Fourier-2D

Görüntünün 2D Fourier dönüşümü

$I(r,c)$, R satır ve C sütuna sahip tek kanallı bir görüntü olsun. O zaman $I(r,c)$'nin Fourier sunumu

$$I(r,c) = \sum_{u=0}^{R-1}\sum_{v=0}^{C-1} \mathbf{I}(u,v) e^{+i2\pi\left(\frac{ur}{R}+\frac{vc}{C}\right)},$$

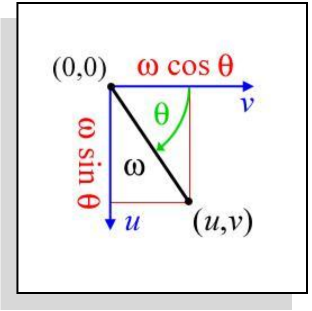
burada

$$\mathbf{I}(u,v) = \frac{1}{RC}\sum_{r=0}^{R-1}\sum_{c=0}^{C-1} I(r,c)\; e^{-i2\pi\left(\frac{ur}{R}+\frac{vc}{C}\right)}$$

Bu karmaşık üsteller 2D sinuzoidlerdir.

R x C Fourier katsayılarıdır.

2D sinüzoid nedir?



Düşün

$$e^{\pm i2\pi\left(\frac{ur}{R}+\frac{vc}{C}\right)} = e^{\pm i2\pi\omega\left(\frac{r\sin\theta}{R}+\frac{c\cos\theta}{C}\right)}$$

burada

$$u=\omega\sin\theta,\ \ v=\omega\cos\theta,\ \ \omega=\sqrt{u^2+v^2},\ \text{and}\ \ \theta=\tan^{-1}\left(\tfrac{-u}{v}\right).$$

Farz etki $R = C = N$. O zaman

$$e^{\pm i2\pi\left(\frac{ur}{R}+\frac{vc}{C}\right)} = e^{\pm i\frac{2\pi\omega}{N}\left(r\sin\theta+c\cos\theta\right)} = e^{\pm i\frac{2\pi}{\lambda}\left(r\sin\theta+c\cos\theta\right)}$$

burada

$$\lambda = N/\omega.$$

2D sinüzoid nedir?

Euler ilişkisini kullanarak,

$$e^{\pm i2\pi\frac{1}{\lambda}(c\cos\theta - r\sin\theta)} = \cos\left[\tfrac{2\pi}{\lambda}(c\cos\theta - r\sin\theta)\right] \pm i\sin\left[\tfrac{2\pi}{\lambda}(c\cos\theta - r\sin\theta)\right]$$

bunun gerçel kısmı

$$\mathrm{Re}\left\{e^{\pm i2\pi\frac{1}{\lambda}(c\cos\theta - r\sin\theta)}\right\} = +\cos\left[\tfrac{2\pi}{\lambda}(c\cos\theta - r\sin\theta)\right]$$

sanal kısmı

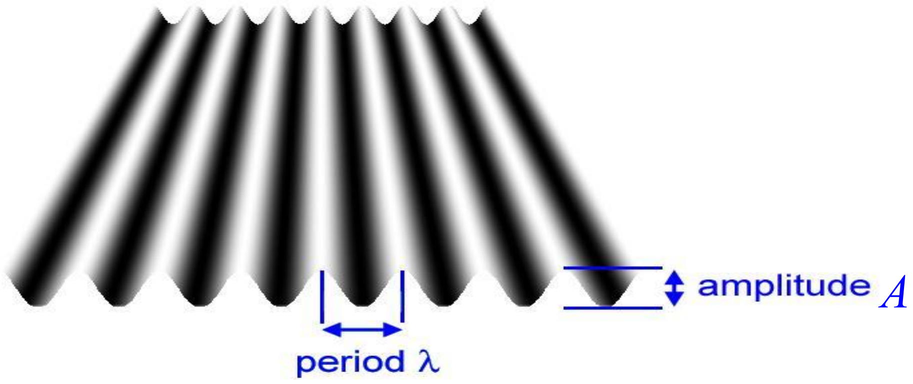
$$\mathrm{Im}\left\{e^{\pm i2\pi\frac{1}{\lambda}(c\cos\theta - r\sin\theta)}\right\} = \pm i\sin\left[\tfrac{2\pi}{\lambda}(c\cos\theta - r\sin\theta)\right]$$

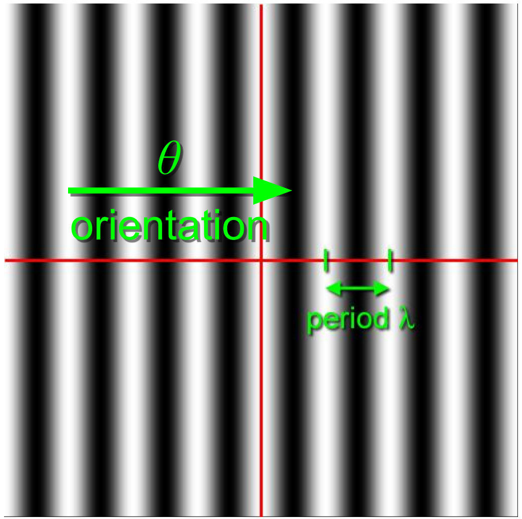
birim genlikli, λ periyotlu ve θ yönlü sinüzoidlerdir.

2D sinüzoid:

$$I(r,c)=\frac{A}{2}\left\{\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(c\cdot\cos\theta - r\cdot\sin\theta)+\phi\right]+1\right\}$$

... grayscale genlikli düzlem dalgalarıdır.

