

# Homologie singulière et problème du rectangle inscrit

Emanuel Morille

Avec les conseils de Jean-Baptiste Campesato

23 Août 2025

## Table des matières

<b>1. Bases de théorie des catégories</b>	<b>2</b>
1.1. Catégories . . . . .	2
1.2. Foncteurs . . . . .	3
1.3. Transformations naturelles . . . . .	3
<b>2. Catégorie Comp des complexes de chaînes</b>	<b>4</b>
2.1. Complexes de chaînes . . . . .	4
2.2. Morphismes de complexes . . . . .	4
2.3. La catégorie Comp . . . . .	5
2.4. Premières propriétés . . . . .	5
2.4.1. Homotopie . . . . .	5
2.4.2. Complexe de chaînes quotient . . . . .	6
2.4.3. Exactitude . . . . .	7
<b>3. Homologie singulière</b>	<b>9</b>
3.1. Simplexes . . . . .	9
3.2. Chaînes singulières . . . . .	10
3.3. Définitions de l'homologie singulière . . . . .	12
3.3.1. D'un espace topologique . . . . .	12
3.3.2. D'une paire d'espace topologique . . . . .	13
3.3.3. Associée à un recouvrement ouvert . . . . .	13
3.4. Principales propriétés . . . . .	14
3.4.1. Axiomes d'Eilenberg-Steenrod . . . . .	14
3.4.2. Équivalence d'homotopie . . . . .	16
3.4.3. Connexité par arcs . . . . .	17
3.4.4. Suite exacte de Mayer-Vietoris . . . . .	17
3.4.5. Complémentaire d'une sphère dans $\mathbb{R}^3$ . . . . .	19
<b>4. Droite et plan projectifs réels</b>	<b>22</b>
4.1. La droite projective réelle . . . . .	22
4.2. Le plan projectif réel . . . . .	22
4.2.1. Non-plongement dans $\mathbb{R}^3$ . . . . .	25
<b>5. Applications</b>	<b>26</b>
5.1. Le problème du rectangle inscrit . . . . .	26
<b>Annexe</b>	<b>29</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>30</b>

# 1. Bases de théorie des catégories

## 1.1. Catégories

**Définition 1.1.** Une *catégorie*  $\mathcal{C}$  est la donnée de :

- Une classe  $\text{ob}(\mathcal{C})$  dont les éléments sont appelés les *objets* de  $\mathcal{C}$ .
- Une classe  $\text{hom}(\mathcal{C})$  dont les éléments sont appelés les *morphismes* de  $\mathcal{C}$ .  
Un morphisme  $f \in \text{hom}(\mathcal{C})$  a un *domaine*  $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$  et un *codomaine*  $Y \in \text{ob}(\mathcal{C})$ . On note alors ce morphisme  $f : X \rightarrow Y$  et  $\text{hom}(X, Y)$  l'ensemble des morphismes de  $X$  dans  $Y$ .
- Pour tout objets  $X, Y, Z \in \text{ob}(\mathcal{C})$ , une *composition* :

$$\circ : \text{hom}(Y, Z) \times \text{hom}(X, Y) \rightarrow \text{hom}(X, Z).$$

- Pour tout objet  $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$ , un morphisme *identité* :

$$\text{id}_X : X \rightarrow X.$$

Vérifiant les propriétés suivantes pour tout objets  $X, Y, Z, T \in \text{ob}(\mathcal{C})$  :

- *Associativité* : Pour tout morphismes  $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$  et  $h : Z \rightarrow T$ , on a :

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

- *Identité* : Pour tout morphisme  $f : X \rightarrow Y$ , on a :

$$\text{id}_Y \circ f = f = f \circ \text{id}_X.$$

**Exemple 1.2.** La catégorie  $\text{Ab}$  des groupes abéliens :

- Les objets de  $\text{Ab}$  sont les groupes abéliens.
- Les morphismes de  $\text{Ab}$  sont les morphismes de groupes.

**Exemple 1.3.** Un *groupe gradué* est un groupe  $G$  muni d'une famille de sous-groupes  $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $G = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} G_n$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , un élément non-nul de  $G_n$  est dit *homogène de degré*  $n$ .

Soit  $G := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} G_n$  et  $H := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} H_n$  deux groupes gradués. Un *morphisme de groupes gradués* est un morphisme de groupes  $\varphi : G \rightarrow H$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $\varphi(G_n) \subset H_n$ .

On définit ainsi la catégorie  $\text{GrAb}$  des groupes abéliens gradués :

- Les objets de  $\text{GrAb}$  sont les groupes abéliens gradués.
- Les morphismes de  $\text{GrAb}$  sont les morphismes de groupes gradués.

**Exemple 1.4.** La catégorie  $\text{Top}$  des espaces topologiques :

- Les objets de  $\text{Top}$  sont les espaces topologiques.
- Les morphismes de  $\text{Top}$  sont les applications continues.

**Exemple 1.5.** Une paire d'espaces topologiques est un espace topologique  $X$  muni d'une partie  $A$  de lui-même. On la note  $(X, A)$ .

Soit  $(X, A)$  et  $(Y, B)$  deux paires d'espaces topologiques. Un *morphisme de paires* est une application continue  $f : X \rightarrow Y$  telle que  $f(A) \subset B$ . On le note  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ .

On définit ainsi catégorie  $\text{Top}_2$  des paires d'espaces topologiques :

- Les objets de  $\text{Top}_2$  sont les paires d'espaces topologiques.
- Les morphismes de  $\text{Top}_2$  sont les morphismes de paires.

**Exemple 1.6.** Soit  $(X, \leq)$  un ensemble partiellement ordonné. On définit la catégorie  $\mathcal{C}(X, \leq)$  :

- Les objets de  $\mathcal{C}(X, \leq)$  sont les éléments de  $X$ .
- Pour tout  $x, y \in X$ , si  $x \leq y$ , on a un morphisme  $f_{x,y} : x \rightarrow y$ .
- Pour tout  $x, y, z \in X$ , si  $x \leq y$  et  $y \leq z$ , on a bien  $x \leq z$  et une composition  $f_{y,z} \circ f_{x,y} = f_{x,z}$ .
- Pour tout  $x \in X$ , on a bien  $x \leq x$  et un morphisme identité  $f_{x,x}$ .

**Définition 1.7.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie. La *catégorie opposée (ou duale)* de  $\mathcal{C}$ , notée  $\mathcal{C}^{\text{op}}$ , est la catégorie dont les objets sont les objets  $\mathcal{C}$  et dont les morphismes sont les morphismes de  $\mathcal{C}$  dont le domaine et le codomaine sont inversés.

**Exemple 1.8.** Soit  $(X, \leq)$  un ensemble partiellement ordonné. Alors on a  $\mathcal{C}(X, \leq)^{\text{op}} = \mathcal{C}(X, \leq)$  où pour tout  $x, y \in X$ , on a  $x \leq y$  si et seulement si  $y \leq x$ .

## 1.2. Foncteurs

**Définition 1.9.** Soit  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  deux catégories. Un *foncteur (covariant)*  $F$  de  $\mathcal{C}$  vers  $\mathcal{D}$  est la donnée :

- Pour tout objet  $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$ , d'un objet  $F(X) \in \text{ob}(\mathcal{D})$ .
- Pour tout objets  $X, Y \in \text{ob}(\mathcal{C})$  et morphisme  $f : X \rightarrow Y$ , d'un morphisme  $F(f) : F(X) \rightarrow F(Y)$ .

Vérifiant les propriétés suivantes pour tout objets  $X, Y, Z \in \text{ob}(\mathcal{C})$  :

- *Composition* : Pour tout morphismes  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Y \rightarrow Z$ , on a :

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f).$$

- *Identité* : On a :

$$F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}.$$

**Exemple 1.10.** Soit  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  deux catégories. On définit le foncteur covariant constant  $C : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  :

- On prend  $D \in \mathcal{D}$ , pour tout objet  $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$ , on a  $C(X) := D$ .
- Pour tout objets  $X, Y \in \text{ob}(\mathcal{C})$  et morphisme  $f : X \rightarrow Y$ , on a  $C(f) := \text{id}_D$ .

**Exemple 1.11.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie. On définit le foncteur covariant identité  $\text{id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  :

- Pour tout objet  $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$ , on a  $\text{id}_{\mathcal{C}}(X) := X$ .
- Pour tout objets  $X, Y \in \text{ob}(\mathcal{C})$  et morphisme  $f : X \rightarrow Y$ , on a  $\text{id}_{\mathcal{C}}(f) := f$ .

**Définition 1.12.** Soit  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  deux catégories. Un *foncteur contravariant* de  $\mathcal{C}$  vers  $\mathcal{D}$  est un foncteur covariant de la catégorie opposée  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  vers  $\mathcal{D}$ .

**Remarque 1.13.** Un foncteur contravariant  $F$  est la donnée pour tout morphisme  $f : X \rightarrow Y$ , d'un morphisme  $F(f) : F(Y) \rightarrow F(X)$ , vérifiant la relation de composition  $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ .

**Exemple 1.14.** Soit  $\mathbb{K}$  un corps et  $\text{Vect}$  la catégorie des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. On définit un foncteur contravariant  $F : \text{Vect}^{\text{op}} \rightarrow \text{Vect}$  :

- Pour tout  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E \in \text{Vect}$ , on a  $F(E) := E^*$ .
- Pour tout  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels  $E, F \in \text{Vect}$  et application linéaire  $u : E \rightarrow F$ , on a :

$$F(u) := u^T : F^* \rightarrow E^*.$$

## 1.3. Transformations naturelles

**Définition 1.15.** Soit  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  deux catégories,  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  et  $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  deux foncteurs covariants. Une *transformation naturelle*  $\partial$  de  $F$  vers  $G$  est la donnée pour tout objet  $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$ , d'un morphisme  $\partial_X : F(X) \rightarrow G(X)$ , vérifiant la propriété suivante pour tout objet  $Y \in \text{ob}(\mathcal{C})$  et pour tout morphisme  $f : X \rightarrow Y$ , on a :

$$\partial_Y \circ F(f) = G(f) \circ \partial_X$$

c'est-à-dire que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ \partial_X \downarrow & & \downarrow \partial_Y \\ G(X) & \xrightarrow{G(f)} & G(Y) \end{array}$$

## 2. Catégorie Comp des complexes de chaînes

### 2.1. Complexes de chaînes

**Définition 2.1.** On appelle *complexe de chaînes*, noté  $C_\bullet$ , une suite de groupes abéliens  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  munie de morphismes de groupes  $(d_n : C_n \rightarrow C_{n-1})_{n \in \mathbb{N}}$  tels que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $d_n d_{n+1} = 0$ .

**Définition 2.2.** Soit  $C_\bullet$  un complexe de chaînes et  $n \in \mathbb{N}$ .

- On appelle  $n$ -cycle un élément de  $Z_n(C_\bullet) := \ker(d_n)$ .
- On appelle  $n$ -bord un élément de  $B_n(C_\bullet) := \text{im}(d_{n+1})$ .

**Proposition 2.3.** Soit  $C_\bullet$  un complexe de chaînes. Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $B_n(C_\bullet) \subset Z_n(C_\bullet)$ .

*Démonstration.* Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Alors  $d_n d_{n+1} = 0$ , donc  $B_n(C_\bullet) = \text{im}(d_{n+1}) \subset \ker(d_n) = Z_n(C_\bullet)$ .  $\square$

**Définition 2.4.** Soit  $C_\bullet$  un complexe de chaînes et  $n \in \mathbb{N}$ .

- On appelle  $n^e$  groupe d'homologie de  $C_\bullet$  le groupe quotient  $H_n(C_\bullet) := Z_n(C_\bullet)/B_n(C_\bullet)$ .
- On appelle *homologie de  $C_\bullet$*  le groupe abélien gradué  $H_\bullet(C_\bullet) := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} H_n(C_\bullet)$ .

**Définition 2.5.** Soit  $C_\bullet$  un complexe de chaînes et  $n \in \mathbb{N}$ .

- On dit que  $C_\bullet$  est *exact en  $C_n$*  si  $H_n(C_\bullet)$  est trivial, c'est-à-dire,  $\text{im}(d_{n+1}) = \ker(d_n)$ .
- On dit que  $C_\bullet$  est *exact* si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il est exact en  $C_n$ .
- On dit que  $C_\bullet$  est *acyclique* si pour tout  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , il est exact en  $C_n$ .

### 2.2. Morphismes de complexes

**Définition 2.6.** Soit  $C_\bullet$  et  $D_\bullet$  deux complexes de chaînes. On appelle *morphisme de complexes*, noté  $\varphi_\bullet : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$ , une suite de morphismes de groupes  $(\varphi_n : C_n \rightarrow D_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$d_n \varphi_n = \varphi_{n-1} d_n$$

c'est-à-dire que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} C_n & \xrightarrow{\varphi_n} & D_n \\ d_n \downarrow & & \downarrow d_n \\ C_{n-1} & \xrightarrow{\varphi_{n-1}} & D_{n-1} \end{array}$$

**Proposition 2.7.** Soit  $C_\bullet$ ,  $D_\bullet$  et  $E_\bullet$  trois complexes de chaînes,  $\varphi_\bullet : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$  et  $\psi_\bullet : D_\bullet \rightarrow E_\bullet$  deux morphismes de complexes. Alors la composition  $\psi_\bullet \circ \varphi_\bullet : C_\bullet \rightarrow E_\bullet$  est un morphisme de complexes.

*Démonstration.* Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Alors on a :

$$d_n(\psi_n \circ \varphi_n) = \psi_{n-1} d_n \varphi_n = (\psi_{n-1} \circ \varphi_{n-1}) d_n.$$

Donc  $(\psi_n \circ \varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien un morphisme de complexes.  $\square$

**Proposition 2.8.** Soit  $C_\bullet$  et  $D_\bullet$  deux complexes de chaînes,  $\varphi_\bullet : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$  un morphisme de complexes. Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\varphi_n$  induit un morphisme de groupes  $H_n(\varphi) : H_n(C_\bullet) \rightarrow H_n(D_\bullet)$ .

*Démonstration.* Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

Soit  $z \in Z_n(C_\bullet)$ . Alors on a  $d_n \varphi_n(z) = \varphi_{n-1}(d_n z) = \varphi_{n-1}(0) = 0$ , donc  $\varphi_n(z) \in Z_n(D_\bullet)$ .

Soit  $b \in B_n(C_\bullet)$ . Alors il existe  $c \in C_{n+1}$  tel que  $b = d_{n+1}c$ , et on a :

$$\varphi_n(b) = \varphi_n(d_{n+1}c) = d_{n+1}\varphi_{n+1}(c)$$

donc  $\varphi_n(b) \in B_n(D_\bullet)$ .

On considère  $\overline{\varphi_n} : Z_n(C_\bullet) \rightarrow H_n(D_\bullet)$ , alors  $B_n(C_\bullet) \subset \ker(\overline{\varphi_n})$  et d'après la propriété universelle du groupe quotient le morphisme  $\overline{\varphi_n}$  induit bien un morphisme  $H_n(\varphi) : H_n(C_\bullet) \rightarrow H_n(D_\bullet)$ .  $\square$

**Définition 2.9.** Soit  $C_\bullet$  et  $D_\bullet$  deux complexes de chaînes,  $\varphi_\bullet : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$  un morphisme de complexes. On note  $H_\bullet(\varphi) : H_\bullet(C_\bullet) \rightarrow H_\bullet(D_\bullet)$  le morphisme de groupes gradués  $H_\bullet(\varphi) := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} H_n(\varphi)$ .

## 2.3. La catégorie Comp

**Définition 2.10.** On appelle Comp la catégorie des complexes de chaînes :

- Les objets de Comp sont les complexes de chaînes.
- Les morphismes de Comp sont les morphismes de complexes.
- La composition de Comp découle de la Proposition 2.7.
- Le morphisme identité de Comp est canonique.

**Théorème 2.11.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le  $n^{\text{e}}$  groupe d'homologie  $H_n$  est un foncteur de Comp vers Ab.

*Démonstration.* Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

- Soit  $C_\bullet \in \text{ob}(\text{Comp})$  un complexe de chaînes. Alors le  $n^{\text{e}}$  groupe d'homologie  $H_n(C_\bullet)$  est bien un groupe abélien.
- Soit  $C_\bullet, D_\bullet \in \text{ob}(\text{Comp})$  deux complexes de chaînes et  $\varphi_\bullet : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$  un morphisme de complexes. Alors le morphisme induit  $H_n(\varphi) : H_n(C_\bullet) \rightarrow H_n(D_\bullet)$  est bien un morphisme de groupes.

