ELEMANTER İŞLEMLER
VE
RANK

Bir matrisin elemanlarına aşağıdaki işlemlerin bir veya birkaçı uygulandığında o matrise denk yeni matrisler elde edilir.

i) Herhangi iki satırı (sütunu) yer değiştirmek.
ii) Bir satırı (sütunu) sıfırdan farklı bir sabitle çarpmak.,
iii) Bir satırı (sütunu) sıfırdan farklı bir sabitle çarpıp diğer bir satıra (sütuna) eklemek (çıkarmak).

Bu işlemlere **elemanter satır-sütun** işlemleri adı verilir.
Bir A matrisine sonlu sayıda elemanter satır-sütun işlemlerini ardarda uygulamakla elde edilen yeni matris B ise, bu iki matris birbirine denktir denir ve A~B şeklinde gösterilir.

4.1 ELEMANTER MATRİSLER

Birim matrise yukarıda belirtilen elemanter işlemlerin uygulanmasıyla elde edilen matrislere **elemanter matris** denir. Elemanter matrisler E_i şeklinde gösterilir.
Buna göre üç tip elemanter matris vardır:Birinci elemanter işleminki birinci tip elemanter matris E_1,ikincininki ikinci tip E_2 ve üçüncü elemanter işleminki üçüncü tip E_3 tür.

ÖRNEK: 4x4 lük bir matrisin ikinci satırı ile üçüncü satırını yer değiştiren elemanter matris E_1 i belirleyiniz.

ÇÖZÜM:

$I_4=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$ dir.Buna göre $E_1=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$ dır.

Yani4x4 lük bir matrisi E_1 ile soldan çarparsak ikinci satırı ile üçüncü satırı yer değiştirir. $A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\1&1&3&1\\1&2&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$ olsun $E_1A=$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3&4\\1&1&3&1\\1&2&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\1&2&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$$ elde edilir.

O halde bir matrise elemanter işlemlerin uygulanması,soldan ilgili elemanter matrisle ardarda çarpılması demektir.

Elemanter matrisle bir matrisin sağdan veya soldan çarpılması elemanter martisin ifade ettiği elemanter işlemin sütun veya satır olarak yansımasını sağlar. Yani soldan çarpıldığında etkisini satır işlemi olarak, sağdan çarpılması ise etkisini sütun işlemi olarak gösterir.

Yukardaki örneğimizde A matrisini sağdan E_1 matrisiyle çarparsak ikinci sütunla üçüncü sütunun yer değiştirmesini sağlar.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Çünkü E_1 matrisinin elemanter işlem olarak satır karşılığı 2. Satır ile 3.satırı yer değiştirmektir. Ancak sütun elemanter işlemi olarak 2. Sütunla 3. Sütunun yer değiştirmesini sağlar. İşte etkinin satır veya sütunda olması çarpanın yönü ile sağlanır.

4.1.1 ELEMANTER MATRİSLERİN ÖZELİKLERİ

- Her elemanter matris mutlaka düzgündür.Ayrıca Her düzgün matris de elemanter matrislerin bir çarpımı olarak yazılabilir.
- Bir kare matris elemanter işlemlerle aynı tip birim matrise indirgenebiliyorsa regülerdir (tersi de doğrudur).
- Birinci tip elemanter matrislerin determinantı - 1 dir.E_1 birim matriste iki satırın yer değiştirmesi ile elde edildiğinden $|E_1|=-1$ dir.

İkinci tip elemanter matrislerin determinantı,E_2 birim matrisin k gibi bir skalerle çarpımından elde edildiğine göre, $|E_2|=k|I_n|=k$ olur.

Üçüncü tip elemanter matrisin determinantı $|E_3|=1$ olur.

- E bir elemanter matris olmak üzere, $|EA|=|E||A|$ ve $|AE|=|A||E|$ dir.

ÖRNEK: $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin regüler olduğunu elemanter satır sütun işlemlerinden yararlanarak gösteriniz.

