez.

ÖRNEK: $A=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$ matrisini alalım:

$|A|$=30-40=-10 bulunur. Şimdi A matrisinin birinci satırına ikinci satırın 3 katını ekleyelim.

$$\begin{bmatrix} 3+24 & 5+30 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & 35 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$$ matrisi elde edilir.

$$\begin{vmatrix} 27 & 35 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} = 270\text{-}280= -10$$

bulunur.Görüldüğü gibi determinant değeri değişmemiştir.

* Üçgensel matrislerin determinantları köşegen elemanlarının çarpımına eşittir.

ÖRNEK: $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ matrisini alalım.

A matrisi üçgensel bir matristir. $|A|$=1.7.4=28 olarak bulunur.

Buna göre, köşegen matrislerin determinantı da köşegen elemanlarının çarpımına eşittir.

ÖRNEK: $A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ matrisini alalım.

A matrisi köşegen matris olduğundan $|A|$=3.5.2=30 olarak bulunur.

Bu özellikten hareketle $|I_n| = 1$ olduğu söylenebilir.

Bu özellik, bir önceki özellikle birlikte kullanılmak suretiyle, bir matrisi köşegen veya üçgensel matrise dönüştürüp,her adımda bir mertebe azaltılarak determinant değeri belirlenebilir.

ÖRNEK: $\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ determinantını hesaplayalım:

1. sütundan 2. sütunu çıkaralım, $\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2-b^2 & b^2 & c^2 \\ a-b & b & c \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ olur.

1.sütunu (a-b) ortak parantezinde yazarsak , (a-b) $\begin{vmatrix} a+b & b^2 & c^2 \\ 1 & b & c \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ olur.

Şimdi de 2. sütundan 3. sütunu çıkaralım, $(a-b)\begin{vmatrix} a+b & b^2-c^2 & c^2 \\ 1 & b-c & c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

2. sütunu (b-c) ortak parantezine alalım, $(a-b)(b-c)\begin{vmatrix} a+b & b+c & c^2 \\ 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

1.sütundan 2. sütunu çıkaralım, $(a-b)(b-c)\begin{vmatrix} a-c & b+c & c^2 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

şimdi birinci sütun (a-c) parantezine alınırsa,

$$\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(a-c)$$

bulunur.

- Bir determinantın değeri aynı kalmak üzere mertebesini arttırmak veya azaltmak mümkündür.

Mertebeyi artırmak için determinanta ilk elemanı 1 diğer elemanları 0 olan bir satır (sütun) ilk satır (sütun) olarak ilave edilip boş kalan sütun (satır) keyfi elemanlarla doldurulabilir.

Mertebeyi düşürmek için ise bir satır veya sütundaki elemanların birisi hariç diğerleri 0 yapılır;daha sonra bu satıra göre açılım düşünülerek mertebe bir düşürülmüş olur.

ÖRNEK:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 13 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ determinantının mertebesini bir artıralım:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 13 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 & 9 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 13 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ birinci sütun ilave edilmiş,birinci satırdaki diğer elemanlar keyfi olarak yazılmıştır.

ÖRNEK:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$ determinantını mertebe düşürerek hesaplayalım:

ÇÖZÜM:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{s_1 \leftrightarrow s_2} - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$ ikinci satırdan birinci satırın

2 katı,üçüncü satırdan birinci satırın 3 katı,dördüncü satırdan birinci satırın 4 katı çıkarılırsa,

$$- \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & -2 \\ 0 & -8 & -6 & -1 \\ 0 & -11 & -7 & -3 \end{vmatrix}$$ birinci sütuna göre açılım yaparsak mertebe bir

azalacaktır.

