Calcul différentiel 2

Table des matières

1. Inversion locale et fonctions implicites

1.1. Théorème d'inversion locale

Définition 1.1. Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \cup \{+\infty\}$, U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, et $f : U \to V$ une application. On dit que f est un C^k-*difféomorphisme* de U sur V si
(1) f est bijective de U sur V,
(2) f est de classe C^k sur U,
(3) f^{-1} est de classe C^k sur V.

Remarque 1.2. Soit $f : U \to V$ un C^k-difféomorphisme, alors

$$\forall x \in U, f^{-1}(f(x)) = x$$
$$\forall y \in V, f\big(f^{-1}(y)\big) = y$$

de plus en appliquant le théorème de composition des différentielles

$$\mathrm{d}f^{-1}(f(x)) \circ \mathrm{d}f(x) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$$
$$\mathrm{d}f\big(f^{-1}(x)\big) \circ \mathrm{d}f^{-1}(x) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$$

donc $\mathrm{d}f(x)$ est inversible avec $\mathrm{d}f(x)^{-1} = \mathrm{d}f^{-1}(f(x))$.

Exemples 1.3.

1. On considère $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n; x \mapsto Ax$ où $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, alors f est C^∞ comme fonction linéaire et bijective de réciproque $y \mapsto A^{-1}y$. On remarque que f^{-1} est C^∞ comme fonction linéaire, donc f est un C^∞-difféomorphisme.
2. On considère $f : U \to V; (x, y) \mapsto (x + y, xy)$ où U et V sont définis par

$$U = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y\big\}$$
$$V = \big\{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid s^2 - 4t > 0\big\}$$

   alors f est un C^∞ difféomorphisme de U sur V, en effet
   a. f est bijective de U sur V, puisque pour $(x, y) \in U$ on a

$$(x + y)^2 - 4xy = x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 > 0$$

   donc $f(U) \subset V$, réciproquement pour $(s, t) \in V$ on cherche $(x, y) \in U$ tels que

$$\begin{cases} x + y = s \\ xy = t \end{cases}$$

   c'est-à-dire x et y sont racines du polynôme $X^2 - sX + t$, comme $x > y$ on a

$$\begin{cases} x = \frac{s+\sqrt{s^2-4t}}{2} \\ y = \frac{s-\sqrt{s^2-4t}}{2} \end{cases}$$

   donc $V \subset f(U)$, f est bijective,
   b. f est de classe C^∞ sur U car polynômiale,
   c. f^{-1} est de classe C^∞ sur V car $(s, t) \mapsto s^2 - 4t$ et $\sqrt{\cdot}$ sont C^∞ sur V.
3. On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto x^3$, alors f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et bijective. Mais son inverse $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; y \mapsto \sqrt[3]{y}$, n'est pas dérivable en 0 donc f n'est pas un C^∞-difféomorphisme.

Théorème 1.4. (Théorème d'inversion locale) Soit U un ouvert non-vide de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^k. On suppose qu'il existe $x_0 \in U$ tel que $\mathrm{d}f(x_0)$ soit inversible. Alors il existe un voisinage ouvert U' de x_0 et un voisinage ouvert V' de $f(x_0)$ tels que $f : U' \to V'$ est un C^k-difféomorphisme.

Théorème 1.5. (Théorème d'inversion globale) Soit U un ouvert non-vide de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application. On suppose que
(1) f est de classe C^k sur U,
(2) f est injective sur U,
(3) $\forall x \in U, \mathrm{d}f(x)$ est inversible.

Alors $f(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to f(U)$ est un C^k-difféomorphisme.

Démonstration. Soit x_0 in U, alors d'après le théorème d'inversion locale il existe un voisinage ouvert U_{x_0} de x_0 et un voisinage ouvert $V_{f(x_0)}$ de $f(x_0)$ tels que $f : U_{x_0} \to V_{f(x_0)}$ est un C^k-difféomorphisme. En particulier $V_{f(x_0)} = f\big(U_{x_0}\big)$, et on a

$$f(U) = \bigcup_{x\in U} V_{f(x)}$$

est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ comme union d'ouverts. De plus puisque f est injective sur U, on en déduit que f est bijective de U sur $f(U)$.
Soit $y_0 \in f(U)$, alors il existe un unique $x_0 \in U$ tel que $y_0 = f(x_0)$, et d'après le théorème d'inversion locale $f : U_{x_0} \to V_{y_0}$ est un C^k-difféomorphisme, on en déduit que f^{-1} est de classe C^k sur V_{y_0}. Donc f^{-1} est C^k sur $f(U)$. $\square$

