NÜMERİK (SAYISAL) YÖNTEMLER

Dr. A. Burak GÖKTEPE

2011 Bahar Yarıyılı

1. GİRİŞ

1.1. SAYISAL YÖNTEMLERİN AMACI

- Sayısal yöntemlerin (ya da analizin) amacı, **matematiksel problemlerin çözümü** için **uygun** ve **doğru sonuç** veren teknikler geliştirmektir.

- Çözümü istenen **problemi tanımlamak, formüle etmek** ve çözüm için kullanılacak **en uygun yöntemi seçmek** analizi yapan kişinin amacıdır.

- Problemin tanımlanması ve formülasyonu yapıldıktan sonra, **problemin çözümü** ve **hata analizi** birlikte olarak değerlendirilir. Kullanılacak yöntem buna göre seçilir.

- Sayısal çözüm yöntemi**, istenilen hassasiyette ve belirli sayıda ardışık tekrar işleminden (iterasyon) sonra** matematiksel probleme **çözüm** getirir.

- **Sayısal çözüm yöntemleri, aritmetik ve mantıksal işlemlerden oluşur**. Bu işlemlerin tümüne, **ALGORİTMA** ismi verilir. Algoritma, belirli sayıda işlemden sonra probleme çözüm getirir.

- **Özet olarak, sayısal yöntemler, matematiksel problemlerin aritmetik işlemlerle çözülebilmesi için geliştirilen tekniklerin genel ismidir.**

- Çok farklı türde sayısal yöntem olmakla birlikte, bir tane genel karaketristikleri vardır: **ÇOK SAYIDA ARİTMETİK HESAPLAMA İÇERİRLER**.

- İçerdikleri işlemsel yük, yinelemeli hesaplamalar ve zaman ihtiyacı nedeni ile çoğu zaman **bilgisayar çözümlerine ihtiyaç** duyarlar ve bilgisayarlar gelişmesinden önemli ölçüde etkilenmişleridir.

1.2. GENEL PROBLEM TÜRLERİ

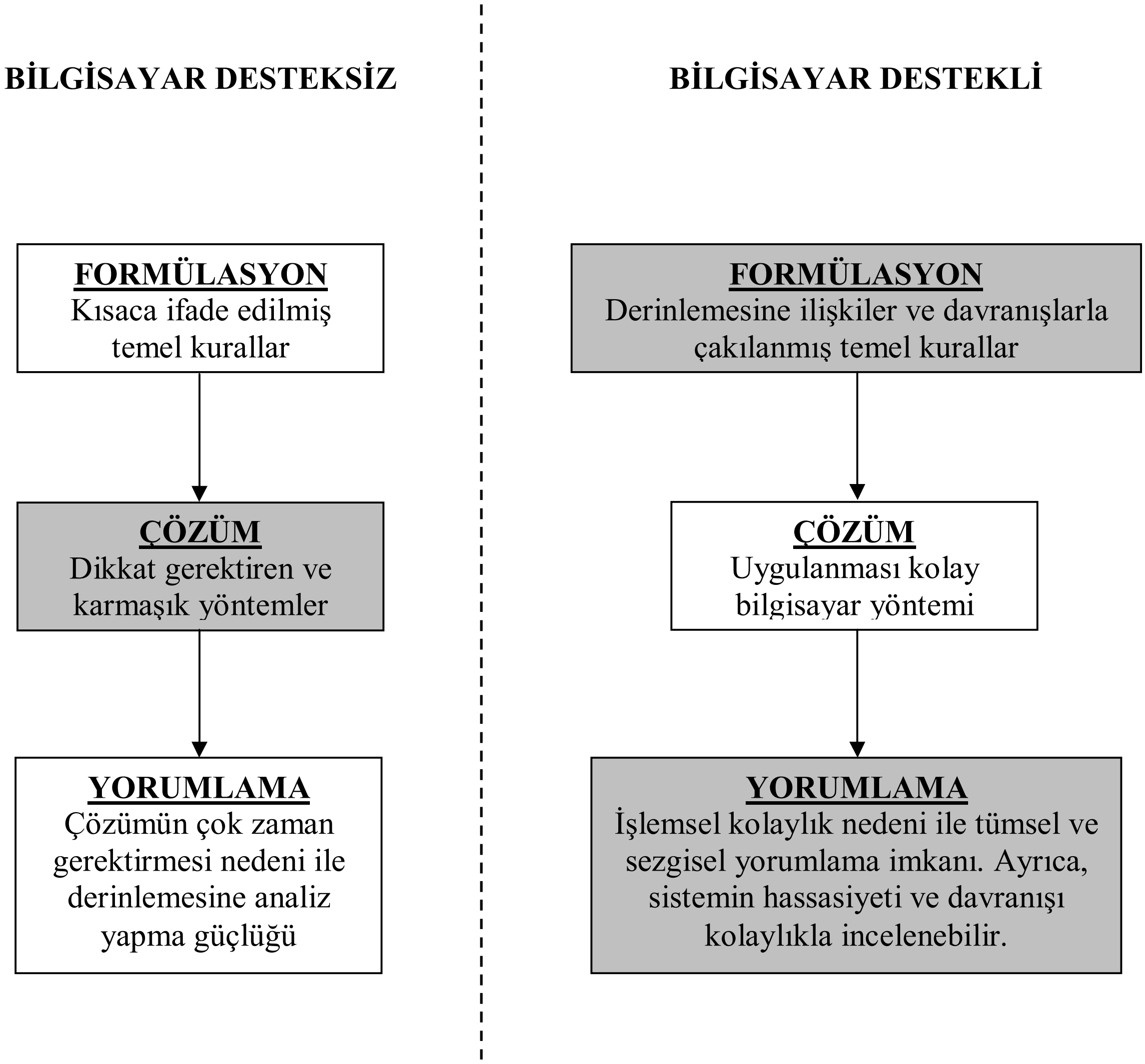
1. Hata analizi ve hassasiyet
2. Denklem köklerinin bulunması
3. Doğrusal denklem takımlarının çözümü
4. Optimizasyon (en iyileme)
5. Doğru/eğri uydurma
6. Sayısal integrasyon ve kısmi türevli denklemler
7. Adi diferansiyel denklemler
8. Kısmi diferansiyel denklemler
9. Simülasyon (ya da benzeşim)
10. Seri hesaplamaları
11. Özdeğer ve özvektör problemleri*

** Bu yöntemler, esasen, sayısal yöntemlerin içerisinde araç olarak kullanılırlar*

1.3. BİLGİSAYAR ÖNCESİ VE SONRASI DÖNEM

Bilgisayar öncesi dönemde kullanılan (bilgisayar yardımı olmadan gerçekleştirilen çözümler) 3 farklı yol mevcuttu:

