Le problème du rectangle inscrit

7 Juillet 2025

Introduction

« Toute courbe de Jordan admet-elle un carré inscrit ? »

Introduction

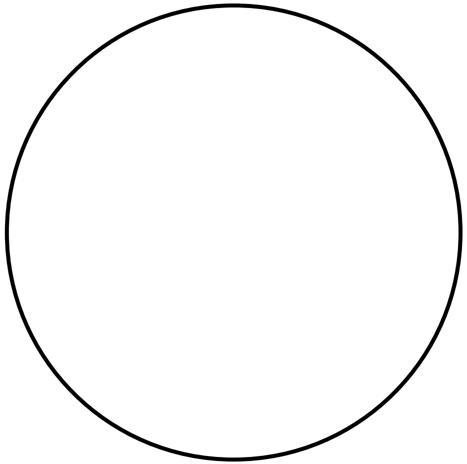
« Toute courbe de Jordan admet-elle un ~~carré~~ rectangle inscrit ? »

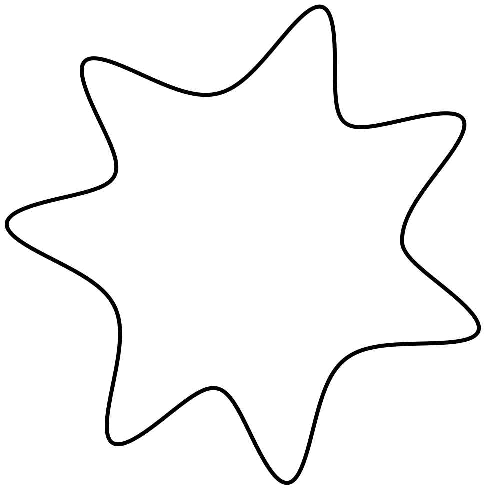
Définitions

Définition

Une partie C de $\mathbb{R}^2$ est une *courbe de Jordan* s'il existe une application continue $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$:

- C est une courbe : $\mathrm{im}(\gamma) = C$.
- C est fermée : $\gamma(0) = \gamma(1)$.
- C est simple : γ est injective sur $[0,1[$.

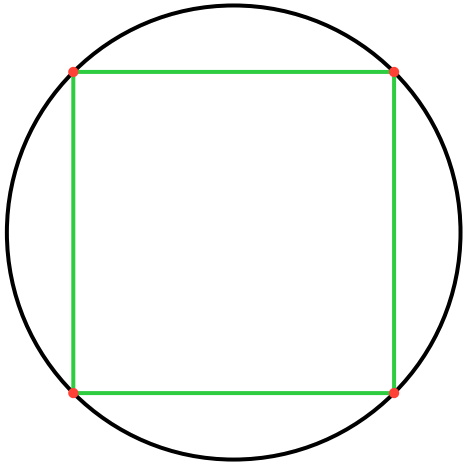


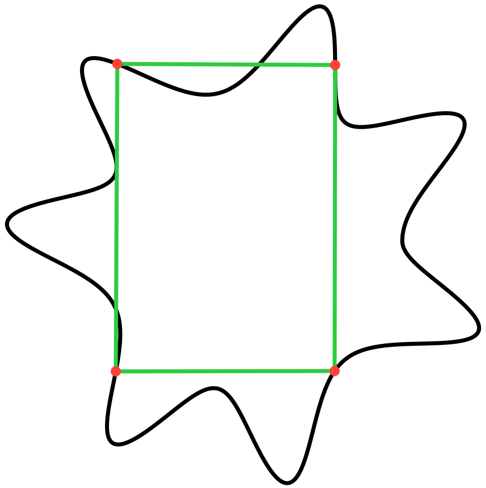


Définitions

Définition

Un rectangle (a, b, c, d) de $\mathbb{R}^2$ est *inscrit dans une courbe de Jordan* C si $a, b, c, d \in C$.





