Problème du rectangle inscrit

Emanuel Morille

1 Janvier 1980

Table des matières

1. Bases de théorie des catégories **2**
1.1. Catégories 2
1.2. Foncteurs 3
1.3. Transformations naturelles 3

2. Catégorie Comp **des complexes de chaînes** **4**
2.1. Complexes de chaînes 4
2.2. Morphismes de complexes 4
2.3. La catégorie Comp 5
2.4. Premières propriétés 5

3. Homologie singulière **9**
3.1. Simplexes 9
3.2. Chaînes singulières 10
3.3. Définitions de l'homologie singulière 12
3.3.1. D'un espace topologique 12
3.3.2. D'une paire d'espace topologique 13

Bibliographie **13**

13858

1. Bases de théorie des catégories

1.1. Catégories

Définition 1.1. Une *catégorie* $\mathcal{C}$ est la donnée de :

- Une classe $\mathrm{ob}(\mathcal{C})$ dont les éléments sont appelés les *objets de* $\mathcal{C}$.
- Une classe $\hom(\mathcal{C})$ dont les éléments sont appelés les *morphismes de* $\mathcal{C}$.
  Un morphisme $f \in \hom(\mathcal{C})$ a un *domaine* $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ et un *codomaine* $Y \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$. On note alors ce morphisme $f : X \to Y$ et $\hom(X, Y)$ l'ensemble des morphismes de X dans Y.
- Pour tout objets $X, Y, Z \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$, une *composition* :
$$\circ : \hom(Y, Z) \times \hom(X, Y) \to \hom(X, Z).$$
- Pour tout objet $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$, un morphisme *identité* :
$$\mathrm{id}_X : X \to X.$$

Vérifiant les propriétés suivantes pour tout objets $X, Y, Z, T \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$:

- *Associativité* : Pour tout morphismes $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ et $h : Z \to T$, on a :
$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$
- *Identité* : Pour tout morphisme $f : X \to Y$, on a :
$$\mathrm{id}_Y \circ f = f = f \circ \mathrm{id}_X .$$

Exemple 1.2. La catégorie Ab des groupes abéliens :

- Les objets de Ab sont les groupes abéliens.
- Les morphismes de Ab sont les morphismes de groupes.

Exemple 1.3. Un *groupe gradué* est un groupe G muni d'une famille de sous-groupes $(G_i)_{i\in I}$ telle que $G = \bigoplus_{i\in I} G_i$. Pour tout $i \in I$, un élément non-nul de G_i est dit *homogène de degré* i.

Soit $G \coloneqq \bigoplus_{i\in I} G_i$ et $H \coloneqq \bigoplus_{i\in I} H_i$ deux groupes gradués. Un *morphisme de groupes gradués* est un morphisme de groupes $\varphi : G \to H$ tel que pour tout $i \in I$, on a $\varphi(G_i) \subset H_i$.

On définit ainsi la catégorie GrAb des groupes abéliens gradués :

- Les objets de GrAb sont les groupes abéliens gradués.
- Les morphismes de GrAb sont les morphismes de groupes gradués.

Exemple 1.4. La catégorie Top des espaces topologiques :

- Les objets de Top sont les espaces topologiques.
- Les morphismes de Top sont les applications continues.

Exemple 1.5. Une paire d'espaces topologiques est un espace topologique X muni d'une partie A de lui-même. On la note (X, A).

Soit (X, A) et (Y, B) deux paires d'espaces topologiques. Un *morphisme de paires* est une application continue $f : X \to Y$ telle que $f(A) \subset B$. On le note $f : (X, A) \to (Y, B)$.

On définit ainsi catégorie Top_2 des paires d'espaces topologiques :

- Les objets de Top_2 sont les paires d'espaces topologiques.
- Les morphismes de Top_2 sont les morphismes de paires.

Exemple 1.6. Soit $(X, \leq)$ un ensemble partiellement ordonné. On définit la catégorie $\mathcal{C}(X, \leq)$:

- Les objets de $\mathcal{C}(X, \leq)$ sont les éléments de X.
- Pour tout $x, y \in X$, si $x \leq y$, on a un morphisme $f_{x,y} : x \to y$.
- Pour tout $x, y, z \in X$, si $x \leq y$ et $y \leq z$, on a bien $x \leq z$ et une composition $f_{y,z} \circ f_{x,y} = f_{x,z}$.
- Pour tout $x \in X$, on a bien $x \leq x$ et un morphisme identité $f_{x,x}$.

Définition 1.7. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. La *catégorie opposée (ou duale) de* $\mathcal{C}$, notée $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$, est la catégorie dont les objets sont les objets $\mathcal{C}$ et dont les morphismes sont les morphismes de $\mathcal{C}$ dont le domaine et le codomaine sont inversés.

Exemple 1.8. Soit $(X, \leq)$ un ensemble partiellement ordonné. Alors on a $\mathcal{C}(X, \leq)^{\mathrm{op}} = \mathcal{C}(X, \preceq)$ où pour tout $x, y \in X$, on a $x \preceq y$ si et seulement si $y \leq x$.

1.2. Foncteurs

Définition 1.9. Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories. Un *foncteur (covariant)* F *de* $\mathcal{C}$ *vers* $\mathcal{D}$ est la donnée :
- Pour tout objet $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$, d'un objet $F(X) \in \mathrm{ob}(\mathcal{D})$.
- Pour tout objets $X, Y \in \mathrm{ob}(C)$ et morphisme $f : X \to Y$, d'un morphisme $F(f) : F(X) \to F(Y)$.

Vérifiant les propriétés suivantes pour tout objets $X, Y, Z \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$:
- *Composition* : Pour tout morphismes $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$, on a :
$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f).$$
- *Identité* : On a :
$$F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}.$$

Exemple 1.10. Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories. On définit le foncteur covariant constant $C : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$:
- On prend $D \in \mathcal{D}$, pour tout objet $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$, on a $C(X) \coloneqq D$.
- Pour tout objets $X, Y \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ et morphisme $f : X \to Y$, on a $C(f) \coloneqq \mathrm{id}_D$.