Exemples 1.6.
1. On considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; (r, \theta) \mapsto (f_1, f_2) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$, alors
   a. f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ puisque cos et sin sont de classe C^∞.
   b. On pose $U :=]0, +\infty[\times] - \pi, \pi[$, qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ sur lequel f est injective.
   c. Soit $(r, \theta) \in U$, alors

$$J_f(r,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

   et $\det\big(J_f(r,\theta)\big) = r\cos^2(\theta) + r\sin^2(\theta) = r > 0$, donc $\mathrm{d}f_{(r,\theta)}$ est inversible.

   Donc d'après le Théorème 1.5 $f : U \to f(U)$ est un C^∞-difféomorphisme.
2. On considère $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; (r, \theta, \varphi) \mapsto (f_1, f_2, f_3) = (r\cos(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$.
   a. f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^3$ puisque cos et sin sont de classes C^∞.
   b. On pose $U :=]0, +\infty[\times] - \pi, \pi[\times] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, qui est un ouvert de $\mathbb{R}^3$ sur lequel f est injective.
   c. Soit $(r, \theta, \varphi) \in U$, alors

$$J_f(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\varphi) & -r\sin(\theta)\cos(\varphi) & -r\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\theta)\cos(\varphi) & r\cos(\theta)\cos(\varphi) & -r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & 0 & r\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

   et le déterminant de cette matrice est

$$\begin{aligned} \det\big(J_f(r,\theta,\varphi)\big) &= \sin(\varphi)\big(r^2\sin^2(\theta)\cos(\varphi)\sin(\varphi) + r^2\cos^2(\theta)\cos(\varphi)\sin(\varphi)\big) \\ &\quad + r\cos(\varphi)\big(r\cos^2(\theta)\cos^2(\varphi) + \sin^2(\theta)\cos^2(\varphi)\big) \\ &= \sin^2(\varphi)r^2\cos(\varphi) + \cos^2(\varphi)r^2\cos(\varphi) = r^2\cos(\varphi) \neq 0 \end{aligned}$$

donc $\mathrm{d}f_{r,\theta,\varphi}$ est inversible.

Donc d'après le Théorème 1.5 $f : U \to f(U)$ est un C^∞-difféomorphisme.

3. On pose $U := R^2 \setminus \{(0,0)\}$ et on considère $f : U \to \mathbb{R}^2; (x,y) \mapsto \left(x^2 - y^2, 2xy\right)$, alors
   a. f est de classe C^∞ sur U puisque f est polynômiale.
   c. Soit $(x,y) \in U$, alors

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

et $\det\left(J_f(x,y)\right) = 4\left(x^2 + y^2\right) > 0$ sur U, donc $\mathrm{d}f_{x,y}$ est inversible.

Donc d'après le Théorème 1.4 $f : U \to \mathbb{R}^2$ est un C^∞-difféomorphisme local en tout point de U. Mais $f(-1,-1) = f(1,1)$, donc $f : U \to \mathbb{R}^2$ n'est pas C^∞-difféomorphisme global.

   b. On pose $U' := \{(x,y) \in U \mid x > 0\}$, qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ sur lequel f est injective. En effet si $f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2)$, alors on pose

$$\begin{cases} (x_1,y_1) = r_1(\cos(\theta_1), \sin(\theta_1)) \\ (x_2,y_2) = r_2(\cos(\theta_2), \sin(\theta_2)) \end{cases} \text{où } r_1, r_2 > 0 \text{ et } \theta_1, \theta_2 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

et on trouve

$$\begin{cases} r_1^2 \cos(2\theta_1) = r_2^2 \cos(2\theta_2) \\ r_1^2 \sin(2\theta_1) = r_2^2 \sin(2\theta_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \theta_1 = \theta_2 \bmod 2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \theta_1 = \theta_2 \end{cases}$$

donc $(x_1,y_1) = (x_2,y_2)$ et f est bien injective.

Donc d'après le Théorème 1.5 $f : U' \to f(U')$ est un C^∞-difféomorphisme.

