Problème du rectangle inscrit

Emanuel Morille

17 Mai 2025

Table des matières

14559

1. Bases de théorie des catégories

1.1. Catégories

Définition 1.1. Une *catégorie* $\mathcal{C}$ est la donnée de :
- Une classe $\mathrm{ob}(\mathcal{C})$ dont les éléments sont appelés les *objets de* $\mathcal{C}$.
- Une classe $\hom(\mathcal{C})$ dont les éléments sont appelés les *morphismes de* $\mathcal{C}$.
  Un morphisme $f \in \hom(\mathcal{C})$ a un *domaine* $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ et un *codomaine* $Y \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$. On note alors ce morphisme $f : X \to Y$ et $\hom(X, Y)$ l'ensemble des morphismes de X dans Y.
- Pour tout objets $X, Y, Z \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$, une *composition* :
$$\circ : \hom(Y, Z) \times \hom(X, Y) \to \hom(X, Z).$$
- Pour tout objet $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$, un morphisme *identité* :
$$\mathrm{id}_X : X \to X.$$

Vérifiant les propriétés suivantes pour tout objets $X, Y, Z, T \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$:
- *Associativité* : Pour tout morphismes $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ et $h : Z \to T$, on a :
$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$
- *Identité* : Pour tout morphisme $f : X \to Y$, on a :
$$\mathrm{id}_Y \circ f = f = f \circ \mathrm{id}_X .$$

Exemple 1.2. La catégorie Ab des groupes abéliens :
- Les objets de Ab sont les groupes abéliens.
- Les morphismes de Ab sont les morphismes de groupes.

Exemple 1.3. Un *groupe gradué* est un groupe G muni d'une famille de sous-groupes $(G_i)_{i\in I}$ telle que $G = \bigoplus_{i\in I} G_i$. Pour tout $i \in I$, un élément non-nul de G_i est dit *homogène de degré i*.

Soit $G \coloneqq (G_i)_{i\in I}$ et $H \coloneqq (H_i)_{i\in I}$ deux groupes gradués. Un *morphisme de groupes gradués* est un morphisme de groupes $\varphi : G \to H$ tel que pour tout $i \in I$, on a $\varphi(G_i) \subset H_i$.

On définit ainsi la catégorie GrAb des groupes abéliens gradués :
- Les objets de GrAb sont les groupes abéliens gradués.
- Les morphismes de GrAb sont les morphismes de groupes gradués.

Exemple 1.4. La catégorie Top des espaces topologiques :
- Les objets de Top sont les espaces topologiques.
- Les morphismes de Top sont les applications continues.

Exemple 1.5. Une paire d'espaces topologiques est un espace topologique X muni d'une partie A de lui-même. On la note (X, A).

Soit (X, A) et (Y, B) deux paires d'espaces topologiques. Un *morphisme de paires* est une application continue $f : X \to Y$ telle que $f(A) \subset B$. On le note $f : (X, A) \to (Y, B)$.

On définit ainsi catégorie Top_2 des paires d'espaces topologiques :
- Les objets de Top_2 sont les paires d'espaces topologiques.
- Les morphismes de Top_2 sont les morphismes de paires.

Exemple 1.6. Soit $(X, \leq)$ un ensemble partiellement ordonné. On définit la catégorie $\mathcal{C}(X, \leq)$:
- Les objets de $\mathcal{C}(X, \leq)$ sont les éléments de X.
- Pour tout $x, y \in X$, si $x \leq y$, on a un morphisme $f_{x,y} : x \to y$.
- Pour tout $x, y, z \in X$, si $x \leq y$ et $y \leq z$, on a bien $x \leq z$ et une composition $f_{y,z} \circ f_{x,y} = f_{x,z}$.
- Pour tout $x \in X$, on a bien $x \leq x$ et un morphisme identité $f_{x,x}$.

Définition 1.7. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. La *catégorie opposée (ou duale) de* $\mathcal{C}$, notée $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$, est la catégorie dont les objets sont les objets $\mathcal{C}$ et dont les morphismes sont les morphismes de $\mathcal{C}$ dont le domaine et le codomaine sont inversés.

Exemple 1.8. Soit $(X, \leq)$ un ensemble partiellement ordonné. Alors on a $\mathcal{C}(X, \leq)^{\mathrm{op}} = \mathcal{C}(X, \preceq)$ où pour tout $x, y \in X$, on a $x \preceq y$ si et seulement si $y \leq x$.

1.2. Foncteurs

Définition 1.9. Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories. Un *foncteur (covariant) F de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$* est la donnée :
- Pour tout objet $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$, d'un objet $F(X) \in \mathrm{ob}(\mathcal{D})$.
- Pour tout objets $X, Y \in \mathrm{ob}(C)$ et morphisme $f : X \to Y$, d'un morphisme $F(f) : F(X) \to F(Y)$.

Vérifiant les propriétés suivantes pour tout objets $X, Y, Z \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$:
- *Composition* : Pour tout morphismes $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$, on a :
$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f).$$
- *Identité* : On a :
$$F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}.$$

Exemple 1.10. Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories. On définit le foncteur covariant constant $C : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$:
- On prend $D \in \mathcal{D}$, pour tout objet $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$, on a $C(X) \coloneqq D$.
- Pour tout objets $X, Y \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ et morphisme $f : X \to Y$, on a $C(f) \coloneqq \mathrm{id}_D$.

Exemple 1.11. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. On définit le foncteur covariant identité $\mathrm{id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$:
- Pour tout objet $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$, on a $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}(X) \coloneqq X$.
- Pour tout objets $X, Y \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ et morphisme $f : X \to Y$, on a $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}(f) \coloneqq f$.

Définition 1.12. Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories. Un *foncteur contravariant* est un foncteur covariant de la catégorie opposée $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ vers $\mathcal{D}$.