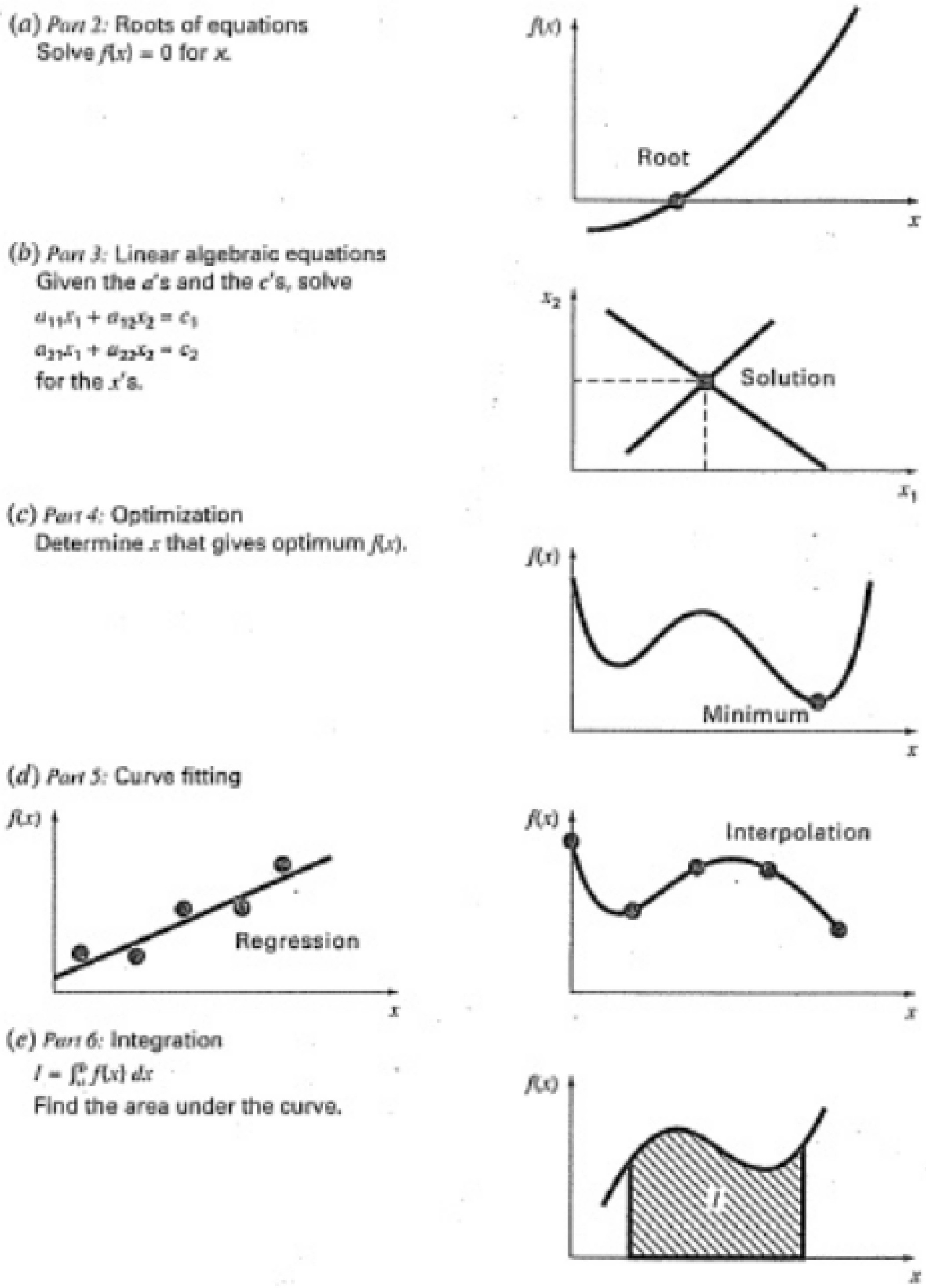
1. **Analitik (kesin) çözümler:** Analitik yöntemler, genel olarak, faydalıdır ve bazı spesifik sistemlerin davranışının anlaşılmasında mükemmel rol oynarlar. Ancak, **sınırlı sayıda problem** için çözüm sunabilirler. Genel olarak, **doğrusal** olarak ele alınabilecek, ya da **basit bir geometri** ile tanımlanabilecek, ya da **"düşük boyutlu"** problemler için uygundurlar. Fakat, günlük hayat problemleri karmaşık, doğrusal olmayan ve "yüksek boyutlu" geometri ve davranışa sahiptirler.
2. **Grafik çözümler:** Grafik çözümler, genel olarak, **karmaşık problemlerin yaklaşık** olarak çözümlenmesinde kullanılırlar. Şekil, grafik ya da fotoğraflardan yararlanırlar. Temel olarak 3 handikapları vardır: a) **Hassas çözüm sunamazlar**, b) bilgisayar desteği olmadan çok **hantal ve zaman alıcıdırlar**, ve c) genellikle **3 ya da daha düşük boyutlu** problemlerin çözümüne uygundurlar..
3. **El hesaplamaları ile çözümler:** Teorik olarak karmaşık problemlerin çözümünde kullanılabilmekle birlikte, pratikte, **çok fazla zaman ve işlemsel yüke** sahiptirler. Bilgisayarların çıkması ve gelişmesi ile işlevleri çok azalmıştır.


BİLGİSAYAR DESTEKSİZ
BİLGİSAYAR DESTEKLİ
FORMÜLASYON
Kısaca ifade edilmiş temel kurallar
ÇÖZÜM
Dikkat gerektiren ve karmaşık yöntemler
YORUMLAMA
Çözümün çok zaman gerektirmesi nedeni ile derinlemesine analiz yapma güçlüğü
FORMÜLASYON
Derinlemesine ilişkiler ve davranışlarla çakılanmış temel kurallar
ÇÖZÜM
Uygulanması kolay bilgisayar yöntemi
YORUMLAMA
İşlemsel kolaylık nedeni ile tümsel ve sezgisel yorumlama imkanı. Ayrıca, sistemin hassasiyeti ve davranışı kolaylıkla incelenebilir.

1.4. SAYISAL YÖNTEM KULLANMANIN AVANTAJLARI

- Çok kuvvetli ve esnek problem çözme araçlarıdır.
- Herhangi bir program ile birlikte kolaylıkla bulunabilir ve kullanılabilirler.
- Programlama dilleri kullanılarak kendi başına geliştirilmeye uygundur.
- Matematik bilgi ve yeteneğini algılama/geliştirme/desteklemede çok önemli rol oynarlar.
- Günümüzde, bazı problemlerin çözümü sayısal yöntemler olmadan mümkün değildir.

1.5. DERSİN GENEL ÇERÇEVESİ

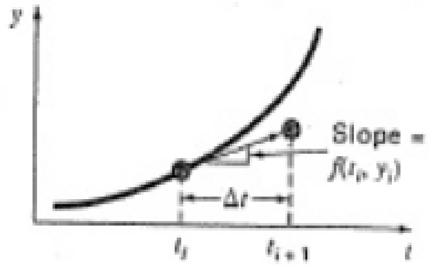


(*f*) *Part 7:* Ordinary differential equations
Given

$$\frac{dy}{dt} \cong \frac{\Delta y}{\Delta t} = f(t, y)$$

solve for y as a function of t.

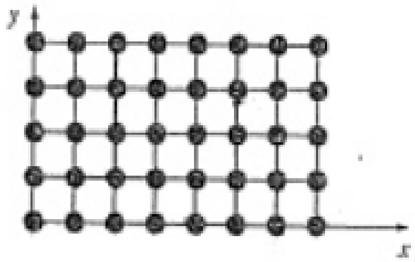
$$y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i)\,\Delta t$$



(*g*) *Part 8:* Partial differential equations
Given

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

solve for u as a function of x and y



2. MATEMATİKSEL MODELLEME VE HATA

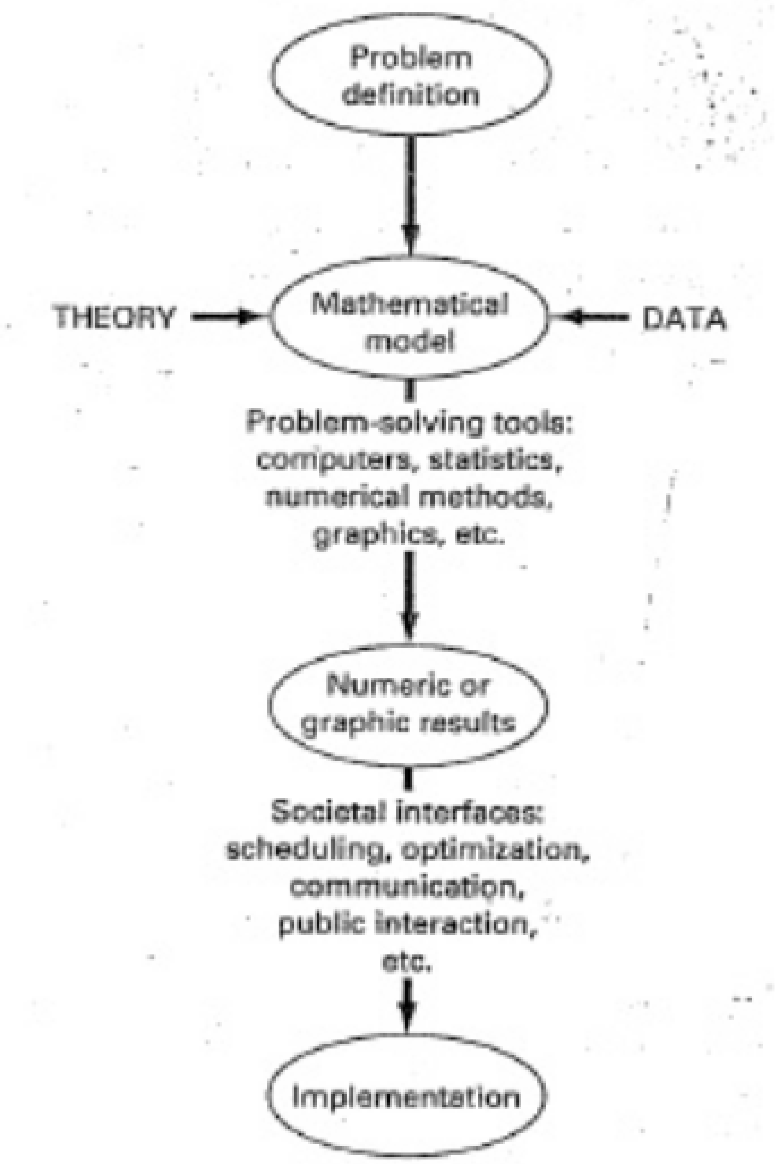
- Bilgisayarlar (dolayısı ile sayısal yöntemler), mühendislik problemlerinin çözümünde hangi ölçüde ve ne şekilde kullanılırlar ?

