Problème du rectangle inscrit

Emanuel Morille

24 Mai 2025

Table des matières

18729

1. Bases de théorie des catégories

1.1. Catégories

Définition 1.1. Une *catégorie* $\mathcal{C}$ est la donnée de :

- Une classe $\mathrm{ob}(\mathcal{C})$ dont les éléments sont appelés les *objets de* $\mathcal{C}$.
- Une classe $\hom(\mathcal{C})$ dont les éléments sont appelés les *morphismes de* $\mathcal{C}$.
  Un morphisme $f \in \hom(\mathcal{C})$ a un *domaine* $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ et un *codomaine* $Y \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$. On note alors ce morphisme $f : X \to Y$ et $\hom(X, Y)$ l'ensemble des morphismes de X dans Y.
- Pour tout objets $X, Y, Z \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$, une *composition* :
$$\circ : \hom(Y, Z) \times \hom(X, Y) \to \hom(X, Z).$$
- Pour tout objet $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$, un morphisme *identité* :
$$\mathrm{id}_X : X \to X.$$

Vérifiant les propriétés suivantes pour tout objets $X, Y, Z, T \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$:

- *Associativité* : Pour tout morphismes $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ et $h : Z \to T$, on a :
$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$
- *Identité* : Pour tout morphisme $f : X \to Y$, on a :
$$\mathrm{id}_Y \circ f = f = f \circ \mathrm{id}_X .$$

Exemple 1.2. La catégorie Ab des groupes abéliens :

- Les objets de Ab sont les groupes abéliens.
- Les morphismes de Ab sont les morphismes de groupes.

Exemple 1.3. Un *groupe gradué* est un groupe G muni d'une famille de sous-groupes $(G_i)_{i\in I}$ telle que $G = \bigoplus_{i\in I} G_i$. Pour tout $i \in I$, un élément non-nul de G_i est dit *homogène de degré* i.

Soit $G \coloneqq \bigoplus_{i\in I} G_i$ et $H \coloneqq \bigoplus_{i\in I} H_i$ deux groupes gradués. Un *morphisme de groupes gradués* est un morphisme de groupes $\varphi : G \to H$ tel que pour tout $i \in I$, on a $\varphi(G_i) \subset H_i$.

On définit ainsi la catégorie GrAb des groupes abéliens gradués :

- Les objets de GrAb sont les groupes abéliens gradués.
- Les morphismes de GrAb sont les morphismes de groupes gradués.

Exemple 1.4. La catégorie Top des espaces topologiques :

- Les objets de Top sont les espaces topologiques.
- Les morphismes de Top sont les applications continues.

Exemple 1.5. Une paire d'espaces topologiques est un espace topologique X muni d'une partie A de lui-même. On la note (X, A).

Soit (X, A) et (Y, B) deux paires d'espaces topologiques. Un *morphisme de paires* est une application continue $f : X \to Y$ telle que $f(A) \subset B$. On le note $f : (X, A) \to (Y, B)$.

On définit ainsi catégorie Top_2 des paires d'espaces topologiques :

- Les objets de Top_2 sont les paires d'espaces topologiques.
- Les morphismes de Top_2 sont les morphismes de paires.

Exemple 1.6. Soit $(X, \leq)$ un ensemble partiellement ordonné. On définit la catégorie $\mathcal{C}(X, \leq)$:

- Les objets de $\mathcal{C}(X, \leq)$ sont les éléments de X.
- Pour tout $x, y \in X$, si $x \leq y$, on a un morphisme $f_{x,y} : x \to y$.
- Pour tout $x, y, z \in X$, si $x \leq y$ et $y \leq z$, on a bien $x \leq z$ et une composition $f_{y,z} \circ f_{x,y} = f_{x,z}$.
- Pour tout $x \in X$, on a bien $x \leq x$ et un morphisme identité $f_{x,x}$.

Définition 1.7. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. La *catégorie opposée (ou duale) de* $\mathcal{C}$, notée $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$, est la catégorie dont les objets sont les objets $\mathcal{C}$ et dont les morphismes sont les morphismes de $\mathcal{C}$ dont le domaine et le codomaine sont inversés.

Exemple 1.8. Soit $(X, \leq)$ un ensemble partiellement ordonné. Alors on a $\mathcal{C}(X, \leq)^{\mathrm{op}} = \mathcal{C}(X, \preceq)$ où pour tout $x, y \in X$, on a $x \preceq y$ si et seulement si $y \leq x$.

1.2. Foncteurs

Définition 1.9. Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories. Un *foncteur (covariant) F de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$* est la donnée :
- Pour tout objet $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$, d'un objet $F(X) \in \mathrm{ob}(\mathcal{D})$.
- Pour tout objets $X, Y \in \mathrm{ob}(C)$ et morphisme $f : X \to Y$, d'un morphisme $F(f) : F(X) \to F(Y)$.

Vérifiant les propriétés suivantes pour tout objets $X, Y, Z \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$:
- *Composition* : Pour tout morphismes $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$, on a :
$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f).$$
- *Identité* : On a :
$$F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}.$$

Exemple 1.10. Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories. On définit le foncteur covariant constant $C : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$:
- On prend $D \in \mathcal{D}$, pour tout objet $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$, on a $C(X) \coloneqq D$.
- Pour tout objets $X, Y \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ et morphisme $f : X \to Y$, on a $C(f) \coloneqq \mathrm{id}_D$.

Exemple 1.11. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. On définit le foncteur covariant identité $\mathrm{id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$:
- Pour tout objet $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$, on a $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}(X) \coloneqq X$.
- Pour tout objets $X, Y \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ et morphisme $f : X \to Y$, on a $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}(f) \coloneqq f$.

Définition 1.12. Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories. Un *foncteur contravariant* est un foncteur covariant de la catégorie opposée $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ vers $\mathcal{D}$.

Exemple 1.13. Soit $\mathbb{K}$ un corps et Vect la catégorie des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On définit un foncteur contravariant $F : \mathsf{Vect}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Vect}$:
- Pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E \in \mathsf{Vect}$, on a $F(E) \coloneqq E^*$.
- Pour tout $\mathbb{K}$-espaces vectoriels $E, F \in \mathsf{Vect}$ et application linéaire $u : E \to F$, on a :
$$F(u) \coloneqq u^{\mathrm{T}} : F^* \to E^*.$$

1.3. Transformations naturelles

Définition 1.14. Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ deux foncteurs covariants. Une *transformation naturelle ∂ de F vers G* est la donnée pour tout objet $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$, d'un morphisme $\partial_X : F(X) \to G(X)$, vérifiant la propriété suivante pour tout objet $Y \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ et pour tout morphisme $f : X \to Y$, on a :
$$\partial_Y \circ F(f) = G(f) \circ \partial_X$$
c'est-à-dire que le diagramme suivant est commutatif :
$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\partial_X"'] & F(Y) \arrow[d, "\partial_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G(f)"'] & G(Y) \end{tikzcd}$$

2. Catégorie Comp des complexes de chaînes

2.1. Complexes de chaînes

Définition 2.1. On appelle *complexe de chaînes*, noté $C_\bullet$, une suite de groupes abéliens $(C_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ munie de morphismes de groupes $(\mathrm{d}_n : C_n \to C_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\mathrm{d}_n\mathrm{d}_{n+1} = 0$.

Définition 2.2. Soit $C_\bullet$ un complexe de chaînes et $n \in \mathbb{Z}$.
- On appelle *n-cycle* un élément de $Z_n(C_\bullet) \coloneqq \ker(\mathrm{d}_n)$.
- On appelle *n-bord* un élément de $B_n(C_\bullet) \coloneqq \mathrm{im}(\mathrm{d}_{n+1})$.

Proposition 2.3. Soit $C_\bullet$ un complexe de chaînes. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $B_n(C_\bullet) \subset Z_n(C_\bullet)$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors $\mathrm{d}_n\mathrm{d}_{n+1} = 0$, donc $B_n(C_\bullet) = \mathrm{im}(\mathrm{d}_{n+1}) \subset \ker(\mathrm{d}_n) = Z_n(C_\bullet)$. □

Définition 2.4. Soit $C_\bullet$ un complexe de chaînes et $n \in \mathbb{Z}$.
- On appelle *n^e groupe d'homologie* le groupe quotient $H_n(C_\bullet) \coloneqq Z_n(C_\bullet)/B_n(C_\bullet)$.
- On appelle *homologie* la somme directe des groupes $H_\bullet(C_\bullet) \coloneqq \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H_n(C_\bullet)$.

