Türev

Türev ve Gradyan

$$\text{Function}: \ f(x)$$

$$\text{Derivative}: \ f'(x) = \frac{df}{dx}, \ x \text{ is a scalar}$$

$$\text{Function}: \ f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\text{Gradient}: \ \nabla f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$$

1D Türev

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'(x) = \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} = f(x) - f(x-1)$$

Δx=1 seçilirse

Sol Fark

$$\frac{df}{dx} = f(x) - f(x-1) = f'(x)$$

Sağ Fark

$$\frac{df}{dx} = f(x) - f(x+1) = f'(x)$$

-1	1

İmgede tek piksellik kayma olur

Merkezi Fark

$$\frac{df}{dx} = f(x+1) - f(x-1) = f'(x)$$

-1	0	1

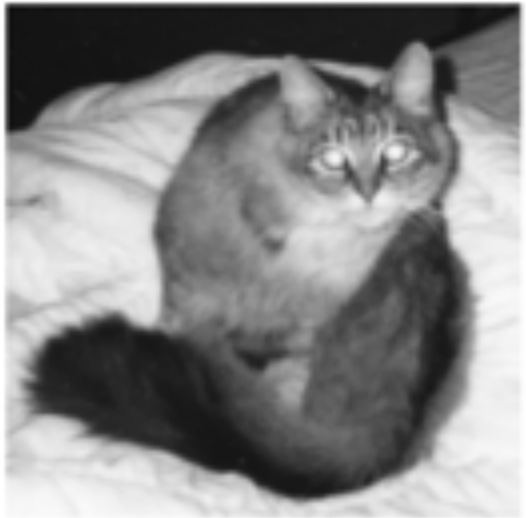
Kayma olmaz

1D Türev

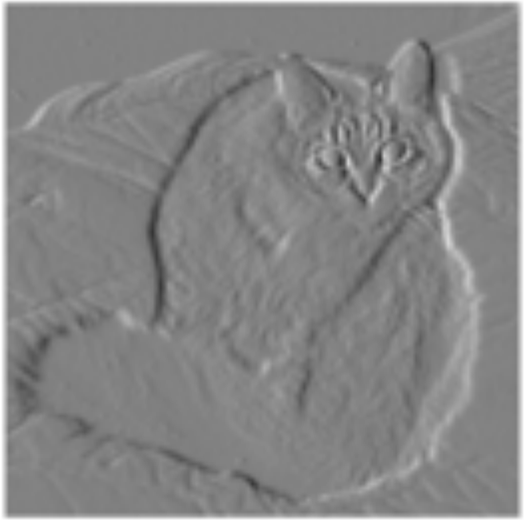
$f(x) =$	10	15	10	10	25	20	20	20
$f'(x) =$	0	5	-5	0	15	-5	0	0
$f''(x) =$	0	5	-10	5	15	20	5	0

2b Gradyan

İmge (I)

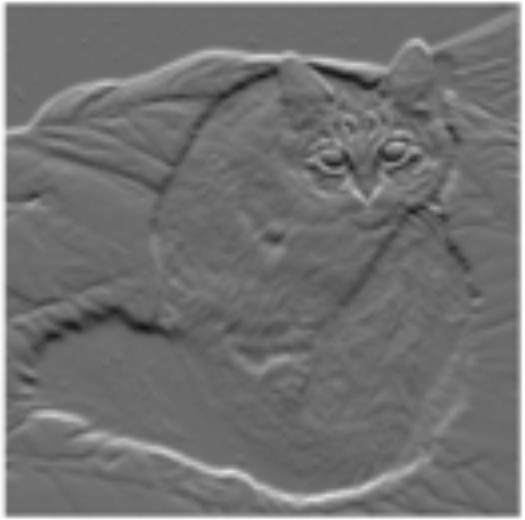


Yatay türev (g_x)