La propriété de composition découle de la Proposition 2.7 et la propriété d'identité est canonique, donc  $H_n$  est bien un foncteur de Comp vers Ab.  $\square$

**Corollaire 2.12.** L'homologie  $H_\bullet$  est un foncteur de Comp vers GrAb.

*Démonstration.*

- Soit  $C_\bullet \in \text{ob}(\text{Comp})$  un complexe de chaînes. Alors l'homologie  $H_\bullet(C_\bullet) := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} H_n(C_\bullet)$  est bien un groupe abélien gradué.
- Soit  $C_\bullet, D_\bullet \in \text{ob}(\text{Comp})$  deux complexes de chaînes et  $\varphi_\bullet : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$  un morphisme de complexes. Alors le morphisme induit  $H_\bullet(\varphi) : H_\bullet(C_\bullet) \rightarrow H_\bullet(D_\bullet)$  est bien un morphisme de groupes abéliens gradués.

Les propriétés de composition et d'identité découlent du Théorème 2.11, donc  $H_\bullet$  est bien un foncteur de Comp vers GrAb.  $\square$

## 2.4. Premières propriétés

### 2.4.1. Homotopie

**Définition 2.13.** Soit  $C_\bullet$  et  $D_\bullet$  deux complexes de chaînes,  $\varphi_\bullet : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$  et  $\psi_\bullet : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$  deux morphismes de complexes. On dit que  $\varphi_\bullet$  et  $\psi_\bullet$  sont *homotopes* s'il existe une suite de morphismes de groupes  $(h_n : C_n \rightarrow D_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $\varphi_n - \psi_n = h_{n-1}d_n + d_n h_n$ .

**Proposition 2.14.** L'homotopie est une relation d'équivalence sur les morphismes de complexes.

*Démonstration.* Notons  $\sim$  la relation d'homotopie.

Soit  $C_\bullet$  et  $D_\bullet$  deux complexes de chaînes, ainsi que  $\varphi_\bullet : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$ ,  $\psi_\bullet : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$  et  $\xi_\bullet : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$  trois morphismes de complexes tels que  $\varphi_\bullet \sim \psi_\bullet$  et  $\psi_\bullet \sim \xi_\bullet$ . Alors par définition il existe deux suites de morphismes de groupes  $(f_n : C_n \rightarrow D_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(g_n : C_n \rightarrow D_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  telles que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $\varphi_n - \psi_n = f_{n-1}d_n + d_n f_n$  et  $\psi_n - \xi_n = g_{n-1}d_n + d_n g_n$ .

- *Réflexivité* : Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on peut écrire  $\varphi_n - \varphi_n = 0 = 0d_n + d_n 0$ . Donc on a bien  $\varphi_\bullet \sim \varphi_\bullet$ .
- *Symétrie* : Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $h_n := -f_n$ , alors on a  $\psi_n - \varphi_n = -(\varphi_n - \psi_n) = h_{n-1}d_n + d_n h_n$ . Donc on a bien  $\psi_\bullet \sim \varphi_\bullet$ .
- *Transitivité* : Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $h_n := f_n + g_n$ , alors on a  $\varphi_n - \xi_n = \varphi_n - \psi_n + \psi_n - \xi_n = h_{n-1}d_n + d_n h_n$ . Donc on a bien  $\varphi_\bullet \sim \xi_\bullet$ .

Donc l'homotopie est bien une relation d'équivalence sur les morphismes de complexes.  $\square$

**Proposition 2.15.** Soit  $A_\bullet, B_\bullet$  et  $C_\bullet$  trois complexes de chaînes,  $\varphi_\bullet : A_\bullet \rightarrow B_\bullet$  et  $\psi_\bullet : A_\bullet \rightarrow B_\bullet$ , ainsi que  $\alpha_\bullet : B_\bullet \rightarrow C_\bullet$  et  $\beta_\bullet : B_\bullet \rightarrow C_\bullet$  deux paires de morphismes de complexes homotopes. Alors les compositions  $\alpha_\bullet \circ \varphi_\bullet : A_\bullet \rightarrow C_\bullet$  et  $\beta_\bullet \circ \psi_\bullet : A_\bullet \rightarrow C_\bullet$  sont homotopes.

*Démonstration.* Par définition il existe deux suites de morphismes de groupes  $(f_n : A_n \rightarrow B_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(g_n : B_n \rightarrow C_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  telles que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $\varphi_n - \psi_n = f_{n-1}d_n + d_n f_n$  et  $\alpha_n - \beta_n = g_{n-1}d_n + d_n g_n$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Alors on a :

$$\begin{aligned} \alpha_n \circ \varphi_n - \beta_n \circ \psi_n &= \alpha_n \circ \varphi_n - \alpha_n \circ \psi_n + \alpha_n \circ \psi_n - \beta_n \circ \psi_n \\ &= \alpha_n \circ (\varphi_n - \psi_n) + (\alpha_n - \beta_n) \circ \psi_n \\ &= \alpha_n \circ (f_{n-1}d_n + d_n f_n) + (g_{n-1}d_n + d_n g_n) \circ \psi_n \\ &= (a_n \circ f_{n-1})d_n + d_n(a_{n+1} \circ f_n) + (g_{n-1} \circ \psi_{n-1})d_n + d_n(f_n \circ \psi_n) \\ &= (a_n \circ f_{n-1} + g_{n-1} \circ \psi_{n-1})d_n + d_n(a_{n+1} \circ f_n + f_n \circ \psi_n) \end{aligned}$$

En posant  $h_n := a_{n+1} \circ f_n + g_n \circ \psi_n$ , on obtient l'égalité voulue  $\alpha_n \circ \varphi_n - \beta_n \circ \psi_n = h_{n-1}d_n + d_n h_n$ . Donc  $\alpha_\bullet \circ \varphi_\bullet$  et  $\beta_\bullet \circ \psi_\bullet$  sont bien homotopes.  $\square$

**Proposition 2.16.** Soit  $C_\bullet$  et  $D_\bullet$  deux complexes de chaînes,  $\varphi_\bullet : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$  et  $\psi_\bullet : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$  deux morphismes de complexes homotopes. Alors on a  $H_\bullet(\varphi) = H_\bullet(\psi)$ .

*Démonstration.* Par définition il existe une suite de morphismes de groupes  $(h_n : C_n \rightarrow D_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $\varphi_n - \psi_n = h_{n-1}d_n + d_n h_n$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $\bar{c} \in H_n(C_\bullet)$ . Alors on a  $\varphi_n(c) - \psi_n(c) = h_{n-1}(d_n c) + d_n h_n(c) = d_n h_n(c) \in B_n(D_\bullet)$ , on en déduit  $H_n(\varphi)(c) - H_n(\psi)(c) = 0 \in H_n(D_\bullet)$ . Donc  $H_\bullet(\varphi) = H_\bullet(\psi)$ .  $\square$

#### 2.4.2. Complexe de chaînes quotient

**Définition 2.17.** Soit  $C_\bullet$  et  $D_\bullet$  deux complexes de chaînes. On dit que  $D_\bullet$  est un *sous-complexe de chaînes* de  $C_\bullet$  si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $D_n \subset C_n$ .

**Proposition 2.18.** Soit  $C_\bullet$  un complexe de chaînes et  $D_\bullet$  un sous-complexe de chaînes de  $C_\bullet$ . Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $d_n$  induit un morphisme  $\bar{d}_n : C_n/D_n \rightarrow C_{n-1}/D_{n-1}$  tel que  $\bar{d}_n \bar{d}_{n+1} = 0$ .

*Démonstration.* Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Alors on a  $D_n \subset C_n$ , on peut donc former le quotient  $C_n/D_n$ .

On pose  $\delta_n := \bar{d}_n : C_n \rightarrow C_{n-1}/D_{n-1}$ , alors  $D_n \subset \ker(\delta_n)$  et d'après la propriété universelle du groupe quotient  $\delta_n$  induit bien un morphisme  $\bar{d}_n : C_n/D_n \rightarrow C_{n-1}/D_{n-1}$ .

Enfin puisque  $d_n d_{n+1} = 0$ , on a bien  $\bar{d}_n \bar{d}_{n+1} = \overline{d_n d_{n+1}} = 0$ .  $\square$

**Corollaire 2.19.** Soit  $C_\bullet$  un complexe de chaînes et  $D_\bullet$  un sous-complexe de chaînes de  $C_\bullet$ . Alors la suite  $(C_n/D_n)_{n \in \mathbb{N}}$  munie des morphismes de bords induits  $(\bar{d}_n : C_n/D_n \rightarrow C_{n-1}/D_{n-1})_{n \in \mathbb{N}}$  forme un complexe de chaînes.

**Définition 2.20.** Soit  $C_\bullet$  un complexe de chaînes et  $D_\bullet$  un sous-complexe de chaînes de  $C_\bullet$ . On appelle *complexe de chaînes quotient* le complexe de chaînes  $C_\bullet/D_\bullet$ .

**Proposition 2.21.** Soit  $A_\bullet$  et  $C_\bullet$  deux complexes de chaînes,  $B_\bullet$  et  $D_\bullet$  respectivement deux sous-complexe de chaînes de  $A_\bullet$  et  $C_\bullet$ , et  $\varphi_\bullet : A_\bullet \rightarrow C_\bullet$  un morphisme de complexes. Si  $\varphi_\bullet(B_\bullet) \subset D_\bullet$ , alors  $\varphi_\bullet$  induit un morphisme de complexes  $\bar{\varphi}_\bullet : A_\bullet/B_\bullet \rightarrow C_\bullet/D_\bullet$ .

*Démonstration.* Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on considère  $\bar{\varphi}_n : A_n \rightarrow C_n/D_n$ , alors puisque  $\varphi_n(B_n) \subset D_n$ , on en déduit  $B_n \subset \ker(\bar{\varphi}_n)$  et d'après la propriété universelle du groupe quotient  $\bar{\varphi}_n$  induit un morphisme  $\bar{\varphi}_n : A_n/B_n \rightarrow C_n/D_n$ . On pose  $\bar{\varphi}_\bullet := (\bar{\varphi}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Alors par définition  $\bar{d}_n \bar{\varphi}_n = \overline{d_n \varphi_n} = \overline{\varphi_{n-1} d_n} = \bar{\varphi}_{n-1} \bar{d}_n$ . Donc  $\bar{\varphi}_\bullet$  est bien un morphisme de complexes.  $\square$

### 2.4.3. Exactitude

**Définition 2.22.** On dit qu'une suite courte de complexes de chaînes est *exacte*, notée :

$$0 \longrightarrow A_{\bullet} \xrightarrow{\varphi_{\bullet}} B_{\bullet} \xrightarrow{\psi_{\bullet}} C_{\bullet} \longrightarrow 0$$

si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la suite courte de groupes suivante est exacte :

$$0 \longrightarrow A_n \xrightarrow{\varphi_n} B_n \xrightarrow{\psi_n} C_n \longrightarrow 0$$

c'est-à-dire que  $\varphi_n$  est injectif,  $\text{im}(\varphi_n) = \ker(\psi_n)$  et  $\psi_n$  est surjectif.

**Lemme 2.23.** Soit une suite exacte courte de complexes de chaînes :

$$0 \longrightarrow A_{\bullet} \xrightarrow{\varphi_{\bullet}} B_{\bullet} \xrightarrow{\psi_{\bullet}} C_{\bullet} \longrightarrow 0$$

Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un morphisme de groupes  $\partial_n : H_n(C_{\bullet}) \rightarrow H_{n-1}(A_{\bullet})$  tel que la suite longue des groupes d'homologie est exacte :

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A_{\bullet}) \xrightarrow{H_n(\varphi)} H_n(B_{\bullet}) \xrightarrow{H_n(\psi)} H_n(C_{\bullet}) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A_{\bullet}) \xrightarrow{H_{n-1}(\varphi)} \dots$$

De plus pour tout diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A_{\bullet} & \xrightarrow{\varphi_{\bullet}} & B_{\bullet} & \xrightarrow{\psi_{\bullet}} & C_{\bullet} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f_{\bullet} & & \downarrow g_{\bullet} & & \downarrow h_{\bullet} & & \\ 0 & \longrightarrow & A'_{\bullet} & \xrightarrow{\varphi'_{\bullet}} & B'_{\bullet} & \xrightarrow{\psi'_{\bullet}} & C'_{\bullet} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

la transformation  $\partial_n$  est naturelle dans le sens où le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H_n(C_{\bullet}) & \xrightarrow{H_n(h)} & H_n(C'_{\bullet}) \\ \partial_n \downarrow & & \downarrow \partial_n \\ H_{n-1}(A_{\bullet}) & \xrightarrow{H_{n-1}(f)} & H_{n-1}(A'_{\bullet}) \end{array}$$

**Remarque 2.24.** La naturalité de  $\partial_n$  coïncide bien avec la notion introduite dans le [Chapitre 1.3](#) si on considère la catégorie des suites exactes courtes de complexes.

*Démonstration.* Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On commence par faire un diagramme en 3 dimensions pour la suite :

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A'_{n+1} & \longrightarrow & B'_{n+1} & \longrightarrow & C'_{n+1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \\ 0 & \longrightarrow & A_{n+1} & \longrightarrow & B_{n+1} & \longrightarrow & C_{n+1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \\ 0 & \longrightarrow & A'_n & \longrightarrow & B'_n & \longrightarrow & C'_n & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \\ 0 & \longrightarrow & A_n & \longrightarrow & B_n & \longrightarrow & C_n & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \\ 0 & \longrightarrow & A'_{n-1} & \longrightarrow & B'_{n-1} & \longrightarrow & C'_{n-1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \\ 0 & \longrightarrow & A_{n-1} & \longrightarrow & B_{n-1} & \longrightarrow & C_{n-1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

Soit  $\bar{c} \in H_n(C_\bullet)$ . Puisque  $\psi_n$  est surjective par exactitude, il existe  $b \in B_n$  tel que  $\psi_n(b) = c$ . De plus on a  $\psi_{n-1}(d_n b) = d_n \psi_n(b) = d_n c = 0$ , donc  $d_n b \in \ker(\psi_{n-1})$  et par exactitude il existe  $a \in A_{n-1}$  tel que  $\varphi_{n-1}(a) = d_n b$ . De plus on a  $\varphi_{n-2}(d_{n-1} a) = d_{n-1} \varphi_{n-1}(a) = d_{n-1} d_n b = 0$ , puisque  $\varphi_{n-2}$  est injective par exactitude, on a  $d_{n-1} a = 0$ , donc  $a \in Z_{n-1}(A_\bullet)$ . Donc on pose  $\partial_n \bar{c} := \bar{a} \in H_{n-1}(A_\bullet)$ .

Vérifions que  $\partial_n \bar{c}$  ne dépend pas des choix réalisés. Soit  $b' \in B_n$  tel que  $\psi_n(b') = c$  et  $a' \in A_{n-1}$  tel que  $d_n b' = \varphi_{n-1}(a')$ . Alors on a  $\psi_n(b - b') = c - c = 0$ , donc  $b - b' \in \ker(\psi_n)$  et par exactitude il existe  $\hat{a} \in A_n$  tel que  $\varphi_n(\hat{a}) = b - b'$ . Alors  $\varphi_{n-1}(d_n \hat{a}) = d_n b - d_n b' = \varphi_{n-1}(a - a')$ , puisque  $\varphi_{n-1}$  est injective par exactitude, on a  $d_n \hat{a} = a - a'$ , donc  $a - a' \in B_{n-1}(A_\bullet)$  et  $\bar{a} = \overline{a'} \in H_{n-1}(A_\bullet)$ .

Vérifions que la suite longue est exacte.

