Bilgisayar Mimarisi

Bölüm 1

Sayısal Mantık Devreleri

Dr. Emre Ünsal

Cumhuriyet Üniversitesi

Yazılım Mühendisliği Bölümü

İçerik

- Sayı Sistemleri
- Temel Mantık Kapıları
- Boole Cebri
- De-Morgan Teoremi
- Karnaugh Haritaları
- Toplayıcılar
- Yaz-Bozlar(Flip-Flop)

Sayısal Tasarım Özeti – Sayı Sistemleri

- Onluk (Decimal) Sayı sistemi:
  - 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
- İkili (Binary) Sayı Sistemi:
  - 0, 1
- Sekizli (Octal) Sayı Sistemi
  - 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
- Onaltılık (Hexadecimal) Sayı Sistemi
  - 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

Onluk Sistem	İkilik Sistem	Onaltılık Sistem
0	0000	0
1	0001	1
2	0010	2
3	0011	3
4	0100	4
5	0101	5
6	0110	6
7	0111	7
8	1000	8
9	1001	9
10	1010	A
11	1011	B
12	1100	C
13	1101	D
14	1110	E
15	1111	F

Sayısal Tasarım Özeti – Sayı Sistemleri

- Sayı Sistemlerini Birbirine Dönüştürülmesi:
- Bir sayı sisteminde sayıyı S, taban değeri R ve katsayıyı da d ile gösterirsek tam sayı sistemi,

$$S = d_n R^n + d_{n-1} R^{n-1} + d_{n-2} R^{n-2} + \cdots + d_0 R^0$$

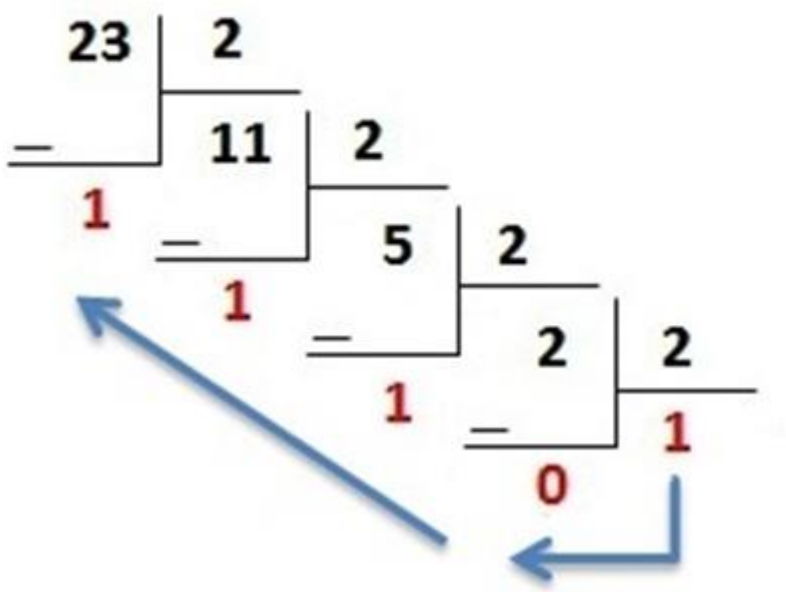
- formülü ile gösterilir.
- Kesirli sayıları ifade etmek için,

$$S = d_n R^n + d_{n-1} R^{n-1} + \cdots + d_1 R^1 + d_0 R^0 + d_{-1} R^{-1} + d_{-2} R^{-2} + \cdots$$

- Formülü kullanılır.
- Burada d_{max}=R-1 olur.

Sayısal Tasarım Özeti – Sayı Sistemleri

- Onluk tabandaki bir Sayıyı İkilik tabana dönüştürelim:



$$23 = 2^4+2^2+2^1+2^0$$

$$23 = (10111)_2$$

Sayısal Tasarım Özeti – Sayı Sistemleri

- Kesirli onlu sayılar ikili sayılara dönüştürülürken kesir kısmı 2 ile çarpılır. tam kısmı kaydedilir.
- ÖRN: $(41.6875)_{10}$ sayısını ikili sisteme çeviriniz.
- Tamsayı kısmı

41 / 2 = 20,	kalan = 1
20 / 2 = 10,	kalan = 0
10/ 2 = 5 ,	kalan = 0
5/ 2 = 2,	kalan = 1
2/ 2 = 1,	kalan = 0
1/2 =1,	kalan = 1

