Hafta 6

Düzgün Kümeler ve Düzgün Deyimler

Sonlu özdevinir (finite automata : FA) **modeli, giriş alfabesindeki simgelerden oluşan dizgilerin bir kısmını tanıyan, bir kısmını ise tanımayan bir modeldir. Her sonlu özdevinirin tanıdığı bir dizgiler kümesi vardır.** Bu küme, içerdiği dizgiler tek tek yazılarak, ya da içerdiği dizgilerin özellikleri belirtilerek tanımlanabilir. Sonlu özdevinirlerin tanıdığı kümelerin tanımları sözel olarak ya da matematiksel gösterimler kullanılarak yapılabilir.

Örneğin {0, 1} alfabesinde, sonlu bir özdevinir tarafından tanınan aşağıdaki kümeleri tanımlayabiliriz:

P_1 = { 1001,0110 }

P_2 = İçinde ardarda en az üç tane 1 bulunan (ya da 111 altdizgisini içeren) dizgiler kümesi

P_3 = İlk ve son simgesi 1 olan, en çok 5 uzunluğundaki dizgiler kümesi

$P_4 = \{ 0^n, 1^m \mid n \geqslant 1, m \geqslant 1 \}$

Sonlu özdevinirler tarafından tanınan kümelere **düzgün kümeler (regular sets)** denir. **Bir küme verildiğinde, bu kümenin düzgün bir küme olup/olmadığı, bu kümeyi tanıyan sonlu bir özdevinirin bulunup/bulunmaması tarafından belirlenir.** Eğer kümeyi tanıyan en az bir sonlu özdevinir varsa, bu küme düzgün bir kümedir. Eğer verilen kümeyi tanıyan hiçbir sonlu özdevinir yoksa, bu küme düzgün bir küme değildir. Yukarıda tanımlanan **P_1, P_2, P_3** ve **P_4** kümeleri düzgün kümelerdir. Çünkü bu kümelerin her birini tanıyan en az bir sonlu özdevinir oluşturulabilir.

$P_5 = \{ 0^n, 1^n \mid n \geqslant 1 \}$

P_6 = İçinde eşit sayıda 0 ve 1 bulunan dizgiler kümesi

$\mathbf{P_5}$ ve $\mathbf{P_6}$ kümelerinin her ikisi de düzgün değildir. Çünkü bu kümeleri tanıyan sonlu özdevinirler oluşturulamaz.

Tanımlanan bir kümenin düzgün olup olmadığını bulmak için,

- kümeyi tanıyan bir sonlu özdevinir oluşturulmaya çalışılır. Eğer bunda başarılı olunur ve kümeyi tanıyan sonlu bir özdevinir oluşturulabilirse, kümenin düzgün bir küme olduğu anlaşılır.
- Bir başka yöntem ise, kümeyi düzgün bir deyimle göstermeye çalışmaktır. Bu konu bir sonraki kesimde incelenecektir.
- Biçimsel olmayan bir başka yöntem ise, tanımlanan dizgileri tanımak için sonlu özdevinirin sahip olması gereken durum (bellek) miktarını irdelemektir.

Örnek olarak $\mathbf{P_5}$'i tanıyacak bir makineyi ($\mathbf{M_5}$) düşünelim. Bu makinenin, dizginin başındaki **0**'ların sayısını saklaması ve **1**'lerin sayısının **0**'ların sayısına eşit olduğunu denetlemesi gerekir. Küme tanımında, kümedeki dizgilerin n tane **0**'dan sonra n tane **1** içerdiği belirtilmekte ve n'nin birden büyük olduğu belirtilmektedir. Ancak n'nin üst sınırı yoktur. n çok büyük bir sayı olabilir. Bu nedenle, sonlu sayıda durumu bulunan, bu nedenle sonlu saklama kapasitesine sahip bir FA ile $\mathbf{P_5}$'i tanımak mümkün değildir. Başka bir deyişle, $\mathbf{P_5}$ kümesini tanıyan bir makine ($\mathbf{M_5}$) varsa, bu makine sonlu bir özdevinir değildir. Benzer biçimde, $\mathbf{P_6}$'yı tanıyacak bir makinenin ($\mathbf{M_6}$), dizgiyi taraması ve sürekli olarak, o ana kadar rastlanan **0**'larla **1**'lerin sayılarının farkını saklaması gerekir. Eğer dizginin sonunda, **0**'larla **1**'lerin sayılarının farkı sıfırsa, dizgi $\mathbf{M_6}$ tarafından tanınacaktır. Ancak **0**'larla **1**'lerin sayılarının farkının bir üst sınırı yoktur. Bu fark, düşünülebilecek tüm sonlu sayılardan daha büyük olabilir. Bu nedenle de $\mathbf{M_6}$ bir sonlu özdevinir olamaz. $\mathbf{P_5}$ ve $\mathbf{P_6}$ kümelerini tanıyan sonlu özdevinirler bulunamadığı için, bu kümeler düzgün kümeler değildir.

