

Problème du rectangle inscrit

Emanuel Morille

Avec les conseils de Jean-Baptiste Campesato

28 Juin 2025

Table des matières

Introduction	2
1. Bases de théorie des catégories	3
1.1. Catégories	3
1.2. Foncteurs	4
1.3. Transformations naturelles	4
2. Catégorie Comp des complexes de chaînes	5
2.1. Complexes de chaînes	5
2.2. Morphismes de complexes	5
2.3. La catégorie Comp	6
2.4. Premières propriétés	6
2.4.1. Homotopie	6
2.4.2. Complexe de chaînes quotient	7
2.4.3. Exactitude	8
3. Homologie singulière	10
3.1. Simplexes	10
3.2. Chaînes singulières	11
3.3. Définitions de l'homologie singulière	13
3.3.1. D'un espace topologique	13
3.3.2. D'une paire d'espace topologique	14
3.4. Principales propriétés et axiomes d'Eilenberg-Steenrod	14
3.4.1. Connexité par arcs	17
3.4.2. Cas particuliers	17
4. Droite et plan projectifs réels	23
4.1. La droite projective réelle	23
4.2. Le plan projectif réel	23
4.2.1. Non-plongement dans l'espace euclidien	26
Conclusion	28
Annexe	31
Bibliographie	32

Introduction

Le questionnement à l'origine de ce sujet est le *problème du carré inscrit*, énoncé par **Otto Toeplitz** en 1911 de la manière suivante :

« Toute courbe de Jordan admet-elle un carré inscrit ? »

Bien que cette question fut l'objet de nombreuses recherches, elle n'est toujours pas résolue, en revanche nous sommes capables d'en démontrer une version simplifiée :

« Toute courbe de Jordan admet-elle un ~~carré~~ rectangle inscrit ? »

C'est donc cet énoncé que nous appellerons le *problème du rectangle inscrit*.

Par exemple dans le cas d'un cercle, on peut évidemment toujours trouver une infinité de carrés et de rectangles inscrits, le problème devient plus difficile lorsque la courbe est quelconque.

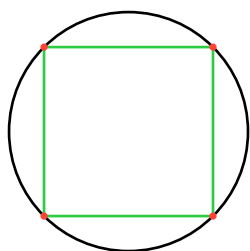


Fig. 1. – Un carré inscrit.

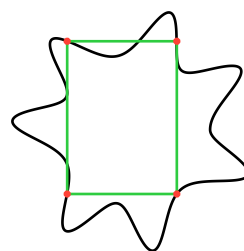


Fig. 2. – Un rectangle inscrit.

Dans la suite nous allons étudier l'homologie singulière, et plus particulièrement celle du plan projectif réel, ce qui nous permettra de démontrer un résultat très important dans la résolution du problème. Commençons d'abord par définir quelques notions du sujet.

Définition 0.1. Soit C une partie de \mathbb{R}^2 . On dit que C est une *courbe de Jordan* s'il existe une fonction continue $\gamma_C : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que :

- C est l'image de γ_C : $\text{im}(\gamma_C) = C$.
- C est fermée : $\gamma_C(0) = \gamma_C(1)$.
- C est simple : γ_C est injective sur $[0, 1[$, c'est-à-dire $\forall x, y \in [0, 1[, \gamma_C(x) = \gamma_C(y) \Rightarrow x = y$.

Exemple 0.2. Le cercle C de la Fig. 1 est bien une courbe de Jordan, en effet on pose :

$$\gamma_C : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2; (x, y) \mapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$$

Alors γ_C est bien continue, de plus :

- On a clairement $\text{im}(\gamma_C) = C$.
- On a $\gamma_C(0) = (1, 0) = \gamma_C(1)$.
- Pour $x \in [0, 1[$, on a $2\pi x \in [0, 2\pi[$, donc γ_C est injective sur $[0, 1[$.

Définition 0.3. Soit C une courbe de Jordan de \mathbb{R}^2 et $R := (a, b, c, d)$ un rectangle de \mathbb{R}^2 . On dit que le rectangle R est *inscrit dans* C si $a, b, c, d \in C$.

Exemple 0.4. Le carré $R := ((\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2), (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2), (-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2), (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2))$ est bien inscrit dans le cercle C de la Fig. 1, en effet :

- On a $\gamma_C(1/8) = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, donc $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) \in C$.
- On a $\gamma_C(3/8) = (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, donc $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) \in C$.
- On a $\gamma_C(5/8) = (-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$, donc $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2) \in C$.
- On a $\gamma_C(7/8) = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$, donc $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2) \in C$.

Théorème 0.5. Soit C une courbe de Jordan de \mathbb{R}^2 . Alors il existe un rectangle inscrit dans C .