Exemple 1.11. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. On définit le foncteur covariant identité $\mathrm{id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$:
- Pour tout objet $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$, on a $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}(X) \coloneqq X$.
- Pour tout objets $X, Y \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ et morphisme $f : X \to Y$, on a $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}(f) \coloneqq f$.

Définition 1.12. Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories. Un *foncteur contravariant* est un foncteur covariant de la catégorie opposée $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ vers $\mathcal{D}$.

Exemple 1.13. Soit $\mathbb{K}$ un corps et Vect la catégorie des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On définit un foncteur contravariant $F : \mathsf{Vect}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Vect}$:
- Pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E \in \mathsf{Vect}$, on a $F(E) \coloneqq E^*$.
- Pour tout $\mathbb{K}$-espaces vectoriels $E, F \in \mathsf{Vect}$ et application linéaire $u : E \to F$, on a :
$$F(u) \coloneqq u^{\mathrm{T}} : F^* \to E^*.$$

1.3. Transformations naturelles

Définition 1.14. Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ deux foncteurs covariants. Une *transformation naturelle* ∂ *de* F *vers* G est la donnée pour tout objet $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$, d'un morphisme $\partial_X : F(X) \to G(X)$, vérifiant la propriété suivante pour tout objet $Y \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ et pour tout morphisme $f : X \to Y$, on a :
$$\partial_Y \circ F(f) = G(f) \circ \partial_X$$
c'est-à-dire que le diagramme suivant est commutatif :
$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\partial_X"'] & F(Y) \arrow[d, "\partial_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G(f)"'] & G(Y) \end{tikzcd}$$

2. Catégorie Comp des complexes de chaînes

2.1. Complexes de chaînes

Définition 2.1. On appelle *complexe de chaînes*, noté $C_\bullet$, une suite de groupes abéliens $(C_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ munie de morphismes de groupes $(\mathrm{d}_n : C_n \to C_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\mathrm{d}_n\mathrm{d}_{n+1} = 0$.

Définition 2.2. Soit $C_\bullet$ un complexe de chaînes et $n \in \mathbb{Z}$.
- On appelle *n-cycle* un élément de $Z_n(C_\bullet) \coloneqq \ker(\mathrm{d}_n)$.
- On appelle *n-bord* un élément de $B_n(C_\bullet) \coloneqq \mathrm{im}(\mathrm{d}_{n+1})$.

Proposition 2.3. Soit $C_\bullet$ un complexe de chaînes. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $B_n(C_\bullet) \subset Z_n(C_\bullet)$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors $\mathrm{d}_n\mathrm{d}_{n+1} = 0$, donc $B_n(C_\bullet) = \mathrm{im}(\mathrm{d}_{n+1}) \subset \ker(\mathrm{d}_n) = Z_n(C_\bullet)$. □

Définition 2.4. Soit $C_\bullet$ un complexe de chaînes et $n \in \mathbb{Z}$.
- On appelle *n^e groupe d'homologie* le groupe quotient $H_n(C_\bullet) \coloneqq Z_n(C_\bullet)/B_n(C_\bullet)$.
- On appelle *homologie* la somme directe des groupes $H_\bullet(C_\bullet) \coloneqq \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H_n(C_\bullet)$.

Définition 2.5. Soit $C_\bullet$ un complexe de chaînes et $n \in \mathbb{Z}$.
- On dit que $C_\bullet$ est *exact en C_n* si $H_n(C_\bullet)$ est trivial, c'est-à-dire, $\mathrm{im}(\mathrm{d}_{n+1}) = \ker(\mathrm{d}_n)$.
- On dit que $C_\bullet$ est *exact* si pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il est exact en C_n.
- On dit que $C_\bullet$ est *acyclique* si pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, il est exact en C_n.

2.2. Morphismes de complexes

Définition 2.6. Soit $C_\bullet$ et $D_\bullet$ deux complexes de chaînes. On appelle *morphisme de complexes*, noté $\varphi_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$, une suite de morphismes de groupes $(\varphi_n : C_n \to D_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\mathrm{d}_n\varphi_n = \varphi_{n-1}\mathrm{d}_n$.

Proposition 2.7. Soit $C_\bullet$, $D_\bullet$ et $E_\bullet$ trois complexes de chaînes, $\varphi_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ et $\psi_\bullet : D_\bullet \to E_\bullet$ deux morphismes de complexes. Alors la composition $\psi_\bullet \circ \varphi_\bullet : C_\bullet \to E_\bullet$ est un morphisme de complexes.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors on a :

$$\mathrm{d}_n(\psi_n \circ \varphi_n) = \psi_{n-1}\mathrm{d}_n\varphi_n = (\psi_{n-1} \circ \varphi_{n-1})\mathrm{d}_n.$$

Donc $(\psi_n \circ \varphi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est bien un morphisme de complexes. □

Proposition 2.8. Soit $C_\bullet$ un complexe de chaînes. Alors le morphisme identité $\mathrm{id}_{C_\bullet} : C_\bullet \to C_\bullet$ est un morphisme de complexes.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors on a :

$$\mathrm{d}_n\,\mathrm{id}_n = \mathrm{d}_n = \mathrm{id}_{n-1}\,\mathrm{d}_n.$$

Donc $\left(\mathrm{id}_{C_n}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est bien un morphisme de complexes. □

Proposition 2.9. Soit $C_\bullet$ et $D_\bullet$ deux complexes de chaînes, $\varphi_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ un morphisme de complexes. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, φ_n induit un morphisme de groupes de $H_n(C_\bullet)$ dans $H_n(D_\bullet)$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$.
Soit $z \in Z_n(C_\bullet)$. Alors on a $\mathrm{d}_n\varphi_n(z) = \varphi_{n-1}(\mathrm{d}_n z) = \varphi_{n-1}(0) = 0$, donc $\varphi_n(z) \in Z_n(D_\bullet)$.
Soit $b \in B_n(C_\bullet)$. Alors il existe $c \in C_{n+1}$ tel que $b = \mathrm{d}_{n+1}c$, et on a :

$$\varphi_n(b) = \varphi_n(\mathrm{d}_{n+1}c) = \mathrm{d}_{n+1}\varphi_{n+1}(c)$$

donc $\varphi_n(b) \in B_n(D_\bullet)$.