$$- \begin{vmatrix} -5 & -5 & -2 \\ -8 & -6 & -1 \\ -11 & -7 & -3 \end{vmatrix}$$ mertebenin bir azalmış halidir. Devam ettirirsek,

$$- \begin{vmatrix} -5 & -5 & -2 \\ -8 & -6 & -1 \\ -11 & -7 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 8 & 6 & 1 \\ 11 & 7 & 3 \end{vmatrix}$$ önce $c_1 \leftrightarrow c_3$ yani birinci ve üçüncü sütunları yer

değiştirelim,daha sonra da ikinci satırla birinci satırı yer değiştirelim:

$$- \begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 1 & 6 & 8 \\ 3 & 7 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 8 \\ 2 & 5 & 5 \\ 3 & 7 & 11 \end{vmatrix} \xrightarrow{s_2-2s_1;s_3-3s_1} \begin{vmatrix} 1 & 6 & 8 \\ 0 & -7 & -11 \\ 0 & -11 & -13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & -11 \\ -11 & -13 \end{vmatrix} = -30$$

yine mertebe azaldı ve determinant değeri bulundu.
Bu yöntemle determinant hesaplanırken mertebe 2 oluncaya kadar veya ifade üçgensel hale gelinceye kadar işlemler sürer.

* Bir determinantı, bir satır (veya sütun) elemanları dışındaki elemanlar aynı kalmak şartıyla, birden fazla determinant toplamı şeklinde ifade etmek mümkündür.

ÖRNEK: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & 3 \\ 1 & 6 & -1 \end{bmatrix}$ matrisini alalım: $|A| = -70$ bulunur.

A matrisini 2. satır elemanları dışındaki elemanlar aynı kalacak şekilde iki parçaya ayıralım:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & 3 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -3 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix}$$

sağdaki determinantlardan birincisinin değeri sıfırdır.Diğerinin değeri ise -70 olarak bulunur. $|A|$ değerini ikiden fazla determinant toplamı olarak yazmak ta mümkündür.

Bu özellikten faydalanarak çok karmaşık determinantlar daha basit determinant toplamları şeklinde ifade edilebilirler.

ÖRNEK:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 3 \text{ ise } \begin{vmatrix} a_1+2b_1-3c_1 & a_2+2b_2-3c_2 & a_3+2b_3-3c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

determinantını hesaplayınız.

ÇÖZÜM: Yukarda verilen özelliği uygularsak:

$$\begin{vmatrix} a_1+2b_1-3c_1 & a_2+2b_2-3c_2 & a_3+2b_3-3c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2b_1 & 2b_2 & 2b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} -$$

$$\begin{vmatrix} 3c_1 & 3c_2 & 3c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$ şeklinde yazabiliriz. Son iki determinantın değeri de sıfır olacağından,

$$\begin{vmatrix} a_1+2b_1-3c_1 & a_2+2b_2-3c_2 & a_3+2b_3-3c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 3$$ bulunur.

* A ve B nxn lik birer matris olmak üzere,

$$|A.B| = |A|.|B|$$

$$|A \mp B| \neq |A| \mp |B|$$

olur.

ÖRNEK: $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 12 \end{bmatrix}$ matrislerini alalım:

$|A|$=18-15=3 ; $|B|$=36-40=-4 bulunur.

A B=$\begin{bmatrix} 21 & 52 \\ 60 & 148 \end{bmatrix}$; $|A.B|$=21.148-60.52=-12 elde edilir.

A+B=$\begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 10 & 21 \end{bmatrix}$ dir. $|A+B|$=105-110=-5 olur. $|A+B| \neq |A| + |B|$ olmaktadır.

- $|A|$=0 ise A matrisine **tekil (singüler) matris**; $|A|$≠0 ise A matrisine **düzgün (regüler) matris** denir.
- A mxm tipinde,C (n-m)x(n-m) tipinde, B mx(n-m) tipinde matrisler olmak üzere;

Det$\left[\begin{array}{c:c} A & B \\ \hdashline 0 & C \end{array}\right]$=Det(A)Det(C) olur.

ÖRNEK: $\begin{bmatrix} 5 & 3 & 8 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ matrisinin determinantını hesaplayınız.

ÇÖZÜM:
Matris aşağıdaki gibi dört blok halinde düşünülebileceğinden

$\left|\begin{array}{cc:cc} 5 & 3 & 8 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ \hdashline 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{array}\right|$ determinantı $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$=-140 bulunur.

ÖRNEK:
A=$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 8 & 1 \end{bmatrix}$ ise Det(A) nedir?

ÇÖZÜM: $|A^t| = |A|$ olduğundan; $\left|\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$=1 olur.