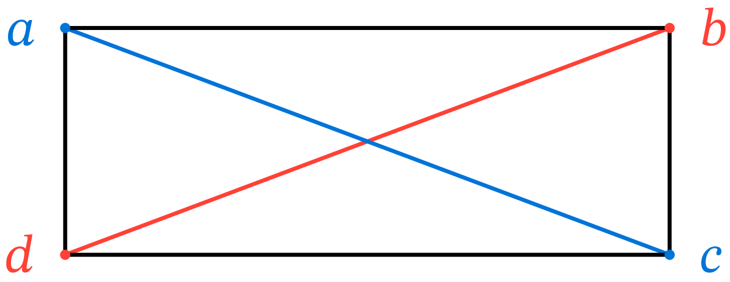
Théorème

Toute courbe de Jordan admet un rectangle inscrit.

Dans la suite on considère une courbe de Jordan C.

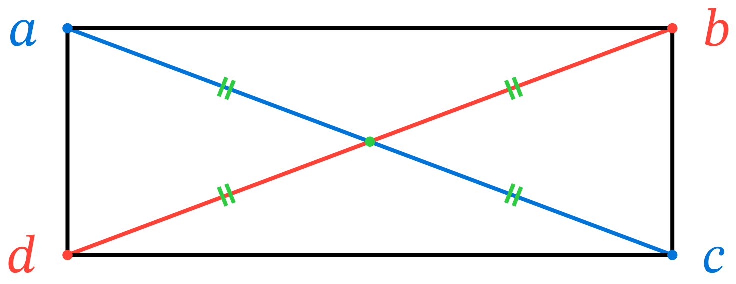
Reformulation

On représente un rectangle par 2 paires de sommets de $C \times C$ formant les diagonales :



Reformulation

On représente un rectangle par 2 paires de sommets de $C \times C$ formant les diagonales :

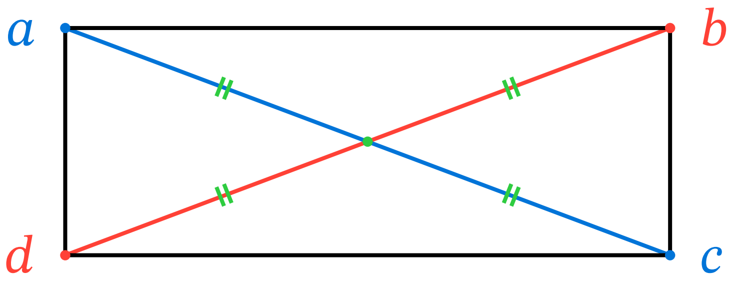


Proposition

2 paires de sommets de $C \times C$ <u>non-ordonnées</u> forment un rectangle si et seulement si elles sont distinctes, ont le même milieu et ont la même distance.

Reformulation

On représente un rectangle par 2 paires de sommets de $C \times C$ formant les diagonales :



Proposition

2 paires de sommets de $C \times C$ non-ordonnées forment un rectangle si et seulement si elles sont distinctes, ont le même milieu et ont la même distance.

Remarque

2 paires de sommets ordonnées pourraient être distinctes et former la même diagonale, pour éviter ça on étudie le quotient Q de $C \times C$ par la relation d'équivalence $(a, b) \sim (b, a)$.

Réinterprétation

On définit une application qui regroupe ces informations :

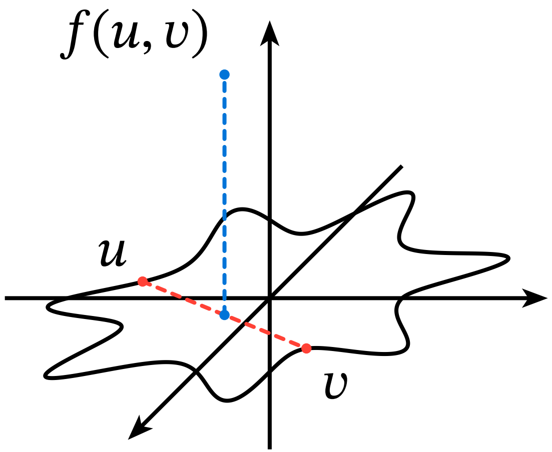
$$f : C \times C \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^3; (u, v) \mapsto \left(\frac{u+v}{2}, d(u, v)\right)$$

Réinterprétation

On définit une application qui regroupe ces informations :

$$f : C \times C \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^3; (u, v) \mapsto \left(\frac{u+v}{2}, d(u, v)\right)$$

Elle décrit une surface dans $\mathbb{R}^3$:

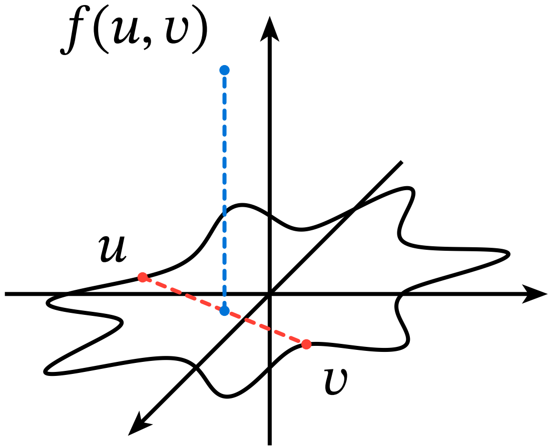


Réinterprétation

On définit une application qui regroupe ces informations :

$$f : C \times C \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^3; (u, v) \mapsto \left(\frac{u+v}{2}, d(u, v)\right)$$

Elle décrit une surface dans $\mathbb{R}^3$:



- f est continue.
- f passe au quotient pour $\sim$ et induit une application continue $\varphi : Q \to \mathbb{R}^3$.

Réinterprétation

Proposition

2 paires de sommets $p, q \in Q$ forment un rectangle si et seulement si $p \neq q$ et $\varphi(p) = \varphi(q)$.

Donc la courbe de Jordan C admet un rectangle inscrit si et seulement si φ n'est pas injective.

Paramétrage

Dans la suite on suppose par l'absurde que φ est injective.

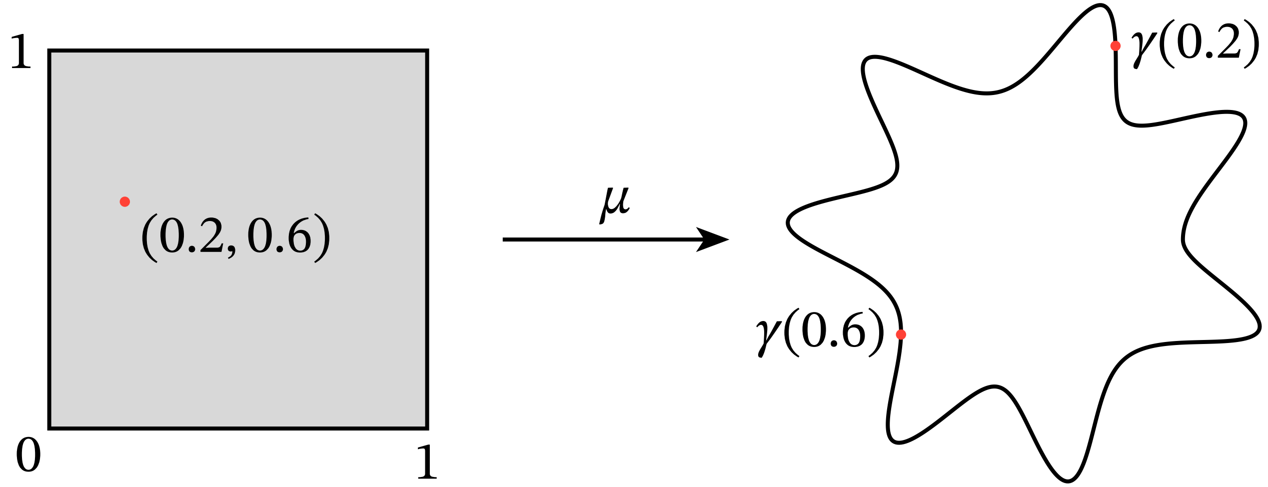
Puisque Q est compact et que la restriction $\varphi : Q \to \varphi(Q)$ est une bijection continue, on en déduit que $\varphi : Q \to \varphi(Q)$ est un homéomorphisme.

Paramétrage

Dans la suite on suppose par l'absurde que φ est injective.

Puisque Q est compact et que la restriction $\varphi : Q \to \varphi(Q)$ est une bijection continue, on en déduit que $\varphi : Q \to \varphi(Q)$ est un homéomorphisme.