1. Bases de théorie des catégories

1.1. Catégories

Définition 1.1. Une *catégorie* \mathcal{C} est la donnée de :

- Une classe $\text{ob}(\mathcal{C})$ dont les éléments sont appelés les *objets* de \mathcal{C} .
- Une classe $\text{hom}(\mathcal{C})$ dont les éléments sont appelés les *morphismes* de \mathcal{C} .
Un morphisme $f \in \text{hom}(\mathcal{C})$ a un *domaine* $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$ et un *codomaine* $Y \in \text{ob}(\mathcal{C})$. On note alors ce morphisme $f : X \rightarrow Y$ et $\text{hom}(X, Y)$ l'ensemble des morphismes de X dans Y .
- Pour tout objets $X, Y, Z \in \text{ob}(\mathcal{C})$, une *composition* :

$$\circ : \text{hom}(Y, Z) \times \text{hom}(X, Y) \rightarrow \text{hom}(X, Z).$$

- Pour tout objet $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$, un morphisme *identité* :

$$\text{id}_X : X \rightarrow X.$$

Vérifiant les propriétés suivantes pour tout objets $X, Y, Z, T \in \text{ob}(\mathcal{C})$:

- *Associativité* : Pour tout morphismes $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ et $h : Z \rightarrow T$, on a :

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

- *Identité* : Pour tout morphisme $f : X \rightarrow Y$, on a :

$$\text{id}_Y \circ f = f = f \circ \text{id}_X.$$

Exemple 1.2. La catégorie Ab des groupes abéliens :

- Les objets de Ab sont les groupes abéliens.
- Les morphismes de Ab sont les morphismes de groupes.

Exemple 1.3. Un *groupe gradué* est un groupe G muni d'une famille de sous-groupes $(G_i)_{i \in I}$ telle que $G = \bigoplus_{i \in I} G_i$. Pour tout $i \in I$, un élément non-nul de G_i est dit *homogène de degré* i .

Soit $G := \bigoplus_{i \in I} G_i$ et $H := \bigoplus_{i \in I} H_i$ deux groupes gradués. Un *morphisme de groupes gradués* est un morphisme de groupes $\varphi : G \rightarrow H$ tel que pour tout $i \in I$, on a $\varphi(G_i) \subset H_i$.

On définit ainsi la catégorie GrAb des groupes abéliens gradués :

- Les objets de GrAb sont les groupes abéliens gradués.
- Les morphismes de GrAb sont les morphismes de groupes gradués.

Exemple 1.4. La catégorie Top des espaces topologiques :

- Les objets de Top sont les espaces topologiques.
- Les morphismes de Top sont les applications continues.

Exemple 1.5. Une paire d'espaces topologiques est un espace topologique X muni d'une partie A de lui-même. On la note (X, A) .

Soit (X, A) et (Y, B) deux paires d'espaces topologiques. Un *morphisme de paires* est une application continue $f : X \rightarrow Y$ telle que $f(A) \subset B$. On le note $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$.

On définit ainsi catégorie Top_2 des paires d'espaces topologiques :

- Les objets de Top_2 sont les paires d'espaces topologiques.
- Les morphismes de Top_2 sont les morphismes de paires.

Exemple 1.6. Soit (X, \leq) un ensemble partiellement ordonné. On définit la catégorie $\mathcal{C}(X, \leq)$:

- Les objets de $\mathcal{C}(X, \leq)$ sont les éléments de X .
- Pour tout $x, y \in X$, si $x \leq y$, on a un morphisme $f_{x,y} : x \rightarrow y$.
- Pour tout $x, y, z \in X$, si $x \leq y$ et $y \leq z$, on a bien $x \leq z$ et une composition $f_{y,z} \circ f_{x,y} = f_{x,z}$.
- Pour tout $x \in X$, on a bien $x \leq x$ et un morphisme identité $f_{x,x}$.

Définition 1.7. Soit \mathcal{C} une catégorie. La *catégorie opposée (ou duale)* de \mathcal{C} , notée \mathcal{C}^{op} , est la catégorie dont les objets sont les objets \mathcal{C} et dont les morphismes sont les morphismes de \mathcal{C} dont le domaine et le codomaine sont inversés.

Exemple 1.8. Soit (X, \leq) un ensemble partiellement ordonné. Alors on a $\mathcal{C}(X, \leq)^{\text{op}} = \mathcal{C}(X, \leq)$ où pour tout $x, y \in X$, on a $x \leq y$ si et seulement si $y \leq x$.

1.2. Foncteurs

Définition 1.9. Soit \mathcal{C} et \mathcal{D} deux catégories. Un *foncteur (covariant)* F de \mathcal{C} vers \mathcal{D} est la donnée :

- Pour tout objet $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$, d'un objet $F(X) \in \text{ob}(\mathcal{D})$.
- Pour tout objets $X, Y \in \text{ob}(\mathcal{C})$ et morphisme $f : X \rightarrow Y$, d'un morphisme $F(f) : F(X) \rightarrow F(Y)$.

Vérifiant les propriétés suivantes pour tout objets $X, Y, Z \in \text{ob}(\mathcal{C})$:

- *Composition* : Pour tout morphismes $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$, on a :

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f).$$

- *Identité* : On a :

$$F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}.$$

Exemple 1.10. Soit \mathcal{C} et \mathcal{D} deux catégories. On définit le foncteur covariant constant $C : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$:

- On prend $D \in \mathcal{D}$, pour tout objet $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$, on a $C(X) := D$.
- Pour tout objets $X, Y \in \text{ob}(\mathcal{C})$ et morphisme $f : X \rightarrow Y$, on a $C(f) := \text{id}_D$.

