Problème du rectangle inscrit

Emanuel Morille

15 Mai 2025

Table des matières

12214

1. Quelques catégories

1.1. Catégories

Définition 1.1. Une *catégorie* $\mathcal{C}$ est la donnée de :
- Une classe $\mathrm{ob}(\mathcal{C})$ dont les éléments sont appelés les *objets de* $\mathcal{C}$.
- Une classe $\hom(\mathcal{C})$ dont les éléments sont appelés les *morphismes de* $\mathcal{C}$.
  Un morphisme $f \in \hom(\mathcal{C})$ a un *domaine* $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ et un *codomaine* $Y \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$. On note alors ce morphisme $f : X \to Y$ et $\hom(X, Y)$ l'ensemble des morphismes de X dans Y.
- Pour tout objets $X, Y, Z \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$, une *composition* :
$$\circ : \hom(Y, Z) \times \hom(X, Y) \to \hom(X, Z).$$
- Pour tout objet $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$, un morphisme *identité* :
$$\mathrm{id}_X : X \to X.$$

Vérifiant les propriétés suivantes pour tout objets $X, Y, Z, T \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$:
- *Associativité* : Pour tout morphismes $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ et $h : Z \to T$, on a :
$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$
- *Identité* : Pour tout morphisme $f : X \to Y$, on a :
$$\mathrm{id}_Y \circ f = f = f \circ \mathrm{id}_X .$$

Exemple 1.2. La catégorie des groupes abéliens Ab :
- Les objets de Ab sont les groupes abéliens.
- Les morphismes de Ab sont les morphismes de groupes.

Définition 1.3. Un *groupe gradué* est un groupe G muni d'une famille de sous-groupes $(G_i)_{i\in I}$ telle que $G = \bigoplus_{i\in I} G_i$. Pour tout $i \in I$, un élément non-nul de G_i est dit *homogène de degré i*.

Définition 1.4. Soit $G \coloneqq (G_i)_{i\in I}$ et $F \coloneqq (F_i)_{i\in I}$ deux groupes gradués. Un *morphisme de groupes gradués* est un morphisme de groupes $\varphi : G \to F$ tel que pour tout $i \in I$, on a $\varphi(G_i) \subset F_i$.

Exemple 1.5. La catégorie des groupes abéliens gradués GrAb :
- Les objets de GrAb sont les groupes abéliens gradués.
- Les morphismes de GrAb sont les morphismes de groupes gradués.

Exemple 1.6. La catégorie des espaces topologiques Top :
- Les objets de Top sont les espaces topologiques.
- Les morphismes de Top sont les applications continues.

Définition 1.7. Une paire d'espaces topologiques est un espace topologique X muni d'un sous-ensemble A de X. On le note (X, A).

Définition 1.8. Soit (X, A) et (Y, B) deux paires d'espaces topologiques. Un *morphisme de paires* est une application continue $f : X \to Y$ telle que $f(A) \subset B$. On le note $f : (X, A) \to (Y, B)$.

Exemple 1.9. La catégorie des paires d'espaces topologiques Top_2 :
- Les objets de Top_2 sont les paires d'espaces topologiques.
- Les morphismes de Top_2 sont les morphismes de paires.

Exemple 1.10. Soit $(X, \leq)$ un ensemble partiellement ordonné. On définit la catégorie $\mathcal{C}(X, \leq)$:
- Les objets de $\mathcal{C}(X, \leq)$ sont les éléments de X.
- Pour tout $x, y \in X$, si $x \leq y$, on a un morphisme $f_{x,y} : x \to y$.
- Pour tout $x, y, z \in X$, si $x \leq y$ et $y \leq z$, on a bien $x \leq z$ et une composition $f_{y,z} \circ f_{x,y} = f_{x,z}$.
- Pour tout $x \in X$, on a bien $x \leq x$ et un morphisme identité $f_{x,x}$.

Définition 1.11. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. La *catégorie opposée (ou duale) de $\mathcal{C}$*, notée $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$, est la catégorie dont les objets sont les objets $\mathcal{C}$ et dont les morphismes sont les morphismes de $\mathcal{C}$ dont le domaine et le codomaine sont inversés.

Exemple 1.12. Soit $(X, \leq)$ un ensemble partiellement ordonné. Alors on a $\mathcal{C}(X, \leq)^{\mathrm{op}} = \mathcal{C}(X, \preceq)$ où pour tout $x, y \in X$, on a $x \preceq y$ si et seulement si $y \leq x$.

1.2. Foncteurs

Définition 1.13. Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories. Un *foncteur covariant F de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$* est la donnée :
- Pour tout objet $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$, d'un objet $F(X) \in \mathrm{ob}(\mathcal{D})$.
- Pour tout objets $X, Y \in \mathrm{ob}(C)$ et morphisme $f : X \to Y$, d'un morphisme $F(f) : F(X) \to F(Y)$.

