

Homologie singulière

Table des matières

1. Premières définitions	2
1.1. Simplexe	2
1.2. Chaîne singulière	2
1.3. Complexe de chaînes	3
1.4. Morphisme de chaînes	3
2. Propriétés fondamentales de l'homologie singulière	4
2.1. Homologie d'un singleton	4

1. Premières définitions

1.1. Simplexe

Définition 1.1. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel et A un sous-ensemble de E . On dit que A est *convexe* si

$$\forall p, q \in A, [p, q] := \{(1-t)p + tq \mid t \in [0, 1]\} \subset A.$$

Définition 1.2. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel, A un sous-ensemble de E et p_0, \dots, p_n des éléments de A . On appelle *combinaison (linéaire) convexe* une combinaison de la forme $t_0 p_0 + \dots + t_n p_n$, telle que $t_0, \dots, t_n \in [0, 1]$ et $t_0 + \dots + t_n = 1$.

Proposition 1.3. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel, A un sous-ensemble de E et p_0, \dots, p_n des éléments de A . Alors si A est convexe toute combinaison convexe de p_0, \dots, p_n appartient à A .

Démonstration. Soit $t_0, \dots, t_n \in [0, 1]$ tels que $t_0 + \dots + t_n = 1$. Notons $H(n) : t_0 p_0 + \dots + t_n p_n \in A$. Pour $n = 1$. On pose $t := t_1$, alors puisque A est convexe $t_0 p_0 + t_1 p_1 = (1-t)p_0 + t p_1 \in A$. Pour $n > 1$. On suppose que $H(n-1)$ est vérifiée. Sans perte de généralité, on suppose que $t_n \neq 0$, et on pose

$$p := \frac{t_0}{1-t_n} p_0 + \dots + \frac{t_{n-1}}{1-t_n} p_{n-1}$$

alors d'après $H(n-1)$ on a $p \in A$. Par convexité on a $t_0 p_0 + \dots + t_n p_n = (1-t_n)p + t_n p_n \in A$. \square

Définition 1.4. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel et A un sous-ensemble de E . On appelle *enveloppe convexe de A* , notée $[A]$, l'ensemble des combinaisons convexes de sous-ensembles finis de A .

Proposition 1.5. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel et A un sous-ensemble de E . Alors l'enveloppe convexe de A est le plus petit ensemble convexe contenant A .

Démonstration. Soit $p, q \in [A]$ et $t \in [0, 1]$. Puisque $(1-t)p + tq$ est une combinaison convexe d'un sous-ensemble fini de A , on a bien $(1-t)p + tq \in [A]$. Donc $[A]$ est convexe.

Soit B un sous-ensemble convexe de E contenant A . Soit $x \in [A]$, alors il existe $p_0, \dots, p_n \in A$ et $t_0, \dots, t_n \in [0, 1]$ tels que $t_0 + \dots + t_n = 1$ et $x = t_0 p_0 + \dots + t_n p_n$. D'après la Proposition 1.3 on a bien $x \in B$. Donc $[A] \subset B$. \square

Définition 1.6. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel et F une famille libre de $n+1$ éléments de E . On appelle *n -simplexe généré par F* l'enveloppe convexe de F . On dit que les éléments de F sont les *sommets* de $[F]$ et que n est la *dimension* de $[F]$.

Définition 1.7. On appelle *n -simplexe standard*, noté Δ^n , le n -simplexe généré par la base canonique de \mathbb{R}^{n+1} .

Définition 1.8. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel, $[F]$ un n -simplexe et $x = t_0 p_0 + \dots + t_n p_n$ un élément de $[F]$. On appelle *coordonnées barycentriques de x* les coefficients t_0, \dots, t_n .

1.2. Chaîne singulière

Définition 1.9. Soit X un espace topologique. On appelle *n -simplexe singulier sur X* une application continue $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$.

Définition 1.10. Soit X un espace topologique, a_0, \dots, a_k des entiers et $\sigma_0, \dots, \sigma_k$ des n -simplexes singuliers sur X . On appelle *n -chaîne* l'application $a_0 \sigma_0 + \dots + a_k \sigma_k$. On note $C_n(X)$ l'ensemble des n -chaînes.

Proposition 1.11. Soit X et Y deux espaces topologiques, σ un n -simplexe singulier sur X et $f : X \rightarrow Y$ une application continue. Alors la composition $f \circ \sigma : \Delta^n \rightarrow Y$ est un n -simplexe.