- Soit  $\bar{a} \in \text{im}(\partial_{n+1})$ . Par construction il existe  $b \in B_{n+1}$  tel que  $\varphi_n(a) = d_{n+1} b$ , d'où  $\varphi_n(a) \in B_n(B_\bullet)$  et  $H_n(\varphi)(\bar{a}) = 0 \in H_n(B_\bullet)$ . Donc  $\bar{a} \in \ker(H_n(\varphi))$ .  
Soit  $\bar{a} \in \ker(H_n(\varphi))$ . Alors  $\varphi_n(a) \in B_n(B_\bullet)$  et il existe  $b \in B_{n+1}$  tel que  $\varphi_n(a) = d_{n+1} b$ . De plus par exactitude on a  $d_{n+1} \psi_{n+1}(b) = \psi_n(d_{n+1}(b)) = \psi_n(\varphi_n(a)) = 0$ , d'où  $\psi_{n+1}(b) \in Z_{n+1}(C_\bullet)$ , et par construction on retrouve bien  $\partial_n \psi_{n+1}(b) = \bar{a} \in H_n(A_\bullet)$ . Donc  $\bar{a} \in \text{im}(\partial_{n+1})$ .
- Soit  $\bar{b} \in \text{im}(H_n(\varphi))$ . Il existe  $a \in A_n$  tel que  $\varphi_n(a) = b$ . Alors on a  $b \in \text{im}(\varphi_n)$  et par exactitude  $b \in \ker(\psi_n)$ . Donc  $\bar{b} \in \ker(H_n(\psi))$ .  
Soit  $\bar{b} \in \ker(H_n(\psi))$ . Alors  $\psi_n(b) \in B_n(C_\bullet)$  et il existe  $c \in C_{n+1}$  tel que  $\psi_n(b) = d_{n+1} c$ . Puisque  $\psi_{n+1}$  est surjective par exactitude, il existe  $b' \in B_{n+1}$  tel que  $\psi_{n+1}(b') = c$ . De plus on a  $\psi_n(d_{n+1} b') = d_{n+1} \psi_{n+1}(b') = d_{n+1} c = \psi_n(b)$ , donc  $b - d_{n+1} b' \in \ker(\psi_n)$  et par exactitude il existe  $a \in A_n$  tel que  $\varphi_n(a) = b - d_{n+1} b'$ . Alors  $\varphi_{n-1}(d_n a) = d_n b - d_n d_{n+1} b' = d_n b = 0$ , puisque  $\varphi_{n-1}$  est injective par exactitude, on a  $d_n a = 0$ , donc  $a \in Z_n(A_\bullet)$ . De plus  $H_n(\varphi)(\bar{a}) = \bar{b} \in H_n(B_\bullet)$ . Donc  $\bar{b} \in \text{im}(H_n(\varphi))$ .
- Soit  $\bar{c} \in \text{im}(H_n(\psi))$ . Il existe  $b \in Z_n(B_\bullet)$  tel que  $\psi_n(b) = c$ . De plus on a  $d_n b = 0 \in \ker(\psi_{n-1})$ , par exactitude il existe  $a \in A_{n-1}$  tel que  $\varphi_{n-1}(a) = d_n b = 0$ , puisque  $\varphi_{n-1}$  est injective par exactitude, on a  $a = 0$  et par construction  $\partial_n \bar{c} = \bar{a} = 0 \in H_{n-1}(A_\bullet)$ . Donc  $\bar{c} \in \ker(\partial_n)$ .  
Soit  $\bar{c} \in \ker(\partial_n)$ . Alors  $c \in Z_n(C_\bullet)$ , puisque  $\psi_n$  est surjective par exactitude, il existe  $b \in B_n$  tel que  $\psi_n(b) = c$ , d'où  $H_n(\psi)(\bar{b}) = \bar{c}$ . Donc  $\bar{c} \in \text{im}(H_n(\psi))$ .

Vérifions que  $\partial_n$  est naturelle. Soit  $\bar{c} \in H_n(C_\bullet)$ .

Par construction il existe  $b \in B_n$  tel que  $\psi_n(b) = c$  et il existe  $a \in Z_{n-1}(A_\bullet)$  tel que  $\varphi_{n-1}(a) = d_n b$  et  $\partial_n \bar{c} = \bar{a} \in H_{n-1}(A_\bullet)$ . Donc on a  $H_{n-1}(f)(\partial_n \bar{c}) = \overline{f_{n-1}(a)} \in H_{n-1}(A'_\bullet)$ .

De plus  $\psi'_n(g_n(b)) = h_n(\psi_n(b)) = h_n(c)$  et  $\varphi'_{n-1}(f_{n-1}(a)) = g_{n-1}(\varphi_{n-1}(a)) = g_{n-1}(d_n b) = d_n g_n(b)$ , alors par construction on a  $\partial_n H_n(h)(\bar{c}) = \overline{f_{n-1}(a)} \in H_{n-1}(A'_\bullet)$ . Donc  $H_{n-1}(f)(\partial_n) = \partial_n H_n(h)$ .  $\square$

**Corollaire 2.25.** Soit  $C_\bullet$  un complexe de chaînes et  $D_\bullet$  un sous-complexe de chaînes de  $C_\bullet$ . Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un morphisme de groupes  $\partial_n : H_n(C_\bullet/D_\bullet) \rightarrow H_{n-1}(D_\bullet)$  telle que la suite longue suivante est exacte :

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(D_\bullet) \xrightarrow{H_n(i)} H_n(C_\bullet) \xrightarrow{H_n(\pi)} H_n(C_\bullet/D_\bullet) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(D_\bullet) \xrightarrow{H_{n-1}(i)} \dots$$

où  $i_\bullet : D_\bullet \rightarrow C_\bullet$  est l'inclusion canonique et  $\pi_\bullet : C_\bullet \rightarrow C_\bullet/D_\bullet$  est la projection canonique.

*Démonstration.* Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Par définition l'inclusion  $i_n : D_n \rightarrow C_n$  est injective, de plus on a clairement  $\text{im}(i_n) = D_n = \ker(\pi_n)$  et par définition la projection  $\pi_n : C_n \rightarrow C_n/D_n$  est surjective.

Donc on a une suite exacte courte de complexe de chaînes :

$$0 \longrightarrow D_\bullet \xrightarrow{i_\bullet} C_\bullet \xrightarrow{\pi_\bullet} C_\bullet/D_\bullet \longrightarrow 0$$

Alors d'après le [Lemme 2.23](#) il existe bien un morphisme de groupes  $\partial_n : H_n(C_\bullet/D_\bullet) \rightarrow H_{n-1}(D_\bullet)$  tel que la suite longue est exacte.  $\square$



### 3. Homologie singulière

#### 3.1. Simplexes

**Définition 3.1.** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et  $A$  un sous-ensemble de  $E$ . On dit que  $A$  est *convexe* si :

$$\forall p, q \in A, [p, q] := \{(1-t)p + tq \mid t \in [0, 1]\} \subset A.$$

**Définition 3.2.** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel,  $A$  un sous-ensemble de  $E$  et  $f_0, \dots, f_n$  des éléments de  $A$ . On appelle *combinaison convexe* une combinaison linéaire de la forme  $t_0f_0 + \dots + t_nf_n$  où  $t_0, \dots, t_n \in [0, 1]$  et  $t_0 + \dots + t_n = 1$ .

**Proposition 3.3.** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel,  $A$  un sous-ensemble de  $E$  et  $f_0, \dots, f_n$  des éléments de  $A$ . Si  $A$  est convexe, alors toute combinaison convexe de  $f_0, \dots, f_n$  appartient à  $A$ .

*Démonstration.* Soit  $t_0, \dots, t_n \in [0, 1]$  tels que  $t_0 + \dots + t_n = 1$ . Notons  $H(n) : t_0f_0 + \dots + t_nf_n \in A$ . Pour  $n = 1$ . On pose  $t := t_1$ , alors puisque  $A$  est convexe  $t_0f_0 + t_1f_1 = (1-t)f_0 + tf_1 \in A$ . Pour  $n > 1$ . On suppose que  $H(n-1)$  est vérifiée. Sans perte de généralité, on suppose que  $t_n \neq 1$ , et on pose :

$$p := \frac{t_0}{1-t_n}f_0 + \dots + \frac{t_{n-1}}{1-t_n}f_{n-1}$$

alors d'après  $H(n-1)$  on a  $p \in A$ . Par convexité on a  $t_0f_0 + \dots + t_nf_n = (1-t_n)p + t_nf_n \in A$ .  $\square$

**Définition 3.4.** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et  $A$  un sous-ensemble de  $E$ . On appelle *enveloppe convexe* de  $A$ , notée  $\text{Conv}(A)$ , l'ensemble des combinaisons convexes d'éléments de  $A$ .

**Proposition 3.5.** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et  $A$  un sous-ensemble de  $E$ . Alors l'enveloppe convexe de  $A$  est le plus petit ensemble convexe contenant  $A$ .

*Démonstration.* Soit  $p, q \in \text{Conv}(A)$  et  $t \in [0, 1]$ . Puisque  $p$  et  $q$  sont des combinaisons convexes d'éléments de  $A$ , d'après la Proposition 3.3 on a  $(1-t)p + tq \in \text{Conv}(A)$ . Donc l'ensemble  $\text{Conv}(A)$  est convexe.

Soit  $B$  un sous-ensemble convexe de  $E$  contenant  $A$ . Soit  $x \in \text{Conv}(A)$ . Puisque  $x$  est une combinaison convexe d'éléments de  $A \subset B$ , d'après la Proposition 3.3 on a  $x \in B$ . Donc  $\text{Conv}(A) \subset B$ .  $\square$

**Définition 3.6.** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et  $F$  une famille libre de  $n+1$  éléments de  $E$ . On appelle  *$n$ -simplexe généré par  $F$*  l'enveloppe convexe de  $F$ . On dit que les éléments de  $F$  sont les *sommets* de  $\text{Conv}(F)$  et que  $n$  est la *dimension* de  $\text{Conv}(F)$ .

**Définition 3.7.** On appelle  *$n$ -simplexe standard*, noté  $\Delta^n$ , le  $n$ -simplexe généré par la base canonique de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

**Proposition 3.8.** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et  $F := (f_0, \dots, f_n)$  une famille libre de  $n+1$  éléments de  $E$ . Alors l'application :

$$\langle f_0, \dots, f_n \rangle : \Delta^n \rightarrow \text{Conv}(F); (t_0, \dots, t_n) \mapsto t_0f_0 + \dots + t_nf_n$$

est un homéomorphisme.

*Démonstration.* Soit  $(s_0, \dots, s_n), (t_0, \dots, t_n) \in \Delta^n$  tels que  $s_0f_0 + \dots + s_nf_n = t_0f_0 + \dots + t_nf_n$ . En particulier on a  $(s_0 - t_0)f_0 + \dots + (s_n - t_n)f_n = 0$ , et puisque la famille  $(f_0, \dots, f_n)$  est libre, on obtient  $s_0 - t_0 = \dots = s_n - t_n = 0$ , c'est-à-dire  $(s_0, \dots, s_n) = (t_0, \dots, t_n)$ . Donc  $\langle f_0, \dots, f_n \rangle$  est injective.

Soit  $x \in \text{Conv}(F)$ . Alors il existe  $(t_0, \dots, t_n) \in \Delta^n$  tels que  $x := t_0f_0 + \dots + t_nf_n$ . Donc  $\langle f_0, \dots, f_n \rangle$  est surjective. Puisque  $\langle f_0, \dots, f_n \rangle$  est une application linéaire et que  $\Delta^n$  est de dimension finie,  $\langle f_0, \dots, f_n \rangle$  est continue. De plus  $\Delta^n$  est compact, donc d'après le Théorème B  $\langle f_0, \dots, f_n \rangle$  est un homéomorphisme.  $\square$

**Définition 3.9.** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel,  $F := (f_0, \dots, f_n)$  une famille libre de  $n + 1$  éléments de  $E$  et  $x := t_0 f_0 + \dots + t_n f_n$  un élément de  $\text{Conv}(F)$ . On appelle *coordonnées barycentriques* de  $x$  les coefficients  $t_0, \dots, t_n \in [0, 1]$ .

**Définition 3.10.** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel,  $F$  une famille libre de  $n + 1$  éléments de  $E$  et  $G$  une famille non-vide d'éléments de  $m + 1$  éléments de  $F$ . On dit que  $\text{Conv}(G)$  est une  $m$ -face de  $\text{Conv}(F)$ .

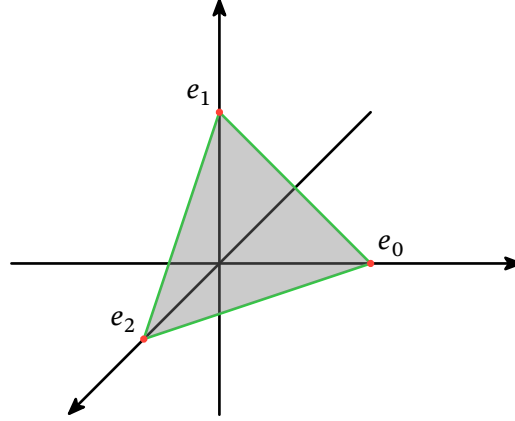


Fig. 1. – Un 2-simplexe standard.

En vert les arêtes sont des 1-faces du triangle.

En rouge les sommets sont des 0-faces du triangle et des arêtes.

### 3.2. Chaînes singulières

**Définition 3.11.** Soit  $X$  un espace topologique. On appelle  $n$ -simplexe singulier sur  $X$  une application continue de  $\Delta^n$  dans  $X$ .

**Exemple 3.12.** L'application  $\langle e_0, \dots, e_n \rangle$  de la Proposition 3.8, où  $(e_0, \dots, e_n)$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , est un  $n$ -simplexe singulier sur  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

**Proposition 3.13.** Soit  $X$  et  $Y$  deux espaces topologiques,  $f : X \rightarrow Y$  une application continue et  $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$  un  $n$ -simplexe singulier sur  $X$ . Alors la composition  $f \circ \sigma : \Delta^n \rightarrow Y$  est un  $n$ -simplexe singulier sur  $Y$ .

*Démonstration.* Puisque  $f$  est continue sur  $X$  et  $\sigma$  est continue sur  $\Delta^n$ , par composition  $f \circ \sigma$  est continue de  $\Delta^n$  dans  $Y$ . Donc  $f \circ \sigma$  est un  $n$ -simplexe singulier sur  $Y$ .  $\square$

**Définition 3.14.** Soit  $X$  un espace topologique. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on appelle *groupe des  $n$ -chaînes singulières*, noté  $C_n(X)$ , le groupe abélien libre engendré par les  $n$ -simplexes singuliers sur  $X$ .

**Définition 3.15.** Soit  $X$  et  $Y$  deux espaces topologiques et  $f : X \rightarrow Y$  une application continue. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on appelle *application induite par  $f$* , notée  $C_n(f)$ , le morphisme de groupes :

$$C_n(f) : C_n(X) \rightarrow C_n(Y); \sum_{k=0}^m \lambda_k \sigma_k \mapsto \sum_{k=0}^m \lambda_k (f \circ \sigma_k).$$

**Proposition 3.16.** Soit  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  trois espaces topologiques,  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Y \rightarrow Z$  deux applications continues. Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $C_n(g \circ f) = C_n(g) \circ C_n(f)$ .

*Démonstration.* Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Puisque les  $n$ -chaînes singulières sont engendrées par les  $n$ -simplexes singuliers, il suffit de montrer le résultat pour un  $n$ -simplexe singulier  $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ . Alors on a :

$$C_n(g \circ f)(\sigma) = (g \circ f) \circ \sigma = g \circ (f \circ \sigma) = g \circ C_n(f)(\sigma) = C_n(g)(C_n(f)(\sigma))$$

$\square$

**Proposition 3.17.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le groupe des  $n$ -chaînes singulières  $C_n$  est un foncteur de  $\text{Top}$  vers  $\text{Ab}$ .

*Démonstration.* Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

- Soit  $X$  un espace topologique. Alors le groupe des  $n$ -chaînes singulières  $C_n(X)$  est bien un groupe abélien.
- Soit  $X$  et  $Y$  deux espaces topologiques,  $f : X \rightarrow Y$  une application continue. Alors l'application induite  $C_n(f) : C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$  est bien un morphisme de groupes.

La propriété de composition découle de la Proposition 3.16 et la propriété d'identité découle directement de la définition, donc  $C_n$  est bien un foncteur de  $\text{Top}$  vers  $\text{Ab}$ .  $\square$

**Définition 3.18.** Soit  $X$  un espace topologique et  $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$  un  $n$ -simplexe singulier sur  $X$ . On appelle *bord de  $\sigma$* , noté  $d_n\sigma$ , la  $(n-1)$ -chaîne singulière sur  $X$  définie par :

$$d_n\sigma := \sum_{k=0}^n (-1)^k (\sigma \circ \langle e_0, \dots, \widehat{e_k}, \dots, e_n \rangle).$$

où le symbole  $\widehat{\phantom{x}}$  signifie que l'élément est enlevé.

