

Problème du rectangle inscrit

Emanuel Morille

22 Mai 2025

Table des matières

1. Bases de théorie des catégories	2
1.1. Catégories	2
1.2. Foncteurs	3
1.3. Transformations naturelles	3
2. Catégorie Comp des complexes de chaînes	4
2.1. Complexes de chaînes	4
2.2. Morphismes de complexes	4
2.3. La catégorie Comp	5
2.4. Propriétés	5
3. Homologie singulière	9
3.1. Simplexes	9
3.2. Chaînes singulières	10
3.3. Définitions de l'homologie singulière	12
3.3.1. D'un espace topologique	12
3.3.2. D'une paire d'espace topologique	13
Bibliographie	13
13744	

1. Bases de théorie des catégories

1.1. Catégories

Définition 1.1. Une *catégorie* \mathcal{C} est la donnée de :

- Une classe $\text{ob}(\mathcal{C})$ dont les éléments sont appelés les *objets* de \mathcal{C} .
- Une classe $\text{hom}(\mathcal{C})$ dont les éléments sont appelés les *morphismes* de \mathcal{C} .
Un morphisme $f \in \text{hom}(\mathcal{C})$ a un *domaine* $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$ et un *codomaine* $Y \in \text{ob}(\mathcal{C})$. On note alors ce morphisme $f : X \rightarrow Y$ et $\text{hom}(X, Y)$ l'ensemble des morphismes de X dans Y .
- Pour tout objets $X, Y, Z \in \text{ob}(\mathcal{C})$, une *composition* :

$$\circ : \text{hom}(Y, Z) \times \text{hom}(X, Y) \rightarrow \text{hom}(X, Z).$$

- Pour tout objet $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$, un morphisme *identité* :

$$\text{id}_X : X \rightarrow X.$$

Vérifiant les propriétés suivantes pour tout objets $X, Y, Z, T \in \text{ob}(\mathcal{C})$:

- *Associativité* : Pour tout morphismes $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ et $h : Z \rightarrow T$, on a :

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

- *Identité* : Pour tout morphisme $f : X \rightarrow Y$, on a :

$$\text{id}_Y \circ f = f = f \circ \text{id}_X.$$

Exemple 1.2. La catégorie Ab des groupes abéliens :

- Les objets de Ab sont les groupes abéliens.
- Les morphismes de Ab sont les morphismes de groupes.

Exemple 1.3. Un *groupe gradué* est un groupe G muni d'une famille de sous-groupes $(G_i)_{i \in I}$ telle que $G = \bigoplus_{i \in I} G_i$. Pour tout $i \in I$, un élément non-nul de G_i est dit *homogène de degré* i .

Soit $G := \bigoplus_{i \in I} G_i$ et $H := \bigoplus_{i \in I} H_i$ deux groupes gradués. Un *morphisme de groupes gradués* est un morphisme de groupes $\varphi : G \rightarrow H$ tel que pour tout $i \in I$, on a $\varphi(G_i) \subset H_i$.

On définit ainsi la catégorie GrAb des groupes abéliens gradués :

- Les objets de GrAb sont les groupes abéliens gradués.
- Les morphismes de GrAb sont les morphismes de groupes gradués.

Exemple 1.4. La catégorie Top des espaces topologiques :

- Les objets de Top sont les espaces topologiques.
- Les morphismes de Top sont les applications continues.

Exemple 1.5. Une paire d'espaces topologiques est un espace topologique X muni d'une partie A de lui-même. On la note (X, A) .

Soit (X, A) et (Y, B) deux paires d'espaces topologiques. Un *morphisme de paires* est une application continue $f : X \rightarrow Y$ telle que $f(A) \subset B$. On le note $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$.

On définit ainsi catégorie Top_2 des paires d'espaces topologiques :

- Les objets de Top_2 sont les paires d'espaces topologiques.
- Les morphismes de Top_2 sont les morphismes de paires.

Exemple 1.6. Soit (X, \leq) un ensemble partiellement ordonné. On définit la catégorie $\mathcal{C}(X, \leq)$:

- Les objets de $\mathcal{C}(X, \leq)$ sont les éléments de X .
- Pour tout $x, y \in X$, si $x \leq y$, on a un morphisme $f_{x,y} : x \rightarrow y$.
- Pour tout $x, y, z \in X$, si $x \leq y$ et $y \leq z$, on a bien $x \leq z$ et une composition $f_{y,z} \circ f_{x,y} = f_{x,z}$.
- Pour tout $x \in X$, on a bien $x \leq x$ et un morphisme identité $f_{x,x}$.

Définition 1.7. Soit \mathcal{C} une catégorie. La *catégorie opposée (ou duale)* de \mathcal{C} , notée \mathcal{C}^{op} , est la catégorie dont les objets sont les objets \mathcal{C} et dont les morphismes sont les morphismes de \mathcal{C} dont le domaine et le codomaine sont inversés.

Exemple 1.8. Soit (X, \leq) un ensemble partiellement ordonné. Alors on a $\mathcal{C}(X, \leq)^{\text{op}} = \mathcal{C}(X, \leq)$ où pour tout $x, y \in X$, on a $x \leq y$ si et seulement si $y \leq x$.

1.2. Foncteurs

Définition 1.9. Soit \mathcal{C} et \mathcal{D} deux catégories. Un *foncteur (covariant)* F de \mathcal{C} vers \mathcal{D} est la donnée :

- Pour tout objet $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$, d'un objet $F(X) \in \text{ob}(\mathcal{D})$.
- Pour tout objets $X, Y \in \text{ob}(\mathcal{C})$ et morphisme $f : X \rightarrow Y$, d'un morphisme $F(f) : F(X) \rightarrow F(Y)$.

