# Espaces complets

## Table des matières



## 1. Suites de Cauchy

**Définition 1.1.** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $E$. On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de *Cauchy* si elle vérifie :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N}, p \geq N \text{ et } q \geq N \Rightarrow \left\|x_p - x_q\right\| \leq \varepsilon.$$

**Proposition 1.2.** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de Cauchy, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

(1) $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.
(2) $(\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.
(3) $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

*Démonstration.*

(1) Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, p \geq N_1 \text{ et } q \geq N_1 \Rightarrow \left\|x_p - x_q\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

et puisque $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, p \geq N_2 \text{ et } q \geq N_2 \Rightarrow \left\|y_p - y_q\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons $N \coloneqq \max(N_1, N_2)$. Soit $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \geq N$ et $q \geq N$. Alors

$$\left\|x_p + y_p - (x_q + y_q)\right\| \leq \left\|x_p - x_q\right\| + \left\|y_p - y_q\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

(2)

(3)

□

**Proposition 1.3.** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

*Démonstration.* Puisque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, p \geq N \text{ et } q \geq N \Rightarrow \left\|x_p - x_q\right\| \leq 1$$

en particulier en posant $q \coloneqq N$, on a

$$\forall p \in \mathbb{N}, p \geq N \Rightarrow \left\|x_p - x_N\right\| \leq 1$$

d'après l'inégalité triangulaire inversée, on a

$$\forall p \in \mathbb{N}, p \geq N \Rightarrow \left\|x_p\right\| \leq 1 + \|x_N\|.$$

Posons $M := \max\left(\|x_0\|, \ldots, \|x_N\|, 1 + \|x_N\|\right)$. Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par $M$. □

**Proposition 1.4.** Soit $\left(E, \|\cdot\|\right)$ un espace vectoriel normé et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente. Alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

*Démonstration.* Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, il existe $N \in \mathbb{N}$ et $\ell \in E$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \|x_n - \ell\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Soit $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \geq N$ et $q \geq N$. Alors

$$\left\|x_p - x_q\right\| = \left\|x_p - \ell + \ell - x_q\right\| \leq \left\|x_p - \ell\right\| + \left\|x_q - \ell\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. □

**Proposition 1.5.** Soit $\left(E, \|\cdot\|\right)$ un espace vectoriel normé et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

*Démonstration.* Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente, il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante, $N_2 \in \mathbb{N}$ et $\ell \in E$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_2 \Rightarrow \left\|x_{\varphi(n)} - \ell\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

et puisque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, p \geq N_1 \text{ et } q \geq N_1 \Rightarrow \left\|x_p - x_q\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

en particulier en posant $q := \varphi(p) \geq p \geq N$, on a

$$\forall p \in \mathbb{N}, p \geq N \Rightarrow \left\|x_p - x_{\varphi(p)}\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$. Alors

$$\|x_n - \ell\| = \left\|x_n - x_{\varphi(n)} + x_{\varphi(n)} - \ell\right\| \leq \left\|x_n - x_{\varphi(n)}\right\| + \left\|x_{\varphi(n)} - \ell\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. □

## 2. Complétude

**Définition 2.1.** Soit $\left(E, \|\cdot\|\right)$ un espace vectoriel normé et $A$ un sous-ensemble de $E$. On dit que $A$ est *complet* si toute suite de Cauchy de $A$ est convergente dans $A$. Si $E$ est complet, on dit que $E$ est un *espace de Banach*.

**Exemples 2.2.** $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ et $\left(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|\right)$ sont des espaces de Banach.

**Proposition 2.3.** Soit $\left(E, \|\cdot\|\right)$ un espace vectoriel normé et $A$ un sous-ensemble de $E$. Si $A$ est complet, alors $A$ est fermé.

*Démonstration.* Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $A$ qui converge vers $\ell \in E$. Puisque $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Puisque $A$ est complet, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $A$, alors $\ell \in A$. Donc $A$ est fermé. □

**Proposition 2.4.** Soit $\left(E, \|\cdot\|\right)$ un espace vectoriel normé et $A \subset B$ deux sous-ensembles de $E$. Si $A$ est fermé et $B$ est complet, alors $A$ est complet.

*Démonstration.* Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy d'éléments de $A$. Alors $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy d'éléments de $B$. Puisque $B$ est complet, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $B$. Mais puisque $A$ est fermé, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $A$. Donc $A$ est complet. □

**Proposition 2.5.** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Si $E$ est de dimension finie, alors $E$ est un espace de Banach.