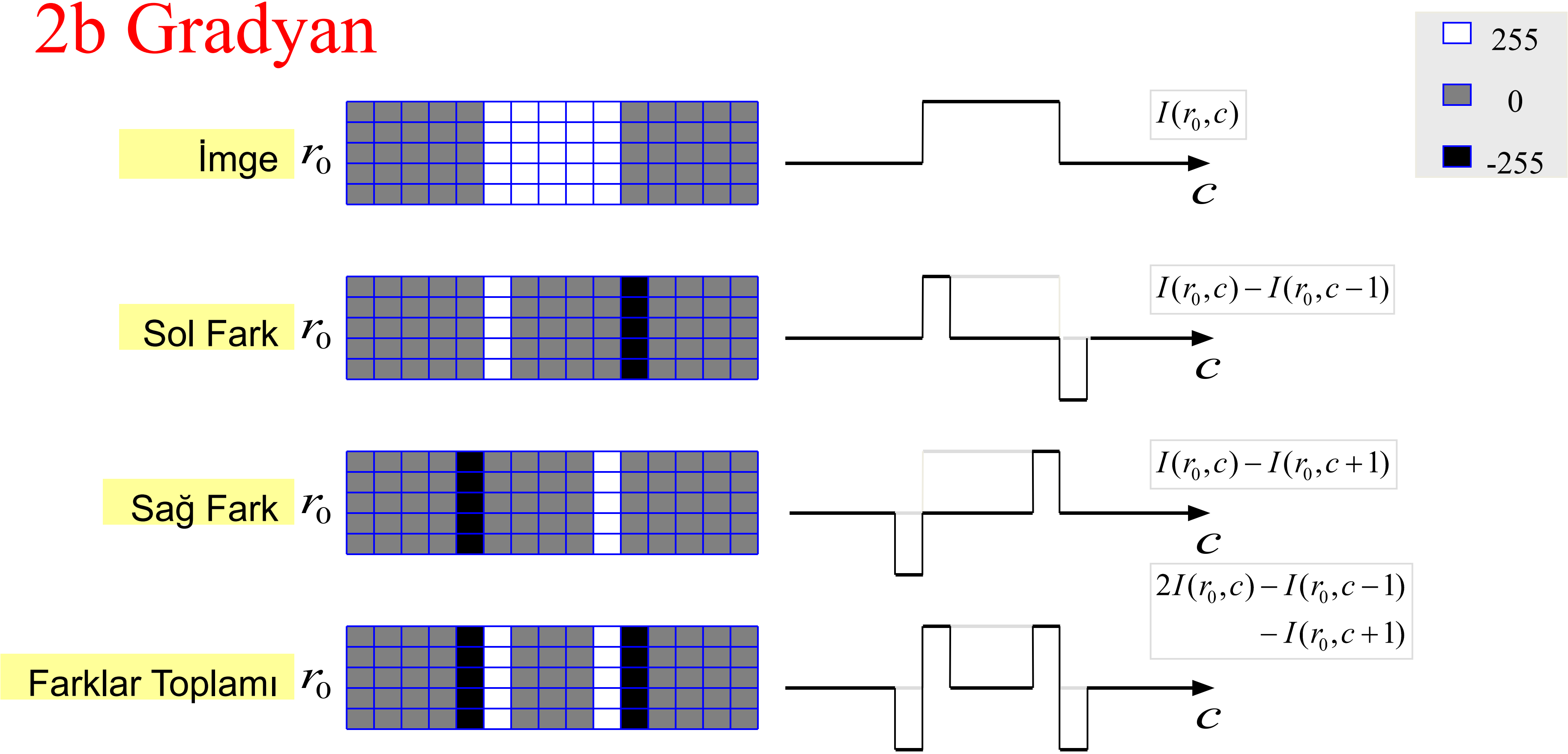
-1	0	1

Dikey türev (g_y)