Définition 1.12. Soit X un espace topologique et σ un n -simplexe singulier sur X . On appelle *bord* de σ , noté $\partial_n \sigma$, le $(n-1)$ -simplexe singulier sur X défini par :

$$\partial_n \sigma := \sum_{k=0}^n (-1)^k \sigma|_{[e_0, \dots, e_{k-1}, e_{k+1}, \dots, e_n]}.$$

On appelle *morphisme bord* l'application $\partial_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ induite.

Proposition 1.13. Soit X un espace topologique. Alors $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$.

Démonstration. Soit σ un $(n+1)$ -simplexe singulier sur X . Alors

$$\begin{aligned} (\partial_n \circ \partial_{n+1})(\sigma) &= \partial_n \left(\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \sigma|_{[e_0, \dots, e_{k-1}, e_{k+1}, \dots, e_{n+1}]} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \partial_n \left(\sigma|_{[e_0, \dots, e_{k-1}, e_{k+1}, \dots, e_{n+1}]} \right) \\ &= \sum_{0 \leq k < l \leq n} (-1)^{k+l} \sigma|_{[e_0, \dots, e_{k-1}, e_{k+1}, \dots, e_{l-1}, e_{l+1}, \dots, e_{n+1}]} \\ &\quad + \sum_{0 \leq l < k \leq n} (-1)^{k+l-1} \sigma|_{[e_0, \dots, e_{l-1}, e_{l+1}, \dots, e_{k-1}, e_{k+1}, \dots, e_{n+1}]} \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

1.3. Complexe de chaines

Définition 1.14. Soit $(C)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite de groupe abéliens munis de morphismes $\partial_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$ allant de chaque espace vers le précédent tels que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on a $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$. On appelle *complexe de chaines*, noté C_\bullet , la suite $(C_n, \partial_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

Définition 1.15. Soit C_\bullet un complexe de chaines et $k \in \mathbb{Z}$.

- On appelle *n-cycle* un élément de $\ker(\partial_k)$.
- On appelle *n-bord* un élément de $\text{im}(\partial_{k+1})$.

Définition 1.16. Soit C_\bullet un complexe de chaines et $k \in \mathbb{Z}$. On appelle *k^e-groupe d'homologie*, noté H_k , le quotient $H_k := \ker(\partial_k) / \text{im}(\partial_{k+1})$. On appelle *classes d'homologie* les éléments de H_k .

Définition 1.17. Soit C_\bullet un complexe de chaines et $k \in \mathbb{Z}$. On dit que le complexe est *exact en C_k* si H_k est trivial (i.e. $H_k = \{0\}$).

- On dit que le complexe est *exact* s'il est exact en tout C_n .
- On dit que le complexe est *acyclique* s'il est exact en tout C_n avec $n \neq 0$.

Définition 1.18. Soit X un espace topologique. On appelle *complexe de chaines singulier* un complexe de chaines sur X .

1.4. Morphisme de chaines

Définition 1.19. Soit A_\bullet et B_\bullet deux complexes de chaines, et $(f_n : A_n \rightarrow B_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite de morphismes tels que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on a $\partial_{B,k} \circ f_k = f_{k-1} \circ \partial_{A,k}$. On appelle *morphisme de chaines*, noté $f_\bullet : A_\bullet \rightarrow B_\bullet$, la suite $(f_n : A_n \rightarrow B_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

Proposition 1.20. Soit A_\bullet , B_\bullet et C_\bullet trois complexes de chaines, et $f_\bullet : A_\bullet \rightarrow B_\bullet$ et $g_\bullet : B_\bullet \rightarrow C_\bullet$ deux morphismes de chaines. Alors la composition $g_\bullet \circ f_\bullet : A_\bullet \rightarrow C_\bullet$ est un morphisme de chaines.

2. Propriétés fondamentales de l'homologie singulière

2.1. Homologie d'un singleton

Théorème 2.1. Soit $\{p\}$ un espace singleton. Alors les groupes d'homologies de $\{p\}$ sont donnés par $H_0 \simeq \mathbb{Z}$ et pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $H_k \simeq \{0\}$.

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors il existe un unique k -simplexe $\sigma_k : \Delta^k \rightarrow \{p\}$ et il vérifie

$$\partial_k \sigma_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 0 \text{ ou } k \text{ est impair} \\ \sigma_{k-1} & \text{si } k \neq 0 \text{ et } k \text{ est pair} \end{cases}$$

Si $k = 0$. Alors $H_0 = \langle \sigma_0 \rangle / \{0\} \simeq \mathbb{Z}$.

Si $k \neq 0$ et k est impair. Alors $H_k = \langle \sigma_k \rangle / \langle \sigma_k \rangle \simeq \{0\}$.

Si $k \neq 0$ et k est pair. Alors $H_k = \{0\} / \{0\} \simeq \{0\}$. □