*Démonstration.* Notons $d$ la dimension de $E$ et $(e^1, \dots, e^d)$ une base de $E$. Puisque $E$ est de dimension finie $\|\cdot\|$ est équivalente à $\|\cdot\|_\infty$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N}, p \geq N \text{ et } q \geq N \Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, d\}, \left|u_p^i - u_q^i\right| \leq \varepsilon$$

on en déduit que pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$, la suite $\left(x_n^i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et converge vers une limite $x^i \in \mathbb{R}$. Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $x := \left(x^1, \dots, x^d\right) \in E$. Donc $E$ est un espace de Banach. □

# 3. Complétude des espaces de fonctions continues

**Proposition 3.1.** Soit $\left(E, \|\cdot\|_E\right)$ et $\left(F, \|\cdot\|_F\right)$ deux espaces vectoriels normés, $A$ un sous-ensemble de $E$ et $\left(C_b^0(A, F), \|\cdot\|_\infty\right)$ l'espace vectoriel normé des fonctions continues et bornées de $A$ dans $F$. Si $F$ est un espace de Banach, alors $C_b^0(A, F)$ est aussi un espace de Banach.

*Démonstration.* Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy d'éléments de $C_b^0(A, F)$. Soit $\varepsilon > 0$, alors puisque la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, p \geq N \text{ et } q \geq N \Rightarrow \forall a \in A, \left\|f_p(a) - f_q(a)\right\|_F \leq \varepsilon$$

en particulier, pour tout $a \in A$, la suite $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $F$. Puisque $F$ est complet, la suite $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a) \in F$. Montrons que la fonction $f$ est continue et bornée.

On remarque en passant à la limite que l'on peut écrire

$$\forall q \in \mathbb{N}, q \geq N \Rightarrow \forall a \in A, \|f(a) - f_n(a)\| \leq \varepsilon$$

donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f$. Puisque les $f_n$ sont continues, la fonction $f$ est continue.

De la même manière en remarque que pour tout $a \in A$, on a $\|f(a) - f_N(a)\|_F \leq 1$, par une inégalité triangulaire inversée, on obtient

$$\|f(a)\|_F \leq 1 + \|f_N(a)\|_F$$

donc la fonction $f$ est bornée. □

# 4. Théorème du point fixe de Banach-Picard

**Lemme 4.1.** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série à termes dans $E$. Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge absolument, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge simplement.

*Démonstration.* Notons $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$. Soit $M, N \in \mathbb{N}$ tels que $M \geq N$, alors par une inégalité triangulaire, on obtient

$$\|U_M - U_N\| = \left\|\sum_{n=N+1}^{M} u_n\right\| \leq \sum_{n=N+1}^{M} \|u_n\| = \sum_{n=0}^{M} \|u_n\| - \sum_{n=0}^{N} \|u_n\| \underset{M,N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, puisque $E$ est un espace complet, la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge simplement □

**Définition 4.2.** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $F$ un sous-ensemble de $E$ et $f : F \to F$ une application. On dit que $f$ est *contractante* s'il existe $\alpha \in [0, 1[$ tel que :

$$\forall x, y \in F, \|f(x) - f(y)\| \leq \alpha\|x - y\|.$$

**Théorème 4.3** (Théorème du point fixe)**.** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, $F$ un sous-ensemble fermé de $E$ et $f : F \to F$ une application contractante. Alors $f$ admet une unique point fixe sur $F$. De plus, la suite récurrente définie par :

$$\begin{cases} x_0 \in F \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

converge vers cette unique point fixe.

*Démonstration.* Puisque $f$ est contractante, il existe $\alpha \in [0, 1[$ tel que :

$$\forall x, y \in F, \|f(x) - f(y)\| \leq \alpha\|x - y\|.$$

Considérons la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}(x_{n+1} - x_n)$. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on remarque que :

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \|f(x_n) - f(x_{n-1})\|$$

puisque $f$ est contractante, on a :

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \alpha\|x_n - x_{n-1}\|$$

par récurrence directe, on obtient :

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \alpha^n\|x_1 - x_0\|$$

donc d'après le théorème de comparaison, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}(x_{n+1} - x_n)$ converge absolument. Or comme $E$ est un espace de Banach, d'après le Lemme 4.1, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}(x_{n+1} - x_n)$ converge simplement. En particulier la suite des sommes partielles :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k) = x_n - x_0$$

converge vers un élément de $E$. On en déduit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément de $E$. Puisque la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $F$, qui est fermé, elle converge vers un élément $l \in F$. Enfin puisque $f$ est contractante, elle est continue, par passage à la limite de l'égalité $x_{n+1} = f(x_n)$, on obtient $f(l) = l$.

Soit $l, m \in F$ deux points fixes de $f$. Puisque $f$ est contractante, on a :

$$\|l - m\| = \|f(l) - f(m)\| \leq \alpha\|l - m\|$$

d'où $\|l - m\| = 0$ et $l = m$. □

**Remarque 4.4.** Le Théorème du point fixe possède de nombreuses applications :
- Le théorème de Cauchy-Lipschitz qui donne l'existence de solutions d'équations différentielles.
- Le théorème d'inversion locale.
- La résolution d'équations de dérivées partielles.