1.2. Théorème des fonctions implicites

Théorème 1.7. (Théorème des fonctions implicites) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, $(a,b) \in U$ et $f = \left(f_1, \dots, f_p\right) : U \to \mathbb{R}^p$ une application de classe C^k. On suppose que $f(a,b) = 0$ et que la matrice jacobienne de f par rapport à la deuxième variable en (a,b) est inversible. Alors il existe un voisinage ouvert V de a, un voisinage ouvert W de b avec $V \times W \subset U$ et une application $\varphi : V \to W$ qui est C^∞ avec $\varphi(a) = b$, tels que

$$\begin{cases} (x,y) \in V \times W \\ f(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in V \\ y = \varphi(x) \end{cases}$$

de plus pour tout $x \in V$, $\mathrm{d}\varphi(x) = -\left(\mathrm{d}_y f(x, \varphi(x))\right)^{-1} \circ \mathrm{d}_x f(x, \varphi(x))$.

Exemples 1.8.

1. On considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; (x,y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$ et $\mathbb{S}^1 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 0\right\}$. Les dérivées partielles de f sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y.$$

On remarque que pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant

$$\begin{cases} (x,y) \in \mathbb{S}^1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (x,y) \in \mathbb{S}^1 \\ y \neq 0 \end{cases}$$

on a $(x,y) \in \mathbb{S}^1 \setminus \{(1,0), (-1,0)\}$. On peut donc appliquer le Théorème 1.7, au voisinage V de x, $\mathbb{S}^1$ est le graphe d'une application $\varphi : V \to \mathbb{R}$. De plus on a

$$\forall x \in V, x^2 + \varphi(x)^2 - 1 = 0$$

en dérivant on trouve

$$\forall x \in V, 2x + 2\varphi(x)\varphi'(x) = 0$$

et donc $\varphi'(x) = -\frac{x}{\varphi(x)}$.

2. On considère $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}; (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 1$, $\mathbb{S}^2 := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 0\right\}$. Les dérivées partielles de f sont

$$\forall a \in \{x, y, z\}, \frac{\partial f}{\partial a}(x, y, z) = 2a.$$

On remarque que pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant

$$\begin{aligned}\begin{cases}(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \neq 0\end{cases} &\iff \begin{cases}(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \\ z \neq 0\end{cases} \\ &\iff \begin{cases}(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \\ (x, y, z) \neq (a, b, 0) \text{ où } (a, b) \in \mathbb{S}^1\end{cases}\end{aligned}$$

on a $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \setminus \left(\mathbb{S}^1 \times \{0\}\right)$. On peut donc appliquer le Théorème 1.7, au voisinage V de (x, y), $\mathbb{S}^2$ est le graphe d'une application $\varphi : V \to \mathbb{R}$. De plus on a

$$\forall (x, y) \in V, x^2 + y^2 + \varphi(x, y)^2 - 1 = 0$$

en dérivant par rapport à x on trouve

$$\forall (x, y) \in V, 2x + 2\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\varphi(x, y) = 0$$

donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{x}{\varphi(x,y)}$, et en dérivant par rapport à y on trouve

$$\forall (x, y) \in V, 2y + 2\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\varphi(x, y) = 0$$

donc $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{y}{\varphi(x,y)}$.

2. Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

2.1. Sous-variétés

Définition 2.1. Soit X une partie de $\mathbb{R}^n$. On dit que X est une *sous-variété de* $\mathbb{R}^n$ *de classe* C^k *et de dimension* $d \in \mathbb{N}$, si pour tout $x \in X$ il existe un voisinage ouvert V de x dans $\mathbb{R}^n$ et un C^k-difféomorphisme φ d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans V, tels que

$$V \cap X = \varphi\big(U \cap \big(\mathbb{R}^d \times \{0\}\big)\big).$$

On appelle *codimension* de X l'entier $n - d$.

Remarque 2.2. Une sous-variété de dimension 1 est une *courbe*, une sous-variété de dimension 2 est une *surface*, une sous-variété de dimension $n-1$ (codimension 1) est une *hypersurface*

Exemples 2.3.