On considère $\overline{\varphi_n} : Z_n(C_\bullet) \to H_n(D_\bullet)$, alors $B_n(C_\bullet) \subset \ker\left(\overline{\varphi_n}\right)$ et d'après la propriété universelle du groupe quotient le morphisme $\overline{\varphi_n}$ induit bien un morphisme de $H_n(C_\bullet)$ dans $H_n(D_\bullet)$. □

Définition 2.10. Soit $C_\bullet$ et $D_\bullet$ deux complexes de chaînes, $\varphi_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ un morphisme de complexes. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note $H_n(\varphi) : H_n(C_\bullet) \to H_n(D_\bullet)$ le morphisme de groupes induit par φ_n.

2.3. La catégorie Comp

Définition 2.11. On appelle Comp la catégorie des complexes de chaînes :
- Les objets de Comp sont les complexes de chaînes.
- Les morphismes de Comp sont les morphismes de complexes.
- La composition de Comp découle de la Proposition 2.7.
- Le morphisme identité de Comp découle de Proposition 2.8.

Théorème 2.12. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le n^e groupe d'homologie H_n est un foncteur de Comp vers Ab.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$.
- Soit $C_\bullet \in \mathrm{ob}(\mathsf{Comp})$ un complexe de chaînes. Alors le n^e groupe d'homologie $H_n(C_\bullet)$ est bien un groupe abélien.
- Soit $C_\bullet, D_\bullet \in \mathrm{ob}(\mathsf{Comp})$ deux complexes de chaînes et $\varphi_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ un morphisme de complexes. Alors le morphisme induit $H_n(\varphi) : H_n(C_\bullet) \to H_n(D_\bullet)$ est bien un morphisme de groupes.

La propriété de composition découle de la Proposition 2.7 et la propriété d'identité découle de la Proposition 2.8, donc H_n est bien un foncteur de Comp vers Ab. □

Corollaire 2.13. L'homologie $H_\bullet$ est un foncteur de Comp vers GrAb.

Démonstration.
- Soit $C_\bullet \in \mathrm{ob}(\mathsf{Comp})$ un complexe de chaînes. Alors l'homologie $H_\bullet(C_\bullet) := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H_n(C_\bullet)$ définit bien un groupe abélien gradué.
- Soit $C_\bullet, D_\bullet \in \mathrm{ob}(\mathsf{Comp})$ deux complexes de chaînes et $\varphi_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ un morphisme de complexes. Alors la somme directe des morphismes induits $H_\bullet(\varphi) := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H_n(\varphi)$ définit bien un morphisme de groupes abéliens gradués.

Les propriétés de composition et d'identité découlent du Théorème 2.12, donc $H_\bullet$ est bien un foncteur de Comp vers GrAb. □

2.4. Premières propriétés

Définition 2.14. Soit $C_\bullet$ et $D_\bullet$ deux complexes de chaînes, $\varphi_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ et $\psi_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ deux morphismes de complexes. On dit que $\varphi_\bullet$ et $\psi_\bullet$ sont *homotopes* s'il existe une suite de morphismes de groupes $(h_n : C_n \to D_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\varphi_n - \psi_n = h_{n-1}\mathrm{d}_n + \mathrm{d}_n h_n$.

Proposition 2.15. L'homotopie est une relation d'équivalence sur les morphismes de complexes.

Démonstration. Notons $\sim$ la relation d'homotopie. Soit $C_\bullet$ et $D_\bullet$ deux complexes de chaînes.
- *Réflexivité* : Soit $\varphi_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ un morphisme de complexes. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on peut écrire $\varphi_n - \varphi_n = 0 = 0\mathrm{d}_n + \mathrm{d}_n 0$. Donc on a bien $\varphi_\bullet \sim \varphi_\bullet$.
- *Symétrie* : Soit $\varphi_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ et $\psi_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ deux morphismes de complexes tels que $\varphi_\bullet \sim \psi_\bullet$. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\psi_n - \varphi_n = -(\varphi_n - \psi_n)$. On en déduit bien $\psi_\bullet \sim \varphi_\bullet$.
- *Transitivité* : Soit $\varphi_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$, $\psi_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ et $\xi_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ trois morphismes de complexes tels que $\varphi_\bullet \sim \psi_\bullet$ et $\psi_\bullet \sim \xi_\bullet$. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\varphi_n - \xi_n = \varphi_n - \psi_n + \psi_n - \xi_n$. On en déduit bien que $\varphi_\bullet \sim \xi_\bullet$.

Donc l'homotopie est bien une relation d'équivalence sur les morphismes de complexes. □

Proposition 2.16. Soit $A_\bullet$, $B_\bullet$ et $C_\bullet$ trois complexes de chaînes, $\varphi_\bullet : A_\bullet \to B_\bullet$ et $\psi_\bullet : A_\bullet \to B_\bullet$, ainsi que $\alpha_\bullet : B_\bullet \to C_\bullet$ et $\beta_\bullet : B_\bullet \to C_\bullet$ deux paires de morphismes de complexes homotopes. Alors les compositions $\alpha_\bullet \circ \varphi_\bullet : A_\bullet \to C_\bullet$ et $\beta_\bullet \circ \psi_\bullet : A_\bullet \to C_\bullet$ sont homotopes.

Démonstration. Par définition il existe deux suites de morphismes de groupes $(f_n : A_n \to B_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(g_n : B_n \to C_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\varphi_n - \psi_n = f_{n-1}\mathrm{d}_n + \mathrm{d}_n f_n$ et $\alpha_n - \beta_n = g_{n-1}\mathrm{d}_n + \mathrm{d}_n g_n$. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors on a:

$$\begin{aligned}
\alpha_n \circ \varphi_n - \beta_n \circ \psi_n &= \alpha_n \circ \varphi_n - \alpha_n \circ \psi_n + \alpha_n \circ \psi_n - \beta_n \circ \psi_n \\
&= \alpha_n \circ (\varphi_n - \psi_n) + (\alpha_n - \beta_n) \circ \psi_n \\
&= \alpha_n \circ (f_{n-1}\mathrm{d}_n + \mathrm{d}_n f_n) + (g_{n-1}\mathrm{d}_n + \mathrm{d}_n f_n) \circ \psi_n \\
&= (a_n \circ f_{n-1})\mathrm{d}_n + \mathrm{d}_n(a_{n+1} \circ f_n) + (g_{n-1} \circ \psi_{n-1})\mathrm{d}_n + \mathrm{d}_n(f_n \circ \psi_n) \\
&= (a_n \circ f_{n-1} + g_{n-1} \circ \psi_{n-1})\mathrm{d}_n + \mathrm{d}_n(a_{n+1} \circ f_n + f_n \circ \psi_n)
\end{aligned}$$

