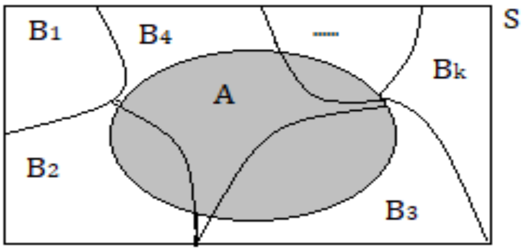
7.4. Örnek Uzayın Parçalanışı, Toplam Olasılık ve Bayes Teoremi

7.4.1. Örnek uzayın parçalanışı:



a) $B_i \cap B_j = \emptyset \ (i = 1, \ldots, j, \ldots k \ ve \ i \neq j)$

b) $\bigcup_{i=1}^{k} B_i = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k = S$

c) $P(B_i) > 0$

koşullarını sağlayan $B_1, B_2, \ldots B_i$'lere S örnek uzayının bir parçalanışı denir.

Açık olarak $P(B_1) + P(B_2) + \cdots + P(B_k) = 1$'dir.

7.4.2. Toplam Olasılık Formülü: B_i (i=1,2,...k), S örnek uzayının bir parçalanışı ise bu örnek uzaydaki herhangi bir A olayının gerçekleşmesi olasılığı

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i) * P(A|B_i)$$

ile hesaplanır.

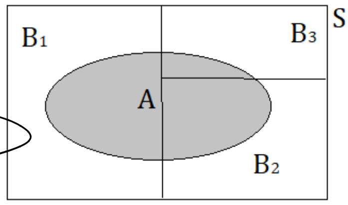
Örnek

7.4.3. Bayes Teoremi: A olayının gerçekleştiği biliniyorken B_r olayının koşullu olasılığı

$$P(B_r|A) = \frac{P(B_r \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_r) * P(A|B_r)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i) * P(A|B_i)}$$

ile hesaplanır.

Örnek: Conta üreten bir fabrikada toplam üretimin %50'si B_1 makinesinde, %30'u B_2 makinesinde ve kalanı da B_3 makinesinde gerçekleşmektedir. Bu makinelerin üretimde sırasıyla %5'i, %4'ü ve %3'ü kusurlu gerçekleşmektedir.

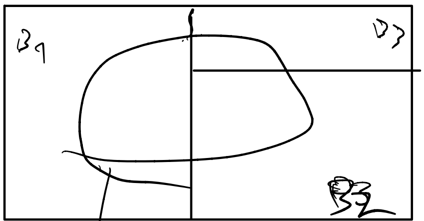


a) Bir günlük üretimin ardından rasgele seçilen bir contanın kusurlu olması,

b) Rasgele seçilen contanın kusurlu olduğu biliniyorken, bu contanın B_2 makinesinde üretilmiş olması olasılıklarını bulunuz.

$\frac{30}{100} \cdot \frac{4}{100}$

$\frac{430}{10000}$



$B_1 = \{$B$_1$ makinesinde üretilmiş olması$\}$
$B_2 = \{$B$_2$ makinesinde üretilmiş olması$\}$
$B_3 = \{$B$_3$ makinesinde üretilmiş olması$\}$
$S = B_1 \cup B_2 \cup B_3$ dir.
$A = \{$Kusurlu olması$\}$ olayı olsun.

kusur

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(B_i) * P(A|B_i) = P(B_1) * P(A|B_1) + P(B_2) * P(A|B_2) + P(B_3) * P(A|B_3)$$

$$= \frac{50}{100} * \frac{5}{100} + \frac{30}{100} * \frac{4}{100} + \frac{20}{100} * \frac{3}{100} = \frac{430}{10000} = 0.0430$$

$$\frac{P(A|B_2)}{P(a)}$$

$$\frac{\frac{30}{100} \cdot \frac{4}{100}}{P(A)}$$

$$P(B_2|A) = \frac{P(B_2) * P(A|B_2)}{P(A)} = \frac{\frac{30}{100} * \frac{4}{100}}{\frac{430}{10000}} = \frac{12}{43} = 0.2791.$$

RASGELE DEĞİŞKENLER

Örnek uzaydaki her bir eleman, reel sayılarda tanımlı bir değişkenin değeri olarak alınırsa böyle değişkenlere *rasgele değişken (rd)* denir.