Définition 2.5. Soit $C_\bullet$ un complexe de chaînes et $n \in \mathbb{Z}$.
- On dit que $C_\bullet$ est *exact en C_n* si $H_n(C_\bullet)$ est trivial, c'est-à-dire, $\mathrm{im}(\mathrm{d}_{n+1}) = \ker(\mathrm{d}_n)$.
- On dit que $C_\bullet$ est *exact* si pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il est exact en C_n.
- On dit que $C_\bullet$ est *acyclique* si pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, il est exact en C_n.

2.2. Morphismes de complexes

Définition 2.6. Soit $C_\bullet$ et $D_\bullet$ deux complexes de chaînes. On appelle *morphisme de complexes*, noté $\varphi_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$, une suite de morphismes de groupes $(\varphi_n : C_n \to D_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\mathrm{d}_n\varphi_n = \varphi_{n-1}\mathrm{d}_n$.

Proposition 2.7. Soit $C_\bullet$, $D_\bullet$ et $E_\bullet$ trois complexes de chaînes, $\varphi_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ et $\psi_\bullet : D_\bullet \to E_\bullet$ deux morphismes de complexes. Alors la composition $\psi_\bullet \circ \varphi_\bullet : C_\bullet \to E_\bullet$ est un morphisme de complexes.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors on a :

$$\mathrm{d}_n(\psi_n \circ \varphi_n) = \psi_{n-1}\mathrm{d}_n\varphi_n = (\psi_{n-1} \circ \varphi_{n-1})\mathrm{d}_n.$$

Donc $(\psi_n \circ \varphi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est bien un morphisme de complexes. □

Proposition 2.8. Soit $C_\bullet$ un complexe de chaînes. Alors le morphisme identité $\mathrm{id}_{C_\bullet} : C_\bullet \to C_\bullet$ est un morphisme de complexes.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors on a :

$$\mathrm{d}_n\,\mathrm{id}_n = \mathrm{d}_n = \mathrm{id}_{n-1}\,\mathrm{d}_n.$$

Donc $\left(\mathrm{id}_{C_n}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est bien un morphisme de complexes. □

Proposition 2.9. Soit $C_\bullet$ et $D_\bullet$ deux complexes de chaînes, $\varphi_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ un morphisme de complexes. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, φ_n induit un morphisme de groupes $H_n(\varphi) : H_n(C_\bullet) \to H_n(D_\bullet)$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$.
Soit $z \in Z_n(C_\bullet)$. Alors on a $\mathrm{d}_n\varphi_n(z) = \varphi_{n-1}(\mathrm{d}_n z) = \varphi_{n-1}(0) = 0$, donc $\varphi_n(z) \in Z_n(D_\bullet)$.
Soit $b \in B_n(C_\bullet)$. Alors il existe $c \in C_{n+1}$ tel que $b = \mathrm{d}_{n+1}c$, et on a :

$$\varphi_n(b) = \varphi_n(\mathrm{d}_{n+1}c) = \mathrm{d}_{n+1}\varphi_{n+1}(c)$$

donc $\varphi_n(b) \in B_n(D_\bullet)$.

On considère $\overline{\varphi_n} : Z_n(C_\bullet) \to H_n(D_\bullet)$, alors $B_n(C_\bullet) \subset \ker\left(\overline{\varphi_n}\right)$ et d'après la propriété universelle du groupe quotient le morphisme $\overline{\varphi_n}$ induit bien un morphisme $H_n(\varphi) : H_n(C_\bullet) \to H_n(D_\bullet)$. □

Définition 2.10. Soit $C_\bullet$ et $D_\bullet$ deux complexes de chaînes, $\varphi_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ un morphisme de complexes. On note $H_\bullet(\varphi) : H_\bullet(C_\bullet) \to H_\bullet(D_\bullet)$ la somme directe $H_\bullet(\varphi) \coloneqq \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H_n(\varphi)$.

2.3. La catégorie Comp

Définition 2.11. On appelle Comp la catégorie des complexes de chaînes :
- Les objets de Comp sont les complexes de chaînes.
- Les morphismes de Comp sont les morphismes de complexes.
- La composition de Comp découle de la Proposition 2.7.
- Le morphisme identité de Comp découle de Proposition 2.8.

Théorème 2.12. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le n^e groupe d'homologie H_n est un foncteur de Comp vers Ab.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$.
- Soit $C_\bullet \in \mathrm{ob}(\mathsf{Comp})$ un complexe de chaînes. Alors le n^e groupe d'homologie $H_n(C_\bullet)$ est bien un groupe abélien.
- Soit $C_\bullet, D_\bullet \in \mathrm{ob}(\mathsf{Comp})$ deux complexes de chaînes et $\varphi_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ un morphisme de complexes. Alors le morphisme induit $H_n(\varphi) : H_n(C_\bullet) \to H_n(D_\bullet)$ est bien un morphisme de groupes.

La propriété de composition découle de la Proposition 2.7 et la propriété d'identité découle de la Proposition 2.8, donc H_n est bien un foncteur de Comp vers Ab. □

Corollaire 2.13. L'homologie $H_\bullet$ est un foncteur de Comp vers GrAb.

Démonstration.
- Soit $C_\bullet \in \mathrm{ob}(\mathsf{Comp})$ un complexe de chaînes. Alors l'homologie $H_\bullet(C_\bullet) \coloneqq \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H_n(C_\bullet)$ définit bien un groupe abélien gradué.
- Soit $C_\bullet, D_\bullet \in \mathrm{ob}(\mathsf{Comp})$ deux complexes de chaînes et $\varphi_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ un morphisme de complexes. Alors le morphisme induit $H_\bullet(\varphi) : H_\bullet(C_\bullet) \to H_\bullet(D_\bullet)$ est bien un morphisme de groupes abéliens gradués.

Les propriétés de composition et d'identité découlent du Théorème 2.12, donc $H_\bullet$ est bien un foncteur de Comp vers GrAb. □

2.4. Premières propriétés

2.4.1. Homotopie

Définition 2.14. Soit $C_\bullet$ et $D_\bullet$ deux complexes de chaînes, $\varphi_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ et $\psi_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ deux morphismes de complexes. On dit que $\varphi_\bullet$ et $\psi_\bullet$ sont *homotopes* s'il existe une suite de morphismes de groupes $(h_n : C_n \to D_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\varphi_n - \psi_n = h_{n-1}\mathrm{d}_n + \mathrm{d}_n h_n$.

Proposition 2.15. L'homotopie est une relation d'équivalence sur les morphismes de complexes.

Démonstration. Notons $\sim$ la relation d'homotopie. Soit $C_\bullet$ et $D_\bullet$ deux complexes de chaînes.
- *Réflexivité* : Soit $\varphi_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ un morphisme de complexes. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on peut écrire $\varphi_n - \varphi_n = 0 = 0\mathrm{d}_n + \mathrm{d}_n 0$. Donc on a bien $\varphi_\bullet \sim \varphi_\bullet$.
- *Symétrie* : Soit $\varphi_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ et $\psi_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ deux morphismes de complexes tels que $\varphi_\bullet \sim \psi_\bullet$. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\psi_n - \varphi_n = -(\varphi_n - \psi_n)$. On en déduit bien $\psi_\bullet \sim \varphi_\bullet$.
- *Transitivité* : Soit $\varphi_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$, $\psi_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ et $\xi_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ trois morphismes de complexes tels que $\varphi_\bullet \sim \psi_\bullet$ et $\psi_\bullet \sim \xi_\bullet$. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\varphi_n - \xi_n = \varphi_n - \psi_n + \psi_n - \xi_n$. On en déduit bien que $\varphi_\bullet \sim \xi_\bullet$.

Donc l'homotopie est bien une relation d'équivalence sur les morphismes de complexes. □

Proposition 2.16. Soit $A_\bullet$, $B_\bullet$ et $C_\bullet$ trois complexes de chaînes, $\varphi_\bullet : A_\bullet \to B_\bullet$ et $\psi_\bullet : A_\bullet \to B_\bullet$, ainsi que $\alpha_\bullet : B_\bullet \to C_\bullet$ et $\beta_\bullet : B_\bullet \to C_\bullet$ deux paires de morphismes de complexes homotopes. Alors les compositions $\alpha_\bullet \circ \varphi_\bullet : A_\bullet \to C_\bullet$ et $\beta_\bullet \circ \psi_\bullet : A_\bullet \to C_\bullet$ sont homotopes.