Exemple 1.13. Soit $\mathbb{K}$ un corps et Vect la catégorie des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On définit un foncteur contravariant $F : \mathsf{Vect}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Vect}$:
- Pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E \in \mathsf{Vect}$, on a $F(E) \coloneqq E^*$.
- Pour tout $\mathbb{K}$-espaces vectoriels $E, F \in \mathsf{Vect}$ et application linéaire $u : E \to F$, on a :
$$F(u) \coloneqq u^{\mathrm{T}} : F^* \to E^*.$$

1.3. Transformations naturelles

Définition 1.14. Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ deux foncteurs covariants. Une *transformation naturelle ∂ de F vers G* est la donnée pour tout objet $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$, d'un morphisme $\partial_X : F(X) \to G(X)$, vérifiant la propriété suivante pour tout objet $Y \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ et pour tout morphisme $f : X \to Y$, on a :
$$\partial_Y \circ F(f) = G(f) \circ \partial_X$$
c'est-à-dire que le diagramme suivant est commutatif :
$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\partial_X"'] & F(Y) \arrow[d, "\partial_Y"] \\
G(X) \arrow[r, "G(f)"'] & G(Y)
\end{tikzcd}$$

2. Catégorie Comp des complexes de chaînes

2.1. Complexes de chaînes

Définition 2.1. On appelle *complexe de chaînes*, noté $C_\bullet$, une suite de groupes abéliens $(C_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ munie de morphismes de groupes $(\mathrm{d}_n : C_n \to C_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\mathrm{d}_n\mathrm{d}_{n+1} = 0$.

Définition 2.2. Soit $C_\bullet$ un complexe de chaînes et $n \in \mathbb{Z}$.
- On appelle *n-cycle* un élément de $Z_n(C_\bullet) \coloneqq \ker(\mathrm{d}_n)$.
- On appelle *n-bord* un élément de $B_n(C_\bullet) \coloneqq \mathrm{im}(\mathrm{d}_{n+1})$.

Proposition 2.3. Soit $C_\bullet$ un complexe de chaînes. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $B_n(C_\bullet) \subset Z_n(C_\bullet)$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors $\mathrm{d}_n\mathrm{d}_{n+1} = 0$, donc $B_n(C_\bullet) = \mathrm{im}(\mathrm{d}_{n+1}) \subset \ker(\mathrm{d}_n) = Z_n(C_\bullet)$. □

Définition 2.4. Soit $C_\bullet$ un complexe de chaînes et $n \in \mathbb{Z}$.
- On appelle n^e *groupe d'homologie* le groupe quotient $H_n(C_\bullet) \coloneqq Z_n(C_\bullet)/B_n(C_\bullet)$.
- On appelle *homologie* la suite des groupes $H_\bullet(C_\bullet) \coloneqq (H_n(C_\bullet))_{n\in\mathbb{Z}}$.

Définition 2.5. Soit $C_\bullet$ un complexe de chaînes et $n \in \mathbb{Z}$.
- On dit que $C_\bullet$ est *exact en* C_n si $H_n(C_\bullet)$ est trivial, c'est-à-dire, $\mathrm{im}(\mathrm{d}_{n+1}) = \ker(\mathrm{d}_n)$.
- On dit que $C_\bullet$ est *exact* si pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il est exact en C_n.
- On dit que $C_\bullet$ est *acyclique* si pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, il est exact en C_n.

2.2. Morphismes de chaînes

Définition 2.6. Soit $C_\bullet$ et $D_\bullet$ deux complexes de chaînes. On appelle *morphisme de chaînes*, noté $\varphi_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$, une suite de morphismes de groupes $(\varphi_n : C_n \to D_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\mathrm{d}_n\varphi_n = \varphi_{n-1}\mathrm{d}_n$.

Proposition 2.7. Soit $C_\bullet$, $D_\bullet$ et $E_\bullet$ trois complexes de chaînes, $\varphi_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ et $\psi_\bullet : D_\bullet \to E_\bullet$ deux morphismes de chaînes. Alors la composition $\psi_\bullet \circ \varphi_\bullet : C_\bullet \to E_\bullet$ est un morphisme de chaînes.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors on a :

$$\mathrm{d}_n(\psi_n \circ \varphi_n) = \psi_{n-1}\mathrm{d}_n\varphi_n = (\psi_{n-1} \circ \varphi_{n-1})\mathrm{d}_n.$$

Donc $(\psi_n \circ \varphi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est bien un morphisme de chaînes. □

Proposition 2.8. Soit $C_\bullet$ un complexe de chaînes. Alors le morphisme identité $\mathrm{id}_{C_\bullet} : C_\bullet \to C_\bullet$ est un morphisme de chaînes.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors on a :

$$\mathrm{d}_n \,\mathrm{id}_n = \mathrm{d}_n = \mathrm{id}_{n-1}\, \mathrm{d}_n.$$

Donc $\left(\mathrm{id}_{C_n}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est bien un morphisme de chaînes. □

Proposition 2.9. Soit $C_\bullet$ et $D_\bullet$ deux complexes de chaînes, $\varphi_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ un morphisme de chaînes. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, φ_n induit un morphisme de groupes de $H_n(C_\bullet)$ dans $H_n(D_\bullet)$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$.
Soit $z \in Z_n(C_\bullet)$. Alors on a $\mathrm{d}_n\varphi_n(z) = \varphi_{n-1}(\mathrm{d}_n z) = \varphi_{n-1}(0) = 0$, donc $\varphi_n(z) \in Z_n(D_\bullet)$.
Soit $b \in B_n(C_\bullet)$. Alors il existe $c \in C_{n+1}$ tel que $b = \mathrm{d}_{n+1}c$, et on a :

$$\varphi_n(b) = \varphi_n(\mathrm{d}_{n+1}c) = \mathrm{d}_{n+1}\varphi_{n+1}(c)$$

donc $\varphi_n(b) \in B_n(D_\bullet)$.

