Algèbre linéaire et bilinéaire

Table des matières

1. Rappels d'algèbre linéaire

1.1. Espaces vectoriels

Définition 1.1. Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif. On appelle *espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$, ou $\mathbb{K}$-*espace vectoriel*, un ensemble E muni de deux lois

- une loi de composition interne $+ : E \times E \to E$, telle que le couple $(E, +)$ forme un groupe commutatif,
- et d'une loi de composition externe $\cdot : \mathbb{K} \times E \to E$, vérifiant les propriétés suivantes
  1. la loi $\cdot$ est distributive à droite, $\forall a, b \in \mathbb{K}, \forall x \in E, (a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$,
  2. la loi $\cdot$ est distributive à gauche, $\forall a \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E, a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$,
  3. la loi $\cdot$ est associative mixte, $\forall a, b \in \mathbb{K}, \forall x \in E, a \cdot (b \cdot x) = (ab) \cdot x$,
  4. le neutre de $\mathbb{K}$ est neutre à gauche pour $\cdot$, $\forall x \in E, 1 \cdot x = x$.

Définition 1.2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-ensemble de E. On dit que F est un *sous-espace vectoriel de* E, s'il est non-vide et stable par combinaisons linéaires.

Proposition 1.3. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel.

Définition 1.4. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On définit la somme de F et G par

$$F + G \coloneqq \{x + y \mid x \in F, y \in G\}.$$

Proposition 1.5. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors $F + G$ est un sous-espace vectoriel.

Définition 1.6. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $x_1, ..., x_n \in E$. On appelle *sous-espace vectoriel engendré par* $x_1, ..., x_n$, l'ensemble des combinaisons linéaires de $x_1, ..., x_n$, noté

$$\mathrm{Vect}(x_1, ..., x_n) = \{a_1 \cdot x_1 + ... + a_n \cdot x_n \mid a_1, ..., a_n \in \mathbb{K}\}.$$

Définition 1.7. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(E_k)_{1 \leq k \leq n}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. On dit qu'ils sont en *somme directe* si

$$\forall (x_1, ..., x_n) \in E_1 \times ... \times E_n, \sum_{k=1}^{n} x_k = 0 \Rightarrow \forall 1 \leq k \leq n, x_k = 0$$

dans ce cas, on notera $E_1 \oplus ... \oplus E_n \coloneqq E_1 + ... + E_n$.

Remarque 1.8. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors F et G sont en somme directe si $F \cap G = \{0\}$.

1.2. Famille libre, famille génératrice et bases

Définition 1.9. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $x_1, ..., x_n \in E$. On dit que $(x_1, ..., x_n)$ est une *famille libre* si les droites $(\mathbb{K}x_k)_{1 \leq k \leq n}$ sont en somme directe, c'est-à-dire

$$\forall a_1, ..., a_n \in \mathbb{K}, a_1 \cdot x_1 + ... + a_n \cdot x_n = 0 \Rightarrow \forall 1 \leq k \leq n, a_k = 0.$$

Définition 1.10. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $x_1, ..., x_n \in E$. On dit que $(x_1, ..., x_n)$ est une *famille génératrice* si $\mathrm{Vect}(x_1, ..., x_n) = E$, c'est-à-dire

$$\forall x \in E, \exists a_1, ..., a_n \in \mathbb{K}, a_1 \cdot x_1 + ... + a_1 \cdot x_n = x.$$

Définition 1.11. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $x_1, ..., x_n \in E$. On dit que $(x_1, ..., x_n)$ est une *base* si elle est libre et génératrice, c'est-à-dire

$$\forall x \in E, \exists! a_1, ..., a_n \in \mathbb{K}, a_1 \cdot x_1 + ... + a_1 \cdot x_n = x.$$

Théorème 1.12. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $(x_1, ..., x_n)$ et $(x_1, ..., x_m)$ deux bases de E. Alors elles ont le même nombre d'éléments $n = m$.

Définition 1.13. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle *dimension de* E, notée $\dim(E)$, le nombre d'éléments dans une base de E.

Théorème 1.14. (de la base incomplète) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $(x_1, ..., x_m)$ une famille libre de E. Alors il existe $x_{m+1}, ..., x_n \in E$, tels que $(x_1, ..., x_n)$ soit une base de E.

