Algèbre linéaire et bilinéaire

Table des matières

1. Rappels d'algèbre linéaire

1.1. Espaces vectoriels

Définition 1.1. Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif. On appelle *espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$, ou $\mathbb{K}$-*espace vectoriel*, un ensemble E muni de deux lois

- une loi de composition interne $+ : E \times E \to E$, telle que le couple $(E, +)$ forme un groupe commutatif,
- et d'une loi de composition externe $\cdot : \mathbb{K} \times E \to E$, vérifiant les propriétés suivantes
  1. la loi $\cdot$ est distributive à droite, $\forall a, b \in \mathbb{K}, \forall x \in E, (a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$,
  2. la loi $\cdot$ est distributive à gauche, $\forall a \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E, a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$,
  3. la loi $\cdot$ est associative mixte, $\forall a, b \in \mathbb{K}, \forall x \in E, a \cdot (b \cdot x) = (ab) \cdot x$,
  4. le neutre de $\mathbb{K}$ est neutre à gauche pour $\cdot$, $\forall x \in E, 1 \cdot x = x$.

Définition 1.2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-ensemble de E. On dit que F est un *sous-espace vectoriel de* E, s'il est non-vide et stable par combinaisons linéaires.

Proposition 1.3. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel.

Définition 1.4. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On définit la somme de F et G par

$$F + G \coloneqq \{x + y \mid x \in F, y \in G\}.$$

Proposition 1.5. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors $F + G$ est un sous-espace vectoriel.

Définition 1.6. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $x_1, ..., x_n \in E$. On appelle *sous-espace vectoriel engendré par* $x_1, ..., x_n$, l'ensemble des combinaisons linéaires de $x_1, ..., x_n$, noté

$$\mathrm{Vect}(x_1, ..., x_n) = \{a_1 \cdot x_1 + ... + a_n \cdot x_n \mid a_1, ..., a_n \in \mathbb{K}\}.$$

Définition 1.7. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(E_k)_{1 \leq k \leq n}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. On dit qu'ils sont en *somme directe* si

$$\forall (x_1, ..., x_n) \in E_1 \times ... \times E_n, \sum_{k=1}^{n} x_k = 0 \Rightarrow \forall 1 \leq k \leq n, x_k = 0$$

dans ce cas, on notera $E_1 \oplus ... \oplus E_n \coloneqq E_1 + ... + E_n$.

Remarque 1.8. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors F et G sont en somme directe si $F \cap G = \{0\}$.

1.2. Famille libre, famille génératrice et bases

Définition 1.9. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $x_1, ..., x_n \in E$. On dit que $(x_1, ..., x_n)$ est une *famille libre* si les droites $(\mathbb{K}x_k)_{1 \leq k \leq n}$ sont en somme directe, c'est-à-dire

$$\forall a_1, ..., a_n \in \mathbb{K}, a_1 \cdot x_1 + ... + a_n \cdot x_n = 0 \Rightarrow \forall 1 \leq k \leq n, a_k = 0.$$

Définition 1.10. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $x_1, ..., x_n \in E$. On dit que $(x_1, ..., x_n)$ est une *famille génératrice* si $\mathrm{Vect}(x_1, ..., x_n) = E$, c'est-à-dire

$$\forall x \in E, \exists a_1, ..., a_n \in \mathbb{K}, a_1 \cdot x_1 + ... + a_1 \cdot x_n = x.$$

Définition 1.11. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $x_1, ..., x_n \in E$. On dit que $(x_1, ..., x_n)$ est une *base* si elle est libre et génératrice, c'est-à-dire

$$\forall x \in E, \exists! a_1, ..., a_n \in \mathbb{K}, a_1 \cdot x_1 + ... + a_1 \cdot x_n = x.$$

Théorème 1.12. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $(x_1, ..., x_n)$ et $(x_1, ..., x_m)$ deux bases de E. Alors elles ont le même nombre d'éléments $n = m$.

Définition 1.13. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle *dimension de* E, notée $\dim(E)$, le nombre d'éléments dans une base de E.

Théorème 1.14. (de la base incomplète) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $(x_1, ..., x_m)$ une famille libre de E. Alors il existe $x_{m+1}, ..., x_n \in E$, tels que $(x_1, ..., x_n)$ soit une base de E.

Proposition 1.15. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{E} = (e_1, ..., e_n)$ une famille d'éléments de E. Alors les énoncés suivants sont équivalents
1. $\mathcal{E}$ est une base de E,
2. $\mathcal{E}$ est une famille libre de E,
3. $\mathcal{E}$ est une famille génératrice de E.

Théorème 1.16. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors

$$\dim(F) + \dim(G) = \dim(F + G) + \dim(F \cap G).$$

Notation 1.17. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $x \in E$, et $\mathcal{E} = (e_1, ..., e_n)$ et $\mathcal{F} = (f_1, ..., f_n)$ deux bases de E.
- On note $[x]_{\mathcal{E}}$ les coordonnées de x dans la base $\mathcal{E}$.
- On note $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} := \left([f_1]_{\mathcal{E}} \cdots [f_n]_{\mathcal{E}}\right)$ la matrice de passage de la base $\mathcal{E}$ à la base F.

Alors les coordonnées de x dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont liées par

$$[x]_{\mathcal{E}} = \mathcal{P}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} [x]_{\mathcal{F}}$$

ce qui entraîne

$$\mathcal{P}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} = \left(\mathcal{P}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}\right)^{-1}.$$

1.3. Applications linéaires

Définition 1.18. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $u : E \to F$ une application. On dit que u est *linéaire*, si elle vérifie

$$\forall a, b \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E, u(a \cdot x + b \cdot y) = a \cdot u(x) + b \cdot u(y).$$

Si $E = F$, on dit que u est un *endomorphisme*.