Exemple 1.11. Soit \mathcal{C} une catégorie. On définit le foncteur covariant identité $\text{id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$:

- Pour tout objet $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$, on a $\text{id}_{\mathcal{C}}(X) := X$.
- Pour tout objets $X, Y \in \text{ob}(\mathcal{C})$ et morphisme $f : X \rightarrow Y$, on a $\text{id}_{\mathcal{C}}(f) := f$.

Définition 1.12. Soit \mathcal{C} et \mathcal{D} deux catégories. Un *foncteur contravariant* est un foncteur covariant de la catégorie opposée \mathcal{C}^{op} vers \mathcal{D} .

Exemple 1.13. Soit \mathbb{K} un corps et Vect la catégorie des \mathbb{K} -espaces vectoriels. On définit un foncteur contravariant $F : \text{Vect}^{\text{op}} \rightarrow \text{Vect}$:

- Pour tout \mathbb{K} -espace vectoriel $E \in \text{Vect}$, on a $F(E) := E^*$.
- Pour tout \mathbb{K} -espaces vectoriels $E, F \in \text{Vect}$ et application linéaire $u : E \rightarrow F$, on a :

$$F(u) := u^T : F^* \rightarrow E^*.$$

1.3. Transformations naturelles

Définition 1.14. Soit \mathcal{C} et \mathcal{D} deux catégories, $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ deux foncteurs covariants. Une *transformation naturelle* ∂ de F vers G est la donnée pour tout objet $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$, d'un morphisme $\partial_X : F(X) \rightarrow G(X)$, vérifiant la propriété suivante pour tout objet $Y \in \text{ob}(\mathcal{C})$ et pour tout morphisme $f : X \rightarrow Y$, on a :

$$\partial_Y \circ F(f) = G(f) \circ \partial_X$$

c'est-à-dire que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ \partial_X \downarrow & & \downarrow \partial_Y \\ G(X) & \xrightarrow{G(f)} & G(Y) \end{array}$$

2. Catégorie Comp des complexes de chaînes

2.1. Complexes de chaînes

Définition 2.1. On appelle *complexe de chaînes*, noté C_\bullet , une suite de groupes abéliens $(C_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ munie de morphismes de groupes $(d_n : C_n \rightarrow C_{n-1})_{n \in \mathbb{Z}}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $d_n d_{n+1} = 0$.

Définition 2.2. Soit C_\bullet un complexe de chaînes et $n \in \mathbb{Z}$.

- On appelle n -cycle un élément de $Z_n(C_\bullet) := \ker(d_n)$.
- On appelle n -bord un élément de $B_n(C_\bullet) := \text{im}(d_{n+1})$.

Proposition 2.3. Soit C_\bullet un complexe de chaînes. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $B_n(C_\bullet) \subset Z_n(C_\bullet)$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors $d_n d_{n+1} = 0$, donc $B_n(C_\bullet) = \text{im}(d_{n+1}) \subset \ker(d_n) = Z_n(C_\bullet)$. \square

Définition 2.4. Soit C_\bullet un complexe de chaînes et $n \in \mathbb{Z}$.

- On appelle n^{e} groupe d'homologie le groupe quotient $H_n(C_\bullet) := Z_n(C_\bullet)/B_n(C_\bullet)$.
- On appelle *homologie* le groupe abélien gradué $H_\bullet(C_\bullet) := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H_n(C_\bullet)$.

Définition 2.5. Soit C_\bullet un complexe de chaînes et $n \in \mathbb{Z}$.

- On dit que C_\bullet est *exact en* C_n si $H_n(C_\bullet)$ est trivial, c'est-à-dire, $\text{im}(d_{n+1}) = \ker(d_n)$.
- On dit que C_\bullet est *exact* si pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il est exact en C_n .
- On dit que C_\bullet est *acyclique* si pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, il est exact en C_n .

2.2. Morphismes de complexes

Définition 2.6. Soit C_\bullet et D_\bullet deux complexes de chaînes. On appelle *morphisme de complexes*, noté $\varphi_\bullet : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$, une suite de morphismes de groupes $(\varphi_n : C_n \rightarrow D_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $d_n \varphi_n = \varphi_{n-1} d_{n+1}$.