Proposition 1.15. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{E} = (e_1, ..., e_n)$ une famille d'éléments de E. Alors les énoncés suivants sont équivalents
1. $\mathcal{E}$ est une base de E,
2. $\mathcal{E}$ est une famille libre de E,
3. $\mathcal{E}$ est une famille génératrice de E.

Théorème 1.16. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors

$$\dim(F) + \dim(G) = \dim(F + G) + \dim(F \cap G).$$

Notation 1.17. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $x \in E$, et $\mathcal{E} = (e_1, ..., e_n)$ et $\mathcal{F} = (f_1, ..., f_n)$ deux bases de E.
- On note $[x]_{\mathcal{E}}$ les coordonnées de x dans la base $\mathcal{E}$.
- On note $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} := \left([f_1]_{\mathcal{E}} \cdots [f_n]_{\mathcal{E}}\right)$ la matrice de passage de la base $\mathcal{E}$ à la base F.

Alors les coordonnées de x dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont liées par

$$[x]_{\mathcal{E}} = \mathcal{P}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} [x]_{\mathcal{F}}$$

ce qui entraîne

$$\mathcal{P}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} = \left(\mathcal{P}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}\right)^{-1}.$$

1.3. Applications linéaires

Définition 1.18. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $u : E \to F$ une application. On dit que u est *linéaire*, si elle vérifie

$$\forall a, b \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E, u(a \cdot x + b \cdot y) = a \cdot u(x) + b \cdot u(y).$$

Si $E = F$, on dit que u est un *endomorphisme*.

Notation 1.19. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F. Si $E = F$, on note $\mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(E, E)$.

Définition 1.20. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $u : E \to F$ une application linéaire.
- On appelle *image* de u l'ensemble $\mathrm{im}(u) := \{u(x) \mid x \in E\}$.
- On appelle *noyau* de u l'ensemble $\ker(u) := \{x \in E \mid u(x) = 0\}$.

Proposition 1.21. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $u : E \to F$ une application linéaire. Alors $\ker(u)$ et $\mathrm{im}(u)$ sont des espaces vectoriels.

Définition 1.22. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $u : E \to F$ une application linéaire. On appelle *rang* de u, noté $\mathrm{rg}(u)$, la dimension de $\mathrm{im}(u)$.

Théorème 1.23. (du rang) Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $u : E \to F$ une application linéaire. Alors

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{im}(u)) + \dim(\ker(u)).$$

Corollaire 1.24. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $u : E \to F$ une application linéaire. Alors les énoncés suivants sont équivalents

1. u est bijective,
2. u est injective,
3. u est surjective.

1.4. Matrice d'une application linéaire

Définition 1.25. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $\mathcal{E} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E et $\mathcal{F}$ une base de F, et $u : E \to F$ une application linéaire. On appelle *matrice de* u dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$, la matrice

$$[u]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} := \Big([u(e_1)]_{\mathcal{F}} \cdots [u(e_n)]_{\mathcal{F}} \Big).$$

Si $E = F$, on notera $[u]_{\mathcal{E}} := [u]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}$, et on remarque $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = [\mathrm{id}]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}$.

Proposition 1.26. Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ des bases respectives de E, F et G, et $u : E \to F$ et $v : F \to G$ deux applications linéaires. Alors

$$[v \circ u]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{G}} = [v]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{G}} [u]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}.$$

Corollaire 1.27. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux bases de E, et $u : E \to E$ un endomorphisme sur E. Alors

$$[u]_{\mathcal{F}} = \mathcal{P}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} [u]_{\mathcal{E}} \mathcal{P}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}.$$

1.5. Déterminant d'une matrice

Définition 1.28. Soit M une matrice carrée de taille n. On appelle *déterminant* de M, le nombre

$$\det(M) := \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) m_{1,\sigma(1)} ... m_{n,\sigma(n)}.$$

Proposition 1.29. Soit A et B deux matrices carrées de même taille. Alors

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Corollaire 1.30. Soit P une matrice inversible. Alors

$$\det(P^{-1}) = \det(P)^{-1}$$

et si M est une matrice carrée de même taille, on a

$$\det(P^{-1}AP) = \det(A).$$

Corollaire 1.31. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux bases de E, et $u : E \to E$ un endomorphisme sur E. Alors

$$\det([u]_{\mathcal{E}}) = \det([u]_{\mathcal{F}}).$$

Définition 1.32. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u : E \to E$ un endomorphisme sur E. On appelle *déterminant* de u, noté $\det(u)$, le déterminant de la matrice de u dans une base de E.