1. Une courbe dans $\mathbb{R}^2$ est difféomorphe à un segment.
2. Un ouvert de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de dimension n.
3. On considère le cercle $\mathbb{S}^1$, on pose $U' \coloneqq]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[$, $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{]-\infty,0] \times \{0\}\}$, ainsi que $\psi : U' \to V; (r,\theta) \mapsto r(\cos(\theta), \sin(\theta))$ qui est un difféomorphisme de classe C^∞. On a

$$\begin{aligned} V \cap \mathbb{S}^1 &= \mathbb{S}^1 \setminus \{(-1,0)\} \\ &= \psi(\{1\} \times]-\pi,\pi[) \\ &= \psi(U' \cap (\{1\} \times \mathbb{R})) \end{aligned}$$

   on prend alors $U :]-\pi,\pi[\times]0,+\infty[$ et $\varphi : U \to V; (\theta, r) \mapsto \psi(r+1,\theta)$, donc $\mathbb{S}^1$ est bien une sous-variété de $\mathbb{R}^2$ de classe C^∞ et de dimension 1.

Définition 2.4. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^p$ une application de classe C^k. On dit que f est une *submersion* en $x_0 \in U$ si $\mathrm{d}_{x_0} f$ est surjective.

Théorème 2.5. Soit X une partie de $\mathbb{R}^n$. Alors X est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ classe C^k et de dimension $d \in \{0, \dots, n\}$ si et seulement si pour tout $a \in X$, il existe un voisinage ouvert V de a dans $\mathbb{R}^n$ et une submersion en a $f : V \to \mathbb{R}^{n-d}$ de classe C^k vérifiant $V \cap X = f^{-1}(f(a))$.

Démonstration.

$\Rightarrow$: Supposons que X est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de classe C^k et de dimension d. Soit $a \in X$, alors il existe un voisinage ouvert V de a et un C^k-difféomorphisme φ d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans V, tels que

$$V \cap X = \varphi\big(U \cap \big(\mathbb{R}^d \times \{0\}\big)\big).$$

On écrit $\varphi^{-1} = (g_1, \dots, g_d, f_1, \dots, f_{n-d})$, alors

$$V \cap X = \{x \in V \mid f_1(x) = \dots = f_{n-d}(x) = 0\}.$$

On pose $f \coloneqq (f_1, \dots, f_{n-d})$, puisque φ est un difféomorphisme on en déduit que $\mathrm{d}_a f$ est surjective, donc f est une submersion en a.

$\Leftarrow$: Supposons que les hypothèses soient vérifiées. Sans perte de généralité on suppose que $f(a) = 0$ et que $\det\big(\mathrm{Jac}_f(a)\big) \neq 0$. On pose $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ définie par

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = (x_1 - a_1, \dots, x_d - a_d, f_1(x_{d+1}), \dots, f_{n-d}(x_n))$$

alors $\det\big(\mathrm{Jac}_\psi(a)\big) = \det\big(\mathrm{Jac}_f(a)\big) \neq 0$, quitte à restreindre V, ψ est un C^k-difféomorphisme de V sur $U \coloneqq \psi(V)$. En prenant $\varphi \coloneqq \psi^{-1}$, on a bien

$$V \cap X = \varphi\big(U \cap \big(\mathbb{R}^d \times \{0\}\big)\big).$$

$\square$

Exemple 2.6. On considère le cercle $\mathbb{S}^2$ décrit par $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}; (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$. Alors f est de classe C^k sur $\mathbb{R}^3$ et $\det(\mathrm{Jac}_f) \neq 0$ sur $\mathbb{S}^2$, donc f est une submersion en tout point de $\mathbb{S}^2$. On en déduit que $\mathbb{S}^2$ est une sous-variété de $\mathbb{R}$ de classe C^k et de dimension $3 - 1 = 2$.

2.2. Espace tangent à une sous-variété

Définition 2.7. Soit X une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de classe C^k et de dimension d, $a \in X$ un point et v un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On dit que v est *tangent* à X en a s'il existe $\varepsilon > 0$ et une courbe $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}^n$ de classe C^k vérifiant :
(1) $\gamma(0) = a$,
(2) $\gamma'(0) = v$,
(3) $\mathrm{im}(\gamma) \subset X$.

On appelle *espace tangent* à X en a, noté T_aX, l'ensemble des vecteurs tangents à X en a.