Vérifiant les propriétés suivantes pour tout objets $X, Y, Z \in \text{ob}(\mathcal{C})$:

- *Composition* : Pour tout morphismes $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$, on a :

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f).$$

- *Identité* : On a :

$$F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}.$$

Exemple 1.10. Soit \mathcal{C} et \mathcal{D} deux catégories. On définit le foncteur covariant constant $C : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$:

- On prend $D \in \mathcal{D}$, pour tout objet $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$, on a $C(X) := D$.
- Pour tout objets $X, Y \in \text{ob}(\mathcal{C})$ et morphisme $f : X \rightarrow Y$, on a $C(f) := \text{id}_D$.

Exemple 1.11. Soit \mathcal{C} une catégorie. On définit le foncteur covariant identité $\text{id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$:

- Pour tout objet $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$, on a $\text{id}_{\mathcal{C}}(X) := X$.
- Pour tout objets $X, Y \in \text{ob}(\mathcal{C})$ et morphisme $f : X \rightarrow Y$, on a $\text{id}_{\mathcal{C}}(f) := f$.

Définition 1.12. Soit \mathcal{C} et \mathcal{D} deux catégories. Un *foncteur contravariant* est un foncteur covariant de la catégorie opposée \mathcal{C}^{op} vers \mathcal{D} .

Exemple 1.13. Soit \mathbb{K} un corps et Vect la catégorie des \mathbb{K} -espaces vectoriels. On définit un foncteur contravariant $F : \text{Vect}^{\text{op}} \rightarrow \text{Vect}$:

- Pour tout \mathbb{K} -espace vectoriel $E \in \text{Vect}$, on a $F(E) := E^*$.
- Pour tout \mathbb{K} -espaces vectoriels $E, F \in \text{Vect}$ et application linéaire $u : E \rightarrow F$, on a :

$$F(u) := u^T : F^* \rightarrow E^*.$$

1.3. Transformations naturelles

Définition 1.14. Soit \mathcal{C} et \mathcal{D} deux catégories, $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ deux foncteurs covariants. Une *transformation naturelle* ∂ de F vers G est la donnée pour tout objet $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$, d'un morphisme $\partial_X : F(X) \rightarrow G(X)$, vérifiant la propriété suivante pour tout objet $Y \in \text{ob}(\mathcal{C})$ et pour tout morphisme $f : X \rightarrow Y$, on a :

$$\partial_Y \circ F(f) = G(f) \circ \partial_X$$

c'est-à-dire que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ \partial_X \downarrow & & \downarrow \partial_Y \\ G(X) & \xrightarrow{G(f)} & G(Y) \end{array}$$

2. Catégorie Comp des complexes de chaînes

2.1. Complexes de chaînes

Définition 2.1. On appelle *complexe de chaînes*, noté C_\bullet , une suite de groupes abéliens $(C_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ munie de morphismes de groupes $(d_n : C_n \rightarrow C_{n-1})_{n \in \mathbb{Z}}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $d_n d_{n+1} = 0$.

Définition 2.2. Soit C_\bullet un complexe de chaînes et $n \in \mathbb{Z}$.

- On appelle n -cycle un élément de $Z_n(C_\bullet) := \ker(d_n)$.
- On appelle n -bord un élément de $B_n(C_\bullet) := \text{im}(d_{n+1})$.

Proposition 2.3. Soit C_\bullet un complexe de chaînes. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $B_n(C_\bullet) \subset Z_n(C_\bullet)$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors $d_n d_{n+1} = 0$, donc $B_n(C_\bullet) = \text{im}(d_{n+1}) \subset \ker(d_n) = Z_n(C_\bullet)$. \square

Définition 2.4. Soit C_\bullet un complexe de chaînes et $n \in \mathbb{Z}$.

- On appelle n^e groupe d'homologie le groupe quotient $H_n(C_\bullet) := Z_n(C_\bullet)/B_n(C_\bullet)$.
- On appelle *homologie* la somme directe des groupes $H_\bullet(C_\bullet) := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H_n(C_\bullet)$.

Définition 2.5. Soit C_\bullet un complexe de chaînes et $n \in \mathbb{Z}$.

- On dit que C_\bullet est *exact en C_n* si $H_n(C_\bullet)$ est trivial, c'est-à-dire, $\text{im}(d_{n+1}) = \ker(d_n)$.
- On dit que C_\bullet est *exact* si pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il est exact en C_n .
- On dit que C_\bullet est *acyclique* si pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, il est exact en C_n .

2.2. Morphismes de complexes

Définition 2.6. Soit C_\bullet et D_\bullet deux complexes de chaînes. On appelle *morphisme de complexes*, noté $\varphi_\bullet : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$, une suite de morphismes de groupes $(\varphi_n : C_n \rightarrow D_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $d_n \varphi_n = \varphi_{n-1} d_{n+1}$.

Proposition 2.7. Soit C_\bullet , D_\bullet et E_\bullet trois complexes de chaînes, $\varphi_\bullet : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$ et $\psi_\bullet : D_\bullet \rightarrow E_\bullet$ deux morphismes de complexes. Alors la composition $\psi_\bullet \circ \varphi_\bullet : C_\bullet \rightarrow E_\bullet$ est un morphisme de complexes.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors on a :

$$d_n(\psi_n \circ \varphi_n) = \psi_{n-1} d_n \varphi_n = (\psi_{n-1} \circ \varphi_{n-1}) d_n.$$

Donc $(\psi_n \circ \varphi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est bien un morphisme de complexes. \square

Proposition 2.8. Soit C_\bullet un complexe de chaînes. Alors le morphisme identité $\text{id}_{C_\bullet} : C_\bullet \rightarrow C_\bullet$ est un morphisme de complexes.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors on a :

$$d_n \text{id}_n = d_n = \text{id}_{n-1} d_{n+1}.$$

Donc $(\text{id}_{C_n})_{n \in \mathbb{Z}}$ est bien un morphisme de complexes. \square

Proposition 2.9. Soit C_\bullet et D_\bullet deux complexes de chaînes, $\varphi_\bullet : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$ un morphisme de complexes. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, φ_n induit un morphisme de groupes de $H_n(C_\bullet)$ dans $H_n(D_\bullet)$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

Soit $z \in Z_n(C_\bullet)$. Alors on a $d_n \varphi_n(z) = \varphi_{n-1}(d_n z) = \varphi_{n-1}(0) = 0$, donc $\varphi_n(z) \in Z_n(D_\bullet)$.