- **Matematiksel model:** Fiziksel bir sistem ya da işlemin temel bileşenlerinin ve davranışının, matematiksel ifadelerle (terimlerle) formülasyonu.

- $$\textbf{Bağımlı değişken} = \left(\textbf{Bağımsız değişkenler}, \textbf{parametreler}, \textbf{Zorunlayıcı fonksiyonlar} \right)$$

Bu eşitlik (model), basit matematiksel fonksiyonlarla da, karmaşık diferansiyel denklemlerle de ifade edilebilir.

- **Bağımlı değişken:** Sistemin davranışını ya da durumunu yansıtan karakteristik.
- **Bağımsız değişkenler:** Sistemin davranışının incelendiği boyutlar (zaman, mesafe, v.d.).
- **Parametreler:** Sistemin özeliklerini ya da bileşenlerini yansıtan parametreler.
- **Zorlayıcı fonksiyonlar:** Sisteme etkiyen dış etkiler.


Problem definition
THEORY
Mathematical model
DATA
Problem-solving tools: computers, statistics, numerical methods, graphics, etc.
Numeric or graphic results
Societal interfaces: scheduling, optimization, communication, public interaction, etc.
Implementation

Örnek 2.1: Newton' un ikinci yasasını (hareket yasası) incelersek.

$$\mathbf{F = m \cdot a}$$

F : Sisteme etkiyen net kuvvet (N ya da $kg.m/s^2$),

m : Nesnenin kütlesi (kg),

a : İvme (m/s^2).

Buradan,

$$\mathbf{a = F / m}$$

F : **Zorlayıcı fonksiyon**,

m : Sistemin özelliğini gösteren bir **parametre**,

a : Sistem davranışını yansıtan, **bağımlı değişken**.

- İfadenin bu basit halinde **bağımsız değişken yok**. Çünkü, henüz, ivmenin zamana ve mesafeye göre değişimini ele almıyoruz.

- Bu eşitlik, niye matematiksel bir model? Çünkü:
    - Doğal bir işlemi matematiksel olarak tanımlıyor,
    - Gerçek duruma göre, bir idealizasyon ve basitleştirme içeriyor. Bu kapsamda, bazı detayları (rölativitie, vd.) ihmal ediyor ve temel bileşenlere yoğunlaşıyor.
    - Türetilebilir ve faydalı sonuçlar veriyor.

Bu problemi, fiziksel olaylara uygulanan modellere (karmaşık, doğrusal olmayan, çok değişkenli, …) benzetmek için, biraz daha karmaşıklaştıralım ve bir paraşütçünün düşüşünde ulaşacağı limit hızı hesaplamaya çalışalım:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$$

- Net kuvvet > 0 → nesne hızlanacak,
- Net kuvvet < 0 → nesne yavaşlayacak,
- Net kuvvet = 0 → nesne sabit hızla düşecek,

Net kuvveti bileşenlerine ayırırsak:

$$\boldsymbol{F = F_D + F_U}$$

$\boldsymbol{F_D}$ → Yer çekimi kuvveti = **m . g (9.8m/s²)**

$\boldsymbol{F_U}$ → Hava direnci **= - c . *v*** **(c** → sürtünme katsayısı, kg/s) **(c.v² ???)**

Böylece: $\boldsymbol{v} \uparrow \quad \boldsymbol{F_U} \uparrow$

- c parametresi, düşen nesnenin özelliklerine (şekli, yüzey pürüzlülüğü, vd.) bağlıdır. Paraşütçü için, giydiği kıyafete ve atlama stiline bağlı…

Net kuvvet, aşağı ve yukarı kuvvetler arasındaki fark olduğundan:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{mg - cv}{m}$$

yazılabilir. Bu ifadeyi basitleştirirsek:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m}v$$

Bu diferansiyel denklemde, $dv\ /\ dt$ değişimi, bizim ilgilendiğimiz değişken değişimidir.

Bu denklemi, $v = 0$, $t = 0$ sınır şartları için çözersek:

$$v(t) = (g.m\ /\ c)\ .\ (1 - e^{-(c/m)t})$$

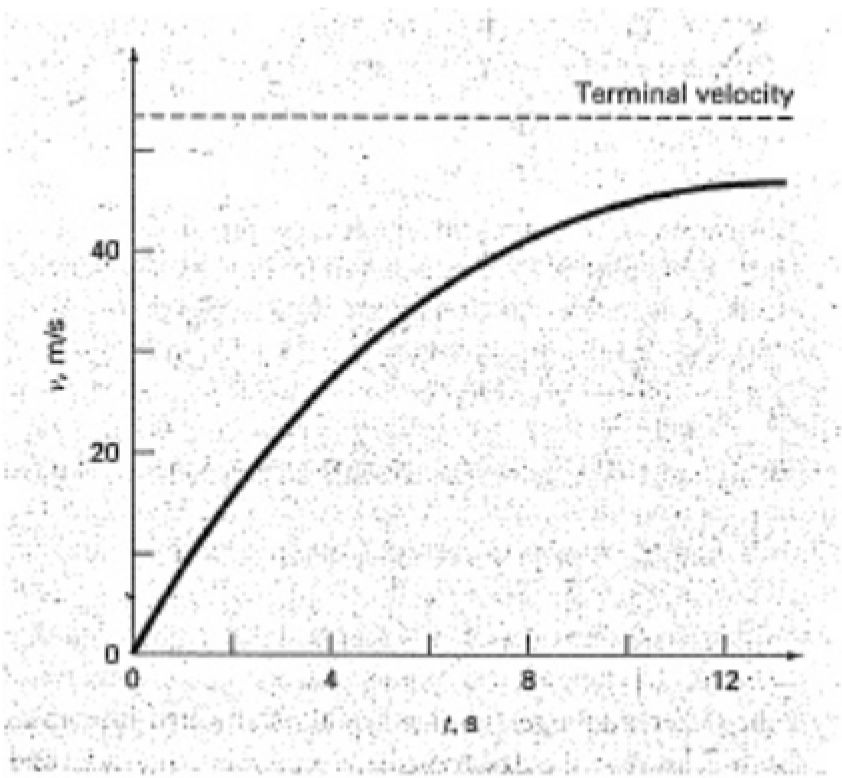
eşitliğini elde ederiz.

Elde ettiğimiz eşitliği, ağırlığı 68.1kg olan bir paraşütçü ve 12.5kg/s sürtünme katsayısı için kullanırsak, aşağıda eşitliği elde ederiz:

$$v(t) = \frac{9.8(68.1)}{12.5}\left(1 - e^{-(12.5/68.1)t}\right) = 53.39\left(1 - e^{-0.18355t}\right)$$

Buradan da, zamanın (t) değişen durumları için aşğıdaki tablo ve grafiği bulabiliriz:

t, s	v, m/s
0	0.00
2	16.40
4	27.77
6	35.64
8	41.10
10	44.87
12	47.49
∞	53.39



Bu hesaplamalara göre, 10. sn (44.87) den sonra hız sabitleşmeye başlıyor ve 53.4m/s değerinde ise limit hıza ulaşmaktadır.

GERÇEKLEŞTİRİLEN ÇÖZÜM : ANALİTİK (KESİN) ÇÖZÜM' DÜR.

ANCAK, BİRÇOK MÜHENDİSLİK PROBLEMİNDE, KESİN ÇÖZÜMÜ YAKLAŞIKLAŞTIRAN SAYISAL ÇÖZÜMLER MÜMKÜN OLABİLİR.