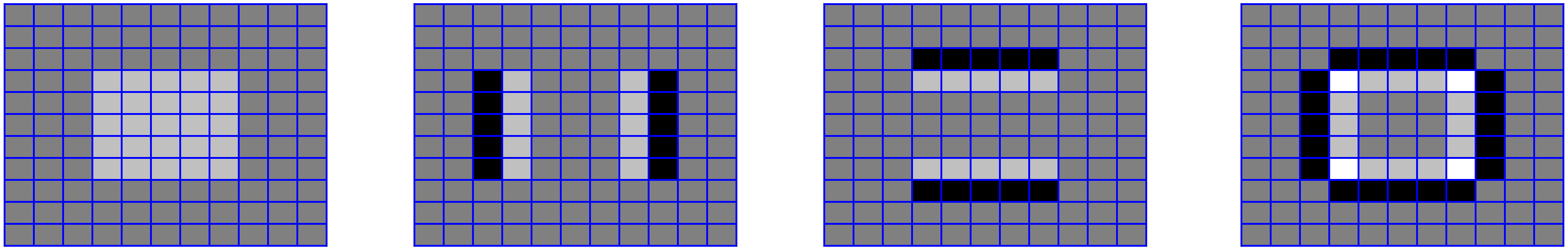
-1
0
1

2b Gradyan



255
0
-255
İmge r_0
$I(r_0,c)$
c
Sol Fark r_0
$I(r_0,c)-I(r_0,c-1)$
c
Sağ Fark r_0
$I(r_0,c)-I(r_0,c+1)$
c
Farklar Toplamı r_0
$2I(r_0,c)-I(r_0,c-1)$
$-I(r_0,c+1)$
c

2b Gradyan

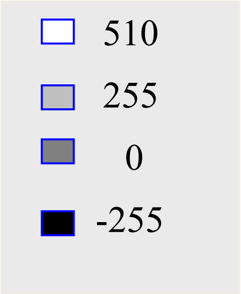


$I(r,c)$

$2I(r,c) - I(r,c-1) - I(r,c+1)$

$2I(r,c) - I(r-1,c) - I(r+1,c)$

$4I(r,c) - I(r-1,c) - I(r+1,c) - I(r,c-1) - I(r,c+1)$



-1	2	-1

	-1	
	2	
	-1	

	-1	
-1	4	-1
	-1	

Maskeler (operatörler)

Gradyan büyüklüğü (magnitude) ve yönü (direction)

Given function $f(x,y)$

Gradient vector $$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}$$

Gradient magnitude $$\left|\nabla f(x,y)\right| = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}$$

Gradient direction $$\theta = \tan^{-1} \frac{f_x}{f_y}$$

Gradyan büyüklüğü ($M(x,y)$) ve yönü (θ)

$$M(x,y) = \sqrt{{f_x}^2 + {f_y}^2}$$

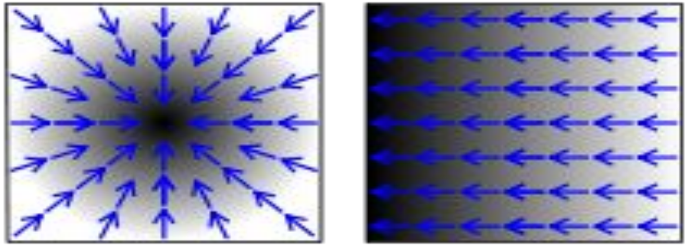
Sonuç isotropic yani <u>yönden bağımsız</u>dır (rotation invariant)

$$M(x,y) \approx |f_x| + |f_y|$$

Bu hesaplama üstekine göre daha hızlıdır.

