Calcul différentiel 2

Table des matières

1. Inversion locale et fonctions implicites

1.1. Théorème d'inversion locale

Définition 1.1. Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \cup \{+\infty\}$, U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, et $f : U \to V$ une application. On dit que f est un C^k*-difféomorphisme* de U sur V si
(1) f est bijective de U sur V,
(2) f est de classe C^k sur U,
(3) f^{-1} est de classe C^k sur V.

Remarque 1.2. Soit $f : U \to V$ un C^k-difféomorphisme, alors

$$\forall x \in U, f^{-1}(f(x)) = x$$
$$\forall y \in V, f(f^{-1}(y)) = y$$

de plus en appliquant le théorème de composition des différentielles

$$\mathrm{d}f^{-1}(f(x)) \circ \mathrm{d}f(x) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$$
$$\mathrm{d}f(f^{-1}(x)) \circ \mathrm{d}f^{-1}(x) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$$

donc $\mathrm{d}f(x)$ est inversible avec $\mathrm{d}f(x)^{-1} = \mathrm{d}f^{-1}(f(x))$.

Exemples 1.3.

1. On considère $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto Ax$ où $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, alors f est C^∞ comme fonction linéaire et bijective de réciproque $y \mapsto A^{-1}y$. On remarque que f^{-1} est C^∞ comme fonction linéaire, donc f est un C^∞-difféomorphisme.
2. On considère $f : U \to V, (x, y) \mapsto (x + y, xy)$ où U et V sont définis par

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y\}$$
$$V = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid s^2 - 4t > 0\}$$

   alors f est un C^∞ difféomorphisme de U sur V, en effet
   a. f est bijective de U sur V, puisque pour $(x, y) \in U$ on a

$$(x + y)^2 - 4xy = x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 > 0$$

   donc $f(U) \subset V$, réciproquement pour $(s, t) \in V$ on cherche $(x, y) \in U$ tels que

$$\begin{cases} x + y = s \\ xy = t \end{cases}$$

   c'est-à-dire x et y sont racines du polynôme $X^2 - sX + t$, comme $x > y$ on a

$$\begin{cases} x = \frac{s+\sqrt{s^2-4t}}{2} \\ y = \frac{s-\sqrt{s^2-4t}}{2} \end{cases}$$

   donc $V \subset f(U)$, f est bijective,
   b. f est de classe C^∞ sur U car polynômiale,
   c. f^{-1} est de classe C^∞ sur V car $(s, t) \mapsto s^2 - 4t$ et $\sqrt{\cdot}$ sont C^∞ sur V.
3. On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3$, alors f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et bijective. Mais son inverse $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y \mapsto \sqrt[3]{y}$, n'est pas dérivable en 0 donc f n'est pas un C^∞-difféomorphisme.

Théorème 1.4. (Théorème d'inversion locale) Soit U un ouvert non-vide de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^k. On suppose qu'il existe $x_0 \in U$ tel que $\mathrm{d}f(x_0)$ soit inversible. Alors il existe un voisinage ouvert U' de x_0 et un voisinage ouvert V' de $f(x_0)$ tels que $f : U' \to V'$ est un C^k-difféomorphisme.

Théorème 1.5. (Théorème d'inversion globale) Soit U un ouvert non-vide de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application. On suppose que
(1) f est de classe C^k sur U,
(2) f est injective sur U,
(3) $\forall x \in U, \mathrm{d}f(x)$ est inversible.

Alors $f(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to f(U)$ est un C^k-difféomorphisme.

Démonstration. Soit x_0 in U, alors d'après le théorème d'inversion locale il existe un voisinage ouvert U_{x_0} de x_0 et un voisinage ouvert $V_{f(x_0)}$ de $f(x_0)$ tels que $f : U_{x_0} \to V_{f(x_0)}$ est un C^k-difféomorphisme. En particulier $V_{f(x_0)} = f\big(U_{x_0}\big)$, et on a

$$f(U) = \bigcup_{x \in U} V_{f(x)}$$

est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ comme union d'ouverts. De plus puisque f est injective sur U, on en déduit que f est bijective de U sur $f(U)$.
Soit $y_0 \in f(U)$, alors il existe un unique $x_0 \in U$ tel que $y_0 = f(x_0)$, et d'après le théorème d'inversion locale $f : U_{x_0} \to V_{y_0}$ est un C^k-difféomorphisme, on en déduit que f^{-1} est de classe C^k sur V_{y_0}. Donc f^{-1} est C^k sur $f(U)$. □

Exemples 1.6.
1. On considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (r, \theta) \mapsto (f_1, f_2) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$, alors
   a. f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ puisque cos et sin sont de classe C^∞.
   b. On pose $U :=]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[$, qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ sur lequel f est injective.
   c. Soit $(r, \theta) \in U$, alors

$$J_f(r,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

   et $\det\big(J_f(r,\theta)\big) = r\cos^2(\theta) + r\sin^2(\theta) = r > 0$, donc $\mathrm{d}f_{(r,\theta)}$ est inversible.