On considère $\overline{\varphi_n} : Z_n(C_\bullet) \to H_n(D_\bullet)$, alors $B_n(C_\bullet) \subset \ker\left(\overline{\varphi_n}\right)$ et d'après la propriété universelle du groupe quotient le morphisme $\overline{\varphi_n}$ induit bien un morphisme de $H_n(C_\bullet)$ dans $H_n(D_\bullet)$. □

Définition 2.10. Soit $C_\bullet$ et $D_\bullet$ deux complexes de chaînes, $\varphi_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ un morphisme de chaînes. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note $H_n(\varphi) : H_n(C_\bullet) \to H_n(D_\bullet)$ le morphisme de groupes induit par φ_n.

2.3. La catégorie Comp

Définition 2.11. On appelle Comp la catégorie des complexes de chaînes :

- Les objets de Comp sont les complexes de chaînes.
- Les morphismes de Comp sont les morphismes de chaînes.
- La composition de Comp découle de la Proposition 2.7.
- Le morphisme identité de Comp découle de Proposition 2.8.

Théorème 2.12. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le n^{e} groupe d'homologie H_n est un foncteur de Comp vers Ab.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

- Soit $C_\bullet \in \operatorname{ob}(\mathsf{Comp})$ un complexe de chaînes. Alors le n^{e} groupe d'homologie $H_n(C_\bullet)$ est bien un groupe abélien.
- Soit $C_\bullet, D_\bullet \in \operatorname{ob}(\mathsf{Comp})$ deux complexes de chaînes et $\varphi_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ un morphisme de chaînes. Alors le morphisme induit $H_n(\varphi) : H_n(C_\bullet) \to H_n(D_\bullet)$ est bien un morphisme de groupes.

La propriété de composition découle de la Proposition 2.7 et la propriété d'identité découle de la Proposition 2.8, donc H_n est bien un foncteur de Comp vers Ab. □

Corollaire 2.13. L'homologie $H_\bullet$ est un foncteur de Comp vers GrAb.

Démonstration.

- Soit $C_\bullet \in \operatorname{ob}(\mathsf{Comp})$ un complexe de chaînes. Alors l'homologie $H_\bullet(C_\bullet) \coloneqq (H_n(C_\bullet))_{n\in\mathbb{Z}}$ définit bien un groupe abélien gradué.
- Soit $C_\bullet, D_\bullet \in \operatorname{ob}(\mathsf{Comp})$ deux complexes de chaînes et $\varphi_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ un morphisme de chaînes. Alors la suite des morphismes induits $H_\bullet(\varphi) \coloneqq (H_n(\varphi))_{n\in\mathbb{Z}}$ définit bien un morphisme de groupes abéliens gradués.

Les propriétés de composition et d'identité découlent du Théorème 2.12, donc $H_\bullet$ est bien un foncteur de Comp vers GrAb. □

3. Homologie singulière

3.1. Simplexes

Définition 3.1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et A un sous-ensemble de E. On dit que A est *convexe* si :

$$\forall p, q \in A, [p, q] \coloneqq \{(1-t)p + tq \mid t \in [0,1]\} \subset A.$$

Définition 3.2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, A un sous-ensemble de E et $p_0, \ldots, p_n$ des éléments de A. On appelle *combinaison convexe* une combinaison linéaire de la forme $t_0 p_0 + \cdots + t_n p_n$ où $t_0, \ldots, t_n \in [0,1]$ et $t_0 + \cdots + t_n = 1$.

Proposition 3.3. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, A un sous-ensemble de E et $p_0, \ldots, p_n$ des éléments de A. Si A est convexe, alors toute combinaison convexe de $p_0, \ldots, p_n$ appartient à A.

Démonstration. Soit $t_0, \ldots, t_n \in [0,1]$ tels que $t_0 + \cdots + t_n = 1$. Notons $H(n) : t_0 p_0 + \cdots + t_n p_n \in A$.
Pour $n = 1$. On pose $t \coloneqq t_1$, alors puisque A est convexe $t_0 p_0 + t_1 p_1 = (1-t)p_0 + t p_1 \in A$.
Pour $n > 1$. On suppose que $H(n-1)$ est vérifiée. Sans perte de généralité, on suppose que $t_n \neq 0$, et on pose :

$$p \coloneqq \frac{t_0}{1-t_n} p_0 + \cdots + \frac{t_{n-1}}{1-t_n} p_{n-1}$$

alors d'après $H(n-1)$ on a $p \in A$. Par convexité on a $t_0 p_0 + \cdots + t_n p_n = (1-t_n)p + t_n p_n \in A$. □

Définition 3.4. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et A un sous-ensemble de E. On appelle *enveloppe convexe de* A, notée $\mathrm{Conv}(A)$, l'ensemble des combinaisons convexes d'éléments de A.

Proposition 3.5. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et A un sous-ensemble de E. Alors l'enveloppe convexe de A est le plus petit ensemble convexe contenant A.

Démonstration. Soit $p, q \in \mathrm{Conv}(A)$ et $t \in [0,1]$. Puisque p et q sont des combinaisons convexes d'éléments de A, d'après la Proposition 3.3 on a $(1-t)p + tq \in \mathrm{Conv}(A)$. Donc l'ensemble $\mathrm{Conv}(A)$ est convexe.

Soit B un sous-ensemble convexe de E contenant A. Soit $x \in \mathrm{Conv}(A)$. Puisque x est une combinaison convexe d'éléments de $A \subset B$, d'après la Proposition 3.3 on a $x \in B$. Donc $\mathrm{Conv}(A) \subset B$. □

Définition 3.6. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et F une famille libre de $n+1$ éléments de E. On appelle *n-simplexe généré par F* l'enveloppe convexe de F. On dit que les éléments de F sont les *sommets* de $\mathrm{Conv}(F)$ et que n est la *dimension* de $\mathrm{Conv}(F)$.