Soit $b \in B_n(C_\bullet)$. Alors il existe $c \in C_{n+1}$ tel que $b = d_{n+1} c$, et on a :

$$\varphi_n(b) = \varphi_n(d_{n+1} c) = d_{n+1} \varphi_{n+1}(c)$$

donc $\varphi_n(b) \in B_n(D_\bullet)$.

On considère $\overline{\varphi_n} : Z_n(C_\bullet) \rightarrow H_n(D_\bullet)$, alors $B_n(C_\bullet) \subset \ker(\overline{\varphi_n})$ et d'après la propriété universelle du groupe quotient le morphisme $\overline{\varphi_n}$ induit bien un morphisme de $H_n(C_\bullet)$ dans $H_n(D_\bullet)$. \square

Définition 2.10. Soit C_\bullet et D_\bullet deux complexes de chaînes, $\varphi_\bullet : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$ un morphisme de complexes. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note $H_n(\varphi) : H_n(C_\bullet) \rightarrow H_n(D_\bullet)$ le morphisme de groupes induit par φ_n .

2.3. La catégorie Comp

Définition 2.11. On appelle Comp la catégorie des complexes de chaînes :

- Les objets de Comp sont les complexes de chaînes.
- Les morphismes de Comp sont les morphismes de complexes.
- La composition de Comp découle de la Proposition 2.7.
- Le morphisme identité de Comp découle de Proposition 2.8.

Théorème 2.12. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le n^{e} groupe d'homologie H_n est un foncteur de Comp vers Ab.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

- Soit $C_\bullet \in \text{ob}(\text{Comp})$ un complexe de chaînes. Alors le n^{e} groupe d'homologie $H_n(C_\bullet)$ est bien un groupe abélien.
- Soit $C_\bullet, D_\bullet \in \text{ob}(\text{Comp})$ deux complexes de chaînes et $\varphi_\bullet : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$ un morphisme de complexes. Alors le morphisme induit $H_n(\varphi) : H_n(C_\bullet) \rightarrow H_n(D_\bullet)$ est bien un morphisme de groupes.

La propriété de composition découle de la Proposition 2.7 et la propriété d'identité découle de la Proposition 2.8, donc H_n est bien un foncteur de Comp vers Ab. \square

Corollaire 2.13. L'homologie H_\bullet est un foncteur de Comp vers GrAb.

Démonstration.

- Soit $C_\bullet \in \text{ob}(\text{Comp})$ un complexe de chaînes. Alors l'homologie $H_\bullet(C_\bullet) := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H_n(C_\bullet)$ définit bien un groupe abélien gradué.
- Soit $C_\bullet, D_\bullet \in \text{ob}(\text{Comp})$ deux complexes de chaînes et $\varphi_\bullet : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$ un morphisme de complexes. Alors la somme directe des morphismes induits $H_\bullet(\varphi) := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H_n(\varphi)$ définit bien un morphisme de groupes abéliens gradués.

Les propriétés de composition et d'identité découlent du Théorème 2.12, donc H_\bullet est bien un foncteur de Comp vers GrAb. \square

2.4. Propriétés

Définition 2.14. On dit qu'une suite courte de complexes de chaînes est *exacte*, notée :

$$0 \longrightarrow A_\bullet \xrightarrow{\varphi_\bullet} B_\bullet \xrightarrow{\psi_\bullet} C_\bullet \longrightarrow 0$$

si pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la suite courte suivante est exacte :

$$0 \longrightarrow A_n \xrightarrow{\varphi_n} B_n \xrightarrow{\psi_n} C_n \longrightarrow 0$$

c'est-à-dire que φ_n est injectif, $\text{im}(\varphi_n) = \ker(\psi_n)$ et ψ_n est surjectif.

Lemme 2.15. Soit une suite exacte courte de complexes de chaînes :

$$0 \longrightarrow A_\bullet \xrightarrow{\varphi_\bullet} B_\bullet \xrightarrow{\psi_\bullet} C_\bullet \longrightarrow 0$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il existe un morphisme de groupes $\partial_n : H_n(C_\bullet) \rightarrow H_{n-1}(A_\bullet)$ telle que la suite longue des groupes d'homologie est exacte :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & H_n(A_\bullet) & \xrightarrow{H_n(\varphi)} & H_n(B_\bullet) & \xrightarrow{H_n(\psi)} & H_n(C_\bullet) \\ & & & & \searrow \partial_n & & \\ & & H_{n-1}(A_\bullet) & \xrightarrow{H_{n-1}(\varphi)} & H_{n-1}(B_\bullet) & \xrightarrow{H_{n-1}(\psi)} & H_{n-1}(C_\bullet) \longrightarrow \dots \end{array}$$

De plus soit une autre suite exacte courte de complexes de chaînes :

$$0 \longrightarrow A'_\bullet \xrightarrow{\varphi'_\bullet} B'_\bullet \xrightarrow{\psi'_\bullet} C'_\bullet \longrightarrow 0$$

ainsi que $f_\bullet : A_\bullet \rightarrow A'_\bullet$, $g_\bullet : B_\bullet \rightarrow B'_\bullet$ et $h_\bullet : C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$ trois morphismes de complexes. Alors la transformation ∂_n est naturelle dans le sens où le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H_n(C_\bullet) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(A_\bullet) \\ H_n(h) \downarrow & & \downarrow H_{n-1}(f) \\ H_n(C'_\bullet) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(A'_\bullet) \end{array}$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$. On commence par faire un diagramme en 3 dimensions pour la suite :