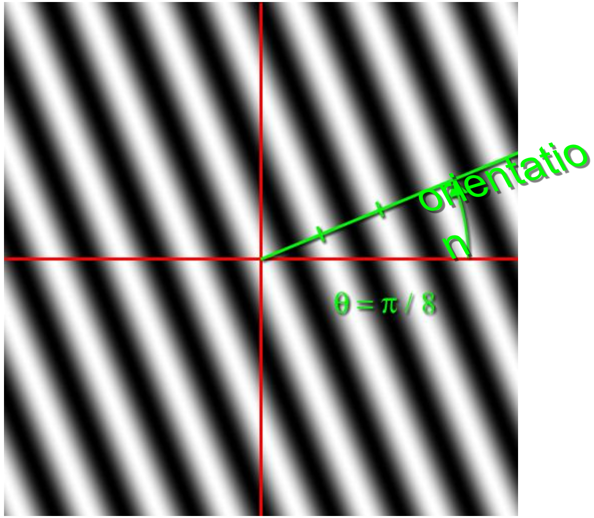


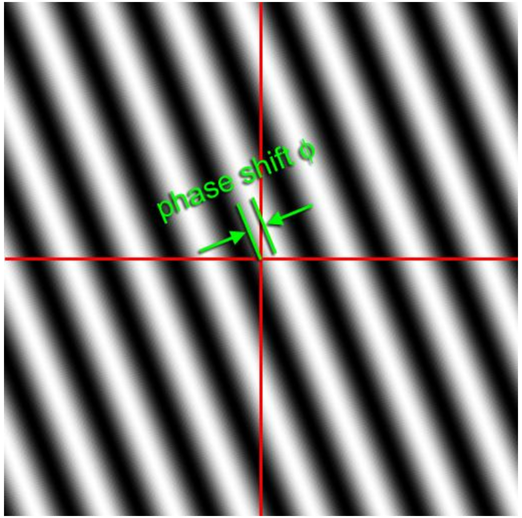


φ = faz kayması

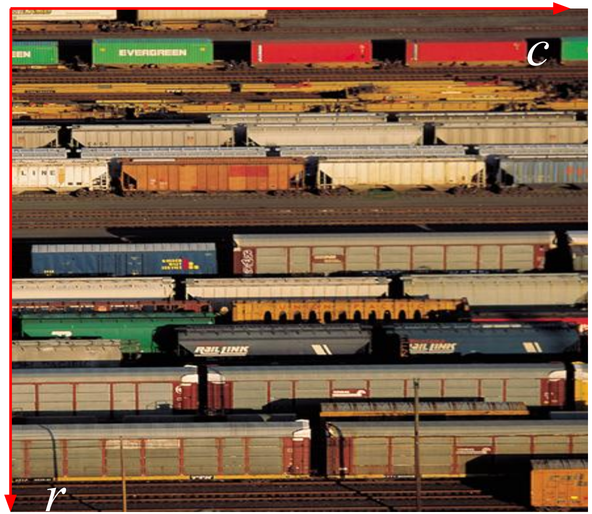
2D Sinüzoidler:

... belirli dönmeler ve,
faz kaymaları

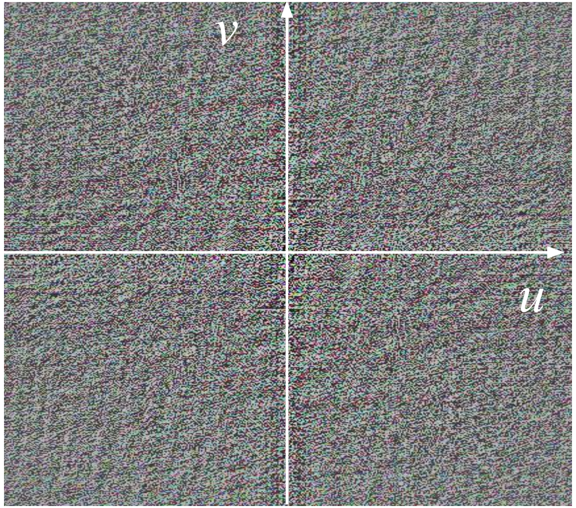




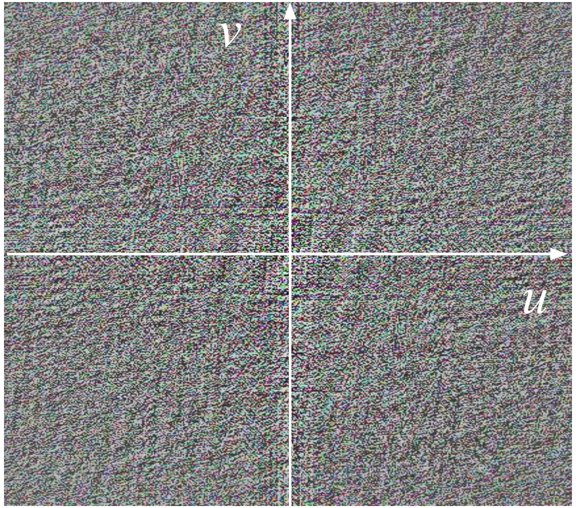
Bir Görüntünün FT’si



I



$\mathrm{Re}[\mathcal{F}\{I\}]$

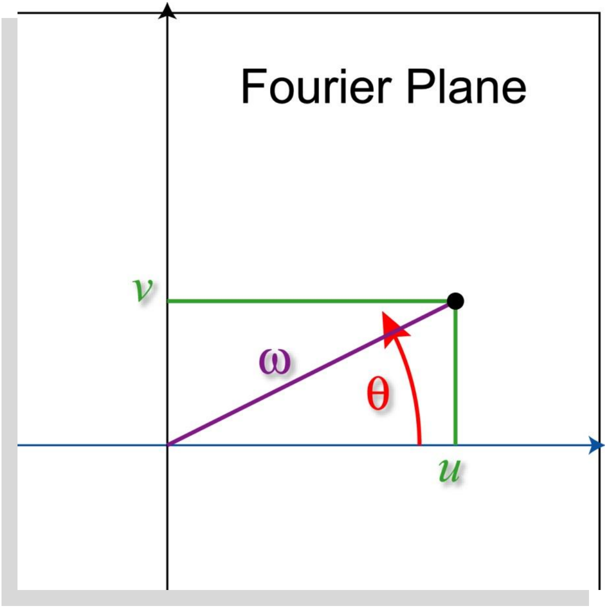


$\mathrm{Im}[\mathcal{F}\{I\}]$

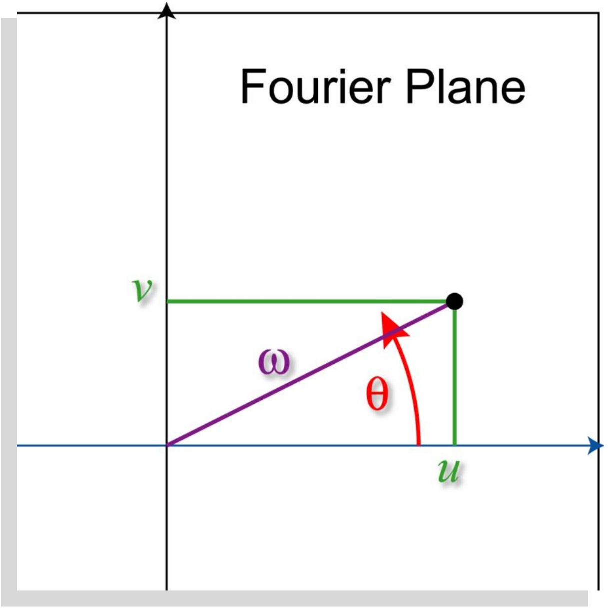
Fourier Düzlemindeki Noktalar

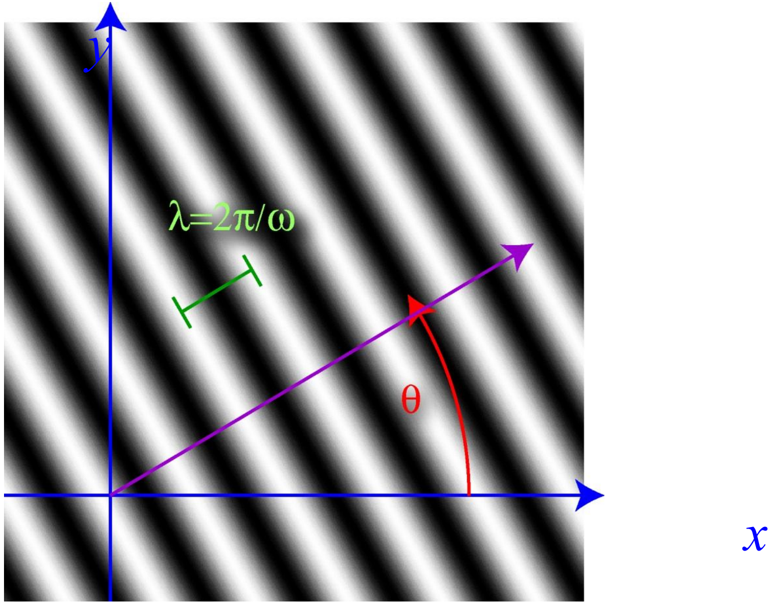
u sütun ve v satır frekansındaki bir nokta ω dalga boylu ve θ açı değerli bir sinüzoiddir.

$\omega = 2\pi/\lambda$, burada λ dalga boyudur.