Démonstration. Par définition il existe deux suites de morphismes de groupes $(f_n : A_n \to B_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(g_n : B_n \to C_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\varphi_n - \psi_n = f_{n-1}\mathrm{d}_n + \mathrm{d}_n f_n$ et $\alpha_n - \beta_n = g_{n-1}\mathrm{d}_n + \mathrm{d}_n g_n$. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors on a:

$$\begin{aligned}\alpha_n \circ \varphi_n - \beta_n \circ \psi_n &= \alpha_n \circ \varphi_n - \alpha_n \circ \psi_n + \alpha_n \circ \psi_n - \beta_n \circ \psi_n \\ &= \alpha_n \circ (\varphi_n - \psi_n) + (\alpha_n - \beta_n) \circ \psi_n \\ &= \alpha_n \circ (f_{n-1}\mathrm{d}_n + \mathrm{d}_n f_n) + (g_{n-1}\mathrm{d}_n + \mathrm{d}_n f_n) \circ \psi_n \\ &= (a_n \circ f_{n-1})\mathrm{d}_n + \mathrm{d}_n(a_{n+1} \circ f_n) + (g_{n-1} \circ \psi_{n-1})\mathrm{d}_n + \mathrm{d}_n(f_n \circ \psi_n) \\ &= (a_n \circ f_{n-1} + g_{n-1} \circ \psi_{n-1})\mathrm{d}_n + \mathrm{d}_n(a_{n+1} \circ f_n + f_n \circ \psi_n)\end{aligned}$$

En posant $h_n := a_{n+1} \circ f_n + g_n \circ \psi_n$, on obtient l'égalité voulue $\alpha_n \circ \varphi_n - \beta_n \circ \psi_n = h_{n-1}\mathrm{d}_n + \mathrm{d}_n h_n$. Donc $\alpha_\bullet \circ \varphi_\bullet$ et $\beta_\bullet \circ \psi_\bullet$ sont bien homotopes. □

Lemme 2.17. Soit $C_\bullet$ et $D_\bullet$ deux complexes de chaînes, $\varphi_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ et $\psi_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ deux morphismes de complexes homotopes. Alors on a $H_\bullet(\varphi) = H_\bullet(\psi)$.

Démonstration. Par définition il existe une suite de morphismes de groupes $(h_n : C_n \to D_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\varphi_n - \psi_n = h_{n-1}\mathrm{d}_n + \mathrm{d}_n h_n$.
Soit $n \in \mathbb{Z}$ et $\overline{c} \in H_n(C_\bullet)$. Alors on a $\varphi_n(c) - \psi_n(c) = h_{n-1}(\mathrm{d}_n c) + \mathrm{d}_n h_n(c) = \mathrm{d}_n h_n(c) \in B_n(D_\bullet)$, on en déduit $H_n(\varphi)(c) - H_n(\psi)(c) = 0 \in H_n(D_\bullet)$. Donc $H_\bullet(\varphi) = H_\bullet(\psi)$. □

2.4.2. Complexe de chaînes quotient

Définition 2.18. Soit $C_\bullet$ et $D_\bullet$ deux complexes de chaînes. On dit que $D_\bullet$ est un *sous-complexe de chaînes de $C_\bullet$* si pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $D_n \subset C_n$.

Proposition 2.19. Soit $C_\bullet$ un complexe de chaînes et $D_\bullet$ un sous-complexe de chaînes de $C_\bullet$. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, d_n induit un morphisme $\overline{\mathrm{d}}_n : C_n/D_n \to C_{n-1}/D_{n-1}$ tel que $\overline{\mathrm{d}}_n\overline{\mathrm{d}}_{n+1} = 0$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors on a $D_n \subset C_n$, on peut donc former le quotient C_n/D_n.
On pose $\delta_n := \overline{\mathrm{d}_n} : C_n \to C_{n-1}/D_{n-1}$, alors $D_n \subset \ker(\delta_n)$ et d'après la propriété universelle du groupe quotient δ_n induit bien un morphisme $\overline{\mathrm{d}}_n : C_n/D_n \to C_{n-1}/D_{n-1}$.
Enfin puisque $\mathrm{d}_n\mathrm{d}_{n+1} = 0$, on a bien $\overline{\mathrm{d}}_n\overline{\mathrm{d}}_{n+1} = \overline{\mathrm{d}_n\mathrm{d}_{n+1}} = 0$. □

Proposition 2.20. Soit $C_\bullet$ un complexe de chaînes et $D_\bullet$ un sous-complexe de chaînes de $C_\bullet$. Alors la suite $(C_n/D_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ munie des morphismes de bords induits $\left(\overline{\mathrm{d}}_n : C_n/D_n \to C_{n-1}/D_{n-1}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ forme un complexe de chaînes.

Définition 2.21. Soit $C_\bullet$ un complexe de chaînes et $D_\bullet$ un sous-complexe de chaînes de $C_\bullet$. On appelle *complexe de chaînes quotient* le complexe de chaînes $C_\bullet/D_\bullet$.

Proposition 2.22. Soit $A_\bullet/B_\bullet$ et $C_\bullet/D_\bullet$ deux complexes de chaînes et $\varphi_\bullet : A_\bullet \to C_\bullet$ un morphisme de complexes. Si $\varphi_\bullet(B_\bullet) \subset D_\bullet$, alors $\varphi_\bullet$ induit un morphisme de complexes $\overline{\varphi}_\bullet : A_\bullet/B_\bullet \to C_\bullet/D_\bullet$.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on considère $\overline{\varphi_n} : A_n \to C_n/D_n$, alors puisque $\varphi_n(B_n) \subset D_n$, on en déduit $B_n \subset \ker(\overline{\varphi_n})$ et d'après la propriété universelle du groupe quotient $\overline{\varphi_n}$ induit un morphisme $\overline{\varphi}_n : A_n/B_n \to C_n/D_n$. On pose $\overline{\varphi}_\bullet := \left(\overline{\varphi}_n\right)_{n\in\mathbb{Z}}$

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors par définition $\overline{\mathrm{d}}_n\overline{\varphi}_n = \overline{\mathrm{d}_n\varphi_n} = \overline{\varphi_{n-1}\mathrm{d}_n} = \overline{\varphi}_{n-1}\overline{\mathrm{d}}_n$. Donc $\varphi_\bullet$ est bien un morphisme de complexes. □

2.4.3. Exactitude

Définition 2.23. On dit qu'une suite courte de complexes de chaînes est *exacte*, notée :

$$0 \longrightarrow A_\bullet \xrightarrow{\varphi_\bullet} B_\bullet \xrightarrow{\psi_\bullet} C_\bullet \longrightarrow 0$$

si pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la suite courte suivante est exacte :

$$0 \longrightarrow A_n \xrightarrow{\varphi_n} B_n \xrightarrow{\psi_n} C_n \longrightarrow 0$$

c'est-à-dire que φ_n est injectif, $\mathrm{im}(\varphi_n) = \ker(\psi_n)$ et ψ_n est surjectif.