ÇÖZÜM: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_3+S_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_2 \leftrightarrow -S_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_3+S_2}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_1+S_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_3 \leftrightarrow -S_3}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_1+2S_3, S_2+2S_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ o halde matris regülerdir.

4.2 EŞELON FORM

Bir matrise elemanter satır sütun işlemleri uygulanarak o matrisin satır veya sütunca indirgenmiş eşelon formları elde edilebilir, matrisin tersi bulunabilir. Ayrıca matrisin rankı belirlenebilir.

A mxn tipinde bir matris olmak üzere elemanter satır sütun işlemleriyle $1 \leq k \leq m$ olacak şekilde bir k tamsayısı ve $c_1 < c_2 < \ldots < c_k$ olacak şekilde $\{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$ sütun sıra numaraları vardır ki ;

i) Her $1 \leq i \leq k$ için i. satırın sıfırdan farklı ilk bileşeni 1 olup c_i inci sütun üzerindedir.

ii) Son m-k tane satırın hepsi sıfırdır.

Bu şartlara göre oluşan B matrisine, A matrisinin **satırca eşelon formu** denir. Bu iki şarta ilave olarak,

Her $1 \leq i \leq k$ için c_i inci sütunun sadece i. bileşeni 1 diğer bütün elemanları sıfır olma şartı da gerçekleniyorsa oluşan B matrisine A matrisinin **satırca indirgenmiş eşelon formu** denir.

Buna göre,

$$\begin{array}{c} \qquad\qquad c_1 \qquad\quad c_2 \qquad\quad c_k \\ B = \begin{bmatrix} 0\ 0\ \ldots\ 0\ 1\ x\ \ldots\ 0\ x\ \ldots\ 0\ y\ \ldots \\ 0\ 0\ \ldots\ 0\ 0\ 0\ \ldots\ 1\ x\ \ldots\ 0\ y\ \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0\ 0\ \ldots\ 0\ 0\ 0\ \ldots\ 0\ 0\ \ldots\ 1\ y\ \ldots \\ 0\ 0\ \ldots\ 0\ 0\ 0\ \ldots\ 0\ 0\ \ldots\ 0\ 0\ \ldots \\ 0\ 0\ \ldots\ 0\ 0\ 0\ \ldots\ 0\ 0\ \ldots\ 0\ 0\ \ldots \end{bmatrix} \begin{array}{l} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} k \text{ tane} \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} m-k \text{ tane} \end{array} \end{array}$$

yazılabilir. Burada x ve y sıfırdan farklı olabilecek bileşenleri göstermektedir.

Benzer işlemler sütuna uygulanarak, sütunca indirgenmiş eşelon form elde edilebilir.

Yukarda belirtilen B matrisindeki x,y elemanları da sıfır olacak şekilde düzenleme yapılabilir.Bir matrisin böyle şekline **tam indirgenmiş eşelon formu** denir.

Bu durumda bir matrisin eşelon formunu, elemanter işlemlerle o matristen elde edilebilecek en basit matris olarak ta tanımlayabiliriz.

ÖRNEK:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ Matrisi satırca eşelon formdadır. Aynı matrisin satırca indirgenmiş eşelon formunu,ikinci satırdan üçüncü satırın 3 katını,birinci satırdan üçüncü satırı çıkartarak aşağıdaki matris olarak elde ederiz;

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrislerin eşelon forma getirilmesi Lineer denklem sistemlerinin çözümünde yararlanılacak önemli bir özelliktir.

Elemanter satır-sütun işlemlerinden yararlanarak, nxn tipindeki düzgün bir matrisin tersini bulmak için matris I_n birim matrisi ile artırılır (yan yana yazılır). Böylece $\left[A \vdots I_n\right]$ matrisi oluşur. Bu matrise elemanter işlemler uygulanarak $\left[I_n \vdots A^{-1}\right]$ şeklindeki denk matris elde edilir.