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \xrightarrow{\quad} & A'_{n+1} & \xrightarrow{\quad} & B'_{n+1} & \xrightarrow{\quad} & C'_{n+1} & \xrightarrow{\quad} & 0 \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ 0 & \xrightarrow{\quad} & A_{n+1} & \xrightarrow{\quad} & B_{n+1} & \xrightarrow{\quad} & C_{n+1} & \xrightarrow{\quad} & 0 \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ 0 & \xrightarrow{\quad} & A'_n & \xrightarrow{\quad} & B'_n & \xrightarrow{\quad} & C'_n & \xrightarrow{\quad} & 0 \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ 0 & \xrightarrow{\quad} & A_n & \xrightarrow{\quad} & B_n & \xrightarrow{\quad} & C_n & \xrightarrow{\quad} & 0 \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ 0 & \xrightarrow{\quad} & A'_{n-1} & \xrightarrow{\quad} & B'_{n-1} & \xrightarrow{\quad} & C'_{n-1} & \xrightarrow{\quad} & 0 \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ 0 & \xrightarrow{\quad} & A_{n-1} & \xrightarrow{\quad} & B_{n-1} & \xrightarrow{\quad} & C_{n-1} & \xrightarrow{\quad} & 0 \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

Soit $\bar{c} \in H_n(C_\bullet)$. Puisque ψ_n est surjective par exactitude, il existe $b \in B_n$ tel que $\psi_n(b) = c$. De plus on a $\psi_{n-1}(d_n b) = d_n \psi_n(b) = d_n c = 0$, donc $d_n b \in \ker(\psi_{n-1})$ et par exactitude il existe $a \in A_{n-1}$ tel que $\varphi_{n-1}(a) = d_n b$. De plus on a $\varphi_{n-2}(d_{n-1} a) = d_{n-1} \varphi_{n-1}(a) = d_{n-1} d_n b = 0$, puisque φ_{n-2} est injective par exactitude, on a $d_{n-1} a = 0$, donc $a \in Z_{n-1}(A_\bullet)$.

On pose $\partial_n \bar{c} := \bar{a} \in H_{n-1}(A_\bullet)$.

Vérifions que $\partial_n \bar{c}$ ne dépend pas des choix réalisés. Soit $b' \in B_n$ tel que $\psi_n(b') = c$ et $a' \in A_{n-1}$ tel que $d_n b' = \varphi_{n-1}(a')$. De plus on a $\psi_n(b - b') = c - c = 0$, donc $b - b' \in \ker(\psi_n)$ et par exactitude il existe $\hat{a} \in A_n$ tel que $\varphi_n(\hat{a}) = b - b'$. Alors $\varphi_{n-1}(d_n \hat{a}) = d_n \varphi_n(\hat{a}) = d_n b - d_n b' = \varphi_{n-1}(a - a')$, puisque φ_{n-1} est injective par exactitude, on a $d_n \hat{a} = a - a'$, donc $a - a' \in B_{n-1}(A_\bullet)$ et $\bar{a} = \overline{a'} \in H_{n-1}(A_\bullet)$.

Vérifions que la suite longue est exacte.

- Soit $\bar{a} \in \text{im}(\partial_{n+1})$. Par construction il existe $b \in B_{n+1}$ tel que $\varphi_n(a) = d_{n+1} b$, d'où $\varphi_n(a) \in B_n(B_\bullet)$ et $H_n(\varphi)(\bar{a}) = 0 \in H_n(B_\bullet)$. Donc $\bar{a} \in \ker(H_n(\varphi))$.

Soit $\bar{a} \in \ker(H_n(\varphi))$. Alors $\varphi_n(a) \in B_n(B_\bullet)$ et il existe $b \in B_{n+1}$ tel que $\varphi_n(a) = d_{n+1} b$. De plus par exactitude on a $d_{n+1} \psi_{n+1}(b) = \psi_n(d_{n+1}(b)) = \psi_n(\varphi_n(a)) = 0$, d'où $\psi_{n+1}(b) \in Z_{n+1}(C_\bullet)$, et par construction on retrouve bien $\partial_n \psi_{n+1}(b) = \bar{a} \in H_n(A_\bullet)$. Donc $\bar{a} \in \text{im}(\partial_{n+1})$.

- Soit $\bar{b} \in \text{im}(H_n(\varphi))$. Il existe $a \in A_n$ tel que $\varphi_n(a) = b$. Alors on a $b \in \text{im}(\varphi_n)$ et par exactitude $b \in \ker(\psi_n)$. Donc $\bar{b} \in \ker(H_n(\psi))$.

Soit $\bar{b} \in \ker(H_n(\psi))$. Alors $\psi_n(b) \in B_n(C_\bullet)$ et il existe $c \in C_{n+1}$ tel que $\psi_n(b) = d_{n+1}c$. Puisque ψ_{n+1} est surjective par exactitude, il existe $b' \in B_{n+1}$ tel que $\psi_{n+1}(b') = c$. De plus on a $\psi_n(d_{n+1}b') = d_{n+1}\psi_{n+1}(b') = d_{n+1}c = \psi_n(b)$, donc $b - d_{n+1}b' \in \ker(\psi_n)$ et par exactitude il existe $a \in A_n$ tel que $\varphi_n(a) = b - d_{n+1}b'$. Alors $\varphi_{n-1}(d_na) = d_nb - d_nd_{n+1}b' = d_nb = 0$, puisque φ_{n-1} est injective par exactitude, on a $d_na = 0$, donc $a \in Z_n(A_\bullet)$. De plus $H_n(\varphi)(\bar{a}) = \bar{b} \in H_n(B_\bullet)$. Donc $\bar{b} \in \text{im}(H_n(\varphi))$.