Bir rasgele değişkenin alabileceği değerler tam sayı, sonlu ya da sayılabilir sonsuz ise Kesikli rd, bir aralıktaki tüm değerleri ya da sayılamaz sonsuzlukta değerler alıyorsa Sürekli rd olarak adlandırılır. Rd ler X,Y,Z gibi büyük harflerle alabileceği değerlerde x,y,z gibi küçük harflerle gösterilir.

Örnek:

i. X rd bir paranın iki kez atılmasın deneyinde elde edilen turaların sayısı olmak üzere $S = \{YY, TY, YT, TT\}$ olup X Kesikli rd alabileceği değerler
$$X = \{x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2\} \text{ dir.}$$
ii. Y rd iki zarın yuvarlanması deneyinde üste gelen sayıların toplamı olmak üzere $S = \{(1,1), (1,2), \dots (6,6)\}$ olup Y Kesikli rd alabileceği değerler
$$Y = \{y_1 = 2, y_2 = 3, \dots, y_{11} = 12\} \text{ dir.}$$
iii. Z Kesikli rd bir dersi alan öğrenci sayısı ise $Z = \{0,1,2, \dots\}$.

iv. T yeni doğan bir sağlıklı bebeğin ağırlığı (gr) ise T sürekli rd $3000 \leq t \leq 3500$.

v. Yükseklik, ağırlık, sıcaklık, uzunluk, hacim gibi ölçüm ya da tartı ile elde edilen değişkenler sürekli rasgele değişkendir.

7.5. Kesikli Rasgele Değişkenler ve Dağılımları

7.5.1. Kesikli RD Olasılık Fonksiyonu: X kesikli rasgele değişkenin her bir x olası değerinin gerçekleşme olasılığı $P(X = x) = f(x)$ şeklinde ifade edilir.

$$0 \leq f(x_i) \leq 1$$
$$\sum f(x_i) = 1$$

özelliklerini sağlayan $f(x)$, X kesikli rasgele değişkenin *olasılık fonksiyonu (of)* dur.

7.5.2. Kesikli RD Birikimli Dağılım Fonksiyonu: X kesikli rd nin bir x değerine eşit ve küçük olması olasılığı $P(X \leq x) = F(x)$ şeklinde ifade edilir ve $F(x)$ e X kesikli rd nin *birikimli dağılım fonksiyonu (bdf)* denir. X in BDF

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

toplam sembolü

$0 \leq F(x) \leq 1$

$x_1 \leq x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$

$P(a \leq x \leq b) \neq F(b) - F(a)$

Değişken X değerler

çift olursa/ck

$P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F(x)$

özelliklerini sağlar.

7.5.3. Kesikli RD Beklenen Değeri (Ortalaması): X rasgele değişkenin beklenen değeri $E(X)$ ile gösterilir ve ağırlıklı ortalama ya da kitle ortalaması (μ) olarak da adlandırılır. X kesikli RD nin beklenen değeri

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{N} x_i f(x_i) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \cdots + x_N f(x_N)$$

şeklindedir.

Y, X kesikli rd nin bir fonksiyonu $Y = g(x)$ ise $E(Y) = E(g(x)) = \sum_{i=1}^{N} g(x_i) f(x_i)$ dir.

$a, b \in \mathbb{R}$ için $g(x) = aX + b$ ise

Sorular

$$\begin{aligned} E(g(x)) = E(aX + b) &= \sum_{i=1}^{N} (ax_i + b) f(x_i) \\ &= (ax_1 + b) f(x_1) + (ax_2 + b) f(x_2) + \cdots + (ax_N + b) f(x_N) \\ &= a \sum_{i=1}^{N} x_i f(x_i) + b \sum_{i=1}^{N} f(x_i) = E(aX) + E(b) = aE(X) + b. \end{aligned}$$

beklenen değer

Bir rastgele değişkenin beklenen değeri ya da ortalaması olasılık fonksiyonunun merkezi hakkında bilgi verir. Ancak ortalama değer bir deneyden bir diğerine rasgele değişkenin değerlerinin dağılımı, değişimi ya da yayılımı ile ilgili bilgi vermez. Burada varyans ve standart sapma devreye girer.