Vérifiant les propriétés suivantes pour tout objets $X, Y, Z \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$:
- *Composition* : Pour tout morphismes $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$, on a :
$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f).$$
- *Identité* : On a :
$$F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}.$$

Exemple 1.14. Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories. On définit le foncteur covariant constant $C : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$:
- On prend $D \in \mathcal{D}$, pour tout objet $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$, on a $C(X) \coloneqq D$.
- Pour tout objets $X, Y \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ et morphisme $f : X \to Y$, on a $C(f) \coloneqq \mathrm{id}_D$.

Exemple 1.15. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. On définit le foncteur covariant identité $\mathrm{id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$:
- Pour tout objet $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$, on a $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}(X) \coloneqq X$.
- Pour tout objets $X, Y \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ et morphisme $f : X \to Y$, on a $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}(f) \coloneqq f$.

Définition 1.16. Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories. Un *foncteur contravariant* est un foncteur covariant de la catégorie opposée $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ vers $\mathcal{D}$.

Exemple 1.17. Soit $\mathbb{K}$ un corps et Vect la catégorie des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On définit un foncteur contravariant $F : \mathsf{Vect}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Vect}$:
- Pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E \in \mathsf{Vect}$, on a $F(E) \coloneqq E^*$.
- Pour tout $\mathbb{K}$-espaces vectoriels $E, F \in \mathsf{Vect}$ et application linéaire $u : E \to F$, on a :
$$F(u) \coloneqq u^{\mathrm{T}} : F^* \to E^*.$$

1.3. Transformations naturelles

Définition 1.18. Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ deux foncteurs covariants. Une *transformation naturelle ∂ de F vers G* est la donnée pour tout objet $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$, d'un morphisme $\partial_X : F(X) \to G(X)$, vérifiant la propriété suivante pour tout objet $Y \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ et pour tout morphisme $f : X \to Y$, on a :
$$\partial_Y \circ F(f) = G(f) \circ \partial_X$$
c'est-à-dire que le diagramme suivant est commutatif :
$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\partial_X"'] & F(Y) \arrow[d, "\partial_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G(f)"'] & G(Y) \end{tikzcd}$$

2. Homologie singulière

Définition 2.1. Une *théorie de l'homologie* sur la catégorie des paires d'espaces topologiques Top_2 dans la catégorie des groupes abéliens Ab est une suite de foncteurs $(H_n : \mathsf{Top}_2 \to \mathsf{Ab})_{n\in\mathbb{Z}}$ munie de transformations naturelles $(\partial_n : H_n(X,A) \to H_{n-1}(A) \coloneqq H_{n-1}(A,\varnothing))_{n\in\mathbb{Z}}$ vérifiant les *axiomes d'Eilenberg-Steenrod* pour toutes paires d'espaces topologiques $(X,A),(Y,B)$ et $n \in \mathbb{Z}$:

- *Dimension* : Soit P un espace constitué d'un unique point. Alors le groupe $H_n(P)$ est non-trivial si et seulement si $n = 0$.
- *Exactitude* : En notant $i : A \to X$ et $j : X \to (X,A)$ les inclusions canoniques, alors la suite suivante est exacte :
$$\ldots \to H_{n+1}(X,A) \overset{\partial_{n+1}}{\to} H_n(A) \overset{H_n(i)}{\to} H_n(X) \overset{H_n(j)}{\to} H_n(X,A) \overset{\partial_n}{\to} H_{n-1}(A) \to \ldots$$
- *Homotopie* : Soit $f_0, f_1 : (X,A) \to (Y,B)$ deux morphismes de paires homotopes. Alors les applications induites en homologie $H_n(f_0), H_n(f_1) : H_n(X,A) \to H_n(Y,B)$ sont égales.
- *Excision* : Soit U un sous-ensemble de A tel que l'adhérence de U est contenue dans l'intérieur de A. En notant $i : (X \setminus U, A \setminus U) \to (X,A)$ l'inclusion canonique. Alors l'application induite en homologie $H_n(i) : H_n(X \setminus U, A \setminus U) \to H_n(X,A)$ est un isomorphisme.

2.1. Simplexes

Définition 2.2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et A un sous-ensemble de E. On dit que A est *convexe* si :
$$\forall p,q \in A, [p,q] \coloneqq \{(1-t)p + tq \mid t \in [0,1]\} \subset A.$$

Définition 2.3. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, A un sous-ensemble de E et $p_0, \ldots, p_n$ des éléments de A. On appelle *combinaison convexe* une combinaison de la forme $t_0p_0 + \cdots + t_np_n$, telle que $t_0, \ldots, t_n \in [0,1]$ et $t_0 + \cdots + t_n = 1$.

Proposition 2.4. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, A un sous-ensemble de E et $p_0, \ldots, p_n$ des éléments de A. Si A est convexe, alors toute combinaison convexe de $p_0, \ldots, p_n$ appartient à A.