En posant $h_n \coloneqq a_{n+1} \circ f_n + g_n \circ \psi_n$, on obtient l'égalité voulue $\alpha_n \circ \varphi_n - \beta_n \circ \psi_n = h_{n-1}\mathrm{d}_n + \mathrm{d}_n h_n$. Donc $\alpha_\bullet \circ \varphi_\bullet$ et $\beta_\bullet \circ \psi_\bullet$ sont bien homotopes. □

Lemme 2.17. Soit $C_\bullet$ et $D_\bullet$ deux complexes de chaînes, $\varphi_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ et $\psi_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ deux morphismes de complexes homotopes. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $H_n(\varphi) = H_n(\psi)$.

Démonstration. Par définition il existe une suite de morphismes de groupes $(h_n : C_n \to D_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\varphi_n - \psi_n = h_{n-1}\mathrm{d}_n + \mathrm{d}_n h_n$.
Soit $n \in \mathbb{Z}$ et $\bar{c} \in H_n(C_\bullet)$. Alors on a $\varphi_n(c) - \psi_n(c) = h_{n-1}(\mathrm{d}_n c) + \mathrm{d}_n h_n(c) = \mathrm{d}_n h_n(c) \in B_n(D_\bullet)$, on en déduit $H_n(\varphi)(c) - H_n(\psi)(c) = 0 \in H_n(D_\bullet)$. Donc $H_n(\varphi) = H_n(\psi)$. □

Définition 2.18. On dit qu'une suite courte de complexes de chaînes est *exacte*, notée :

$$0 \longrightarrow A_\bullet \xrightarrow{\varphi_\bullet} B_\bullet \xrightarrow{\psi_\bullet} C_\bullet \longrightarrow 0$$

si pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la suite courte suivante est exacte :

$$0 \longrightarrow A_n \xrightarrow{\varphi_n} B_n \xrightarrow{\psi_n} C_n \longrightarrow 0$$

c'est-à-dire que φ_n est injectif, $\mathrm{im}(\varphi_n) = \ker(\psi_n)$ et ψ_n est surjectif.

Lemme 2.19. Soit une suite exacte courte de complexes de chaînes :

$$0 \longrightarrow A_\bullet \xrightarrow{\varphi_\bullet} B_\bullet \xrightarrow{\psi_\bullet} C_\bullet \longrightarrow 0$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il existe un morphisme de groupes $\partial_n : H_n(C_\bullet) \to H_{n-1}(A_\bullet)$ telle que la suite longue des groupes d'homologie est exacte :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial_{n+1}"] & H_n(A_\bullet) \arrow[r, "H_n(\varphi)"] & H_n(B_\bullet) \arrow[r, "H_n(\psi)"] & H_n(C_\bullet) \arrow[dll, "\partial_n"'] & \\
& H_{n-1}(A_\bullet) \arrow[r, "H_{n-1}(\varphi)"'] & H_{n-1}(B_\bullet) \arrow[r, "H_{n-1}(\psi)"'] & H_{n-1}(C_\bullet) \arrow[r, "\partial_{n-1}"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

De plus pour tout diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_\bullet \arrow[r, "\varphi_\bullet"] \arrow[d, "f_\bullet"] & B_\bullet \arrow[r, "\psi_\bullet"] \arrow[d, "g_\bullet"] & C_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "h_\bullet"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A'_\bullet \arrow[r, "\varphi'_\bullet"] & B'_\bullet \arrow[r, "\psi'_\bullet"] & C'_\bullet \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

la transformation ∂_n est naturelle dans le sens où le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
H_n(C_\bullet) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "H_n(h)"'] & H_{n-1}(A_\bullet) \arrow[d, "H_{n-1}(f)"] \\
H_n(C'_\bullet) \arrow[r, "\partial_n"'] & H_{n-1}(A'_\bullet)
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$. On commence par faire un diagramme en 3 dimensions pour la suite :

$$\begin{tikzcd}
 & & & \vdots \arrow[dd] & & \vdots \arrow[dd] & & \vdots \arrow[dd] & & \\
 & & \vdots \arrow[dd] & & \vdots \arrow[dd] & & \vdots \arrow[dd] & & & \\
 & 0 \arrow[rr] & & A'_{n+1} \arrow[rr] \arrow[dd] & & B'_{n+1} \arrow[rr] \arrow[dd] & & C'_{n+1} \arrow[rr] \arrow[dd] & & 0 \\
0 \arrow[rr] & & A_{n+1} \arrow[rr] \arrow[ur] \arrow[dd] & & B_{n+1} \arrow[rr] \arrow[ur] \arrow[dd] & & C_{n+1} \arrow[rr] \arrow[ur] \arrow[dd] & & 0 & \\
 & 0 \arrow[rr] & & A'_{n} \arrow[rr] \arrow[dd] & & B'_{n} \arrow[rr] \arrow[dd] & & C'_{n} \arrow[rr] \arrow[dd] & & 0 \\
0 \arrow[rr] & & A_{n} \arrow[rr] \arrow[ur] \arrow[dd] & & B_{n} \arrow[rr] \arrow[ur] \arrow[dd] & & C_{n} \arrow[rr] \arrow[ur] \arrow[dd] & & 0 & \\
 & 0 \arrow[rr] & & A'_{n-1} \arrow[rr] \arrow[dd] & & B'_{n-1} \arrow[rr] \arrow[dd] & & C'_{n-1} \arrow[rr] \arrow[dd] & & 0 \\
0 \arrow[rr] & & A_{n-1} \arrow[rr] \arrow[ur] \arrow[dd] & & B_{n-1} \arrow[rr] \arrow[ur] \arrow[dd] & & C_{n-1} \arrow[rr] \arrow[ur] \arrow[dd] & & 0 & \\
 & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & &
\end{tikzcd}$$

