CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA

Institutionen för elektroteknik

ERE 103 Reglerteknik D

Tentamen 2022-04-11 14.00 – 18.00

Examinator: Bill Karlström, 0708-176535.

Tillåtna hjälpmedel:

- Typgodkänd räknare
- Beta
- Physics Handbook
- Formelsamling

Poängberäkning: Tentamen består av 8 uppgifter om totalt 30 poäng.

Nominella betygsgränser är 12 (3), 18 (4) respektive 24 (5) poäng.

Lösningarna skall vara tydliga och väl motiverade!

Läraren besöker tentan kl 15.30

Tentamensresultat: Tid för granskning av rättningen anges på Canvas.

LYCKA TILL!

Uppgift 1.

a. Ett andra ordningens system beskrivs av

$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) - 2y(t) = u(t),$

där $u(t)$ är insignal och $y(t)$ är utsignal.

Det återkopplas med en P-regulator enligt $u(t) = K \cdot (r(t) - y(t))$, där $r(t)$ är börvärdet.

För vilka värden på K kommer $y(t)$ att vara begränsad då $r(t)$ är begränsad? 2p

Lösning: Laplace ger

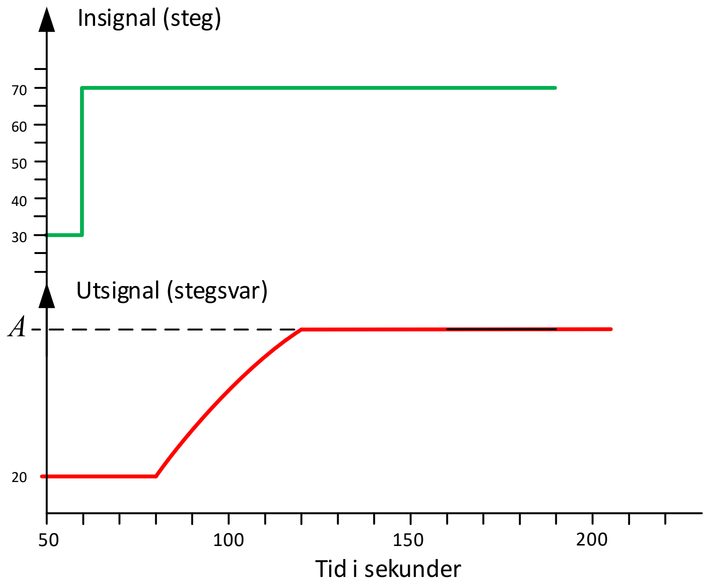
$$(s^2 + 3s - 2)Y(s) = U(s) \quad \Longrightarrow \quad G(s) = \frac{1}{s^2 + 3s - 2} \quad \Longrightarrow \quad L(s) = \frac{K}{s^2 + 3s - 2}$$

$$1 + L(s) = 0 \quad \Longrightarrow \quad s^2 + 3s - 2 + K = 0 \quad \Longrightarrow \quad stabilt\ om \quad \underline{\underline{K > 2}}$$

b. På ett system, $G(s)$, av ordning 1, med överföringsfunktion enligt nedan, görs ett stegsvarsexperiment med insignal enligt den övre kurvan och utsignal enligt den nedre.

$$G(s) = \frac{3}{1 + Ts} \cdot e^{-sL}$$

Man gör då ett misstag så att systemet mättas på nivån $A = 85$, se figuren.



Bestäm parametrarna L och T. 2p

Lösning:

Graferna ger $L = 80 - 60 = \underline{\underline{20s}}$

Utsignalens slutvärde är $20 + 3 \cdot (70 - 30) = 140$

Utsignalen ges alltså av $UT = 20 + (140 - 20) \cdot \left(1 - e^{-\frac{t-80}{T}}\right) = 20 + 120 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t-80}{T}}\right)$

$$20 + 120 \cdot \left(1 - e^{-\frac{120-80}{T}}\right) = 85 \quad \Longrightarrow \quad 1 - e^{-\frac{40}{T}} = 0{,}5417 \quad \Longrightarrow \quad e^{-\frac{40}{T}} = 0{,}4583 \quad \Longrightarrow$$