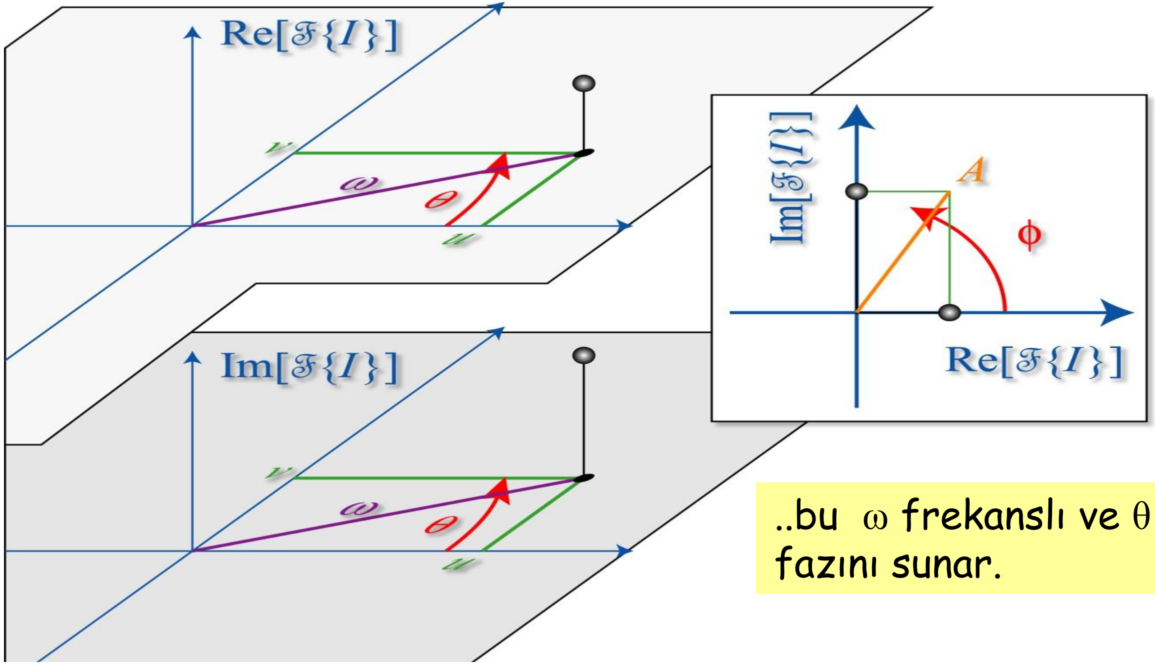
Fourier Düzlemindeki Noktalar





Bu nokta, bu özel sinüzoidi sunar

Fourier Değerleri

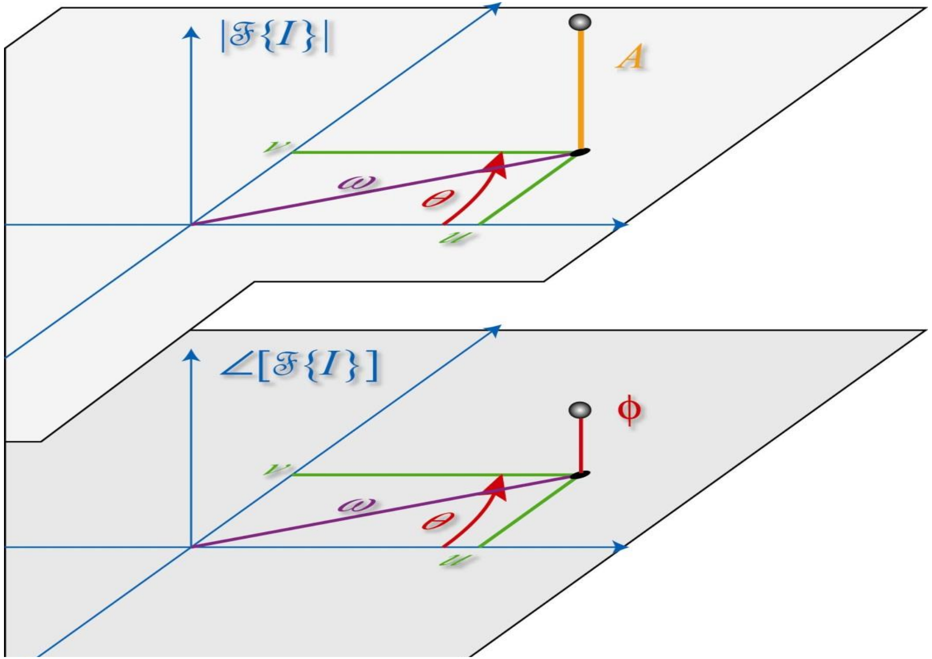


… gerçel ve sanal kısımlı karmaşık bir sayıdır.

Eğer bu sayıyı bir genlik A, ve bir faz, φ, olarak sunarsak

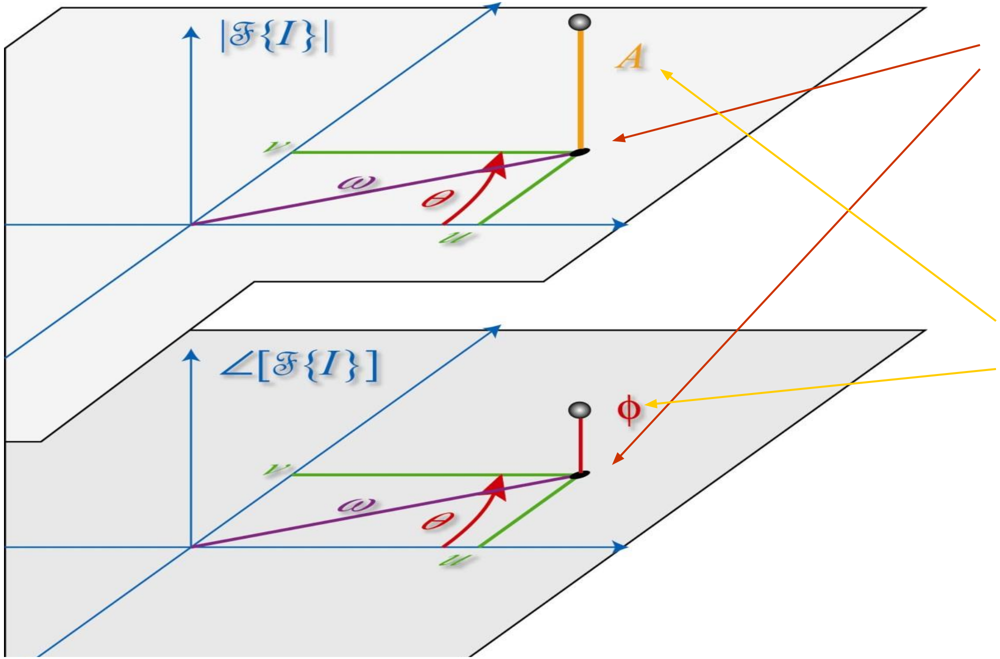
..bu ω frekanslı ve θ yönlü sinüzoidin genlik ve fazını sunar.

Fourier Değerleri



Genlik ve faz sunumu onu daha anlaşılır yapar

Fourier Değerleri



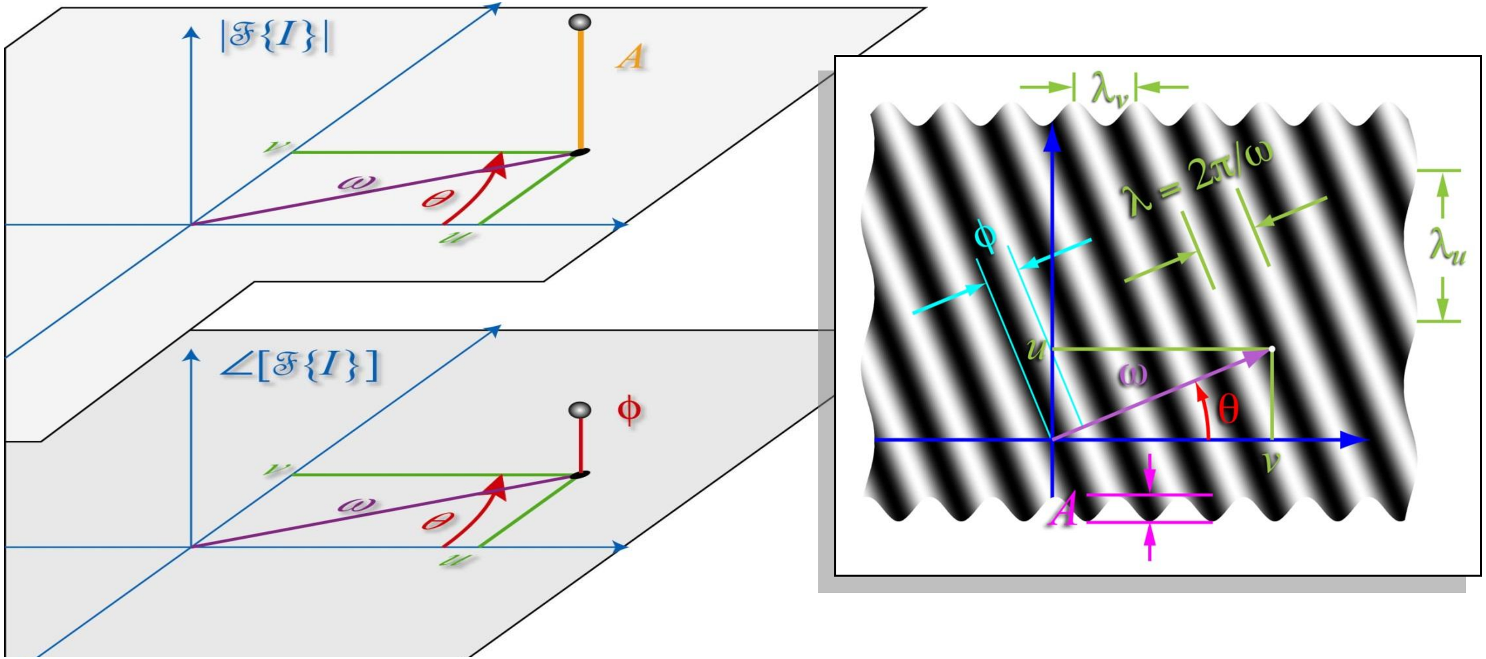
Bu nedenle, Fourier düzlemindeki (u,v)