Définition 3.7. On appelle *n-simplexe standard*, noté Δ^n, le n-simplexe généré par la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Proposition 3.8. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $F \coloneqq (f_0, \ldots, f_n)$ une famille libre de $n+1$ éléments de E. Alors l'application :

$$\langle f_0, \ldots, f_n \rangle : \Delta^n \to \mathrm{Conv}(F); (t_0, \ldots, t_n) \mapsto t_0 f_0 + \ldots + t_n f_n$$

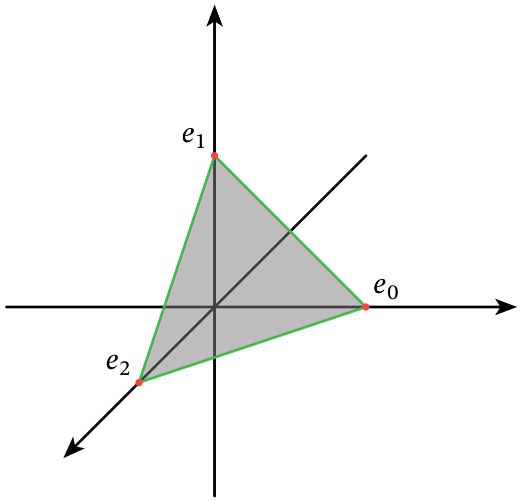
est un homéomorphisme.

Démonstration. Soit $(s_0, \ldots, s_n), (t_0, \ldots, t_n) \in \Delta^n$ tels que $s_0 f_0 + \ldots + s_n f_n = t_0 f_0 + \ldots + t_n f_n$. En particulier on a $(s_0 - t_0) f_0 + \ldots + (s_n - t_n) f_n = 0$, et puisque la famille $(f_0, \ldots, f_n)$ est libre, on obtient $s_0 - t_0 = \ldots = s_n - t_n = 0$, c'est-à-dire $(s_0, \ldots, s_n) = (t_0, \ldots, t_n)$. Donc $\langle f_0, \ldots, f_n \rangle$ est injective.
Soit $x \in \mathrm{Conv}(F)$. Alors il existe $(t_0, \ldots, t_n) \in \Delta^n$ tels que $x \coloneqq t_0 f_0 + \ldots + t_n f_n$. Donc $\langle f_0, \ldots, f_n \rangle$ est surjective. Puisque $\langle f_0, \ldots, f_n \rangle$ est une application linéaire et que Δ^n est de dimension finie, $\langle f_0, \ldots, f_n \rangle$ est continue. De plus Δ^n est compact et $\mathrm{Conv}(F)$ est séparé, donc $\langle f_0, \ldots, f_n \rangle$ est un homéomorphisme. □

Définition 3.9. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $F := (f_0, \ldots, f_n)$ une famille libre de $n+1$ éléments de E et $x := t_0 f_0 + \ldots + t_n f_n$ un élément de $\mathrm{Conv}(F)$. On appelle *coordonnées barycentriques de x* les coefficients $t_0, \ldots, t_n \in [0,1]$.

Définition 3.10. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, F une famille libre de $n+1$ éléments de E et G une famille non-vide d'éléments de $m+1$ éléments de F. On dit que $\mathrm{Conv}(G)$ est une *m-face* de $\mathrm{Conv}(F)$.

Exemple 3.11. Un 2-simplexe standard, il s'agit d'un triangle, les arêtes en vert sont des 1-faces du triangle, les sommets en rouge sont des 0-faces du triangle et des arêtes :



3.2. Chaînes singulières

Définition 3.12. Soit X un espace topologique. On appelle *n-simplexe singulier sur X* une application continue de Δ^n dans X.

Exemple 3.13. L'application $\langle e_0, \ldots, e_n \rangle$ de la Proposition 3.8, où $(e_0, \ldots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$, est un n-simplexe singulier sur $\mathbb{R}^{n+1}$.

Proposition 3.14. Soit X et Y deux espaces topologiques, $\sigma : \Delta^n \to X$ un n-simplexe singulier sur X et $f : X \to Y$ une application continue. Alors la composition $f \circ \sigma : \Delta^n \to Y$ est un n-simplexe singulier sur Y.

Définition 3.15. Soit X un espace topologique. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on appelle *groupe des n-chaînes singulières*, noté $C_n(X)$, le groupe abélien libre engendré par les n-simplexes singuliers sur X.

Démonstration. Puisque f est continue sur X et σ est continue sur Δ^n, par composition $f \circ \sigma$ est continue de Δ^n dans Y. Donc $f \circ \sigma$ est un n-simplexe singulier sur X. □

Définition 3.16. Soit X et Y deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application continue. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle *application induite par f*, notée $C_n(f)$, le morphisme de groupes :

$$C_n(f) : C_n(X) \to C_n(Y); \sum_{k=0}^{m} \lambda_k \sigma_k \mapsto \sum_{k=0}^{m} \lambda_k (f \circ \sigma_k).$$

Proposition 3.17. Soit X, Y et Z trois espaces topologiques, $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux applications continues. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $C_n(g \circ f) = C_n(g) \circ C_n(f)$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque les n-chaînes singulières sont engendrées par les n-simplexes singuliers, il suffit de montrer le résultat pour un n-simplexe singulier $\sigma : \Delta^n \to X$. Alors on a :

$$C_n(g \circ f)(\sigma) = (g \circ f) \circ \sigma = g \circ (f \circ \sigma) = g \circ C_n(f)(\sigma) = C_n(g)(C_n(f)(\sigma))$$

□

Proposition 3.18. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le groupe des n-chaînes singulières C_n est un foncteur de Top vers Ab.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Soit X un espace topologique. Alors le groupe des n-chaînes singulières $C_n(X)$ est bien un groupe abélien.
- Soit X et Y deux espaces topologiques, $f : X \to Y$ une application continue. Alors l'application induite $C_n(f) : C_n(X) \to C_n(Y)$ est bien un morphisme de groupes.

