

Calcul intégral et applications

Table des matières

1. Intégrale de Lebesgue et intégrale de Riemann	2
2. Théorèmes	2
2.1. Convergence monotone (ou Beppo-Levi)	2
2.2. Lemme de Fatou	2
2.3. Convergence dominée	2
2.4. Continuité et dérivabilité sous le signe intégral	3
2.5. Fubini	3

1. Intégrale de Lebesgue et intégrale de Riemann

Théorème 1.1. Soit $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ et $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Alors f est **Lebesgue-intégrable** si et seulement si f est **localement Riemann-intégrable** et que son intégrale impropre est **absolument convergente** sur $]a, b[$. Dans ce cas

$$\int_{]a, b[} f(x) d\lambda(x) = \int_a^b f(x) dx.$$

2. Théorèmes

2.1. Convergence monotone (ou Beppo-Levi)

Théorème 2.1. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions **mesurables positives**. Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite **croissante**, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$ est mesurable positive et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n d\mu = \int \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu.$$

Corollaire 2.2. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions **mesurables positives**. Alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E \sum_{n=0}^{+\infty} f_n d\mu.$$

2.2. Lemme de Fatou

Théorème 2.3. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions **mesurables positives**. Alors

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n d\mu \geq \int_E \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu.$$

Corollaire 2.4. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions **mesurables positives**. S'il existe une fonction positive g **intégrable** telle que pour tout $x \in E, \forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) \leq g(x)$ alors

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n d\mu \leq \int_E \limsup_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu.$$

2.3. Convergence dominée

Théorème 2.5. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et f des fonctions **mesurables**. Si

- (1) pour μ -presque tout $x \in E, \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$,
- (2) il existe une fonction g **intégrable** avec pour μ -presque tout $x \in E, \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x)| \leq g(x)$,

alors $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ et f sont **intégrables** et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n d\mu = \int \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu.$$

Corollaire 2.6. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions **mesurables**. Si $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_E |f_n| d\mu$ est finie, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est **définie μ -presque partout et intégrable**, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E \sum_{n=0}^{+\infty} f_n d\mu.$$

2.4. Continuité et dérivabilité sous le signe intégral

Théorème 2.7. Soit $f : E \times \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction et $y_0 \in \mathbb{R}$. S'il existe une fonction g **intégrable** telle que

- (1) pour tout $y \in \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x, y)$ est **mesurable**,
- (2) pour μ -presque tout $x \in E$, $y \mapsto f(x, y)$ est **continue en y_0** ,
- (3) pour μ -presque tout $x \in E$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$, $|f(x, y)| \leq g(x)$,

alors la fonction $y \mapsto \int_E f(x, y) d\mu(x)$ est **définie sur \mathbb{R} et continue en y_0** .

Théorème 2.8. Soit I un intervalle de \mathbb{R} , $f : E \times I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. S'il existe une fonction g **intégrable** telle que

- (1) pour tout $y \in \mathbb{R}$, $y \mapsto f(x, y)$ est **intégrable**,
- (2) pour μ -presque tout $x \in E$, $y \mapsto f(x, y)$ est **dérivable sur I** ,
- (3) pour μ -presque tout $x \in E$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$, $|\partial_y f(x, y)| \leq g(x)$,

alors la fonction $F : y \mapsto \int_E f(x, y) d\mu(x)$ est **définie et dérivable sur I** avec

$$\forall y \in I, F'(y) = \int_E \partial_y f(x, y) d\mu(x).$$

2.5. Fubini

Théorème 2.9. Soit μ et ν deux mesures **σ -finies**, et $f : E \times F \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction **mesurable positive**. Alors

- (1) Les fonctions $x \mapsto \int_F f(x, y) d\nu(y)$ et $y \mapsto \int_E f(x, y) d\mu(x)$ sont **mesurables**,
- (2) on a l'égalité

$$\int_{E \times F} f(x, y) d(\mu \otimes \nu)(x, y) = \int_E \int_F f(x, y) d\nu(y) d\mu(x) = \int_F \int_E f(x, y) d\mu(x) d\nu(y).$$

Théorème 2.10. Soit μ et ν deux mesures **σ -finies**, et $f : E \times F \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction **intégrable**.

- (1) pour μ -presque tout $x \in E$, $y \mapsto f(x, y)$ et pour μ -presque tout $y \in F$, $x \mapsto f(x, y)$ sont **intégrables**,
- (2) Les fonctions $x \mapsto \int_F f(x, y) d\nu(y)$ et $y \mapsto \int_E f(x, y) d\mu(x)$ sont **intégrables**,
- (3) on a l'égalité

$$\int_{E \times F} f(x, y) d(\mu \otimes \nu)(x, y) = \int_E \int_F f(x, y) d\nu(y) d\mu(x) = \int_F \int_E f(x, y) d\mu(x) d\nu(y).$$