$\underline{\underline{T = 51{,}3\text{s}}}$

c. Bestäm impulssvaret för den process som har överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{2s^2 + 4s + 3}{(s+1)(s^2 + 2s + 2)}. \qquad 2\text{p}$$

Lösning:

Partialbråksuppdelning ger

$$G(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{s+1}{s^2 + 2s + 2} = \frac{1}{s+1} + \frac{s+1}{(s+1)^2 + 1} \qquad \Rightarrow$$

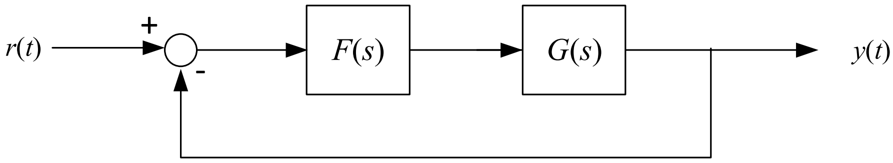
$$\underline{\underline{g(t) = e^{-t} + e^{-t} \cdot \cos t}}$$

Uppgift 2.

En process med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2 + s + 1}$$

återkopplas med en P-regulator $F(s) = K$ enligt nedan.



Vad blir det kvarstående felet då $r(t)$ är ett steg med amplituden 8 och $K = 3$? 2p

Lösning:

För det slutna systemet gäller

$$E(s) = R(s) - Y(s) = R(s) - \frac{KG(s)}{1 + KG(s)} R(s) = \left(1 - \frac{KG(s)}{1 + KG(s)}\right) \cdot R(s) =$$

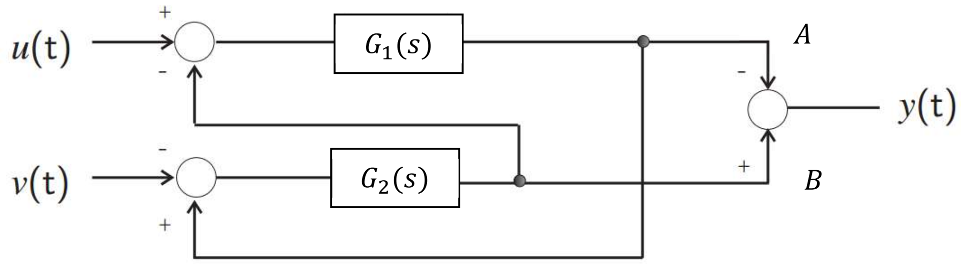
$$= \frac{1}{1 + KG(s)} \cdot R(s) = \frac{1}{1 + 3 \cdot \frac{s+1}{s^2 + s + 1}} \cdot R(s) = \frac{s^2 + s + 1}{s^2 + 4s + 4} \cdot \frac{8}{s}$$

Slutvärdessatsen ger

$$e(\infty) = \lim_{s \to 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{s^2 + s + 1}{s^2 + 4s + 4} \cdot \frac{8}{s} = \underline{\underline{2}}$$

Uppgift 3.

Bestäm överföringsfunktionen från V till Y i nedanstående blockschema. 2p



Lösning

$u(t)$ sätts till 0. Det ger

$$Y = B - A \qquad A = G_1 \cdot (0 - B) = -G_1 \cdot B \qquad B = G_2 \cdot (A - V) = G_2 \cdot (-G_1 \cdot B - V) =$$

$$= -G_1 G_2 B - G_2 V \quad \Longrightarrow \quad (1 + G_1 G_2)B = -G_2 V \quad \Longrightarrow \quad B = -\frac{G_2 V}{1 + G_1 G_2} \quad \Longrightarrow$$

$$Y = -\frac{G_2}{1 + G_1 G_2} V - (-G_1) \cdot \left(-\frac{G_2}{1 + G_1 G_2}\right) V \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{\frac{Y}{V} = -\frac{G_2 + G_1 G_2}{1 + G_1 G_2}}}$$

Uppgift 4.