7.5.4. Kesikli RD Varyansı: Varyans, bir rasgele değişkenin aldığı değerlerin ortalamadan ne kadar saptığının bir yayılım ölçüsüdür. X rasgele değişkenin varyansı $V(X)$ ile gösterilir. Kitle varyansı (σ^2) olarak da ifade edilir. X kesikli rasgele değişkenin varyansı

Beklenen değerde

$$\sigma^2 = V(X) = E[(x - \mu)^2] = \sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu)^2 f(x_i)$$

$$\sigma^2 = V(X) = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 f(x_i) - \mu^2 = \boxed{E(X^2) - \left(E(X)\right)^2}$$

Bunu Kullan

şeklindedir. Standart sapma varyansın karekökü olup $\sigma = \sqrt{V(X)}$ dir.

$a \in \mathbb{R}$, X bir rd olmak üzere

$$V(aX) = E[(aX - E(aX))^2)] = E[a^2(X - E(X)^2)] = a^2 V(X),$$
$$V(a + X) = V(X).$$

Y, X kesikli rd nin bir fonksiyonu $Y = g(x)$ ise $V(Y) = E\left[\left(g(x) - E\left(g(x)\right)^2\right)\right]$ dir.

$a, b \in \mathbb{R}$ için $g(x) = aX + b$ ise

$$V(g(x)) = V(aX + b) = V(aX) + V(b) = a^2 V(X) + 0.$$

Soru 3:

Bir zar 50 kere atılıyor. Aşağıdaki çizelgede 6 zar sayısı ve gelen sayının sıklığı veriliyor.

Sayı	1	2	3	4	5	6
Sıklık	7	9	8	7	9	10

(i) 4 ün gelme, (ii) tek sayının gelme, (iii) asal sayının gelme olaylarının göreli sıklığını bulunuz.

(i) $\frac{7}{50}$, (ii) $\frac{24}{50}$, (iii) $\frac{26}{50}$

Soru 4:

Üç hilesiz para atılıyor. (i) birinci parada tura (ii) paralardan birinde tura gelirse hepsinin tura gelme olanağı nedir?

Örneklem uzayının sekiz öğesi vardır: S = {TTT, TTY, TYT, TYY, YTT, YTY, YYT, YYY}

(i) Birinci para tura ise indirgenmiş örneklem uzayı A = {TTT, TTY, TYT, TYY} olur. 4 durumda sadece ilkinde hepsi tura olduğu için $p = \frac{1}{4}$ dır.

(ii) Paralardan biri tura ise, indirgenmiş örneklem uzayı B = {TTT, TTY, TYT, TYY, YTT, YTY, YYT} olur. 7 durumdan 1 inde hepsi tura olduğundan $p = \frac{1}{7}$ dır.

Soru 5:

1 den 9'a kadar olan sayılardan ikisi rasgele seçiliyor. Eğer toplam çift sayı ise, her iki sayının da tek olma olasılığını bulunuz.

Eğer her iki sayı da çiftse, ya da her iki sayı da tekse toplam çift bir sayı olur. 4 çift sayı vardır. (2, 4, 6, 8), buradan iki çift sayı seçmenin $\binom{4}{2} = 6$ yolu vardır. 5 tane tek sayı vardır (1, 3, 5, 7, 9); buradan iki tek sayı seçmenin $\binom{5}{2} = 10$ yolu olur. Böylece toplamları çift sayı olan iki sayı seçmenin 6 +1 0= 16 yolu olur; bu yollardan 10 tanesi her iki sayıda tek olduğu zaman oluştuğundan, $p = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$ olarak bulunur.