**Remarque 3.19.** Le bord d'un  $n$ -simplexe singulier est la somme alternée de ses  $(n-1)$ -faces.

**Définition 3.20.** Soit  $X$  un espace topologique et  $n \in \mathbb{N}$ . On appelle *morphisme de bord*, noté  $d_n$ , le morphisme de groupes induit :

$$d_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X); \sum_{k=0}^m \lambda_k \sigma_k \mapsto \sum_{k=0}^m \lambda_k d_n \sigma_k.$$

**Proposition 3.21.** Soit  $X$  et  $Y$  deux espaces topologiques,  $f : X \rightarrow Y$  une application continue. Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $d_n C_n(f) = C_{n-1}(f) d_n$ .

*Démonstration.* Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Il suffit de montrer le résultat pour un  $n$ -simplexe singulier  $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ . Alors on a :

$$\begin{aligned} d_n C_n(f)(\sigma) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k ((f \circ \sigma) \circ \langle e_0, \dots, \widehat{e_k}, \dots, e_n \rangle) \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k (f \circ (\sigma \circ \langle e_0, \dots, \widehat{e_k}, \dots, e_n \rangle)) \\ &= C_{n-1}(f)(d_n \sigma). \end{aligned}$$

$\square$

**Proposition 3.22.** Soit  $X$  un espace topologique. Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $d_n d_{n+1} = 0$ .

*Démonstration.* Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Il suffit de montrer le résultat pour un  $(n+1)$ -simplexe singulier  $\sigma : \Delta^{n+1} \rightarrow X$ . Alors on a :

$$d_{n+1}\sigma = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k (\sigma \circ \langle e_0, \dots, \widehat{e_k}, \dots, e_{n+1} \rangle)$$

donc en appliquant  $d_n$ , on obtient :

$$\begin{aligned} d_n d_{n+1}\sigma &= d_n \left( \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k (\sigma \circ \langle e_0, \dots, \widehat{e_k}, \dots, e_{n+1} \rangle) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k d_n (\sigma \circ \langle e_0, \dots, \widehat{e_k}, \dots, e_{n+1} \rangle) \end{aligned}$$

on sépare la somme en deux selon les éléments enlevés :

$$\begin{aligned}
d_n d_{n+1} \sigma &= \sum_{0 \leq k < l \leq n+1} (-1)^{k+l} (\sigma \circ \langle e_0, \dots, \widehat{e_k}, \dots, \widehat{e_l}, \dots, e_{n+1} \rangle) \\
&\quad + \sum_{0 \leq l < k \leq n+1} (-1)^{k+l-1} (\sigma \circ \langle e_0, \dots, \widehat{e_l}, \dots, \widehat{e_k}, \dots, e_{n+1} \rangle) \\
&= \sum_{0 \leq k < l \leq n+1} ((-1)^{k+l} + (-1)^{k+l+1}) (\sigma \circ \langle e_0, \dots, \widehat{e_k}, \dots, \widehat{e_l}, \dots, e_{n+1} \rangle) \\
&= 0
\end{aligned}$$

car les puissances de  $-1$  s'annulent. □

### 3.3. Définitions de l'homologie singulière

#### 3.3.1. D'un espace topologique

**Proposition 3.23.** La suite  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  où pour tout  $n < 0$ , on pose  $C_n := 0$ , munie des morphismes des bords  $(d_n : C_n \rightarrow C_{n-1})_{n \in \mathbb{N}}$  est un foncteur de Top vers Comp.

*Démonstration.*

- Soit  $X$  un espace topologique. Alors la suite  $(C_n(X))_{n \in \mathbb{N}}$  munie des morphismes de bords  $(d_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X))_{n \in \mathbb{N}}$  est bien un complexe de chaînes d'après la Proposition 3.22.
- Soit  $X$  et  $Y$  deux espaces topologiques,  $f : X \rightarrow Y$  une application continue. Alors la suite des applications induites  $(C_n(f) : C_n(X) \rightarrow C_n(Y))_{n \in \mathbb{N}}$  est bien un morphisme de complexes d'après la Proposition 3.21.

La propriété de composition découle de la Proposition 3.16 et la propriété d'identité est canonique, donc  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien un foncteur de Top vers Comp. □

**Définition 3.24.** Soit  $X$  un espace topologique. On appelle *complexe de chaînes singulières de  $X$* , noté  $C_\bullet(X)$ , le complexe de chaînes déterminé par la suite  $(C_n(X))_{n \in \mathbb{N}}$  munie des morphismes de bords  $(d_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X))_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Définition 3.25.** Soit  $C_\bullet(X)$  un complexe de chaînes singulières et  $n \in \mathbb{N}$ .

- On appelle  *$n$ -cycle singulier* un élément de  $Z_n(X) := Z_n(C_\bullet(X))$ .
- On appelle  *$n$ -bord singulier* un élément de  $B_n(X) := B_n(C_\bullet(X))$ .
- On appelle  *$n^e$  groupe d'homologie singulière de  $X$*  le groupe  $H_n(X) := H_n(C_\bullet(X))$ .
- On appelle *homologie singulière de  $X$*  le groupe  $H_\bullet(X) := H_\bullet(C_\bullet(X))$ .

**Définition 3.26.** Soit  $X$  et  $Y$  deux espaces topologiques,  $f : X \rightarrow Y$  une application continue. On appelle *morphisme de complexes induit par  $f$* , notée  $f_\bullet : C_\bullet(X) \rightarrow C_\bullet(Y)$ , la suite des applications induites  $f_\bullet := (C_n(f) : C_n(X) \rightarrow C_n(Y))_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Corollaire 3.27.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le  $n^e$  groupe d'homologie singulière  $H_n$  est un foncteur de Top vers Ab.

*Démonstration.* Soit  $n \in \mathbb{N}$ . D'après la Proposition 3.23  $C_\bullet$  est un foncteur de Top vers Comp et d'après le Théorème 2.11  $H_n$  est un foncteur de Comp vers Ab, par composition  $H_n = H_n(C_\bullet)$  est bien un foncteur de Top vers Ab. □

**Corollaire 3.28.** L'homologie singulière  $H_\bullet$  est un foncteur de Top vers GrAb.

*Démonstration.* D'après la Proposition 3.23  $C_\bullet$  est un foncteur de Top vers Comp et d'après le Corollaire 2.12  $H_\bullet$  est un foncteur de Comp vers GrAb, par composition  $H_\bullet = H_\bullet(C_\bullet)$  est bien un foncteur de Top vers GrAb. □

### 3.3.2. D'une paire d'espace topologique

**Proposition 3.29.** La suite  $(C_n/C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  où pour tout  $n < 0$ , on pose  $C_n := 0$ , munie des morphismes des bords induits  $(\bar{d}_n : C_n/C_n \rightarrow C_{n-1}/C_{n-1})_{n \in \mathbb{N}}$  est un foncteur de  $\text{Top}_2$  vers  $\text{Comp}$ .

*Démonstration.*

- Soit  $(X, A)$  une paire d'espaces topologiques. Alors il est clair que  $C_\bullet(A)$  est un sous-complexe de chaînes de  $C_\bullet(X)$ , donc la suite  $(C_n(X)/C_n(A))_{n \in \mathbb{N}}$  munie des morphismes de bords induits  $(\bar{d}_n : C_n(X)/C_n(A) \rightarrow C_{n-1}(X)/C_{n-1}(A))_{n \in \mathbb{N}}$  est bien un complexe de chaînes d'après la [Proposition 2.18](#).
- Soit  $(X, A)$  et  $(Y, B)$  deux paires d'espaces topologiques,  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  un morphisme de paires. Alors il est clair que  $f_\bullet(C_\bullet(A)) \subset C_\bullet(B)$ , donc le morphisme induit  $\bar{f}_\bullet : C_n(X)/C_n(A) \rightarrow C_n(Y)/C_n(B)$  est bien un morphisme de complexes d'après la [Proposition 2.21](#).

La propriété de composition découle de la [Proposition 3.16](#) par passage au quotient et la propriété d'identité est canonique, donc  $(C_n/C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien un foncteur de  $\text{Top}_2$  vers  $\text{Comp}$ .  $\square$

**Définition 3.30.** Soit  $(X, A)$  une paire d'espaces topologiques. On appelle *complexe de chaînes singulières de la paire  $(X, A)$* , noté  $C_\bullet(X, A)$ , le complexe de chaînes quotient  $C_\bullet(X, A) := C_\bullet(X)/C_\bullet(A)$ .

**Définition 3.31.** Soit  $C_\bullet(X, A)$  un complexe de chaînes singulières et  $n \in \mathbb{N}$ .

- On appelle *n-cycle singulier* un élément de  $Z_n(X, A) := Z_n(C_\bullet(X)/C_\bullet(A))$ .
- On appelle *n-bord singulier* un élément de  $B_n(X, A) := B_n(C_\bullet(X)/C_\bullet(A))$ .
- On appelle *n<sup>e</sup> groupe d'homologie singulière de  $(X, A)$*  le groupe  $H_n(X, A) := H_n(C_\bullet(X)/C_\bullet(A))$ .
- On appelle *homologie singulière de  $(X, A)$*  le groupe  $H_\bullet(X, A) := H_\bullet(C_\bullet(X)/C_\bullet(A))$ .

**Remarque 3.32.** Dans le cas de la paire  $(X, \emptyset)$ , on trouve  $C_\bullet(X, \emptyset) \simeq C_\bullet(X)$  et  $H_\bullet(X, \emptyset) \simeq H_\bullet(X)$ .

**Corollaire 3.33.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le  $n^e$  groupe d'homologie singulière de paires  $H_n$  est un foncteur de  $\text{Top}_2$  vers  $\text{Ab}$ .

*Démonstration.* Soit  $n \in \mathbb{N}$ . D'après la [Proposition 3.29](#)  $C_\bullet$  est un foncteur de  $\text{Top}_2$  vers  $\text{Comp}$  et d'après le [Théorème 2.11](#)  $H_n$  est un foncteur de  $\text{Comp}$  vers  $\text{Ab}$ , par composition  $H_n = H_n(C_\bullet)$  est bien un foncteur de  $\text{Top}_2$  vers  $\text{Ab}$ .  $\square$

**Corollaire 3.34.** L'homologie singulière de paires  $H_\bullet$  est un foncteur de  $\text{Top}_2$  vers  $\text{GrAb}$ .

*Démonstration.* D'après la [Proposition 3.29](#)  $C_\bullet$  est un foncteur de  $\text{Top}_2$  vers  $\text{Comp}$  et d'après le [Corollaire 2.12](#)  $H_\bullet$  est un foncteur de  $\text{Comp}$  vers  $\text{GrAb}$ , par composition  $H_\bullet = H_\bullet(C_\bullet)$  est bien un foncteur de  $\text{Top}_2$  vers  $\text{GrAb}$ .  $\square$

### 3.3.3. Associée à un recouvrement ouvert

**Définition 3.35.** Soit  $X$  un espace topologique et  $\mathcal{U}$  un recouvrement ouvert de  $X$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on appelle *groupe des petites n-chaînes singulières de  $X$  associées à  $\mathcal{U}$* , noté  $C_n(X; \mathcal{U})$ , le groupe abélien libre engendré par les  $n$ -simplexes singuliers sur l'un des  $U \in \mathcal{U}$ .

**Définition 3.36.** Soit  $X$  un espace topologique et  $\mathcal{U}$  un recouvrement ouvert de  $X$ . On appelle *complexe de petites chaînes singulières de  $X$  associées à  $\mathcal{U}$* , noté  $C_\bullet(X; \mathcal{U})$ , le sous-complexe de chaînes déterminé par la suite  $(C_n(X; \mathcal{U}))_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Remarque 3.37.** Dans le cas du recouvrement ouvert trivial  $\mathcal{U} := \{X\}$ , on trouve  $C_\bullet(X; \mathcal{U}) \simeq C_\bullet(X)$  et  $H_\bullet(X; \mathcal{U}) \simeq H_\bullet(X)$ .

**Définition 3.38.** Soit  $(X, A)$  une paire d'espace topologique et  $\mathcal{U}$  un recouvrement ouvert de  $X$ . On appelle *complexe de petites chaînes singulières de la paire  $(X, A)$  associées à  $\mathcal{U}$* , noté  $C_\bullet(X, A; \mathcal{U})$ , le sous-complexe de chaînes quotient  $C_\bullet(X, A; \mathcal{U}) := C_\bullet(X; \mathcal{U})/C_\bullet(A; \mathcal{U})$ .

**Théorème 3.39** (Théorème des petites chaînes). Soit  $(X, A)$  une paire d'espace topologique,  $\mathcal{U}$  un recouvrement ouvert de  $X$  et  $i_\bullet : C_\bullet(X, A; \mathcal{U}) \rightarrow C_\bullet(X, A)$  l'inclusion canonique. Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le morphisme induit  $H_n(i) : H_n(X, A; \mathcal{U}) \rightarrow H_n(X, A)$  est un isomorphisme.

*Démonstration.* TODO ([1]). □

### 3.4. Principales propriétés

#### 3.4.1. Axiomes d'Eilenberg-Steenrod

**Théorème 3.40** (Axiome de dimension). On note  $\{*\}$  un espace topologique composé d'un unique point. Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$H_n(\{*\}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

*Démonstration.* Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $n < 0$ , on a clairement  $H_n(\{*\}) \simeq 0$ .

Si  $n \geq 0$ , il existe un unique  $n$ -simplexe singulier  $\sigma_n : \Delta^n \rightarrow \{*\}$ , alors on a :

$$d_n \sigma_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \sigma_{n-1} = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \text{ ou } n \text{ est impair} \\ \sigma_{n-1} & \text{si } n \neq 0 \text{ et } n \text{ est pair} \end{cases}$$

dans le cas  $n = 0$ , alors  $H_0(\{*\}) = \langle \sigma_0 \rangle / 0 \simeq \mathbb{Z}$ ,

dans le cas  $n \neq 0$  et  $n$  est impair, alors  $H_n(\{*\}) = \langle \sigma_n \rangle / \langle \sigma_n \rangle \simeq 0$ ,

dans le cas  $n \neq 0$  et  $n$  est pair, alors  $H_n(\{*\}) = 0/0 \simeq 0$ . □

**Définition 3.41.** Soit  $X$  et  $Y$  deux espaces topologiques,  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : X \rightarrow Y$  deux applications continues. On dit que  $f$  et  $g$  sont *homotopes* s'il existe une application continue  $h : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  telle que pour tout  $x \in X$ , on a  $f(x) = h(x, 0)$  et  $g(x) = h(x, 1)$ .

**Lemme 3.42.** Soit  $X$  et  $Y$  deux espaces topologiques,  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : X \rightarrow Y$  deux applications continues homotopes. Alors les morphismes de complexes  $f_\bullet : C_\bullet(X) \rightarrow C_\bullet(Y)$  et  $g : C_\bullet(X) \rightarrow C_\bullet(Y)$  sont homotopes.