Sayısal Tasarım Özeti – Sayı Sistemleri

- Kalan kolonu aşağıdan yukarıya doğru sıralanırsa:

$$(41)_{10} = (101001)_2$$

- Kesirli kısım:

0.6875 *2 = 1.3750 tamsayı = 1

0.3750 *2 = 0.7500 tamsayı = 0

0.7500 *2 = 1.5000 tamsayı = 1

0.5000 *2 = 1.0000 tamsayı = 1

- Kesirli kısım için sıralama yukarıdan aşağıya doğrudur.

$$(0.6875)_{10} = (1011)_2$$

$$(41.6875)_{10} = (101001.1011)_2$$

Sayısal Tasarım Özeti – Sayı Sistemleri

- ÖRN: $(12A)_{16}$ sayısının onluk ve ikilik sayı tabanlarındaki değerini hesaplayınız
- Sayının onluk tabandaki karşılığı:

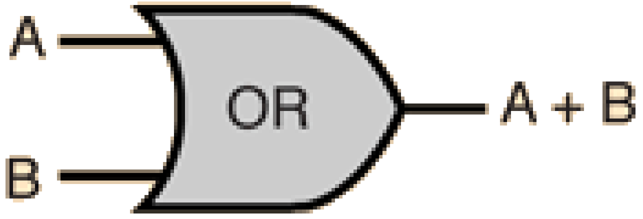
$$(12A)_{16} = 1 * 16^2 + 2 * 16^1 + 10 * 16^0 = 298$$

- Sayının ikilik tabandaki karşılığı:

$$(12A)_{16} = (100101010)_2$$

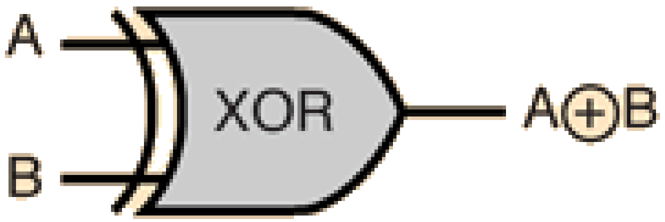
Sayısal Tasarım Özeti – Temel Mantık Kapıları

A	B	Out
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

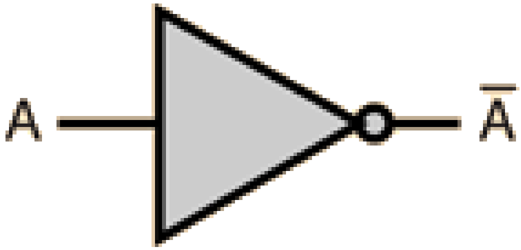


A	B	Out
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Sayısal Tasarım Özeti – Temel Mantık Kapıları



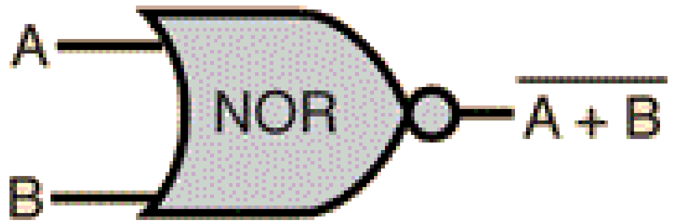
A	B	Out
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



Inverting Buffer

In	Out
0	1
1	0

Sayısal Tasarım Özeti – Temel Mantık Kapıları



A	B	Out
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

A	B	Out
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Sayısal Tasarım Özeti – Boole Cebri

1. $A + 0 = A$
2. $A + 1 = 1$
3. $A \cdot 0 = 0$
4. $A \cdot 1 = A$
5. $A + A = A$
6. $A + \overline{A} = 1$
7. $A \cdot A = A$
8. $A \cdot \overline{A} = 0$
9. $\overline{\overline{A}} = A$
10. $A + AB = A$
11. $A + \overline{A}B = A + B$
12. $(A + B)(A + C) = A + BC$

Sayısal Tasarım Özeti – DeMorgan Teoremi

- DeMorgan Teoremi:
- X ve Y nin değili:

$$(XY)' = X' + Y'$$

- Şeklinde yazılabilir. X veya Y nin değili ise,

$$(X + Y)' = X'Y'$$

- şeklinde ifade edilebilir.
- Bu teoreme **DeMorgan Teoremi** denir.