$\frac{10}{16}$ $\frac{5}{8}$

ç+ç

t+t

Soru 6:

Bir kutuda 7 kırmızı ve 3 beyaz bilye vardır. Kutudan 3 bilye ardarda çekiliyor. İlk ikisinin kırmızı ve üçüncünün beyaz olma olasılığını bulunuz.

10 bilyeden 7 si kırmızı olduğundan birinci bilyenin kırmızı olma olasılığı 7/10 dur. Birinci bilye kırmızı ise kalan 9 bilyeden 6 sı kırmızı olduğundan, ikinci bilyenin de kırmızı olma olasılığı 6/9 dur. İlk iki bilye kırmızı olduğundan, kutuda kalan 3 ü beyaz 8 bilyeden, çekilen üçüncü bilyenin beyaz olma olasılığı 3/8 olur. Buradan, çarpım önermesi gereği,

$$p = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{7}{40} \quad \text{bulunur.}$$

$\frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{7}{40}$

7 3

$\frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{7}{40}$

Soru 7:

A ve B, $P(A) = \frac{3}{8}$, $P(B) = \frac{5}{8}$ ve $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$ olan olaylar olsun. $P(A \setminus B)$ ve $P(B \setminus A)$ bulunuz.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ formülünü kullanarak önce $P(A \cap B)$'i bulunuz.

$\frac{3}{4} = \frac{3}{8} + \frac{5}{8} - P(A \cap B)$ ya da $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$

O zaman $P(A \setminus B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{8}} = \frac{2}{5}$ ve $P(B \setminus A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{8}} = \frac{2}{3}$ olur.

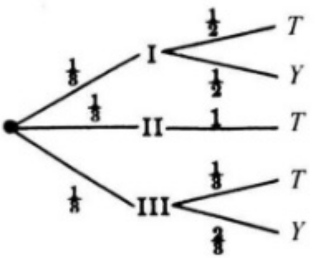
Soru 8:

Bir kutudaki üç paradan biri normal, hilesiz bir para, diğerinin iki yüzü de tura, öteki ise turanın gelme olasılığı $\frac{1}{3}$ olan hileli bir paradır. Kutudan rasgele seçilen para atılıyor. Tura gelme olasılığını bulunuz.

Ağaç çizgeyi aşağıdaki Şekil (a) daki gibi çiziniz. I in hilesiz parayı, II nin iki turalı parayı, III ün de hileli parayı gösterdiğine dikkat ediniz. Turalar üç biçimde gelebilir; buradan

$$p = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{11}{18}$$

bulunur.



(a)

Soru 9:

Aşağıdaki gibi üç torba veriliyor:

A torbasında 3 kırmızı ve 5 beyaz bilye vardır.
B torbasında 2 kırmızı ve 1 beyaz bilye vardır.
C torbasında 2 kırmızı ve 3 beyaz bilye vardır.

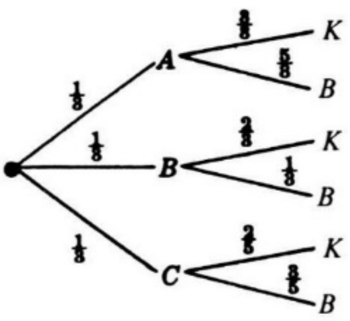
Rasgele seçilen bir torbadan bir bilye çekiliyor. Eğer bilye kırmızı ise, bu bilyenin A torbasından gelme olasılığı nedir?

$8+3+5$

(A, K

1

$$\frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5}}$$



(b)

Rasgele seçilen bir torbadan bir bilye çekiliyor. Eğer bilye kırmızı ise, bu bilyenin A torbasından gelme olasılığı nedir?

Ağaç çizgeyi yukarıdaki Şekil (b) deki gibi çiziniz.

Çekilen kırmızı bilyenin A torbasından gelme olasılığı yani $P(A \setminus K)$ araştırılıyor. $P(A \setminus K)$ bulmak için $P(A \cap K)$ ve $P(K)$ bulunur.