*Démonstration.* Par définition de l'homotopie il existe une application continue  $h : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  telle que pour tout  $x \in X$ , on a  $f(x) = h(x, 0)$  et  $g(x) = h(x, 1)$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Il suffit de définir une homotopie pour un  $n$ -simplexe singulier  $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ . On pose :

$$h_n(\sigma) := \sum_{k=0}^n (-1)^k (h \circ (\sigma \times \text{id}) \circ \langle f_0, \dots, f_k, g_k, \dots, g_n \rangle) \in C_{n+1}(Y)$$

où  $(f_0, \dots, f_n) := (e_0 \times \{1\}, \dots, e_n \times \{1\})$  et  $(g_0, \dots, g_n) := (e_0 \times \{0\}, \dots, e_n \times \{0\})$ . Calculons maintenant les deux expressions qui nous intéressent :

$$\begin{aligned} h_{n-1}(d_n \sigma) &= h_n \left( \sum_{l=0}^n (-1)^l (\sigma \circ \langle e_0, \dots, \widehat{e_l}, \dots, e_n \rangle) \right) \\ &= \sum_{0 \leq k < l \leq n} (-1)^{k+l} (h \circ (\sigma \times \text{id}) \circ \langle f_0, \dots, f_k, g_k, \dots, \widehat{g_l}, \dots, g_n \rangle) \\ &\quad + \sum_{0 \leq l < k \leq n} (-1)^{k+l-1} (h \circ (\sigma \times \text{id}) \circ \langle f_0, \dots, \widehat{f_l}, \dots, f_k, g_k, \dots, g_n \rangle) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
d_n h_n(\sigma) &= d_n \sum_{k=0}^n (-1)^k (h \circ (\sigma \times \text{id}) \circ \langle f_0, \dots, f_k, g_k, \dots, g_n \rangle) \\
&= \sum_{0 \leq l \leq k \leq n} (-1)^{k+l} \left( h \circ (\sigma \times \text{id}) \circ \langle f_0, \dots, \widehat{f_l}, \dots, f_k, g_k, \dots, g_n \rangle \right) \\
&\quad + \sum_{0 \leq k \leq l \leq n} (-1)^{k+l-1} \left( h \circ (\sigma \times \text{id}) \circ \langle f_0, \dots, f_k, g_k, \dots, \widehat{g_l}, \dots, g_n \rangle \right)
\end{aligned}$$

en faisant la somme des deux expressions les termes d'indices différents s'annulent deux à deux :

$$\begin{aligned}
h_{n-1}(d_n \sigma) + d_n h_n(\sigma) &= \sum_{k=0}^n (h \circ (\sigma \times \text{id}) \circ \langle f_0, \dots, f_{k-1}, g_k, \dots, g_n \rangle) \\
&\quad - \sum_{k=0}^n (h \circ (\sigma \times \text{id}) \circ \langle f_0, \dots, f_k, g_{k+1}, \dots, g_n \rangle) \\
&= (h \circ (\sigma \times \text{id}) \circ \langle g_0, \dots, g_n \rangle) - (h \circ (\sigma \times \text{id}) \circ \langle f_0, \dots, f_n \rangle) \\
&= (h \circ (\sigma \times \{0\})) - (h \circ (\sigma \times \{1\})) \\
&= (f \circ \sigma) - (g \circ \sigma) \\
&= C_n(f)(\sigma) - C_n(g)(\sigma)
\end{aligned}$$

Donc les morphismes de complexes  $f_\bullet$  et  $g_\bullet$  sont bien homotopes.  $\square$

**Théorème 3.43** (Axiome d'homotopie). Soit  $X$  et  $Y$  deux espaces topologiques,  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : X \rightarrow Y$  deux applications continues homotopes. Alors on a  $H_\bullet(f) = H_\bullet(g)$ .

*Démonstration.* Puisque  $f$  et  $g$  sont homotopes, d'après le [Lemme 3.42](#)  $f_\bullet$  et  $g_\bullet$  sont homotopes. Donc d'après la [Proposition 2.16](#) on a bien  $H_\bullet(f) = H_\bullet(g)$ .  $\square$

**Théorème 3.44** (Axiome d'exactitude). Soit  $C_\bullet(X, A)$  un complexe de chaînes singulières. Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un morphisme de groupes  $\partial_n : H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A)$  telle que la suite longue suivante est exacte :

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A) \xrightarrow{H_n(i)} H_n(X) \xrightarrow{H_n(j)} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A) \xrightarrow{H_{n-1}(i)} \cdots$$

où  $i : A \rightarrow X$  et  $j : (X, \emptyset) \rightarrow (X, A)$  sont les inclusions canoniques.

*Démonstration.* On remarque que  $i_\bullet : C_\bullet(A) \rightarrow C_\bullet(X)$  est l'inclusion canonique et qu'en passant au quotient  $\bar{j}_\bullet : C_\bullet(X, \emptyset) \simeq C_\bullet(X) \rightarrow C_\bullet(X, A)$  devient la projection canonique.

Donc d'après le [Corollaire 2.25](#) il existe bien un morphisme de groupes  $\partial_n : H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A)$  tel que la suite longue est exacte.  $\square$

**Théorème 3.45** (Axiome d'excision). Soit  $(X, A)$  une paire d'espaces topologiques,  $B$  une partie de  $A$  telle que  $\overline{B} \subset \mathring{A}$  et  $i : (X \setminus B, A \setminus B) \rightarrow (X, A)$  l'inclusion canonique. Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le morphisme induit  $H_n(i) : H_n(X \setminus B, A \setminus B) \rightarrow H_n(X, A)$  est un isomorphisme.

*Démonstration.* Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

On considère le recouvrement ouvert  $\mathcal{U} := \{\mathring{A}, X \setminus \overline{B}\}$  et le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
C_\bullet(X \setminus B, A \setminus B; \mathcal{U}) & \xrightarrow{l_\bullet} & C_\bullet(X \setminus B, A \setminus B) \\
k_\bullet \downarrow & & \downarrow i_\bullet \\
C_\bullet(X, A; \mathcal{U}) & \xrightarrow{j_\bullet} & C_\bullet(X, A)
\end{array}$$



où  $j_\bullet, k_\bullet$  et  $l_\bullet$  sont les inclusions canoniques. Alors d'après le **Théorème des petites chaînes** les morphismes induits  $H_n(j)$  et  $H_n(l)$  sont des isomorphismes. De plus on peut remarquer que :

$$C_\bullet(X, A; \mathcal{U}) = (C_\bullet(\overset{\circ}{A}) + C_\bullet(\underbrace{(X \setminus \overline{B})}_{=(X \setminus B) \setminus \overline{B}})) / (C_\bullet(\overset{\circ}{A}) + C_\bullet(\underbrace{(A \setminus \overline{B})}_{=(A \setminus B) \setminus \overline{B}})) = C_\bullet(X \setminus B, A \setminus B; \mathcal{U})$$

donc  $k_\bullet$  est un isomorphisme et le morphisme induit  $H_n(k)$  est aussi un isomorphisme.

Puisque le diagramme est commutatif, le morphisme induit  $H_n(i)$  est bien un isomorphisme.  $\square$

**Définition 3.46.** Une *théorie de l'homologie* sur la catégorie des paires d'espaces topologiques  $\text{Top}_2$  dans la catégorie des groupes abéliens  $\text{Ab}$  est une suite de foncteurs  $(H_n : \text{Top}_2 \rightarrow \text{Ab})_{n \in \mathbb{N}}$  munie de transformations naturelles  $(\partial_n : H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A) := H_{n-1}(A, \emptyset))_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant les *axiomes d'Eilenberg-Steenrod* pour toutes paires d'espaces topologiques  $(X, A), (Y, B)$  et  $n \in \mathbb{N}$  :

- *Dimension* : Le groupe  $H_n(\{*\})$  est non-trivial si et seulement si  $n = 0$ .
- *Homotopie* : Soit  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  et  $g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  deux morphismes de paires homotopes. Alors on a  $H_n(f) = H_n(g)$ .
- *Exactitude* : La suite longue suivante est exacte :

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A) \xrightarrow{H_n(i)} H_n(X) \xrightarrow{H_n(j)} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A) \xrightarrow{H_{n-1}(i)} \dots$$

où  $i : A \rightarrow X$  et  $j : (X, \emptyset) \rightarrow (X, A)$  sont les inclusions canoniques.

- *Excision* : Soit  $B$  une partie de  $A$  telle que  $\overline{B} \subset \overset{\circ}{A}$  et  $i : (X \setminus B, A \setminus B) \rightarrow (X, A)$  l'inclusion canonique. Alors le morphisme induit  $H_n(i) : H_n(X \setminus B, A \setminus B) \rightarrow H_n(X, A)$  est un isomorphisme.

**Corollaire 3.47.** La suite des  $n^{\text{e}}$  groupe d'homologie singulière de paires  $(H_n : \text{Top}_2 \rightarrow \text{Ab})_{n \in \mathbb{N}}$  munie des morphismes  $(\partial_n : H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A))_{n \in \mathbb{N}}$  est une théorie de l'homologie vérifiant les *axiomes d'Eilenberg-Steenrod* et  $H_0(\{*\}) \simeq \mathbb{Z}$ .

### 3.4.2. Équivalence d'homotopie

**Définition 3.48.** Soit  $X$  et  $Y$  deux espaces topologiques. On dit que  $X$  et  $Y$  sont *homotopiquement équivalents* s'il existe deux applications continues  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Y \rightarrow X$  telles que  $g \circ f$  est homotope à  $\text{id}_X$  et  $f \circ g$  est homotope à  $\text{id}_Y$ .

**Exemple 3.49.** Soit  $\mathbb{S}^1$  la 1-sphère unité de  $\mathbb{R}^2$ . Alors  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  et  $\mathbb{S}^1$  sont homotopiquement équivalents. En effet, on considère l'application  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^1; u \mapsto u/\|u\|$  et on note  $i : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  l'inclusion canonique. On pose  $h : (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}; (x, t) \mapsto (1-t)x + tf(x)$ , alors elle est continue et pour tout  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , on a  $h(x, 0) = x$  et  $h(x, 1) = f(x)$ , donc  $i \circ f = h$  est bien homotope à  $\text{id}_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}}$  et enfin  $f \circ i = \text{id}_{\mathbb{S}^1}$ .

**Proposition 3.50.** L'équivalence d'homotopie est une relation d'équivalence sur les espaces topologiques.

*Démonstration.* La démonstration est similaire à celle de la **Proposition 2.14**.  $\square$

**Corollaire 3.51.** Soit  $X$  et  $Y$  deux espaces topologiques homotopiquement équivalents. Alors on a  $H_\bullet(X) \simeq H_\bullet(Y)$ .

*Démonstration.* Par définition il existe deux applications continues  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Y \rightarrow X$  telles que  $g \circ f$  est homotope à  $\text{id}_X$  et  $f \circ g$  est homotope à  $\text{id}_Y$ . Alors d'après l'**Axiome d'homotopie** on a bien  $H_\bullet(g) \circ H_\bullet(f) = \text{id}_{H_\bullet(X)}$  et  $H_\bullet(f) \circ H_\bullet(g) = \text{id}_{H_\bullet(Y)}$ , donc  $H_\bullet(X) \simeq H_\bullet(Y)$ .  $\square$

**Définition 3.52.** Soit  $X$  un espace topologique et  $A$  un sous-ensemble de  $X$ . On dit que  $A$  est un *rétract par déformation* de  $X$  s'il existe une application continue  $r : X \rightarrow A$  telle que  $i \circ r$  est homotope à  $\text{id}_X$  où  $i : A \rightarrow X$  est l'inclusion canonique et pour tout  $a \in A$ , on a  $r(a) = a$ , dans ce cas on dit que  $r$  est une *rétraction par déformation*.



**Remarque 3.53.** Un rétract par déformation est un cas particulier d'équivalence d'homotopie. Dans l'Exemple 3.49 la sphère  $\mathbb{S}^1$  est un rétract par déformation de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ .

**Corollaire 3.54.** Soit  $X$  un espace topologique et  $A$  un rétract par déformation de  $X$ . Alors on a  $H_\bullet(X) \simeq H_\bullet(A)$ .

**Définition 3.55.** Soit  $X$  un espace topologique. On dit que  $X$  est contractile s'il est homotopiquement équivalent à un point.

**Corollaire 3.56.** Soit  $X$  un espace topologique contractile. Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$H_n(X) \simeq H_n(\{*\}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

### 3.4.3. Connexité par arcs

**Proposition 3.57.** Soit  $X$  un espace topologique. Alors, en notant  $(X)_{i \in I}$  les composantes connexes par arcs de  $X$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $H_n(X) \simeq \bigoplus_{i \in I} H_n(X_i)$ .

*Démonstration.* Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour toute  $n$ -chaîne singulière  $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ , puisque  $\Delta^n$  est convexe, et en particulier connexe par arcs, par continuité de  $\sigma$  il existe un unique  $i \in I$  tel que  $\text{im}(\sigma) \subset X_i$ . Alors on en déduit que  $C_n(X) \simeq \bigoplus_{i \in I} C_n(X_i)$ . De plus  $d_n$  préserve cette décomposition en somme directe, par passage au quotient on a bien  $H_n(X) \simeq \bigoplus_{i \in I} H_n(X_i)$ .  $\square$

**Proposition 3.58.** Soit  $X$  un espace topologique. Alors, en notant  $(X)_{i \in I}$  les composantes connexes par arcs de  $X$ , on a  $H_0(X) \simeq \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}$ .

*Démonstration.* On a déjà  $\ker(d_0) = C_0(X)$ .

Supposons que  $X$  est non-vide et connexe par arcs. On pose  $\varphi : C_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}; \sum_{k=0}^n \lambda_k \sigma_k \mapsto \sum_{k=0}^n \lambda_k$ . Alors  $\varphi$  est un morphisme de groupes surjectif. Vérifions que  $\text{im}(d_1) = \ker(\varphi)$ .

Les 1-chaînes singulières sont engendrées par les 1-simplexes singuliers et pour tout 1-simplexe singulier  $\sigma : \Delta^1 \rightarrow X$ , on a  $\varphi(d_1 \sigma) = \varphi(\sigma \circ \langle \overline{e_0}, e_1 \rangle - \sigma \circ \langle e_0, \overline{e_1} \rangle) = 1 - 1 = 0$ , donc  $\text{im}(d_1) \subset \ker(\varphi)$ .

Réciproquement on considère  $\sum_{k=0}^n \lambda_k \sigma_k \in \ker(\varphi)$ . Pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$ , on note  $\gamma_k : [0, 1] \rightarrow X$  un chemin d'un point  $x \in X$  au point  $\sigma_k(e_1) \in X$  et on pose  $\sigma : \Delta^0 \rightarrow X$  un 0-simplexe singulier d'image  $x$ , en considérant  $\gamma_k$  comme un 1-simplexe singulier on a  $d_1 \gamma_k = \sigma_k - \sigma$ . Alors en considérant la  $n$ -chaîne singulière  $\sum_{k=0}^n \lambda_k \gamma_k$ , on a  $d_1 \sum_{k=0}^n \lambda_k \gamma_k = \sum_{k=0}^n \lambda_k \sigma_k - \sum_{k=0}^n \lambda_k \sigma = \sum_{k=0}^n \lambda_k \sigma_k$ , donc  $\ker(\varphi) \subset \text{im}(d_1)$ .

Alors d'après le premier théorème d'isomorphisme on a bien  $H_0(X) = C_0(X) / \ker(\varphi) \simeq \mathbb{Z}$ .

Dans le cas général, d'après la Proposition 3.57 on a  $H_n(X) \simeq \bigoplus_{i \in I} H_n(X_i) \simeq \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}$ .  $\square$

**Exemple 3.59.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$H_n(\mathbb{S}^0) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

*Démonstration.*  $\mathbb{S}^0$  est composé de deux points et a deux composantes connexes par arcs, donc d'après la Proposition 3.57 et l'Axiome de dimension on a bien le résultat.  $\square$

### 3.4.4. Suite exacte de Mayer-Vietoris

**Théorème 3.60** (Théorème de Mayer-Vietoris). Soit  $X$  un espace topologique,  $U$  et  $V$  deux ouverts de  $X$  tels que  $U \cup V = X$ . Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un morphisme de groupes  $\partial_n : H_n(X) \rightarrow H_{n-1}(U \cap V)$  tel que la suite longue suivante est exacte :

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(U \cap V) \xrightarrow{(H_n(i), H_n(j))} H_n(U) \oplus H_n(V) \xrightarrow{H_n(k) - H_n(l)} H_n(X) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(U \cap V) \xrightarrow{(H_{n-1}(i), H_{n-1}(j))} \dots$$

où  $i : U \cap V \rightarrow U$ ,  $j : U \cap V \rightarrow V$ ,  $k : U \rightarrow U \cup V$  et  $l : V \rightarrow U \cup V$  sont les inclusions canoniques.

*Démonstration.* Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

On considère le recouvrement ouvert  $\mathcal{U} := \{U, V\}$  et la suite courte de complexes de chaînes :

$$0 \longrightarrow C_\bullet(U \cap V) \xrightarrow{\varphi_\bullet} C_\bullet(U) \oplus C_\bullet(V) \xrightarrow{\psi_\bullet} C_\bullet(X; \mathcal{U}) = C_\bullet(U) + C_\bullet(V) \longrightarrow 0$$

où  $\varphi_\bullet := (i_\bullet, j_\bullet)$  et  $\psi_\bullet := k_\bullet - l_\bullet$ . Alors  $\varphi_n$  est clairement injective, de plus on a  $\text{im}(\psi_n) = \ker(\varphi_n)$  et  $\psi_n$  est clairement surjective.

