Homologie singulière

Table des matières

1. Premières définitions

1.1. Simplexe

Définition 1.1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et A un sous-ensemble de E. On dit que A est *convexe* si

$$\forall p, q \in A, [p, q] \coloneqq \{(1-t)p + tq \mid t \in [0,1]\} \subset A.$$

Définition 1.2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, A un sous-ensemble de E et $p_0, \dots, p_n$ des éléments de A. On appelle *combinaison (linéaire) convexe* une combinaison de la forme $t_0 p_0 + \cdots + t_n p_n$, telle que $t_0, \dots, t_n \in [0,1]$ et $t_0 + \cdots + t_n = 1$.

Proposition 1.3. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, A un sous-ensemble de E et $p_0, \dots, p_n$ des éléments de A. Alors si A est convexe toute combinaison convexe de $p_0, \dots, p_n$ appartient à A.

Démonstration. Soit $t_0, \dots, t_n \in [0,1]$ tels que $t_0 + \cdots + t_n = 1$. Notons $H(n) : t_0 p_0 + \cdots + t_n p_n \in A$.
Pour $n = 1$. On pose $t \coloneqq t_1$, alors puisque A est convexe $t_0 p_0 + t_1 p_1 = (1-t)p_0 + tp_1 \in A$.
Pour $n > 1$. On suppose que $H(n-1)$ est vérifiée. Sans perte de généralité, on suppose que $t_n \neq 0$, et on pose

$$p \coloneqq \frac{t_0}{1-t_n} p_0 + \cdots + \frac{t_{n-1}}{1-t_n} p_{n-1}$$

alors d'après $H(n-1)$ on a $p \in A$. Par convexité on a $t_0 p_0 + \cdots + t_n p_n = (1-t_n)p + t_n p_n \in A$. □

Définition 1.4. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et A un sous-ensemble de E. On appelle *enveloppe convexe de* A, notée $[A]$, l'ensemble des combinaisons convexes de sous-ensembles finis de A.

Proposition 1.5. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et A un sous-ensemble de E. Alors l'enveloppe convexe de A est le plus petit ensemble convexe contenant A.

Démonstration. Soit $p, q \in [A]$ et $t \in [0,1]$. Puisque $(1-t)p + tq$ est une combinaison convexe d'un sous-ensemble fini de A, on a bien $(1-t)p + tq \in [A]$. Donc $[A]$ est convexe.

Soit B un sous-ensemble convexe de E contenant A. Soit $x \in [A]$, alors il existe $p_0, \dots, p_n \in A$ et $t_0, \dots, t_n \in [0,1]$ tels que $t_0 + \cdots + t_n = 1$ et $x = t_0 p_0 + \cdots + t_n p_n$. D'après la Proposition 1.3 on a bien $x \in B$. Donc $[A] \subset B$. □

Définition 1.6. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et F une famille libre de $n+1$ éléments de E. On appelle *n-simplexe généré par F* l'enveloppe convexe de F. On dit que les éléments de F sont les *sommets* de $[F]$ et que n est la *dimension* de $[F]$.

Définition 1.7. On appelle *n-simplexe standard*, noté Δ^n, le n-simplexe généré par la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Définition 1.8. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $[F]$ un n-simplexe et $x = t_0 p_0 + \cdots + t_n p_n$ un élément de $[F]$. On appelle *coordonnées barycentriques de x* les coefficients $t_0, ..., t_n$.

1.2. Chaine singulière

1.3. Complexe de chaines

Définition 1.9. Soit $(C)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de groupe abéliens munis de morphismes $\partial_n : C_n \to C_{n-1}$ allant de chaque espace vers le précédent tels que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on a $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$. On appelle *complexe de chaines*, noté $C_\bullet$, la suite $(C_n, \partial_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

Définition 1.10. Soit $C_\bullet$ un complexe de chaines et $k \in \mathbb{Z}$.
- On appelle *n-cycle* un élément de $\ker(\partial_k)$.
- On appelle *n-bord* un élément de $\mathrm{im}(\partial_{k+1})$.

Définition 1.11. Soit $C_\bullet$ un complexe de chaines et $k \in \mathbb{Z}$. On appelle *k^e-groupe d'homologie*, noté H_k, le quotient $\mathrm{H}_k \coloneqq \ker(\partial_k)/\,\mathrm{im}(\partial_{k+1})$. On appelle *classes d'homologie* les éléments de H_k.

Définition 1.12. Soit $C_\bullet$ un complexe de chaines et $k \in \mathbb{Z}$. On dit que le complexe est *exact en C_k* si H_k est trivial (i.e. $\mathrm{H}_k = \{0\}$).
- On dit que le complexe est *exact* s'il est exact en tout C_n.
- On dit que le complexe est *acyclique* s'il est exact en tout C_n avec $n \neq 0$.

Définition 1.13. Soit X un espace topologique. On appelle *complexe de chaines singulier* un complexe de chaines sur X.

1.4. Morphisme de chaines

Définition 1.14. Soit $A_\bullet$ et $B_\bullet$ deux complexes de chaines, et $(f_n : A_n \to B_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de morphismes tels que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on a $\partial_{B,k} \circ f_k = f_{k-1} \circ \partial_{A,k}$. On appelle *morphisme de chaines*, noté $f_\bullet : A_\bullet \to B_\bullet$, la suite $(f_n : A_n \to B_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

Proposition 1.15. Soit $A_\bullet$, $B_\bullet$ et $C_\bullet$ trois complexes de chaines, et $f_\bullet : A_\bullet \to B_\bullet$ et $\mathrm{g}_\bullet : B_\bullet \to C_\bullet$ deux morphismes de chaines. Alors la composition $\mathrm{g}_\bullet \circ f_\bullet : A_\bullet \to C_\bullet$ est un morphisme de chaines.

2. Propriétés fondamentales de l'homologie singulière

2.1. Homologie d'un singleton

Théorème 2.1. Soit $\{p\}$ un espace singleton. Alors les groupes d'homologies de $\{p\}$ sont donnés par $\mathrm{H}_0 \simeq \mathbb{Z}$ et pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\mathrm{H}_k \simeq \{0\}$.

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors il existe un unique k-simplexe $\sigma_k : \Delta^k \to \{p\}$ et il vérifie

$$\partial_k \sigma_k = \begin{cases} 0 \text{ si } k = 0 \text{ ou } k \text{ est impair} \\ \sigma_{k-1} \text{ si } k \neq 0 \text{ et } k \text{ est pair} \end{cases}$$

Si $k = 0$. Alors $H_0 = \langle \sigma_0 \rangle / \{0\} \simeq \mathbb{Z}$.
Si $k \neq 0$ et k est impair. Alors $H_k = \langle \sigma_k \rangle / \langle \sigma_k \rangle \simeq \{0\}$.
Si $k \neq 0$ et k est pair. Alors $H_k = \{0\} / \{0\} \simeq \{0\}$. $\square$