A torbasının seçilip, içinden kırmızı bir bilye çekme olasılığı $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{8}$ dır; yani $P(A \cap K) = \frac{1}{8}$ dır. Kırmızı bilye çekebilmek için üç yol olduğundan $P(K) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{173}{360}$ olur. Buradan

$$P(A \setminus K) = \frac{P(A \cap K)}{P(K)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{173}{360}} = \frac{45}{173} \text{ bulunur.}$$

Bayes Önermesi ile

$$P(A \setminus K) = \frac{P(A)P(K \setminus A)}{P(A)P(K \setminus A) + P(B)P(K \setminus B) + P(C)P(K \setminus C)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5}} = \frac{45}{173}$$

$\frac{3}{8} \cdot \frac{3}{5}$

$\frac{2}{5}$

Soru 10:

A kutusunda 3'ü bozuk 8 nesne, B kutusunda ise 2'si bozuk 5 nesne vardır. Her kutudan birer nesne rasgele çekiliyor.

(i) Her iki nesnenin de bozuk olma olasılığı nedir?
(ii) Birinin bozuk, diğerinin sağlam olma olasılığı nedir?
(iii) Bir nesne bozuk, diğeri sağlamsa, bozuk nesnenin A kutusundan gelme olasılığı nedir?

A   B

3B 5D   2B 3D

i) $\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{40}$

ii) AB + DB $\frac{3}{8} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{8}$

$\frac{9}{40} + \frac{10}{40} = \frac{19}{40}$

iii) (A/X) $\frac{\frac{9}{40}}{\frac{19}{40}}$

$\frac{3}{8} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{19}$

Örnek: (C. Homur) Üç torbada beyaz (B) ve kırmızı (K) toplar bulunmaktadır. I. Torbada; 1 beyaz, 3 kırmızı top, II. Torbada; 2 beyaz, 2 kırmızı, III. Torbada; 3 beyaz, 1 kırımızı top vardır. Rasgele seçilen bir torbadan çekilen top beyaz ise bu topun I. Torbadan çekilmiş olması olasılığı nedir?

I.	II.	III.
1B 3K	2B 2K	3B 1K

B: Çekilen topun beyaz olması

A_i: Seçilen torbanın I., II, veya III. Torba olması olayları olsun. İ=1, 2, 3

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$$

$$P(B \mid A_1) = \frac{1}{4}, \quad P(B \mid A_2) = \frac{2}{4}, \quad P(B \mid A_3) = \frac{3}{4}$$

$$P(A_1 \mid B) = \frac{P(B \mid A_1).P(A_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(B \mid A_i).P(A_i)} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{1}{3}\right)\left[\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}\right]}$$

$= \frac{1}{12} \cdot \frac{12}{6} = \frac{1}{6}$. Çekilen beyaz topun, I. Torbadan gelmesi olasılığı %17'dir.

$$\frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4}\right)}$$

$$\frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4}\right)}$$

Soru 16:

Örnek: (M. Aytaç S: 41)
Bir hava üssünde tehlike olduğu zaman alarm sisteminin çalışması olasılığı 0.99 tehlike olmadığında alarm vermemesi olasılığı 0.98 ve herhangi bir anda tehlike olması olasılığı da 0.003'tür.

a) Hava üssündeki alarm çalıştığına göre, tehlike nedeniyle çalmış olması olasılığı nedir?

b) Tehlike olması ve alarm sisteminin çalışmaması olasılığı nedir?

0,99 tehlike çal

0,02 tehlike yok

A: Alarm sisteminin çalışması,
B: Tehlike olması olaylarını göstersin.

$P(A \mid B) = 0.99, \quad P(B) = 0.003 \Rightarrow P(\overline{B}) = 0.997$ olur.