Donc la suite courte de complexes de chaînes est exacte et d'après le [Lemme 2.23](#) il existe un morphisme de groupes  $\partial_n : H_n(X; \mathcal{U}) \rightarrow H_n(U \cap V)$  tel que la suite longue des groupes d'homologie est exacte :

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(U \cap V) \xrightarrow{H_n(\varphi)} H_n(U) \oplus H_n(V) \xrightarrow{H_n(\psi)} H_n(X; \mathcal{U}) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(U \cap V) \xrightarrow{H_{n-1}(\varphi)} \dots$$

Enfin d'après le [Théorème des petites chaînes](#) on peut identifier  $H_n(X; \mathcal{U})$  et  $H_n(X)$  pour obtenir la suite exacte de Mayer-Vietoris.  $\square$

**Exemple 3.61.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$H_n(\mathbb{S}^1) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n \in \{0, 1\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On recouvre  $\mathbb{S}^1$  par deux arcs ouverts  $U$  et  $V$  recouvrant chacun un demi-cercle :

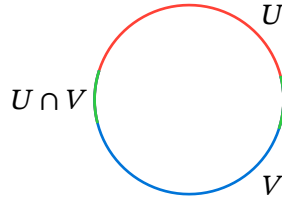


Fig. 2. – Recouvrement de  $\mathbb{S}^1$ .

Les arcs  $U$  et  $V$  sont contractiles, et l'intersection  $U \cap V$  est homotopiquement équivalente à  $\mathbb{S}^0$ . D'après le [Corollaire 3.51](#), le [Corollaire 3.56](#) et l'[Exemple 3.59](#) on a :

$$H_n(U) \simeq H_n(V) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad H_n(U \cap V) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et d'après le [Théorème de Mayer-Vietoris](#) la suite suivante est exacte :

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow H_1(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi_0} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi_0} H_0(\mathbb{S}^1) \rightarrow 0$$

On en déduit directement que si  $n \geq 2$ , on a  $H_n(\mathbb{S}^1) \simeq 0$ .

En étudiant  $\varphi_0 := (H_0(i), H_0(j)) : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  où  $i : U \cap V \rightarrow U$  et  $j : U \cap V \rightarrow V$  sont les inclusions canoniques, on trouve que  $\varphi_0(1, 0) = \varphi_0(0, 1) = (1, 1)$ .

Alors  $\ker(\varphi_0) = \{(a, -a) \mid a \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}$  et  $\text{im}(\varphi_0) = \{(a + b, a + b) \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}$ . Par exactitude  $\partial_1$  est injective et on a  $H_1(\mathbb{S}^1) \simeq \text{im}(\partial_1) = \ker(\varphi_0) \simeq \mathbb{Z}$ . De même, par exactitude  $\psi_0$  est surjective et on a  $H_0(\mathbb{S}^1) \simeq (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) / \ker(\psi_0) \simeq (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) / \text{im}(\varphi_0) \simeq (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) / \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}$ .

**Exemple 3.62.** Pour tout  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  et  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$H_n(\mathbb{S}^m) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n \in \{0, m\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On raisonne par récurrence en recouvrant  $\mathbb{S}^m$  par deux ouverts  $U$  et  $V$  homotopiquement équivalents à  $\mathbb{S}^{m-1}$ . Alors on peut calculer  $H_n(\mathbb{S}^m)$  de la même manière que dans l'Exemple 3.61.

### 3.4.5. Complémentaire d'une sphère dans $\mathbb{R}^3$

**Proposition 3.63.** Soit  $X$  un sous-espace de  $\mathbb{S}^p$  homéomorphe à  $\mathbb{B}^q$ . Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$H_n(\mathbb{S}^p \setminus X) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Remarque 3.64.** En revanche  $\mathbb{S}^p \setminus X$  n'est pas forcément contractile.

*Démonstration.* Soit  $f : \mathbb{B}^q \rightarrow X$  un homéomorphisme, on raisonne par récurrence sur  $q < p$  avec :

$$P(q) : H_n(\mathbb{S}^p \setminus f(\mathbb{B}^q)) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour  $q = 0$ . L'espace  $\mathbb{B}^0$  est réduit à un unique point, par Projection stéréographique l'espace  $\mathbb{S}^p \setminus f(\mathbb{B}^0)$  est homéomorphe à  $\mathbb{R}^p$ , qui est contractile. D'après le Corollaire 3.56 on a :

$$H_n(\mathbb{S}^p \setminus f(\mathbb{B}^0)) \simeq H_n(\mathbb{R}^p) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit  $q > 0$ . On suppose que  $P(q-1)$  est vérifiée. L'espace  $\mathbb{B}^q$  est homéomorphe à  $\mathbb{B}^{q-1} \times [0, 1]$ . On recouvre  $\mathbb{B}^{q-1} \times [0, 1]$  par deux fermés  $\mathbb{B}^- := \mathbb{B}^{q-1} \times [0, 1/2]$  et  $\mathbb{B}^+ := \mathbb{B}^{q-1} \times [1/2, 1]$ , ils sont homéomorphes à  $\mathbb{B}^q$ , et l'intersection  $\mathbb{B}^- \cap \mathbb{B}^+ = \mathbb{B}^{q-1} \times \{1/2\}$  est homéomorphe à  $\mathbb{B}^{q-1}$ . Alors on recouvre  $\mathbb{S}^p \setminus f(\mathbb{B}^{q-1} \times \{1/2\})$  par les ouverts  $U := \mathbb{S}^p \setminus f(\mathbb{B}^-)$  et  $V := \mathbb{S}^p \setminus f(\mathbb{B}^+)$ , et l'intersection vaut  $U \cap V = \mathbb{S}^p \setminus f(\mathbb{B}^q)$ . D'après le Théorème de Mayer-Vietoris la suite suivante est exacte :

$$\dots \xrightarrow{\psi_{n+1}} H_{n+1}(U \cup V) \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(U \cap V) \xrightarrow{\varphi_n} H_n(U) \oplus H_n(V) \xrightarrow{\psi_n} H_n(U \cup V) \xrightarrow{\partial_n} \dots$$

où  $\varphi_n := (i, j) : H_n(U \cap V) \rightarrow H_n(U) \oplus H_n(V)$  est induite par les inclusions canoniques.

Si  $n = 0$ .  $\mathbb{S}^p \setminus f(\mathbb{B}^q)$  est connexe par arcs, d'après la Proposition 3.58 on a  $H_0(\mathbb{S}^p \setminus f(\mathbb{B}^q)) \simeq \mathbb{Z}$ .

Si  $n \geq 1$ . On suppose par l'absurde qu'il existe  $\alpha_0 \in H_n(U \cap V)$  non-nul. D'après  $P(q-1)$  on a  $H_{n+1}(U \cup V) \simeq 0$ , par exactitude  $\varphi_n$  est injective, donc  $\varphi_n(\alpha_0) = (i(\alpha_0), j(\alpha_0)) \neq (0, 0)$  et il existe  $\alpha_1 \in H_n(\mathbb{S}^p \setminus f(\mathbb{B}^{q-1} \times I_1))$  non-nul tel que  $i_0(\alpha_0) = \alpha_1$ , où  $I_1$  est un segment de longueur  $1/2$  et  $i_0$  est induite par l'inclusion canonique  $i$  où  $j$ .

Puisque  $\mathbb{B}^{q-1} \times I_1$  est homéomorphe à  $\mathbb{B}^q$ , on peut refaire un raisonnement similaire avec l'espace  $\mathbb{S}^p \setminus f(\mathbb{B}^{q-1} \times I_1)$ , alors il existe  $\alpha_2 \in H_n(\mathbb{S}^p \setminus f(\mathbb{B}^{q-1} \times I_2))$  non-nul tel que  $i_1(\alpha_1) = \alpha_2$ , où  $I_2$  est un segment de longueur  $1/4$  et  $i_1$  est induite par l'inclusion canonique.

En itérant ce raisonnement on obtient une suite  $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$  où pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a  $\alpha_k \in H_n(A_k) := H_n(\mathbb{S}^p \setminus f(\mathbb{B}^{q-1} \times I_k))$  non-nul tel que  $i_k(\alpha_k) = \alpha_{k+1}$ , où  $I_k$  est un segment de longueur  $1/2^k$  et  $i_k$  est induite par l'inclusion canonique.

Soit  $\zeta : \Delta^n \rightarrow A_0$  un  $n$ -cycle singulier représentant  $\alpha_0$ . Puisque pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a  $i_k(\alpha_k) = \alpha_{k+1}$ , on en déduit que  $\zeta$  est un représentant de tous les  $\alpha_k$ .

On note  $Y := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k = \mathbb{S}^p \setminus f(\mathbb{B}^{q-1} \times \{0\})$ . Alors puisque  $\mathbb{B}^{q-1} \times \{0\}$  est homéomorphe à  $\mathbb{B}^{q-1}$ , d'après  $P(q-1)$  on a  $H_n(Y) \simeq 0$ . De plus  $\zeta \in Z_n(Y)$  et  $\zeta = 0 \in H_n(Y)$ .

Alors  $\zeta \in B_n(Y)$  et il existe une  $(n+1)$ -chaîne singulière  $\beta : \Delta^{n+1} \rightarrow Y$  telle que  $d_{n+1}\beta = \zeta$ . On écrit  $\beta = \sum_{l=0}^m \lambda_l \sigma_l$ , pour tout  $l \in \{0, \dots, m\}$ ,  $\sigma_l$  est continue et  $\Delta^{n+1}$  est compact, donc  $\text{im}(\sigma_l)$  est

compacte, or  $Y := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$  est un recouvrement ouvert de  $\text{im}(\sigma_l)$ , par définition il existe  $k_l \in \mathbb{N}$  tel que  $\text{im}(\sigma_l) \subset A_{k_l}$ . En notant  $k := \max_{l \in \{0, \dots, m\}} k_l$ , on a  $\beta \in C_{n+1}(A_k)$ .

Enfin  $\zeta = d_{n+1}\beta \in B_n(A_k)$  et  $a_k = \bar{\zeta} = 0 \in H_n(A_k)$ , d'où une contradiction.

Donc  $H_n(\mathbb{S}^p \setminus f(\mathbb{B}^q)) \simeq 0$ . □

**Proposition 3.65.** Soit  $X$  un sous-espace de  $\mathbb{R}^p$  homéomorphe à  $\mathbb{B}^q$ . Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$H_n(\mathbb{R}^p \setminus X) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n \in \{0, p-1\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

*Démonstration.* Par **Projection stéréographique** il existe un homéomorphisme  $f : \mathbb{S}^p \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^p$ . Soit  $B$  une boule fermée de  $\mathbb{R}^p$  contenant  $X$  (qui est compact). On recouvre  $\mathbb{S}^p \setminus f^{-1}(X)$  par deux ouverts  $U := f^{-1}(\mathbb{R}^p \setminus X)$  et  $V := \mathbb{S}^p \setminus f^{-1}(B)$ , leur intersection vaut  $U \cap V = V \setminus \{N\}$ .

D'après la **Proposition 3.63** on a :

$$H_n(V) \simeq H_n(U \cup V) \simeq H_n(\{*\}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et d'après le **Théorème de Mayer-Vietoris** la suite suivante est exacte :

$$\dots \rightarrow H_n(V \setminus \{N\}) \rightarrow H_n(f^{-1}(\mathbb{R}^p \setminus X)) \oplus H_n(\{*\}) \rightarrow H_n(\{*\}) \rightarrow H_{n-1}(V \setminus \{N\}) \rightarrow \dots$$

On en déduit que  $H_n(f^{-1}(\mathbb{R}^p \setminus X)) \simeq H_n(V \setminus \{N\})$  et en particulier  $H_n(\mathbb{R}^p \setminus X) \simeq H_n(f(V \setminus \{N\}))$ . Or  $f(V \setminus \{N\}) = \mathbb{R}^p \setminus B$ , qui se rétracte par déformation sur  $\mathbb{S}^{p-1}$ .

Donc  $H_n(\mathbb{R}^p \setminus X) \simeq H_n(\mathbb{S}^{p-1})$ . □

**Proposition 3.66.** Soit  $X$  un sous-espace de  $\mathbb{S}^p$  homéomorphe à  $\mathbb{S}^q$ . Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$H_n(\mathbb{S}^p \setminus X) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n \in \{0, p-q-1\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

*Démonstration.* Soit  $f : \mathbb{S}^q \rightarrow X$  un homéomorphisme,  $H_+$  et  $H_-$  les hémisphères fermés supérieurs et inférieurs recouvrant  $\mathbb{S}^q$  dont l'intersection vaut  $H_+ \cap H_- = \mathbb{S}^{q-1}$ . On recouvre  $\mathbb{S}^p \setminus f(\mathbb{S}^{q-1})$  par deux ouverts  $U := \mathbb{S}^p \setminus f(H_+)$  et  $V := \mathbb{S}^p \setminus f(H_-)$ , leur intersection vaut  $U \cap V = \mathbb{S}^p \setminus X$ .

D'après la **Proposition 3.63** on a :

$$H_n(\mathbb{S}^p \setminus f(H_+)) \simeq H_n(\mathbb{S}^p \setminus f(H_-)) \simeq H_n(\{*\}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et d'après le **Théorème de Mayer-Vietoris** la suite suivante est exacte :

$$\dots \rightarrow H_n(\mathbb{S}^p \setminus X) \rightarrow H_n(\{*\}) \oplus H_n(\{*\}) \rightarrow H_n(\mathbb{S}^p \setminus f(\mathbb{S}^{q-1})) \rightarrow H_{n-1}(\mathbb{S}^p \setminus X) \rightarrow \dots$$

On en déduit que  $H_n(\mathbb{S}^p \setminus X) \simeq H_{n+1}(\mathbb{S}^p \setminus f(\mathbb{S}^{q-1}))$ .

Par récurrence directe on a  $H_n(\mathbb{S}^q \setminus X) \simeq H_{n+q}(\mathbb{S}^p \setminus f(\mathbb{S}^0))$ . Mais par **Projection stéréographique**  $\mathbb{S}^p \setminus f(\mathbb{S}^0)$  est homéomorphe à  $\mathbb{R}^p \setminus \{0\}$ , qui se rétracte par déformation sur  $\mathbb{S}^{p-1}$ .

Donc  $H_n(\mathbb{S}^q \setminus X) \simeq H_{n+q}(\mathbb{S}^{p-1}) \simeq H_n(\mathbb{S}^{p-q-1})$ . □

**Proposition 3.67.** Soit  $X$  un sous-espace de  $\mathbb{R}^3$  homéomorphe à  $\mathbb{S}^1$ . Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$H_n(\mathbb{R}^3 \setminus X) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n \in \{0, 1, 2\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

*Démonstration.* Par **Projection stéréographique** il existe un homéomorphisme  $f : \mathbb{S}^3 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Soit  $B$  une boule fermée de  $\mathbb{R}^3$  contenant  $X$  (qui est compact). On recouvre  $\mathbb{S}^3 \setminus f^{-1}(X)$  par deux ouverts  $U := f^{-1}(\mathbb{R}^3 \setminus X)$  et  $V := \mathbb{S}^3 \setminus f^{-1}(B)$ , leur intersection vaut  $U \cap V := V \setminus \{N\}$ .

D'après la **Proposition 3.63** et la **Proposition 3.66** on a :

$$H_n(V) \simeq H_n(\{*\}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad H_n(U \cup V) \simeq H_n(\mathbb{S}^1) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n \in \{0, 1\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et d'après le **Théorème de Mayer-Vietoris** la suite suivante est exacte :

$$\cdots \rightarrow H_n(V \setminus \{N\}) \rightarrow H_n(f^{-1}(\mathbb{R}^3 \setminus X)) \oplus H_n(\{*\}) \rightarrow H_n(\mathbb{S}^1) \rightarrow H_{n-1}(V \setminus \{N\}) \rightarrow \cdots$$

Pour  $n \neq 1$ , de la même manière que dans la **Proposition 3.65** on trouve  $H_n(\mathbb{R}^3 \setminus X) \simeq H_n(\mathbb{S}^2)$ .