Proposition 1.33. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u : E \to E$ un endomorphisme sur E. Alors u est inversible si et seulement si son déterminant est non-nul.

Proposition 1.34. Soit M une matrice carrée de la forme

$$\left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$$

où A et B sont des blocs carrés. Alors

$$\det(M) = \det(A)\det(B).$$

2. Diagonalisation

3. Polynôme caractéristique

4. Trigonalisation

5. Polynôme d'endomorphisme

6. Réduction d'endomorphisme

7. Formes bilinéaires

Définition 7.1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\Phi : E \times E \to E$ une application. On dit que Φ est une *forme bilinéaire*, si pour tout $x \in E$, les applications $y \mapsto \Phi(x, y)$ et $y \mapsto \Phi(y, x)$ sont linéaires.

7.1. Ecriture dans une base

Définition 7.2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathcal{E} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E et $\Phi : E \times E \to E$ une forme bilinéaire. On appelle *matrice* de Φ dans la base $\mathcal{E}$, la matrice

$$[\Phi]_{\mathcal{E}} := \left(\Phi(e_i, e_j)\right)_{1 \leq i,j \leq n}.$$

Proposition 7.3. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathcal{E} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E et $\Phi : E \times E \to E$ une forme bilinéaire. Alors par bilinéarité

$$\forall x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in E, \Phi(x, y) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} x_i y_j \Phi(e_i, e_j) = [x]_{\mathcal{E}}^{\mathrm{T}} [\Phi]_{\mathcal{E}} [y]_{\mathcal{E}}.$$

Proposition 7.4. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux bases de E, et $\Phi : E \times E \to E$ une forme bilinéaire. Alors

$$[\Phi]_{\mathcal{F}} = {\mathcal{P}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}}^{\mathrm{T}} [\Phi]_{\mathcal{E}} \mathcal{P}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}.$$

7.2. Dualité

Définition 7.5. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. On appelle *dual* de E, noté E^*, l'ensemble des formes linéaires sur E. Si $\mathcal{E} = (e_1, ..., e_n)$ est une base de E, on appelle *base duale*, la famille $\mathcal{E}^* = (e_1^*, ..., e_n^*)$ telle que

$$\forall i, j \in \{1, ..., n\}, e_i^*(e_j) := \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

Proposition 7.6. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $u : E \to E$ une forme linéaire, alors

$$u = \sum_{i=0}^{n} u(e_i) e_i^*$$

Soit f un élément de E, alors

$$f = \sum_{i=0}^{n} e_i^*(f) e_i.$$

Définition 7.7. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{F} = (f_1, ..., f_n)$ une base de E^*. On appelle *base antéduale*, l'unique base $\mathcal{E} = (e_1, ..., e_n)$ de E telle que $\mathcal{E}^* = \mathcal{F}$.

Définition 7.8. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\Phi : E \times E \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire. On appelle *application linéaire associée* à Φ, l'application

$$u_\Phi : E \to E^*, x \mapsto (y \mapsto \Phi(x, y)).$$

7.3. Forme bilinéaire symétrique et forme quadratique

Définition 7.9. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\Phi : E \times E \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire. On dit que Φ est *symétrique*, si

$$\forall (x, y) \in E \times E, \Phi(x, y) = \Phi(y, x).$$

Définition 7.10. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $Q : E \to \mathbb{K}$ une application. On dit que Q est une *forme quadratique*, s'il existe une forme bilinéaire $\Phi : E \times E \to \mathbb{K}$ telle que

$$\forall x \in E, Q(x) = \Phi(x, x)$$

dans ce cas, on dit que Q est la *forme quadratique associée* à Φ.