Par définition C est paramétrée par une application continue $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, donc on peut paramétrer Q par l'application continue $\mu := \overline{(\gamma, \gamma)} : [0,1]^2 \to \left(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2\right)/\sim$:



Paramétrage

Mais il y a 2 problèmes avec ce paramétrage :

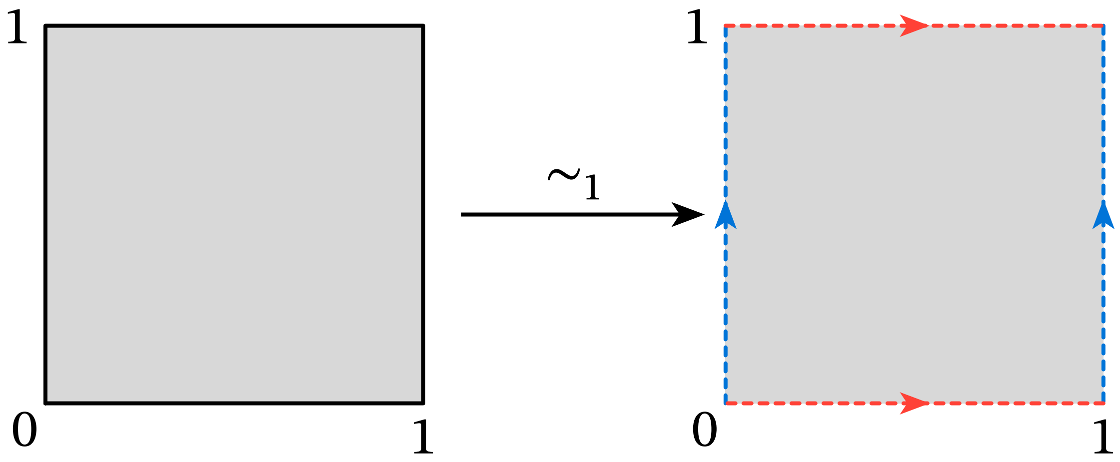
- Puisque $\gamma(0) = \gamma(1)$, on a $\mu(0, t) = \mu(1, t)$ et $\mu(t, 0) = \mu(t, 1)$.
- Puisque les paires sont non-ordonnées, on a $\mu(a, b) = \mu(b, a)$.

Mais il y a 2 problèmes avec ce paramétrage :

- Puisque $\gamma(0) = \gamma(1)$, on a $\mu(0,t) = \mu(1,t)$ et $\mu(t,0) = \mu(t,1)$.
- Puisque les paires sont non-ordonnées, on a $\mu(a,b) = \mu(b,a)$.

Pour régler ces problèmes on étudie le quotient de $[0,1]^2$ par les relations d'équivalences :

- $(0,t) \sim_1 (1,t)$ et $(t,0) \sim_1 (t,1)$,



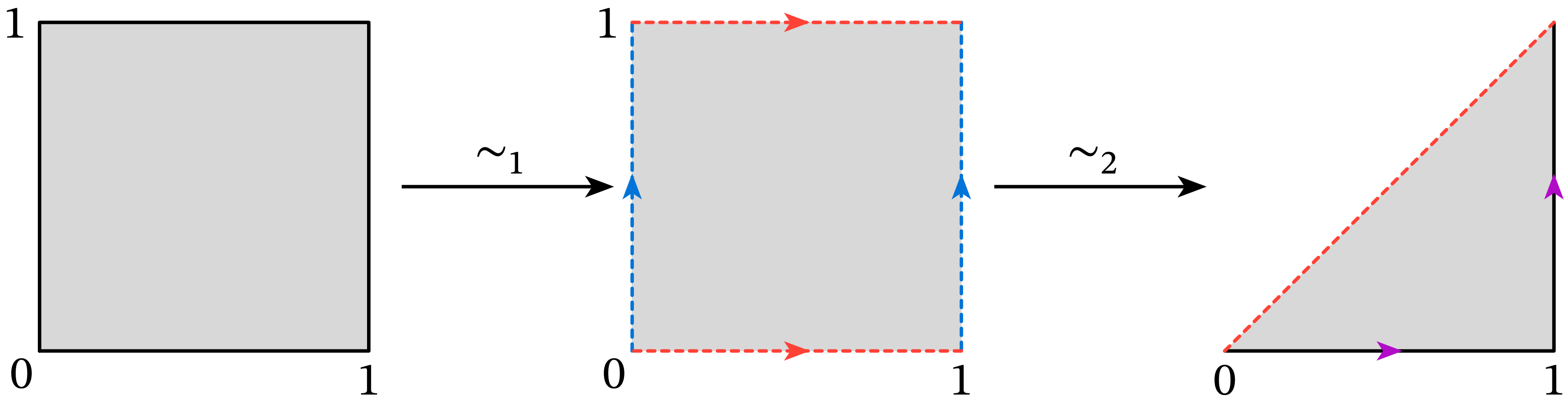
Paramétrage

Mais il y a 2 problèmes avec ce paramétrage :