ÇÖZÜMLÜ PROBLEMLER

SORU 1)

$\begin{vmatrix} x & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 0$ ise x nedir?

ÇÖZÜM: Sarrus kuralını uygularsak,

$$\begin{vmatrix} x & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 7 & 4 \end{vmatrix} = x.1.4 + 2.7.0 + (-3)(-2).0 - (-3).1.0 - x.7.0 - 2.(-2).4 = 0$$

$$\begin{matrix} x & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{matrix}$$

$4x+16=0 \Rightarrow x=-4$ bulunur.

SORU 2)

$$\begin{vmatrix} a^2 & ax & x^2 \\ b^2 & by & y^2 \\ c^2 & cz & z^2 \end{vmatrix}$$ determinantının değerini hesaplayınız.

ÇÖZÜM: Birinci satırı a^2, ikinci satırı b^2 ve üçüncü satırı c^2 parantezine alırsak,

$$a^2b^2c^2 \begin{vmatrix} 1 & \frac{x}{a} & \frac{x^2}{a^2} \\ 1 & \frac{y}{b} & \frac{y^2}{b^2} \\ 1 & \frac{z}{c} & \frac{z^2}{c^2} \end{vmatrix}$$

olur. Şimdi sırasıyla ikinci ve üçüncü satırlardan birinci satırı çıkarırsak,

$$a^2b^2c^2 \begin{vmatrix} 1 & \frac{x}{a} & \frac{x^2}{a^2} \\ 0 & \frac{y}{b} - \frac{x}{a} & \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} \\ 0 & \frac{z}{c} - \frac{x}{a} & \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} \end{vmatrix} = a^2b^2c^2 \left(\frac{y}{b} - \frac{x}{a}\right)\left(\frac{z}{c} - \frac{x}{a}\right) \begin{vmatrix} 1 & \frac{y}{b} + \frac{x}{a} \\ 1 & \frac{z}{c} + \frac{x}{a} \end{vmatrix}$$

$$= a^2b^2c^2 \left(\frac{y}{b} - \frac{x}{a}\right)\left(\frac{z}{c} - \frac{x}{a}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c} - \frac{y}{b} - \frac{x}{a}\right)$$

$$= \frac{a^2b^2c^2 (ay-bx)(az-cx)(bz-cy)}{a^2b^2c^2}$$

$= (ay-bx)(az-cx)(bz-cy)$ elde edilir.

SORU 3)

$$\begin{vmatrix} b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \\ b+a & c & 1 \end{vmatrix}$$ determinantının değerinin sıfır olduğunu

açılım yapmadan gösteriniz.

ÇÖZÜM : İkinci sütunu birinci sütuna eklersek,

$$\begin{vmatrix} a+b+c & a & 1 \\ a+b+c & b & 1 \\ a+b+c & c & 1 \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix}$$

bulunur. Birinci ve üçüncü sütun elemanları aynı olduğundan determinant değeri sıfır olur.

SORU 4) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ determinantının değerini hesaplayınız.

ÇÖZÜM: Dördüncü sütunu birinci sütuna eklersek,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

olur. Şimdi de üçüncü sütunu birinci sütuna ekleyelim:

$$2\begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4(1+1) = -8$$ bulunur.

SORU 5)

$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ Determinantının değeri nedir?

ÇÖZÜM:

$$\xrightarrow{S_1 \leftrightarrow S_3} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & -3 & -2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[S_4+S_1]{S_2+2S_1,\ S_3-2S_1} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & -3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{MERTEBE DÜŞÜRME}} -\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & -6 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{S_1 \leftrightarrow S_2} \begin{vmatrix} -1 & 1 & -6 \\ 3 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{S_2+3S_1,\ S_3-3S_1}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & -19 \\ 0 & -1 & 23 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{DÜŞÜRME}]{\text{MERTEBE}} -\begin{vmatrix} 1 & -19 \\ -1 & 23 \end{vmatrix} = -(23-19) = -4$$ olarak bulunur.

SORU 6)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2x & x^2 & 0 \\ 0 & 1 & 2x & x^2 \\ 1 & \mathrm{x} & x^2 & 0 \\ 0 & 1 & x & x^2 \end{vmatrix}$$ Determinantının değeri nedir?