Proposition 7.11. (Formule de polarisation) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\Phi : E \times E \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire et $Q : E \to \mathbb{K}$ la forme quadratique associée à Φ. Alors

$$\forall (x, y) \in E \times E, \Phi(x, y) = \frac{1}{2}(Q(x + y) - Q(x) - Q(y)) = \frac{1}{4}(Q(x + y) + Q(x - y)).$$

Remarque 7.12. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $Q : E \to \mathbb{K}$ une forme quadratique. Alors d'après la Proposition 7.11, Q détermine une forme bilinéaire symétrique, on l'appelle *forme polaire associée* à Q.

Remarque 7.13. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\Phi : E \times E \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire. Alors sa matrice dans la base canonique est symétrique.

7.4. Forme quadratique définie

Définition 7.14. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\Phi : E \times E \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire. On dit que Φ est *non-dégénérée* si

$$\forall x \in E, (\forall y \in E, \Phi(x, y) = 0) \Rightarrow x = 0.$$

Définition 7.15. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\Phi : E \times E \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire. On dit que Φ est *définie* si

$$\forall x \in E, \Phi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Proposition 7.16. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\Phi : E \times E \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire. Alors si Φ est définie, elle est non-dégénérée.

Définition 7.17. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\Phi : E \times E \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire définie.

- On dit que Φ est *définie positive* si

$$\forall x \in E \setminus \{0\}, \Phi(x, x) > 0.$$

- On dit que Φ est *définie négative* si

$$\forall x \in E \setminus \{0\}, \Phi(x, x) < 0.$$

Proposition 7.18. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\Phi : E \times E \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire définie. Alors Q est soit définie positive, soit définie négative.

Remarque 7.19. On étend toutes les énoncés précédents aux formes quadratiques avec leur forme polaire associée.

7.5. Réduction d'une forme quadratique

Théorème 7.20. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $Q : E \to \mathbb{K}$ une forme quadratique. Alors il existe des formes linéaires indépendantes $f_1, ..., f_m$ sur E et des éléments non-nuls $a_1, ..., a_m \in \mathbb{K}$ tels que

$$\forall x \in E, Q(x) = a_1 f_1(x)^2 + ... + a_m f_m(x)^2.$$

Démonstration. On applique l'algorithme de réduction de Gauss. □

Remarque 7.21. La famille de formes linéaires indépendantes qui intervient dans le Théorème 7.20 n'est pas nécessairement unique.

7.6. Invariants d'une forme quadratique

Théorème 7.22. (d'inertie de Sylvester) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $Q : E \to \mathbb{K}$ une forme quadratique. Alors le nombre m de formes linéaires indépendantes qui interviennent dans une décomposition de Q est égal au rang de Q.

Théorème 7.23. (d'inertie de Sylvester dans $\mathbb{R}$) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $Q : E \to \mathbb{K}$ une forme quadratique. Soit

$$Q = a_1 f_1^2 + \dots + a_s f_s^2 - a_{s+1} f_{s+1}^2 - \dots - a_{s+t} f_{s+t}^2$$

une décomposition de Q en sommes de carrés telle que $\forall i \in \{1, \dots, s+t\}, a_i > 0$. Alors les nombres s et t ne dépendent que de Q.

Définition 7.24. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $Q : E \to \mathbb{K}$ une forme quadratique. On appelle *signature* de Q, le couple (s, t) du Théorème 7.23.

8. Espaces euclidiens

Définition 8.1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On appelle *produit scalaire* sur E, noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$, une forme bilinéaire symétrique définie positive. On appelle *espace euclidien* le couple $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Définition 8.2. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. On appelle *norme associée au produit scalaire*, l'application $\| \cdot \| : E \to \mathbb{R}_+, x \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

8.1. Norme d'un vecteur

Théorème 8.3. (Inégalité de Cauchy-Schwarz) Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Alors

$$\forall x, y \in E, |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

avec égalité si et seulement si les deux éléments sont liés.

Proposition 8.4. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Alors l'application $\| \cdot \|$ est une norme.

8.2. Orthogonalité, base orthogonale et base orthonormée

Définition 8.5. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $x, y \in E$. On dit que x et y sont *orthogonaux*, noté $x \perp y$, si $\langle x, y \rangle = 0$.

Définition 8.6. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et F un sous-ensemble de E. On appelle *orthogonal* de F, noté $F^\perp$, l'ensemble

$$F^\perp := \{x \in E \mid \forall y \in F, \langle x, y \rangle = 0\}.$$

Notation 8.7. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $x \in E$. On note $x^\perp := \{x\}^\perp$.