ÖRNEK: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ matrisinin tersini bulalım:

Elemanter işlemlerden yararlanalım.

$\left[A \vdots I_3\right] = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ ikinci satırdan birinci satırı çıkaralım,

$$\overset{s_2-s_1}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{\substack{-s_2 \\ \frac{s_3}{5}}}{\approx} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/5 \end{array}\right] \overset{\substack{s_1-2s_3 \\ s_2-5s_3}}{\approx} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2/5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/5 \end{array}\right]$$

böylece,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2/5 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

TEOREM: A nxn tipinde bir matris ve B matrisi de A matrisine elemanter satır-sütun işlemleri uygulanarak elde edilen matris olsun.Aynı elemanter işlemlerinin I_n birim matrisine uygulanmasıyla elde edilen elemanter matris $E=E_1.E_2....E_k$ ise; $B=EA$ (veya $B=AE$) olur. O halde B, A matrisine satırca (veya sütunca) denk bir matris ise $E_1,E_2,...,E_k$ elemanter matrisler olmak üzere,

$B=E_k,E_{k-1},...,E_1A$ (veya $B=E_1,E_2,...,E_kA$) olur.Eğer $B=I$ alınırsa elemanter işlemlerden yararlanarak ters matrisi elde etmiş oluruz.

$E_k,E_{k-1},...,E_1A=B=I$ ise $E_k,E_{k-1},...,E_1=A^{-1}$ bulunur.

ÖRNEK:

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin tersini elemanter işlemlerden yararlanarak bulunuz.

ÇÖZÜM: Daha önce aynı matrisin regüler olduğunu göstermek için uyguladığımız elemanter işlemleri aynı tip birim matris olan I_3 matrisine
uygulayarak ters matrisi bulabiliriz:

$$I_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{s_3+s_1}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{s_2\leftrightarrow -s_2}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{s_3+s_2}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\1&-1&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{s_1+s_2}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&-1&0\\1&-1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{s_3\leftrightarrow -s_3}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&-1&0\\-1&1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{s_1+2s_3\,;s_2+2s_3}\begin{bmatrix}-1&1&-2\\-2&1&-2\\-1&1&-1\end{bmatrix}$$

O halde $A^{-1}=\begin{bmatrix}-1&1&-2\\-2&1&-2\\-1&1&-1\end{bmatrix}$ bulunur.

4.3 LİNEER BAĞIMLILIK VE BAĞIMSIZLIK

$x_1,x_2,...,x_n$ aynı sayıda bileşenleri bulunan vektörler ve $\lambda_1,\lambda_2,..., \lambda_n$ reel sabitler olmak üzere;

$$\lambda_1.x_1+\lambda_2.x_2+\cdots+\lambda_n.x_n=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k.x_k=\underline{0}$$ eşitliğinin sağlanması için $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$

olması gerekiyorsa x vektörleri birbirinden **lineer bağımsız** vektörlerdir. Eşitliğin 0 olması, λ lardan en az birinin sıfırdan farklı değer almasıyla mümkünse, x vektörleri **lineer bağımlıdır** denir.

ÖRNEK 1: $x_1=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$; $x_2=\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix}$ vektörlerinin Lineer bağımlı olduklarını gösterelim:

$\lambda_1.x_1+\lambda_2.x_2=\underline{0}$ için $\begin{bmatrix}2\lambda_1\\3\lambda_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4\lambda_2\\6\lambda_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

$2\lambda_1+4\lambda_2=0$ $\qquad\qquad$ $\lambda_1= -1$
$3\lambda_1+6\lambda_2=0$ sisteminin çözümünden $\lambda_2= 2$ bulunur.

O halde $2x_1-x_2=\underline{0}$ olmaktadır. λ lar sıfırdan farklı olmak üzere, ifadenin sıfır olması mümkün olduğuna göre bu vektörler lineer bağımlıdır.