Exemples 2.8. Soit X une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de classe C^k et de dimension d et $a \in X$ un point.
1. Le vecteur nul est tangent à X en tout point, avec $\gamma : t \mapsto a$.
2. Pour tout vecteur v tangent à X en a, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λv est tangent à X en a.
3. Si X est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, v est tangent à X en a.
4. Si X est un point, alors le seul vecteur tangent à X en a est 0.

Théorème 2.9. Soit X une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ classe C^k et de dimension d et $a \in X$ un point. Alors l'espace tangent T_aX est un espace vectoriel de dimension d et on a les caractérisations :
(1) S'il existe un voisinage ouvert V de a et un C^k-difféomorphisme φ d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans V vérifiant $V \cap X = \varphi\big(U \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})\big)$, alors $T_aX = \mathrm{d}_{\varphi^{-1}(a)}\varphi\big(\mathbb{R}^d \times \{0\}\big)$.
(2) S'il existe un voisinage ouvert V de a et une submersion en a $f : V \to \mathbb{R}^{n-d}$ de classe C^k vérifiant $V \cap X = f^{-1}(f(a))$, alors $T_aX = \ker(\mathrm{d}_a f)$.

Démonstration.
(1) Supposons sans perte de généralité que $\varphi^{-1}(a) = 0$.
Soit $v \in T_aX$, alors il existe $\varepsilon > 0$ et une courbe $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to V \cap X$ de classe C^k vérifiant $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$. On pose $\delta \coloneqq \varphi^{-1}(\gamma)$, alors on a $\mathrm{im}(\delta) \subset U \cap \big(\mathbb{R}^d \times \{0\}\big)$, $\delta(0) = 0$ et

$$\delta'(t) = \mathrm{d}_{\gamma(t)}\varphi^{-1}(\gamma'(t))$$

d'où $\delta'(0) = \mathrm{d}_a\varphi^{-1}(v)$ et $v = \mathrm{d}_{\varphi^{-1}(a)}\varphi(\delta'(0))$, donc $T_aX \subset \mathrm{d}_{\varphi^{-1}(a)}\varphi\big(\mathbb{R}^d \times \{0\}\big)$.
Réciproquement on montre de la même manière que $\mathrm{d}_{\varphi^{-1}(a)}\varphi\big(\mathbb{R}^d \times \{0\}\big) \subset T_aX$. Donc $T_aX = \mathrm{d}_{\varphi^{-1}(a)}\varphi\big(\mathbb{R}^d \times \{0\}\big)$, on en déduit que T_aX est un espace vectoriel de dimension d.
(2) Soit $v \in T_aX$, alors il existe $\varepsilon > 0$ et une courbe $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to V \cap X$ de classe C^k vérifiant $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$. Soit $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, alors

$$\gamma(t) \in V \cap X \Rightarrow (f \circ \gamma)(t) = f(a) \Rightarrow (f \circ \gamma)'(t) = 0$$

or $(f \circ \gamma)(t) = \mathrm{d}_{\gamma(t)} f(\gamma'(t))$ et $\mathrm{d}_a f(v) = 0$, donc $T_aX \subset \ker(\mathrm{d}_a f)$. L'égalité des dimensions entraine l'égalité des espaces.

$\square$

Remarque 2.10. S'il existe un voisinage ouvert V de a et une submersion en a $f : V \to \mathbb{R}^{n-d}$ de classe C^k vérifiant $V \cap X = f^{-1}(f(a))$, alors $T_aX = \mathrm{Vect}\big(\nabla_{f_1}(a), \dots, \nabla_{f_{n-d}}(a)\big)^{\perp}$

3. Extrema liés

Théorème 3.1. (Théorèmes des extrema liés) Soit X une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de classe C^k et de dimension d, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^k. Alors s'il existe une submersion $g : U \to \mathbb{R}^{n-d}$ de classe C^k et $a \in \mathbb{R}^{n-d}$ tels que $X = g^{-1}(a)$, et si $f|_X$ admet un extremum local en $x_0 \in X$, il existe des uniques $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-d} \in \mathbb{R}$, appelés *multiplicateurs de Lagrange*, tels que $\nabla_f(x_0) = \sum_{i=1}^{n-d} \lambda_i \nabla_{g_i}(x_0)$.