Proposition 2.7. Soit C_\bullet , D_\bullet et E_\bullet trois complexes de chaînes, $\varphi_\bullet : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$ et $\psi_\bullet : D_\bullet \rightarrow E_\bullet$ deux morphismes de complexes. Alors la composition $\psi_\bullet \circ \varphi_\bullet : C_\bullet \rightarrow E_\bullet$ est un morphisme de complexes.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors on a :

$$d_n(\psi_n \circ \varphi_n) = \psi_{n-1} d_n \varphi_n = (\psi_{n-1} \circ \varphi_{n-1}) d_n.$$

Donc $(\psi_n \circ \varphi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est bien un morphisme de complexes. \square

Proposition 2.8. Soit C_\bullet un complexe de chaînes. Alors le morphisme identité $\text{id}_{C_\bullet} : C_\bullet \rightarrow C_\bullet$ est un morphisme de complexes.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors on a :

$$d_n \text{id}_n = d_n = \text{id}_{n-1} d_{n+1}.$$

Donc $(\text{id}_{C_n})_{n \in \mathbb{Z}}$ est bien un morphisme de complexes. \square

Proposition 2.9. Soit C_\bullet et D_\bullet deux complexes de chaînes, $\varphi_\bullet : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$ un morphisme de complexes. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, φ_n induit un morphisme de groupes $H_n(\varphi) : H_n(C_\bullet) \rightarrow H_n(D_\bullet)$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

Soit $z \in Z_n(C_\bullet)$. Alors on a $d_n \varphi_n(z) = \varphi_{n-1}(d_n z) = \varphi_{n-1}(0) = 0$, donc $\varphi_n(z) \in Z_n(D_\bullet)$.

Soit $b \in B_n(C_\bullet)$. Alors il existe $c \in C_{n+1}$ tel que $b = d_{n+1} c$, et on a :

$$\varphi_n(b) = \varphi_n(d_{n+1} c) = d_{n+1} \varphi_{n+1}(c)$$

donc $\varphi_n(b) \in B_n(D_\bullet)$.

On considère $\overline{\varphi_n} : Z_n(C_\bullet) \rightarrow H_n(D_\bullet)$, alors $B_n(C_\bullet) \subset \ker(\overline{\varphi_n})$ et d'après la propriété universelle du groupe quotient le morphisme $\overline{\varphi_n}$ induit bien un morphisme $H_n(\varphi) : H_n(C_\bullet) \rightarrow H_n(D_\bullet)$. \square

Définition 2.10. Soit C_\bullet et D_\bullet deux complexes de chaînes, $\varphi_\bullet : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$ un morphisme de complexes. On note $H_\bullet(\varphi) : H_\bullet(C_\bullet) \rightarrow H_\bullet(D_\bullet)$ le morphisme de groupes gradués $H_\bullet(\varphi) := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H_n(\varphi)$.

2.3. La catégorie Comp

Définition 2.11. On appelle Comp la catégorie des complexes de chaînes :

- Les objets de Comp sont les complexes de chaînes.
- Les morphismes de Comp sont les morphismes de complexes.
- La composition de Comp découle de la Proposition 2.7.
- Le morphisme identité de Comp découle de Proposition 2.8.

Théorème 2.12. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le n^{e} groupe d'homologie H_n est un foncteur de Comp vers Ab.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

- Soit $C_\bullet \in \text{ob}(\text{Comp})$ un complexe de chaînes. Alors le n^{e} groupe d'homologie $H_n(C_\bullet)$ est bien un groupe abélien.
- Soit $C_\bullet, D_\bullet \in \text{ob}(\text{Comp})$ deux complexes de chaînes et $\varphi_\bullet : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$ un morphisme de complexes. Alors le morphisme induit $H_n(\varphi) : H_n(C_\bullet) \rightarrow H_n(D_\bullet)$ est bien un morphisme de groupes.

La propriété de composition découle de la Proposition 2.7 et la propriété d'identité découle de la Proposition 2.8, donc H_n est bien un foncteur de Comp vers Ab. \square

Corollaire 2.13. L'homologie H_\bullet est un foncteur de Comp vers GrAb.

Démonstration.

- Soit $C_\bullet \in \text{ob}(\text{Comp})$ un complexe de chaînes. Alors l'homologie $H_\bullet(C_\bullet) := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H_n(C_\bullet)$ est bien un groupe abélien gradué.
- Soit $C_\bullet, D_\bullet \in \text{ob}(\text{Comp})$ deux complexes de chaînes et $\varphi_\bullet : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$ un morphisme de complexes. Alors le morphisme induit $H_\bullet(\varphi) : H_\bullet(C_\bullet) \rightarrow H_\bullet(D_\bullet)$ est bien un morphisme de groupes abéliens gradués.

Les propriétés de composition et d'identité découlent du Théorème 2.12, donc H_\bullet est bien un foncteur de Comp vers GrAb. \square

2.4. Premières propriétés

2.4.1. Homotopie

Définition 2.14. Soit C_\bullet et D_\bullet deux complexes de chaînes, $\varphi_\bullet : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$ et $\psi_\bullet : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$ deux morphismes de complexes. On dit que φ_\bullet et ψ_\bullet sont *homotopes* s'il existe une suite de morphismes de groupes $(h_n : C_n \rightarrow D_{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\varphi_n - \psi_n = h_{n-1}d_n + d_n h_n$.

Proposition 2.15. L'homotopie est une relation d'équivalence sur les morphismes de complexes.

Démonstration. Notons \sim la relation d'homotopie. Soit C_\bullet et D_\bullet deux complexes de chaînes.