Sayısal Tasarım Özeti – DeMorgan Teoremi

- ÖRN: Aşağıdaki ifadenin tümleyenini alınız:

$$F = AB + C'D' + B'D$$

- Bu ifadenin tümleyeni:

$$F' = (A'+B')(C + D)(B + D')$$

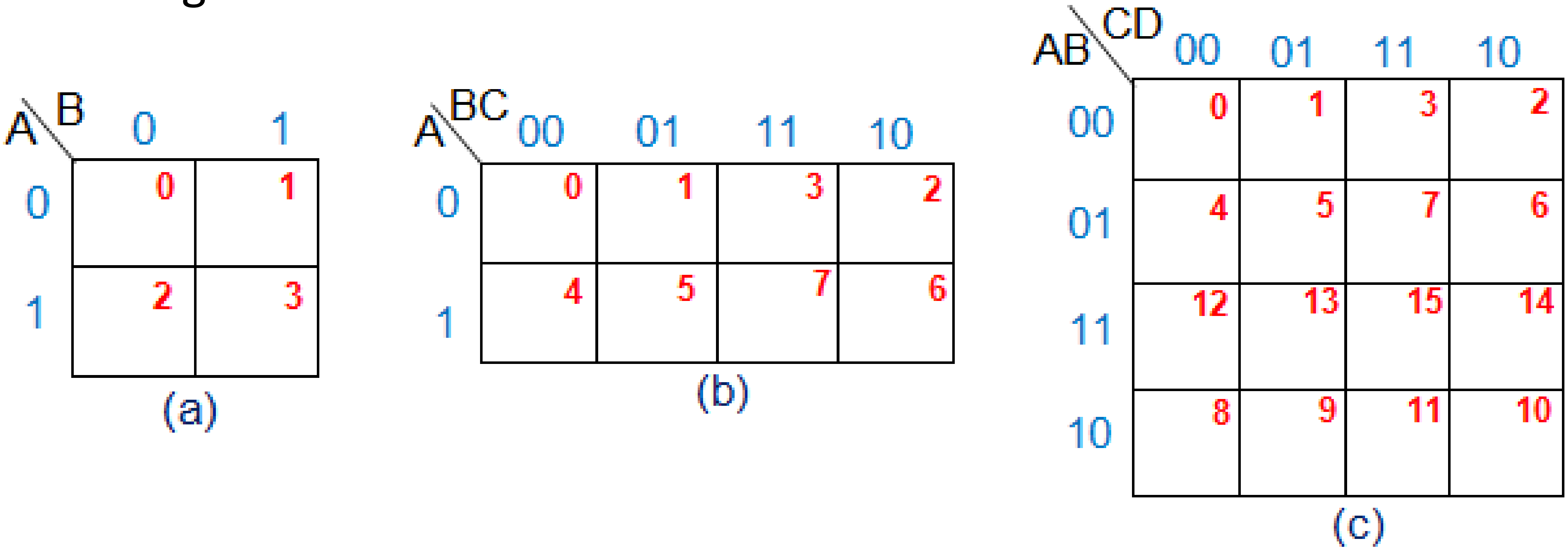
- olarak elde edilir.

Sayısal Tasarım Özeti – Devre Sadeleştirme

- Bazı durumlarda mantık şeması karmaşık olabilir.
- Devreyi sadeleştirmek için Doğruluk çizelgesinde sistemin çıkışını 1 ve 0yapan durumlar Karnaugh haritasına yerleştirilir.
- Karnaugh haritası üzerinde sistemin çıkışını 1 yapan durumlar birleştirilerek sadeleştirme yapılabilir.

Sayısal Tasarım Özeti – Devre Sadeleştirme

- Karnaugh Haritaları



Sayısal Tasarım Özeti – Devre Sadeleştirme

- ÖRN:

$$F(A,B,C) = \sum(3,4,6,7)$$

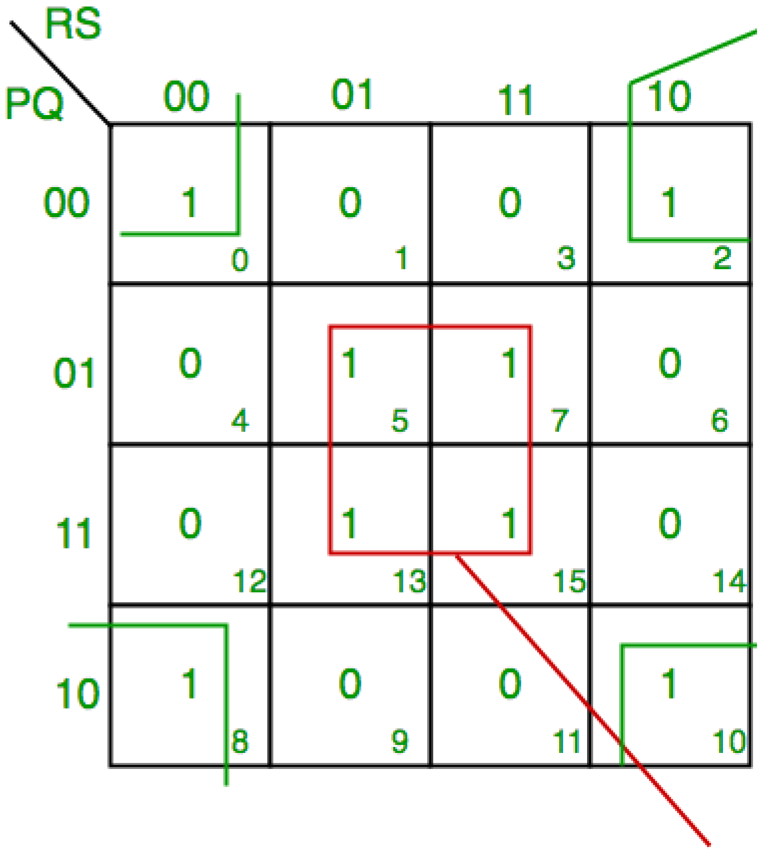
- İfadesinin en sade halini hesaplayınız:

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	1	0	1	1

$$F = BC + AC'$$

Sayısal Tasarım Özeti – Devre Sadeleştirme

- ÖRN: $F(P,Q,R,S) = \sum(0,2,5,7,8,10,13,15)$
- İfadesinin en sade halini hesaplayınız

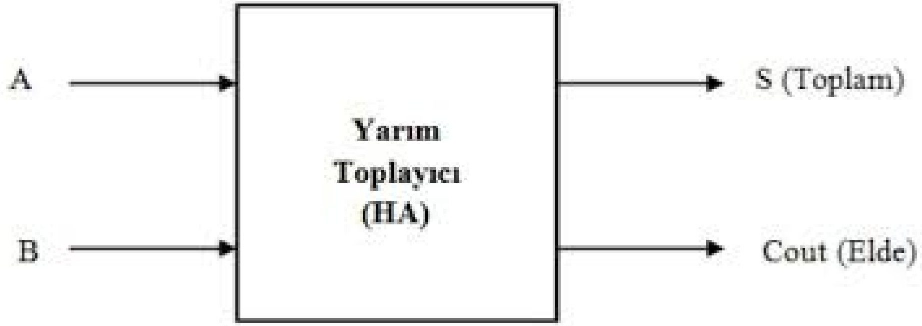


- Yeşil kısım sadeleştiğinde: Q’S’
- Kırmızı kısım sadeleştiğinde: QS
- Elde edilir. Sonuç olarak ifademiz:

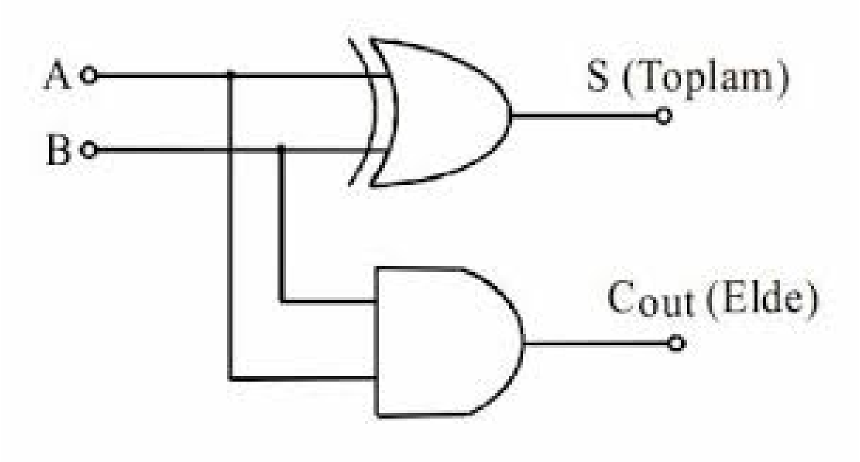
$$F = QS+Q'S'$$

Sayısal Tasarım Özeti – Birleşik Devreler

- Yarı-Toplayıcı:
- En temel sayısal aritmetik devredir. İki tane ikili rakamı toplayabilir.