La propriété de composition découle de la Proposition 3.17 et la propriété d'identité découle directement de la définition, donc C_n est bien un foncteur de Top vers Ab. □

Définition 3.19. Soit X un espace topologique et $\sigma : \Delta^n \to X$ un n-simplexe singulier sur X. On appelle *bord de* σ, noté $\mathrm{d}_n\sigma$, la $(n-1)$-chaîne singulière sur X définie par :

$$\mathrm{d}_n\sigma \coloneqq \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \Big(\sigma \circ \big\langle e_0, \ldots, \widehat{e_k}, \ldots e_n\big\rangle\Big).$$

où le symbole $\widehat{\cdot}$ signifie que l'élément est enlevé.

Définition 3.20. Soit X un espace topologique et $n \in \mathbb{N}$. On appelle *morphisme de bord*, noté d_n, le morphisme de groupes induit :

$$\mathrm{d}_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X); \sum_{k=0}^{m} \lambda_k\sigma_k \mapsto \sum_{k=0}^{m} \lambda_k \mathrm{d}_n\sigma_k.$$

Proposition 3.21. Soit X et Y deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application continue. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{d}_n C_n(f) = C_{n-1}(f)\mathrm{d}_n$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque les n-chaînes singulières sont engendrées par les n-simplexes singuliers, il suffit de montrer le résultat pour un n-simplexe singulier $\sigma : \Delta^n \to X$. Alors on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_n C_n(f)(\sigma) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \Big((f \circ \sigma) \circ \big\langle e_0, \ldots, \widehat{e_k}, \ldots, e_n\big\rangle\Big) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \Big(f \circ \Big(\sigma \circ \big\langle e_0, \ldots, \widehat{e_k}, \ldots, e_n\big\rangle\Big)\Big) \\ &= C_{n-1}(f)(\mathrm{d}_n\sigma). \end{aligned}$$

□

Proposition 3.22. Soit X un espace topologique. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{d}_n\mathrm{d}_{n+1} = 0$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque les n-chaînes singulières sont engendrées par les n-simplexes singuliers, il suffit de montrer le résultat pour un n-simplexe singulier $\sigma : \Delta^n \to X$. Alors on a :

$$\mathrm{d}_{n+1}(\sigma) = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \Big(\sigma \circ \big\langle e_0, \ldots, \widehat{e_k}, \ldots, e_n\big\rangle\Big)$$

donc en appliquant d_n, on obtient :

$$\begin{aligned} (\mathrm{d}_n\mathrm{d}_{n+1})(\sigma) &= \mathrm{d}_n\left(\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \Big(\sigma \circ \big\langle e_0, \ldots, \widehat{e_k}, \ldots, e_n\big\rangle\Big)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \mathrm{d}_n\Big(\sigma \circ \big\langle e_0, \ldots, \widehat{e_k}, \ldots, e_n\big\rangle\Big)) \end{aligned}$$

on sépare la somme en deux selon les éléments enlevés :

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}n\mathrm{d}_{n+1})(\sigma) &= \sum_{0\le k<l\le n+1} (-1)^{k+l}\Big(\sigma\circ\Big\langle e_0, \ldots, \overline{e_k}, \ldots, \overline{e_l}, \ldots, e_n\Big\rangle\Big) \\ &\quad+ \sum_{0\le l<k\le n+1} (-1)^{k+l-1}\Big(\sigma\circ\Big\langle e_0, \ldots, \overline{e_l}, \ldots, \overline{e_k}, \ldots, e_n\Big\rangle\Big) \\ &= \sum_{0\le k<l\le n+1} \Big((-1)^{k+l} + (-1)^{k+l+1}\Big)\Big(\sigma\circ\Big\langle e_0, \ldots, \overline{e_k}, \ldots, \overline{e_l}, \ldots, e_n\Big\rangle\Big) \\ &= 0\end{aligned}$$

car les puissances de -1 s'annulent. □

Proposition 3.23. La suite $(C_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ où pour tout $n < 0$, on pose $C_n \coloneqq 0$, munie des morphismes des bords $(d_n : C_n \to C_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}$ est un foncteur de Top vers Comp.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

- Soit X un espace topologique. Alors la suite $(C_n(X))_{n\in\mathbb{Z}}$ munie des morphismes de bords $(d_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X))_{n\in\mathbb{Z}}$ est bien un complexe de chaînes d'après la Proposition 3.22.
- Soit X et Y deux espaces topologiques, $f : X \to Y$ une application continue. Alors la suite des applications induites $(C_n(f) : C_n(X) \to C_n(Y))_{n\in\mathbb{Z}}$ est bien un morphisme de chaînes d'après la Proposition 3.21.

La propriété de composition découle de la Proposition 3.17 et la propriété d'identité découle directement de la définition, donc C_n est bien un foncteur de Top vers Ab. □

3.3. Définitions de l'homologie singulière

3.3.1. D'un espace topologique

Définition 3.24. Soit X un espace topologique. On appelle *complexe de chaînes singulières de X*, noté $C_\bullet(X)$, le complexe de chaînes déterminé par la suite $(C_n(X))_{n\in\mathbb{N}}$ munie des morphismes de bords $(d_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X))_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 3.25. Soit $C_\bullet(X)$ un complexe de chaînes singulières et $n \in \mathbb{Z}$.

- On appelle *n-cycle singulier* un élément de $Z_n(X) \coloneqq Z_n(C_\bullet(X))$.
- On appelle *n-bord singulier* un élément de $B_n(X) \coloneqq B_n(C_\bullet(X))$.
- On appelle *n^e groupe d'homologie singulière de X* le groupe $H_n(X) \coloneqq H_n(C_\bullet(X))$.
- On appelle *homologie singulière de X* la suite des groupes $H_\bullet(X) \coloneqq (H_n(X))_{n\in\mathbb{Z}}$.