- *Réflexivité* : Soit $\varphi_\bullet : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$ un morphisme de complexes. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on peut écrire $\varphi_n - \varphi_n = 0 = 0d_n + d_n 0$. Donc on a bien $\varphi_\bullet \sim \varphi_\bullet$.
- *Symétrie* : Soit $\varphi_\bullet : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$ et $\psi_\bullet : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$ deux morphismes de complexes tels que $\varphi_\bullet \sim \psi_\bullet$. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\psi_n - \varphi_n = -(\varphi_n - \psi_n)$. On en déduit bien $\psi_\bullet \sim \varphi_\bullet$.
- *Transitivité* : Soit $\varphi_\bullet : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$, $\psi_\bullet : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$ et $\xi_\bullet : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$ trois morphismes de complexes tels que $\varphi_\bullet \sim \psi_\bullet$ et $\psi_\bullet \sim \xi_\bullet$. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\varphi_n - \xi_n = \varphi_n - \psi_n + \psi_n - \xi_n$. On en déduit bien que $\varphi_\bullet \sim \xi_\bullet$.

Donc l'homotopie est bien une relation d'équivalence sur les morphismes de complexes. \square

Proposition 2.16. Soit A_\bullet, B_\bullet et C_\bullet trois complexes de chaînes, $\varphi_\bullet : A_\bullet \rightarrow B_\bullet$ et $\psi_\bullet : A_\bullet \rightarrow B_\bullet$, ainsi que $\alpha_\bullet : B_\bullet \rightarrow C_\bullet$ et $\beta_\bullet : B_\bullet \rightarrow C_\bullet$ deux paires de morphismes de complexes homotopes. Alors les compositions $\alpha_\bullet \circ \varphi_\bullet : A_\bullet \rightarrow C_\bullet$ et $\beta_\bullet \circ \psi_\bullet : A_\bullet \rightarrow C_\bullet$ sont homotopes.

Démonstration. Par définition il existe deux suites de morphismes de groupes $(f_n : A_n \rightarrow B_{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}$ et $(g_n : B_n \rightarrow C_{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\varphi_n - \psi_n = f_{n-1}d_n + d_n f_n$ et $\alpha_n - \beta_n = g_{n-1}d_n + d_n g_n$. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors on a :

$$\begin{aligned} \alpha_n \circ \varphi_n - \beta_n \circ \psi_n &= \alpha_n \circ \varphi_n - \alpha_n \circ \psi_n + \alpha_n \circ \psi_n - \beta_n \circ \psi_n \\ &= \alpha_n \circ (\varphi_n - \psi_n) + (\alpha_n - \beta_n) \circ \psi_n \\ &= \alpha_n \circ (f_{n-1}d_n + d_n f_n) + (g_{n-1}d_n + d_n g_n) \circ \psi_n \\ &= (a_n \circ f_{n-1})d_n + d_n(a_{n+1} \circ f_n) + (g_{n-1} \circ \psi_{n-1})d_n + d_n(f_n \circ \psi_n) \\ &= (a_n \circ f_{n-1} + g_{n-1} \circ \psi_{n-1})d_n + d_n(a_{n+1} \circ f_n + f_n \circ \psi_n) \end{aligned}$$

En posant $h_n := a_{n+1} \circ f_n + g_n \circ \psi_n$, on obtient l'égalité voulue $\alpha_n \circ \varphi_n - \beta_n \circ \psi_n = h_{n-1}d_n + d_n h_n$. Donc $\alpha_\bullet \circ \varphi_\bullet$ et $\beta_\bullet \circ \psi_\bullet$ sont bien homotopes. \square

Lemme 2.17. Soit C_\bullet et D_\bullet deux complexes de chaînes, $\varphi_\bullet : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$ et $\psi_\bullet : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$ deux morphismes de complexes homotopes. Alors on a $H_\bullet(\varphi) = H_\bullet(\psi)$.

Démonstration. Par définition il existe une suite de morphismes de groupes $(h_n : C_n \rightarrow D_{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\varphi_n - \psi_n = h_{n-1}d_n + d_n h_n$. Soit $n \in \mathbb{Z}$ et $\bar{c} \in H_n(C_\bullet)$. Alors on a $\varphi_n(c) - \psi_n(c) = h_{n-1}(d_n c) + d_n h_n(c) = d_n h_n(c) \in B_n(D_\bullet)$, on en déduit $H_n(\varphi)(c) - H_n(\psi)(c) = 0 \in H_n(D_\bullet)$. Donc $H_\bullet(\varphi) = H_\bullet(\psi)$. \square

2.4.2. Complexe de chaînes quotient

Définition 2.18. Soit C_\bullet et D_\bullet deux complexes de chaînes. On dit que D_\bullet est un sous-complexe de chaînes de C_\bullet si pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $D_n \subset C_n$.