$$\theta(x,y) = tan^{-1}\left[\frac{f_y}{f_x}\right]$$

$$\theta = atan2(f_y, f_x)$$



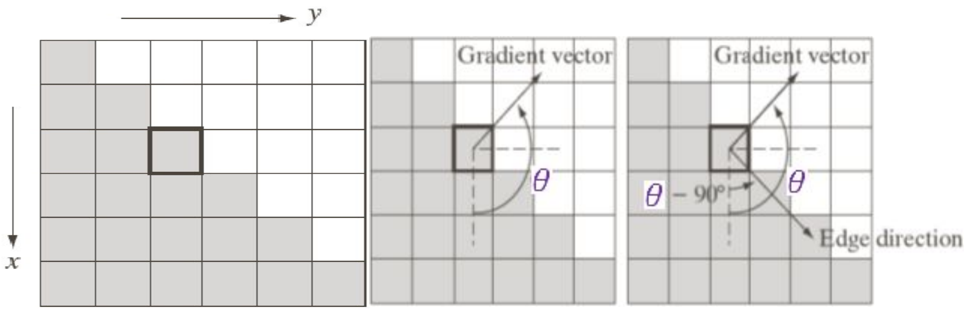
Yatay ve dikey gradyan hesapla

Derivative masks $f_x \Rightarrow \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $f_y \Rightarrow \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

$$I = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 20 & 20 & 20 \\ 10 & 10 & 20 & 20 & 20 \\ 10 & 10 & 20 & 20 & 20 \\ 10 & 10 & 20 & 20 & 20 \\ 10 & 10 & 20 & 20 & 20 \end{bmatrix} \qquad I_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{10} & \boxed{10} & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$I_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Gradyan büyüklüğü ve açısını hesapla



- Gradient yönü kenara diktir.
- Bu nedenle gradient genellikle dik kenar vektörü olarak adlandırılır

Gri piksel değerlerini 0, beyazları 1 düşünerek ilgili pikselin kenar büyüklük ve yönünü hesaplarsak:

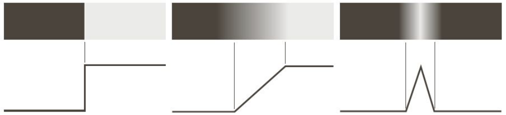
$$f_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

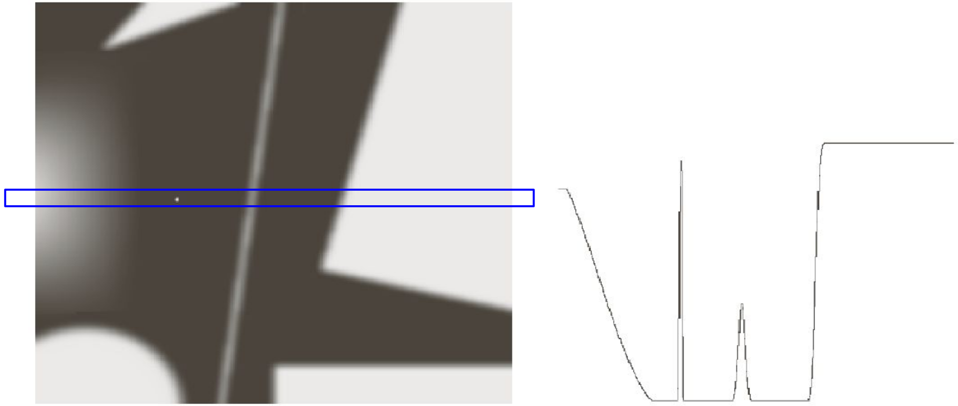
$$f_y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = -2$$