…ω frekanslı ve θ yönelimli bir sinüzoidi sunar.

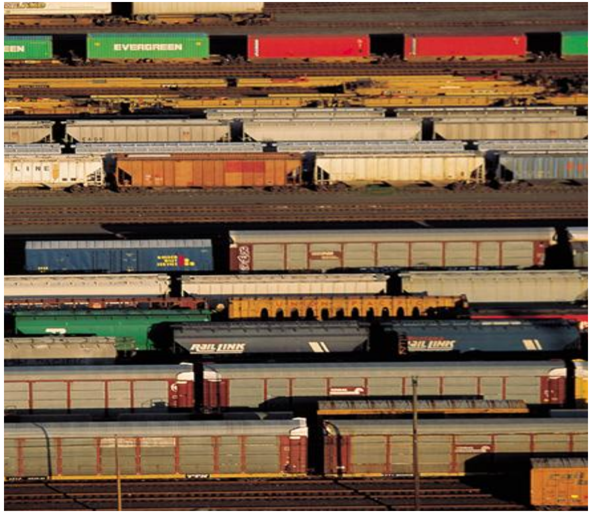
(u,v) nin FT'u karmaşık değerli $F(u,v)$ dur.

…sinüzoidin genlik A, ve fazı φ değerini sunar.

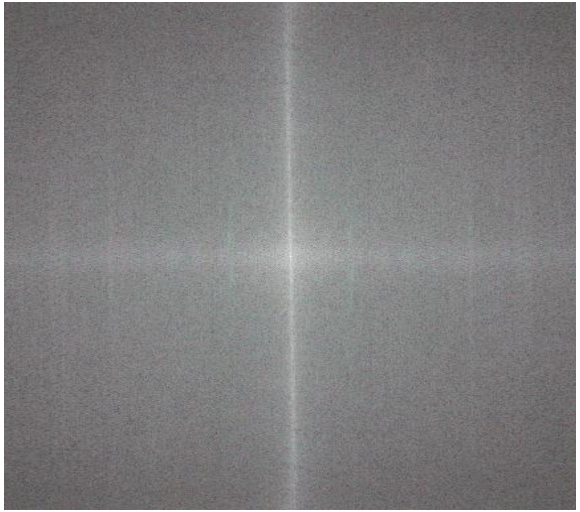
Fourier Değerleri



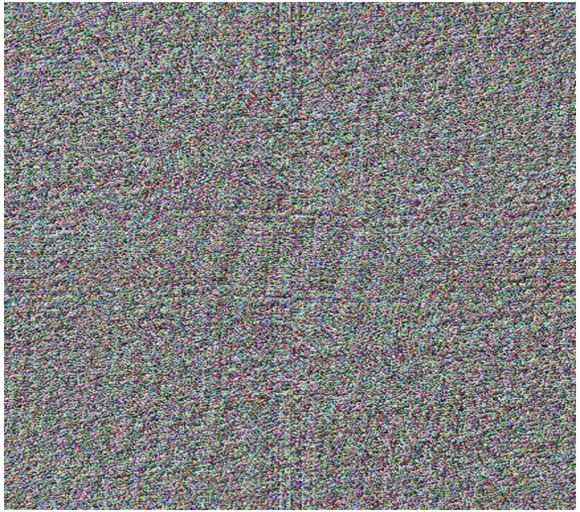
Görüntünün FT si (Genlik+ Faz)