- Puisque $\gamma(0) = \gamma(1)$, on a $\mu(0,t) = \mu(1,t)$ et $\mu(t,0) = \mu(t,1)$.
- Puisque les paires sont non-ordonnées, on a $\mu(a,b) = \mu(b,a)$.

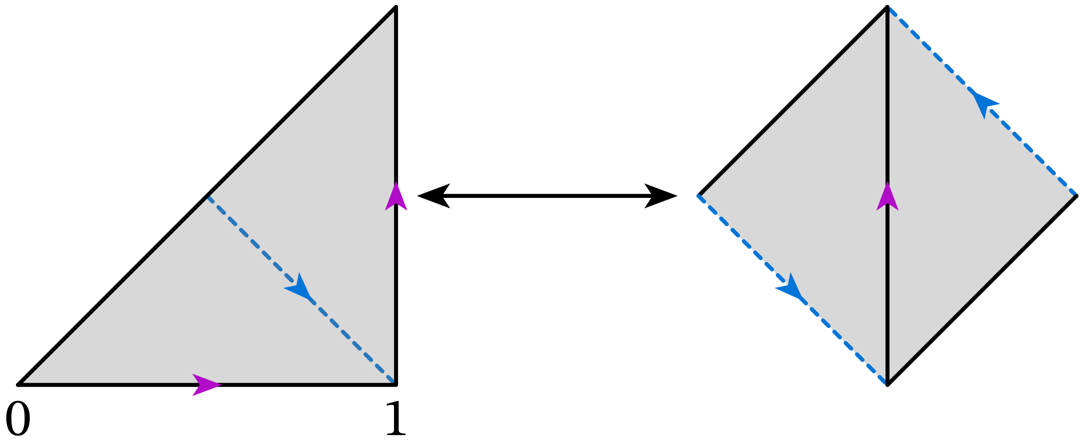
Pour régler ces problèmes on étudie le quotient de $[0,1]^2$ par les relations d'équivalences :

- $(0,t) \sim_1 (1,t)$ et $(t,0) \sim_1 (t,1)$,
- et $(a,b) \sim_2 (b,a)$.



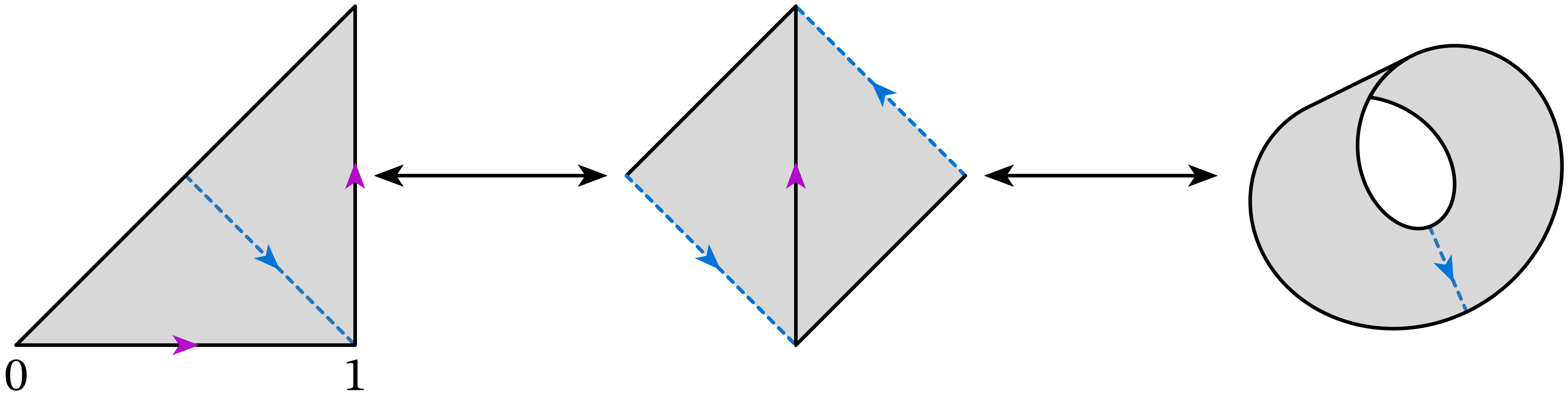
Paramétrage

On découpe le triangle pour recoller les flèches :



