

Calcul différentiel 2

Table des matières

1. Inversion locale et fonctions implicites	2
1.1. Théorème d'inversion locale	2
1.2. Théorème des fonctions implicites	4
2. Sous-variétés de \mathbb{R}^n	6
2.1. Sous-variétés	6

1. Inversion locale et fonctions implicites

1.1. Théorème d'inversion locale

Définition 1.1. Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \cup \{+\infty\}$, U et V deux ouverts de \mathbb{R}^n , et $f : U \rightarrow V$ une application. On dit que f est un C^k -difféomorphisme de U sur V si

- (1) f est bijective de U sur V ,
- (2) f est de classe C^k sur U ,
- (3) f^{-1} est de classe C^k sur V .

Remarque 1.2. Soit $f : U \rightarrow V$ un C^k -difféomorphisme, alors

$$\forall x \in U, f^{-1}(f(x)) = x$$

$$\forall y \in V, f(f^{-1}(y)) = y$$

de plus en appliquant le théorème de composition des différentielles

$$df^{-1}(f(x)) \circ df(x) = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$$

$$df(f^{-1}(x)) \circ df^{-1}(x) = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$$

donc $df(x)$ est inversible avec $df(x)^{-1} = df^{-1}(f(x))$.

Exemples 1.3.

1. On considère $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto Ax$ où $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, alors f est C^∞ comme fonction linéaire et bijective de réciproque $y \mapsto A^{-1}y$. On remarque que f^{-1} est C^∞ comme fonction linéaire, donc f est un C^∞ -difféomorphisme.
2. On considère $f : U \rightarrow V, (x, y) \mapsto (x + y, xy)$ où U et V sont définis par

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y\}$$

$$V = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid s^2 - 4t > 0\}$$

alors f est un C^∞ difféomorphisme de U sur V , en effet

- a. f est bijective de U sur V , puisque pour $(x, y) \in U$ on a

$$(x + y)^2 - 4xy = x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 > 0$$

donc $f(U) \subset V$, réciproquement pour $(s, t) \in V$ on cherche $(x, y) \in U$ tels que

$$\begin{cases} x + y = s \\ xy = t \end{cases}$$

c'est-à-dire x et y sont racines du polynôme $X^2 - sX + t$, comme $x > y$ on a

$$\begin{cases} x = \frac{s + \sqrt{s^2 - 4t}}{2} \\ y = \frac{s - \sqrt{s^2 - 4t}}{2} \end{cases}$$

donc $V \subset f(U)$, f est bijective,

- b. f est de classe C^∞ sur U car polynomiale,
- c. f^{-1} est de classe C^∞ sur V car $(s, t) \mapsto s^2 - 4t$ et $\sqrt{\cdot}$ sont C^∞ sur V .
3. On considère $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3$, alors f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} et bijective. Mais son inverse $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto \sqrt[3]{y}$, n'est pas dérivable en 0 donc f n'est pas un C^∞ -difféomorphisme.

Théorème 1.4. (Théorème d'inversion locale) Soit U un ouvert non-vidé de \mathbb{R}^n et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe C^k . On suppose qu'il existe $x_0 \in U$ tel que $df(x_0)$ soit inversible. Alors il existe un voisinage ouvert U' de x_0 et un voisinage ouvert V' de $f(x_0)$ tels que $f : U' \rightarrow V'$ est un C^k -difféomorphisme.

Théorème 1.5. (Théorème d'inversion globale) Soit U un ouvert non-vidé de \mathbb{R}^n et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application. On suppose que

- (1) f est de classe C^k sur U ,
- (2) f est injective sur U ,
- (3) $\forall x \in U, df(x)$ est inversible.

Alors $f(U)$ est un ouvert de \mathbb{R}^n et $f : U \rightarrow f(U)$ est un C^k -difféomorphisme.

Démonstration. Soit $x_0 \in U$, alors d'après le théorème d'inversion locale il existe un voisinage ouvert U_{x_0} de x_0 et un voisinage ouvert $V_{f(x_0)}$ de $f(x_0)$ tels que $f : U_{x_0} \rightarrow V_{f(x_0)}$ est un C^k -difféomorphisme. En particulier $V_{f(x_0)} = f(U_{x_0})$, et on a

$$f(U) = \bigcup_{x \in U} V_{f(x)}$$

est un ouvert de \mathbb{R}^n comme union d'ouverts. De plus puisque f est injective sur U , on en déduit que f est bijective de U sur $f(U)$.