Soit $\overline{c} \in H_n(C_\bullet)$. Puisque ψ_n est surjective par exactitude, il existe $b \in B_n$ tel que $\psi_n(b) = c$. De plus on a $\psi_{n-1}(\mathrm{d}_n b) = \mathrm{d}_n \psi_n(b) = \mathrm{d}_n c = 0$, donc $\mathrm{d}_n b \in \ker(\psi_{n-1})$ et par exactitude il existe $a \in A_{n-1}$ tel que $\varphi_{n-1}(a) = \mathrm{d}_n b$. De plus on a $\varphi_{n-2}(\mathrm{d}_{n-1} a) = \mathrm{d}_{n-1}\varphi_{n-1}(a) = \mathrm{d}_{n-1}\mathrm{d}_n b = 0$, puisque φ_{n-2} est injective par exactitude, on a $\mathrm{d}_{n-1} a = 0$, donc $a \in Z_{n-1}(A_\bullet)$. Donc on pose $\partial_n \overline{c} \coloneqq \overline{a} \in H_{n-1}(A_\bullet)$.

Vérifions que $\partial_n \overline{c}$ ne dépend pas des choix réalisés. Soit $b' \in B_n$ tel que $\psi_n(b') = c$ et $a' \in A_{n-1}$ tel que $\mathrm{d}_n b' = \varphi_{n-1}(a')$. Alors on a $\psi_n(b - b') = c - c = 0$, donc $b - b' \in \ker(\psi_n)$ et par exactitude il existe $\hat{a} \in A_n$ tel que $\varphi_n(\hat{a}) = b - b'$. Alors $\varphi_{n-1}(\mathrm{d}_n \hat{a}) = \mathrm{d}_n b - \mathrm{d}_n b' = \varphi_{n-1}(a - a')$, puisque φ_{n-1} est injective par exactitude, on a $\mathrm{d}_n \hat{a} = a - a'$, donc $a - a' \in B_{n-1}(A_\bullet)$ et $\overline{a} = \overline{a'} \in H_{n-1}(A_\bullet)$.

Vérifions que la suite longue est exacte.

- Soit $\overline{a} \in \mathrm{im}(\partial_{n+1})$. Par construction il existe $b \in B_{n+1}$ tel que $\varphi_n(a) = \mathrm{d}_{n+1} b$, d'où $\varphi_n(a) \in B_n(B_\bullet)$ et $H_n(\varphi)\big(\overline{a}\big) = 0 \in H_n(B_\bullet)$. Donc $\overline{a} \in \ker(H_n(\varphi))$.

  Soit $\overline{a} \in \ker(H_n(\varphi))$. Alors $\varphi_n(a) \in B_n(B_\bullet)$ et il existe $b \in B_{n+1}$ tel que $\varphi_n(a) = \mathrm{d}_{n+1} b$. De plus par exactitude on a $d_{n+1}\psi_{n+1}(b) = \psi_n(\mathrm{d}_{n+1}(b)) = \psi_n(\varphi_n(a)) = 0$, d'où $\psi_{n+1}(b) \in Z_{n+1}(C_\bullet)$, et par construction on retrouve bien $\partial_n \overline{\psi_{n+1}(b)} = \overline{a} \in H_n(A_\bullet)$. Donc $\overline{a} \in \mathrm{im}(\partial_{n+1})$.

- Soit $\overline{b} \in \mathrm{im}(H_n(\varphi))$. Il existe $a \in A_n$ tel que $\varphi_n(a) = b$. Alors on a $b \in \mathrm{im}(\varphi_n)$ et par exactitude $b \in \ker(\psi_n)$. Donc $\overline{b} \in \ker(H_n(\psi))$.

  Soit $\overline{b} \in \ker(H_n(\psi))$. Alors $\psi_n(b) \in B_n(C_\bullet)$ et il existe $c \in C_{n+1}$ tel que $\psi_n(b) = \mathrm{d}_{n+1} c$. Puisque ψ_{n+1} est surjective par exactitude, il existe $b' \in B_{n+1}$ tel que $\psi_{n+1}(b') = c$. De plus on a $\psi_n(d_{n+1} b') = \mathrm{d}_{n+1}\psi_{n+1}(b') = \mathrm{d}_{n+1} c = \psi_n(b)$, donc $b - \mathrm{d}_{n+1} b' \in \ker(\psi_n)$ et par exactitude il existe $a \in A_n$ tel que $\varphi_n(a) = b - \mathrm{d}_{n+1} b'$. Alors $\varphi_{n-1}(\mathrm{d}_n a) = \mathrm{d}_n b - \mathrm{d}_n \mathrm{d}_{n+1} b' = \mathrm{d}_n b = 0$, puisque φ_{n-1} est injective par exactitude, on a $\mathrm{d}_n a = 0$, donc $a \in Z_n(A_\bullet)$. De plus $H_n(\varphi)\big(\overline{a}\big) = \overline{b} \in H_n(B_\bullet)$. Donc $\overline{b} \in \mathrm{im}(H_n(\varphi))$.

- Soit $\overline{c} \in \mathrm{im}(H_n(\psi))$. Il existe $b \in Z_n(B_\bullet)$ tel que $\psi_n(b) = c$. De plus on a $\mathrm{d}_n b = 0 \in \ker(\psi_{n-1})$, par exactitude il existe $a \in A_{n-1}$ tel que $\varphi_{n-1}(a) = \mathrm{d}_n b = 0$, puisque φ_{n-1} est injective par exactitude, on a $a = 0$ et par construction $\partial_n \overline{c} = \overline{a} = 0 \in H_{n-1}(A_\bullet)$. Donc $\overline{c} \in \ker(\partial_n)$.

  Soit $\overline{c} \in \ker(\partial_n)$. Alors $c \in Z_n(C_\bullet)$, puisque ψ_n est surjective par exactitude, il existe $b \in B_n$ tel que $\psi_n(b) = c$, d'où $H_n(\psi)\big(\overline{b}\big) = \overline{c}$. Donc $\overline{c} \in \mathrm{im}(H_n(\psi))$.