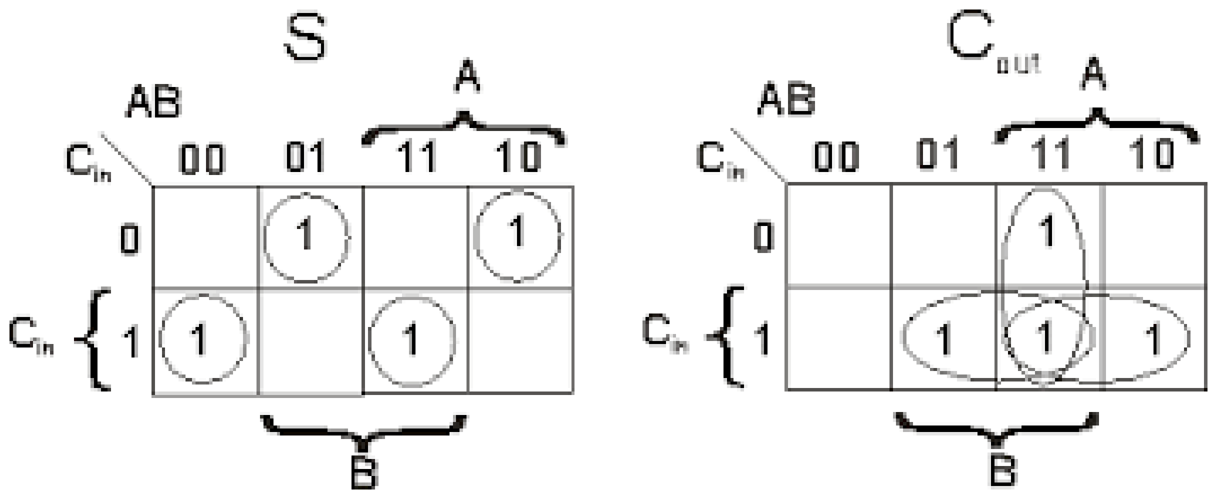
A	B	S	C_{out}
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1



$$S = A'B + AB' = A \oplus B$$
$$C_{out} = AB$$

Sayısal Tasarım Özeti – Tam Toplayıcı

FULL ADDER -DOĞRULUK TABLOSU				
GİRİŞLER			ÇIKIŞLAR	
A	B	Carry in	Sum	Carry
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1