Démonstration. Soit $t_0, \ldots, t_n \in [0,1]$ tels que $t_0 + \cdots + t_n = 1$. Notons $H(n) : t_0p_0 + \cdots + t_np_n \in A$.
Pour $n = 1$. On pose $t \coloneqq t_1$, alors puisque A est convexe $t_0p_0 + t_1p_1 = (1-t)p_0 + tp_1 \in A$.
Pour $n > 1$. On suppose que $H(n-1)$ est vérifiée. Sans perte de généralité, on suppose que $t_n \neq 0$, et on pose :
$$p \coloneqq \frac{t_0}{1-t_n}p_0 + \cdots + \frac{t_{n-1}}{1-t_n}p_{n-1}$$
alors d'après $H(n-1)$ on a $p \in A$. Par convexité on a $t_0p_0 + \cdots + t_np_n = (1-t_n)p + t_np_n \in A$. □

Définition 2.5. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et A un sous-ensemble de E. On appelle *enveloppe convexe de* A, notée $[A]$, l'ensemble des combinaisons convexes d'éléments de A.

Proposition 2.6. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et A un sous-ensemble de E. Alors l'enveloppe convexe de A est le plus petit ensemble convexe contenant A.

Démonstration. Soit $p, q \in [A]$ et $t \in [0,1]$. Puisque p et q sont des combinaisons convexes d'éléments de A, la combinaison $(1-t)p + tq$ est aussi une combinaison convexe d'éléments de A, d'après la Proposition 2.4 on a $(1-t)p + tq \in [A]$. Donc l'ensemble $[A]$ est convexe.

Soit B un sous-ensemble convexe de E contenant A. Soit $x \in [A]$. Puisque x est une combinaison convexe d'éléments de $A \subset B$, d'après la Proposition 2.4 on a $x \in B$. Donc $[A] \subset B$. □

Définition 2.7. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et F une famille libre de $n+1$ éléments de E. On appelle *n-simplexe généré par F* l'enveloppe convexe de F. On dit que les éléments de F sont les *sommets* de $[F]$ et que n est la *dimension* de $[F]$.

Définition 2.8. On appelle *n-simplexe standard*, noté Δ^n, le n-simplexe généré par la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Proposition 2.9. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $F := (f_0, ..., f_n)$ une famille libre de $n+1$ éléments de E. Alors l'application :

$$\langle f_0, ..., f_n \rangle : \Delta^n \to [F]; (t_0, ..., t_n) \mapsto t_0 f_0 + ... + t_n f_n$$

est un homéomorphisme.

Démonstration. Soit $(s_0, ..., s_n), (t_0, ..., t_n) \in \Delta^n$ tels que $s_0 f_0 + ... + s_n f_n = t_0 f_0 + ... + t_n f_n$. En particulier on a $(s_0 - t_0) f_0 + ... + (s_n - t_n) f_n = 0$, et puisque la famille $(f_0, ..., f_n)$ est libre, on obtient $s_0 - t_0 = ... = s_n - t_n = 0$, c'est-à-dire $(s_0, ..., s_n) = (t_0, ..., t_n)$. Donc $\langle f_0, ..., f_n \rangle$ est injective.

Soit $x \in [F]$. Alors par définition de $[F]$, il existe $(t_0, ..., t_n) \in \Delta^n$ tels que $x := t_0 f_0 + ... + t_n f_n$. Donc $\langle f_0, ..., f_n \rangle$ est surjective.

Puisque $\langle f_0, ..., f_n \rangle$ est une application linéaire et que Δ^n est de dimension finie, $\langle f_0, ..., f_n \rangle$ est continue. De plus Δ^n est compact et $[F]$ est séparé, donc $\langle f_0, ..., f_n \rangle$ est un homéomorphisme. □

Définition 2.10. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $F := (f_0, ..., f_n)$ une famille libre de $n+1$ éléments de E et $x := t_0 f_0 + ... + t_n f_n$ un élément de $[F]$. On appelle *coordonnées barycentriques de x* les coefficients $t_0, ..., t_n \in [0, 1]$.

Définition 2.11. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, F une famille libre de $n+1$ éléments de E et G une famille non-vide d'éléments de F. On dit que $[G]$ est une *face* de $[F]$.

2.2. Chaînes

Définition 2.12. Soit X un espace topologique. On appelle *n-simplexe singulier sur X* une application continue de Δ^n dans X.

Exemple 2.13. L'application $\langle e_0, ..., e_n \rangle$ de la Proposition 2.9, où $(e_0, ..., e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$, est un n-simplexe singulier sur $\mathbb{R}^{n+1}$.

Définition 2.14. Soit X un espace topologique. On note $C_n(X)$ le groupe abélien libre engendré par les n-simplexes singuliers sur X, on appelle *n-chaîne singulière* un élément de $C_n(X)$.

Proposition 2.15. Soit X et Y deux espaces topologiques, $\sigma : \Delta^n \to X$ un n-simplexe singulier sur X et $f : X \to Y$ une application continue. Alors la composition $f \circ \sigma : \Delta^n \to Y$ est un n-simplexe singulier sur Y.