ÇÖZÜM:

$$\xrightarrow{S_3-S_1} \begin{vmatrix} 1 & 2x & x^2 & 0 \\ 0 & 1 & 2x & x^2 \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & x^2 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{DÜŞÜRME}]{\text{MERTEBE}} \begin{vmatrix} 1 & 2x & x^2 \\ -x & 0 & 0 \\ 1 & \mathrm{x} & \mathrm{x}^2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{GÖRE AÇILIM}]{\text{İKİNCİ SATIRA}} x\begin{vmatrix} 2x & x^2 \\ x & x^2 \end{vmatrix} = x(2x^3 - x^3) = x^4$$ olarak bulunur.

SORU 7)

$$\begin{vmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} & \mathrm{b} & \dots & \mathrm{b} \\ \mathrm{b} & \mathrm{a} & \mathrm{b} & \dots & \mathrm{b} \\ \mathrm{b} & \mathrm{b} & \mathrm{a} & \dots & \mathrm{b} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathrm{b} & \mathrm{b} & \mathrm{b} & \dots & \mathrm{a} \end{vmatrix}_{\mathrm{nxn}}$$ Determinantının değeri nedir?

ÇÖZÜM:

$$\xrightarrow{S_1+S_2+\dots+S_n} \begin{vmatrix} \mathrm{a}+(\mathrm{n}-1)\mathrm{b} & \mathrm{a}+(\mathrm{n}-1)\mathrm{b} & \dots & \mathrm{a}+(\mathrm{n}-1)\mathrm{b} \\ \mathrm{b} & \mathrm{a} & \dots & \mathrm{b} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathrm{b} & \mathrm{b} & \dots & \mathrm{a} \end{vmatrix} = [\mathrm{a}+(\mathrm{n}-1)\mathrm{b}]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \mathrm{b} & \mathrm{a} & \dots & \mathrm{b} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathrm{b} & \mathrm{b} & \dots & \mathrm{a} \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{S_2-bS_1 \\ S_3-bS_1 \\ S_n-bS_1}} [\mathrm{a}+(\mathrm{n}-1)\mathrm{b}]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a-b & \dots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \dots & a-b \end{vmatrix}$$

Üçgensel hale gelmiştir**.**Determinant köşegen elemanları çarpımı olarak

$[a+(n-1)b].(a-b)^{n-1}$ bulunur.

SORU 8)

$$\begin{vmatrix} \mathrm{a-b-c} & 2a & 2a \\ 2b & \mathrm{b-c-a} & 2b \\ 2c & 2\mathrm{c} & \mathrm{c-a-b} \end{vmatrix} = ?$$

ÇÖZÜM:

$$\xrightarrow{S_1+S_2+S_3} \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[C_3-C_1]{C_2-C_1} (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -b-c-a & 0 \\ 2c & 0 & -c-a-b \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{DÜŞÜRME}]{\text{MERTEBE}} (a+b+c)\begin{vmatrix} -b-c-a & 0 \\ 0 & -c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3 \quad \text{bulunur.}$$

SORU 9)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \dots & 3n-1 & 3n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n^2-n+1 & n^2-n+2 & n^2-n+3 & \dots & n^2-1 & n^2 \end{vmatrix}_{nxn} = ?$$

ÇÖZÜM:

Birinci satırı diğer bütün satırlardan çıkarırsak,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ n & n & n & \dots & n & n \\ 2n & 2n & 2n & \dots & 2n & 2n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n^2-n & n^2-n & n^2-n & \dots & n^2-n & n^2-n \end{vmatrix} \text{bulunur.}$$

satırlar(3.satır,2.satır ile) orantılı olduğundan determinant değeri (0) olur.