$$S = A'B'C_{in} + A'BC_{in}' + AB'C_{in}' + ABC_{in}$$

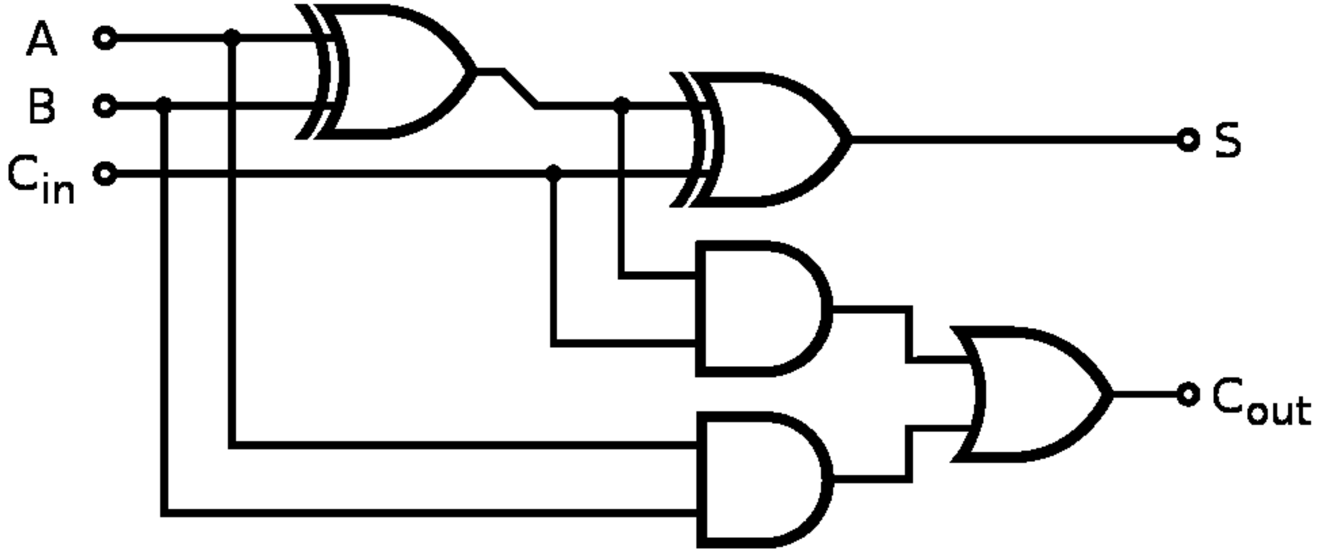
$$S = A \oplus B \oplus C_{in}$$

$$C_{out} = BC_{in} + AC_{in} + AB$$

$$C_{out} = AB + (A \oplus B)C_{in}$$

Sayısal Tasarım Özeti – Tam Toplayıcı

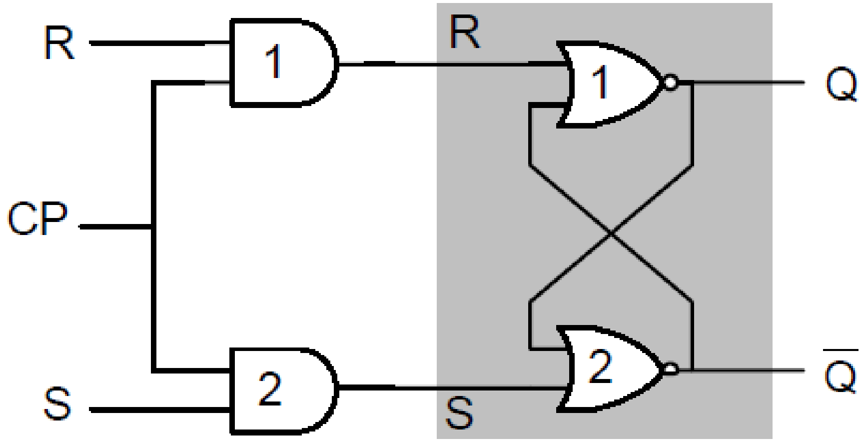
FULL ADDER -DOĞRULUK TABLOSU				
GİRİŞLER			ÇIKIŞLAR	
A	B	Carry in	Sum	Carry
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

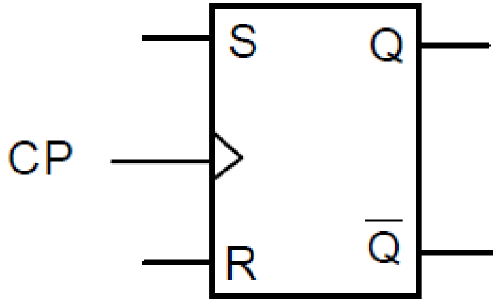


Sayısal Tasarım Özeti – Yaz-Bozlar

- RS Flip-Flop

CP	S	R	Q	$\overline{Q}$	
↓	x	x	Q_n	$\overline{Q_n}$	Değişim yok
↑	0	0	Q_n	$\overline{Q_n}$	Değişim yok
↑	0	1	0	1	Silme
↑	1	0	1	0	Kurma
↑	1	1	1	1	Tanımsız