Démonstration. Puisque f est continue sur X et σ est continue sur Δ^n, par composition $f \circ \sigma$ est continue de Δ^n dans Y. Donc $f \circ \sigma$ est un n-simplexe singulier sur X. □

Définition 2.16. Soit X et Y deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application continue. On appelle *application induite par f*, notée f_*, le morphisme de groupes :

$$f_* : C_n(X) \to C_n(Y); \sum_{k=0}^{m} \lambda_k \sigma_k \mapsto \sum_{k=0}^{m} \lambda_k (f \circ \sigma_k).$$

Proposition 2.17. Soit X, Y et Z trois espaces topologiques, $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux applications continues. Alors $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque les n-chaînes singulières sont engendrées par les n-simplexes singuliers, il suffit de montrer le résultat pour un n-simplexe singulier $\sigma : \Delta^n \to X$. Alors on a :

$$(g \circ f)_*(\sigma) = (g \circ f) \circ \sigma = g \circ (f \circ \sigma) = g \circ f_*(\sigma) = g_*(f_*(\sigma))$$

□

Définition 2.18. Soit X un espace topologique et $\sigma : \Delta^n \to X$ un n-simplexe singulier sur X. On appelle *bord de σ*, noté $\mathrm{d}_n\sigma$, la $(n-1)$-chaîne singulière sur X définie par :

$$\mathrm{d}_n\sigma := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\Big(\sigma \circ \big\langle e_0, \dots, \widehat{e_k}, \dots e_n\big\rangle\Big).$$

où le symbole $\widehat{\cdot}$ signifie que l'élément est enlevé.

Définition 2.19. Soit X un espace topologique et $n \in \mathbb{N}$. On appelle *morphisme de bord*, noté d_n, le morphisme de groupes induit :

$$\mathrm{d}_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X); \sum_{k=0}^{m} \lambda_k\sigma_k \mapsto \sum_{k=0}^{m} \lambda_k \mathrm{d}_n\sigma_k.$$

Proposition 2.20. Soit X et Y deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application continue. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{d}_n f_* = f_* \mathrm{d}_n$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque les n-chaînes singulières sont engendrées par les n-simplexes singuliers, il suffit de montrer le résultat pour un n-simplexe singulier $\sigma : \Delta^n \to X$. Alors on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_n f_*(\sigma) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\Big((f \circ \sigma) \circ \big\langle e_0, \dots, \widehat{e_k}, \dots, e_n\big\rangle\Big) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\Big(f \circ \Big(\sigma \circ \big\langle e_0, \dots, \widehat{e_k}, \dots, e_n\big\rangle\Big)\Big) \\
&= f_*(\mathrm{d}_n\sigma).
\end{aligned}$$

□

Proposition 2.21. Soit X un espace topologique. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{d}_n\mathrm{d}_{n+1} = 0$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque les n-chaînes singulières sont engendrées par les n-simplexes singuliers, il suffit de montrer le résultat pour un n-simplexe singulier $\sigma : \Delta^n \to X$. Alors on a :

$$\mathrm{d}_{n+1}(\sigma) = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k\Big(\sigma \circ \big\langle e_0, \dots, \widehat{e_k}, \dots, e_n\big\rangle\Big)$$

donc en appliquant d_n, on obtient :

$$\begin{aligned}
(\mathrm{d}_n\mathrm{d}_{n+1})(\sigma) &= \mathrm{d}_n\left(\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k\Big(\sigma \circ \big\langle e_0, \dots, \widehat{e_k}, \dots, e_n\big\rangle\Big)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \mathrm{d}_n\Big(\sigma \circ \big\langle e_0, \dots, \widehat{e_k}, \dots, e_n\big\rangle\Big)) \\
&= \sum_{0 \leq k < l \leq n+1} (-1)^{k+l}\Big(\sigma \circ \big\langle e_0, \dots, \widehat{e_k}, \dots, \widehat{e_l}, \dots, e_n\big\rangle\Big) \\
&\quad + \sum_{0 \leq l < k \leq n+1} (-1)^{k+l-1}\Big(\sigma \circ \big\langle e_0, \dots, \widehat{e_l}, \dots, \widehat{e_k}, \dots, e_n\big\rangle\Big) \\
&= \sum_{0 \leq k < l \leq n+1} \Big((-1)^{k+l} + (-1)^{k+l+1}\Big)\Big(\sigma \circ \big\langle e_0, \dots, \widehat{e_k}, \dots, \widehat{e_l}, \dots, e_n\big\rangle\Big) \\
&= 0
\end{aligned}$$

car les puissances de -1 s'annulent. □

2.3. Complexes de chaînes

Définition 2.22. Soit X un espace topologique. On appelle *complexe de chaînes singulières*, noté $C_\bullet(X)$, la suite de groupes abéliens libres $(C_n(X))_{n\in\mathbb{Z}}$ munie des morphismes de bords $(\mathrm{d}_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X))_{n\in\mathbb{Z}}$, avec pour convention $C_n(X)$ trivial si $n < 0$.

Définition 2.23. Soit $C_\bullet(X)$ un complexe de chaînes singulières et $n \in \mathbb{Z}$.