SORU 10)

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & 1+a_3 & \dots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & 1+a_n \end{vmatrix}_{nxn} = ?$$

ÇÖZÜM:

$$\xrightarrow{C_1+C_2+\ldots+C_n} \begin{vmatrix} 1+a_1+a_2+\ldots+a_n & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ 1+a_1+a_2+\ldots+a_n & 1+a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ 1+a_1+a_2+\ldots+a_n & a_2 & 1+a_3 & \dots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1+a_1+a_2+\ldots+a_n & a_2 & a_3 & \dots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

$$(1+a_1+a_2+\ldots+a_n)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ 1 & 1+a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ 1 & a_2 & 1+a_3 & \ldots & a_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & a_2 & a_3 & \ldots & 1+a_n \end{vmatrix} \xrightarrow[S_n-S_1]{\substack{S_2-S_1 \\ S_3-S_1 \\ \ldots\ldots}}$$

$$(1+a_1+a_2+\ldots+a_n)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = (1+a_1+a_2+\ldots+a_n) \text{ olur.}$$

SORU 11)

$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{vmatrix}$ Determinantını (**Vandermonde determinantı**) hesaplayınız.

ÇÖZÜM:

$$\xrightarrow{\substack{S_2-S_1 \\ S_3-S_1 \\ S_4-S_1}} \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & y-x & y^2-x^2 & y^3-x^3 \\ 0 & z-x & z^2-x^2 & z^3-x^3 \\ 0 & t-x & t^2-x^2 & t^3-x^3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{MERTEBE} \\ \text{DÜŞÜRME}}}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & y-x & (y-x)(y+x) & (y-x)(y^2+yx+x^2) \\ 0 & z-x & (z-x)(z+x) & (z-x)(z^2+zx+x^2) \\ 0 & t-x & (t-x)(t+x) & (t-x)(t^2+tx+x^2) \end{vmatrix} =$$

$$(y-x)(z-x)(t-x)\begin{vmatrix} 1 & y+x & y^2+yx+x^2 \\ 1 & z+x & z^2+zx+x^2 \\ 1 & t+x & t^2+tx+x^2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{S_2-S_1 \\ S_3-S_1}}$$

$$(y-x)(z-x)(t-x)\begin{vmatrix} 1 & y+x & y^2+xy+x^2 \\ 0 & z-y & z^2+xz-y^2-xy \\ 0 & t-y & t^2+xt-y^2-xy \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{MERTEBE} \\ \text{DÜŞÜRME}}}$$

$$(y-x)(z-x)(t-x)\begin{vmatrix} z-y & z^2+xz-y^2-xy \\ t-y & t^2+xt-y^2-xy \end{vmatrix}$$

= (y-x)(z-x)(t-x)(t-y)(t-z)(z-y) bulunur.

SORU 12)

$$\begin{vmatrix} 2a+b+c & b & c \\ a & a+2b+c & c \\ a & b & a+b+2c \end{vmatrix} = ?$$

ÇÖZÜM:

$$\xrightarrow{C_1+C_2+C_3} \begin{vmatrix} 2(a+b+c) & b & c \\ 2(a+b+c) & a+2b+c & c \\ 2(a+b+c) & b & a+b+2c \end{vmatrix} =$$

$$2(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a+2b+c & c \\ 1 & b & a+b+2c \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[S_3-S_1]{S_2-S_1} 2(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & a+b+c & 0 \\ 0 & 0 & a+b+c \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3 \text{ bulunur.}$$

SORU 13) $A^2+2A+I=0$ eşitliğini sağlayan A_{nxn} matrisinin regüler(düzgün) olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM:

$A^2+2A=-I$

$A(A+2I)=-I$ (iki tarafın determinantı alınırsa)

$|A||A+2I| = \mp 1$ (n tek ise –1 , çift ise +1 olur).

O halde $|A| \neq 0$ olduğundan A regülerdir**.**

SORU 14) A ve B n. mertebeden karesel iki matris ve AB=I ise A ve B ‘nin regüler olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM:

AB=I iki tarafın determinantını alırsak $|A.B|=|I| \Rightarrow |A|.|B|=1$ o halde $|A| \neq 0\ ve\ |B| \neq 0$ ’dır.

Yani A ve B regülerdir.

SORU 15)

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} = ?$$

ÇÖZÜM:

$$\xrightarrow[\substack{S_1-S_4\\S_2-S_4\\S_3-S_4}]{} \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & y \\ 0 & -x & 0 & y \\ 0 & 0 & y & y \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$$ Birinci satıra göre açarsak,

$$= x\begin{vmatrix} -x & 0 & y \\ 0 & y & y \\ 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 0 & -x & 0 \\ 0 & 0 & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x[-x(y-y^2-y)+y(-y)]-y(-xy) = x^2y^2$$

bulunur.