Théorème 3.26. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le n^e groupe d'homologie singulière est un foncteur de Top vers Ab

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$. D'après la Proposition 3.23 $C_\bullet$ est un foncteur de Top vers Comp et d'après le Théorème 2.12 $H_\bullet$ est un foncteur de Comp vers Ab, par composition des foncteurs $H_\bullet = H_\bullet(C_\bullet)$ est bien un foncteur de Top vers Ab. □

TODO

3.3.2. D'une paire d'espace topologique

Définition 3.27. Soit $C_\bullet(X)$ et $C_\bullet(Y)$ deux complexes de chaînes singulières, et $f : X \to Y$ une application continue. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note $H_n(f) : H_n(X) \to H_n(Y)$ le morphisme de groupes induit par $C_n(f)$.

3.4. Paires d'espaces topologiques

Proposition 3.28. Soit (X, A) une paire d'espaces topologiques. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, d_n induit un morphisme $\overline{\mathrm{d}}_n$ de $C_n(X)/C_n(A)$ dans $C_{n-1}(X)/C_{n-1}(A)$ tel que $\overline{\mathrm{d}}_n\overline{\mathrm{d}}_{n+1} = 0$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors on a $C_n(A) \subset C_n(X)$, on peut donc former le quotient $C_n(X)/C_n(A)$.

On pose $\delta_n \coloneqq \overline{\mathrm{d}_n} : C_n(X) \to C_{n-1}(X)/C_{n-1}(A)$, alors $C_n(A) \subset \ker(\delta_n)$ et d'après la propriété universelle du groupe quotient δ_n induit bien un morphisme $\overline{\mathrm{d}}_n$ de $C_n(X)/C_n(A)$ dans $C_{n-1}(X)/C_{n-1}(A)$. Enfin puisque $\mathrm{d}_n\mathrm{d}_{n+1} = 0$, on a $\overline{\mathrm{d}}_n\overline{\mathrm{d}}_{n+1} = \overline{\mathrm{d}_n\mathrm{d}_{n+1}} = 0$. ☐

Remarque 3.29. Soit (X, A) une paire d'espaces topologiques. La suite $(C_n(X)/C_n(A))_{n\in\mathbb{Z}}$ munie des morphismes de bords induits $\left(\overline{\mathrm{d}}_n : C_n(X)/C_n(A) \to C_{n-1}(X)/C_{n-1}(A)\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ forme un complexe de chaînes singulières.

Définition 3.30. Soit (X, A) une paire d'espaces topologiques. On appelle *complexe de chaînes singulières de la paire* (X, A) le complexe de chaînes singulières quotient $C_\bullet(X, A) \coloneqq C_\bullet(X)/C_\bullet(A)$.

Remarque 3.31. Dans le cas de la paire d'espaces topologiques $(X, \varnothing)$, on trouve $C_\bullet(X, \varnothing) \simeq C_\bullet(X)$ et $H_\bullet(X, \varnothing) \simeq H_\bullet(X)$.

Proposition 3.32. Soit $C_\bullet(X, A)$ et $C_\bullet(Y, B)$ deux complexes de chaînes singulières, et $f : (X, A) \to (Y, B)$ un morphisme de paires. Alors l'application induite $f_* : C_n(X) \to C_n(Y)$ détermine un morphisme de chaînes.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on pose $\varphi_n \coloneqq \overline{f_*} : C_n(X) \to C_n(Y, B)$, alors puisque $f(A) \subset B$, on en déduit $f_*(C_n(A)) \subset \ker(\varphi_n)$ et d'après la propriété universelle du groupe quotient φ_n induit un morphisme $\overline{\varphi_n}$ de $C_n(X, A)$ dans $C_n(Y, B)$.

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors d'après la Proposition 3.21 puisque $\mathrm{d}_n f_* = f_* \mathrm{d}_n$, on a $\overline{\mathrm{d}_n\varphi_n} = \overline{\varphi_{n-1}\mathrm{d}_n}$. Donc φ_n est bien un morphisme de chaînes. ☐

Définition 3.33. Soit $C_\bullet(X, A)$ et $C_\bullet(Y, B)$ deux complexes de chaînes singulières, et $f : (X, A) \to (Y, B)$ un morphisme de paires. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note $H_n(f) : H_n(X, A) \to H_n(Y, B)$ le morphisme induit par le morphisme de chaînes déterminé par f_*.

Théorème 3.34. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le n^{e} groupe d'homologie singulière des paires d'espaces topologiques $H_n : \mathsf{Top}_2 \to \mathsf{Ab}$ est un foncteur.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$.
- Soit (X, A) une paire d'espaces topologiques. Alors le n^{e} groupe d'homologie singulière $H_n(X, A)$ est bien un groupe abélien libre.
- Soit (X, A) et (Y, B) deux paires d'espaces topologiques, et $f : (X, A) \to (Y, B)$ un morphisme de paires. Alors l'application $H_n(f) : H_n(X, A) \to H_n(Y, B)$ est un bien morphisme de groupes.