- On appelle *n-cycle singulier* un élément de $Z_n(X) \coloneqq \ker(\mathrm{d}_n)$.
- On appelle *n-bord singulier* un élément de $B_n(X) \coloneqq \mathrm{im}(\mathrm{d}_{n+1})$.
- On appelle *n^e groupe d'homologie singulière* le groupe quotient $H_n(X) \coloneqq Z_n(X)/B_n(X)$.

Remarque 2.24. Soit $C_\bullet(X)$ un complexe de chaînes singulières et $n \in \mathbb{Z}$. Puisque $\mathrm{d}_n \circ d_{n+1} = 0$, on a $B_n(X) = \mathrm{im}(d_{n+1}) \subset \ker(\mathrm{d}_n) = Z_n(X)$.

Remarque 2.25. Soit $C_\bullet(X)$ un complexe de chaînes singulières et $n \in \mathbb{Z}$. Si $n < 0$, alors $Z_n(X)$ et $B_n(X)$ sont triviaux, donc $H_n(X)$ est trivial.

Définition 2.26. Soit $C_\bullet(X)$ un complexe de chaînes singulières et $n \in \mathbb{Z}$.

- On dit que $C_\bullet(X)$ est *exact en $C_n(X)$* si $H_n(X)$ est trivial, c'est-à-dire, $\mathrm{im}(d_{n+1}) = \ker(\mathrm{d}_n)$.
- On dit que $C_\bullet(X)$ est *exact* s'il est exact en tout $(C_n(X))_{n\in\mathbb{Z}}$.
- On dit que $C_\bullet(X)$ est *acyclique* s'il est exact en tout $(C_n(X))_{n\in\mathbb{Z}}$ avec $n \neq 0$.

Définition 2.27. Soit $C_\bullet(X)$ un complexe de chaînes singulières et $n \in \mathbb{Z}$. On appelle *n^e nombre de Betti de X* le rang de $H_n(X)$ s'il est fini.

2.4. Morphismes de chaînes

Définition 2.28. Soit $C_\bullet(X)$ et $C_\bullet(Y)$ deux complexes de chaînes singulières. On appelle *morphisme de chaînes*, noté $\varphi_\bullet : C_\bullet(X) \to C_\bullet(Y)$, une suite de morphismes $(\varphi_n : C_n(X) \to C_n(Y))_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\mathrm{d}_n\varphi_n = \varphi_{n-1}\mathrm{d}_n$.

Proposition 2.29. Soit $C_\bullet(X)$ et $C_\bullet(Y)$ deux complexes de chaînes singulières, $\varphi_\bullet : C_\bullet(X) \to C_\bullet(Y)$ un morphisme de chaînes. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, φ_n induit un morphisme de $H_n(X)$ dans $H_n(Y)$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$.
Soit $\sigma \in Z_n(X)$. Alors on a $\mathrm{d}_n\varphi_n(\sigma) = \varphi_{n-1}(\mathrm{d}_n\sigma) = \varphi_{n-1}(0) = 0$, donc $\varphi_n(\sigma) \in Z_n(Y)$.
Soit $\beta \in B_n(X)$. Alors il existe $\sigma \in C_{n+1}(X)$ tel que $\beta = d_{n+1}\sigma$, et on a :

$$\varphi_n(\beta) = \varphi_n(d_{n+1}\sigma) = d_{n+1}\varphi_{n+1}(\sigma)$$

donc $\varphi_n(\beta) \in B_n(Y)$.

On pose $\psi_n \coloneqq \overline{\varphi_n} : Z_n(X) \to H_n(Y)$, alors $B_n(X) \subset \ker(\psi_n)$ et d'après la propriété universelle du groupe quotient le morphisme ψ_n induit bien un morphisme de $H_n(X)$ dans $H_n(Y)$. □

Définition 2.30. Soit $C_\bullet(X)$ et $C_\bullet(Y)$ deux complexes de chaînes singulières, $\varphi_\bullet : C_\bullet(X) \to C_\bullet(Y)$ un morphisme de chaînes. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note $H_n(\varphi) : H_n(X) \to H_n(Y)$ le morphisme induit par φ_n.

Proposition 2.31. Soit $C_\bullet(X)$, $C_\bullet(Y)$ et $C_\bullet(Z)$ trois complexes de chaînes singulières, $\varphi_\bullet : C_\bullet(X) \to C_\bullet(Y)$ et $\psi_\bullet : C_\bullet(Y) \to C_\bullet(Z)$ deux morphismes de chaînes. Alors la composition $\psi_\bullet \circ \varphi_\bullet : C_\bullet(X) \to C_\bullet(Z)$ est un morphisme de chaînes.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors on a :

$$\mathrm{d}_n(\psi_n \circ \varphi_n) = \psi_{n-1}\mathrm{d}_n\varphi_n = (\psi_{n-1} \circ \varphi_{n-1})\mathrm{d}_n.$$

Donc $(\psi_n \circ \varphi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est bien un morphisme de chaînes. □

Proposition 2.32. Soit $C_\bullet(X)$ et $C_\bullet(Y)$ deux complexes de chaînes singulières, et $f : X \to Y$ une application continue. Alors l'application induite f_* détermine un morphisme de chaînes.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on considère le morphisme défini par $\varphi_n \coloneqq f_*$. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors d'après la Proposition 2.20 on a :

$$\mathrm{d}_n\varphi_n = \mathrm{d}_n f_* = f_*\mathrm{d}_n = \varphi_{n-1}\mathrm{d}_n.$$

Donc $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est bien un morphisme de chaînes. □

Définition 2.33. Soit $C_\bullet(X)$ et $C_\bullet(Y)$ deux complexes de chaînes singulières, et $f : X \to Y$ une application continue. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note $H_n(f) : H_n(X) \to H_n(Y)$ le morphisme induit par le morphisme de chaînes déterminé par f_*.