$P(\overline{A} \mid \overline{B}) = 0.98 \Rightarrow P(A \mid \overline{B}) = 0.02$ olur.

a) Alarm sistemi çalışıyorsa tehlike nedeniyle olması olasılığı P(B|A)=? Bayes Teoremi

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \mid B) : P(B)}{P(A \mid B).P(B) + P(A \mid \overline{B}).P(\overline{B})} = \frac{(0.99).(0.003)}{(0.99).(0.003) + (0.02).(0.997)} = \frac{297}{2291}$$

tehlike yok

Alarm sisteminin çalıştığı bilindiğine göre tehlike nedeniyle çalışması olasılığı, yaklaşık olarak, %13'tür.

b) Çarım kuralı uygulanırsa

$$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A} \mid B).P(B) = (0.01)(0.003) = 0.00003$$

0,003 · (0,01) = 0,000..

Çünkü, burada

$$P(\overline{A} \mid B) = 1 - P(A \mid B) = 1 - 0.99 = 0.01 = P(\overline{A})\text{'dır.}$$

Çalma

0,99 tehlike ~~yok~~

0,02 te yok

tehlike 0,003

Örnek: X rasgele değişkeni bir paranın iki kez atılmasın deneyinde elde edilen turaların sayısı olsun. X kesikli bir rd dir.

$S = \{YY, TY, YT, TT\}$ olup $X = \{x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2\}$ dir. Rastgele değişkeni tura sayısı

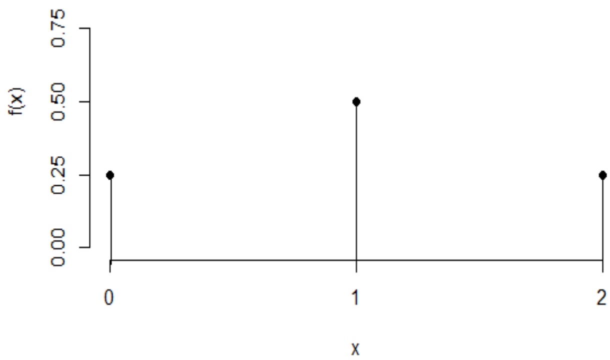
X kesikli rd nin of $f(x)$ ve grafiği

$x_1 = 0$ (hiç tura gelmemesi), $\{YY\}$ olayı olup $P(X = 0) = f(0) = 1/4 = 0.25$

$x_2 = 1$ (bir tura gelmesi), $\{TY, YT\}$ olayı olup $P(X = 1) = f(1) = 2/4 = 0.50$

$x_3 = 2$ (iki tura gelmesi), $\{TT\}$ olayı olup $P(X = 2) = f(2) = 1/4 = 0.25$

$0 \le f(x_i) \le 1$ ve $\sum_{i=1}^{3} f(x_i) = f(0) + f(1) + f(2) = 1$ olup $f(x) = \begin{cases} 0.25 & ;\ x = 0 \\ 0.50 & ;\ x = 1 \\ 0.25 & ;\ x = 2 \\ 0 & ;\ d.d. \end{cases}$



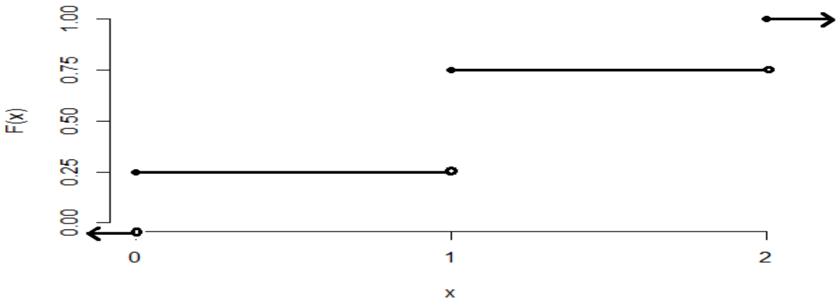
X kesikli rd bdf $F(x) = \sum_{x_i \le x} f(x_i)$ ve grafiği birikimli

$x_1 = 0$ için $P(X \le x_1 = 0) = F(0) = \sum_{x_i \le 0} f(x_i) = f(0) = \frac{1}{4} = 0.25$