Betrakta processen

$$G(s) = \frac{3 \cdot e^{-3s}}{s + 2}$$

Låt processen återkopplas med en PI – regulator

$$F(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right).$$

Bestäm K_p och T_i så att fasmarginalen blir $\varphi_m = 50°$ då överkorsningsfrekvensen är $\omega_c = 0{,}6$ rad/s. 3p

Lösning:

$$\arg G(j\omega_c) = -3 \cdot 0{,}6 - \arctan\frac{0{,}6}{2} = -1{,}8 - 0{,}291 = -2{,}09\text{rad} \approx -119{,}8°$$

$$\varphi_m = \arg L(j\omega_c) + 180° = \arg[F(j\omega_c) \cdot G(j\omega_c)] + 180° \quad \Rightarrow$$

$$\arg F(j\omega_c) = -180° - \arg L(j\omega_c) + \varphi_m = -180° + 119{,}8° + 50° = -10{,}2°$$

$$\arg F(j\omega_c) = \arctan \omega_c T_i - 90° \quad \Rightarrow \quad \arctan \omega_c T_i = 79{,}8° \quad \Rightarrow$$

$$T_i = \frac{\tan 79{,}8°}{0{,}6} = \underline{\underline{9{,}26}}$$

$$K_p \text{ ges av } |L(j\omega_c)| = 1 \quad \Rightarrow \quad |F(j\omega_c)| \cdot |G(j\omega_c)| = 1 \quad \Rightarrow \quad K_p \left|\frac{1 + j\omega_c T_i}{j\omega_c T_i}\right| \cdot \left|\frac{3 \cdot e^{-j3\omega_c}}{j\omega_c + 2}\right| = 1 \quad \Rightarrow$$

$$K_p = \frac{\sqrt{4 + {\omega_c}^2} \cdot \omega_c T_i}{3\sqrt{1 + (\omega_c T_i)^2}} \approx \underline{\underline{0{,}68}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{F(s) = 0{,}68 \cdot \left(1 + \frac{1}{9{,}26s}\right)}}$$

Uppgift 5.

En process har överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{e^{-s}}{s(s+1)}$$

Dimensionera en PD-regulator som uppfyller följande villkor

- Fasmarginal = 30°
- Överkorsningsfrekvens $\omega_c = 1$ rad/s 4p

Lösning:

$F(s) = K_p \dfrac{1 + s\tau}{1 + s\tau/\beta}$

$argG(j\omega_c) = arg \dfrac{e^{-j\cdot 1}}{j(j+1)} = -1rad - 90° - 45° = -192{,}3°$

$\varphi_m = 30°$ ger att $\arg L(j\omega_c) + 180° = 30° \quad \Rightarrow \quad \arg L(j\omega_c) = -150° \quad \Rightarrow$

$F(s)$ skall lyfta fasen $-150° - \ (-192{,}3°) = 42° \quad \Rightarrow$ Regulatorns $\varphi_{max} = 42°$ skall inträffa vid $\omega = \omega_c = 1$, alltså

$\beta = \dfrac{1 + \sin\varphi_{max}}{1 - \sin\varphi_{max}} = 5{,}04$

φ_{max} placeras vid $\omega = \omega_c = 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_c = \sqrt{\beta}/\tau \quad \Rightarrow$

$\tau = \dfrac{\sqrt{5{,}04}}{1} = \underline{\underline{2{,}25}}$

K_p ges av att beloppet av kretsöverföringen $L(j\omega)$ skall vara 1 i $\omega = \omega_c$, så att

$$|G(j1)| \cdot K_p \frac{\left|1 + j\sqrt{5{,}04}\cdot 1\right|}{\left|1 + \frac{j}{\sqrt{5{,}04}}\cdot 1\right|} = 1 \quad \Rightarrow \quad K_p = \frac{\left|1 + \frac{j}{\sqrt{5{,}04}}\cdot 1\right|}{\left|1 + j\sqrt{5{,}04}\cdot 1\right| \cdot \left|\frac{e^{-j}}{j1(1+j1)}\right|} = \underline{\underline{0{,}63}}$$

$\Rightarrow$

$$\underline{\underline{F(s) = 0{,}63 \cdot \frac{1 + s\cdot 2{,}25}{1 + s \cdot 0{,}446}}}$$

Uppgift 6.