Proposition 8.8. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et F un sous-ensemble de E. Alors $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

Proposition 8.9. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $x, y \in E$. Alors

$$x \perp y \Leftrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \Leftrightarrow \|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Proposition 8.10. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $x \in E \setminus \{0\}$. Alors $\mathrm{Vect}(x)^\perp = x^\perp$ et

$$E = \mathrm{Vect}(x) \oplus x^\perp.$$

Définition 8.11. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $\mathcal{E} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E.

- On dit que $\mathcal{E}$ est *orthogonale* si elle vérifie

$$\forall i, j \in \{1, ..., n\}, i \neq j \Rightarrow \langle e_i, e_j \rangle.$$

- On dit que $\mathcal{E}$ est *orthonormée* si elle vérifie

$$\forall i, j \in \{1, ..., n\}, \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}.$$

Remarque 8.12. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $\mathcal{E} = (e_1, ..., e_n)$ une base orthogonale de E. Alors la famille $\left(\frac{e_1}{\|e_1\|}, ..., \frac{e_n}{\|e_n\|}\right)$ est une base orthonormée de E.

Théorème 8.13. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Alors il existe une base orthonormée de E.

Proposition 8.14. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E. Alors
1. $E = F \oplus F^\perp$,
2. $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$,
3. $(F^\perp)^\perp = F$.

Théorème 8.15. (Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt) Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et $(e_1, ..., e_n)$ une base de E. Alors il existe une base orthonormée $(f_1, ..., f_n)$ de E telle que

$$\forall k \in \{1, ..., n\}, \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_k) = \mathrm{Vect}(f_1, ..., f_k).$$

Démonstration. On raisonne par récurrence sur le cardinal k de la famille.

- Pour $k = 1$, on pose $f_1 := \frac{e_1}{\|e_1\|}$.
- Pour $k > 1$, supposons qu'il existe une famille orthonormée $(f_1, ..., f_{k-1})$ telle que

  $$\mathrm{Vect}(e_1, ..., e_{k-1}) = \mathrm{Vect}(f_1, ..., f_{k-1})$$

  alors on pose $f'_k := e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k, f_i\rangle f_i$. Soit $j \in \{1, ..., k-1\}$, alors

  $$\langle f'_k, f_j\rangle = \langle e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k, f_i\rangle f_i, f_j\rangle$$

  et par bilinéarité du produit scalaire

  $$\begin{aligned}\langle f'_k, f_j\rangle &= \langle e_k, f_j\rangle - \sum_{i=0}^{k-1} \langle e_k, f_i\rangle\langle f_i, f_j\rangle \\ &= \langle e_k, f_j\rangle - \sum_{i=0}^{k-1} \langle e_k, f_i\rangle \delta_{i,j} \\ &= \langle e_k, f_j\rangle - \langle e_k, f_j\rangle = 0.\end{aligned}$$

  Enfin on pose $f_k := \frac{f'_k}{\|f'_k\|}$, donc la famille $(f_1, ..., f_k)$ est orthonormée et vérifie l'égalité.

□

8.3. Le groupe orthogonal

Définition 8.16. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. On dit que A est *orthogonale* si $A^{\mathrm{T}} = A^{-1}$. On appelle *groupe orthogonal*, le sous-groupe

$$O_n(\mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid AA^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}A = I_n\}.$$

Remarque 8.17. Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale. Alors on remarque que $\det(A) = \pm 1$, on appelle *groupe spécial orthogonal*, le sous-groupe

$$SO_n(\mathbb{R}) := O_n(\mathbb{R}) \cap \det^{-1}(1).$$

Définition 8.18. Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme. On dit que f est un *endomorphisme orthogonal* si

$$\forall x, y \in E, \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle.$$

On appelle *groupe orthogonal*, noté $O(E)$, le sous-groupe des endomorphismes orthogonaux.

Proposition 8.19. Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme. Alors les énoncés suivants sont équivalents

1. f est orthogonal.
2. Soit $x \in E$, alors $\|f(x)\| = \|x\|$.
3. Soit $\mathcal{E}$ une base orthonormée de E, alors $[f]_{\mathcal{E}} \in O_n(\mathbb{R})$.
4. Il existe $\mathcal{E}$ une base orthonormée de E, telle que $[f]_{\mathcal{E}} \in O_n(\mathbb{R})$.