Soit $y_0 \in f(U)$, alors il existe un unique $x_0 \in U$ tel que $y_0 = f(x_0)$, et d'après le théorème d'inversion locale $f : U_{x_0} \rightarrow V_{y_0}$ est un C^k -difféomorphisme, on en déduit que f^{-1} est de classe C^k sur V_{y_0} . Donc f^{-1} est C^k sur $f(U)$. \square

Exemples 1.6.

1. On considère $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (r, \theta) \mapsto (f_1, f_2) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$, alors
 - a. f est de classe C^∞ sur \mathbb{R}^2 puisque \cos et \sin sont de classe C^∞ .
 - b. On pose $U :=]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[$, qui est un ouvert de \mathbb{R}^2 sur lequel f est injective.
 - c. Soit $(r, \theta) \in U$, alors

$$J_f(r, \theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

et $\det(J_f(r, \theta)) = r \cos^2(\theta) + r \sin^2(\theta) = r > 0$, donc $df_{(r, \theta)}$ est inversible.

Donc d'après le Théorème 1.5 $f : U \rightarrow f(U)$ est un C^∞ -difféomorphisme.

2. On considère $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (r, \theta, \varphi) \mapsto (f_1, f_2, f_3) = (r \cos(\theta) \cos(\varphi), r \sin(\theta) \cos(\varphi), r \sin(\varphi))$.
 - a. f est de classe C^∞ sur \mathbb{R}^3 puisque \cos et \sin sont de classes C^∞ .
 - b. On pose $U :=]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, qui est un ouvert de \mathbb{R}^3 sur lequel f est injective.
 - c. Soit $(r, \theta, \varphi) \in U$, alors

$$J_f(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \cos(\varphi) & -r \sin(\theta) \cos(\varphi) & -r \cos(\theta) \sin(\varphi) \\ \sin(\theta) \cos(\varphi) & r \cos(\theta) \cos(\varphi) & -r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & 0 & r \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

et le déterminant de cette matrice est

$$\begin{aligned} \det(J_f(r, \theta, \varphi)) &= \sin(\varphi)(r^2 \sin^2(\theta) \cos(\varphi) \sin(\varphi) + r^2 \cos^2(\theta) \cos(\varphi) \sin(\varphi)) \\ &\quad + r \cos(\varphi)(r \cos^2(\theta) \cos^2(\varphi) + \sin^2(\theta) \cos^2(\varphi)) \\ &= \sin^2(\varphi)r^2 \cos(\varphi) + \cos^2(\varphi)r^2 \cos(\varphi) = r^2 \cos(\varphi) \neq 0 \end{aligned}$$

donc $df_{r,\theta,\varphi}$ est inversible.

Donc d'après le **Théorème 1.5** $f : U \rightarrow f(U)$ est un C^∞ -difféomorphisme.

3. On pose $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et on considère $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$, alors
- f est de classe C^∞ sur U puisque f est polynomiale.
 - Soit $(x,y) \in U$, alors

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

et $\det(J_f(x,y)) = 4(x^2 + y^2) > 0$ sur U , donc $df_{x,y}$ est inversible.

Donc d'après le **Théorème 1.4** $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ est un C^∞ -difféomorphisme local en tout point de U . Mais $f(-1,-1) = f(1,1)$, donc $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ n'est pas C^∞ -difféomorphisme global.

- b. On pose $U' := \{(x,y) \in U \mid x > 0\}$, qui est un ouvert de \mathbb{R}^2 sur lequel f est injective. En effet si $f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2)$, alors on pose

$$\begin{cases} (x_1,y_1) = r_1(\cos(\theta_1), \sin(\theta_1)) \\ (x_2,y_2) = r_2(\cos(\theta_2), \sin(\theta_2)) \end{cases} \quad \text{où } r_1, r_2 > 0 \text{ et } \theta_1, \theta_2 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

et on trouve

$$\begin{cases} r_1^2 \cos(2\theta_1) = r_2^2 \cos(2\theta_2) \\ r_1^2 \sin(2\theta_1) = r_2^2 \sin(2\theta_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \theta_1 = \theta_2 \text{ mod } 2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \theta_1 = \theta_2 \end{cases}$$

donc $(x_1,y_1) = (x_2,y_2)$ et f est bien injective.

Donc d'après le **Théorème 1.5** $f : U' \rightarrow f(U')$ est un C^∞ -difféomorphisme.

