Problème du rectangle inscrit

Emanuel Morille

1 Janvier 1980

Table des matières

1. Homologie

1.1. Axiomes d'Eilenberg-Steenrod

Définition 1.1. Une *théorie de l'homologie* sur la catégorie des paires d'espaces topologiques Top_2 dans la catégorie des groupes abéliens Ab est une suite de foncteurs $(H_n : \mathsf{Top}_2 \to \mathsf{Ab})_{n\in\mathbb{Z}}$ munie de transformations naturelles $(\partial_n : H_n(X,A) \to H_{n-1}(A) \coloneqq H_{n-1}(A,\varnothing))_{n\in\mathbb{Z}}$ vérifiant les axomes suivants pour toutes paires d'espaces topologiques $(X,A),(Y,B)$ et $n \in \mathbb{Z}$:

- *Dimension* : Soit P l'espace constitué d'un unique point. Alors le groupe $H_n(P)$ est non-trivial si et seulement si $n = 0$.
- *Exactitude* : La suite suivante est exacte :

$$\dots \to H_{n+1}(X,A) \overset{\partial_{n+1}}{\to} H_n(A) \overset{i_A}{\to} H_n(X) \overset{i_X}{\to} H_n(X,A) \overset{\partial_n}{\to} H_{n-1}(A) \to \dots$$

- *Homotopie* : Soit $f_0, f_1 : (X,A) \to (Y,B)$ deux applications homotopes. Alors les applications induites en homologie $f_{0*}, f_{1*} : H_n(X,A) \to H_n(Y,B)$ sont égales.
- *Excision* : Soit U un sous-ensemble de A tel que l'adhérence de U est contenue dans l'intérieur de A. On note $i : (X \setminus U, A \setminus U) \to (X,A)$ l'inclusion canonique. Alors l'application induite en homologie $i_* : H_n(X \setminus U, A \setminus U) \to H_n(X,A)$ est un isomorphisme.

1.2. Homologie singulière

1.2.1. Simplexes

Définition 1.2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et A un sous-ensemble de E. On dit que A est *convexe* si :

$$\forall p,q \in A, [p,q] \coloneqq \{(1-t)p + tq \mid t \in [0,1]\} \subset A.$$

Définition 1.3. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, A un sous-ensemble de E et $p_0, \dots, p_n$ des éléments de A. On appelle *combinaison convexe* une combinaison de la forme $t_0p_0 + \dots + t_np_n$, telle que $t_0, \dots, t_n \in [0,1]$ et $t_0 + \dots + t_n = 1$.

Proposition 1.4. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, A un sous-ensemble de E et $p_0, \dots, p_n$ des éléments de A. Alors si A est convexe toute combinaison convexe de $p_0, \dots, p_n$ appartient à A.

Démonstration. Soit $t_0, \dots, t_n \in [0,1]$ tels que $t_0 + \dots + t_n = 1$. Notons $H(n) : t_0p_0 + \dots + t_np_n \in A$.
Pour $n = 1$. On pose $t \coloneqq t_1$, alors puisque A est convexe $t_0p_0 + t_1p_1 = (1-t)p_0 + tp_1 \in A$.
Pour $n > 1$. On suppose que $H(n-1)$ est vérifiée. Sans perte de généralité, on suppose que $t_n \neq 0$, et on pose

$$p \coloneqq \frac{t_0}{1-t_n}p_0 + \dots + \frac{t_{n-1}}{1-t_n}p_{n-1}$$

alors d'après $H(n-1)$ on a $p \in A$. Par convexité on a $t_0p_0 + \dots + t_np_n = (1-t_n)p + t_np_n \in A$. □

Définition 1.5. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et A un sous-ensemble de E. On appelle *enveloppe convexe de* A, notée $[A]$, l'ensemble des combinaisons convexes de sous-ensembles finis de A.

Proposition 1.6. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et A un sous-ensemble de E. Alors l'enveloppe convexe de A est le plus petit ensemble convexe contenant A.

Démonstration. Soit $p,q \in [A]$ et $t \in [0,1]$. Puisque $(1-t)p + tq$ est une combinaison convexe d'un sous-ensemble fini de A, on a bien $(1-t)p + tq \in [A]$. Donc $[A]$ est convexe.