2.5. Paires d'espaces topologiques

Proposition 2.34. Soit (X, A) une paire d'espaces topologiques. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, d_n induit un morphisme $\overline{\mathrm{d}}_n$ de $C_n(X)/C_n(A)$ dans $C_{n-1}(X)/C_{n-1}(A)$ tel que $\overline{\mathrm{d}}_n\overline{\mathrm{d}}_{n+1} = 0$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors on a $C_n(A) \subset C_n(X)$, on peut donc former le quotient $C_n(X)/C_n(A)$.

On pose $\delta_n \coloneqq \overline{\mathrm{d}_n} : C_n(X) \to C_{n-1}(X)/C_{n-1}(A)$, alors $C_n(A) \subset \ker(\delta_n)$ et d'après la propriété universelle du groupe quotient δ_n induit bien un morphisme $\overline{\mathrm{d}}_n$ de $C_n(X)/C_n(A)$ dans $C_{n-1}(X)/C_{n-1}(A)$. Enfin puisque $\mathrm{d}_n\mathrm{d}_{n+1} = 0$, on a $\overline{\mathrm{d}}_n\overline{\mathrm{d}}_{n+1} = \overline{\mathrm{d}_n\mathrm{d}_{n+1}} = 0$. □

Remarque 2.35. Soit (X, A) une paire d'espaces topologiques. La suite $(C_n(X)/C_n(A))_{n\in\mathbb{Z}}$ munie des morphismes de bords induits $\left(\overline{\mathrm{d}}_n : C_n(X)/C_n(A) \to C_{n-1}(X)/C_{n-1}(A)\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ forme un complexe de chaînes singulières.

Définition 2.36. Soit (X, A) une paire d'espaces topologiques. On appelle *complexe de chaînes singulières de la paire* (X, A) le complexe de chaînes singulières quotient $C_\bullet(X, A) \coloneqq C_\bullet(X)/C_\bullet(A)$.

Remarque 2.37. Dans le cas de la paire d'espaces topologiques $(X, \varnothing)$, on trouve $C_\bullet(X, \varnothing) \simeq C_\bullet(X)$ et $H_\bullet(X, \varnothing) \simeq H_\bullet(X)$.

Proposition 2.38. Soit $C_\bullet(X, A)$ et $C_\bullet(Y, B)$ deux complexes de chaînes singulières, et $f : (X, A) \to (Y, B)$ un morphisme de paires. Alors l'application induite $f_* : C_n(X) \to C_n(Y)$ détermine un morphisme de chaînes.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on pose $\varphi_n \coloneqq \overline{f_*} : C_n(X) \to C_n(Y, B)$, alors puisque $f(A) \subset B$, on en déduit $f_*(C_n(A)) \subset \ker(\varphi_n)$ et d'après la propriété universelle du groupe quotient φ_n induit un morphisme $\overline{\varphi_n}$ de $C_n(X, A)$ dans $C_n(Y, B)$.

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors d'après la Proposition 2.20 puisque $\mathrm{d}_n f_* = f_*\mathrm{d}_n$, on a $\overline{\mathrm{d}_n\varphi_n} = \overline{\varphi_{n-1}\mathrm{d}_n}$. Donc φ_n est bien un morphisme de chaînes. □

Définition 2.39. Soit $C_\bullet(X, A)$ et $C_\bullet(Y, B)$ deux complexes de chaînes singulières, et $f : (X, A) \to (Y, B)$ un morphisme de paires. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note $H_n(f) : H_n(X, A) \to H_n(Y, B)$ le morphisme induit par le morphisme de chaînes déterminé par f_*.

Théorème 2.40. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le n^{e} groupe d'homologie singulière des paires d'espaces topologiques $H_n : \mathsf{Top}_2 \to \mathsf{Ab}$ est un foncteur.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$.
- Soit (X, A) une paire d'espaces topologiques. Alors le n^{e} groupe d'homologie singulière $H_n(X, A)$ est bien un groupe abélien libre.
- Soit (X, A) et (Y, B) deux paires d'espaces topologiques, et $f : (X, A) \to (Y, B)$ un morphisme de paires. Alors l'application $H_n(f) : H_n(X, A) \to H_n(Y, B)$ est un bien morphisme de groupes.

Soit (X,A), (Y,B) et (Z,C) trois paires d'espaces topologiques.