Donc la suite longue est bien exacte.

Vérifions que ∂_n est naturelle. Soit $\overline{c} \in H_n(C_\bullet)$.
Par construction il existe $b \in B_n$ tel que $\psi_n(b) = c$ et il existe $a \in Z_{n-1}(A_\bullet)$ tel que $\varphi_{n-1}(a) = \mathrm{d}_n b$ et $\partial_n \overline{c} = \overline{a} \in H_{n-1}(A_\bullet)$. Donc on a $H_{n-1}(f)\big(\partial_n \overline{c}\big) = \overline{f_{n-1}(a)} \in H_{n-1}(A'_\bullet)$.
De plus $h_n(c) = h_n(\psi_n(b)) = \psi'_n(g_n(b))$ et $\varphi'_{n-1}(f_{n-1}(a)) = g_{n-1}(\varphi_{n-1}(a)) = g_{n-1}(\mathrm{d}_n b) = \mathrm{d}_n g_n(b)$, alors par construction on a $\partial_n H_n(h)\big(\overline{c}\big) = \overline{f_{n-1}(a)} \in H_{n-1}(A'_\bullet)$. Donc $H_{n-1}(f)(\partial_n) = \partial_n H_n(h)$. □

Définition 2.20. Soit $C_\bullet$ et $D_\bullet$ deux complexes de chaînes. On dit que $D_\bullet$ est un *sous-complexe de chaînes de $C_\bullet$* si pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $D_n \subset C_n$.

TODO : Complexe quotient.

3. Homologie singulière

3.1. Simplexes

Définition 3.1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et A un sous-ensemble de E. On dit que A est *convexe* si :

$$\forall p, q \in A, [p, q] \coloneqq \{(1-t)p + tq \mid t \in [0,1]\} \subset A.$$

Définition 3.2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, A un sous-ensemble de E et $p_0, \dots, p_n$ des éléments de A. On appelle *combinaison convexe* une combinaison linéaire de la forme $t_0 p_0 + \cdots + t_n p_n$ où $t_0, \dots, t_n \in [0,1]$ et $t_0 + \cdots + t_n = 1$.

Proposition 3.3. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, A un sous-ensemble de E et $p_0, \dots, p_n$ des éléments de A. Si A est convexe, alors toute combinaison convexe de $p_0, \dots, p_n$ appartient à A.

Démonstration. Soit $t_0, \dots, t_n \in [0,1]$ tels que $t_0 + \cdots + t_n = 1$. Notons $H(n) : t_0 p_0 + \cdots + t_n p_n \in A$.
Pour $n = 1$. On pose $t \coloneqq t_1$, alors puisque A est convexe $t_0 p_0 + t_1 p_1 = (1-t)p_0 + t p_1 \in A$.
Pour $n > 1$. On suppose que $H(n-1)$ est vérifiée. Sans perte de généralité, on suppose que $t_n \neq 0$, et on pose :

$$p \coloneqq \frac{t_0}{1-t_n} p_0 + \cdots + \frac{t_{n-1}}{1-t_n} p_{n-1}$$

alors d'après $H(n-1)$ on a $p \in A$. Par convexité on a $t_0 p_0 + \cdots + t_n p_n = (1-t_n)p + t_n p_n \in A$. □

Définition 3.4. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et A un sous-ensemble de E. On appelle *enveloppe convexe de A*, notée $\mathrm{Conv}(A)$, l'ensemble des combinaisons convexes d'éléments de A.

Proposition 3.5. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et A un sous-ensemble de E. Alors l'enveloppe convexe de A est le plus petit ensemble convexe contenant A.

Démonstration. Soit $p, q \in \mathrm{Conv}(A)$ et $t \in [0,1]$. Puisque p et q sont des combinaisons convexes d'éléments de A, d'après la Proposition 3.3 on a $(1-t)p + tq \in \mathrm{Conv}(A)$. Donc l'ensemble $\mathrm{Conv}(A)$ est convexe.

Soit B un sous-ensemble convexe de E contenant A. Soit $x \in \mathrm{Conv}(A)$. Puisque x est une combinaison convexe d'éléments de $A \subset B$, d'après la Proposition 3.3 on a $x \in B$. Donc $\mathrm{Conv}(A) \subset B$. □

Définition 3.6. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et F une famille libre de $n+1$ éléments de E. On appelle *n-simplexe généré par F* l'enveloppe convexe de F. On dit que les éléments de F sont les *sommets* de $\mathrm{Conv}(F)$ et que n est la *dimension* de $\mathrm{Conv}(F)$.

Définition 3.7. On appelle *n-simplexe standard*, noté Δ^n, le n-simplexe généré par la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Proposition 3.8. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $F \coloneqq (f_0, \dots, f_n)$ une famille libre de $n+1$ éléments de E. Alors l'application :

$$\langle f_0, \dots, f_n \rangle : \Delta^n \to \mathrm{Conv}(F); (t_0, \dots, t_n) \mapsto t_0 f_0 + \dots + t_n f_n$$

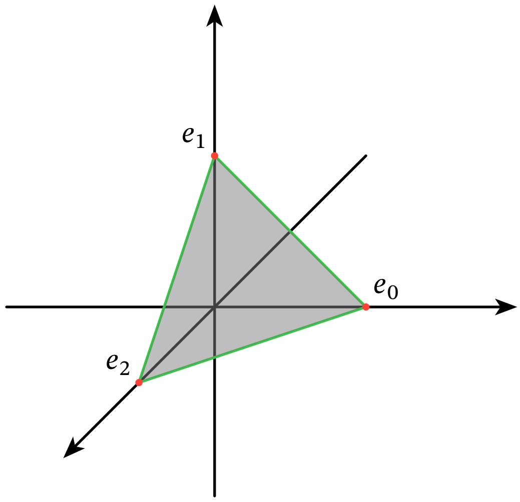
est un homéomorphisme.