DÜZGÜN DEYİMLER

Düzgün deyimler, düzgün kümeleri biçimsel olarak tanımlamak için kullanılan bir anlatım aracı, bir dildir. Her düzgün deyim, belirli bir alfabedeki simgelerden oluşturulabilecek dizgilerin bir altkümesini tanımlar.

Tanım 2.1

{ a, b, c, …. } alfabesindeki düzgün deyimler özyineli olarak aşağıdaki gibi tanımlanır:

1

Alfabedeki her simge bir düzgün deyimdir.

a = { a } ,
b = { b } , ...

2

λ ve ϕ birer düzgün deyimdir.

$\lambda = \{ \lambda \}$
$\phi = \{ \quad \}$

3

.Eğer **P** ve **Q** birer düzgün deyimse :

P + Q **PQ** **P***

da birer düzgün deyimdir.
Burada 3 tane küme işleci tanımlanmaktadır :
+ küme birleşim işlecidir : $P + Q = P \cup Q$

. (ya da boşluk) ardarda ekleme (*concatenation*) işlecidir :

$PQ = \{ \widehat{pq} \mid p \in P, q \in Q \}$

* **kapanış (closure)** işlecidir. $P^* = \lambda + P + PP + PPP + PPPP + ...$

4

Bu kuralların sonlu sayıda uygulanması ile oluşturulan deyimler düzgün deyimlerdir.

ÖRNEKLER

Aşağıda **{a, b, c, d }** ve **{0, 1 }** alfabelerinde oluşturulmuş düzgün deyim örnekleri ve bunlara karşı gelen kümeler görülmektedir.

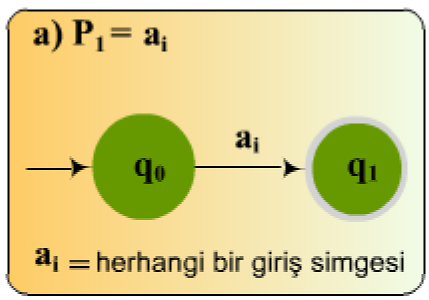
Düzgün Deyim	Tanımladığı Küme
ϕ	{ }
λ	{λ}
00+11	{00,11}
a(b+c)	{ab,ac}
ab*	{a,ab,abb,abbb,abbbb, ...}
a(bb+cc)d*	{abb,abbd,abbdd, ..., acc, accd, accdd, ...
a*	}λ ,a,aa,aaa,aaaa, ...}
(0+1)*	{λ ,0,1,00,01,10,11,000, 001, 010, 011, 100, ...}
a(b+cd*)*a	{aa,aba,acda,acdda, acddda, abca, acba, ...}

Düzgün Deyimlere Karşı Gelen Sonlu Özdevinirlerin Bulunması

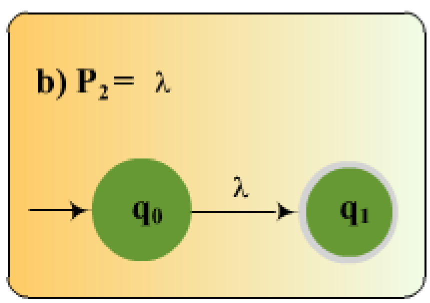
Önerme: Düzgün deyimlerle tanımlanan kümeler düzgün kümelerdir.

Bu önermeye göre, bir düzgün deyim verildiğinde, bu düzgün deyimle tanımlanan kümeyi tanıyan bir sonlu özdevinir bulunabilir. Bu önerme, düzgün deyimlere karşı gelen sonlu özdevinirlerin geçiş çizeneklerinin nasıl bulunacağı gösterilerek ispat edilmeye çalışılacaktır. Bunun için de, düzgün deyimlerin özyineli tanımında yer alan her bir madde için ilgili geçiş çizeneğinin nasıl bulunacağı gösterilecektir.