$$M(x, y) = 2\sqrt{2}$$

$$\theta = -45 \text{ veya } 135$$

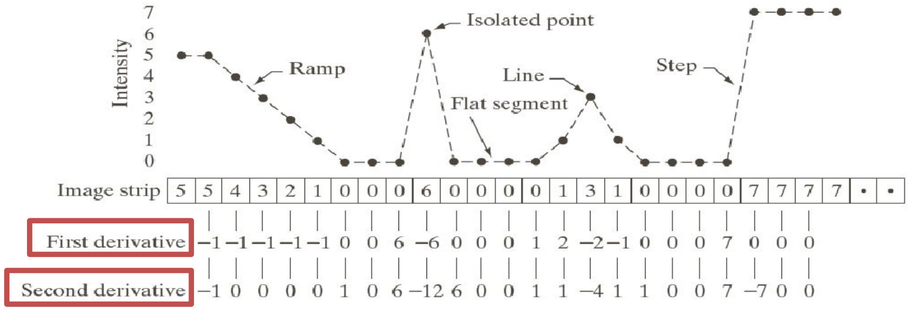
Adım, rampa ve çatı kenar



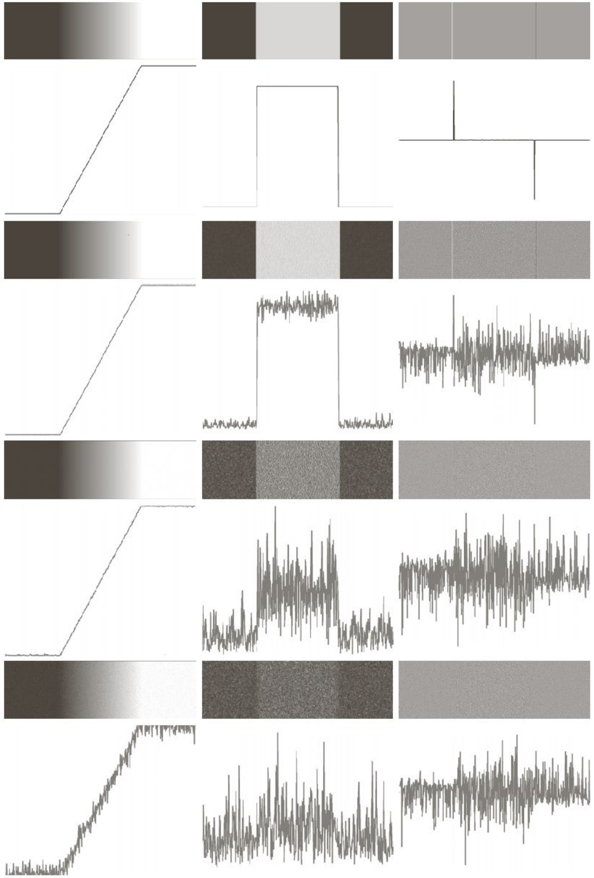


Sonuç olarak;

- Birinci türev kenar büyüklüğünü, ikinci türev kenarın başladığı noktayı ifade eder.
- Birinci türev kalın kenar üretir.
- Birinci türev, rampa ve step kenarların **ortaya çıkmasında,** ikinci türev ise kenar lokasyonunun belirlenmesinde daha güçlüdür.
- İkinci türev, ince çizgiler, izole noktalar ve gürültüler gibi ince detayları daha net ortaya çıkartır.
- İkinci türev step kenarda çift kenar üretir.
- İkinci türevin işareti açıktan koyuluğa veya koyuluktan açıklığa geçişi tanımlamak için kullanılabilir.