Démonstration. Soit $(s_0, \dots, s_n), (t_0, \dots, t_n) \in \Delta^n$ tels que $s_0 f_0 + \dots + s_n f_n = t_0 f_0 + \dots + t_n f_n$. En particulier on a $(s_0 - t_0) f_0 + \dots + (s_n - t_n) f_n = 0$, et puisque la famille $(f_0, \dots, f_n)$ est libre, on obtient $s_0 - t_0 = \dots = s_n - t_n = 0$, c'est-à-dire $(s_0, \dots, s_n) = (t_0, \dots, t_n)$. Donc $\langle f_0, \dots, f_n \rangle$ est injective.
Soit $x \in \mathrm{Conv}(F)$. Alors il existe $(t_0, \dots, t_n) \in \Delta^n$ tels que $x \coloneqq t_0 f_0 + \dots + t_n f_n$. Donc $\langle f_0, \dots, f_n \rangle$ est surjective. Puisque $\langle f_0, \dots, f_n \rangle$ est une application linéaire et que Δ^n est de dimension finie, $\langle f_0, \dots, f_n \rangle$ est continue. De plus Δ^n est compact et $\mathrm{Conv}(F)$ est séparé, donc $\langle f_0, \dots, f_n \rangle$ est un homéomorphisme. □

Définition 3.9. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $F := (f_0, \dots, f_n)$ une famille libre de $n+1$ éléments de E et $x := t_0 f_0 + \dots + t_n f_n$ un élément de $\mathrm{Conv}(F)$. On appelle *coordonnées barycentriques de x* les coefficients $t_0, \dots, t_n \in [0, 1]$.

Définition 3.10. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, F une famille libre de $n+1$ éléments de E et G une famille non-vide d'éléments de $m+1$ éléments de F. On dit que $\mathrm{Conv}(G)$ est une *m-face* de $\mathrm{Conv}(F)$.

Exemple 3.11. Un 2-simplexe standard, il s'agit d'un triangle, les arêtes en vert sont des 1-faces du triangle, les sommets en rouge sont des 0-faces du triangle et des arêtes :



3.2. Chaînes singulières

Définition 3.12. Soit X un espace topologique. On appelle *n-simplexe singulier sur X* une application continue de Δ^n dans X.

Exemple 3.13. L'application $\langle e_0, \dots, e_n \rangle$ de la Proposition 3.8, où $(e_0, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$, est un n-simplexe singulier sur $\mathbb{R}^{n+1}$.

Proposition 3.14. Soit X et Y deux espaces topologiques, $\sigma : \Delta^n \to X$ un n-simplexe singulier sur X et $f : X \to Y$ une application continue. Alors la composition $f \circ \sigma : \Delta^n \to Y$ est un n-simplexe singulier sur Y.

Définition 3.15. Soit X un espace topologique. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on appelle *groupe des n-chaînes singulières*, noté $C_n(X)$, le groupe abélien libre engendré par les n-simplexes singuliers sur X.

Démonstration. Puisque f est continue sur X et σ est continue sur Δ^n, par composition $f \circ \sigma$ est continue de Δ^n dans Y. Donc $f \circ \sigma$ est un n-simplexe singulier sur X. □

Définition 3.16. Soit X et Y deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application continue. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle *application induite par f*, notée $C_n(f)$, le morphisme de groupes :

$$C_n(f) : C_n(X) \to C_n(Y); \sum_{k=0}^{m} \lambda_k \sigma_k \mapsto \sum_{k=0}^{m} \lambda_k (f \circ \sigma_k).$$

Proposition 3.17. Soit X, Y et Z trois espaces topologiques, $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux applications continues. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $C_n(g \circ f) = C_n(g) \circ C_n(f)$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque les n-chaînes singulières sont engendrées par les n-simplexes singuliers, il suffit de montrer le résultat pour un n-simplexe singulier $\sigma : \Delta^n \to X$. Alors on a :

$$C_n(g \circ f)(\sigma) = (g \circ f) \circ \sigma = g \circ (f \circ \sigma) = g \circ C_n(f)(\sigma) = C_n(g)(C_n(f)(\sigma))$$

□

Proposition 3.18. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le groupe des n-chaînes singulières C_n est un foncteur de Top vers Ab.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$.
- Soit X un espace topologique. Alors le groupe des n-chaînes singulières $C_n(X)$ est bien un groupe abélien.
- Soit X et Y deux espaces topologiques, $f : X \to Y$ une application continue. Alors l'application induite $C_n(f) : C_n(X) \to C_n(Y)$ est bien un morphisme de groupes.

La propriété de composition découle de la Proposition 3.17 et la propriété d'identité découle directement de la définition, donc C_n est bien un foncteur de Top vers Ab. □

Définition 3.19. Soit X un espace topologique et $\sigma : \Delta^n \to X$ un n-simplexe singulier sur X. On appelle *bord de* σ, noté $\mathrm{d}_n\sigma$, la $(n-1)$-chaîne singulière sur X définie par :

$$\mathrm{d}_n\sigma \coloneqq \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \Big(\sigma \circ \left\langle e_0, \dots, \widehat{e_k}, \dots e_n \right\rangle\Big).$$

où le symbole $\widehat{\cdot}$ signifie que l'élément est enlevé.

Remarque 3.20. Le bord d'un n-simplexe singulier est la somme alternée de ses $(n-1)$-faces.

Définition 3.21. Soit X un espace topologique et $n \in \mathbb{N}$. On appelle *morphisme de bord*, noté d_n, le morphisme de groupes induit :

$$\mathrm{d}_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X); \sum_{k=0}^{m} \lambda_k \sigma_k \mapsto \sum_{k=0}^{m} \lambda_k \mathrm{d}_n \sigma_k.$$

Proposition 3.22. Soit X et Y deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application continue. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{d}_n C_n(f) = C_{n-1}(f)\mathrm{d}_n$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque les n-chaînes singulières sont engendrées par les n-simplexes singuliers, il suffit de montrer le résultat pour un n-simplexe singulier $\sigma : \Delta^n \to X$. Alors on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_n C_n(f)(\sigma) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \Big((f \circ \sigma) \circ \left\langle e_0, \dots, \widehat{e_k}, \dots, e_n \right\rangle\Big) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \Big(f \circ \Big(\sigma \circ \left\langle e_0, \dots, \widehat{e_k}, \dots, e_n \right\rangle\Big)\Big) \\
&= C_{n-1}(f)(\mathrm{d}_n\sigma).
\end{aligned}$$