Proposition 2.19. Soit C_\bullet un complexe de chaînes et D_\bullet un sous-complexe de chaînes de C_\bullet . Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, d_n induit un morphisme $\bar{d}_n : C_n/D_n \rightarrow C_{n-1}/D_{n-1}$ tel que $\bar{d}_n \bar{d}_{n+1} = 0$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors on a $D_n \subset C_n$, on peut donc former le quotient C_n/D_n . On pose $\delta_n := \bar{d}_n : C_n \rightarrow C_{n-1}/D_{n-1}$, alors $D_n \subset \ker(\delta_n)$ et d'après la propriété universelle du groupe quotient δ_n induit bien un morphisme $\bar{d}_n : C_n/D_n \rightarrow C_{n-1}/D_{n-1}$. Enfin puisque $d_n d_{n+1} = 0$, on a bien $\bar{d}_n \bar{d}_{n+1} = \overline{d_n d_{n+1}} = 0$. \square

Proposition 2.20. Soit C_\bullet un complexe de chaînes et D_\bullet un sous-complexe de chaînes de C_\bullet . Alors la suite $(C_n/D_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ munie des morphismes de bords induits $(\bar{d}_n : C_n/D_n \rightarrow C_{n-1}/D_{n-1})_{n \in \mathbb{Z}}$ forme un complexe de chaînes.

Définition 2.21. Soit C_\bullet un complexe de chaînes et D_\bullet un sous-complexe de chaînes de C_\bullet . On appelle *complexe de chaînes quotient* le complexe de chaînes C_\bullet/D_\bullet .

Proposition 2.22. Soit A_\bullet/B_\bullet et C_\bullet/D_\bullet deux complexes de chaînes et $\varphi_\bullet : A_\bullet \rightarrow C_\bullet$ un morphisme de complexes. Si $\varphi_\bullet(B_\bullet) \subset D_\bullet$, alors φ_\bullet induit un morphisme de complexes $\bar{\varphi}_\bullet : A_\bullet/B_\bullet \rightarrow C_\bullet/D_\bullet$.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on considère $\bar{\varphi}_n : A_n \rightarrow C_n/D_n$, alors puisque $\varphi_n(B_n) \subset D_n$, on en déduit $B_n \subset \ker(\bar{\varphi}_n)$ et d'après la propriété universelle du groupe quotient $\bar{\varphi}_n$ induit un morphisme $\bar{\varphi}_n : A_n/B_n \rightarrow C_n/D_n$. On pose $\bar{\varphi}_\bullet := (\bar{\varphi}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors par définition $\bar{d}_n \bar{\varphi}_n = \overline{d_n \varphi_n} = \overline{\varphi_{n-1} d_n} = \bar{\varphi}_{n-1} \bar{d}_n$. Donc $\bar{\varphi}_\bullet$ est bien un morphisme de complexes. \square

2.4.3. Exactitude

Définition 2.23. On dit qu'une suite courte de complexes de chaînes est *exacte*, notée :

$$0 \longrightarrow A_{\bullet} \xrightarrow{\varphi_{\bullet}} B_{\bullet} \xrightarrow{\psi_{\bullet}} C_{\bullet} \longrightarrow 0$$

si pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la suite courte suivante est exacte :

$$0 \longrightarrow A_n \xrightarrow{\varphi_n} B_n \xrightarrow{\psi_n} C_n \longrightarrow 0$$

c'est-à-dire que φ_n est injectif, $\text{im}(\varphi_n) = \ker(\psi_n)$ et ψ_n est surjectif.

Lemme 2.24. Soit une suite exacte courte de complexes de chaînes :

$$0 \longrightarrow A_{\bullet} \xrightarrow{\varphi_{\bullet}} B_{\bullet} \xrightarrow{\psi_{\bullet}} C_{\bullet} \longrightarrow 0$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il existe un morphisme de groupes $\partial_n : H_n(C_{\bullet}) \rightarrow H_{n-1}(A_{\bullet})$ telle que la suite longue des groupes d'homologie est exacte :

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A_{\bullet}) \xrightarrow{H_n(\varphi)} H_n(B_{\bullet}) \xrightarrow{H_n(\psi)} H_n(C_{\bullet}) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A_{\bullet}) \xrightarrow{H_{n-1}(\varphi)} \dots$$

De plus pour tout diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A_{\bullet} & \xrightarrow{\varphi_{\bullet}} & B_{\bullet} & \xrightarrow{\psi_{\bullet}} & C_{\bullet} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f_{\bullet} & & \downarrow g_{\bullet} & & \downarrow h_{\bullet} \\ 0 & \longrightarrow & A'_{\bullet} & \xrightarrow{\varphi'_{\bullet}} & B'_{\bullet} & \xrightarrow{\psi'_{\bullet}} & C'_{\bullet} \longrightarrow 0 \end{array}$$

la transformation ∂_n est naturelle dans le sens où le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H_n(C_{\bullet}) & \xrightarrow{H_n(h)} & H_n(C'_{\bullet}) \\ \partial_n \downarrow & & \downarrow \partial_n \\ H_{n-1}(A_{\bullet}) & \xrightarrow{H_{n-1}(f)} & H_{n-1}(A'_{\bullet}) \end{array}$$

Remarque 2.25. La naturalité de ∂_n coïncide bien avec la notion introduite dans le [Chapitre 1.3](#) si on considère la catégorie des suites exactes courtes de complexes.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$. On commence par faire un diagramme en 3 dimensions pour la suite :