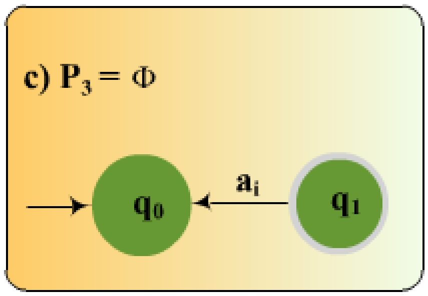
$\mathbf{P_1}$ = $\mathbf{a_i}$ düzgün deyimi ile tanımlanan küme tek bir giriş simgesi içermektedir. Bu kümeyi tanıyan sonlu özdevinirin geçiş çizeneği yandaki gibi oluşturulabilir.



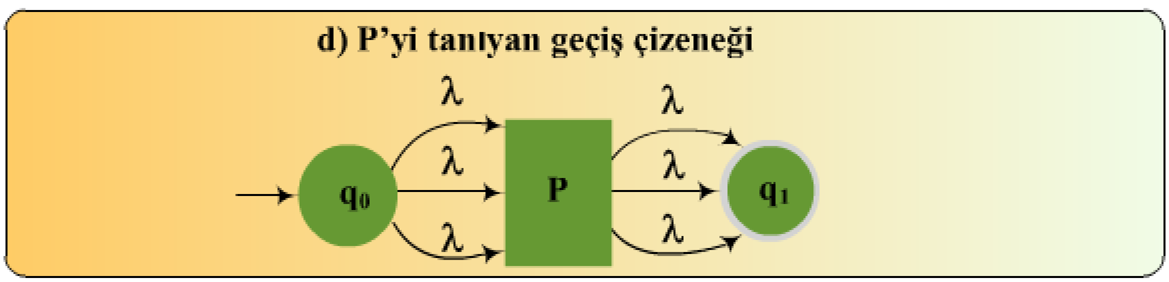
$\mathbf{P_2}$ = λ düzgün deyimi ile tanımlanan küme yalnız boş simgeyi (λ) içeren kümedir. Bu kümeyi tanıyan sonlu özdevinirin geçiş çizeneği yandaki gibi oluşturulabilir.

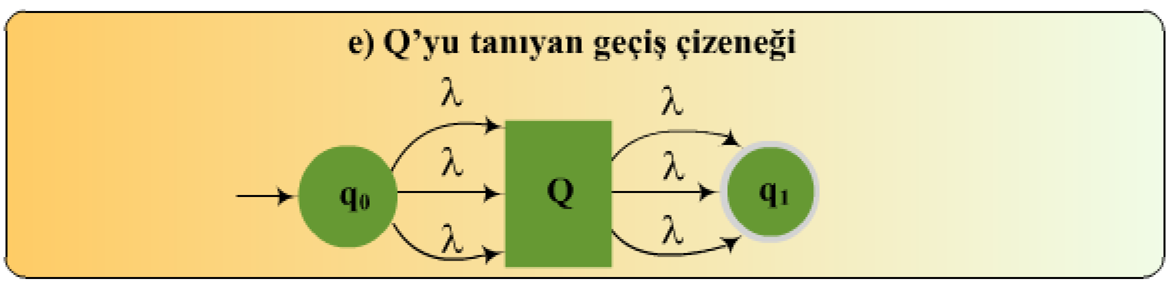


$\mathbf{P_3}$ = Φ düzgün deyimi ile tanımlanan küme boş kümedir. Bu kümeyi tanıyan sonlu özdevinirin geçiş çizeneği yandaki gibi oluşturulabilir.



P ve **Q** birer düzgün deyim olsun. Bu düzgün deyimlerle tanımlanan kümeleri tanıyan geçiş çizeneklerinin bilindiğini varayalım. Eğer **P** ve **Q**'yu tanıyan geçiş çizeneklerinde birden çok başlangıç ve/ya da uç durum varsa, Aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi, bu geçiş çizeneklerini bir başlangıç durumu, bir de uç durumu bulunan eşdeğer çizeneklere dönüştürebiliriz. Bunun için, eğer çizenekte birden çok başlangıç durumu varsa, çizeneğe yeni bir durum **(q_0)** eklenerek tek başlangıç durumu bu yeni durum yapılır ve bu yeni durum ile eski başlangıç durumları arasına birer λ geçişi konulur. Benzer biçimde, eğer çizenekte birden çok uç durum varsa, çizeneğe yeni bir uç durum **(q_1)** eklenerek tek uç durum bu yeni durum yapılır ve eski uç durumlar ile bu yeni durum arasına birer λ geçişi konulur.