Lemme 2.24. Soit une suite exacte courte de complexes de chaînes :

$$0 \longrightarrow A_\bullet \xrightarrow{\varphi_\bullet} B_\bullet \xrightarrow{\psi_\bullet} C_\bullet \longrightarrow 0$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il existe un morphisme de groupes $\partial_n : H_n(C_\bullet) \to H_{n-1}(A_\bullet)$ telle que la suite longue des groupes d'homologie est exacte :

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A_\bullet) \xrightarrow{H_n(\varphi)} H_n(B_\bullet) \xrightarrow{H_n(\psi)} H_n(C_\bullet) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A_\bullet) \xrightarrow{H_{n-1}(\varphi)} \cdots$$

De plus pour tout diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_\bullet \arrow[r, "\varphi_\bullet"] \arrow[d, "f_\bullet"] & B_\bullet \arrow[r, "\psi_\bullet"] \arrow[d, "g_\bullet"] & C_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "h_\bullet"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A'_\bullet \arrow[r, "\varphi'_\bullet"'] & B'_\bullet \arrow[r, "\psi'_\bullet"'] & C'_\bullet \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

la transformation ∂_n est naturelle dans le sens où le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
H_n(C_\bullet) \arrow[r, "H_n(h)"] \arrow[d, "\partial_n"'] & H_n(C'_\bullet) \arrow[d, "\partial_n"] \\
H_{n-1}(A_\bullet) \arrow[r, "H_{n-1}(f)"'] & H_{n-1}(A'_\bullet)
\end{tikzcd}$$

Remarque 2.25. La naturalité de ∂_n coïncide bien avec la notion introduite dans le Chapitre 1.3 si on considère la catégorie des suites exactes courtes de complexes.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$. On commence par faire un diagramme en 3 dimensions pour la suite :

$$\begin{tikzcd}
 & & & \vdots \arrow[dd] & & \vdots \arrow[dd] & & \vdots \arrow[dd] & & \\
 & & \vdots \arrow[dd] & & \vdots \arrow[dd] & & \vdots \arrow[dd] & & & \\
 & 0 \arrow[rr] & & A'_{n+1} \arrow[rr] \arrow[dd] & & B'_{n+1} \arrow[rr] \arrow[dd] & & C'_{n+1} \arrow[rr] \arrow[dd] & & 0 \\
0 \arrow[rr] & & A_{n+1} \arrow[rr] \arrow[ur] \arrow[dd] & & B_{n+1} \arrow[rr] \arrow[ur] \arrow[dd] & & C_{n+1} \arrow[rr] \arrow[ur] \arrow[dd] & & 0 & \\
 & 0 \arrow[rr] & & A'_n \arrow[rr] \arrow[dd] & & B'_n \arrow[rr] \arrow[dd] & & C'_n \arrow[rr] \arrow[dd] & & 0 \\
0 \arrow[rr] & & A_n \arrow[rr] \arrow[ur] \arrow[dd] & & B_n \arrow[rr] \arrow[ur] \arrow[dd] & & C_n \arrow[rr] \arrow[ur] \arrow[dd] & & 0 & \\
 & 0 \arrow[rr] & & A'_{n-1} \arrow[rr] \arrow[dd] & & B'_{n-1} \arrow[rr] \arrow[dd] & & C'_{n-1} \arrow[rr] \arrow[dd] & & 0 \\
0 \arrow[rr] & & A_{n-1} \arrow[rr] \arrow[ur] \arrow[dd] & & B_{n-1} \arrow[rr] \arrow[ur] \arrow[dd] & & C_{n-1} \arrow[rr] \arrow[ur] \arrow[dd] & & 0 & \\
 & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & &
\end{tikzcd}$$

Soit $\overline{c} \in H_n(C_\bullet)$. Puisque ψ_n est surjective par exactitude, il existe $b \in B_n$ tel que $\psi_n(b) = c$. De plus on a $\psi_{n-1}(\mathrm{d}_n b) = \mathrm{d}_n\psi_n(b) = \mathrm{d}_n c = 0$, donc $\mathrm{d}_n b \in \ker(\psi_{n-1})$ et par exactitude il existe $a \in A_{n-1}$ tel que $\varphi_{n-1}(a) = \mathrm{d}_n b$. De plus on a $\varphi_{n-2}(\mathrm{d}_{n-1}a) = \mathrm{d}_{n-1}\varphi_{n-1}(a) = \mathrm{d}_{n-1}\mathrm{d}_n b = 0$, puisque φ_{n-2} est injective par exactitude, on a $\mathrm{d}_{n-1}a = 0$, donc $a \in Z_{n-1}(A_\bullet)$. Donc on pose $\partial_n\overline{c} \coloneqq \overline{a} \in H_{n-1}(A_\bullet)$.

Vérifions que $\partial_n\overline{c}$ ne dépend pas des choix réalisés. Soit $b' \in B_n$ tel que $\psi_n(b') = c$ et $a' \in A_{n-1}$ tel que $\mathrm{d}_n b' = \varphi_{n-1}(a')$. Alors on a $\psi_n(b - b') = c - c = 0$, donc $b - b' \in \ker(\psi_n)$ et par exactitude il existe $\hat{a} \in A_n$ tel que $\varphi_n(\hat{a}) = b - b'$. Alors $\varphi_{n-1}(\mathrm{d}_n\hat{a}) = \mathrm{d}_n b - \mathrm{d}_n b' = \varphi_{n-1}(a - a')$, puisque φ_{n-1} est injective par exactitude, on a $\mathrm{d}_n\hat{a} = a - a'$, donc $a - a' \in B_{n-1}(A_\bullet)$ et $\overline{a} = \overline{a'} \in H_{n-1}(A_\bullet)$.

Vérifions que la suite longue est exacte.

- Soit $\overline{a} \in \mathrm{im}(\partial_{n+1})$. Par construction il existe $b \in B_{n+1}$ tel que $\varphi_n(a) = \mathrm{d}_{n+1}b$, d'où $\varphi_n(a) \in B_n(B_\bullet)$ et $H_n(\varphi)\big(\overline{a}\big) = 0 \in H_n(B_\bullet)$. Donc $\overline{a} \in \ker(H_n(\varphi))$.

  Soit $\overline{a} \in \ker(H_n(\varphi))$. Alors $\varphi_n(a) \in B_n(B_\bullet)$ et il existe $b \in B_{n+1}$ tel que $\varphi_n(a) = \mathrm{d}_{n+1}b$. De plus par exactitude on a $d_{n+1}\psi_{n+1}(b) = \psi_n(\mathrm{d}_{n+1}(b)) = \psi_n(\varphi_n(a)) = 0$, d'où $\psi_{n+1}(b) \in Z_{n+1}(C_\bullet)$, et par construction on retrouve bien $\partial_n\overline{\psi_{n+1}(b)} = \overline{a} \in H_n(A_\bullet)$. Donc $\overline{a} \in \mathrm{im}(\partial_{n+1})$.
- Soit $\overline{b} \in \mathrm{im}(H_n(\varphi))$. Il existe $a \in A_n$ tel que $\varphi_n(a) = b$. Alors on a $b \in \mathrm{im}(\varphi_n)$ et par exactitude $b \in \ker(\psi_n)$. Donc $\overline{b} \in \ker(H_n(\psi))$.

  Soit $\overline{b} \in \ker(H_n(\psi))$. Alors $\psi_n(b) \in B_n(C_\bullet)$ et il existe $c \in C_{n+1}$ tel que $\psi_n(b) = \mathrm{d}_{n+1}c$. Puisque ψ_{n+1} est surjective par exactitude, il existe $b' \in B_{n+1}$ tel que $\psi_{n+1}(b') = c$. De plus on a $\psi_n(d_{n+1}b') = \mathrm{d}_{n+1}\psi_{n+1}(b') = \mathrm{d}_{n+1}c = \psi_n(b)$, donc $b - \mathrm{d}_{n+1}b' \in \ker(\psi_n)$ et par exactitude il existe $a \in A_n$ tel que $\varphi_n(a) = b - \mathrm{d}_{n+1}b'$. Alors $\varphi_{n-1}(\mathrm{d}_n a) = \mathrm{d}_n b - \mathrm{d}_n\mathrm{d}_{n+1}b' = \mathrm{d}_n b = 0$, puisque φ_{n-1} est injective par exactitude, on a $\mathrm{d}_n a = 0$, donc $a \in Z_n(A_\bullet)$. De plus $H_n(\varphi)\big(\overline{a}\big) = \overline{b} \in H_n(B_\bullet)$. Donc $\overline{b} \in \mathrm{im}(H_n(\varphi))$.
- Soit $\overline{c} \in \mathrm{im}(H_n(\psi))$. Il existe $b \in Z_n(B_\bullet)$ tel que $\psi_n(b) = c$. De plus on a $\mathrm{d}_n b = 0 \in \ker(\psi_{n-1})$, par exactitude il existe $a \in A_{n-1}$ tel que $\varphi_{n-1}(a) = \mathrm{d}_n b = 0$, puisque φ_{n-1} est injective par exactitude, on a $a = 0$ et par construction $\partial_n\overline{c} = \overline{a} = 0 \in H_{n-1}(A_\bullet)$. Donc $\overline{c} \in \ker(\partial_n)$.