SORU 19)

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix} = ?$$

ÇÖZÜM:

$$\xrightarrow{\frac{S_1}{a}+S_2} \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b+\frac{1}{a} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{DÜŞÜRME}]{\text{MERTEBE}} a\begin{vmatrix} b+\frac{1}{a} & 1 & 0 \\ -1 & c & 1 \\ 0 & -1 & d \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_3}$$

$$-a\begin{vmatrix} 0 & 1 & b+\frac{1}{a} \\ 1 & c & -1 \\ d & -1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{S_3-d.S_2} -a\begin{vmatrix} 0 & 1 & b+\frac{1}{a} \\ 1 & c & -1 \\ 0 & -1-dc & d \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{DÜŞÜRME}]{\text{MERTEBE}} a\begin{vmatrix} 1 & b+\frac{1}{a} \\ -1-dc & d \end{vmatrix} = a(d+b+\frac{1}{a}+bcd+\frac{dc}{a})$$

$= ad+ab+1+abcd+dc$ bulunur.

SORU 20)

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{nxn}$$ ise Det(A) nedir?

ÇÖZÜM:

Tüm satırlar toplamını son satırda yazarsak

$$\xrightarrow{S_n+S_{n-1}+\ldots+S_1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & n-1 & n-1 & \ldots & n-1 \end{vmatrix}$$

$$= (n-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{C_1-C_n \\ C_2-C_n \\ \cdots\cdots \\ C_{n-1}-C_n}}$$

Son sütunu diğer sütunlardan çıkarırsak

$$= (n-1)\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \ldots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = (n-1)(-1)^{n-1} \text{ elde edilir.}$$

SORU 24)

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = ?$$

ÇÖZÜM:

Birinci sütuna diğer sütunları eklersek

$$\xrightarrow{C_1+C_2+C_3+C_4} \begin{vmatrix} x+3 & 1 & 1 & 1 \\ x+3 & x & 1 & 1 \\ x+3 & 1 & x & 1 \\ x+3 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = (x+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{S_2-S_1 \\ S_3-S_1 \\ S_4-S_1}}$$

$$= (x+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x+3)(x-1)^3 \text{ olarak bulunur.}$$

SORU 25)

n tek bir doğal sayı olmak üzere, nxn tipinde ters simetrik bir matrisin determinant değerini hesaplayınız.

ÇÖZÜM:

$A^t = -A$ demektir. İki tarafın determinantını alırsak,

$$\left|A^t\right| = \left|-A\right| \Rightarrow \left|A\right| = (-1)^n \left|A\right| \text{ olur.}$$

Bu durumda n tek ise $\left|A\right| = -\left|A\right| \Rightarrow \left|A\right| = 0$ bulunur.

SORU 26)

$$\begin{vmatrix} a^2 & a^2 & a^2 & \ldots & a^2 \\ a^2 & 0 & a^2 & \ldots & a^2 \\ a^2 & a^2 & 0 & \ldots & a^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a^2 & a^2 & a^2 & \ldots & 0 \end{vmatrix}_{nxn} = \text{Determinantını hesaplayınız.}$$

ÇÖZÜM: Birinci satırı bütün satırlardan çıkarırsak,

$$\xrightarrow[\substack{\ldots\ldots\ldots \\ S_n - S_1}]{\substack{S_2 - S_1 \\ S_3 - S_1}} \begin{vmatrix} a^2 & a^2 & a^2 & \ldots & a^2 \\ 0 & -a^2 & 0 & \ldots & a^2 \\ 0 & 0 & -a^2 & \ldots & a^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -a^2 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}a^{2n} \quad \text{bulunur.}$$

SORU 35)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \ldots & 1 \\ & & & & \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & n-x \end{vmatrix}_{(n+1)x(n+1)}$$

determinantı sıfır ise x hangi değerleri alabilir?