Demek ki lineer bağımlılık varsa, vektörlerin katsayıları sıfırdan farklı olmasına rağmen, uygun bir lineer kombinasyonu düşünülerek sonucun sıfır olması sağlanabilmektedir. Bu örneğimiz için x_2 nin; $x_2=2x_1$ şeklinde lineer bağımlı olarak yazılabileceği görülmektedir.

TEOREM: Bir matrisin birbirinden lineer bağımsız satır vektörlerinin sayısı ile sütun vektörlerinin sayısı aynıdır.
Bu teorem bir matrisin satır vektörlerinin oluşturduğu uzayın boyutu ile sütun vektörlerinin oluşturduğu uzayın boyutunun aynı olmasıyla da açıklanabilir.

4.4 MATRİSİN RANKI

Bir matrisin birbirinden lineer bağımsız satır(sütun) vektörlerinin sayısı o matrisin rankı olarak tanımlanır. Genellikle r(A) ile gösterilir.

Matrisin rankı, o matrisin determinantı sıfırdan farklı en büyük mertebeden alt matrisinin satır(sütun) sayısı olarak da tanımlanabilir.

Bir A matrisinin eşelon biçiminde köşegen üzerinde oluşan 1 lerin sayısına o matrisin rankı denir.

ÖRNEK 2: $A=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ matrisinin rankını bulalım:

Bu matrisin sütun vektörlerinin lineer bağımlı olduğunu örnek 1 'de göstermiştik. O halde bu matrisin lineer bağımsız sütun vektörü sayısı 1 dir. Buna göre r(A)=1 olur.

4.4.1 *RANKIN ÖZELLİKLERİ*

* A mxn tipinde bir matris olmak üzere, $r(A)\leq \min\{m,n\}$ dir.

* A nxn tipinde köşegen bir matris ise,

r(A)= "sıfırdan farklı köşegen elemanı sayısı " olur.

* $r(I_n)=n$

* $r(A)=r(A')$

* A ve B nxn tipinde tekil olmayan matrisler olmak üzere,

r(A)=r(B)=n ayrıca r(AB)=r(BA)= n dir.

* AveB toplanabilen ve çarpılabilen iki matris olmak üzere,

$r(A+B)\leq r(A)+r(B)$ ve $r(AB)\leq \min\{r(A),r(B)\}$ dir.

* Denk matrislerin rankları birbirine eşittir.

* Sıfır matrisinin rankı da sıfırdır. Dolayısıyla sıfırdan farklı bir matrisin rankı en az 1 olur.

r matrisin rankını göstermek üzere her matris elemanter satır sütun işlemleri uygulanarak, aşağıdaki şekillerden birine dönüştürülebilir.

$$[I_r] \quad ; \quad \begin{bmatrix} I_r \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad [I_r \,\vdots\, 0] \quad \text{veya} \quad \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

Bu şekiller, o matrisin **Normal Formu** olarak adlandırılır. Tersine düşünceyle matrisin Normal Formu belirlenerek rankını bulmak mümkündür.

ÖRNEK: $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ matrisinin rankını hesaplayınız.

ÇÖZÜM: $r(A)\leq 2$ olacaktır.

Rankı hem determinant hem de elemanter işlemler yoluyla bulalım:

i)*Determinant yoluyla:* A matrisinin 2x2 tipindeki alt matrisleri içinde determinantı sıfır olmayan vardır. Bunlardan biri $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-1$ dir.

O halde r(A)=2 olur.

ii)*Elemanter işlemler yoluyla:* A matrisini eşelon formuna getirelim, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \overset{s_2-2s_1}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \overset{\substack{s_1+2s_2 \\ -s_2}}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\overset{c_3-c_1}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{c_3-c_2}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [I_2 \vdots\ 0]$

O halde r(A)=2 bulunur.Matrisin Normal formu da $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [I_2 \vdots 0]$ dır.