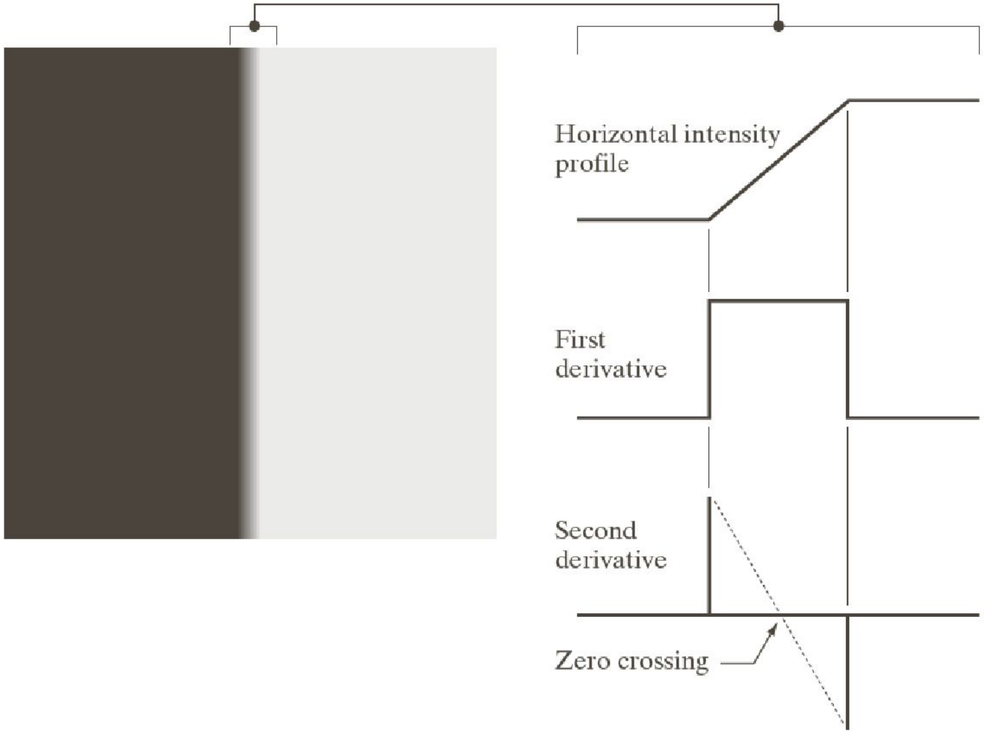
Gürültü ile türev ilişkisi



Bu uygulama türevlerin gürültü duyarlılığına iyi bir örnektir.

- Görüldüğü gibi ikinci türev, gürültüye karşı oldukça duyarlıdır. Yani gürültülü görüntüde ikinci türev bilgisini kullanmak mantıklı değildir.
- Bu uygulamalarda, türev hesabından önce gürültü eliminasyonuyla görüntülerin yumuşatılmasının büyük öneme sahip olduğu ortaya çıkmaktadır.

Rampa kenarın türevleri



Sıfır geçişler rampa kenar noktasının konumunu belirtir.

İkinci türev ➔ Laplacian

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial f'(x)}{\partial x} = f'(x+1) - f'(x)$$

$$= f(x+2) - f(x+1) - f(x+1) + f(x)$$

$$= f(x+2) - 2f(x+1) + f(x)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''(x) = f(x+1) + f(x-1) - 2f(x) \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & -2 & 1 \\ \hline\end{array}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''(y) = f(y+1) + f(y-1) - 2f(y) \longrightarrow \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline -2 \\ \hline 1 \\ \hline\end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline & 1 & \\ \hline 1 & -4 & 1 \\ \hline & 1 & \\ \hline\end{array}$$

İkinci türev maskeleri

0	1	0
1	−4	1
0	1	0

1	1	1
1	−8	1
1	1	1

0	−1	0
−1	4	−1
0	−1	0

−1	−1	−1
−1	8	−1
−1	−1	−1

Matlab

```
fspecial('laplacian', alpha)
```

$$\begin{matrix} \frac{\alpha}{1+\alpha} & \frac{1-\alpha}{1+\alpha} & \frac{\alpha}{1+\alpha} \\ \frac{1-\alpha}{1+\alpha} & \frac{-4}{1+\alpha} & \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \\ \frac{\alpha}{1+\alpha} & \frac{1-\alpha}{1+\alpha} & \frac{\alpha}{1+\alpha} \end{matrix}$$

Örnek Uygulama

Orijinal Görüntü

Maskeden Sonra

Eşik Uygulanmış

Jakobian

m adet fonksiyon değerini içeren bir ***F*** fonksiyonu düşünün.

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

Bu fonksiyonun türevi nedir?

$$J(F) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$