Ett system beskrivs av differentialekvationerna

$$\dot{x}_1(t) = -2x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t) + 4x_2(t) + 3u(t)$$

där $u(t)$ är styrsignal och utsignalen ges av $y(t) = x_1(t)$.

Systemet skall regleras med tillståndsåterkoppling enligt

$u(t) = -Lx(t) + K_r \cdot r(t)$, där $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ och $r(t)$ är referenssignal.

Bestäm återkopplingsvektorn $L = [a \quad b]$ så att slutna systemet från en dubbelpol i -3

och K_r så att den statiska förstärkningen blir 1. 4p

Lösning:

Systemet med återkoppling kan skrivas

$\dot{x} = Ax + Bu$

$y = Cx$

$u = -Lx + K_r \cdot r$, där $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, $C = [1 \quad 0]$, $L = [a \quad b]$

$$u = K_r r - Lx \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = Ax + B(K_r r - Lx) \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = (A - BL)x + BK_r r \quad \Rightarrow$$

$$X(s)(sI - A + BL) = BK_r R(s) \quad \Rightarrow \quad X(s) = (sI - A + BL)^{-1} BK_r R(s) \quad \Rightarrow$$

$$Y(s) = C(sI - A + BL)^{-1} BK_r R(s) \quad \Rightarrow$$

$$G_{ry}(s) = C(sI - A + BL)^{-1} BK_r \quad \Rightarrow$$

Karakteristiska ekvationen $\quad \det(sI - A + BL) = 0$

$$(sI - A + BL) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} [a \quad b] = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 + 3a & 3b - 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} s & 2 \\ 1 + 3a & s + 3b - 4 \end{bmatrix}$$

$\det(sI - A + BL) = s^2 + (3b - 4)s - 6a - 2$

Dubbelpolen $s = -3$ ger $\quad \det(sI - A + BL) = (s + 3)^2 = s^2 + 6s + 9 \quad \Rightarrow$

$3b - 4 = 6$

$-6a - 2 = 9 \quad \Rightarrow \quad a = -\dfrac{11}{6} \quad b = 10/3 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{L = [-11/6 \quad 10/3\,]}}$

$$G_{ry}(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad K_r = \frac{1}{C(-A + BL)^{-1} B}$$

$$(-A + BL)^{-1} = \left[-\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} [-11/6 \quad 10/3\,] \right]^{-1} = \left[\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -5{,}5 & 10 \end{bmatrix} \right]^{-1} =$$

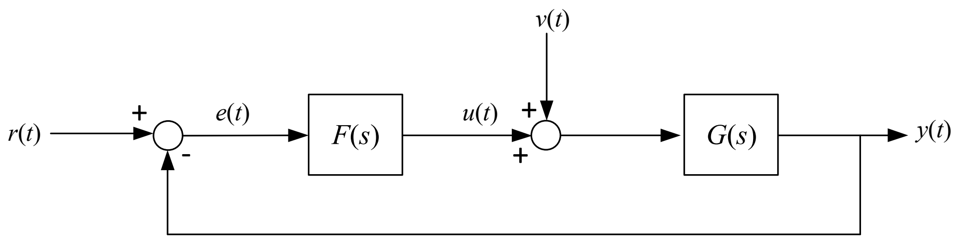
$$= \left[\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -4{,}5 & 6 \end{bmatrix} \right]^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 4{,}5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C(-A + BL)^{-1} B = [1 \quad 0] \cdot \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 4{,}5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = [1 \quad 0] \cdot \frac{1}{9} \cdot \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \end{bmatrix} = -6/9$$

$\Rightarrow \quad \underline{\underline{K_r = -1{,}5}}$

Uppgift 7.