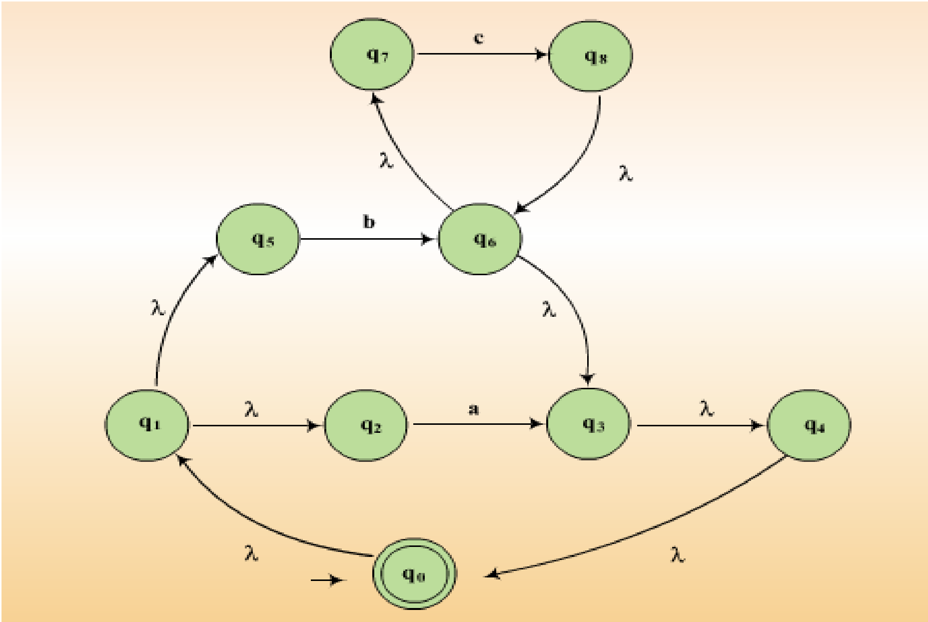




Verilen bir düzgün deyimi tanıyan geçiş çizeneğinin biçimsel yaklaşımla oluşturulması çok uzun olabilir ve bu yöntemle oluşturulan geçiş çizeneği çok sayıda λ geçişi içerebilir. Örneğin

- **P = (a + bc*)***
  düzgün deyimini tanıyan sonlu özdevinirin geçiş çizeneğini biçimsel yaklaşımla oluşturmak istediğimizde,
- önce **(a)**'yı, **(b)**'yi ve **(c)**'yi tanıyan çizenekleri,
- sonra **(c*)**'ı tanıyan çizeneği,
- sonra **(bc*)**'ı tanıyan çizeneği,
- sonra **(a + bc*)**'ı tanıyan çizeneği,
- son olarak da **((a + bc*)*)**'ı tanıyan çizeneği
  oluşturmak gerekir

Oysa **P**'yi tanıyan geçiş çizeneğini sezgisel yaklaşımla çok daha çabuk oluşturmak mümkündür.



a) Biçimsel Yaklaşımla Oluşturulan Geçiş Çizeneği

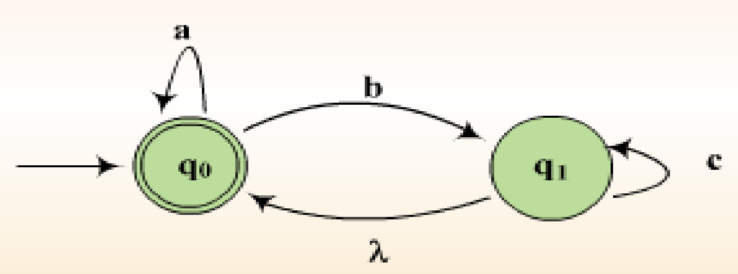
P = (a + bc*)* Düzgün Deyimini Tanıyan FA'nın Geçiş Çizeneğinin Biçimsel ve Sezgisel Yaklaşımla Oluşturulması

Çizimde görüldüğü gibi sezgisel yaklaşımla oluşturulan geçiş çizeneği, biçimsel yaklaşımla oluşturulan geçiş çizeneğine oranla çok daha az λ geçişi içeren, çok daha yalın bir çizenektir.

Geçiş çizeneklerinin sezgisel yaklaşımla oluşturulması sırasında dikkat edilmesi gereken önemli hususlardan birkaçı aşağıda yer almaktadır.

1. Eğer düzgün deyimde:
   … + **a* b**… ya da
   (a* b ….)*
   gibi bir örüntü varsa, üzerinde a döngüsü bolunan düğüme λ geçişi ile gelinmelidir.
2. Eğer düzgün deyimde:
   … **a b*** + … ya da
   … **a b*)***
   gibi bir örüntü varsa, üzerinde b döngüsü bolunan düğümden λ geçişi ile çıkılmalıdır.