Eğer, analitik olarak elde ettiğimiz denklemi "kesikli" ("sürekli" yerine) ifade edersek, aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$\frac{dv}{dt} \cong \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$$

Şunu hatırlamak gerekir ki:

$$\frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

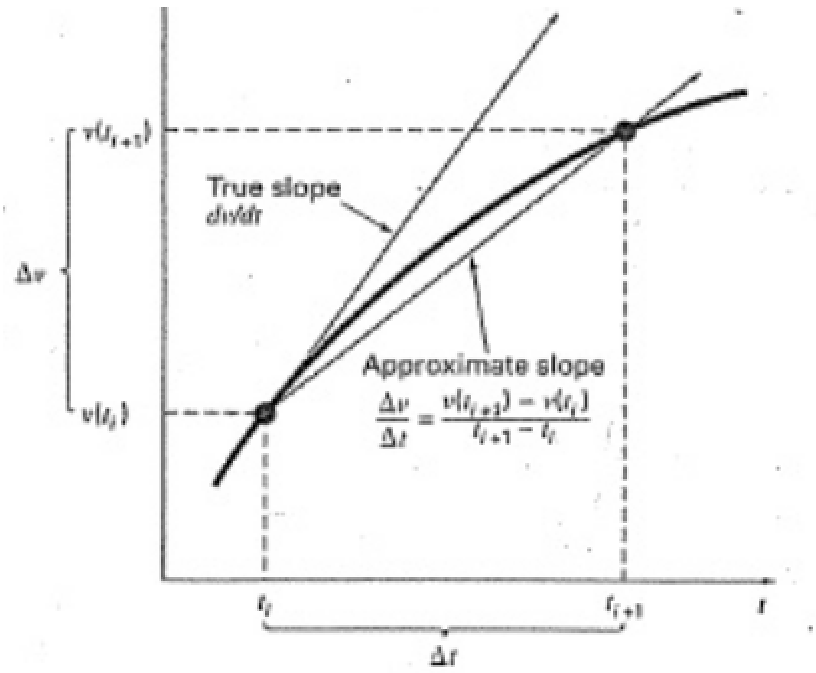
Buradan da, yukarıdaki denklemle birleştirerek, aşağıdaki eşitliği elde edebiliriz:

$$\frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i} = g - \frac{c}{m} v(t_i)$$

Kesikli olarak, ise eşitlik, aşağıdaki nihai halini alır:

$$v(t_{i+1}) = v(t_i) + \left[g - \frac{c}{m}v(t_i)\right](t_{i+1} - t_i)$$

Bunun grafiksel gösterimi ise aşağıdaki gibidir.



Buradan görülebileceği gibi, bir sonraki değer bulunmak için bir önceki değer ve o noktadaki (eğrinin) eğim kullanılmaktadır:

Diğer bir deyişle:

YENİ DEĞER = ESKİ DEĞER + EĞİM x ADIM ARALIĞI

Daha önce çizdiğimiz grafikteki adım aralığını (dt = 2sn) kullanırsak, aşağıdaki hesaplamaları yapabiliriz:

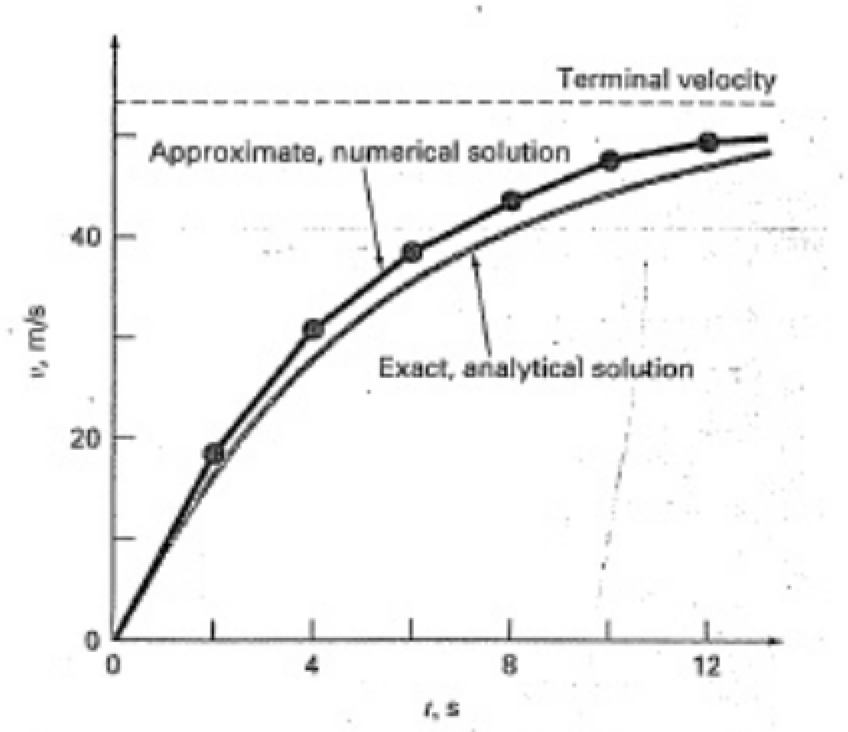
$$v = 0 + \left[9.8 - \frac{12.5}{68.1}(0)\right]2 = 19.60 \text{ m/s}$$

$$v = 19.60 + \left[9.8 - \frac{12.5}{68.1}(19.60)\right]2 = 32.00 \text{ m/s}$$

Buradan da, aşağıdaki tabloyu elde ederiz:

t, s	v, m/s
0	0.00
2	19.60
4	32.00
6	39.85
8	44.82
10	47.97
12	49.96
∞	53.39

Bu değerleri, önce çizilen grafik üzerinde gösterirsek, aşağıdaki grafiği elde ederiz:



- **Burada, "kesin analitik çözüm" ile "iteratif (yinelemeli) sayısal çözüm" arasındaki fark çok açık görülmektedir.**

- Buradan çıkarılacak diğer çok önemli sonuç: Adım aralığı düşürülüp, adım sayısı arttırılırsa, doğruluk derecesi artmaktadır. Başka bir deyişle, **doğruluğu arttırmak, işlemsel yükü arttırmaktadır.**

Örnek 2.2. Korunum kanunları ve mühendislik

Korunum kanunları, mühendislikte çok önemli rol oynarlar. Temel prensip:

Değişim = Artış – Azalış

(Newton'un ikinci yasası ile ilgili örnekteki kuvvet dengesi de aynı prensibe dayanmaktadır.)

Değişim, genellikle zamana göre değişim olarak ele alınır ve zaman değişkenin kullanıldığı bu hesaplama yöntemine **"zamana bağlı (ya da kararsız) hesaplama"** ismi (**transient**) verilir.

Korunum denklemlerinin kullanıldığı diğer bir uygulama alanı ise, değişimin olmadığı (denge durumu) durumdur. Böylece:

Değişim = 0 = Artış – Azalım →   Artış = Azalış

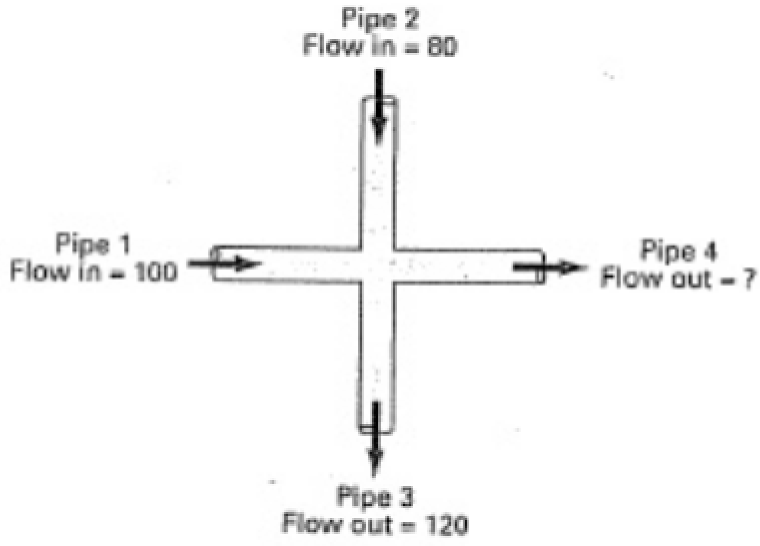
Bu durumun özel ismi: **"Denge durumu"** ya da **"kararlı hal"** (**steady state**) dir.

Bütün kararlı hal denklemlerinde şu kural geçerlidir:

$$dv / dt = 0$$

(önceki örnek için, **mg = cv → v = mg / c [Limit hız]** hesaplanabilir)

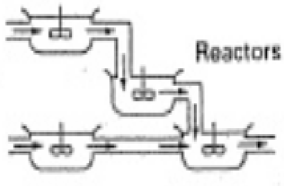
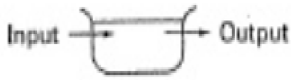
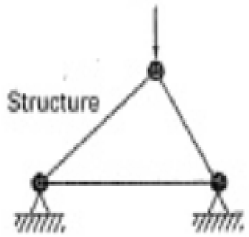
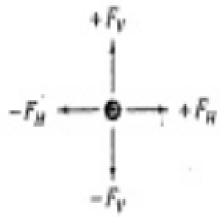
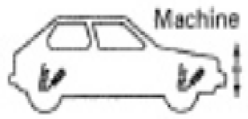
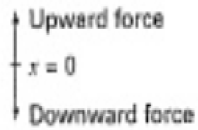
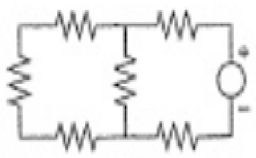
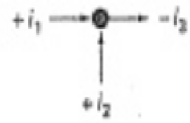
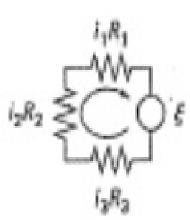
Hidrolikte, boru içindeki akım hesaplamalarını örnek verirsek:



Giren akım = Çıkan akım

Böylece, çıkışın 180 – 120 = 60lt/sn olması gerekir.