- Soit $f : (X,A) \to (Y,B)$ et $g : (Y,B) \to (Z,C)$ deux morphismes de paires. Alors la composition $g \circ f : (X,A) \to (Z,C)$ est un morphisme de paires qui passe au quotient et vérifie :
$$H_n(g \circ f) = H_n(g) \circ H_n(f).$$
- On considère $\mathrm{id}_{(X,A)}$. Soit $\sigma : \Delta^n \to (X,A)$ un n-simplexe singulier, alors :
$$\mathrm{id}_{(X,A)*}(\sigma) = \mathrm{id}_{(X,A)} \circ \sigma = \sigma$$
puisque les n-chaînes singulières sont engendrées par les n-simplexes singuliers, on en déduit que $\mathrm{id}_{(X,A)*} = \mathrm{id}_{C_n(X,A)}$, par passage au quotient on a :
$$H_n\big(\mathrm{id}_{(X,A)}\big) = \mathrm{id}_{H_n(X,A)}.$$

Donc H_n est un foncteur. □

Proposition 2.41. Soit $C_\bullet(X,A)$ un complexe de chaînes singulières. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, les groupes $H_n(X,A)$ et $\mathrm{d}_n^{-1}(C_{n-1}(A))/(\mathrm{d}_{n+1}(C_{n+1}(X)) + C_n(A))$ sont isomorphes.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$.
Soit $\tau \in \mathrm{d}_{n+1}(C_{n+1}(X)) + C_n(A)$, il existe $\sigma_1 \in C_{n+1}(X)$ et $\sigma_2 \in C_n(A)$ tels que $\tau = \mathrm{d}_{n+1}\sigma_1 + \sigma_2$. Alors d'après la Proposition 2.21 on a :
$$\mathrm{d}_n\tau = \mathrm{d}_n(\mathrm{d}_{n+1}\sigma_1 + \sigma_2) = (\mathrm{d}_n\mathrm{d}_{n+1})\sigma_1 + \mathrm{d}_n\sigma_2 = \mathrm{d}_n\sigma_2$$
donc $\tau \in \mathrm{d}_n^{-1}(C_{n-1}(A))$, on peut donc former le quotient $\mathrm{d}_n^{-1}(C_{n-1}(A))/(\mathrm{d}_{n+1}(C_{n+1}(X)) + C_n(A))$.

On pose $\varphi : \mathrm{d}_n^{-1}(C_{n-1}(A)) \to H_n(X,A); \sigma \mapsto \overline{\sigma}$, qui est bien un morphisme de groupes.

- Soit $\eta \in H_n(X,A)$, il existe $\zeta \in Z_n(X,A)$ et $z \in C_n(X)$ tels que $\eta = \overline{\zeta}$ et $\zeta = \overline{z}$.
Puisque $\overline{\mathrm{d}_n z} = \overline{\mathrm{d}}_n\zeta = 0 \in C_n(X,A)$, il existe $\sigma \in C_{n-1}(A)$ tel que $\mathrm{d}_n z = \sigma$, d'où $z \in \mathrm{d}_n^{-1}(C_{n-1}(A))$.
Donc $\varphi(z) = \eta$ et φ est surjectif.
- Soit $\sigma \in \ker(\varphi)$. Puisque $\overline{\tau} = 0 \in H_n(X,A)$, il existe $b \in B_n(X,A)$ tel que $\overline{\tau} = \overline{b}$. C'est-à-dire qu'il existe $c \in C_{n+1}(X,A)$ et $\sigma \in C_{n+1}(X)$ tels que $b = \overline{\mathrm{d}}_{n+1}c$ et $c = \overline{\sigma}$.
On peut écrire $\overline{\tau} = \overline{\mathrm{d}}_{n+1}\overline{\sigma} = \overline{d_{n+1}\sigma} \in C_n(X,A)$, donc $\tau \in \mathrm{d}_{n+1}(C_{n+1}(X)) + C_n(A)$.

  Soit $\tau \in \mathrm{d}_{n+1}(C_{n+1}(X)) + C_n(A)$, il existe $\sigma_1 \in C_{n+1}(X)$ et $\sigma_2 \in C_n(A)$ tels que $\tau = \mathrm{d}_{n+1}\sigma_1 + \sigma_2$. Alors $\overline{\tau} = \overline{\mathrm{d}_{n+1}\sigma_1} = \overline{\mathrm{d}}_{n+1}\overline{\sigma} \in C_n(X,A)$, d'où $\overline{\tau} \in B_n(X,A)$ et $\overline{\tau} = 0 \in H_n(X,A)$, donc $\tau \in \ker(\varphi)$.