Paramétrage

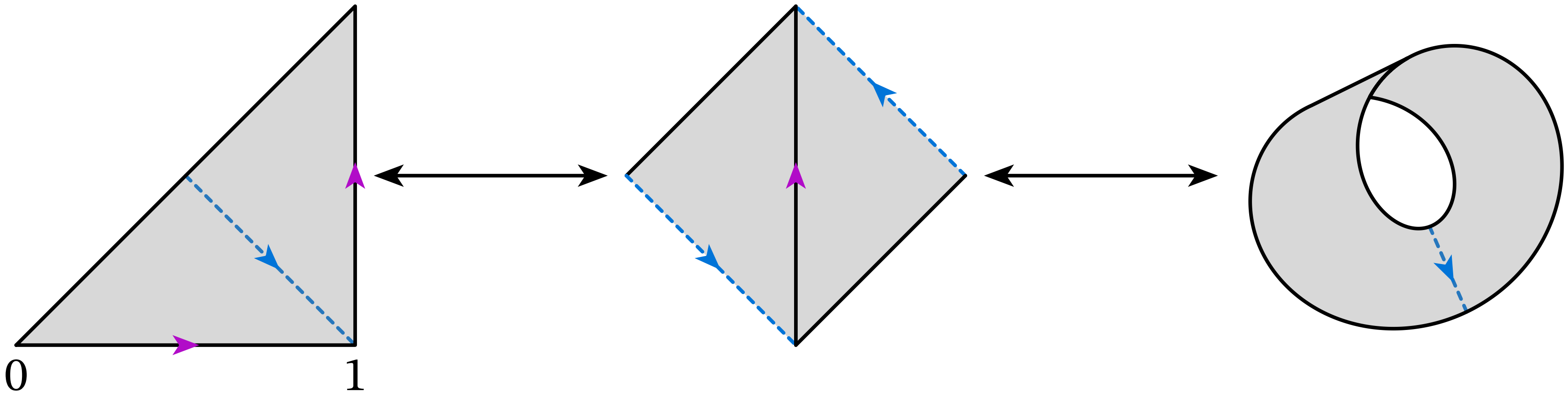
On découpe le triangle pour recoller les flèches :



et on obtient une bande de Möbius M.

Paramétrage

On découpe le triangle pour recoller les flèches :



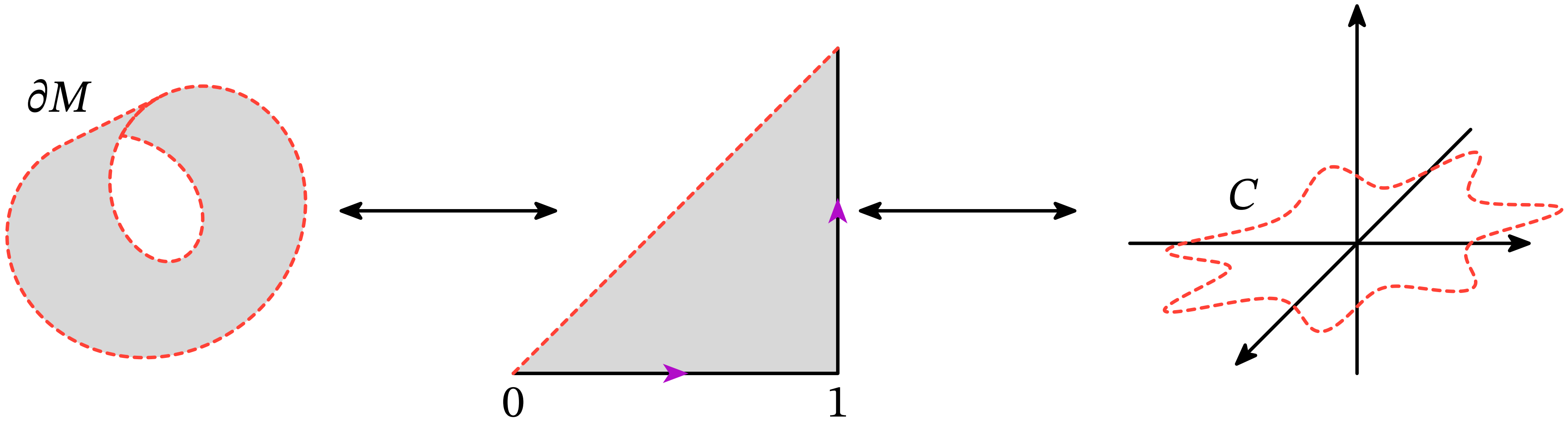
et on obtient une bande de Möbius M.