  Soit $\overline{c} \in \ker(\partial_n)$. Alors $c \in Z_n(C_\bullet)$, puisque ψ_n est surjective par exactitude, il existe $b \in B_n$ tel que $\psi_n(b) = c$, d'où $H_n(\psi)\big(\overline{b}\big) = \overline{c}$. Donc $\overline{c} \in \mathrm{im}(H_n(\psi))$.

Vérifions que ∂_n est naturelle. Soit $\overline{c} \in H_n(C_\bullet)$.
Par construction il existe $b \in B_n$ tel que $\psi_n(b) = c$ et il existe $a \in Z_{n-1}(A_\bullet)$ tel que $\varphi_{n-1}(a) = \mathrm{d}_n b$ et $\partial_n\overline{c} = \overline{a} \in H_{n-1}(A_\bullet)$. Donc on a $H_{n-1}(f)\big(\partial_n\overline{c}\big) = \overline{f_{n-1}(a)} \in H_{n-1}(A'_\bullet)$.
De plus $\psi'_n(g_n(b)) = h_n(\psi_n(b)) = h_n(c)$ et $\varphi'_{n-1}(f_{n-1}(a)) = g_{n-1}(\varphi_{n-1}(a)) = g_{n-1}(\mathrm{d}_n b) = \mathrm{d}_n g_n(b)$, alors par construction on a $\partial_n H_n(h)\big(\overline{c}\big) = \overline{f_{n-1}(a)} \in H_{n-1}(A'_\bullet)$. Donc $H_{n-1}(f)(\partial_n) = \partial_n H_n(h)$. □

Lemme 2.26. Soit $C_\bullet/D_\bullet$ un complexe de chaînes. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il existe un morphisme de groupes $\partial_n : H_n(C_\bullet/D_\bullet) \to H_{n-1}(D_\bullet)$ telle que la suite longue suivante est exacte :

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(D_\bullet) \xrightarrow{H_n(i)} H_n(C_\bullet) \xrightarrow{H_n(\pi)} H_n(C_\bullet/D_\bullet) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(D_\bullet) \xrightarrow{H_{n-1}(i)} \cdots$$

où $i_\bullet : D_\bullet \to C_\bullet$ est l'inclusion canonique et $\pi_\bullet : C_\bullet \to C_\bullet/D_\bullet$ est la projection canonique.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Par définition l'inclusion $i_n : D_n \to C_n$ est injective, de plus on a clairement $\mathrm{im}(i_n) = D_n = \ker(\pi_n)$ et par définition la projection $\pi_n : C_n \to C_n/D_n$ est surjective.
Donc on a une suite exacte courte de complexe de chaînes :

$$0 \longrightarrow D_\bullet \xrightarrow{i_\bullet} C_\bullet \xrightarrow{\pi_\bullet} C_\bullet/D_\bullet \longrightarrow 0$$

Alors d'après le Lemme 2.24 il existe bien un morphisme de groupes $\partial_n : H_n(C_\bullet/D_\bullet) \to H_{n-1}(D_\bullet)$ tel que la suite longue est exacte. □

3. Homologie singulière

3.1. Simplexes

Définition 3.1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et A un sous-ensemble de E. On dit que A est *convexe* si :

$$\forall p, q \in A, [p, q] \coloneqq \{(1-t)p + tq \mid t \in [0,1]\} \subset A.$$

Définition 3.2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, A un sous-ensemble de E et $p_0, \dots, p_n$ des éléments de A. On appelle *combinaison convexe* une combinaison linéaire de la forme $t_0 p_0 + \dots + t_n p_n$ où $t_0, \dots, t_n \in [0,1]$ et $t_0 + \dots + t_n = 1$.

Proposition 3.3. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, A un sous-ensemble de E et $p_0, \dots, p_n$ des éléments de A. Si A est convexe, alors toute combinaison convexe de $p_0, \dots, p_n$ appartient à A.

Démonstration. Soit $t_0, \dots, t_n \in [0,1]$ tels que $t_0 + \dots + t_n = 1$. Notons $H(n) : t_0 p_0 + \dots + t_n p_n \in A$.
Pour $n = 1$. On pose $t \coloneqq t_1$, alors puisque A est convexe $t_0 p_0 + t_1 p_1 = (1-t)p_0 + t p_1 \in A$.
Pour $n > 1$. On suppose que $H(n-1)$ est vérifiée. Sans perte de généralité, on suppose que $t_n \neq 0$, et on pose :

$$p \coloneqq \frac{t_0}{1-t_n} p_0 + \dots + \frac{t_{n-1}}{1-t_n} p_{n-1}$$

alors d'après $H(n-1)$ on a $p \in A$. Par convexité on a $t_0 p_0 + \dots + t_n p_n = (1-t_n)p + t_n p_n \in A$. □

Définition 3.4. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et A un sous-ensemble de E. On appelle *enveloppe convexe de* A, notée $\mathrm{Conv}(A)$, l'ensemble des combinaisons convexes d'éléments de A.

Proposition 3.5. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et A un sous-ensemble de E. Alors l'enveloppe convexe de A est le plus petit ensemble convexe contenant A.

Démonstration. Soit $p, q \in \mathrm{Conv}(A)$ et $t \in [0,1]$. Puisque p et q sont des combinaisons convexes d'éléments de A, d'après la Proposition 3.3 on a $(1-t)p + tq \in \mathrm{Conv}(A)$. Donc l'ensemble $\mathrm{Conv}(A)$ est convexe.

Soit B un sous-ensemble convexe de E contenant A. Soit $x \in \mathrm{Conv}(A)$. Puisque x est une combinaison convexe d'éléments de $A \subset B$, d'après la Proposition 3.3 on a $x \in B$. Donc $\mathrm{Conv}(A) \subset B$. □

Définition 3.6. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et F une famille libre de $n+1$ éléments de E. On appelle *n-simplexe généré par F* l'enveloppe convexe de F. On dit que les éléments de F sont les *sommets* de $\mathrm{Conv}(F)$ et que n est la *dimension* de $\mathrm{Conv}(F)$.

Définition 3.7. On appelle *n-simplexe standard*, noté Δ^n, le n-simplexe généré par la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Proposition 3.8. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $F \coloneqq (f_0, \dots, f_n)$ une famille libre de $n+1$ éléments de E. Alors l'application :

$$\langle f_0, \dots, f_n \rangle : \Delta^n \to \mathrm{Conv}(F); (t_0, \dots, t_n) \mapsto t_0 f_0 + \dots + t_n f_n$$

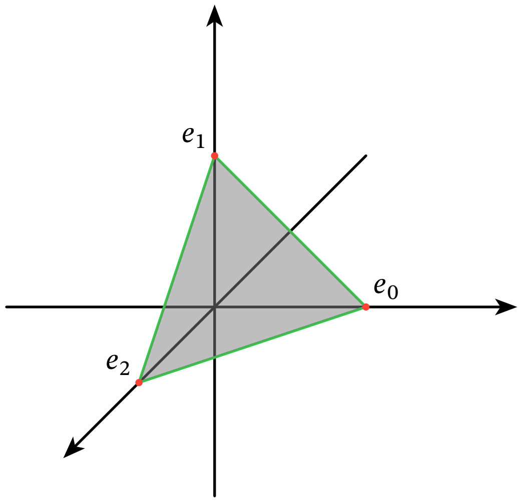
est un homéomorphisme.

Démonstration. Soit $(s_0, \dots, s_n), (t_0, \dots, t_n) \in \Delta^n$ tels que $s_0 f_0 + \dots + s_n f_n = t_0 f_0 + \dots + t_n f_n$. En particulier on a $(s_0 - t_0) f_0 + \dots + (s_n - t_n) f_n = 0$, et puisque la famille $(f_0, \dots, f_n)$ est libre, on obtient $s_0 - t_0 = \dots = s_n - t_n = 0$, c'est-à-dire $(s_0, \dots, s_n) = (t_0, \dots, t_n)$. Donc $\langle f_0, \dots, f_n \rangle$ est injective.
Soit $x \in \mathrm{Conv}(F)$. Alors il existe $(t_0, \dots, t_n) \in \Delta^n$ tels que $x \coloneqq t_0 f_0 + \dots + t_n f_n$. Donc $\langle f_0, \dots, f_n \rangle$ est surjective. Puisque $\langle f_0, \dots, f_n \rangle$ est une application linéaire et que Δ^n est de dimension finie, $\langle f_0, \dots, f_n \rangle$ est continue. De plus Δ^n est compact et $\mathrm{Conv}(F)$ est séparé, donc $\langle f_0, \dots, f_n \rangle$ est un homéomorphisme. □

Définition 3.9. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $F := (f_0, ..., f_n)$ une famille libre de $n+1$ éléments de E et $x := t_0 f_0 + ... + t_n f_n$ un élément de $\mathrm{Conv}(F)$. On appelle *coordonnées barycentriques de x* les coefficients $t_0, ..., t_n \in [0,1]$.