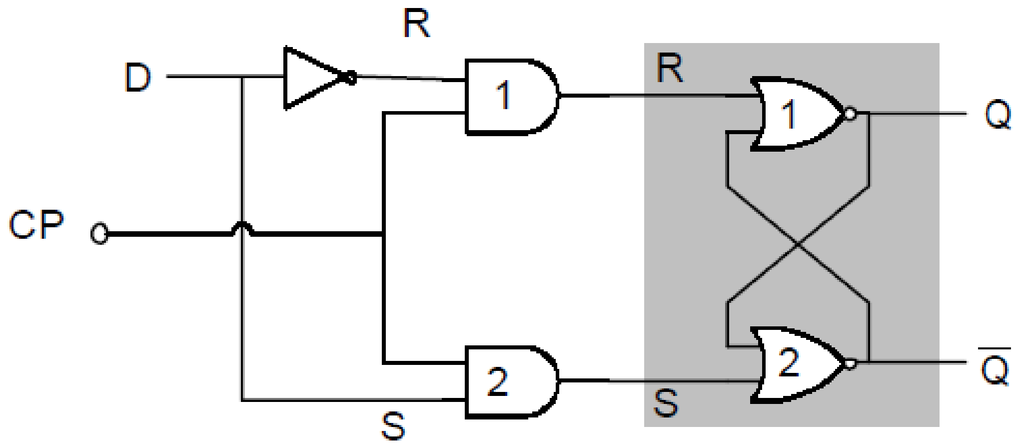


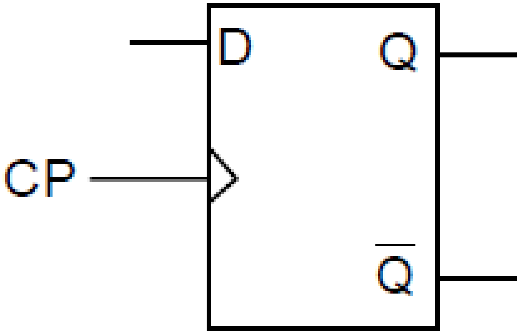


Sayısal Tasarım Özeti – Yaz-Bozlar

- D Flip-Flop

CP	D	Q_{n+1}	$\overline{Q}_{n+1}$	
↓	x	Q_n	$\overline{Q}_n$	Değişim yok
↑	0	0	1	Silme
↑	1	1	0	Kurma

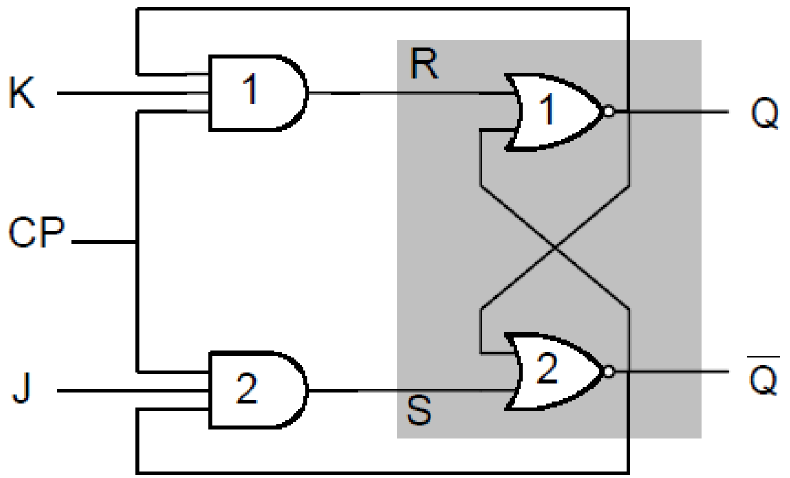


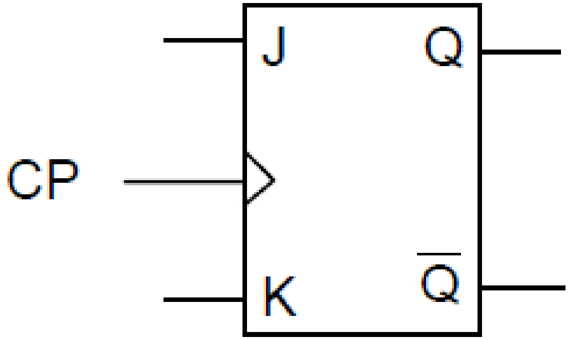


Sayısal Tasarım Özeti – Yaz-Bozlar

- JK Flip-Flop

CP	J	K	Q_{n+1}	$\overline{Q}_{n+1}$	
↓	x	x	Q_n	$\overline{Q}_n$	Değişim yok
↑	0	0	Q_n	$\overline{Q}_n$	Değişim yok
↑	0	1	0	1	Silme
↑	1	0	1	0	Kurma
↑	1	1	$\overline{Q}_n$	Q_n	Tümleyen