Remarque 8.20. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme orthogonal. Alors on remarque que $\det(f) = \pm 1$, on appelle *groupe spécial orthogonal* le sous-groupe

$$SO(E) := O(E) \cap \det^{-1}(1).$$

8.4. Polynômes orthogonaux

Proposition 8.21. Soit $[a, b]$ un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et $w : [a, b] \to R_+ \setminus \{0\}$. Alors la forme bilinéaire symétrique définie par

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}[X], \langle P, Q \rangle := \int_a^b P(t)Q(t)w(t)\,\mathrm{d}t$$

est non-dégénérée.

Démonstration. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, alors

$$\begin{aligned}\langle P, P \rangle = 0 &\Rightarrow \int_a^b P^2(t)w(t) = 0\\ &\Rightarrow \forall t \in [a, b], P^2(t)w(t) = 0\\ &\Rightarrow \forall t \in [a, b], P(t) = 0\\ &\Rightarrow P = 0\end{aligned}$$

donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est non-dégénérée. □

Définition 8.22. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. On appelle *famille de polynômes orthogonaux*, une famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes qui vérifie

$$\begin{cases} \forall i, j \in \mathbb{N}, i \neq j \Rightarrow \langle P_i, P_j \rangle = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \deg(P_n) = n \end{cases}$$

Proposition 8.23. Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux familles de polynômes orthogonaux. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors P_n et Q_n sont colinéaires.

Définition 8.24. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p_n \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ la projection orthogonale sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. On appelle *?*, l'application $T_n : \mathbb{R}_{n-1}[X] \to \mathbb{R}_{n-1}[X], P \mapsto p_n(XP)$.

Proposition 8.25. Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de polynômes orthogonaux. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors T_n est symétrique et son spectre est de cardinal n. Soit λ une valeur propre de T_n, alors λ est racine de P_n et l'espace propre associé est la droite engendrée par le quotient de P_n par $X - \lambda$.

Démonstration. Soit $P, Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, alors

$$\langle T_n(P), Q \rangle = \langle p_n(XP), Q \rangle$$

□

9. Endomorphisme symétrique d'un espace euclidien

Notation 9.1. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme. On note $\theta_u : E \to E^*$, l'application définie par

$$\forall y \in E, \theta_u(y) := x \mapsto \langle u(x), y \rangle.$$

Définition 9.2. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme. On appelle *application transposée* (ou *adjoint*) de u, l'application définie par $u^* := \theta_{\mathrm{id}}^{-1} \circ \theta_u$.

Proposition 9.3. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme. Alors

$$\forall x, y \in E, \langle x, u^*(y) \rangle = \langle u(x), y \rangle.$$

Soit $\mathcal{E}$ une base orthonormée de E, on a $[u^*]_{\mathcal{E}} = [u]_{\mathcal{E}}^{\mathrm{T}}$.

Démonstration. Soit $x, y \in E$. Alors

$$\langle x, u^*(y) \rangle = \theta_{\mathrm{id}}(u^*(y))(x) = (\theta_{\mathrm{id}} \circ u^*)(y)(x) = \theta_u(y)(x) = \langle u(x), y \rangle.$$

□

Définition 9.4. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme. On dit que u est *symétrique* (ou *auto-adjoint*), si $u^* = u$.

Proposition 9.5. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme. Alors u est symétrique si et seulement si sa matrice dans une base orthonormée de E est symétrique.

Proposition 9.6. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Alors toutes les valeurs propres complexes de M sont réelles.

Théorème 9.7. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme. Alors u est diagonalisable dans une base orthonormée de E.

Théorème 9.8. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Alors il existe une matrice orthogonale P telle que $P^{\mathrm{T}} M P$ soit diagonale.

Corollaire 9.9. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, Q une forme quadratique définie positive sur E et $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ ses valeurs propres ordonnées. Alors

$$\forall x \in E, \lambda_1 \|x\|^2 \leq Q(x) \leq \lambda_n \|x\|^2$$

et ces inégalités sont optimales.