Soit $(X, A), (Y, B)$ et (Z, C) trois paires d'espaces topologiques.
- Soit $f : (X, A) \to (Y, B)$ et $g : (Y, B) \to (Z, C)$ deux morphismes de paires. Alors la composition $g \circ f : (X, A) \to (Z, C)$ est un morphisme de paires qui passe au quotient et vérifie :
$$H_n(g \circ f) = H_n(g) \circ H_n(f).$$
- On considère $\mathrm{id}_{(X,A)}$. Soit $\sigma : \Delta^n \to (X, A)$ un n-simplexe singulier, alors :
$$\mathrm{id}_{(X,A)*}(\sigma) = \mathrm{id}_{(X,A)} \circ \sigma = \sigma$$
puisque les n-chaînes singulières sont engendrées par les n-simplexes singuliers, on en déduit que $\mathrm{id}_{(X,A)*} = \mathrm{id}_{C_n(X,A)}$, par passage au quotient on a :
$$H_n\big(\mathrm{id}_{(X,A)}\big) = \mathrm{id}_{H_n(X,A)}\,.$$

Donc H_n est un foncteur. ☐

Proposition 3.35. Soit $C_\bullet(X, A)$ un complexe de chaînes singulières. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, les groupes $H_n(X, A)$ et $\mathrm{d}_n^{-1}(C_{n-1}(A))/(\mathrm{d}_{n+1}(C_{n+1}(X)) + C_n(A))$ sont isomorphes.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$.
Soit $\tau \in \mathrm{d}_{n+1}(C_{n+1}(X)) + C_n(A)$, il existe $\sigma_1 \in C_{n+1}(X)$ et $\sigma_2 \in C_n(A)$ tels que $\tau = \mathrm{d}_{n+1}\sigma_1 + \sigma_2$. Alors d'après la Proposition 3.22 on a :

$$\mathrm{d}_n\tau = \mathrm{d}_n(\mathrm{d}_{n+1}\sigma_1 + \sigma_2) = (\mathrm{d}_n\mathrm{d}_{n+1})\sigma_1 + \mathrm{d}_n\sigma_2 = \mathrm{d}_n\sigma_2$$

donc $\tau \in \mathrm{d}_n^{-1}(C_{n-1}(A))$, on peut donc former le quotient $\mathrm{d}_n^{-1}(C_{n-1}(A))/(\mathrm{d}_{n+1}(C_{n+1}(X)) + C_n(A))$.

On pose $\varphi : \mathrm{d}_n^{-1}(C_{n-1}(A)) \to H_n(X,A); \sigma \mapsto \overline{\sigma}$, qui est bien un morphisme de groupes.

- Soit $\eta \in H_n(X,A)$, il existe $\zeta \in Z_n(X,A)$ et $z \in C_n(X)$ tels que $\eta = \overline{\zeta}$ et $\zeta = \overline{z}$.
  Puisque $\overline{\mathrm{d}_n z} = \overline{\mathrm{d}}_n\zeta = 0 \in C_n(X,A)$, il existe $\sigma \in C_{n-1}(A)$ tel que $\mathrm{d}_n z = \sigma$, d'où $z \in \mathrm{d}_n^{-1}(C_{n-1}(A))$.
  Donc $\varphi(z) = \eta$ et φ est surjectif.
- Soit $\sigma \in \ker(\varphi)$. Puisque $\overline{\tau} = 0 \in H_n(X,A)$, il existe $b \in B_n(X,A)$ tel que $\overline{\tau} = \overline{b}$. C'est-à-dire qu'il existe $c \in C_{n+1}(X,A)$ et $\sigma \in C_{n+1}(X)$ tels que $b = \overline{\mathrm{d}}_{n+1}c$ et $c = \overline{\sigma}$.
  On peut écrire $\overline{\tau} = \overline{\mathrm{d}}_{n+1}\overline{\sigma} = \overline{\mathrm{d}_{n+1}\sigma} \in C_n(X,A)$, donc $\tau \in \mathrm{d}_{n+1}(C_{n+1}(X)) + C_n(A)$.

  Soit $\tau \in \mathrm{d}_{n+1}(C_{n+1}(X)) + C_n(A)$, il existe $\sigma_1 \in C_{n+1}(X)$ et $\sigma_2 \in C_n(A)$ tels que $\tau = \mathrm{d}_{n+1}\sigma_1 + \sigma_2$. Alors $\overline{\tau} = \overline{\mathrm{d}_{n+1}\sigma_1} = \overline{\mathrm{d}}_{n+1}\overline{\sigma} \in C_n(X,A)$, d'où $\overline{\tau} \in B_n(X,A)$ et $\overline{\tau} = 0 \in H_n(X,A)$, donc $\tau \in \ker(\varphi)$.

D'après le premier théorème d'isomorphisme φ induit un isomorphisme entre les groupes $H_n(X,A)$ et $\mathrm{d}_n^{-1}(C_{n-1}(A))/(\mathrm{d}_{n+1}(C_{n+1}(X)) + C_n(A))$. ☐

Proposition 3.36. Soit $C_\bullet(X,A)$ un complexe de chaînes singulières. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, d_n induit un morphisme ∂_n de $H_n(X,A)$ dans $H_{n-1}(A)$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$. D'après la Proposition 3.35 il existe un isomorphisme :

$$\psi : H_n(X,A) \to \mathrm{d}_n^{-1}(C_{n-1}(A))/(\mathrm{d}_{n+1}(C_{n+1}(X)) + C_n(A)).$$

Pour tout $\eta \in H_n(X,A)$, il existe $\tau \in \mathrm{d}_n^{-1}(C_{n-1}(A))$ tel que $\overline{\tau} = \psi(\eta)$. Alors d'après la Proposition 3.22 on a $\mathrm{d}_{n-1}\mathrm{d}_n\tau = 0$, donc $\mathrm{d}_n\tau \in Z_{n-1}(A)$. On pose $\partial_n\eta \coloneqq \overline{\mathrm{d}_n\tau} \in H_{n-1}(A)$.

