Calcul intégral et applications

Table des matières

1. Intégrale de Lebesgue et intégrale de Riemann

Théorème 1.1. Soit $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ et $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction. Alors f est **Lebesgue-intégrable** si et seulement si f est **localement Riemann-intégrable** et que son intégrale impropre est **absolument convergente** sur $]a,b[$. Dans ce cas

$$\int_{]a,b[} f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. Théorèmes

2.1. Convergence monotone (ou Beppo-Levi)

Théorème 2.1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions **mesurables positives**. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite **croissante**, alors $\lim_{n\to+\infty} f_n$ est mesurable positive et

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n\,\mathrm{d}\mu = \int_E \lim_{n\to+\infty} f_n\,\mathrm{d}\mu.$$

Corollaire 2.2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions **mesurables positives**. Alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_E f_n\,\mathrm{d}\mu = \int_E \sum_{n=0}^{+\infty} f_n\,\mathrm{d}\mu.$$

2.2. Lemme de Fatou

Théorème 2.3. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions **mesurables positives**. Alors

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_E f_n\,\mathrm{d}\mu \geq \int_E \liminf_{n\to+\infty} f_n\,\mathrm{d}\mu.$$

Corollaire 2.4. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions **mesurables positives**. S'il existe une fonction positive g **intégrable** telle que pour tout $x \in E, \forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) \leq g(x)$ alors

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_E f_n\,\mathrm{d}\mu \leq \int_E \limsup_{n\to+\infty} f_n\,\mathrm{d}\mu.$$

2.3. Convergence dominée

Théorème 2.5. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et f des fonctions **mesurables**. Si

(1) pour μ-presque tout $x \in E, \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$,

(2) il existe une fonction g **intégrable** avec pour μ-presque tout $x \in E, \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x)| \leq g(x)$,

alors $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ et f sont **intégrables** et

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n\,\mathrm{d}\mu = \int_E \lim_{n\to+\infty} f_n\,\mathrm{d}\mu.$$

Corollaire 2.6. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions **mesurables**. Si $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_E |f_n|\,\mathrm{d}\mu$ est finie, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est **définie μ-presque partout** et **intégrable**, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_E f_n\,\mathrm{d}\mu = \int_E \sum_{n=0}^{+\infty} f_n\,\mathrm{d}\mu.$$

2.4. Continuité et dérivabilité sous le signe intégral

Théorème 2.7. Soit $f : E \times \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction et y_0 in $\mathbb{R}$. S'il existe une fonction g **intégrable** telle que

(1) pour tout $y \in \mathbb{R}, x \mapsto f(x,y)$ est **mesurable**,

(2) pour μ-presque tout $x \in E, y \mapsto f(x,y)$ est **continue en** y_0,
(3) pour μ-presque tout $x \in E$ et pour tout $y \in \mathbb{R}, |f(x,y)| \leq g(x)$,

alors la fonction $y \mapsto \int_E f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)$ est **définie sur** $\mathbb{R}$ et **continue en** y_0.

Théorème 2.8. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : E \times I \to \mathbb{R}$ une fonction. S'il existe une fonction g **intégrable** telle que
(1) pour tout $y \in \mathbb{R}, x \mapsto f(x,y)$ est **intégrable**,
(2) pour μ-presque tout $x \in E, y \mapsto f(x,y)$ est **dérivable sur** I,
(3) pour μ-presque tout $x \in E$ et pour tout $y \in \mathbb{R}, |\partial_y f(x,y)| \leq g(x)$,

alors la fonction $F : y \mapsto \int_E f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)$ est **définie** et **dérivable sur** I avec

$$\forall y \in I, F'(y) = \int_E \partial_y f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

2.5. Fubini

Théorème 2.9. Soit μ et ν deux mesures σ-**finies**, et $f : E \times F \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction **mesurable positive**. Alors
(1) Les fonctions $x \mapsto \int_F f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)$ et $y \mapsto \int_E f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)$ sont **mesurables**,
(2) on a l'égalité

$$\int_{E\times F} f(x,y)\,\mathrm{d}(\mu \otimes \nu)(x,y) = \int_E \int_F f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_F \int_E f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\nu(y).$$

Théorème 2.10. Soit μ et ν deux mesures σ-**finies**, et $f : E \times F \to \mathbb{R}$ une fonction **intégrable**.
(1) pour μ-presque tout $x \in E$, $y \mapsto f(x,y)$ et pour μ-presque tout $y \in F$, $x \mapsto f(x,y)$ sont **intégrables**,
(2) Les fonctions $x \mapsto \int_F f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)$ et $y \mapsto \int_E f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)$ sont **intégrables**,
(3) on a l'égalité

$$\int_{E\times F} f(x,y)\,\mathrm{d}(\mu \otimes \nu)(x,y) = \int_E \int_F f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_F \int_E f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\nu(y).$$