- Soit $\bar{c} \in \text{im}(H_n(\psi))$. Il existe $b \in Z_n(B_\bullet)$ tel que $\psi_n(b) = c$. De plus on a $d_nb = 0 \in \ker(\psi_{n-1})$, par exactitude il existe $a \in A_{n-1}$ tel que $\varphi_{n-1}(a) = d_nb = 0$, puisque φ_{n-1} est injective par exactitude, on a $a = 0$ et par construction $\partial_n \bar{c} = \bar{a} = 0 \in H_{n-1}(A_\bullet)$. Donc $\bar{c} \in \ker(\partial_n)$.

Soit $\bar{c} \in \ker(\partial_n)$. Alors $c \in Z_n(C_\bullet)$, puisque ψ_n est surjective par exactitude, il existe $b \in B_n$ tel que $\psi_n(b) = c$, d'où $H_n(\psi)(\bar{b}) = \bar{c}$. Donc $\bar{c} \in \text{im}(H_n(\psi))$.

Donc la suite longue est bien exacte. \square

Définition 2.16. Soit C_\bullet et D_\bullet deux complexes de chaînes, $\varphi_\bullet : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$ et $\psi_\bullet : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$ deux morphismes de complexes. On dit que φ_\bullet et ψ_\bullet sont *homotopes* s'il existe une suite de morphismes de groupes $(h_n : C_n \rightarrow D_{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\varphi_n - \psi_n = h_{n-1}d_n + d_nh_n$.

Proposition 2.17. Alors l'homotopie est une relation d'équivalence sur les morphismes de complexes.

Démonstration. Notons \sim la relation d'homotopie. Soit C_\bullet et D_\bullet deux complexes de chaînes.

- *Réflexivité* : Soit $\varphi_\bullet : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$ un morphisme de complexes. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on peut écrire $\varphi_n - \varphi_n = 0 = 0d_n + d_n0$. Donc on a bien $\varphi_\bullet \sim \varphi_\bullet$.
- *Symétrie* : Soit $\varphi_\bullet : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$ et $\psi_\bullet : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$ deux morphismes de complexes tels que $\varphi_\bullet \sim \psi_\bullet$. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\psi_n - \varphi_n = -(\varphi_n - \psi_n)$. On en déduit bien $\psi_\bullet \sim \varphi_\bullet$.
- *Transitivité* : Soit $\varphi_\bullet : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$, $\psi_\bullet : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$ et $\xi_\bullet : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$ trois morphismes de complexes tels que $\varphi_\bullet \sim \psi_\bullet$ et $\psi_\bullet \sim \xi_\bullet$. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\varphi_n - \xi_n = \varphi_n - \psi_n + \psi_n - \xi_n$. On en déduit bien que $\varphi_\bullet \sim \xi_\bullet$.

Donc l'homotopie est bien une relation d'équivalence sur les morphismes de complexes. \square

Proposition 2.18. Soit A_\bullet , B_\bullet et C_\bullet trois complexes de chaînes, $\varphi_\bullet : A_\bullet \rightarrow B_\bullet$ et $\psi_\bullet : A_\bullet \rightarrow B_\bullet$, ainsi que $\alpha_\bullet : B_\bullet \rightarrow C_\bullet$ et $\beta_\bullet : B_\bullet \rightarrow C_\bullet$ deux paires de morphismes de complexes homotopes. Alors les compositions $\alpha_\bullet \circ \varphi_\bullet : A_\bullet \rightarrow C_\bullet$ et $\beta_\bullet \circ \psi_\bullet : A_\bullet \rightarrow C_\bullet$ sont homotopes.

Démonstration. Par définition des morphismes de complexes homotopes il existe deux suites de morphismes de groupes $(f_n : A_n \rightarrow B_{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}$ et $(g_n : B_n \rightarrow C_{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\varphi_n - \psi_n = f_{n-1}d_n + d_nf_n$ et $\alpha_n - \beta_n = g_{n-1}d_n + d_ng_n$. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors on a :

$$\begin{aligned} \alpha_n \circ \varphi_n - \beta_n \circ \psi_n &= \alpha_n \circ \varphi_n - \alpha_n \circ \psi_n + \alpha_n \circ \psi_n - \beta_n \circ \psi_n \\ &= \alpha_n \circ (\varphi_n - \psi_n) + (\alpha_n - \beta_n) \circ \psi_n \\ &= \alpha_n \circ (f_{n-1}d_n + d_nf_n) + (g_{n-1}d_n + d_ng_n) \circ \psi_n \\ &= (\alpha_n \circ f_{n-1})d_n + d_n(\alpha_{n+1} \circ f_n) + (g_{n-1} \circ \psi_{n-1})d_n + d_n(g_n \circ \psi_n) \\ &= (\alpha_n \circ f_{n-1} + g_{n-1} \circ \psi_{n-1})d_n + d_n(\alpha_{n+1} \circ f_n + g_n \circ \psi_n) \end{aligned}$$

En posant $h_n := \alpha_{n+1} \circ f_n + g_n \circ \psi_n$, on obtient l'égalité voulue $\alpha_n \circ \varphi_n - \beta_n \circ \psi_n = h_{n-1}d_n + d_nh_n$. Donc $\alpha_\bullet \circ \varphi_\bullet$ et $\beta_\bullet \circ \psi_\bullet$ sont bien homotopes. \square

Lemme 2.19. Soit C_\bullet et D_\bullet deux complexes de chaînes, $\varphi_\bullet : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$ et $\psi_\bullet : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$ deux morphismes de complexes homotopes. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $H_n(\varphi) = H_n(\psi)$.