I

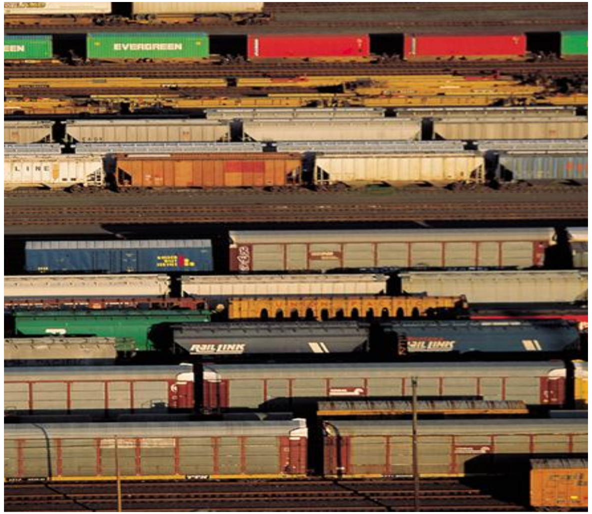


$\log\{|\mathcal{F}\{I\}|^2+1\}$

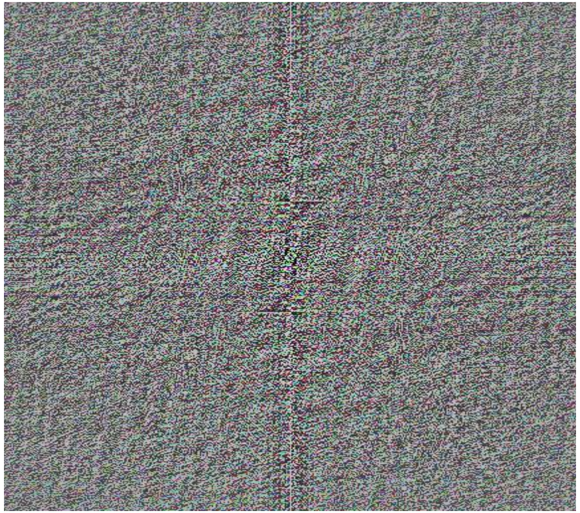


$\angle[\mathcal{F}\{I\}]$

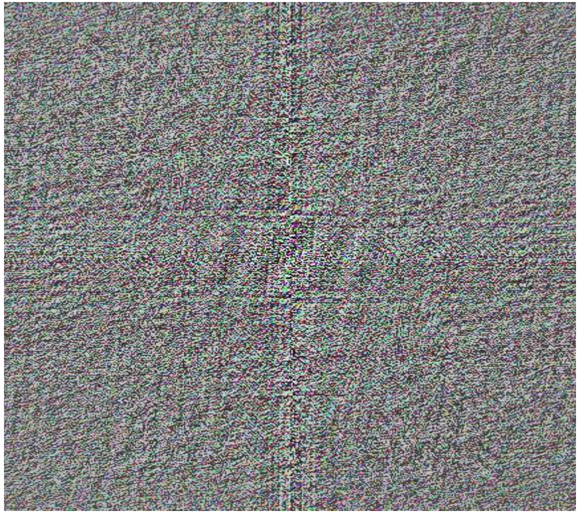
FT’nin Gerçel + Sanal değerleri



I



$\mathrm{Re}[\mathcal{F}\{I\}]$



$\mathrm{Im}[\mathcal{F}\{I\}]$

Güç Spektrumu

Genellikle görüntülemede güç spektrumun log sunumu tercih edilir.

Güç spektrumu, sinyal genliğinin karesidir.

$$\left|\mathbf{I}(u,v)\right|^2 = \mathbf{I}(u,v)\mathbf{I}^*(u,v)$$
$$= [\mathrm{Re}\,\mathbf{I}(u,v) + i\,\mathrm{Im}\,\mathbf{I}(u,v)][\mathrm{Re}\,\mathbf{I}(u,v) - i\,\mathrm{Im}\,\mathbf{I}(u,v)]$$
$$= [\mathrm{Re}\,\mathbf{I}(u,v)]^2 + [\mathrm{Im}\,\mathbf{I}(u,v)]^2.$$

Her bir (u,v) noktası, karesel yoğunluklu frekans bileşenini işaret eder. Bu frekans $\lambda = 1/\sqrt{u^2+v^2}$ periyotlu ve $\theta = \tan^{-1}(v/u)$ yönelimlidir.

```
Matlab:
PS = fftshift(2*log(abs(fft2(I))+1));
```

Güç spektrumun hesabı üzerine

Güç spektrumu $\mathrm{PS}(\mathrm{I}) = |\mathbf{F}\{\mathrm{I}(u,v)\}|^2$ olarak tanımlanır.

Onu görüntülemek için e tabanında logaritma kullanılır. Aksi halde onun dinamik aralığı çok geniş olduğundan her şeyin birlikte görünmesini engeller. İlk olarak ona 1 eklenir ki, minimum logaritma sonucu sıfır olsun (hatırlayalım ki, $\log(f^2) = 2\log(f)$)

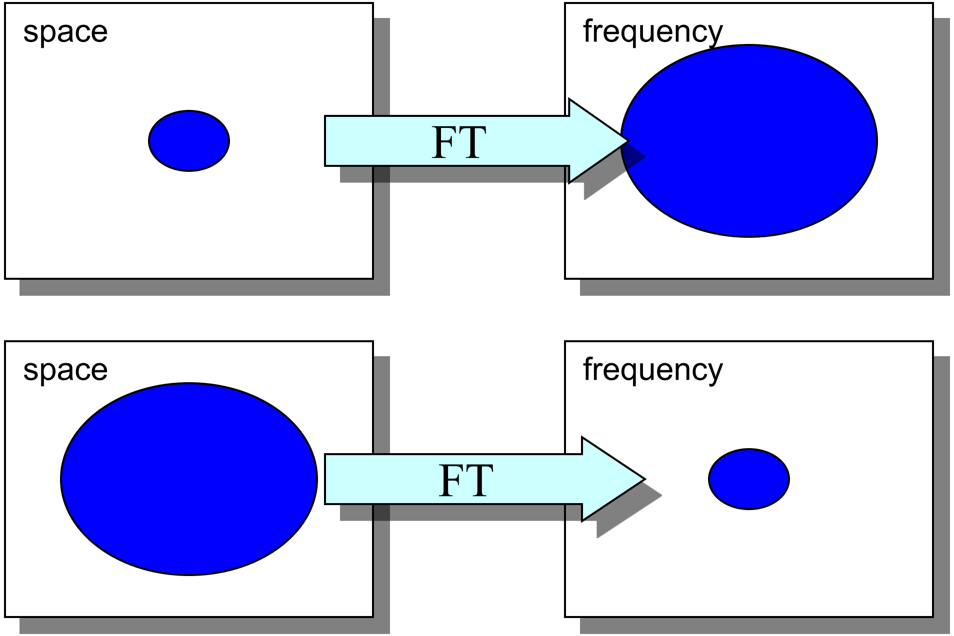
Eğer PS görüntülenmek istenirse, iki ile çarpmaya gerek duyulmaz. Çünkü onu 0-255 aralığına dönüştürmek gerekir. Eğer orijin merkezdeyse o zaman Fourier yapılarını görmek daha kolaydır. Bu nedenle genellikle fftshift kullanılır.

```
>> PS = fftshift(log(abs(fft2(I))+1));
>> M = max(PS(:));
>> image(uint8(255*(PS/M)));
```

Eğer PS sonraki hesaplamalar için kullanılacaksa (örneğin bir fonksiyonun oto korelasyonu, fonksiyonun PS sinin ters FT dir), aşağıdaki gibi hesaplanmalı.

```
>> PS = abs(fft2(I)).^2;
```