Diğer mühendislik dallarındaki korunum yasalarının (kütle, enerji, momentum,…) bazı uygulama alanları aşağıdaki tabloda verilmektedir.

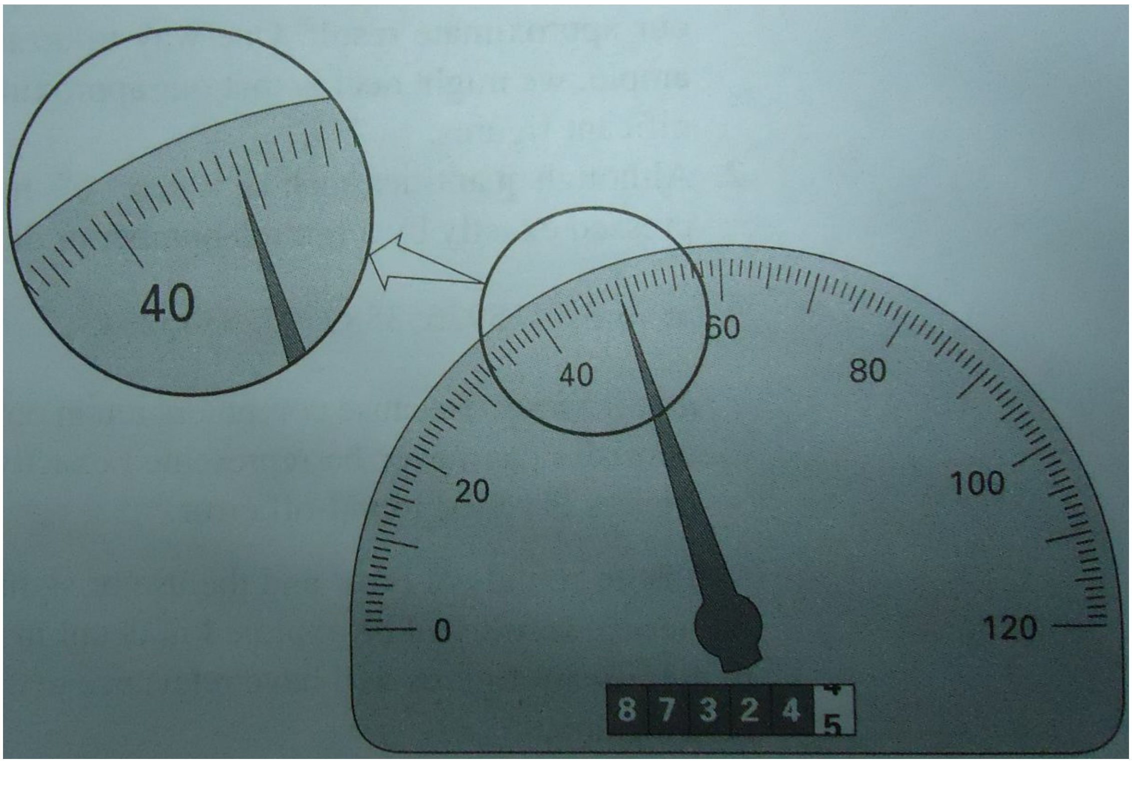
Field	Device	Organizing Principle	Mathematical Expression
Chemical engineering		Conservation of mass	Mass balance:  Over a unit of time period Δmass = inputs − outputs
Civil engineering		Conservation of momentum	Force balance:  At each node Σ horizontal forces (F_H) = 0 Σ vertical forces (F_V) = 0
Mechanical engineering		Conservation of momentum	Force balance:  $m \dfrac{d^2x}{dt^2}$ = downward force − upward force
Electrical engineering		Conservation of charge	Current balance:  For each node Σ current (i) = 0
		Conservation of energy	Voltage balance: 

2. YAKLAŞTIRMA VE YUVARLAMA HATALARI

- **Yuvarlama (round-off) hatası**, bilgisayarların, büyüklükleri **belirli sayıda hane** ile gösterebilmelerinden kaynaklanır.
- **Kesme (truncation) hatası**, sayısal yöntemlerin, kesin matematiksel işlem ya da büyüklükleri temsil etmede kullandıkları **yaklaştırmaların** içerdiği hatalardır.

- Sayısal yöntemlerle ilişkili olmayan hatalar da vardır. Bunlar:
    - Sapmalar,
    - Formülasyon ve modelleme hataları,
    - Verilerdeki belirsizlik.

2.1. BASAMAK HASSASİYETİ (ANLAMLI BASAMAKLAR)



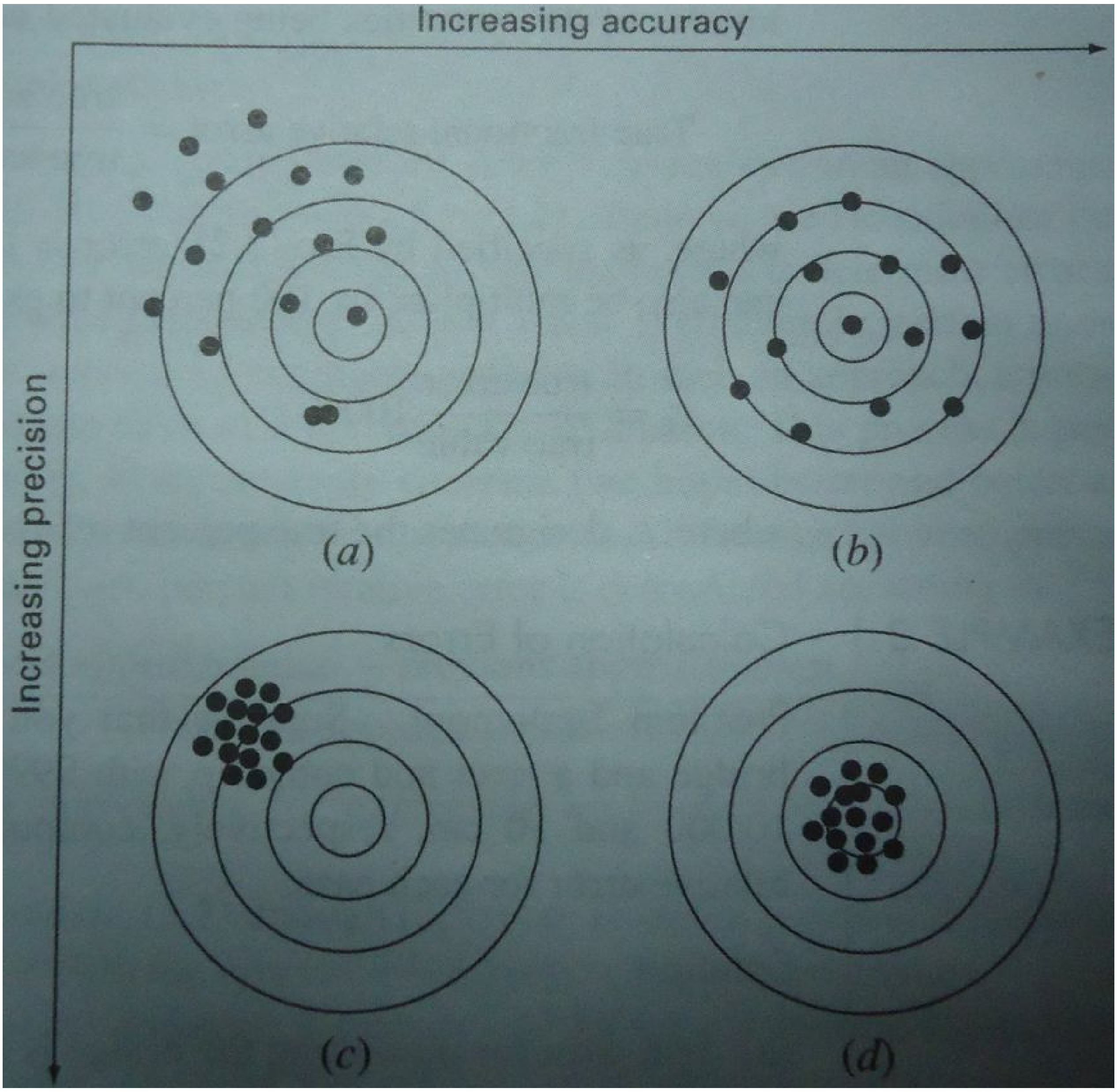
- Arabanın hızı: 48.7 ?, 48.8 ?, 48.9 (iki haneden sonrası, noktadan sonraki ilk hane ve sonrası için hassasiyeti (güvenilirlik) yok…)
- KM göstergesinin ise 6 hane kapasitesi vardır ve 7…. Haneler belirsizdir.