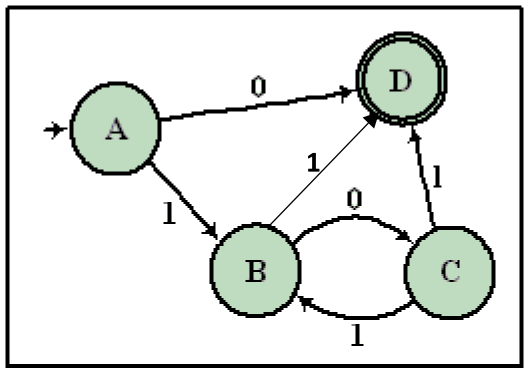
3. Eğer düzgün deyimde:
   … **a* b***…
   gibi bir örüntü varsa, üzerinde a döngüsü bolunan düğümden, üzerinde b döngüsü bolunan düğüme λ geçişi ile geçilmelidir.



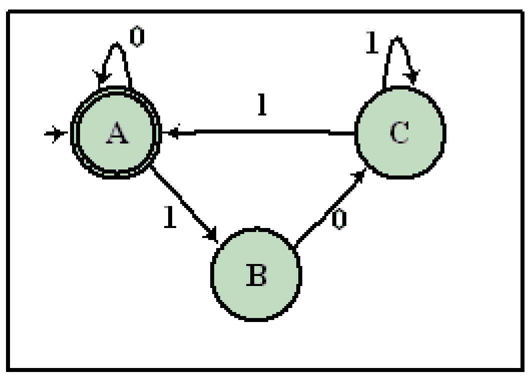
b) Sezgisel Yaklaşımla Oluşturulan Geçiş Çizeneği

Bazı Örnek Soru Çözümleri:

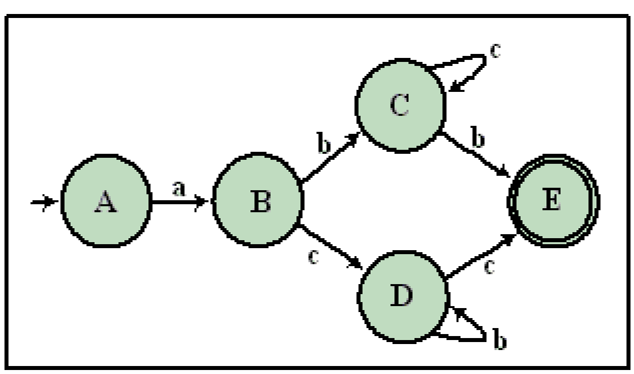
a) $P_1=0+1(01)^*1$



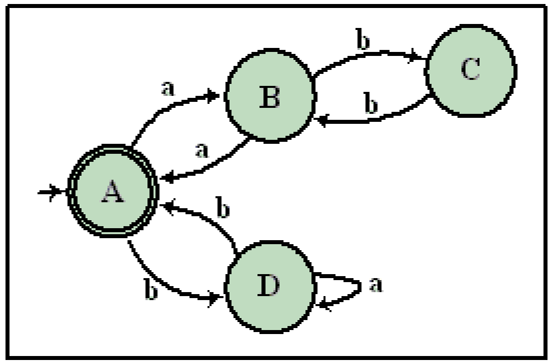
b) $P_2=(0+101^*1)^*$



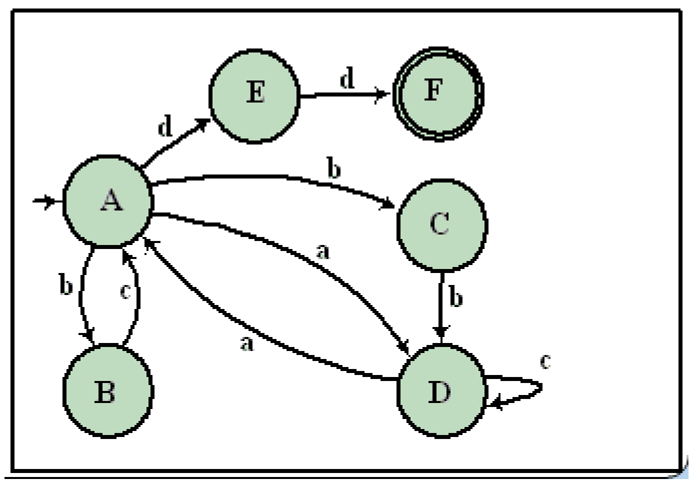
c) $P_3=a(bc^*b+cb^*c)$



d) $P_4=(a(bb)^*a+ba^*b)^*$



e) $P_5=(bc+(a+bb)c^*a)^*dd$



$P_6=(a+bb)^*(c+dd)^*$