Définition 3.10. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, F une famille libre de $n+1$ éléments de E et G une famille non-vide d'éléments de $m+1$ éléments de F. On dit que $\mathrm{Conv}(G)$ est une *m-face* de $\mathrm{Conv}(F)$.

Exemple 3.11. Un 2-simplexe standard, il s'agit d'un triangle, les arêtes en vert sont des 1-faces du triangle, les sommets en rouge sont des 0-faces du triangle et des arêtes :



3.2. Chaînes singulières

Définition 3.12. Soit X un espace topologique. On appelle *n-simplexe singulier sur X* une application continue de Δ^n dans X.

Exemple 3.13. L'application $\langle e_0, ..., e_n \rangle$ de la Proposition 3.8, où $(e_0, ..., e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$, est un n-simplexe singulier sur $\mathbb{R}^{n+1}$.

Proposition 3.14. Soit X et Y deux espaces topologiques, $\sigma : \Delta^n \to X$ un n-simplexe singulier sur X et $f : X \to Y$ une application continue. Alors la composition $f \circ \sigma : \Delta^n \to Y$ est un n-simplexe singulier sur Y.

Définition 3.15. Soit X un espace topologique. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on appelle *groupe des n-chaînes singulières*, noté $C_n(X)$, le groupe abélien libre engendré par les n-simplexes singuliers sur X.

Démonstration. Puisque f est continue sur X et σ est continue sur Δ^n, par composition $f \circ \sigma$ est continue de Δ^n dans Y. Donc $f \circ \sigma$ est un n-simplexe singulier sur X. □

Définition 3.16. Soit X et Y deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application continue. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle *application induite par f*, notée $C_n(f)$, le morphisme de groupes :

$$C_n(f) : C_n(X) \to C_n(Y); \sum_{k=0}^{m} \lambda_k \sigma_k \mapsto \sum_{k=0}^{m} \lambda_k (f \circ \sigma_k).$$

Proposition 3.17. Soit X, Y et Z trois espaces topologiques, $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux applications continues. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $C_n(g \circ f) = C_n(g) \circ C_n(f)$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque les n-chaînes singulières sont engendrées par les n-simplexes singuliers, il suffit de montrer le résultat pour un n-simplexe singulier $\sigma : \Delta^n \to X$. Alors on a :

$$C_n(g \circ f)(\sigma) = (g \circ f) \circ \sigma = g \circ (f \circ \sigma) = g \circ C_n(f)(\sigma) = C_n(g)(C_n(f)(\sigma))$$

□

Proposition 3.18. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le groupe des n-chaînes singulières C_n est un foncteur de Top vers Ab.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$.
- Soit X un espace topologique. Alors le groupe des n-chaînes singulières $C_n(X)$ est bien un groupe abélien.
- Soit X et Y deux espaces topologiques, $f : X \to Y$ une application continue. Alors l'application induite $C_n(f) : C_n(X) \to C_n(Y)$ est bien un morphisme de groupes.

La propriété de composition découle de la Proposition 3.17 et la propriété d'identité découle directement de la définition, donc C_n est bien un foncteur de Top vers Ab. □

Définition 3.19. Soit X un espace topologique et $\sigma : \Delta^n \to X$ un n-simplexe singulier sur X. On appelle *bord de* σ, noté $\mathrm{d}_n\sigma$, la $(n-1)$-chaîne singulière sur X définie par :

$$\mathrm{d}_n\sigma \coloneqq \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\Big(\sigma \circ \big\langle e_0, ..., \widehat{e_k}, ...e_n\big\rangle\Big).$$

où le symbole $\widehat{\cdot}$ signifie que l'élément est enlevé.

Remarque 3.20. Le bord d'un n-simplexe singulier est la somme alternée de ses $(n-1)$-faces.

Définition 3.21. Soit X un espace topologique et $n \in \mathbb{N}$. On appelle *morphisme de bord*, noté d_n, le morphisme de groupes induit :

$$\mathrm{d}_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X); \sum_{k=0}^{m} \lambda_k\sigma_k \mapsto \sum_{k=0}^{m} \lambda_k \mathrm{d}_n\sigma_k.$$

Proposition 3.22. Soit X et Y deux espaces topologiques, $f : X \to Y$ une application continue. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{d}_n C_n(f) = C_{n-1}(f)\mathrm{d}_n$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque les n-chaînes singulières sont engendrées par les n-simplexes singuliers, il suffit de montrer le résultat pour un n-simplexe singulier $\sigma : \Delta^n \to X$. Alors on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_n C_n(f)(\sigma) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\Big((f \circ \sigma) \circ \big\langle e_0, ..., \widehat{e_k}, ..., e_n\big\rangle\Big) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\Big(f \circ \Big(\sigma \circ \big\langle e_0, ..., \widehat{e_k}, ..., e_n\big\rangle\Big)\Big) \\
&= C_{n-1}(f)(\mathrm{d}_n\sigma).
\end{aligned}$$

□

Proposition 3.23. Soit X un espace topologique. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{d}_n\mathrm{d}_{n+1} = 0$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque les n-chaînes singulières sont engendrées par les n-simplexes singuliers, il suffit de montrer le résultat pour un n-simplexe singulier $\sigma : \Delta^n \to X$. Alors on a :

$$\mathrm{d}_{n+1}\sigma = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k\Big(\sigma \circ \big\langle e_0, ..., \widehat{e_k}, ..., e_n\big\rangle\Big)$$

donc en appliquant d_n, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_n\mathrm{d}_{n+1}\sigma &= \mathrm{d}_n\left(\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k\Big(\sigma \circ \big\langle e_0, ..., \widehat{e_k}, ..., e_n\big\rangle\Big)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \mathrm{d}_n\Big(\sigma \circ \big\langle e_0, ..., \widehat{e_k}, ..., e_n\big\rangle\Big))
\end{aligned}$$

on sépare la somme en deux selon les éléments enlevés :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_n\mathrm{d}_{n+1}\sigma &= \sum_{0\le k<l\le n+1} (-1)^{k+l}\big(\sigma \circ \langle e_0, \dots, \widehat{e_k}, \dots, \widehat{e_l}, \dots, e_n\rangle\big) \\
&\quad + \sum_{0\le l<k\le n+1} (-1)^{k+l-1}\big(\sigma \circ \langle e_0, \dots, \widehat{e_l}, \dots, \widehat{e_k}, \dots, e_n\rangle\big) \\
&= \sum_{0\le k<l\le n+1} \big((-1)^{k+l} + (-1)^{k+l+1}\big)\big(\sigma \circ \langle e_0, \dots, \widehat{e_k}, \dots, \widehat{e_l}, \dots, e_n\rangle\big) \\
&= 0
\end{aligned}$$

car les puissances de -1 s'annulent. □

3.3. Définitions de l'homologie singulière

3.3.1. D'un espace topologique

Proposition 3.24. La suite $(C_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ où pour tout $n < 0$, on pose $C_n \coloneqq 0$, munie des morphismes des bords $(\mathrm{d}_n : C_n \to C_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}$ est un foncteur de Top vers Comp.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

- Soit X un espace topologique. Alors la suite $(C_n(X))_{n\in\mathbb{Z}}$ munie des morphismes de bords $(\mathrm{d}_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X))_{n\in\mathbb{Z}}$ est bien un complexe de chaînes d'après la Proposition 3.23.
- Soit X et Y deux espaces topologiques, $f : X \to Y$ une application continue. Alors la suite des applications induites $(C_n(f) : C_n(X) \to C_n(Y))_{n\in\mathbb{Z}}$ est bien un morphisme de complexes d'après la Proposition 3.22.

La propriété de composition découle de la Proposition 3.17 et la propriété d'identité découle directement de la définition, donc C_n est bien un foncteur de Top vers Comp. □

Définition 3.25. Soit X un espace topologique. On appelle *complexe de chaînes singulières de X*, noté $C_\bullet(X)$, le complexe de chaînes déterminé par la suite $(C_n(X))_{n\in\mathbb{N}}$ munie des morphismes de bords $(\mathrm{d}_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X))_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 3.26. Soit $C_\bullet(X)$ un complexe de chaînes singulières et $n \in \mathbb{Z}$.