Nedan visas blockschemat för ett reglersystem med en process $G(s) = 1/(s+1)^2$ och en P-regulator $F(s) = K$.
Processen påverkas av en sinusformad störning $v(t) = 2{,}5 \cdot \sin 0{,}5t$.



a. Bestäm amplituden hos den sinusformade komponenten i utsignalen om $K = 0$. 2p

b. Bestäm K så att fasmarginalen blir 50°. 2p

c. Hur stor blir den sinusformade komponenten i utsignalen med detta K-värde? 2p

Lösning:

a. $K = 0\,, r(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$, där $\omega = 0{,}5$

$$A = |G(j0{,}5)| \cdot 2{,}5 = \frac{1}{|1 + j0{,}5|^2} \cdot 2{,}5 = \frac{2{,}5}{1{,}25} = \underline{\underline{2}}$$

b. $\varphi_m = \arg L(j\omega_c) + 180° = \arg KG(j\omega_c) + 180° = 50° \quad \Rightarrow$

$\arg K + \arg G(j\omega_c) = -130° \quad \Rightarrow \quad -2\arctan \omega_c = -130° - \arg K \quad \Rightarrow$

$\arctan \omega_c = 65° + 0{,}5\arg K \quad \Rightarrow \quad \omega_c = \tan(65° + 0{,}5\arg K) \quad \Rightarrow$

$\arg K \geq 0$ (annars skulle $\omega_c < 0$, alltså $\arg K = 0$, så att

$\omega_c = \tan 65° = 2{,}14$

Med

$|KG(j\omega_c| = 1$ och $\omega_c = 2{,}14$

ger detta

$$K = \frac{1}{|G(2{,}14)|} = |1 + j2{,}14|^2 = \underline{\underline{5{,}6}}$$

$$c. \quad r(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad A = \left| \frac{\frac{1}{(1 + j0{,}5)^2}}{1 + K\frac{1}{(1 + j0{,}5)^2}} \right| \cdot 2{,}5 = \left| \frac{1}{(1 + j0{,}5)^2 + K} \right| \cdot 2{,}5 =$$

$$= \left| \frac{1}{1 + j - 0{,}25 + 5{,}6} \right| \cdot 2{,}5 = \underline{\underline{0{,}389}}$$

Uppgift 8.

Ett olinjärt system ges av följande

$\dot{x}_1(t) = -x_1^3(t) + x_2(t)$

$\dot{x}_2(t) = -x_2(t) + u(t)$

$y(t) = x_1(t)$

Bestäm den linjära modellen för systemet vid arbetspunkten $x_{10} = x_{20} = u_0 = 1.$ 3p

Lösning:

$\dot{x}_1(t) = -x_1^3(t) + x_2(t) = f(x_1(t), x_2(t), u(t))$

$\dot{x}_2(t) = -x_2(t) + u(t) = g(x_1(t), x_2(t), u(t))$

$$\Delta\dot{x}_1 = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\right]_{x_1=x_{10}} \cdot \Delta x_1 + \left[\frac{\partial f}{\partial x_2}\right]_{x_2=x_{20}} \cdot \Delta x_2 + \left[\frac{\partial f}{\partial u}\right]_{u=u_0} \cdot \Delta u \qquad \Rightarrow$$

$$\Delta\dot{x}_2 = \left[\frac{\partial g}{\partial x_1}\right]_{x_1=x_{10}} \cdot \Delta x_1 + \left[\frac{\partial g}{\partial x_2}\right]_{x_2=x_{20}} \cdot \Delta x_2 + \left[\frac{\partial g}{\partial u}\right]_{u=u_0} \cdot \Delta u \qquad \Rightarrow$$

$\Delta\dot{x}_1 = -3x_{10}^2 \cdot \Delta x_1 + 1 \cdot \Delta x_2 + 0 \cdot \Delta u$

$\Delta\dot{x}_2 = 0 \cdot \Delta x_1 - 1 \cdot \Delta x_2 + 1 \cdot \Delta u$

$\Rightarrow$

$\Delta\dot{x}_1 = -3 \cdot \Delta x_1 + \Delta x_2$

$\Delta\dot{x}_2 = -\Delta x_2 + \Delta u$

$\Delta y = \Delta x_1$