1.2. Théorème des fonctions implicites

Théorème 1.7. (Théorème des fonctions implicites) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, $(a,b) \in U$ et $f = (f_1, \dots, f_p) : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application de classe C^k . On suppose que $f(a,b) = 0$ et que la matrice jacobienne de f par rapport à la deuxième variable en (a,b) est inversible. Alors il existe un voisinage ouvert V de a , un voisinage ouvert W de b avec $V \times W \subset U$ et une application $\varphi : V \rightarrow W$ qui est C^∞ avec $\varphi(a) = b$, tels que

$$\begin{cases} (x,y) \in V \times W \\ f(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in V \\ y = \varphi(x) \end{cases}$$

de plus pour tout $x \in V$, $d\varphi(x) = -(d_y f(x, \varphi(x)))^{-1} \circ d_x f(x, \varphi(x))$.

Exemples 1.8.

1. On considère $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$ et $\mathbb{S}^1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 0\}$. Les dérivées partielles de f sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y.$$

On remarque que pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant

$$\begin{cases} (x,y) \in \mathbb{S}^1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (x,y) \in \mathbb{S}^1 \\ y \neq 0 \end{cases}$$

on a $(x, y) \in \mathbb{S}^1 \setminus \{(1, 0), (-1, 0)\}$. On peut donc appliquer le **Théorème 1.7**, au voisinage V de x , \mathbb{S}^1 est le graphe d'une application $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$. De plus on a

$$\forall x \in V, x^2 + \varphi(x)^2 - 1 = 0$$

en dérivant on trouve

$$\forall x \in V, 2x + 2\varphi(x)\varphi'(x) = 0$$

et donc $\varphi'(x) = -\frac{x}{\varphi(x)}$.

2. On considère $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 1$, $\mathbb{S}^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 0\}$. Les dérivées partielles de f sont

$$\forall a \in \{x, y, z\}, \frac{\partial f}{\partial a}(x, y, z) = 2a.$$

On remarque que pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant

$$\begin{aligned} \begin{cases} (x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \neq 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} (x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \\ z \neq 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \\ (x, y, z) \neq (a, b, 0) \text{ où } (a, b) \in \mathbb{S}^1 \end{cases} \end{aligned}$$

on a $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \setminus (\mathbb{S}^1 \times \{0\})$. On peut donc appliquer le **Théorème 1.7**, au voisinage V de (x, y) , \mathbb{S}^2 est le graphe d'une application $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$. De plus on a

$$\forall (x, y) \in V, x^2 + y^2 + \varphi(x, y)^2 - 1 = 0$$

en dérivant par rapport à x on trouve

$$\forall (x, y) \in V, 2x + 2\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\varphi(x, y) = 0$$

donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{x}{\varphi(x, y)}$, et en dérivant par rapport à y on trouve

$$\forall (x, y) \in V, 2y + 2\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\varphi(x, y) = 0$$

donc $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{y}{\varphi(x, y)}$.

2. Sous-variétés de \mathbb{R}^n

2.1. Sous-variétés

Définition 2.1. Soit X une partie de \mathbb{R}^n . On dit que X est une *sous-variété de \mathbb{R}^n de classe C^k et de dimension $d \in \mathbb{N}$* , si pour tout $x \in X$ il existe un voisinage ouvert V de x dans \mathbb{R}^n et un C^k -difféomorphisme φ d'un ouvert U de \mathbb{R}^n dans V , tels que

$$V \cap X = \varphi(U \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})).$$

On appelle *codimension* de X l'entier $n - d$.

Remarque 2.2. Une sous-variété de dimension 1 est une *courbe*, une sous-variété de dimension 2 est une *surface*, une sous-variété de dimension $n - 1$ (codimension 1) est une *hypersurface*

Exemples 2.3.

1. Une courbe dans \mathbb{R}^2 est difféomorphe à un segment.
2. On considère le cercle \mathbb{S}^1 , on pose $U' :=]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[$, $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{]-\infty, 0] \times \{0\} \}$, ainsi que $\psi : U' \rightarrow V$, $(r, \theta) \mapsto r(\cos(\theta), \sin(\theta))$ qui est un difféomorphisme de classe C^∞ . On a

$$\begin{aligned} V \cap \mathbb{S}^1 &= \mathbb{S}^1 \setminus \{(-1, 0)\} \\ &= \psi(\{1\} \times]-\pi, \pi[) \\ &= \psi(U' \cap (\{1\} \times \mathbb{R})) \end{aligned}$$

on prend alors $U :=]-\pi, \pi[\times]0, +\infty[$ et $\varphi : U \rightarrow V$, $(\theta, r) \mapsto \psi(r + 1, \theta)$, donc \mathbb{S}^1 est bien une sous-variété de \mathbb{R}^2 de classe C^∞ et de dimension 1.