- On appelle *n-cycle singulier* un élément de $Z_n(X) \coloneqq Z_n(C_\bullet(X))$.
- On appelle *n-bord singulier* un élément de $B_n(X) \coloneqq B_n(C_\bullet(X))$.
- On appelle *n^{e} groupe d'homologie singulière de X* le groupe $H_n(X) \coloneqq H_n(C_\bullet(X))$.
- On appelle *homologie singulière de X* le groupe $H_\bullet(X) \coloneqq H_\bullet(C_\bullet(X))$.

Définition 3.27. Soit X et Y deux espaces topologiques, $f : X \to Y$ une application continue. On appelle *morphisme de complexes induit par f*, notée $f_\bullet : C_\bullet(X) \to C_\bullet(Y)$, la suite des applications induites $f_\bullet \coloneqq (C_n(f) : C_n(X) \to C_n(Y))_{n\in\mathbb{Z}}$

Corollaire 3.28. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le n^{e} groupe d'homologie singulière H_n est un foncteur de Top vers Ab.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$. D'après la Proposition 3.24 $C_\bullet$ est un foncteur de Top vers Comp et d'après le Théorème 2.12 H_n est un foncteur de Comp vers Ab, par composition $H_n = H_n(C_\bullet)$ est bien un foncteur de Top vers Ab. □

Corollaire 3.29. L'homologie singulière $H_\bullet$ est un foncteur de Top vers GrAb.

Démonstration. D'après la Proposition 3.24 $C_\bullet$ est un foncteur de Top vers Comp et d'après le Corollaire 2.13 $H_\bullet$ est un foncteur de Comp vers GrAb, par composition $H_\bullet = H_\bullet(C_\bullet)$ est bien un foncteur de Top vers GrAb. □

3.3.2. D'une paire d'espace topologique

Proposition 3.30. La suite $(C_n/C_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ où pour tout $n<0$, on pose $C_n \coloneqq 0$, munie des morphismes des bords induits $\left(\overline{\mathrm{d}}_n : C_n/C_n \to C_{n-1}/C_{n-1}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un foncteur de Top_2 vers Comp.

Démonstration. Soit $n\in\mathbb{Z}$.

- Soit (X,A) une paire d'espaces topologiques. Alors il est clair que $C_\bullet(A)$ est un sous-complexe de chaînes de $C_\bullet(X)$, donc la suite $(C_n(X)/C_n(A))_{n\in\mathbb{Z}}$ munie des morphismes de bords induits $\left(\overline{\mathrm{d}}_n : C_n(X)/C_n(A) \to C_{n-1}(X)/C_{n-1}(A)\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est bien un complexe de chaînes d'après la Proposition 2.19.
- Soit (X,A) et (Y,B) deux paires d'espaces topologiques, $f:(X,A)\to(Y,B)$ un morphisme de paires. Alors il est clair que $f_\bullet(C_\bullet(A))\subset C_\bullet(B)$, donc le morphisme induit $\overline{f_\bullet} : C_n(X)/C_n(A) \to C_n(Y)/C_n(B)$ est bien un morphisme de complexes d'après la Proposition 2.22.

La propriété de composition découle de la Proposition 3.17 par passage au quotient et la propriété d'identité découle directement de la définition, donc C_n est bien un foncteur de Top vers Comp. ☐

Définition 3.31. Soit (X,A) une paire d'espaces topologiques. On appelle *complexe de chaînes singulières de la paire* (X,A), noté $C_\bullet(X,A)$, le complexe de chaînes quotient $C_\bullet(X,A)\coloneqq C_\bullet(X)/C_\bullet(A)$.

Définition 3.32. Soit $C_\bullet(X,A)$ un complexe de chaînes singulières et $n\in\mathbb{Z}$.

- On appelle *n-cycle singulier* un élément de $Z_n(X,A)\coloneqq Z_n(C_\bullet(X)/C_\bullet(A))$.
- On appelle *n-bord singulier* un élément de $B_n(X,A)\coloneqq B_n(C_\bullet(X)/C_\bullet(A))$.
- On appelle *ne groupe d'homologie singulière de X* le groupe $H_n(X,A)\coloneqq H_n(C_\bullet(X)/C_\bullet(A))$.
- On appelle *homologie singulière de X* le groupe $H_\bullet(X,A)\coloneqq H_\bullet(C_\bullet(X)/C_\bullet(A))$.

Remarque 3.33. Dans le cas de la paire d'espaces topologiques $(X,\varnothing)$, on trouve $C_\bullet(X,\varnothing)\simeq C_\bullet(X)$ et $H_\bullet(X,\varnothing)\simeq H_\bullet(X)$.

Corollaire 3.34. Pour tout $n\in\mathbb{Z}$, le ne groupe d'homologie singulière de paires H_n est un foncteur de Top_2 vers Ab.

Démonstration. Soit $n\in\mathbb{Z}$. D'après la Proposition 3.30 $C_\bullet$ est un foncteur de Top_2 vers Comp et d'après le Théorème 2.12 H_n est un foncteur de Comp vers Ab, par composition $H_n = H_n(C_\bullet)$ est bien un foncteur de Top_2 vers Ab. ☐

Corollaire 3.35. L'homologie singulière de paires $H_\bullet$ est un foncteur de Top_2 vers GrAb.

Démonstration. D'après la Proposition 3.30 $C_\bullet$ est un foncteur de Top_2 vers Comp et d'après le Corollaire 2.13 $H_\bullet$ est un foncteur de Comp vers GrAb, par composition $H_\bullet = H_\bullet(C_\bullet)$ est bien un foncteur de Top_2 vers GrAb. ☐

3.4. Principales propriétés et axiomes d'Eilenberg-Steenrod

Théorème 3.36 (Axiome de dimension)**.** Soit P un espace topologique constitué d'un unique point. Alors pour tout $n\in\mathbb{Z}$, on a $H_n(P)=\mathbb{Z}$ si $n=0$ et $H_n(P)=\{0\}$ sinon.

Démonstration. Si $n<0$, on a clairement $H_n(P)\simeq\{0\}$.
Si $n\geq 0$, il existe un unique n-simplexe singulier $\sigma_n:\Delta^n\to P$, alors on a :

$$\mathrm{d}_n\sigma_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\sigma_{n-1} = \begin{cases} 0 & \text{si } n=0 \text{ ou } n \text{ est impair} \\ \sigma_{n-1} & \text{si } n\neq 0 \text{ et } n \text{ est pair} \end{cases}$$

dans le cas $n=0$, alors $H_0(P)=\langle\sigma_0\rangle/\{0\}\simeq\mathbb{Z}$,
dans le cas $n\neq 0$ et n est impair, alors $H_n(P)=\langle\sigma_n\rangle/\langle\sigma_n\rangle\simeq\{0\}$,
dans le cas $n\neq 0$ et n est pair, alors $H_n(P)=\{0\}/\{0\}\simeq\{0\}$. ☐

Définition 3.37. Soit X et Y deux espaces topologies, $f : X \to Y$ et $g : X \to Y$ deux applications continues. On dit que f et g sont *homotopes* s'il existe une application continue $h : X \times [0,1] \to Y$ telle que pour tout $x \in X$, on a $f(x) = h(x,0)$ et $g(x) = h(x,1)$.

Lemme 3.38. Soit X et Y deux espaces topologiques, $f : X \to Y$ et $g : X \to Y$ deux applications continues homotopes. Alors les morphismes de complexes $f_\bullet : C_\bullet(X) \to C_\bullet(Y)$ et $g : C_\bullet(X) \to C_\bullet(Y)$ sont homotopes.

Démonstration. Par définition de l'homotopie il existe une application continue $h : X \times [0,1] \to Y$ telle que $f(x) = h(x,0)$ et $g(x) = h(x,1)$.

