

# Calcul intégral et applications

## Table des matières

<b>1. Intégrale de Lebesgue et intégrale de Riemann</b>	<b>2</b>
<b>2. Théorèmes</b>	<b>2</b>
2.1. Convergence monotone (ou Beppo-Levi) . . . . .	2
2.2. Lemme de Fatou . . . . .	2
2.3. Convergence dominée . . . . .	2
2.4. Continuité et dérivabilité sous le signe intégral . . . . .	3
2.5. Fubini . . . . .	3

# 1. Intégrale de Lebesgue et intégrale de Riemann

**Théorème 1.1.** Soit  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$  et  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. Alors  $f$  est **Lebesgue-intégrable** si et seulement si  $f$  est **localement Riemann-intégrable** et que son intégrale impropre est **absolument convergente** sur  $]a, b[$ . Dans ce cas

$$\int_{]a,b[} f(x) d\lambda(x) = \int_a^b f(x) dx.$$

## 2. Théorèmes

### 2.1. Convergence monotone (ou Beppo-Levi)

**Théorème 2.1.** Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions **mesurables positives**. Si  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite **croissante**, alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$  est mesurable positive et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n d\mu = \int \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu.$$

**Corollaire 2.2.** Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions **mesurables positives**. Alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E \sum_{n=0}^{+\infty} f_n d\mu.$$

### 2.2. Lemme de Fatou

**Théorème 2.3.** Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions **mesurables positives**. Alors

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n d\mu \geq \int_E \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu.$$

**Corollaire 2.4.** Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions **mesurables positives**. S'il existe une fonction positive  $g$  **intégrable** telle que pour tout  $x \in E, \forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) \leq g(x)$  alors

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n d\mu \leq \int_E \limsup_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu.$$

### 2.3. Convergence dominée

**Théorème 2.5.** Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $f$  des fonctions **mesurables**. Si

(1) pour  $\mu$ -presque tout  $x \in E, \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$ ,

(2) il existe une fonction  $g$  **intégrable** avec pour  $\mu$ -presque tout  $x \in E, \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x)| \leq g(x)$ ,

alors  $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$  et  $f$  sont **intégrables** et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n d\mu = \int \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu.$$

**Corollaire 2.6.** Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions **mesurables**. Si  $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_E |f_n| d\mu$  est finie, alors  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  est **définie  $\mu$ -presque partout et intégrable**, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E \sum_{n=0}^{+\infty} f_n d\mu.$$

## 2.4. Continuité et dérivabilité sous le signe intégral

**Théorème 2.7.** Soit  $f : E \times \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  une fonction et  $y_0 \in \mathbb{R}$ . S'il existe une fonction  $g$  **intégrable** telle que

- (1) pour tout  $y \in \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto f(x, y)$  est **mesurable**,
- (2) pour  $\mu$ -presque tout  $x \in E$ ,  $y \mapsto f(x, y)$  est **continue en**  $y_0$ ,
- (3) pour  $\mu$ -presque tout  $x \in E$  et pour tout  $y \in \mathbb{R}$ ,  $|f(x, y)| \leq g(x)$ ,

alors la fonction  $y \mapsto \int_E f(x, y) d\mu(x)$  est **définie sur**  $\mathbb{R}$  et **continue en**  $y_0$ .

**Théorème 2.8.** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $f : E \times I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. S'il existe une fonction  $g$  **intégrable** telle que

- (1) pour tout  $y \in \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto f(x, y)$  est **intégrable**,
- (2) pour  $\mu$ -presque tout  $x \in E$ ,  $y \mapsto f(x, y)$  est **dérivable sur**  $I$ ,
- (3) pour  $\mu$ -presque tout  $x \in E$  et pour tout  $y \in \mathbb{R}$ ,  $|\partial_y f(x, y)| \leq g(x)$ ,

alors la fonction  $F : y \mapsto \int_E f(x, y) d\mu(x)$  est **définie** et **dérivable sur**  $I$  avec

$$\forall y \in I, F'(y) = \int_E \partial_y f(x, y) d\mu(x).$$

## 2.5. Fubini

**Théorème 2.9.** Soit  $\mu$  et  $\nu$  deux mesures  $\sigma$ -**finies**, et  $f : E \times F \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  une fonction **mesurable positive**. Alors

- (1) Les fonctions  $x \mapsto \int_F f(x, y) d\nu(y)$  et  $y \mapsto \int_E f(x, y) d\mu(x)$  sont **mesurables**,
- (2) on a l'égalité

$$\int_{E \times F} f(x, y) d(\mu \otimes \nu)(x, y) = \int_E \int_F f(x, y) d\nu(y) d\mu(x) = \int_F \int_E f(x, y) d\mu(x) d\nu(y).$$

**Théorème 2.10.** Soit  $\mu$  et  $\nu$  deux mesures  $\sigma$ -**finies**, et  $f : E \times F \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction **intégrable**.

- (1) pour  $\mu$ -presque tout  $x \in E$ ,  $y \mapsto f(x, y)$  et pour  $\mu$ -presque tout  $y \in F$ ,  $x \mapsto f(x, y)$  sont **intégrables**,
- (2) Les fonctions  $x \mapsto \int_F f(x, y) d\nu(y)$  et  $y \mapsto \int_E f(x, y) d\mu(x)$  sont **intégrables**,
- (3) on a l'égalité

$$\int_{E \times F} f(x, y) d(\mu \otimes \nu)(x, y) = \int_E \int_F f(x, y) d\nu(y) d\mu(x) = \int_F \int_E f(x, y) d\mu(x) d\nu(y).$$