Soit B un sous-ensemble convexe de E contenant A. Soit $x \in [A]$, alors il existe $p_0, \dots, p_n \in A$ et $t_0, \dots, t_n \in [0,1]$ tels que $t_0 + \dots + t_n = 1$ et $x = t_0p_0 + \dots + t_np_n$. D'après la Proposition 1.4 on a bien $x \in B$. Donc $[A] \subset B$. □

Définition 1.7. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et F une famille libre de $n+1$ éléments de E. On appelle *n-simplexe généré par F* l'enveloppe convexe de F. On dit que les éléments de F sont les *sommets* de $[F]$ et que n est la *dimension* de $[F]$.

Définition 1.8. On appelle *n-simplexe standard*, noté Δ^n, le n-simplexe généré par la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Définition 1.9. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $[F]$ un n-simplexe et $x = t_0 p_0 + \cdots + t_n p_n$ un élément de $[F]$. On appelle *coordonnées barycentriques de x* les coefficients $t_0, \ldots, t_n$.

1.2.2. Chaînes

Définition 1.10. Soit X un espace topologique. On appelle *n-simplexe singulier sur X* une application continue de Δ^n dans X.

Définition 1.11. Soit X un espace topologique. On note $C_n(X)$ le groupe abélien libre engendré par les n-simplexes singuliers sur X, on appelle *n-chaîne singulière* un élément de $C_n(X)$.

Proposition 1.12. Soit X et Y deux espaces topologiques, $\sigma : \Delta^n \to X$ un n-simplexe singulier sur X et $f : X \to Y$ une application continue. Alors la composition $f \circ \sigma : \Delta^n \to Y$ est un n-simplexe singulier sur Y.

Définition 1.13. Soit X et Y deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application continue. On appelle *implication induite par f*, notée f_*, le morphisme :

$$f_* : C_n(X) \to C_n(Y); \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \sigma_k \mapsto \sum_{k=0}^{n} \lambda_k (f \circ \sigma_k).$$

Proposition 1.14. Soit X, Y et Z trois espaces topologiques, $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux applications continues. Alors $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

Définition 1.15. Soit X un espace topologique et $\sigma : \Delta^n \to X$ un n-simplexe singulier sur X. On appelle *bord de σ*, noté $\partial_n \sigma$, le $(n-1)$-simplexe singulier sur X défini par :

$$\partial_n \sigma \coloneqq \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sigma|_{[e_0, \ldots, e_{k-1}, e_{k+1}, \ldots, e_n]}.$$

On appelle *morphisme bord* l'application étendue $\partial_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$.

Proposition 1.16. Soit X et Y deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application continue. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\partial_n f_* = f_* \partial_n$.

Démonstration. Soit $\sigma : \Delta^n \to X$ un n-simplexe singulier sur X. Alors on a :

$$\partial_n f_*(\sigma) = \partial_n (f \circ \sigma) = f_*(\partial_n \sigma).$$

□

Proposition 1.17. Soit X un espace topologique. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$.

Démonstration. Soit $\sigma : \Delta^{n+1} \to X$ un $(n+1)$-simplexe singulier sur X. Alors on a :

$$\partial_{n+1}(\sigma) = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \sigma|_{[e_0, \ldots, e_{k-1}, e_{k+1}, \ldots, e_{n+1}]}$$

donc en appliquant ∂_n, on obtient :

$$
\begin{aligned}
(\partial_n \circ \partial_{n+1})(\sigma) &= \partial_n\left(\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \sigma|_{[e_0,\dots,e_{k-1},e_{k+1},\dots,e_{n+1}]}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \partial_n\left(\sigma|_{[e_0,\dots,e_{k-1},e_{k+1},\dots,e_{n+1}]}\right) \\
&= \sum_{0\leq k<l\leq n+1} (-1)^{k+l} \sigma|_{[e_0,\dots,e_{k-1},e_{k+1},\dots,e_{l-1},e_{l+1},\dots,e_{n+1}]} \\
&\quad + \sum_{0\leq l<k\leq n+1} (-1)^{k+l-1} \sigma|_{[e_0,\dots,e_{l-1},e_{l+1},\dots,e_{k-1},e_{k+1},\dots,e_{n+1}]}) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

car les termes s'annulent deux à deux. □

1.2.3. Complexes de chaînes

Définition 1.18. Soit X un espace topologique. On appelle *complexe de chaînes singulières*, noté $C_\bullet(X)$, la suite de groupes abéliens libres $(C_n(X))_{n\in\mathbb{Z}}$ munie des morphismes de bords $(\partial_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X))_{n\in\mathbb{Z}}$, avec pour convention $C_n(X)$ trivial si $n < 0$.