## 4.1. Applications

**Théorème 4.5.** Soit $\left(E, \|\cdot\|_E\right)$ et $\left(F, \|\cdot\|_F\right)$ deux espaces de Banach, $f : E \to F$ une application linéaire continue. Si $f$ est bijective, alors $f^{-1}$ est une application linéaire continue.

**Théorème 4.6.** Soit $\left(E, \|\cdot\|_E\right)$ et $\left(F, \|\cdot\|_F\right)$ deux espaces de Banach, $U$ un ouvert non-vide de $E$, $a$ un point de $U$ et $f : U \to F$ une application de classe $C^1$. Si $\mathrm{d}_a f$ est bijective, alors il existe un voisinage ouvert $V$ de $a$ et un voisinage ouvert $W$ de $f(a)$ tels que $f : V \to W$ soit un $C^1$-difféomorphisme.

*Démonstration.* On pose $M := \left\| \mathrm{d}_a f^{-1} \right\| > 0$. Soit $x \in U$ et $y \in F$. On considère l'équation $y = f(x)$ et on pose $\varphi : U \to F; x \mapsto f(x) - f(a) - \mathrm{d}_a f(x-a)$, alors on a :

$$y - f(a) - \mathrm{d}_a f(x-a) = \varphi(x)$$

puisque $\mathrm{d}_a f$ est bijective, on a :

$$x = a + \mathrm{d}_a f^{-1}(y - f(a) - \varphi(x)).$$

On observe que $\varphi(a) = \mathrm{d}_a \varphi = 0$. Par continuité il existe $r_1 > 0$ tel que :

$$\forall x \in \overline{B}(a, r_1), \|\mathrm{d}_x \varphi\| \leq \frac{1}{2M}$$

d'après le théorème des accroissements finis, on a :

$$\forall x_1, x_2 \in \overline{B}(a, r_1), \|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\| \leq \frac{1}{2M}\|x_1 - x_2\|$$

en particulier pour $x_2 = a$, on obtient :

$$\forall x \in \overline{B}(a, r_1), \|\varphi(x)\| \leq \frac{1}{2M}\|x_1 - a\| \leq \frac{r_1}{2M}.$$

On pose $F_y : \overline{B}(a, r_1) \to B(a, r_1); x \mapsto a + \mathrm{d}_a f^{-1}(y - f(a) - \varphi(x))$. Soit $x \in \overline{B}(a, r_1)$, alors on a :

$$\left\| F_y(x) - a \right\| = \left\| \mathrm{d}_a f^{-1}(y - f(a) - \varphi(x)) \right\| \leq M\|y - f(a) - \varphi(x)\|$$

on pose $r_2 := \frac{r_1}{2M}$ et soit $y \in B(f(a), r_2)$, alors on obtient :

$$\left\| F_y(x) - a \right\| < M\left(\frac{r_1}{M}\right) = r_1$$

ainsi $F_y(x) \in B(a, r_1)$.

Soit $x_1, x_2 \in \overline{B}(a, r_1)$, alors on a :

$$\begin{aligned}
\left\| F_y(x_1) - F_y(x_2) \right\| &= \left\| a + \mathrm{d}_a f^{-1}(y - f(a) - \varphi(x_1)) - \left(a + \mathrm{d}_a f^{-1}(y - f(a) - \varphi(x_2))\right) \right\| \\
&= \left\| \mathrm{d}_a f^{-1}(\varphi(x_2) - \varphi(x_1)) \right\| \\
&\leq M\|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)\| \\
&\leq \frac{M}{2M}\|x_2 - x_1\| = \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|
\end{aligned}$$

donc $F_y$ est contractante.

D'après le théorème du point fixe, $F_y$ admet un unique point fixe dans $B(a, r_1)$. En particulier l'équation $y = f(x)$ admet une unique solution dans $B(a, r_1)$.
On pose $W := B(f(a), r_2)$ et $V := B(a, r_1) \cap f^{-1}(W)$ de sorte que $f : V \to W$ est bijective.

Soit $y_1, y_2 \in W$, alors $f^{-1}$ vérifie :

$$\begin{aligned}
f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2) &= F_{y_1}\left(f^{-1}(y_1)\right) - F_{y_2}\left(f^{-1}(y_2)\right) \\
&= \mathrm{d}_a f^{-1}(y_1 - y_2) - \mathrm{d}_a f^{-1}\left(\varphi\left(f^{-1}(y_1)\right) - \varphi\left(f^{-1}(y_2)\right)\right)
\end{aligned}$$

on en déduit :

$$\left\| f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2) \right\| \leq M\|y_1 - y_2\| + \frac{1}{2}\left\| f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2) \right\|$$

donc $f^{-1}$ est lipschitzienne, et en particulier continue. On peut alors montrer que $f$ est un $C^1$-difféomorphisme. $\square$