Démonstration. Par définition des morphismes de complexes homotopes il existe une suite de morphismes de groupes $(h_n : C_n \rightarrow D_{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\varphi_n - \psi_n = h_{n-1}d_n + d_n h_n$.

Soit $n \in \mathbb{Z}$ et $\bar{c} \in H_n(C_\bullet)$. Alors on a $\varphi_n(c) - \psi_n(c) = h_{n-1}(d_n c) + d_n h_n(c) = d_n h_n(c) \in B_n(D_\bullet)$, on en déduit $H_n(\varphi)(c) - H_n(\psi)(c) = 0 \in H_n(D_\bullet)$. Donc $H_n(\varphi) = H_n(\psi)$. \square

3. Homologie singulière

3.1. Simplexes

Définition 3.1. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel et A un sous-ensemble de E . On dit que A est *convexe* si :

$$\forall p, q \in A, [p, q] := \{(1-t)p + tq \mid t \in [0, 1]\} \subset A.$$

Définition 3.2. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel, A un sous-ensemble de E et p_0, \dots, p_n des éléments de A . On appelle *combinaison convexe* une combinaison linéaire de la forme $t_0 p_0 + \dots + t_n p_n$ où $t_0, \dots, t_n \in [0, 1]$ et $t_0 + \dots + t_n = 1$.

Proposition 3.3. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel, A un sous-ensemble de E et p_0, \dots, p_n des éléments de A . Si A est convexe, alors toute combinaison convexe de p_0, \dots, p_n appartient à A .

Démonstration. Soit $t_0, \dots, t_n \in [0, 1]$ tels que $t_0 + \dots + t_n = 1$. Notons $H(n) : t_0 p_0 + \dots + t_n p_n \in A$. Pour $n = 1$. On pose $t := t_1$, alors puisque A est convexe $t_0 p_0 + t_1 p_1 = (1-t)p_0 + t p_1 \in A$. Pour $n > 1$. On suppose que $H(n-1)$ est vérifiée. Sans perte de généralité, on suppose que $t_n \neq 0$, et on pose :

$$p := \frac{t_0}{1-t_n} p_0 + \dots + \frac{t_{n-1}}{1-t_n} p_{n-1}$$

alors d'après $H(n-1)$ on a $p \in A$. Par convexité on a $t_0 p_0 + \dots + t_n p_n = (1-t_n)p + t_n p_n \in A$. \square

Définition 3.4. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel et A un sous-ensemble de E . On appelle *enveloppe convexe* de A , notée $\text{Conv}(A)$, l'ensemble des combinaisons convexes d'éléments de A .

Proposition 3.5. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel et A un sous-ensemble de E . Alors l'enveloppe convexe de A est le plus petit ensemble convexe contenant A .

Démonstration. Soit $p, q \in \text{Conv}(A)$ et $t \in [0, 1]$. Puisque p et q sont des combinaisons convexes d'éléments de A , d'après la Proposition 3.3 on a $(1-t)p + tq \in \text{Conv}(A)$. Donc l'ensemble $\text{Conv}(A)$ est convexe.

Soit B un sous-ensemble convexe de E contenant A . Soit $x \in \text{Conv}(A)$. Puisque x est une combinaison convexe d'éléments de $A \subset B$, d'après la Proposition 3.3 on a $x \in B$. Donc $\text{Conv}(A) \subset B$. \square

Définition 3.6. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel et F une famille libre de $n+1$ éléments de E . On appelle *n -simplexe généré par F* l'enveloppe convexe de F . On dit que les éléments de F sont les *sommets* de $\text{Conv}(F)$ et que n est la *dimension* de $\text{Conv}(F)$.

Définition 3.7. On appelle *n -simplexe standard*, noté Δ^n , le n -simplexe généré par la base canonique de \mathbb{R}^{n+1} .

Proposition 3.8. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel et $F := (f_0, \dots, f_n)$ une famille libre de $n+1$ éléments de E . Alors l'application :

$$\langle f_0, \dots, f_n \rangle : \Delta^n \rightarrow \text{Conv}(F); (t_0, \dots, t_n) \mapsto t_0 f_0 + \dots + t_n f_n$$

est un homéomorphisme.

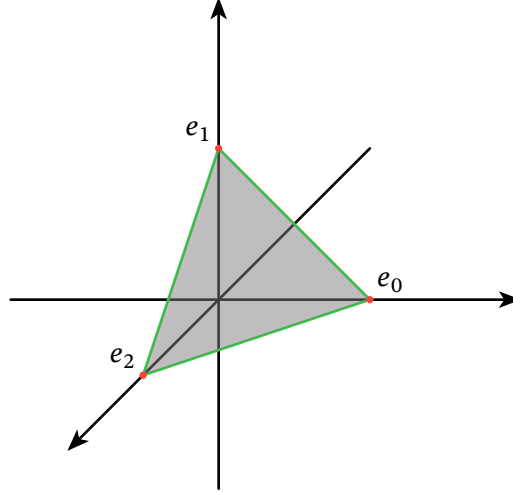
Démonstration. Soit $(s_0, \dots, s_n), (t_0, \dots, t_n) \in \Delta^n$ tels que $s_0 f_0 + \dots + s_n f_n = t_0 f_0 + \dots + t_n f_n$. En particulier on a $(s_0 - t_0)f_0 + \dots + (s_n - t_n)f_n = 0$, et puisque la famille (f_0, \dots, f_n) est libre, on obtient $s_0 - t_0 = \dots = s_n - t_n = 0$, c'est-à-dire $(s_0, \dots, s_n) = (t_0, \dots, t_n)$. Donc $\langle f_0, \dots, f_n \rangle$ est injective.