Définition 1.19. Soit $C_\bullet(X)$ un complexe de chaînes singulières et $n \in \mathbb{Z}$.
- On appelle *n-cycle singulier* un élément de $Z_n(X) := \ker(\partial_n)$.
- On appelle *n-bord singulier* un élément de $B_n(X) := \mathrm{im}(\partial_{n+1})$.
- On appelle *n^e-groupe d'homologie singulière* le groupe quotient $H_n(X) := Z_n(X)/B_n(X)$.

Définition 1.20. Soit $C_\bullet(X)$ un complexe de chaînes singulières et $n \in \mathbb{Z}$.
- On dit que $C_\bullet(X)$ est *exact en $C_n(X)$* si $H_n(X)$ est trivial.
- On dit que $C_\bullet(X)$ est *exact* s'il est exact en tout $(C_n(X))_{n\in\mathbb{Z}}$.
- On dit que $C_\bullet(X)$ est *acyclique* s'il est exact en tout $(C_n(X))_{n\in\mathbb{Z}}$ avec $n \neq 0$.

1.2.4. Morphismes de chaînes

Définition 1.21. Soit $C_\bullet(X)$ et $C_\bullet(Y)$ deux complexes de chaînes singulières. On appelle *morphisme de chaînes*, noté $\varphi_\bullet : C_\bullet(X) \to C_\bullet(Y)$, une suite de morphismes $(\varphi_n : C_n(X) \to C_n(Y))_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\partial_n\varphi_n = \varphi_{n-1}\partial_n$.

Proposition 1.22. Soit $C_\bullet(X)$ et $C_\bullet(Y)$ deux complexes de chaînes singulières, $\varphi_\bullet : C_\bullet(X) \to C_\bullet(Y)$ un morphisme de chaînes. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le morphisme φ_n induit un morphisme entre les n^e-groupes d'homologie $H_n(\varphi) : H_n(X) \to H_n(Y)$.

Proposition 1.23. Soit $C_\bullet(X)$ et $C_\bullet(Y)$ deux complexes de chaînes singulières, et $f : X \to Y$ une application continue. Alors l'application induite f_* est un morphisme de chaînes.

1.2.5. Paires d'espaces topologiques

Définition 1.24. Soit (X, A) une paire d'espaces topologiques. On appelle *complexe de chaînes singulières de la paire* (X, A) le complexe de chaînes singulières quotient $C_\bullet(X, A) := C_\bullet(X)/C_\bullet(A)$.

Définition 1.25. Soit (X, A) et (Y, B) deux paires d'espaces topologiques, et $f : X \to Y$ une application continue. On dit que f est un *morphisme de paires*, noté $f : (X, A) \to (Y, B)$, si $f(A)$ est contenue dans B.

Proposition 1.26. Soit $C_\bullet(X, A)$ et $C_\bullet(Y, B)$ deux complexes de chaînes singulières, et $f : (X, A) \to (Y, B)$ un morphisme de paires. Alors l'application induite f_* est un morphisme de chaînes.

Définition 1.27. Soit $C_\bullet(X, A)$ un complexe de chaînes singulières. On appelle *morphisme connectant*, noté $\partial_n : H_n(X, A) \to H_{n-1}(A)$, la transformation naturelle induite par le morphisme de bord.

Théorème 1.28. La suite des n^{e}-groupe d'homologie singulière des paires d'espaces topologiques $(H_n : \mathsf{Top}_2 \to \mathsf{Ab})_{n\in\mathbb{Z}}$ munie des morphismes connectants $(\partial_n : H_n(X, A) \to H_{n-1}(A))_{n\in\mathbb{Z}}$ est une théorie de l'homogie vérifiant les axiomes d'Eilenberg-Steenrod.

Démonstration.
- Dimension : Il existe un unique n-simplexe singulier $\sigma_n : \Delta^n \to P$, alors on a :

$$\partial_n \sigma_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \text{ ou } n \text{ est impair} \\ \sigma_{n-1} & \text{si } n \neq 0 \text{ et } n \text{ est pair} \end{cases}$$

  Si $n = 0$, alors $H_0 = \langle \sigma_0 \rangle / \{0\} \simeq \mathbb{Z}$.
  Si $n \neq 0$ et n est impair, alors $H_n = \langle \sigma_n \rangle / \langle \sigma_n \rangle \simeq \{0\}$.
  Si $n \neq 0$ et n est pair, alors $H_n = \{0\}/\{0\} \simeq \{0\}$.
- Exactitude :
- Homotopie :
- Excision :

$\square$