Belirsizlik ilişkisi



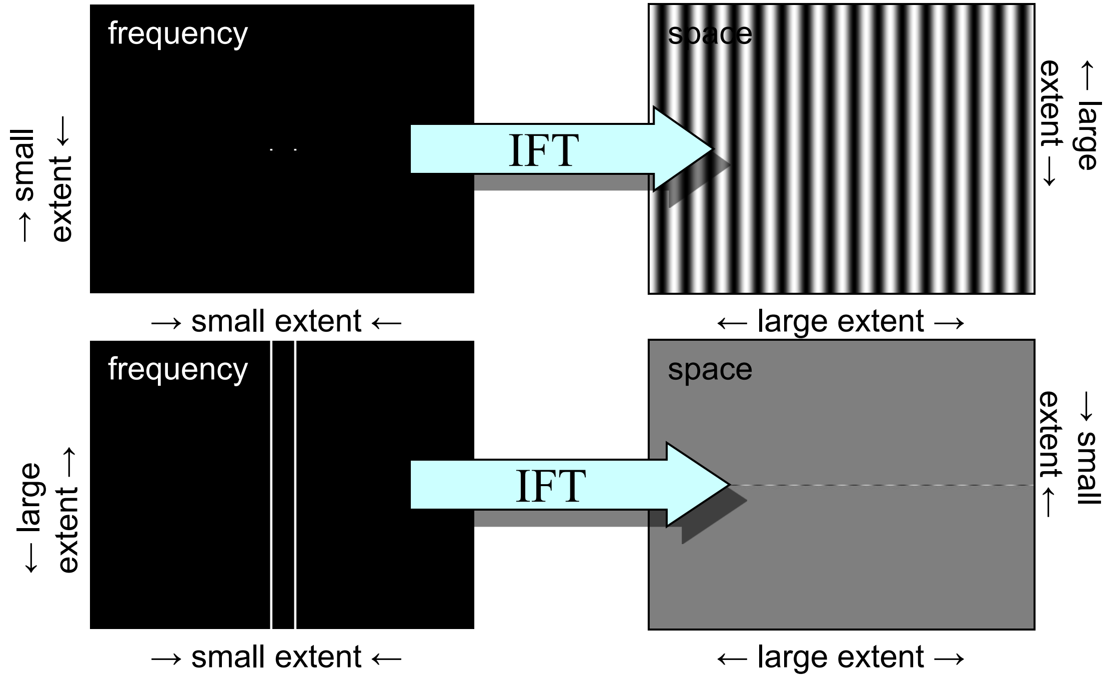
$\Delta x \Delta y$ uzaysal alanda boyutla

$\Delta u \Delta v$ frekans alanda boyutla

$$\Delta x \Delta y \cdot \Delta u \Delta v \geq \frac{1}{16\pi^2}$$

Uzayda küçük bir nesne yüksek bir frekans etkisine sahiptir (tersi de geçerli).

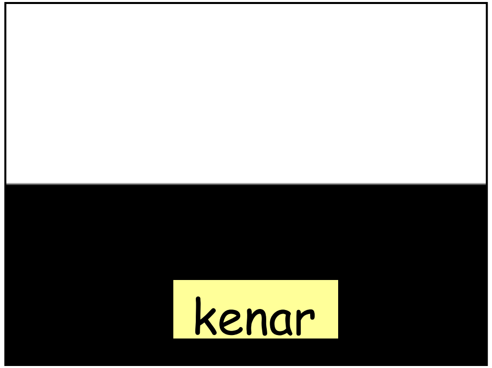
Belirsizlik ilişkisi

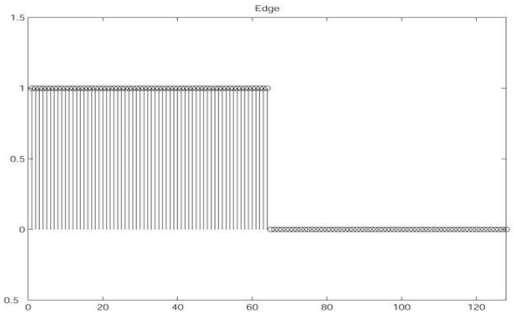


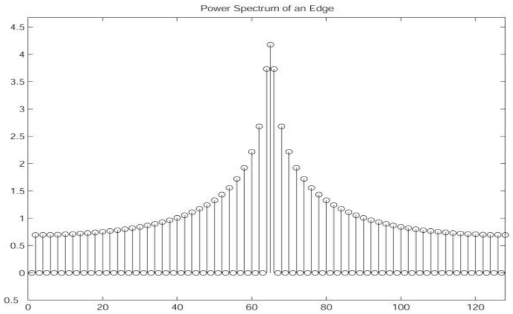
Hatırla ki: Frekans alanda bir çift simetrik impulse uzaysal alanda bir sinüzoid olur.

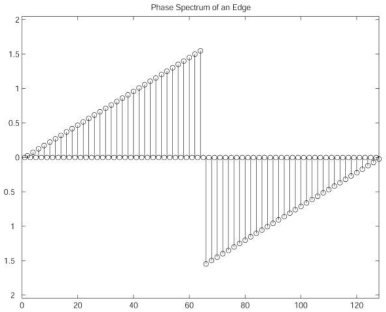
Frekans alanda simetrik bir çift çizgi uzaysal alanda sinüzoidal bir çizgi olur.