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A'_{n+1} & \longrightarrow & B'_{n+1} & \longrightarrow & C'_{n+1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \\ 0 & \longrightarrow & A_{n+1} & \longrightarrow & B_{n+1} & \longrightarrow & C_{n+1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \\ 0 & \longrightarrow & A'_n & \longrightarrow & B'_n & \longrightarrow & C'_n & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \\ 0 & \longrightarrow & A_n & \longrightarrow & B_n & \longrightarrow & C_n & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \\ 0 & \longrightarrow & A'_{n-1} & \longrightarrow & B'_{n-1} & \longrightarrow & C'_{n-1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \\ 0 & \longrightarrow & A_{n-1} & \longrightarrow & B_{n-1} & \longrightarrow & C_{n-1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \end{array}$$

Soit $\bar{c} \in H_n(C_\bullet)$. Puisque ψ_n est surjective par exactitude, il existe $b \in B_n$ tel que $\psi_n(b) = c$. De plus on a $\psi_{n-1}(d_n b) = d_n \psi_n(b) = d_n c = 0$, donc $d_n b \in \ker(\psi_{n-1})$ et par exactitude il existe $a \in A_{n-1}$ tel que $\varphi_{n-1}(a) = d_n b$. De plus on a $\varphi_{n-2}(d_{n-1} a) = d_{n-1} \varphi_{n-1}(a) = d_{n-1} d_n b = 0$, puisque φ_{n-2} est injective par exactitude, on a $d_{n-1} a = 0$, donc $a \in Z_{n-1}(A_\bullet)$. Donc on pose $\partial_n \bar{c} := \bar{a} \in H_{n-1}(A_\bullet)$.

Vérifions que $\partial_n \bar{c}$ ne dépend pas des choix réalisés. Soit $b' \in B_n$ tel que $\psi_n(b') = c$ et $a' \in A_{n-1}$ tel que $d_n b' = \varphi_{n-1}(a')$. Alors on a $\psi_n(b - b') = c - c = 0$, donc $b - b' \in \ker(\psi_n)$ et par exactitude il existe $\hat{a} \in A_n$ tel que $\varphi_n(\hat{a}) = b - b'$. Alors $\varphi_{n-1}(d_n \hat{a}) = d_n b - d_n b' = \varphi_{n-1}(a - a')$, puisque φ_{n-1} est injective par exactitude, on a $d_n \hat{a} = a - a'$, donc $a - a' \in B_{n-1}(A_\bullet)$ et $\bar{a} = \overline{a'} \in H_{n-1}(A_\bullet)$.

Vérifions que la suite longue est exacte.

- Soit $\bar{a} \in \text{im}(\partial_{n+1})$. Par construction il existe $b \in B_{n+1}$ tel que $\varphi_n(a) = d_{n+1} b$, d'où $\varphi_n(a) \in B_n(B_\bullet)$ et $H_n(\varphi)(\bar{a}) = 0 \in H_n(B_\bullet)$. Donc $\bar{a} \in \ker(H_n(\varphi))$.

Soit $\bar{a} \in \ker(H_n(\varphi))$. Alors $\varphi_n(a) \in B_n(B_\bullet)$ et il existe $b \in B_{n+1}$ tel que $\varphi_n(a) = d_{n+1} b$. De plus par exactitude on a $d_{n+1} \psi_{n+1}(b) = \psi_n(d_{n+1}(b)) = \psi_n(\varphi_n(a)) = 0$, d'où $\psi_{n+1}(b) \in Z_{n+1}(C_\bullet)$, et par construction on retrouve bien $\partial_n \psi_{n+1}(b) = \bar{a} \in H_n(A_\bullet)$. Donc $\bar{a} \in \text{im}(\partial_{n+1})$.

- Soit $\bar{b} \in \text{im}(H_n(\varphi))$. Il existe $a \in A_n$ tel que $\varphi_n(a) = b$. Alors on a $b \in \text{im}(\varphi_n)$ et par exactitude $b \in \ker(\psi_n)$. Donc $\bar{b} \in \ker(H_n(\psi))$.

Soit $\bar{b} \in \ker(H_n(\psi))$. Alors $\psi_n(b) \in B_n(C_\bullet)$ et il existe $c \in C_{n+1}$ tel que $\psi_n(b) = d_{n+1} c$. Puisque ψ_{n+1} est surjective par exactitude, il existe $b' \in B_{n+1}$ tel que $\psi_{n+1}(b') = c$. De plus on a $\psi_n(d_{n+1} b') = d_{n+1} \psi_{n+1}(b') = d_{n+1} c = \psi_n(b)$, donc $b - d_{n+1} b' \in \ker(\psi_n)$ et par exactitude il existe $a \in A_n$ tel que $\varphi_n(a) = b - d_{n+1} b'$. Alors $\varphi_{n-1}(d_n a) = d_n b - d_n d_{n+1} b' = d_n b = 0$, puisque φ_{n-1} est injective par exactitude, on a $d_n a = 0$, donc $a \in Z_n(A_\bullet)$. De plus $H_n(\varphi)(\bar{a}) = \bar{b} \in H_n(B_\bullet)$. Donc $\bar{b} \in \text{im}(H_n(\varphi))$.