ÇÖZÜM: Birinci satırı diğer satırlardan çıkaralım,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & -x & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & \ldots & 0 \\ . & . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n-x-1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{üçgensel matris oldu}$$

$$= -x(1-x)(2-x)\ldots(n-x-1) = 0 \qquad \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \\ \ldots\ldots \\ x = n-1 \end{array}\right\} \text{bulunur.}$$

SORU 36) $f(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & x \\ 0 & x & x & 1 \\ 1 & x & x & 0 \\ x & 0 & 1 & x \end{vmatrix}$ veriliyor.f(a)=0 olan $a \in \Re$'leri bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$\xrightarrow{S_1\leftrightarrow S_3} -\begin{vmatrix} 1 & x & x & 0 \\ 0 & x & x & 1 \\ x & 1 & 0 & x \\ x & 0 & 1 & x \end{vmatrix} \xrightarrow[S_4-xS_1]{S_3-xS_1} -\begin{vmatrix} 1 & x & x & 0 \\ 0 & x & x & 1 \\ 0 & 1-x^2 & -x^2 & x \\ 0 & -x^2 & 1-x^2 & x \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{DÜŞÜRME}]{\text{MERTEBE}} -\begin{vmatrix} x & x & 1 \\ 1-x^2 & -x^2 & x \\ -x^2 & 1-x^2 & x \end{vmatrix} \xrightarrow[S_3-xS_1]{S_2-xS_1} -\begin{vmatrix} x & x & 1 \\ 1-2x^2 & -2x^2 & 0 \\ -2x^2 & 1-2x^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{DÜŞÜRME}]{\text{MERTEBE}} -\begin{vmatrix} 1-2x^2 & -2x^2 \\ -2x^2 & 1-2x^2 \end{vmatrix} = -\left[(1-2x^2)^2-4x^4\right]$$

$f(x)=-(1-4x^2)=4x^2-1$ bulunur. $f(a)=4a^2-1=0 \Rightarrow a=\mp\frac{1}{2}$

SORU 37) $\begin{vmatrix} 3a_1+b_1 & 3a_2+b_2 & 3a_3+b_3 \\ 3b_1+c_1 & 3b_2+c_2 & 3b_3+c_3 \\ 3c_1+a_1 & 3c_2+a_2 & 3c_3+a_3 \end{vmatrix}$ determinantını hesaplayınız.

ÇÖZÜM:

$$\begin{vmatrix} 3a_1+b_1 & 3a_2+b_2 & 3a_3+b_3 \\ 3b_1+c_1 & 3b_2+c_2 & 3b_3+c_3 \\ 3c_1+a_1 & 3c_2+a_2 & 3c_3+a_3 \end{vmatrix} \xrightarrow{S_1+S_2+S_3}$$

$$\begin{vmatrix} 4(a_1+b_1+c_1) & 4(a_2+b_2+c_2) & 4(a_3+b_3+c_3) \\ 3b_1+c_1 & 3b_2+c_2 & 3b_3+c_3 \\ 3c_1+a_1 & 3c_2+a_2 & 3c_3+a_3 \end{vmatrix} =$$

$$4\left\{\begin{vmatrix} a_1+b_1+c_1 & a_2+b_2+c_2 & a_3+b_3+c_3 \\ 3b_1 & 3b_2 & 3b_3 \\ 3c_1+a_1 & 3c_2+a_2 & 3c_3+a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1+b_1+c_1 & a_2+b_2+c_2 & a_3+b_3+c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ 3c_1+a_1 & 3c_2+a_2 & 3c_3+a_3 \end{vmatrix}\right\} =$$

$$4\left\{3\left(\begin{vmatrix} a_1+b_1+c_1 & a_2+b_2+c_2 & a_3+b_3+c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 3c_1 & 3c_2 & 3c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1+b_1+c_1 & a_2+b_2+c_2 & a_3+b_3+c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}\right) + \right.$$

$$3\underbrace{\begin{vmatrix} a_1+b_1+c_1 & a_2+b_2+c_2 & a_3+b_3+c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}_{0} +$$

$$\left.\begin{vmatrix} a_1+b_1+c_1 & a_2+b_2+c_2 & a_3+b_3+c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}\right\}$$

$$=4\left[9\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}+3\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}\right]=28\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \text{ olur.}$$