Démonstration. □

Exemple 3.2. On cherche les extrema de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; (x, y) \mapsto x + y$, que l'on restreint à l'ensemble $M \coloneqq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + y^4 = 1\}$.
On remarque que M est une sous-variété de $\mathbb{R}^2$ de classe C^∞, en effet $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; (x, y) \mapsto x^4 + y^4$ est une submersion en tout point de M. Si $f|_M$ admet un extremum local en un point $(a, b) \in M$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla(f)(a, b) = \lambda\nabla(g)(a, b)$. On a donc le système suivant

$$\begin{cases} 1 = \lambda 4a^3 \\ 1 = \lambda 4b^3 \end{cases}$$

et on en déduit que $\lambda \neq 0$ et $a^3 = b^3 = \frac{1}{4\lambda}$, d'où $a = b$.
Comme $(a, b) \in M$ on a $a^4 + b^4 = 1$, d'où $2a^4 = 1$, donc $a = b = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$. On a deux extrema possibles

$$m_1 \coloneqq \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right) \text{ et } m_2 \coloneqq \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$$

comme f est continue et M est compact (comme fermé borné de $\mathbb{R}^2$), f admet au moins un minimum global et un maximum global, elle en a donc exactement deux : m_1 et m_2.
On a $f(m_1) = -f(m_2) = \frac{2}{\sqrt[4]{2}}$, donc f atteint son minimum en m_2 et son maximum en m_1.

4. Équations différentielles

4.1. Résultats fondamentaux

4.1.1. Équations différentielles du premier ordre

Définition 4.1. Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue. On appelle *équation différentielle d'ordre 1 dans* $\mathbb{R}^n$ une équation de la forme suivante :

$$y' = f(t, y)$$

on dit que t est la variable de temps et que y est la variable d'état.

Définition 4.2. Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1. On appelle *solution* de (E) un couple de la forme (I, y) où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $y : I \to \mathbb{R}^n$ est une fonction dérivable sur I vérifiant :
(1) $\forall t \in I, (t, y(t)) \in I$,
(2) $\forall t \in I, y'(t) = f(t, y(t))$.

Remarque 4.3. Dans le cas où I n'est pas ouvert, la dérivabilité s'entend comme la dérivabilité à droite ou à gauche (selon l'extrémité).

Exemples 4.4.
1. On considère l'équation différentielle d'ordre 1 donnée par $y' = y$. Le couple $(]1, 2[, t \mapsto e^t)$ est une solution de cette équation.
2. L'équation donnée par $y' = y^2 + t$ est une équation différentielle d'ordre 1 sur $\mathbb{R}$.

3. L'équation donnée par $y' = \frac{y+1}{t\ln(t)}$ est une équation différentielle d'ordre 1 sur $\mathbb{R}$. Le couple $(]0,1[, t \mapsto -1 + \ln(t))$ est une solution de cette équation.

4.1.2. Problème de Cauchy

Définition 4.5. Soit (E) une équation différentielle et $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. On appelle *problème de Cauchy* avec donnée (t_0, y_0) l'équation (E) à laquelle on impose la condition $y(t_0) = y_0$. On dit que la condition $y(t_0) = y_0$ est la condition initiale (ou de Cauchy).

Exemple 4.6. La fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; t \mapsto 2e^{-t}$ est une solution de l'équation différentielle $y' = -y$ de condition initiale $y(0) = 2$.

Définition 4.7. Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $y' = f(x, y)$ une équation différentielle d'ordre 1. Soit M un point de U, on note $\mathcal{D}_M$ la droite passant par M et de coefficient directeur $f(M)$. On appelle *champ des tangentes* l'application $M \mapsto \mathcal{D}_M$ associée à l'équation $y' = f(x, y)$. On appelle *courbe intégrale* une courbe $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ qui a pour tangente en chaque point M la droite $\mathcal{D}_M$ du champ des tangentes.

Remarque 4.8. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Alors $\mathcal{D}_{(x_0,y_0)}$ a pour équation $y - y_0 = f(x_0, y_0)(x - y_0)$.

Exemples 4.9.

1. On considère l'équation différentielle $y' = 0$, ici $f \equiv 0$. Soit $M := (x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Alors $\mathcal{D}_M$ est la droite d'équation $y = y_0$ et les courbes intégrales sont les droites $\mathcal{D}_M$.
2. On considère l'équation différentielle $y' = y$, ici $f(x, y) = y$. Soit $M := (x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Alors $\mathcal{D}_M$ est la droite d'équation $y = y_0 + y_0(x - x_0)$.