D'après le premier théorème d'isomorphisme φ induit un isomorphisme entre les groupes $H_n(X,A)$ et $\mathrm{d}_n^{-1}(C_{n-1}(A))/(\mathrm{d}_{n+1}(C_{n+1}(X)) + C_n(A))$. □

Proposition 2.42. Soit $C_\bullet(X,A)$ un complexe de chaînes singulières. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, d_n induit un morphisme ∂_n de $H_n(X,A)$ dans $H_{n-1}(A)$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$. D'après la Proposition 2.41 il existe un isomorphisme :
$$\psi : H_n(X,A) \to \mathrm{d}_n^{-1}(C_{n-1}(A))/(\mathrm{d}_{n+1}(C_{n+1}(X)) + C_n(A)).$$
Pour tout $\eta \in H_n(X,A)$, il existe $\tau \in \mathrm{d}_n^{-1}(C_{n-1}(A))$ tel que $\overline{\tau} = \psi(\eta)$. Alors d'après la Proposition 2.21 on a $\mathrm{d}_{n-1}\mathrm{d}_n\tau = 0$, donc $\mathrm{d}_n\tau \in Z_{n-1}(A)$. On pose $\partial_n\eta \coloneqq \overline{\mathrm{d}_n\tau} \in H_{n-1}(A)$.

Supposons que $\eta = 0$, c'est-à-dire $\tau \in \mathrm{d}_{n+1}(C_{n+1}(X)) + C_n(A)$, alors $\mathrm{d}_n\tau \in B_n(A)$, d'où $\partial_n\eta = 0$. Donc ∂_n est un morphisme bien défini. □

Théorème 2.43. Soit $C_\bullet(X,A)$ et $C_\bullet(Y,B)$ deux complexes de chaînes singulières. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le morphisme ∂_n est une transformation naturelle, c'est-à-dire, pour tout morphisme de paires $f : (X,A) \to (Y,B)$, on a :
$$\partial_n H_n(f) = H_{n-1}(f)\partial_n.$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Puisque ∂_n est induit par d_n, d'après la Proposition 2.20 on a bien :

$$\partial_n H_n(f) = \overline{\mathrm{d}_n f_*} = \overline{f_* \mathrm{d}_n} = H_{n-1}(f)\partial_n.$$

Donc ∂_n est bien une transformation naturelle. TODO. □

Théorème 2.44. La suite des n^{e} groupe d'homologie singulière des paires d'espaces topologiques $(H_n : \mathsf{Top}_2 \to \mathsf{Ab})_{n\in\mathbb{Z}}$ munie des morphismes $(\partial_n : H_n(X,A) \to H_{n-1}(A))_{n\in\mathbb{Z}}$ est une théorie de l'homogie vérifiant les axiomes d'Eilenberg-Steenrod.

Démonstration de l'axiome de dimension. Si $n < 0$, on a clairement $H_n(P) \simeq \{0\}$.
Si $n \geq 0$, il existe un unique n-simplexe singulier $\sigma_n : \Delta^n \to P$, alors on a :

$$\partial_n \sigma_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \text{ ou } n \text{ est impair} \\ \sigma_{n-1} & \text{si } n \neq 0 \text{ et } n \text{ est pair} \end{cases}$$

dans le cas $n = 0$, alors $H_0(P) = \langle \sigma_0 \rangle / \{0\} \simeq \mathbb{Z}$,
dans le cas $n \neq 0$ et n est impair, alors $H_n(P) = \langle \sigma_n \rangle / \langle \sigma_n \rangle \simeq \{0\}$,
dans le cas $n \neq 0$ et n est pair, alors $H_n(P) = \{0\}/\{0\} \simeq \{0\}$. □

Démonstration de l'axiome d'exactitude. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

- Soit $\alpha \in \ker(H_n(i))$, il existe $\tau \in C_n(A)$ tel que $\alpha = \overline{\tau}$.
  Puisque $\alpha \in \ker(H_n(i))$, on a $\tau \in B_n(X)$, il existe $\sigma \in C_{n+1}(X)$ tel que $\tau = d_{n+1}\sigma$.
  Puisque $\overline{d}_{n+1}\overline{\sigma} = \overline{d_{n+1}\sigma} = \overline{\tau} = 0 \in C_n(X,A)$, on a $\overline{\sigma} \in Z_n(X,A)$.
  Alors d'après la définition de ∂_{n+1}, on a $\partial_{n+1}(\overline{\sigma}) = \alpha$.
- TODO.
- TODO.

□

Démonstration de l'axiome d'homotopie. TODO. □

Démonstration de l'axiome d'excision. TODO. □

Théorème 2.45 (Théorème de Mayer-Vietoris)**.** Soit U et V deux ouverts d'un espace topologique. En notant $i_U : U \cap V \to U$, $i_V : U \cap V \to V$, $j_U : U \to U \cup V$ et $j_V : V \to U \cup V$ les inclusions canoniques, alors la suite suivante est exacte :

$$\ldots \to H_{n+1}(U \cup V) \overset{\partial_{n+1}}{\to} H_n(U \cap V) \overset{(-i_{U*}, i_{V*})}{\to} H_n(U) \oplus H_n(V) \overset{j_{U*}+j_{V*}}{\to} H_n(U \cup V) \to \ldots$$

Démonstration. TODO. □

Bibliographie

[1] Eduard Looijenga, *Algebraic Topology - an introduction*. 2010.