Notation 1.19. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F. Si $E = F$, on note $\mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(E, E)$.

Définition 1.20. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $u : E \to F$ une application linéaire.
- On appelle *image* de u l'ensemble $\mathrm{im}(u) := \{u(x) \mid x \in E\}$.
- On appelle *noyau* de u l'ensemble $\ker(u) := \{x \in E \mid u(x) = 0\}$.

Proposition 1.21. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $u : E \to F$ une application linéaire. Alors $\ker(u)$ et $\mathrm{im}(u)$ sont des espaces vectoriels.

Définition 1.22. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $u : E \to F$ une application linéaire. On appelle *rang* de u, noté $\mathrm{rg}(u)$, la dimension de $\mathrm{im}(u)$.

Théorème 1.23. (du rang) Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $u : E \to F$ une application linéaire. Alors

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{im}(u)) + \dim(\ker(u)).$$

Corollaire 1.24. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $u : E \to F$ une application linéaire. Alors les énoncés suivants sont équivalents
1. u est bijective,
2. u est injective,
3. u est surjective.

1.4. Matrice d'une application linéaire

Définition 1.25. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $\mathcal{E} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E et $\mathcal{F}$ une base de F, et $u : E \to F$ une application linéaire. On appelle *matrice de* u dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$, la matrice

$$[u]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} := \left([u(e_1)]_{\mathcal{F}} \cdots [u(e_n)]_{\mathcal{F}}\right).$$

Si $E = F$, on notera $[u]_{\mathcal{E}} := [u]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}$, et on remarque $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = [\mathrm{id}]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}$.

Proposition 1.26. Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ des bases respectives de E, F et G, et $u : E \to F$ et $v : F \to G$ deux applications linéaires. Alors

$$[v \circ u]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{G}} = [v]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{G}} [u]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}.$$

Corollaire 1.27. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux bases de E, et $u : E \to E$ un endomorphisme sur E. Alors

$$[u]_{\mathcal{F}} = \mathcal{P}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} [u]_{\mathcal{E}} \mathcal{P}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}.$$

1.5. Déterminant d'une matrice

Définition 1.28. Soit M une matrice carrée de taille n. On appelle *déterminant* de M, le nombre

$$\det(M) := \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) m_{1,\sigma(1)} ... m_{n,\sigma(n)}.$$

Proposition 1.29. Soit A et B deux matrices carrées de même taille. Alors

$$\det(AB) = \det(A) \det(B).$$

Corollaire 1.30. Soit P une matrice inversible. Alors

$$\det(P^{-1}) = \det(P)^{-1}$$

et si M est une matrice carrée de même taille, on a

$$\det(P^{-1}AP) = \det(A).$$

Corollaire 1.31. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux bases de E, et $u : E \to E$ un endomorphisme sur E. Alors

$$\det([u]_{\mathcal{E}}) = \det([u]_{\mathcal{F}}).$$

Définition 1.32. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u : E \to E$ un endomorphisme sur E. On appelle *déterminant* de u, noté $\det(u)$, le déterminant de la matrice de u dans une base de E.

Proposition 1.33. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u : E \to E$ un endomorphisme sur E. Alors u est inversible si et seulement si son déterminant est non-nul.

Proposition 1.34. Soit M une matrice carrée de la forme

$$\left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$$

où A et B sont des blocs carrés. Alors

$$\det(M) = \det(A)\det(B).$$

2. Diagonalisation

3. Polynôme caractéristique

4. Trigonalisation

5. Polynôme d'endomorphisme

6. Réduction d'endomorphisme

7. Formes bilinéaires

Définition 7.1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\Phi : E \times E \to E$ une application. On dit que Φ est une *forme bilinéaire*, si pour tout $x \in E$, les applications $y \mapsto \Phi(x, y)$ et $y \mapsto \Phi(y, x)$ sont linéaires.

7.1. Ecriture dans une base

Définition 7.2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathcal{E} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E et $\Phi : E \times E \to E$ une application bilinéaire. On appelle *matrice* de Φ dans la base $\mathcal{E}$, la matrice

$$[\Phi]_{\mathcal{E}} := \left(\Phi(e_i, e_j)\right)_{1 \leq i,j \leq n}.$$

Proposition 7.3. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathcal{E} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E et $\Phi : E \times E \to E$ une application bilinéaire. Alors par bilinéarité

$$\forall x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in E, \Phi(x, y) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} x_i y_j \Phi(e_i, e_j) = [x]_{\mathcal{E}}^{\mathrm{T}} [\Phi]_{\mathcal{E}} [y]_{\mathcal{E}}.$$

Proposition 7.4. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux bases de E, et $\Phi : E \times E \to E$ une application bilinéaire. Alors

$$[\Phi]_{\mathcal{F}} = {\mathcal{P}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}}^{\mathrm{T}} [\Phi]_{\mathcal{E}} \mathcal{P}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}.$$

7.2. Dualité

Définition 7.5. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. On appelle *dual* de E, noté E^*, l'ensemble des formes linéaires sur E. Si $\mathcal{E} = (e_1, ..., e_n)$ est une base de E, on appelle *base duale*, la famille $(e_1^*, ..., e_n^*)$ telle que

$$\forall i, j \in \{1, ..., n\}, e_i^*(e_j) := \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$