$x_2 = 1$ için $P(X \le x_2 = 1) = F(1) = \sum_{x_i \le 1} f(x_i) = f(0) + f(1) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4} = 0.75$

$x_3 = 2$ için $P(X \le x_3 = 2) = F(2) = \sum_{x_i \le 2} f(x_i) = f(0) + f(1) + f(2) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = 1$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ;\quad x < 0 \\ 0.25 & ;\ 0 \le x < 1 \\ 0.75 & ;\ 1 \le x < 2 \\ 1 & ;\quad 2 \le x \end{cases}$$



X kesikli rd beklenen değeri ve varyansı;

Beklenen değeri

Kendisi. olasılığı

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i f(x_i) = 0 * 0.25 + 1 * 0.50 + 2 * 0.25 = 1$$

0 +

Varyans

$$\sigma^2 = V(X) = \sum_{i=1}^{3} (x_i - \mu)^2 f(x_i) = (0-1)^2 * 0.25 + (1-1)^2 * 0.50 + (2-1)^2 * 0.25$$
$$= 0.5$$

Örnek: X rd nin olasılık fonksiyonu $x = 1,2,3,4$ için $f(x) = \frac{1}{k} * x$ olduğuna göre;

a) $k = ?$
b) $F(x)$
c) $P(X = 2)$
d) $P(X = 1.5)$
e) $P(X \leq 3)$
f) $P(X > 2.5)$
g) $E(X)$
h) $V(X)$

değerlerini bulunuz.

$\frac{1}{k} + \frac{2}{k} + \frac{3}{k} + \frac{4}{k} = \frac{k}{k}$

$\frac{10}{k} = \frac{k}{k}$

$10k = k^2$

$k = 10$

Çözüm: $f(x)$ olasılık fonksiyonu ise $0 \leq f(x_i) \leq 1$ olup $\sum_{i=1}^{4} f(x_i) = 1$ olmalı.

$$\sum_{i=1}^{4} f(x_i) = \frac{1}{k} * 1 + \frac{1}{k} * 2 + \frac{1}{k} * 3 + \frac{1}{k} * 4 = 1 \Rightarrow \frac{10}{k} = 1 \Rightarrow k = 10$$

olup $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} * x & ; x = 1,2,3,4 \\ 0 & ; \quad d.d. \end{cases}$

a) $k = 10$

b) $F(x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i) = \sum_{i=1}^{x} \frac{1}{10} x = \frac{1}{10}(1 + 2 + \cdots + x) = \frac{1}{10}\left(\frac{x(x+1)}{2}\right)$ olup

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x < 1 \\ \dfrac{x(x+1)}{20} & ; 1 \leq x < 4 \\ 1 & ; \quad 4 \leq x \end{cases}$$

$\frac{1}{10}(1+2+3+4)$

c) $P(X = 2) = f(2) = \frac{1}{10} * 2 = 0.2$ ✓

d) $P(X = 1.5) = f(1.5) = 0$ → elimde değer olmadığı için 0

e) $P(X \leq 3) = f(1) + f(2) + f(3) = 0.1 + 0.2 + 0.3 = 0.6$

$P(X \leq 3) = F(3) = \frac{3(3+1)}{20} = 0.6$

f) $P(X > 2.5) = f(3) + f(4) = 0.3 + 0.4 = 0.7$

$P(X > 2.5) = 1 - P(X \leq 2.5) = 1 - F(2.5) = 1 - F(2) = 1 - \frac{2(2+1)}{20} = 0.7$

Beklenen değer

g) $E(X) = \mu = \sum_{i=1}^{4} x_i f(x_i) = 1 * 0.1 + 2 * 0.2 + 3 * 0.3 + 4 * 0.4 = 3$

h) $V(X) = \sum_{i=1}^{4} {x_i}^2 f(x_i) - \mu^2$

$= (1^2 * 0.1 + 2^2 * 0.2 + 3^2 * 0.3 + 4^2 * 0.4) - 3^2 = 1$

3 Beklenen değer

Değişken X değişkene ait olasılık

[illegible]