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Puisque les n-chaînes singulières sont engendrées par les n-simplexes singuliers, il suffit de définir une homotopie pour un n-simplexe singulier $\sigma : \Delta^n \to X$. Alors on pose :

$$h_n(\sigma) := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (h \circ (\sigma \times \mathrm{id}) \circ \langle f_0, \dots, f_k, g_k, \dots, g_n \rangle) \in C_{n+1}(Y)$$

où $(f_0, \dots, f_n) := (e_0 \times \{1\}, \dots, e_n \times \{1\})$ et $(g_0, \dots, g_n) := (e_0 \times \{0\}, \dots, e_n \times \{0\})$. Calculons maintenant les deux expressions qui nous intéressent :

$$\begin{aligned} h_{n-1}(\mathrm{d}_n\sigma) &= h_n\left(\sum_{l=0}^{n} (-1)^l \left(\sigma \circ \left\langle e_0, \dots, \widehat{e_l}, \dots, e_n \right\rangle \right) \right) \\ &= \sum_{0 \le k < l \le n} (-1)^{k+l} \left(h \circ (\sigma \times \mathrm{id}) \circ \left\langle f_0, \dots, f_k, g_k, \dots, \widehat{g_l}, \dots, g_n \right\rangle \right) \\ &\quad + \sum_{0 \le l < k \le n} (-1)^{k+l-1} \left(h \circ (\sigma \times \mathrm{id}) \circ \left\langle f_0, \dots, \widehat{f_l}, \dots, f_k, g_k, \dots, g_n \right\rangle \right) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_n h_n(\sigma) &= \mathrm{d}_n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (h \circ (\sigma \times \mathrm{id}) \circ \langle f_0, \dots, f_k, g_k, \dots, g_n \rangle) \\ &= \sum_{0 \le l \le k \le n} (-1)^{k+l} \left(h \circ (\sigma \times \mathrm{id}) \circ \left\langle f_0, \dots, \widehat{f_l}, \dots, f_k, g_k, \dots, g_n \right\rangle \right) \\ &\quad + \sum_{0 \le k \le l \le n} (-1)^{k+l-1} \left(h \circ (\sigma \times \mathrm{id}) \circ \left\langle f_0, \dots, f_k, g_k, \dots, \widehat{g_l}, \dots, g_n \right\rangle \right) \end{aligned}$$

en faisant la somme des deux expressions les termes d'indices différents s'annulent deux à deux :

$$\begin{aligned} h_{n-1}(\mathrm{d}_n\sigma) + \mathrm{d}_n h_n(\sigma) &= \sum_{k=0}^{n} (h \circ (\sigma \times \mathrm{id}) \circ \langle f_0, \dots, f_{k-1}, g_k, \dots, g_n \rangle) \\ &\quad - \sum_{k=0}^{n} (h \circ (\sigma \times \mathrm{id}) \circ \langle f_0, \dots, f_k, g_{k+1}, \dots, g_n \rangle) \\ &= (h \circ (\sigma \times \mathrm{id}) \circ \langle g_0, \dots, g_n \rangle) - (h \circ (\sigma \times \mathrm{id}) \circ \langle f_0, \dots, f_n \rangle) \\ &= (h \circ (\sigma \times \{0\})) - (h \circ (\sigma \times \{1\})) \\ &= (f \circ \sigma) - (g \circ \sigma) \\ &= C_n(f)(\sigma) - C_n(g)(\sigma) \end{aligned}$$

Donc les morphismes de complexes $f_\bullet$ et $g_\bullet$ sont bien homotopes. □

Théorème 3.39 (Axiome d'homotopie)**.** Soit X et Y deux espaces topologiques, $f : X \to Y$ et $g : X \to Y$ deux applications continues homotopes. Alors on a $H_\bullet(f) = H_\bullet(g)$.

Démonstration. Puisque f et g sont homotopes, d'après le Lemme 3.38 $f_\bullet$ et $g_\bullet$ sont homotopes. Donc d'après le Lemme 2.17 on a bien $H_\bullet(f) = H_\bullet(g)$. □

Théorème 3.40 (Axiome d'exactitude)**.** Soit $C_\bullet(X,A)$ un complexe de chaînes singulières. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il existe un morphisme de groupes $\partial_n : H_n(X,A) \to H_{n-1}(A)$ telle que la suite longue suivante est exacte :

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A) \xrightarrow{H_n(i)} H_n(X) \xrightarrow{H_n(j)} H_n(X,A) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A) \xrightarrow{H_{n-1}(i)} \cdots$$

où $i : A \to X$ et $j : (X,\varnothing) \to (X,A)$ sont les inclusions canoniques.

Démonstration. On remarque que $i_\bullet : C_\bullet(A) \to C_\bullet(X)$ est l'inclusion canonique et qu'en passant au quotient $\overline{j}_\bullet : C_\bullet(X,\varnothing) \simeq C_\bullet(X) \to C_\bullet(X,A)$ devient la projection canonique.
Donc d'après le Lemme 2.26 il existe bien un morphisme de groupes $\partial_n : H_n(X,A) \to H_{n-1}(A)$ tel que la suite longue est exacte. □

Théorème 3.41 (Axiome d'excision)**.** Soit (X,A) une paire d'espaces topologiques, U une partie de A telle que $\overline{U} \subset \mathring{A}$ et $i : (X \setminus U, A \setminus U) \to (X,A)$ l'inclusion canonique. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le morphisme induit $H_n(i) : H_n(X \setminus U, A \setminus U) \to H_n(X,A)$ est un isomorphisme.

Démonstration. Admise. □

Théorème 3.42 (Théorème de Mayer-Vietoris)**.** Soit U et V deux ouverts d'un espace topologique. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il existe un morphisme de groupes $\partial_n : H_n(U \cup V) \to H_{n-1}(U \cap V)$ tel que la suite longue suivante est exacte :

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(U \cap V) \xrightarrow{(-H_n(i_0), H_n(i_1))} H_n(U) \oplus H_n(V) \xrightarrow{H_n(j_0) + H_n(j_1)} H_n(U \cup V) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(U \cap V) \xrightarrow{(-H_{n-1}(i_0), H_{n-1}(i_1))} \cdots$$

où $i_0 : U \cap V \to U$, $i_1 : U \cap V \to V$, $j_0 : U \to U \cup V$ et $j_1 : V \to U \cup V$ sont les inclusions canoniques

Démonstration. Admise. □

Définition 3.43. Une *théorie de l'homologie* sur la catégorie des paires d'espaces topologiques Top_2 dans la catégorie des groupes abéliens Ab est une suite de foncteurs $(H_n : \mathsf{Top}_2 \to \mathsf{Ab})_{n\in\mathbb{Z}}$ munie de transformations naturelles $(\partial_n : H_n(X,A) \to H_{n-1}(A) := H_{n-1}(A,\varnothing))_{n\in\mathbb{Z}}$ vérifiant les *axiomes d'Eilenberg-Steenrod* pour toutes paires d'espaces topologiques $(X,A), (Y,B)$ et $n \in \mathbb{Z}$:

- *Dimension* : Soit P un espace constitué d'un unique point. Alors le groupe $H_n(P)$ est non-trivial si et seulement si $n = 0$.
- *Homotopie* : Soit $f : (X,A) \to (Y,B)$ et $g : (X,A) \to (Y,B)$ deux morphismes de paires homotopes. Alors on a $H_n(f) = H_n(g)$
- *Exactitude* : La suite longue suivante est exacte :

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A) \xrightarrow{H_n(i)} H_n(X) \xrightarrow{H_n(j)} H_n(X,A) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A) \xrightarrow{H_{n-1}(i)} \cdots$$

  où $i : A \to X$ et $j : (X,\varnothing) \to (X,A)$ sont les inclusions canoniques.
- *Excision* : Soit U une partie de A telle que $\overline{U} \subset \mathring{A}$ et $i : (X \setminus U, A \setminus U) \to (X,A)$ l'inclusion canonique. Alors le morphisme induit $H_n(i) : H_n(X \setminus U, A \setminus U) \to H_n(X,A)$ est un isomorphisme.

Corollaire 3.44. La suite des n^{e} groupe d'homologie singulière de paires $(H_n : \mathsf{Top}_2 \to \mathsf{Ab})_{n\in\mathbb{Z}}$ munie des morphismes $(\partial_n : H_n(X,A) \to H_{n-1}(A))_{n\in\mathbb{Z}}$ est une théorie de l'homogie vérifiant les axiomes d'Eilenberg-Steenrod.

Bibliographie

[1] Eduard Looijenga, *Algebraic Topology - an introduction*. 2010.

[2] Allen Hatcher, *Algebraic Topology*. 2001.