   Donc d'après le Théorème 1.5 $f : U \to f(U)$ est un C^∞-difféomorphisme.
2. On considère $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (r, \theta, \varphi) \mapsto (f_1, f_2, f_3) = (r\cos(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$.
   a. f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^3$ puisque cos et sin sont de classes C^∞.
   b. On pose $U :=]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, qui est un ouvert de $\mathbb{R}^3$ sur lequel f est injective.
   c. Soit $(r, \theta, \varphi) \in U$, alors

$$J_f(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\varphi) & -r\sin(\theta)\cos(\varphi) & -r\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\theta)\cos(\varphi) & r\cos(\theta)\cos(\varphi) & -r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & 0 & r\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

   et le déterminant de cette matrice est

$$\begin{aligned} \det\big(J_f(r,\theta,\varphi)\big) &= \sin(\varphi)\big(r^2\sin^2(\theta)\cos(\varphi)\sin(\varphi) + r^2\cos^2(\theta)\cos(\varphi)\sin(\varphi)\big) \\ &\quad + r\cos(\varphi)\big(r\cos^2(\theta)\cos^2(\varphi) + \sin^2(\theta)\cos^2(\varphi)\big) \\ &= \sin^2(\varphi)r^2\cos(\varphi) + \cos^2(\varphi)r^2\cos(\varphi) = r^2\cos(\varphi) \neq 0 \end{aligned}$$

donc $\mathrm{d}f_{r,\theta,\varphi}$ est inversible.

Donc d'après le Théorème 1.5 $f : U \to f(U)$ est un C^∞-difféomorphisme.

3. On pose $U := R^2 \setminus \{(0,0)\}$ et on considère $f : U \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$, alors
   a. f est de classe C^∞ sur U puisque f est polynômiale.
   c. Soit $(x,y) \in U$, alors

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

et $\det\big(J_f(x,y)\big) = 4(x^2 + y^2) > 0$ sur U, donc $\mathrm{d}f_{x,y}$ est inversible.

Donc d'après le Théorème 1.4 $f : U \to \mathbb{R}^2$ est un C^∞-difféomorphisme local en tout point de U. Mais $f(-1,-1) = f(1,1)$, donc $f : U \to \mathbb{R}^2$ n'est pas C^∞-difféomorphisme global.

   b. On pose $U' := \{(x,y) \in U \mid x > 0\}$, qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ sur lequel f est injective. En effet si $f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2)$, alors on pose

$$\begin{cases} x_1 = r_1 \cos(\theta_1) \\ y_1 = r_1 \sin(\theta_1) \\ x_2 = r_2 \cos(\theta_2) \\ y_2 = r_2 \sin(\theta_2) \end{cases} \text{où } r_1, r_2 > 0 \text{ et } \theta_1, \theta_2 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

et on trouve

$$\begin{cases} r_1^2 \cos(2\theta_1) = r_2^2 \cos(2\theta_2) \\ r_1^2 \sin(2\theta_1) = r_2^2 \sin(2\theta_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \theta_1 = \theta_2 \bmod 2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \theta_1 = \theta_2 \end{cases}$$

donc $(x_1,y_1) = (x_2,y_2)$ et f est bien injective.

Donc d'après le Théorème 1.5 $f : U' \to f(U')$ est un C^∞-difféomorphisme.

1.2. Théorème des fonctions implicites

Théorème 1.7. (Théorème des fonctions implicites) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, $(a,b) \in U$ et $f = \big(f_1, ..., f_p\big) : U \to \mathbb{R}^p$ une application de classe C^k. On suppose que $f(a,b) = 0$ et que la matrice jacobienne de f par rapport à y en (a,b) est inversible. Alors il existe un voisinage ouvert V de a, un voisinage ouvert W de b avec $V \times W \subset U$ et une application $\varphi : V \to W$ avec $\varphi(a) = b$, tels que

$$\begin{cases} (x,y) \in V \times W \\ f(x,y) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \in V \\ y = \varphi(x) \end{cases}$$

de plus pour tout $x \in V, \mathrm{d}\varphi(x) = -\big(\mathrm{d}_y f(x,\varphi)\big)^{-1} \circ \mathrm{d}_x f(x, \varphi(x))$.