- Ancak, sıfır değerleri bazı durumlarda basmak hassasiyeti olabilir. Soyle ki: 0.00001854; 0.0001854; 0.001854 farklı sayılardır. Ancak hepsinin basmak hassasiyeti 4' dür. Bunun için, bunları 4.5300 x 10^4 ya da 4.53 x10^2 gibi göstermek daha uygundur.

- Basmak hassasiyeti kavramının sayısal yöntemlere iki önemli etkisi mevcuttur:
    - Sayısal yöntemler, yaklaşık sonuç verirler. Dolayısı ile belirli bir güvenirlikte (ya da hassasiyette) iterasyonları durdurmamız gerekebilir. Basmak hassasiyeti, yaklaşan sonucun yeterli olup olmadığında karar vermede kullanılabilir. Mesela … hanede yaklaşık sonucun yeteri hassasiyette olduğu kabul edilebilir.
    - Bazı basamak değerlerinin göz ardı edilmesi (yuvarlatma yapılması) yuvarlama hatasına neden olur. Mesela: π= 3.141592653589793…

2.2. DOĞRULUK VE HASSASİYET

- Hesaplamalar ve ölçümler ile ilgili hatalar, DOĞRULUK ve HASSASİYET kavramları ile karakterize edilir.
- **DOĞRULUK:** Ölçülen ya da hesaplanan değerlerin gerçek değerlere ne kadar yakın olduğunun ölçüsüdür.
- **HASSASİYET:** Ölçülen ya da hesaplanan her bir değerin diğerine ne kadar yakın olduğunun ifadesidir.



- Doğru olmayış (yanlışlık, inaccuracy), **doğrudan sistematik sapma** olarak da adlandırılır ve **bias** olarak da bilinir.

- Kesin olmayış (hassasiyetsizlik olmama, imprecision), **verilerin saçılmasının** bir tanımıdır ve belirsizliğin ifadesidir (**belirsizlik** olarak da adlandırılır).

- Sayısal yöntemlerde **hata, yanlışlık ve hassasiyetsizliğe** bağlı olarak ifade edilir.

2.3. HATA TANIMLARI

- **Sayısal hatalar:** kesin (tam) matematiksel işlemlerin ya da ifadelerin temsil edilmesinde kullanılan yaklaşıklaştırmalar nedeni ile meydana gelir. İki türü mevcuttur.
    - **Kesme hataları:** Gerçek (kesin) matematiksel prosedürlerin temsil edilmesindeki yaklaşıklaştırmalar nedeni ile meydana gelir.
    - **Yuvarlama hataları:** Sayılardaki basamak sayılarının (hassasiyetlerinin) sınırlı olması ve gerçek değerler ile aralarındaki farklar nedeni oluşur.

2.3.1 Kesme Hataları

Hatanın hesaplanması içi en basit tanımlama (sayısal hata için):

E_t (Sayısal hata) = Gerçek değer – yaklaşık sonuç

- Bu şekilde hata ifade edildiğinde, hatanın boyutu hakkında tam fikir sahibi olunamaz. Bu nedenle, normalizasyon yaparak aşağıdaki şekilde hatayı ifade etmek mümkündür:

ε_t (Yüzdesel rölatif hata) = 100 x (Gerçek hata / Gerçek değer)

Örnek 2.1: Bir köprü ile perçinin uzunluğunu ölçtüğümüzü ve sırasıyla 9999 ve 9cm olarak bulduğumuzu varsayalım. Gerçek değerler ise, 10000 ve 10cm olsun. Bu durumda, sayısal hatalar:

E_{t1} = 10000-9999 = 1cm ve E_{t2} = 10-9 = 1cm olarak bulunur.

Rölatif hatalar ise:

ε_{t1} = 100 x (1/10000) = % 0.01 ve ε_{t2} = 100 x (1/10) = % 10 olarak hesaplanır.

Bu şekilde, iki kavram arasındaki fark daha açık görülebilir.

- Gerçek hayat problemlerinde, genelde, gerçek (doğru) değeri bilmeyiz. Ancak, analitik bir yöntem ile fonksiyonel olarak ifade edilebilen durumlarda bunu hesaplamamız ya da deneysel olarak ölçmemiz mümkün olabilir. Bu nedenle, iterasyonlar sırasında, mevcut ve önceki adımlar arasındaki değerlerden faydalanılarak hesaplama yapılabilir:

$\boldsymbol{\varepsilon_a}$ **(Yakl. Yzd. Röl. hata) = 100 x (mev. sonuç – önc. sonuç) / mev. sonuç**

- İterasyonlar, aşağıdaki kriter sağlanana kadar devam eder:

$$|\varepsilon_a| < \varepsilon_s \qquad (\varepsilon_s : \text{önceden tanımlanmış kabul seviyesi})$$

Scarborough (1966) tarafından, basamak hassasiyeti ile kabul kriteri arasında aşağıdaki bağıntı önerilmiş ve ilişiklendirilmiştir:

$$\varepsilon_s = \%\ (0.5 \times 10^{2-n}) \qquad (n : \text{en küçük basamak hassasiyeti})$$

Örnek 2.2: Eksponansiyel fonksiyonu (e^x) **Mclaurin serisi** yardımı ile açarsak:

$$e^x = 1 + x + x^2 / 2 + x^3 / 3! + \ldots\ldots\ldots\ldots + xn / n!$$

$e^{0.5}$ için, her adımda gerçek ve yaklaşık bağıl (rölatif) yüzdesel hataları hesaplayacağız.

Not: gerçek değer: $e^{0.5} = 1.648721\ldots\ldots$

Çözüm:

İlk olarak, **hata kriterini 3 anlamlı basamak** için hesaplarsak:

$\varepsilon_s = \%\ (0.5 \times 10^{2-3}) = \%0.05$ bulunur.

1. adım:

Sonuç: **1**

$\varepsilon_t = 100 \times (1.648721 - 1) / 1.648721 =$ **% 39.4**

$\varepsilon_a = -$

2. adım:

Sonuç: 1 + x = 1 + 0.5 = **1.5**

ε_t = 100 x (1.648721 – 1.5) / 1.648721 = % 9.02

ε_a = 100 x (1.5 - 1) / 1.5 = % 33.3 (bu işlem, $\varepsilon_a < \varepsilon_s$ (%0.05 olana kadar devam eder.)

Adım	**Sonuç**	**ε_a (%)**	**ε_a (%)**
1	1	39.3	-
2	1.5	9.02	33.3
3	1.625	1.44	7.69
4	1.645833330	0.175	1.27
5	1.648737500	0.0172	0.158
6	1.648697917	0.00142	0.0158

ε_a = 0.016 < 0.05 old. iterasyonlar sonlandırılır.

2.3.2. Yuvarlama Hataları

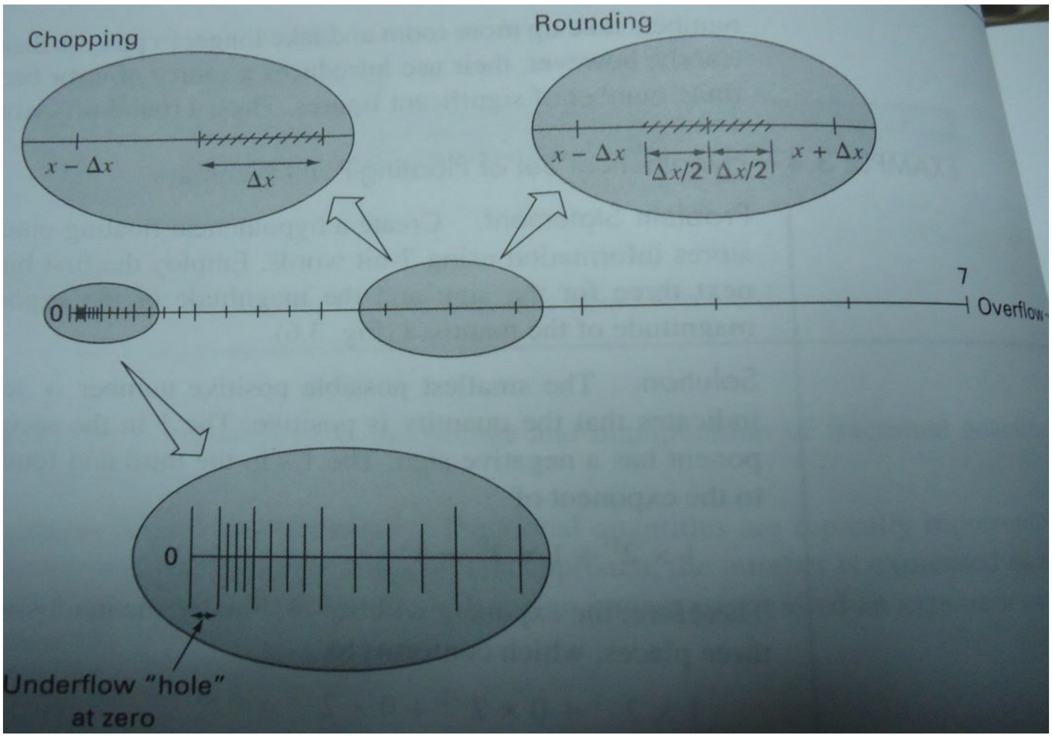
- Yuvarlama hataları, bilgisayarların **basamak hassasiyetlerinin sınırlı** olması nedeniyle meydana gelirler. İlaveten, bilgisayarlar, ikili sayı sistemini kullandıkları ve bunun **10 tabanlı sayı sistemleri** ile ifadesinden doğan farklılıklar da bu hatalara yol açar.
- 5 234 = $(5x10^3)+(2x10^2)+(3x10^1)+(4x10^0)$ [poziyonel notasyon]
- Bilgisayarda sayılar, ikili sistemde ifade edilirler.
  - 1 0 1 1 = $1x2^3+0x2^2+1x2^1+1x2^0$ = 11