Soit $x \in \text{Conv}(F)$. Alors il existe $(t_0, \dots, t_n) \in \Delta^n$ tels que $x := t_0 f_0 + \dots + t_n f_n$. Donc $\langle f_0, \dots, f_n \rangle$ est surjective. Puisque $\langle f_0, \dots, f_n \rangle$ est une application linéaire et que Δ^n est de dimension finie, $\langle f_0, \dots, f_n \rangle$ est continue. De plus Δ^n est compact et $\text{Conv}(F)$ est séparé, donc $\langle f_0, \dots, f_n \rangle$ est un homéomorphisme. \square

Définition 3.9. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel, $F := (f_0, \dots, f_n)$ une famille libre de $n + 1$ éléments de E et $x := t_0 f_0 + \dots + t_n f_n$ un élément de $\text{Conv}(F)$. On appelle *coordonnées barycentriques* de x les coefficients $t_0, \dots, t_n \in [0, 1]$.

Définition 3.10. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel, F une famille libre de $n + 1$ éléments de E et G une famille non-vide d'éléments de $m + 1$ éléments de F . On dit que $\text{Conv}(G)$ est une m -face de $\text{Conv}(F)$.

Exemple 3.11. Un 2-simplexe standard, il s'agit d'un triangle, les arêtes en vert sont des 1-faces du triangle, les sommets en rouge sont des 0-faces du triangle et des arêtes :



3.2. Chaînes singulières

Définition 3.12. Soit X un espace topologique. On appelle n -simplexe singulier sur X une application continue de Δ^n dans X .

Exemple 3.13. L'application $\langle e_0, \dots, e_n \rangle$ de la Proposition 3.8, où (e_0, \dots, e_n) est la base canonique de \mathbb{R}^{n+1} , est un n -simplexe singulier sur \mathbb{R}^{n+1} .

Proposition 3.14. Soit X et Y deux espaces topologiques, $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ un n -simplexe singulier sur X et $f : X \rightarrow Y$ une application continue. Alors la composition $f \circ \sigma : \Delta^n \rightarrow Y$ est un n -simplexe singulier sur Y .

Définition 3.15. Soit X un espace topologique. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on appelle *groupe des n -chaînes singulières*, noté $C_n(X)$, le groupe abélien libre engendré par les n -simplexes singuliers sur X .

Démonstration. Puisque f est continue sur X et σ est continue sur Δ^n , par composition $f \circ \sigma$ est continue de Δ^n dans Y . Donc $f \circ \sigma$ est un n -simplexe singulier sur Y . \square

Définition 3.16. Soit X et Y deux espaces topologiques et $f : X \rightarrow Y$ une application continue. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle *application induite par f* , notée $C_n(f)$, le morphisme de groupes :

$$C_n(f) : C_n(X) \rightarrow C_n(Y); \sum_{k=0}^m \lambda_k \sigma_k \mapsto \sum_{k=0}^m \lambda_k (f \circ \sigma_k).$$

Proposition 3.17. Soit X, Y et Z trois espaces topologiques, $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ deux applications continues. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $C_n(g \circ f) = C_n(g) \circ C_n(f)$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque les n -chaînes singulières sont engendrées par les n -simplexes singuliers, il suffit de montrer le résultat pour un n -simplexe singulier $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$. Alors on a :

$$C_n(g \circ f)(\sigma) = (g \circ f) \circ \sigma = g \circ (f \circ \sigma) = g \circ C_n(f)(\sigma) = C_n(g)(C_n(f)(\sigma))$$

\square

Proposition 3.18. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le groupe des n -chaînes singulières C_n est un foncteur de Top vers Ab .

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Soit X un espace topologique. Alors le groupe des n -chaînes singulières $C_n(X)$ est bien un groupe abélien.
- Soit X et Y deux espaces topologiques, $f : X \rightarrow Y$ une application continue. Alors l'application induite $C_n(f) : C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$ est bien un morphisme de groupes.

La propriété de composition découle de la Proposition 3.17 et la propriété d'identité découle directement de la définition, donc C_n est bien un foncteur de Top vers Ab . \square

Définition 3.19. Soit X un espace topologique et $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ un n -simplexe singulier sur X . On appelle *bord de σ* , noté $d_n\sigma$, la $(n-1)$ -chaîne singulière sur X définie par :

$$d_n\sigma := \sum_{k=0}^n (-1)^k (\sigma \circ \langle e_0, \dots, \widehat{e_k}, \dots, e_n \rangle).$$

où le symbole $\widehat{}$ signifie que l'élément est enlevé.

Remarque 3.20. Le bord d'un n -simplexe singulier est la somme alternée de ses $(n-1)$ -faces.

Définition 3.21. Soit X un espace topologique et $n \in \mathbb{N}$. On appelle *morphisme de bord*, noté d_n , le morphisme de groupes induit :

$$d_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X); \sum_{k=0}^m \lambda_k \sigma_k \mapsto \sum_{k=0}^m \lambda_k d_n \sigma_k.$$

Proposition 3.22. Soit X et Y deux espaces topologiques et $f : X \rightarrow Y$ une application continue. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $d_n C_n(f) = C_{n-1}(f) d_n$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque les n -chaînes singulières sont engendrées par les n -simplexes singuliers, il suffit de montrer le résultat pour un n -simplexe singulier $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$. Alors on a :

$$\begin{aligned} d_n C_n(f)(\sigma) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k ((f \circ \sigma) \circ \langle e_0, \dots, \widehat{e_k}, \dots, e_n \rangle) \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k (f \circ (\sigma \circ \langle e_0, \dots, \widehat{e_k}, \dots, e_n \rangle)) \\ &= C_{n-1}(f)(d_n \sigma). \end{aligned}$$