Bir kenarın Fourier dönüşümü

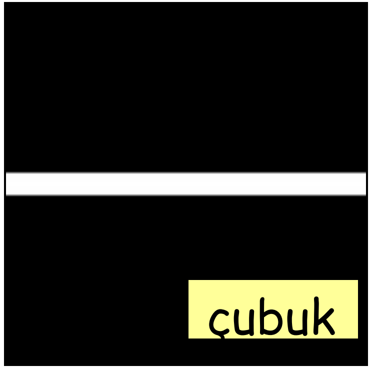


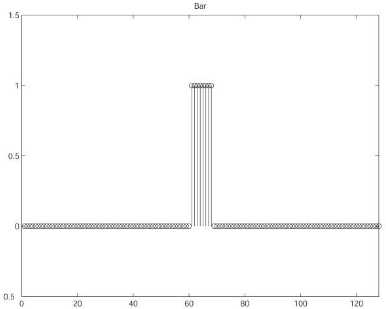


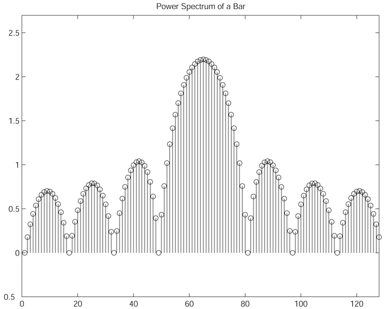


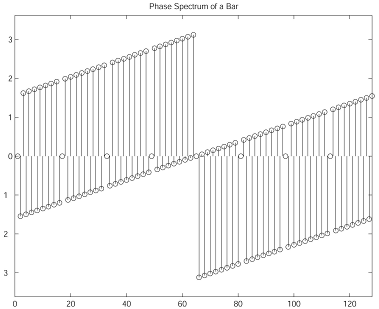


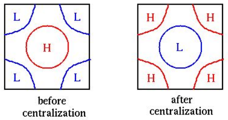
Kalın bir çubuğun FT si











FFT’nin koordinat merkezi

Center = (floor(R/2)+1, floor(C/2)+1)

Even

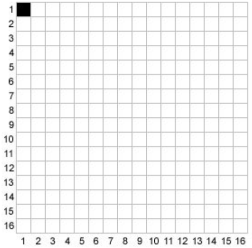
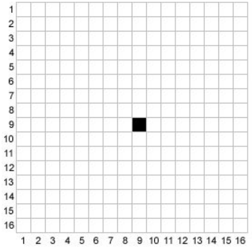


Image Origin



After FFT shift

Odd

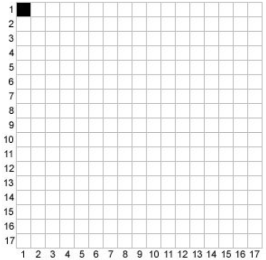
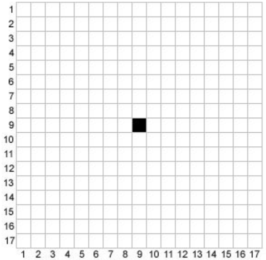
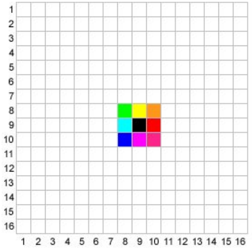


Image Origin

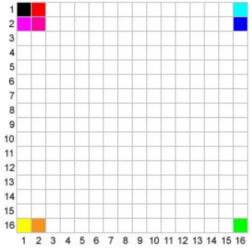


After FFT shift

Even

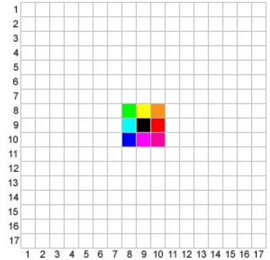


Weight Matrix Origin

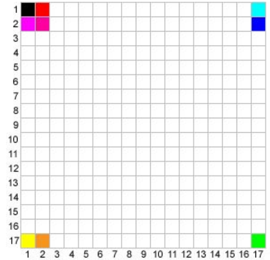


After IFFT shift

Odd



Weight Matrix Origin



After IFFT shift

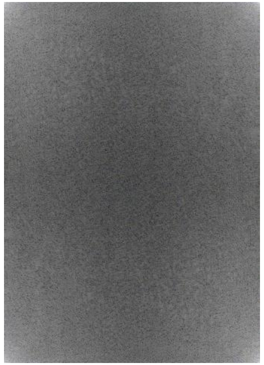
Matlabda `fftshift` ve `ifftshift`

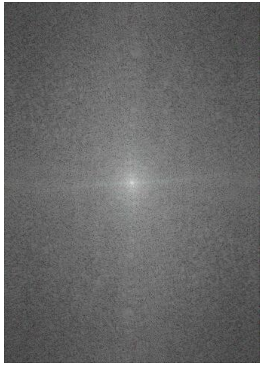
`I = ifftshift(J);`

`J = fftshift(I);`

Orijin

FFT2





Orijin

sonra fftshift

$J(\lfloor R/2 \rfloor + 1, \lfloor C/2 \rfloor + 1) \rightarrow I(1,1)$

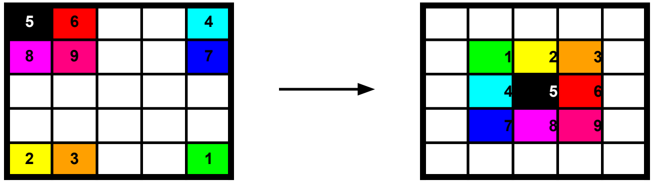
$I(1,1) \rightarrow J(\lfloor R/2 \rfloor + 1, \lfloor C/2 \rfloor + 1)$

burada $\lfloor x \rfloor$ = `floor(x)` = x'den daha küçük en büyük tam sayı

Matlabda `fftshift` ve `ifftshift`

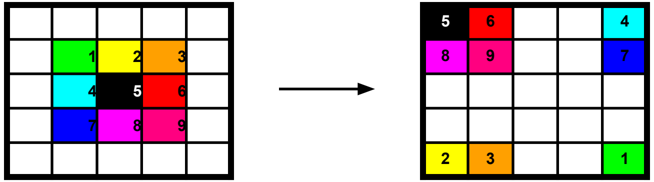
`J = fftshift(I):`

$$I(1,1) \rightarrow J(\lfloor R/2 \rfloor + 1, \lfloor C/2 \rfloor + 1)$$



`I = ifftshift(J):`

$$J(\lfloor R/2 \rfloor + 1, \lfloor C/2 \rfloor + 1) \rightarrow I(1,1)$$



burada $\lfloor x \rfloor$ = `floor(x)` = x'den daha küçük en büyük tam sayı