- 16bit sistemde, tam sayı için, ilk hane 1ise (-), 0 ise (+) işaret alır, geri kalan 15 dijit, sayıyı temsil eder. **1** 0 1 0 1 1 1 0 0 0 1 0 1 1 1 1.
- 16bit sistemde, maks. Tam sayı [-32 768; 32 767].
- Rasyonel sayılar bilgisayarda bir cümlenin içine kayan nokta sayısı olarak depolanırlar.
- Kayan nokta sayısı: $\mathbf{m \times b^{e}}$. m: mantis, b: taban, e: üs. Örnek olarak: $0.15678 \times 10^3 = 156.78$. Kayan nokta sayıları sınırlı sayıda hane ile ifade edilebildikleri için yuvarlama hatasına neden olurlar.

Örnek: 7 bit bir cümle ile bir kayan nokta sayısını ifade edersek:

0 1 $\underbrace{1\ 1}$ 1 $\underbrace{0\ 0}$; $(1x2^{-1}+0x2^{-2}+0x2^{-3}) \times 2^{-3}$ (Üs: $1x2^1+1x2^0=3$)

Mantis büyüklüğü
Üs büyüklüğü
Üs işareti
Sayı işareti



SONUÇLAR:

- **Gösterilecek sayı büyüklükleri sınırlıdır**. Tamsayı durumunda old. gibi, büyük sayıların ifadesinde, taşma (overflow) hatası olabilir.
- Çok küçük sayıların ifadesinde, kayan nokta sisteminin önemli bir sınırlaması vardır. Sıfır ile ilk pozitif sayı arasında “alttan tanım sınırını aşma” deliği vardır.
- **Aralık içinde gösterilebilecek sonlu sayıda büyüklük vardır.** Bu nedenle, hassasiyet sınırlıdır. İrrasyonel sayılar tam olarak gösterilemez. Birbiriyle örtüşmeyen rasyonel sayılar da tam olarak gösterilemez. Her iki durum da: **niceleme hatasına** neden olur.
- **Yaklaştırma, budayarak (kesme)** ya da **yuvarlayarak** yapılır**. Yuvarlatma** ile **hata değeri azalır,** ancak **işlemsel yük artar.** Yuvarlatmalardaki en büyük hata, **ΔX / 2**’ dir; Budamada ise **ΔX** ‘ dir.
- **Sayılar arasındaki aralık (ΔX), sayılar büyüdükçe artar.**

3. KESME HATALARI VE TAYLOR SERİLERİ

- Paraşütçü örneğinde verilen yaklaşıklaştırma (sonlu-bölünen-fark denklemi) kesme hatası içermektedir.
- Taylor teoremi (veya Taylor serileri), herhangi bir fonksiyonun bir noktadaki değerini ve türevini kullanarak, diğer noktadaki değerini hesaplamak için kullanılır.
- Diğer deyişle, Taylor serileri yardımı ile, herhangi bir fonksiyon bir polinom kullanılarak yaklaşıklaştırılabilir.

Taylor Kuramı:

Eğer *f* fonksiyonu ve ilk *n*+1türevi *a* ve *x*' i içeren bir aralıkta sürekliyse, *f* fonksiyonunun *x*' teki değeri:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n$$

where the remainder R_n is defined as

$$R_n = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

Şeklinde ifade edilir, ve bu teorem, herhangi düzgün bir fonksiyonun yaklaşık olarak bir polinom ile ifade edilebilmesine olanak sağlar.

Rn eşitliği kalan değeri ifade etmektedir ve **integral formu** adı verilir. Bunu ortalama değerden faydalanarak iki şekilde hesaplayabiliriz:

1. **Seçenek (Ortalama kuramı 1):**

g fonksiyonu [a,b] aralığında sürekli ise ve integre edilebiliyorsa, aşağıdaki eşitliği sağlayan bir ξ noktası mevcuttur.

$$\int_a^x g(t)\,dt = g(\xi)(x-a)$$

İntegral (fonk. altındaki alan) = ortalama değer [*g* (ξ)] x aralık (*x* - *a*)

2. **Seçenek (Ortalama kuramı 2):**

g ve h fonksiyonları, [a,x] de sürekli ise ve integre edilebiliyorlarsa, h aralıkta işaret değiştirmiyorsa, aşağıdaki denklemi sağlayan bir ξ noktası vardır.

$$\int_a^x g(t)h(t)\,dt = g(\xi)\int_a^x h(t)\,dt$$

DİKKAT: Bu, üstteki eşitliğin h(t) = 1 durumu…

Bunu, *Rn* eşitliğine uygularsak:

$$g(t) = f^{(n+1)}(t) \qquad h(t) = \frac{(x-t)^n}{n!}$$

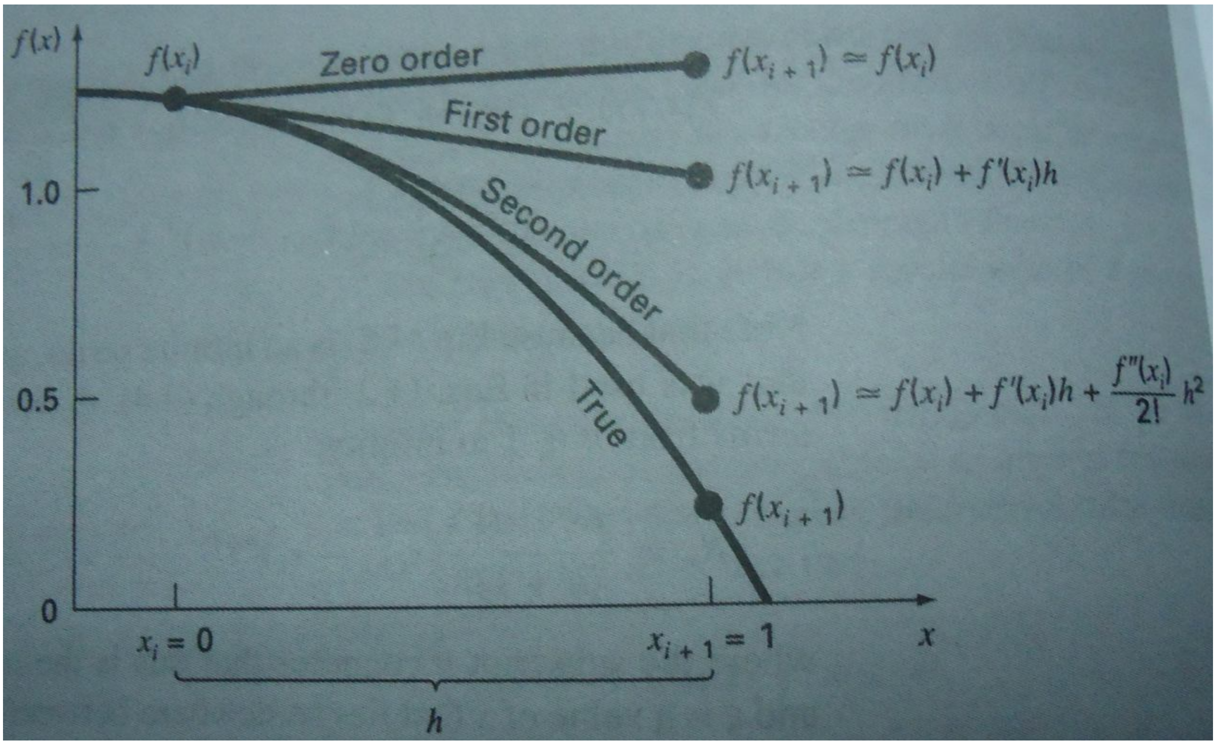
Ortalama değer kuramı uygulanarak aşağıdaki nihai eşitlik elde edilir:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Bu eşitliğe, **Kalanın türevi** ya da **Lagrange formu** olarak isimlendirilir.