Pour  $n = 1$ , on en déduit que  $H_1(\mathbb{R}^3 \setminus X) \simeq H_1(\mathbb{S}^1)$ . □

## 4. Droite et plan projectifs réels

### 4.1. La droite projective réelle

**Définition 4.1.** On appelle *droite projective réelle*, noté  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ , le quotient de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  par la relation d'équivalence  $\sim_{\mathbb{P}^1}$  où pour tout  $u, v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , on a  $u \sim_{\mathbb{P}^1} v$  s'il existe  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  tel que  $u = \lambda v$ . Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . On note  $[x : y] := (x, y) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$  la classe de  $(x, y)$ .

**Remarque 4.2.** Un point de  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$  est donc induit par une droite linéaire de  $\mathbb{R}^2$ .

**Définition 4.3.** On appelle *cartes affines de  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$*  les sous-ensembles suivants :

- $A_x := \{[x : y] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \mid x \neq 0\} = \{[1 : y] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1\}$ .
- $A_y := \{[x : y] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \mid y \neq 0\} = \{[x : 1] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1\}$ .

**Remarque 4.4.** Les cartes affines  $A_x$  et  $A_y$  sont homéomorphes à  $\mathbb{R}$ .

On a  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 = A_x \cup A_y$  et  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 = A_y \sqcup \{\infty\}$  où  $\infty := [1 : 0]$ .

Intuitivement  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$  s'obtient donc à partir de  $\mathbb{R}$  auquel on ajoute un point à l'infini.

**Remarque 4.5.** La proposition suivante est naturelle puisque  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$  est donnée par les droites linéaires de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{S}^1$  par les demi-droites linéaires de  $\mathbb{R}^2$ .

**Proposition 4.6.** La droite projective réelle  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$  est homéomorphe au quotient du cercle  $\mathbb{S}^1$  par la relation d'équivalence  $\sim_{\mathbb{S}^1}$  où pour tout  $u, v \in \mathbb{S}^1$ , on a  $u \sim_{\mathbb{S}^1} v$  si  $u = \pm v$ .

*Démonstration.* On pose  $i : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1; (x, y) \mapsto [x : y]$ . Alors  $i$  est bien définie, pour tout  $u, v \in \mathbb{S}^1$ , si  $u \sim_{\mathbb{S}^1} v$ , alors  $u = \pm v$ , d'où  $i(u) = i(v)$ . De plus  $i$  est continue par composition de fonctions continues. Donc l'application  $I : \mathbb{S}^1 / \sim_{\mathbb{S}^1} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$  telle que  $I \circ \pi = i$  est continue.

Réciproquement on pose  $j : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^1 / \sim_{\mathbb{S}^1}; u \mapsto \overline{u/\|u\|}$ . Alors  $j$  passe au quotient pour  $\sim_{\mathbb{S}^1}$ , en effet pour tout  $u, v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , si  $u \sim_{\mathbb{P}^1} v$ , alors il existe  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  tel que  $u = \lambda v$ , d'où  $j(u) = j(\lambda v) = j(v)$ . De plus  $j$  est continue par composition de fonctions continues. Donc l'application  $J : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 / \sim_{\mathbb{S}^1}$  telle que  $J \circ \pi = j$  est continue.

Enfin il est clair que  $J \circ I = \text{id}$  et  $I \circ J = \text{id}$ , donc  $I$  et  $J$  sont bien des homéomorphismes entre la droite projective réelle  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$  et  $\mathbb{S}^1 / \sim_{\mathbb{S}^1}$ . □

### 4.2. Le plan projectif réel

**Définition 4.7.** On appelle *plan projectif réel*, noté  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ , le quotient de  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  par la relation d'équivalence  $\sim_{\mathbb{P}^2}$  où pour tout  $u, v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ , on a  $u \sim_{\mathbb{P}^2} v$  s'il existe  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  tel que  $u = \lambda v$ . Soit  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ . On note  $[x : y : z] := (x, y, z) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  la classe de  $(x, y, z)$ .

**Remarque 4.8.** Un point de  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  est donc induit par une droite linéaire de  $\mathbb{R}^3$  et une droite de  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  est induite par un plan linéaire de  $\mathbb{R}^3$ . De plus, pour deux droites  $D_1$  et  $D_2$  de  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  induites par des plans  $P_1$  et  $P_2$  de  $\mathbb{R}^3$ , la formule de Grassmann nous donne :

$$\dim(P_1 \cap P_2) = \dim(P_1) + \dim(P_2) - \dim(P_1 + P_2) = 2 + 2 - \dim(P_1 + P_2) \geq 4 - 3 = 1$$

on en déduit que l'intersection  $D_1 \cap D_2$  induite par  $P_1 \cap P_2$  est non-vide, donc  $D_1$  et  $D_2$  s'intersectent.

**Définition 4.9.** On appelle *cartes affines de  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$*  les sous-ensembles suivants :

- $A_x := \{[x : y : z] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \mid x \neq 0\} = \{[1 : y : z] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2\}$ .
- $A_y := \{[x : y : z] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \mid y \neq 0\} = \{[x : 1 : z] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2\}$ .
- $A_z := \{[x : y : z] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \mid z \neq 0\} = \{[x : y : 1] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2\}$ .

**Remarque 4.10.** Les cartes affines  $A_x, A_y$  et  $A_z$  sont homéomorphes à  $\mathbb{R}^2$ .

On a  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 = A_x \cup A_y \cup A_z$  et  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 = A_z \sqcup \ell_{\infty}$  où  $\ell_{\infty} := \{[x : y : 0] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2\}$ .

De plus l'ensemble  $\ell_{\infty}$  est homéomorphe à  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ , intuitivement  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  s'obtient donc à partir de  $\mathbb{R}^2$  auquel on ajoute une copie de  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$  à l'infini.

**Remarque 4.11.** On peut affiner la Remarque 4.8, une droite de  $A_z$  intersecte  $\ell_\infty$  en un point dépendant uniquement de son vecteur directeur. En effet, soit  $D := \{(x_0 + ta, y_0 + tb) \mid t \in \mathbb{R}\}$  une droite de  $\mathbb{R}^2 \simeq A_z$  passant par un point  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  et de vecteur directeur  $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Alors l'image de  $D$  dans  $A_z$  est donnée par  $D_z := \{[x_0 + ta : y_0 + tb : 1] \mid t \in \mathbb{R}\}$ , et on a :

$$[x_0 + ta : y_0 + tb : 1] = \left[ \frac{x_0}{t} + a : \frac{y_0}{t} + b : \frac{1}{t} \right] \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} [a : b : 0] \in \ell_\infty$$

Donc  $D_z$  intersecte  $\ell_\infty$  en  $[a : b : 0]$ .

Soit  $D_1$  et  $D_2$  deux droites distinctes de  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ , on note  $A_1 := D_1 \cap A_z$  et  $A_2 := D_2 \cap A_z$ .

- Si  $D_1 \neq \ell_\infty$  et  $D_2 \neq \ell_\infty$ , alors  $A_1 \neq \emptyset$  et  $A_2 \neq \emptyset$ .  
Si  $A_1$  et  $A_2$  sont parallèles dans  $A_z \simeq \mathbb{R}^2$ , elles ont le même vecteur directeur, donc  $D_1$  et  $D_2$  s'intersectent dans  $\ell_\infty$ . Sinon  $A_1$  et  $A_2$  s'intersectent, donc  $D_1$  et  $D_2$  s'intersectent dans  $A_z$ .
- Si  $D_1 = \ell_\infty$ , alors  $D_2$  intersecte bien  $D_1 = \ell_\infty$ .

**Remarque 4.12.** La proposition suivante est naturelle puisque  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  est donné par les droites linéaires de  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathbb{S}^2$  par les demi-droites linéaires de  $\mathbb{R}^3$ .

**Proposition 4.13.** Le plan projectif réel  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  est homéomorphe au quotient de la sphère  $\mathbb{S}^2$  par la relation d'équivalence  $\sim_{\mathbb{S}^2}$  où pour tout  $u, v \in \mathbb{S}^2$ , on a  $u \sim_{\mathbb{S}^2} v$  si  $u = \pm v$ .

*Démonstration.* La démonstration est similaire à celle de la Proposition 4.6, on identifie chaque élément de  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  à deux éléments antipodaux de  $\mathbb{S}^2$ .  $\square$

**Proposition 4.14.** Le plan projectif réel  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  est homéomorphe au quotient du carré  $[0, 1]^2$  par la relation d'équivalence  $\sim_{[0,1]}$  définie par  $(t, 0) \sim_{[0,1]} (1 - t, 1)$  et  $(0, t) \sim_{[0,1]} (1, 1 - t)$  où  $t \in [0, 1]$ .

*Démonstration.* D'après la Proposition 4.13 le plan projectif  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  est homéomorphe à  $\mathbb{S}^2 / \sim_{\mathbb{S}^2}$ , ensuite puisque l'on identifie les points antipodaux de  $\mathbb{S}^2$ , on peut considérer seulement l'hémisphère nord de  $\mathbb{S}^2$  en identifiant les points antipodaux du cercle de l'équateur :

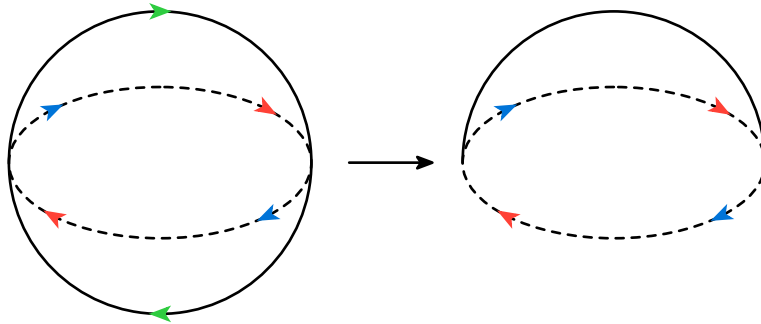


Fig. 3. – Passage de la sphère à la demi-sphère.

On peut déformer continûment cette demi-sphère sur le disque en identifiant toujours les points antipodaux du cercle :

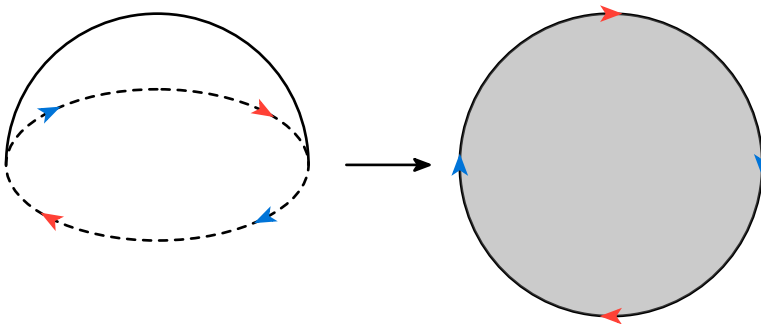


Fig. 4. – Passage de la demi-sphère au disque.

On peut de nouveau déformer continûment ce disque sur le carré en identifiant les points sur le bord du carré et en conservant l'orientation :

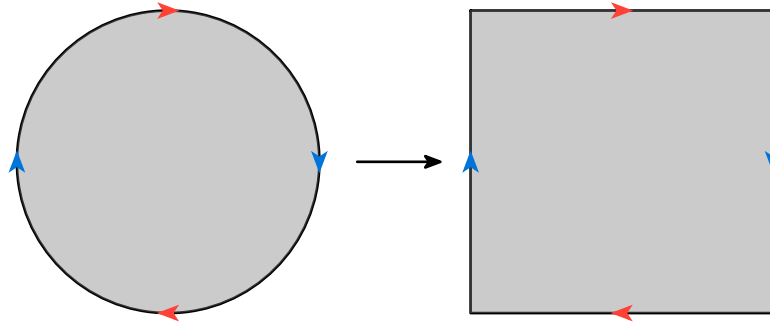


Fig. 5. – Passage du disque au carré.

Puisque les déformations à chaque étapes sont continues et préservent les points identifiés, on a bien construit un homéomorphisme du plan projectif réel  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  dans  $[0, 1]^2 / \sim_{[0,1]}$ .  $\square$

**Proposition 4.15.** Le plan projectif réel  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  se décompose en l'union de deux ensembles  $M \cup D$  tels que  $M$  est homéomorphe une bande de Möbius,  $D$  est homéomorphe à un disque fermé, et l'intersection  $M \cap D = \partial M = \partial D$  est homéomorphe à  $\mathbb{S}^1$ .

*Démonstration.* D'après la Proposition 4.14 le plan projectif réel  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  est homéomorphe à  $[0, 1]^2 / \sim_{[0,1]}$ , ensuite on peut découper dans ce carré une bande de Möbius :

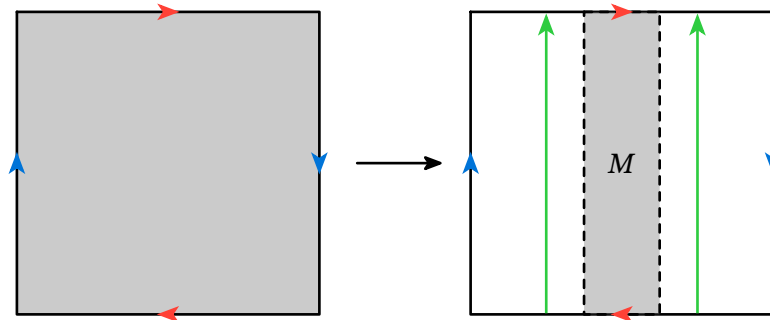


Fig. 6. – Découpage d'une bande de Möbius.

On peut recoller les parties restantes en suivant l'orientation des flèches bleues, puis l'orientation des flèches rouges pour obtenir un disque fermé :

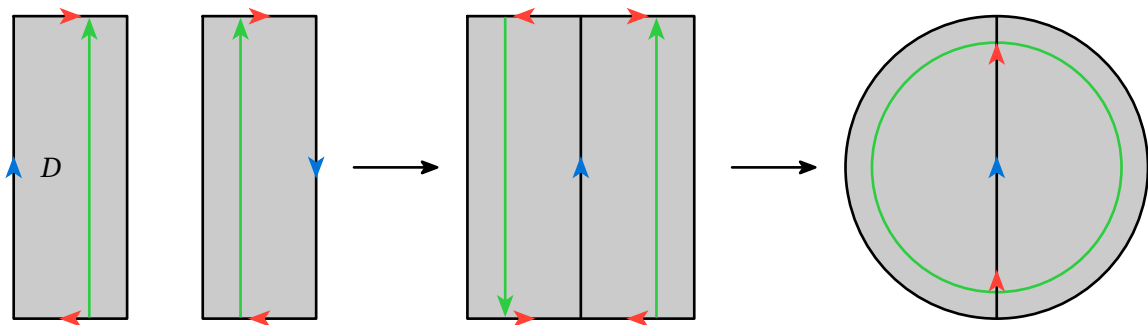


Fig. 7. – Recollage du disque fermé.

De plus  $M \cap D = \partial M = \partial D$  est homéomorphe au bord du disque, donc à  $\mathbb{S}^1$ .

Puisque les déformations à chaque étapes sont continues et préservent les points identifiés, on a bien décomposé le plan projectif réel  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  comme l'union  $M \cup D$  de deux ensembles tels que  $M$  est homéomorphe à une bande de Möbius,  $D$  est homéomorphe à un disque fermé et  $M \cap D$  est homéomorphe à  $\mathbb{S}^1$ .  $\square$



#### 4.2.1. Non-plongement dans $\mathbb{R}^3$

**Définition 4.16.** Soit  $X$  et  $Y$  deux espaces topologiques,  $f : X \rightarrow Y$  une application. On dit que  $f$  est un *plongement de  $X$  dans  $Y$*  si elle induit un homéomorphisme de  $X$  dans  $f(X)$  muni de la topologie induite.

**Théorème 4.17.** Il n'existe pas de plongement du plan projectif réel  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  dans  $\mathbb{R}^3$ .

*Démonstration.* Supposons par l'absurde qu'il existe un plongement  $f : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

D'après la Proposition 4.15 on peut écrire  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 = M \cup D$  où  $M$  est homéomorphe à une bande de Möbius,  $D$  est homéomorphe à un disque fermé et  $M \cap D = \partial M = \partial D$  est homéomorphe à  $\mathbb{S}^1$ , dans la suite on identifie  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ ,  $M$  et  $D$  avec leur images  $f(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2)$ ,  $f(M)$  et  $f(D)$  dans  $\mathbb{R}^3$ .