- Les déformations sont continues.
- μ passe au quotient pour $\sim_1$ et $\sim_2$, et induit un homéomorphisme $\lambda : M \to Q$.

Par composition $\varphi \circ \lambda : M \to \varphi(Q)$ est un homéomorphisme.

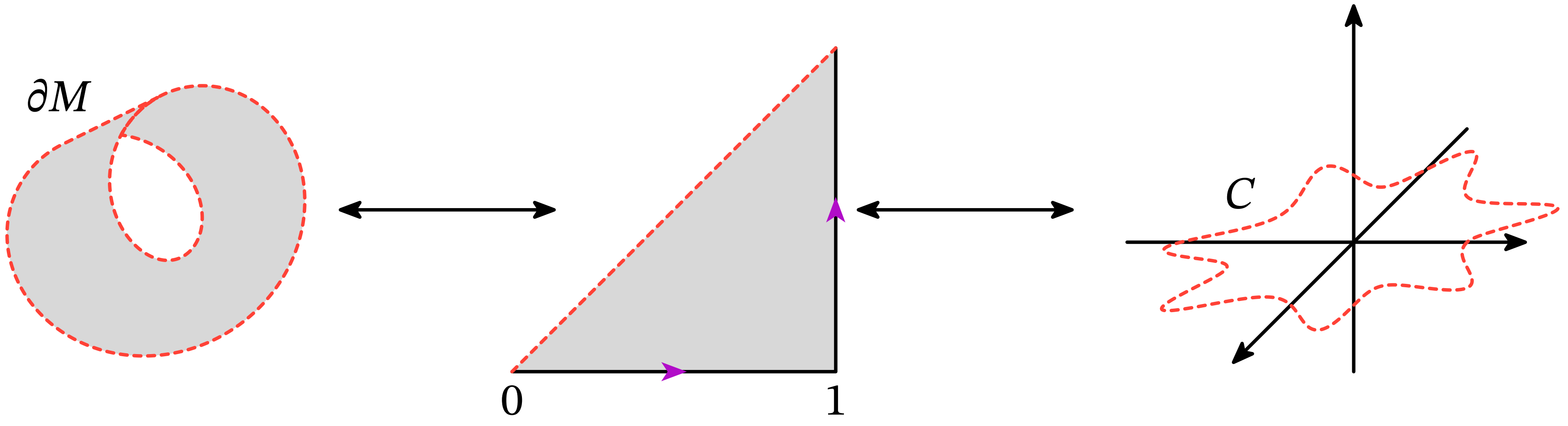
Absurdité

L'application $\varphi \circ \lambda$ vérifie $(\varphi \circ \lambda)(\partial M) = C \subset \mathbb{R}^3$:



Absurdité

L'application $\varphi \circ \lambda$ vérifie $(\varphi \circ \lambda)(\partial M) = C \subset \mathbb{R}^3$:



De plus C est homéomorphe à $\mathbb{S}^1$ et la partie D de $\mathbb{R}^2$ délimitée par C est homéomorphe à $\mathbb{B}^2$. L'espace obtenu en recollant la bande de Möbius M à D le long de leur bord C est homéomorphe au plan projectif réel $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$. Donc $\varphi \circ \lambda$ induit un plongement du plan projectif réel $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ dans $\mathbb{R}^3$.

Mais il n'existe pas de plongement du plan projectif réel $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ dans $\mathbb{R}^3$, d'où une contradiction !

Conclusion

Donc φ n'est pas injective et la courbe de Jordan C admet un rectangle inscrit.