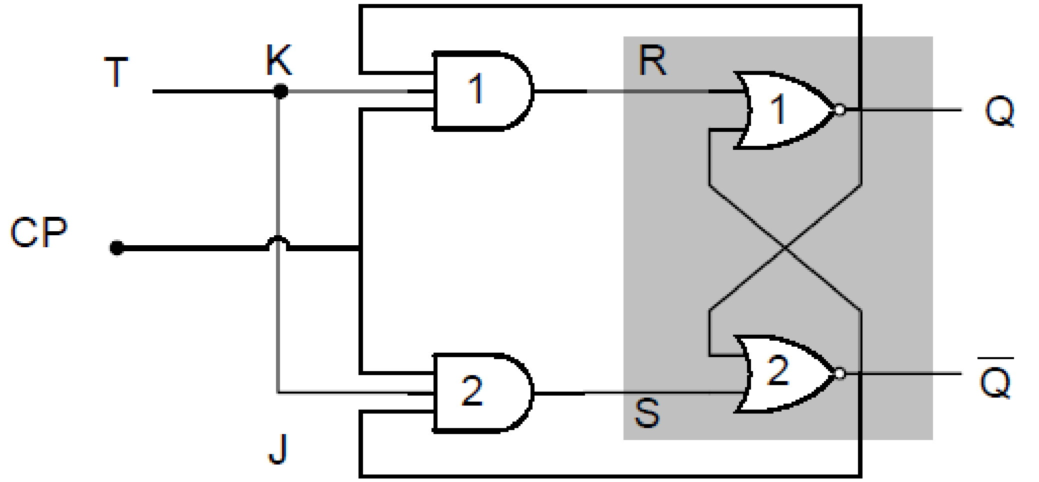


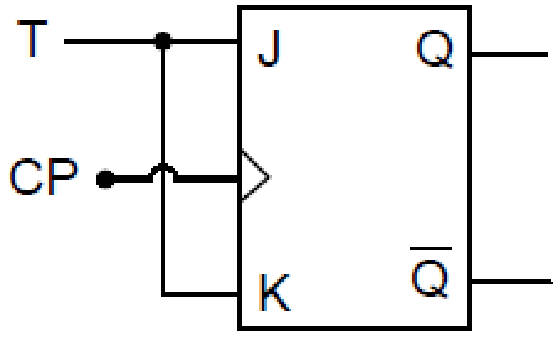


Sayısal Tasarım Özeti – Yaz-Bozlar

- T(Toggle) Flip-Flop

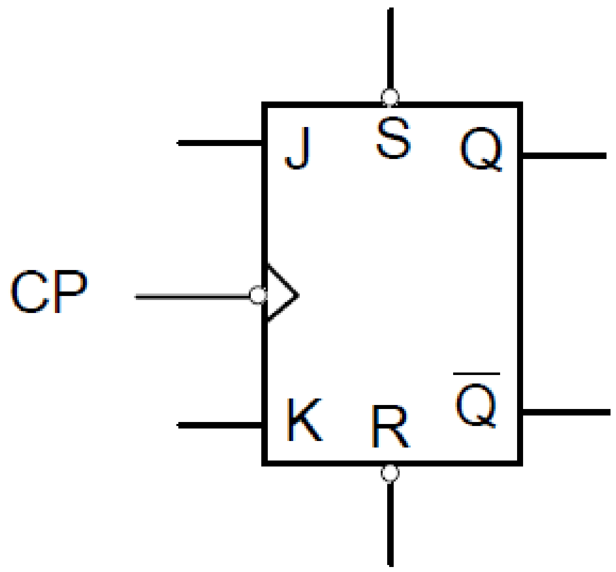
CP	T	Q	$\overline{Q}$	
↓	x	Q_n	$\overline{Q_n}$	Değişim yok
↑	0	Q_n	$\overline{Q_n}$	Değişim yok
↑	1	$\overline{Q_n}$	Q_n	Tümleyen (Toggle)





Sayısal Tasarım Özeti – Yaz-Bozlar

- Flip-Flop'larda Asenkron Girişler



S	R	CP	J	K	Q_{n+1}	$\overline{Q}_{n+1}$
1	0	x	x	x	0	1
0	1	x	x	x	1	0
1	1	↑	x	x	Q_n	$\overline{Q}_n$
1	1	↓	0	0	Q_n	$\overline{Q}_n$
1	1	↓	0	1	0	1
1	1	↓	1	0	1	0
1	1	↓	1	1	$\overline{Q}_n$	Q_n

Sayısal Tasarım Özeti – Yaz-Bozlar

- Flip-Flop Durum Geçiş Tabloları

Q_n	Q_{n+1}	S	R
0	0	0	x
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	x	0

RS FF Durum Geçiş Tablosu

Q_n	Q_{n+1}	D
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

D FF Durum Geçiş Tablosu

Sayısal Tasarım Özeti – Yaz-Bozlar

- Flip-Flop Durum Geçiş Tabloları

Q_n	Q_{n+1}	J	K
0	0	0	x
0	1	1	x
1	0	x	1
1	1	x	0

JK FF Durum Geçiş Tablosu

Q_n	Q_{n+1}	T
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

T FF Durum Geçiş Tablosu

Sorularınız ?