Le complémentaire de la bande de Möbius  $\mathbb{R}^3 \setminus M$  est un rétract par déformation de  $\mathbb{R}^3 \setminus C$  où  $C$  le cercle central de  $M$  est homéomorphe à  $\mathbb{S}^1$ . D'après le Corollaire 3.54 et la Proposition 3.67, on a :

$$H_1(\mathbb{R}^3 \setminus M) \simeq H_1(\mathbb{R}^3 \setminus C) \simeq H_1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z}$$

On considère un 1-simplexe singulier  $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus M$  dont l'image est un cercle enlacé autour de  $M$  et vérifiant  $\sigma(0) = \sigma(1)$ . Alors  $\sigma$  est un 1-cycle car  $d_1\sigma = \sigma(1) - \sigma(0) = 0$ . Si on suppose par l'absurde que  $\sigma$  est un 1-bord, il existe une 2-chaîne singulière dont l'image est un disque qui a pour bord le cercle enlacé autour de  $M$ , ce qui est impossible. Donc  $\bar{\sigma}$  est un générateur de  $H_1(\mathbb{R}^3 \setminus M)$ .

De plus le bord de la bande Möbius  $\partial M$  est homéomorphe à  $\mathbb{S}^1$ . D'après la Proposition 3.67, on a :

$$H_1(\mathbb{R}^3 \setminus \partial M) \simeq H_1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z}$$

On considère  $i : \mathbb{R}^3 \setminus M \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \partial M$  l'inclusion canonique. Alors  $i \circ \sigma$  est homotope au bouquet de deux cercles enlacés autour de  $\partial M$  avec la même orientation :

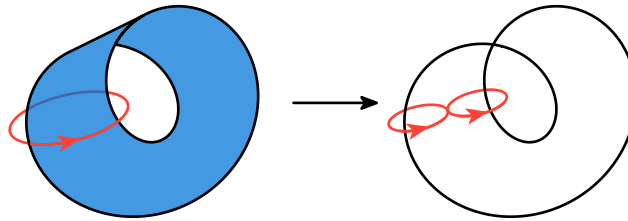


Fig. 8. – Homotopie de l'inclusion de  $\sigma$  dans  $\mathbb{R}^3 \setminus M$  (Exercice 1).

Alors puisque leur orientation est la même, la classe de chacun des deux cercles dans  $H_1(\mathbb{R}^3 \setminus \partial M)$  est le même générateur  $\bar{\tau}$  de  $H_1(\mathbb{R}^3 \setminus \partial M)$  et on a  $H_1(i)(\bar{\sigma}) = 2\bar{\tau}$ .

Le disque fermé  $D$  est homéomorphe à  $\mathbb{B}^2$ . D'après la Proposition 3.65, on a :

$$H_1(\mathbb{R}^3 \setminus D) \simeq H_1(\mathbb{S}^2) \simeq 0$$

Alors d'après le Théorème de Mayer-Vietoris la suite suivante est exacte en  $H_1(\mathbb{R}^3 \setminus \partial M)$  :

$$H_1(\mathbb{R}^3 \setminus M) \simeq \mathbb{Z} \oplus H_1(\mathbb{R}^3 \setminus D) \simeq 0 \xrightarrow{H_1(i)} H_1(\mathbb{R}^3 \setminus \partial M) \simeq \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_0} H_0(\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2)$$

Par exactitude on a  $\ker(\partial_0) = \text{im}(H_1(i)) \simeq 2\mathbb{Z}$ , d'où  $\partial_0(1) \neq 0$  et  $2\partial_0(1) = \partial_0(2) = 0$ , donc  $\partial_0(1)$  est un élément non-nul d'ordre 2 de  $H_0(\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2)$ . Mais d'après la Proposition 3.58  $H_0(\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2)$  est un groupe abélien libre, donc il n'existe aucun élément non-nul d'ordre 2 de  $H_0(\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2)$ , d'où une contradiction.

Donc il n'existe pas de plongement du plan projectif réel  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  dans  $\mathbb{R}^3$ . □

**Exercice 1.** Découper une bande de Möbius enlacée par un cercle le long de son cercle central.

## 5. Applications

### 5.1. Le problème du rectangle inscrit

L'origine de cette application est le *problème du carré inscrit*, énoncé par **Otto Toeplitz** en 1911 de la manière suivante :

« Toute courbe de Jordan admet-elle un carré inscrit ? »

Cette question fut l'objet de nombreuses recherches, mais elle n'est toujours pas résolue, en revanche nous sommes capables d'en démontrer une version simplifiée :

« Toute courbe de Jordan admet-elle un ~~carré~~ rectangle inscrit ? »

C'est ce que nous appellerons le *problème du rectangle inscrit*.

Par exemple dans le cas d'un cercle, on peut évidemment toujours trouver une infinité de carrés et de rectangles inscrits, le problème devient plus difficile lorsque la courbe est quelconque.

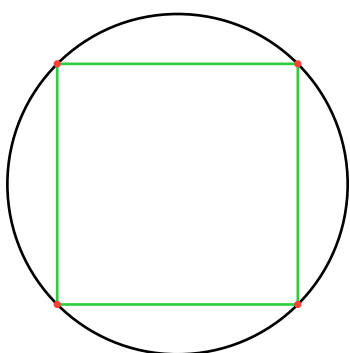


Fig. 9. – Un carré inscrit.

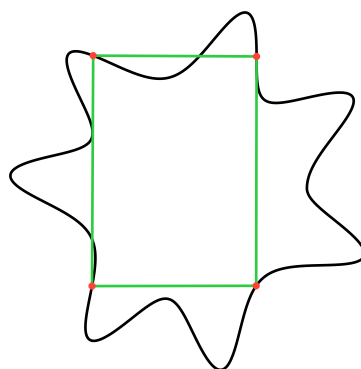


Fig. 10. – Un rectangle inscrit.

**Définition 5.1.** Soit  $C$  une partie de  $\mathbb{R}^2$ . On dit que  $C$  est une *courbe de Jordan* s'il existe une fonction continue  $\gamma_C : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  telle que :

- $C$  est l'image de  $\gamma_C$  :  $\text{im}(\gamma_C) = C$ .
- $C$  est fermée :  $\gamma_C(0) = \gamma_C(1)$ .
- $C$  est simple :  $\gamma_C$  est injective sur  $[0, 1[$ , c'est-à-dire  $\forall x, y \in [0, 1[, \gamma_C(x) = \gamma_C(y) \Rightarrow x = y$ .

**Exemple 5.2.** Le cercle  $C$  de la Fig. 9 est bien une courbe de Jordan, en effet, on pose :

$$\gamma_C : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2; (x, y) \mapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$$

Alors  $\gamma_C$  est bien continue, de plus :

- On a clairement  $\text{im}(\gamma_C) = C$ .
- On a  $\gamma_C(0) = (1, 0) = \gamma_C(1)$ .
- Pour  $x \in [0, 1[$ , on a  $2\pi x \in [0, 2\pi[$ , donc  $\gamma_C$  est injective sur  $[0, 1[$ .

**Définition 5.3.** Soit  $C$  une courbe de Jordan et  $R := (a, b, c, d)$  un rectangle de  $\mathbb{R}^2$ . On dit que le rectangle  $R$  est *inscrit dans  $C$*  si  $a, b, c, d \in C$ .

**Exemple 5.4.** Le carré  $R := ((\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2), (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2), (-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2), (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2))$  est bien inscrit dans le cercle  $C$  de la Fig. 9, en effet :

- On a  $\gamma_C(1/8) = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ , donc  $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) \in C$ .
- On a  $\gamma_C(3/8) = (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ , donc  $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) \in C$ .
- On a  $\gamma_C(5/8) = (-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ , donc  $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2) \in C$ .
- On a  $\gamma_C(7/8) = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ , donc  $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2) \in C$ .

**Théorème 5.5.** Soit  $C$  une courbe de Jordan. Alors il existe un rectangle inscrit dans  $C$ .

*Démonstration.* Pour commencer, au lieu de représenter un rectangle par 4 sommets, on le représente par 2 paires de sommets formant les diagonales :

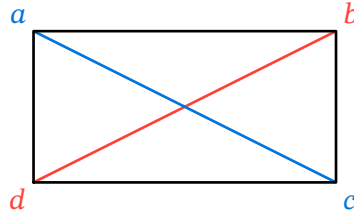


Fig. 11. – 2 paires de sommets formant un rectangle.

On décrit une diagonale par ses sommets, c'est-à-dire comme un élément du quotient  $Q$  de  $C \times C$  par la relation d'équivalence  $\sim$  où pour tout  $(u, v) \in C \times C$ , on a  $(u, v) \sim (v, u)$ .

Maintenant on définit l'application :

$$f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}; (u, v) \mapsto \left( \frac{u+v}{2}, d(u, v) \right)$$

elle décrit une surface dans  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^3$  :

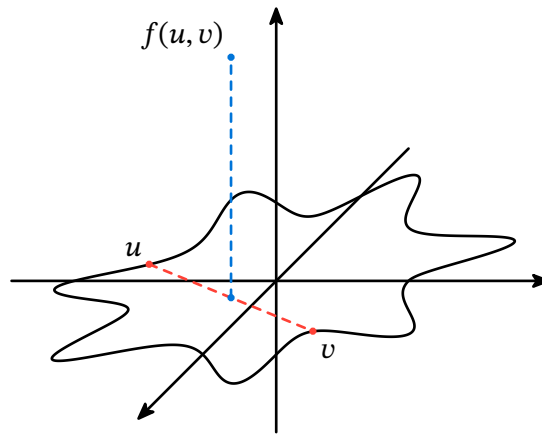


Fig. 12. – Image d'une paire par l'application  $f$ .

Pour tout  $(u, v) \in P$ , on a  $f(u, v) = f(v, u)$ , de plus  $f$  est continue, donc  $f$  passe au quotient pour  $\sim$  et induit une application continue  $\varphi : Q \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

Enfin  $p, q \in Q$  forment un rectangle si et seulement si elles ont le même milieu et la même distance, c'est-à-dire si et seulement si  $\varphi(p) = \varphi(q)$ .

Supposons par l'absurde que  $C$  n'admet pas de rectangle inscrit, alors  $\varphi$  est injective.

Puisque  $Q$  est compact et la restriction  $\varphi : Q \rightarrow \varphi(Q)$  est une bijection continue, d'après le **Théorème B** la restriction  $\varphi : Q \rightarrow \varphi(Q)$  est un homéomorphisme.

Soit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  une paramétrisation de  $C$ . On pose  $\mu := \overline{(\gamma, \gamma)} : [0, 1]^2 \rightarrow (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2) / \sim$ . Alors par définition  $\gamma(0) = \gamma(1)$ , donc pour tout  $t \in [0, 1]$ , on a  $\mu(0, t) = \mu(1, t)$  et  $\mu(t, 0) = \mu(t, 1)$ , de plus pour tout  $(a, b) \in [0, 1]^2$ , on a  $\mu(a, b) = \mu(b, a)$ .

Donc  $\mu$  passe successivement au quotient par les relations d'équivalence  $\sim_1$  définie par  $(0, t) \sim_1 (1, t)$  et  $(t, 0) \sim_1 (t, 1)$  où  $t \in [0, 1]$ , et  $\sim_2$  où pour tout  $(a, b) \in [0, 1]^2$ , on a  $(a, b) \sim_2 (b, a)$  :

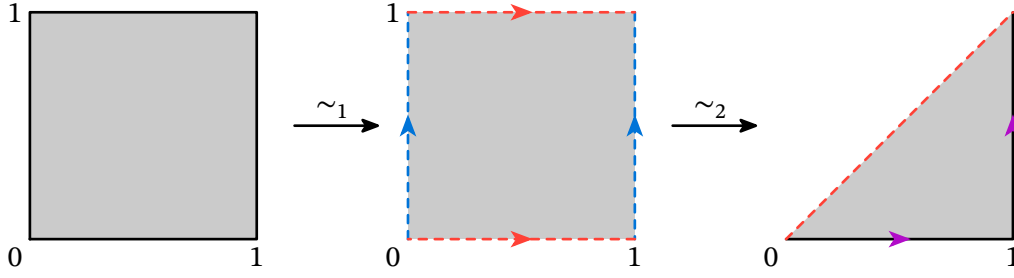


Fig. 13. – Quotient de  $[0, 1]^2$  par  $\sim_1$  et  $\sim_2$

On découpe le triangle pour recoller les flèches et obtenir une bande de Möbius  $M$  :

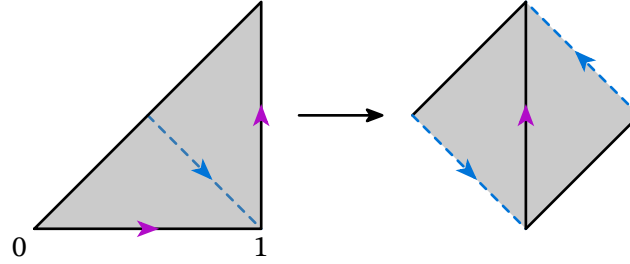


Fig. 14. – Recollement d'une bande de Möbius.

Puisque la déformation est continue,  $\mu$  induit un homéomorphisme  $\lambda : M \rightarrow Q$ . Par composition  $\varphi \circ \lambda : M \rightarrow \varphi(Q)$  est un homéomorphisme.

Il vérifie  $(\varphi \circ \lambda)(\partial M) = C \subset \mathbb{R}^3$ . En effet  $\partial M$  est identifié avec la diagonale de  $[0, 1]^2$ , donc avec les points  $(a, a) \in [0, 1]^2$ , ils sont envoyés sur  $(u, u) \in Q$  par  $\mu$ , puis sur les  $(u, 0) \in C \subset \mathbb{R}^3$  par  $\varphi$ .

D'après le théorème de Jordan  $C$  est homéomorphe à  $\mathbb{S}^1$  et  $D$  la partie de  $\mathbb{R}^2$  délimitée par  $C$  est homéomorphe à  $\mathbb{B}^2$ , d'après la Proposition 4.15 en collant  $M$  à  $D$  le long de leur bord  $\partial M = \partial D = C$ , on obtient  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ . Donc  $\varphi \circ \lambda$  induit un plongement de  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  dans  $\mathbb{R}^3$ .

Mais d'après le Théorème 4.17 il n'existe pas de plongement de  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  dans  $\mathbb{R}^3$ , d'où une contradiction.

Donc  $\varphi$  n'est pas injective et il existe un rectangle inscrit dans  $C$ . □

## Annexe

**Théorème A** (Projection stéréographique).  $\mathbb{S}^n \setminus \{N\}$  est homéomorphe à  $\mathbb{R}^n$  où  $N := (0, \dots, 0, 1)$  est le pôle nord de  $\mathbb{S}^n$ .

*Démonstration.* On définit une application :

$$p : \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n; (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto \left( \frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right)$$

elle est bien définie, continue, et son inverse est donnée par :

$$p^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{S}^n \setminus \{N\}; y := (y_1, \dots, y_n) \mapsto \left( \frac{2y_1}{\|y\|^2 + 1}, \dots, \frac{2y_n}{\|y\|^2 + 1}, \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1} \right)$$

qui est bien définie et continue. Donc  $p$  est bien un homéomorphisme entre  $\mathbb{S}^n \setminus \{N\}$  et  $\mathbb{R}^n$ .  $\square$

**Théorème B.** Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{R}^n$ ,  $L$  une partie de  $\mathbb{R}^n$  et  $f : K \rightarrow L$  une bijection continue. Alors  $f$  est un homéomorphisme.

*Démonstration.* Notons  $g := f^{-1}$ . Soit  $F$  un fermé de  $K$ . Puisque  $K$  est compact et  $F$  est fermé,  $F$  est compact. Puisque  $f$  est continue et  $F$  est compact,  $g^{-1}(F) = f(F)$  est compact. Puisque  $g^{-1}(F)$  est compact,  $g^{-1}(F)$  est fermé. Donc  $f^{-1} = g$  est continue et  $f$  est bien un homéomorphisme.  $\square$

## **Bibliographie**

- [1] Eduard Looijenga, *Algebraic Topology - an introduction*. 2010.
- [2] Allen Hatcher, *Algebraic Topology*. 2001.
- [3] Grégory Ginot, *Topologie Algébrique*. 2019.
- [4] Vaughan, *Rectangles and simple closed curves*. 1977.