□

Proposition 3.23. Soit X un espace topologique. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{d}_n\mathrm{d}_{n+1} = 0$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque les n-chaînes singulières sont engendrées par les n-simplexes singuliers, il suffit de montrer le résultat pour un n-simplexe singulier $\sigma : \Delta^n \to X$. Alors on a :

$$\mathrm{d}_{n+1}\sigma = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \Big(\sigma \circ \left\langle e_0, \dots, \widehat{e_k}, \dots, e_n \right\rangle\Big)$$

donc en appliquant d_n, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_n\mathrm{d}_{n+1}\sigma &= \mathrm{d}_n\left(\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \Big(\sigma \circ \left\langle e_0, \dots, \widehat{e_k}, \dots, e_n \right\rangle\Big)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \mathrm{d}_n\Big(\sigma \circ \left\langle e_0, \dots, \widehat{e_k}, \dots, e_n \right\rangle\Big))
\end{aligned}$$

on sépare la somme en deux selon les éléments enlevés :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_n\mathrm{d}_{n+1}\sigma &= \sum_{0\leq k<l\leq n+1} (-1)^{k+l}\left(\sigma \circ \left\langle e_0, \dots, \widehat{e_k}, \dots, \widehat{e_l}, \dots, e_n\right\rangle\right) \\
&\quad + \sum_{0\leq l<k\leq n+1} (-1)^{k+l-1}\left(\sigma \circ \left\langle e_0, \dots, \widehat{e_l}, \dots, \widehat{e_k}, \dots, e_n\right\rangle\right) \\
&= \sum_{0\leq k<l\leq n+1} \left((-1)^{k+l} + (-1)^{k+l+1}\right)\left(\sigma \circ \left\langle e_0, \dots, \widehat{e_k}, \dots, \widehat{e_l}, \dots, e_n\right\rangle\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

car les puissances de -1 s'annulent. □

Proposition 3.24. La suite $(C_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ où pour tout $n < 0$, on pose $C_n \coloneqq 0$, munie des morphismes des bords $(\mathrm{d}_n : C_n \to C_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}$ est un foncteur de Top vers Comp.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

- Soit X un espace topologique. Alors la suite $(C_n(X))_{n\in\mathbb{Z}}$ munie des morphismes de bords $(\mathrm{d}_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X))_{n\in\mathbb{Z}}$ est bien un complexe de chaînes d'après la Proposition 3.23.
- Soit X et Y deux espaces topologiques, $f : X \to Y$ une application continue. Alors la suite des applications induites $(C_n(f) : C_n(X) \to C_n(Y))_{n\in\mathbb{Z}}$ est bien un morphisme de complexes d'après la Proposition 3.22.

La propriété de composition découle de la Proposition 3.17 et la propriété d'identité découle directement de la définition, donc C_n est bien un foncteur de Top vers Ab. □

3.3. Définitions de l'homologie singulière

3.3.1. D'un espace topologique

Définition 3.25. Soit X un espace topologique. On appelle *complexe de chaînes singulières de* X, noté $C_\bullet(X)$, le complexe de chaînes déterminé par la suite $(C_n(X))_{n\in\mathbb{N}}$ munie des morphismes de bords $(\mathrm{d}_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X))_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 3.26. Soit $C_\bullet(X)$ un complexe de chaînes singulières et $n \in \mathbb{Z}$.

- On appelle *n-cycle singulier* un élément de $Z_n(X) \coloneqq Z_n(C_\bullet(X))$.
- On appelle *n-bord singulier* un élément de $B_n(X) \coloneqq B_n(C_\bullet(X))$.
- On appelle n[e] *groupe d'homologie singulière de* X le groupe $H_n(X) \coloneqq H_n(C_\bullet(X))$.
- On appelle *homologie singulière de* X le groupe $H_\bullet(X) \coloneqq H_\bullet(C_\bullet(X))$.

Corollaire 3.27. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le n[e] groupe d'homologie singulière H_n est un foncteur de Top vers Ab

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$. D'après la Proposition 3.24 $C_\bullet$ est un foncteur de Top vers Comp et d'après le Théorème 2.12 H_n est un foncteur de Comp vers Ab, par composition $H_n = H_n(C_\bullet)$ est bien un foncteur de Top vers Ab. □

Corollaire 3.28. L'homologie singulière $H_\bullet$ est un foncteur de Top vers GrAb.

Démonstration. D'après la Proposition 3.24 $C_\bullet$ est un foncteur de Top vers Comp et d'après le Corollaire 2.13 $H_\bullet$ est un foncteur de Comp vers GrAb, par composition $H_\bullet = H_\bullet(C_\bullet)$ est bien un foncteur de Top vers Ab. □

Théorème 3.29 (Axiome de dimension)**.** Soit P un espace topologie constitué d'un unique point. Alors le groupe $H_n(P)$ est non-trivial si et seulement $n = 0$.

Démonstration. Si $n < 0$, on a clairement $H_n(P) \simeq \{0\}$.
Si $n \geq 0$, il existe un unique n-simplexe singulier $\sigma_n : \Delta^n \to P$, alors on a :

$$\mathrm{d}_n\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sigma_{n-1} = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \text{ ou } n \text{ est impair} \\ \sigma_{n-1} & \text{si } n \neq 0 \text{ et } n \text{ est pair} \end{cases}$$

dans le cas $n = 0$, alors $H_0(P) = \langle \sigma_0 \rangle / \{0\} \simeq \mathbb{Z}$,
dans le cas $n \neq 0$ et n est impair, alors $H_n(P) = \langle \sigma_n \rangle / \langle \sigma_n \rangle \simeq \{0\}$,
dans le cas $n \neq 0$ et n est pair, alors $H_n(P) = \{0\}/\{0\} \simeq \{0\}$. □

TODO

3.3.2. D'une paire d'espace topologique

Définition 3.30. Soit $C_\bullet(X)$ et $C_\bullet(Y)$ deux complexes de chaînes singulières, et $f : X \to Y$ une application continue. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note $H_n(f) : H_n(X) \to H_n(Y)$ le morphisme de groupes induit par $C_n(f)$.

Bibliographie

[1] Eduard Looijenga, *Algebraic Topology - an introduction*. 2010.