\square

Proposition 3.23. Soit X un espace topologique. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $d_n d_{n+1} = 0$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque les n -chaînes singulières sont engendrées par les n -simplexes singuliers, il suffit de montrer le résultat pour un n -simplexe singulier $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$. Alors on a :

$$d_{n+1}\sigma = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k (\sigma \circ \langle e_0, \dots, \widehat{e_k}, \dots, e_{n+1} \rangle)$$

donc en appliquant d_n , on obtient :

$$\begin{aligned} d_n d_{n+1}\sigma &= d_n \left(\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k (\sigma \circ \langle e_0, \dots, \widehat{e_k}, \dots, e_{n+1} \rangle) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k d_n (\sigma \circ \langle e_0, \dots, \widehat{e_k}, \dots, e_{n+1} \rangle) \end{aligned}$$

on sépare la somme en deux selon les éléments enlevés :

$$\begin{aligned}
d_n d_{n+1} \sigma &= \sum_{0 \leq k < l \leq n+1} (-1)^{k+l} (\sigma \circ \langle e_0, \dots, \widehat{e_k}, \dots, \widehat{e_l}, \dots, e_n \rangle) \\
&\quad + \sum_{0 \leq l < k \leq n+1} (-1)^{k+l-1} (\sigma \circ \langle e_0, \dots, \widehat{e_l}, \dots, \widehat{e_k}, \dots, e_n \rangle) \\
&= \sum_{0 \leq k < l \leq n+1} ((-1)^{k+l} + (-1)^{k+l+1}) (\sigma \circ \langle e_0, \dots, \widehat{e_k}, \dots, \widehat{e_l}, \dots, e_n \rangle) \\
&= 0
\end{aligned}$$

car les puissances de -1 s'annulent. \square

Proposition 3.24. La suite $(C_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ où pour tout $n < 0$, on pose $C_n := 0$, munie des morphismes des bords $(d_n : C_n \rightarrow C_{n-1})_{n \in \mathbb{Z}}$ est un foncteur de Top vers Comp.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

- Soit X un espace topologique. Alors la suite $(C_n(X))_{n \in \mathbb{Z}}$ munie des morphismes de bords $(d_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X))_{n \in \mathbb{Z}}$ est bien un complexe de chaînes d'après la Proposition 3.23.
- Soit X et Y deux espaces topologiques, $f : X \rightarrow Y$ une application continue. Alors la suite des applications induites $(C_n(f) : C_n(X) \rightarrow C_n(Y))_{n \in \mathbb{Z}}$ est bien un morphisme de complexes d'après la Proposition 3.22.

La propriété de composition découle de la Proposition 3.17 et la propriété d'identité découle directement de la définition, donc C_n est bien un foncteur de Top vers Ab. \square

3.3. Définitions de l'homologie singulière

3.3.1. D'un espace topologique

Définition 3.25. Soit X un espace topologique. On appelle *complexe de chaînes singulières de X* , noté $C_\bullet(X)$, le complexe de chaînes déterminé par la suite $(C_n(X))_{n \in \mathbb{N}}$ munie des morphismes de bords $(d_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X))_{n \in \mathbb{N}}$.

Définition 3.26. Soit $C_\bullet(X)$ un complexe de chaînes singulières et $n \in \mathbb{Z}$.

- On appelle *n -cycle singulier* un élément de $Z_n(X) := Z_n(C_\bullet(X))$.
- On appelle *n -bord singulier* un élément de $B_n(X) := B_n(C_\bullet(X))$.
- On appelle *n^e groupe d'homologie singulière de X* le groupe $H_n(X) := H_n(C_\bullet(X))$.
- On appelle *homologie singulière de X* le groupe $H_\bullet(X) := H_\bullet(C_\bullet(X))$.

Corollaire 3.27. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le n^e groupe d'homologie singulière H_n est un foncteur de Top vers Ab

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$. D'après la Proposition 3.24 C_\bullet est un foncteur de Top vers Comp et d'après le Théorème 2.12 H_n est un foncteur de Comp vers Ab, par composition $H_n = H_n(C_\bullet)$ est bien un foncteur de Top vers Ab. \square

Corollaire 3.28. L'homologie singulière H_\bullet est un foncteur de Top vers GrAb.

Démonstration. D'après la Proposition 3.24 C_\bullet est un foncteur de Top vers Comp et d'après le Corollaire 2.13 H_\bullet est un foncteur de Comp vers GrAb, par composition $H_\bullet = H_\bullet(C_\bullet)$ est bien un foncteur de Top vers Ab. \square

Théorème 3.29 (Axiome de dimension). Soit P un espace topologie constitué d'un unique point. Alors le groupe $H_n(P)$ est non-trivial si et seulement $n = 0$.

Démonstration. Si $n < 0$, on a clairement $H_n(P) \simeq \{0\}$.

Si $n \geq 0$, il existe un unique n -simplexe singulier $\sigma_n : \Delta^n \rightarrow P$, alors on a :

$$d_n \sigma_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \sigma_{n-1} = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \text{ ou } n \text{ est impair} \\ \sigma_{n-1} & \text{si } n \neq 0 \text{ et } n \text{ est pair} \end{cases}$$

dans le cas $n = 0$, alors $H_0(P) = \langle \sigma_0 \rangle / \{0\} \simeq \mathbb{Z}$,

dans le cas $n \neq 0$ et n est impair, alors $H_n(P) = \langle \sigma_n \rangle / \langle \sigma_n \rangle \simeq \{0\}$,

dans le cas $n \neq 0$ et n est pair, alors $H_n(P) = \{0\} / \{0\} \simeq \{0\}$. □

TODO

3.3.2. D'une paire d'espace topologique

Définition 3.30. Soit $C_\bullet(X)$ et $C_\bullet(Y)$ deux complexes de chaînes singulières, et $f : X \rightarrow Y$ une application continue. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note $H_n(f) : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ le morphisme de groupes induit par $C_n(f)$.

Bibliographie

[1] Eduard Looijenga, *Algebraic Topology - an introduction*. 2010.