Supposons que $\eta = 0$, c'est-à-dire $\tau \in \mathrm{d}_{n+1}(C_{n+1}(X)) + C_n(A)$, alors $\mathrm{d}_n\tau \in B_n(A)$, d'où $\partial_n\eta = 0$. Donc ∂_n est un morphisme bien défini. ☐

Théorème 3.37. Soit $C_\bullet(X,A)$ et $C_\bullet(Y,B)$ deux complexes de chaînes singulières. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le morphisme ∂_n est une transformation naturelle, c'est-à-dire, pour tout morphisme de paires $f : (X,A) \to (Y,B)$, on a :

$$\partial_n H_n(f) = H_{n-1}(f)\partial_n.$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Puisque ∂_n est induit par d_n, d'après la Proposition 3.21 on a bien :

$$\partial_n H_n(f) = \overline{\mathrm{d}_n f_*} = \overline{f_*\mathrm{d}_n} = H_{n-1}(f)\partial_n.$$

Donc ∂_n est bien une transformation naturelle. TODO. ☐

Définition 3.38. Soit $C_\bullet(X)$ un complexe de chaînes singulières et $n \in \mathbb{Z}$. On appelle *n^e nombre de Betti de X* le rang de $H_n(X)$ s'il est fini.

Définition 3.39. Une *théorie de l'homologie* sur la catégorie des paires d'espaces topologiques Top_2 dans la catégorie des groupes abéliens Ab est une suite de foncteurs $(H_n : \mathsf{Top}_2 \to \mathsf{Ab})_{n\in\mathbb{Z}}$ munie de transformations naturelles $(\partial_n : H_n(X,A) \to H_{n-1}(A) \coloneqq H_{n-1}(A,\varnothing))_{n\in\mathbb{Z}}$ vérifiant les *axiomes d'Eilenberg-Steenrod* pour toutes paires d'espaces topologiques $(X,A),(Y,B)$ et $n \in \mathbb{Z}$:

- *Dimension* : Soit P un espace constitué d'un unique point. Alors le groupe $H_n(P)$ est non-trivial si et seulement si $n = 0$.
- *Exactitude* : En notant $i : A \to X$ et $j : X \to (X,A)$ les inclusions canoniques, alors la suite suivante est exacte :

$$\dots \to H_{n+1}(X,A) \overset{\partial_{n+1}}{\to} H_n(A) \overset{H_n(i)}{\to} H_n(X) \overset{H_n(j)}{\to} H_n(X,A) \overset{\partial_n}{\to} H_{n-1}(A) \to \dots$$

- *Homotopie* : Soit $f_0, f_1 : (X,A) \to (Y,B)$ deux morphismes de paires homotopes. Alors les applications induites en homologie $H_n(f_0), H_n(f_1) : H_n(X,A) \to H_n(Y,B)$ sont égales.
- *Excision* : Soit U un sous-ensemble de A tel que l'adhérence de U est contenue dans l'intérieur de A. En notant $i : (X \setminus U, A \setminus U) \to (X,A)$ l'inclusion canonique. Alors l'application induite en homologie $H_n(i) : H_n(X \setminus U, A \setminus U) \to H_n(X,A)$ est un isomorphisme.

Théorème 3.40. La suite des n^{e} groupe d'homologie singulière des paires d'espaces topologiques $(H_n : \mathsf{Top}_2 \to \mathsf{Ab})_{n\in\mathbb{Z}}$ munie des morphismes $(\partial_n : H_n(X,A) \to H_{n-1}(A))_{n\in\mathbb{Z}}$ est une théorie de l'homogie vérifiant les axiomes d'Eilenberg-Steenrod.

Démonstration de l'axiome de dimension. Si $n < 0$, on a clairement $H_n(P) \simeq \{0\}$.
Si $n \geq 0$, il existe un unique n-simplexe singulier $\sigma_n : \Delta^n \to P$, alors on a :

$$\partial_n \sigma_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \text{ ou } n \text{ est impair} \\ \sigma_{n-1} & \text{si } n \neq 0 \text{ et } n \text{ est pair} \end{cases}$$

dans le cas $n = 0$, alors $H_0(P) = \langle \sigma_0 \rangle / \{0\} \simeq \mathbb{Z}$,
dans le cas $n \neq 0$ et n est impair, alors $H_n(P) = \langle \sigma_n \rangle / \langle \sigma_n \rangle \simeq \{0\}$,
dans le cas $n \neq 0$ et n est pair, alors $H_n(P) = \{0\}/\{0\} \simeq \{0\}$. ☐

Démonstration de l'axiome d'exactitude. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

- Soit $\alpha \in \ker(H_n(i))$, il existe $\tau \in C_n(A)$ tel que $\alpha = \overline{\tau}$.
  Puisque $\alpha \in \ker(H_n(i))$, on a $\tau \in B_n(X)$, il existe $\sigma \in C_{n+1}(X)$ tel que $\tau = \mathrm{d}_{n+1}\sigma$.
  Puisque $\overline{\mathrm{d}}_{n+1}\overline{\sigma} = \overline{\mathrm{d}_{n+1}\sigma} = \overline{\tau} = 0 \in C_n(X,A)$, on a $\overline{\sigma} \in Z_n(X,A)$.
  Alors d'après la définition de ∂_{n+1}, on a $\partial_{n+1}(\overline{\sigma}) = \alpha$.
- TODO.
- TODO.

☐

Démonstration de l'axiome d'homotopie. TODO. ☐

Démonstration de l'axiome d'excision. TODO. ☐

Théorème 3.41 (Théorème de Mayer-Vietoris)**.** Soit U et V deux ouverts d'un espace topologique. En notant $i_U : U \cap V \to U$, $i_V : U \cap V \to V$, $j_U : U \to U \cup V$ et $j_V : V \to U \cup V$ les inclusions canoniques, alors la suite suivante est exacte :

$$\dots \to H_{n+1}(U \cup V) \overset{\partial_{n+1}}{\to} H_n(U \cap V) \overset{(-i_{U*}, i_{V*})}{\to} H_n(U) \oplus H_n(V) \overset{j_{U*}+j_{V*}}{\to} H_n(U \cup V) \to \dots$$

Démonstration. TODO. ☐

Bibliographie

[1] Eduard Looijenga, *Algebraic Topology - an introduction*. 2010.