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(x_i)}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2 + \frac{f^{(3)}(x_i)}{3!}(x_{i+1} - x_i)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!}(x_{i+1} - x_i)^n + R_n$$

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x_{i+1} - x_i)^{n+1}$$



ÖRNEK:

Problem Statement. Use zero- through fourth-order Taylor series expansions to approximate the function

$$f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$$

from $x_i = 0$ with $h = 1$. That is, predict the function's value at $x_{i+1} = 1$.

Solution. Because we are dealing with a known function, we can compute values for $f(x)$ between 0 and 1. The results (Fig. 4.1) indicate that the function starts at $f(0) = 1.2$ and then curves downward to $f(1) = 0.2$. Thus, the true value that we are trying to predict is 0.2.

The Taylor series approximation with $n = 0$ is [Eq. (4.2)]

$$f(x_{i+1}) \simeq 1.2$$

Thus, as in Fig. 4.1, the zero-order approximation is a constant. Using this formulation results in a truncation error [recall Eq. (3.2)] of

$$E_t = 0.2 - 1.2 = -1.0$$

at $x = 1$.

For $n = 1$, the first derivative must be determined and evaluated at $x = 0$:

$$f'(0) = -0.4(0.0)^3 - 0.45(0.0)^2 - 1.0(0.0) - 0.25 = -0.25$$

Therefore, the first-order approximation is [Eq. (4.3)]

$$f(x_{i+1}) \simeq 1.2 - 0.25h$$

which can be used to compute $f(1) = 0.95$. Consequently, the approximation begins to capture the downward trajectory of the function in the form of a sloping straight line (Fig. 4.1). This results in a reduction of the truncation error to

$$E_t = 0.2 - 0.95 = -0.75$$

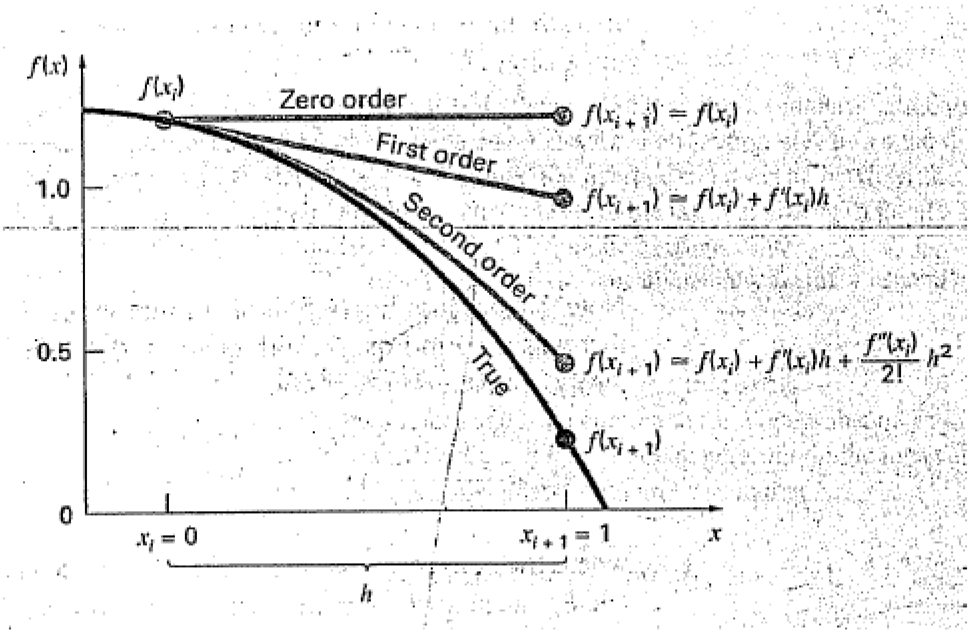
For $n = 2$, the second derivative is evaluated at $x = 0$:

$$f''(0) = -1.2(0.0)^2 - 0.9(0.0) - 1.0 = -1.0$$

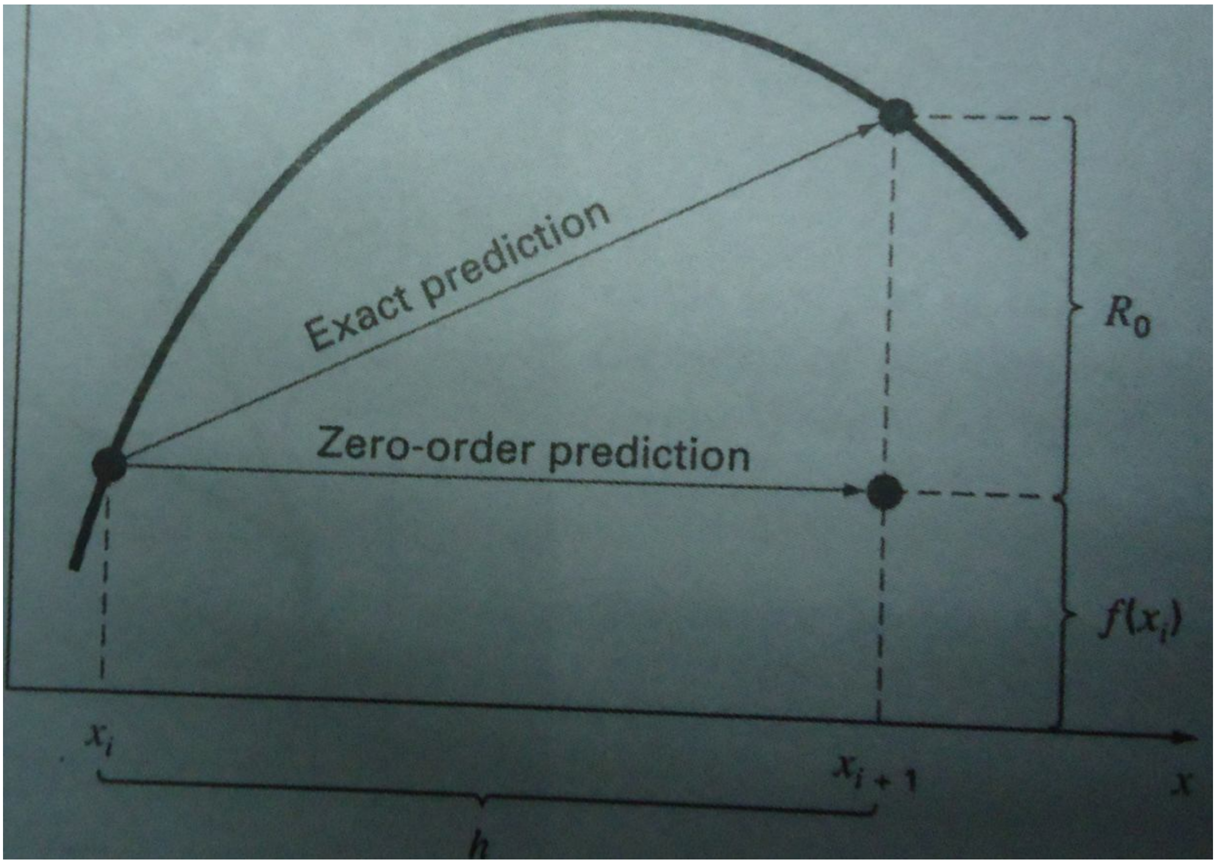
Therefore, according to Eq. (4.4),

$$f(x_{i+1}) \simeq 1.2 - 0.25h - 0.5h^2$$

and substituting $h = 1$, $f(1) = 0.45$. The inclusion of the second derivative now adds some downward curvature resulting in an improved estimate, as seen in Fig. 4.1. The truncation error is reduced further to $0.2 - 0.45 = -0.25$.



$f(x)$
$f(x_i)$
Zero order
First order
Second order
True
1.0
0.5
0
$f(x_{i+1}) = f(x_i)$
$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h$
$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2$
$f(x_{i+1})$
$x_i = 0$
$x_{i+1} = 1$
x
h


Exact prediction
Zero-order prediction
R_0
$f(x_i)$
x_i
x_{i+1}
x
h