- Soit $\bar{c} \in \text{im}(H_n(\psi))$. Il existe $b \in Z_n(B_\bullet)$ tel que $\psi_n(b) = c$. De plus on a $d_n b = 0 \in \ker(\psi_{n-1})$, par exactitude il existe $a \in A_{n-1}$ tel que $\varphi_{n-1}(a) = d_n b = 0$, puisque φ_{n-1} est injective par exactitude, on a $a = 0$ et par construction $\partial_n \bar{c} = \bar{a} = 0 \in H_{n-1}(A_\bullet)$. Donc $\bar{c} \in \ker(\partial_n)$.

Soit $\bar{c} \in \ker(\partial_n)$. Alors $c \in Z_n(C_\bullet)$, puisque ψ_n est surjective par exactitude, il existe $b \in B_n$ tel que $\psi_n(b) = c$, d'où $H_n(\psi)(\bar{b}) = \bar{c}$. Donc $\bar{c} \in \text{im}(H_n(\psi))$.

Vérifions que ∂_n est naturelle. Soit $\bar{c} \in H_n(C_\bullet)$.

Par construction il existe $b \in B_n$ tel que $\psi_n(b) = c$ et il existe $a \in Z_{n-1}(A_\bullet)$ tel que $\varphi_{n-1}(a) = d_n b$ et $\partial_n \bar{c} = \bar{a} \in H_{n-1}(A_\bullet)$. Donc on a $H_{n-1}(f)(\partial_n \bar{c}) = \overline{f_{n-1}(a)} \in H_{n-1}(A'_\bullet)$.

De plus $\psi'_n(g_n(b)) = h_n(\psi_n(b)) = h_n(c)$ et $\varphi'_{n-1}(f_{n-1}(a)) = g_{n-1}(\varphi_{n-1}(a)) = g_{n-1}(d_n b) = d_n g_n(b)$, alors par construction on a $\partial_n H_n(h)(\bar{c}) = \overline{f_{n-1}(a)} \in H_{n-1}(A'_\bullet)$. Donc $H_{n-1}(f)(\partial_n) = \partial_n H_n(h)$. \square

Lemme 2.26. Soit C_\bullet/D_\bullet un complexe de chaînes. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il existe un morphisme de groupes $\partial_n : H_n(C_\bullet/D_\bullet) \rightarrow H_{n-1}(D_\bullet)$ telle que la suite longue suivante est exacte :

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(D_\bullet) \xrightarrow{H_n(i)} H_n(C_\bullet) \xrightarrow{H_n(\pi)} H_n(C_\bullet/D_\bullet) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(D_\bullet) \xrightarrow{H_{n-1}(i)} \dots$$

où $i_\bullet : D_\bullet \rightarrow C_\bullet$ est l'inclusion canonique et $\pi_\bullet : C_\bullet \rightarrow C_\bullet/D_\bullet$ est la projection canonique.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Par définition l'inclusion $i_n : D_n \rightarrow C_n$ est injective, de plus on a clairement $\text{im}(i_n) = D_n = \ker(\pi_n)$ et par définition la projection $\pi_n : C_n \rightarrow C_n/D_n$ est surjective.

Donc on a une suite exacte courte de complexe de chaînes :

$$0 \longrightarrow D_\bullet \xrightarrow{i_\bullet} C_\bullet \xrightarrow{\pi_\bullet} C_\bullet/D_\bullet \longrightarrow 0$$

Alors d'après le [Lemme 2.24](#) il existe bien un morphisme de groupes $\partial_n : H_n(C_\bullet/D_\bullet) \rightarrow H_{n-1}(D_\bullet)$ tel que la suite longue est exacte. \square

3. Homologie singulière

3.1. Simplexes

Définition 3.1. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel et A un sous-ensemble de E . On dit que A est *convexe* si :

$$\forall p, q \in A, [p, q] := \{(1-t)p + tq \mid t \in [0, 1]\} \subset A.$$

Définition 3.2. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel, A un sous-ensemble de E et p_0, \dots, p_n des éléments de A . On appelle *combinaison convexe* une combinaison linéaire de la forme $t_0 p_0 + \dots + t_n p_n$ où $t_0, \dots, t_n \in [0, 1]$ et $t_0 + \dots + t_n = 1$.

Proposition 3.3. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel, A un sous-ensemble de E et p_0, \dots, p_n des éléments de A . Si A est convexe, alors toute combinaison convexe de p_0, \dots, p_n appartient à A .

Démonstration. Soit $t_0, \dots, t_n \in [0, 1]$ tels que $t_0 + \dots + t_n = 1$. Notons $H(n) : t_0 p_0 + \dots + t_n p_n \in A$. Pour $n = 1$. On pose $t := t_1$, alors puisque A est convexe $t_0 p_0 + t_1 p_1 = (1-t)p_0 + t p_1 \in A$. Pour $n > 1$. On suppose que $H(n-1)$ est vérifiée. Sans perte de généralité, on suppose que $t_n \neq 0$, et on pose :

$$p := \frac{t_0}{1-t_n} p_0 + \dots + \frac{t_{n-1}}{1-t_n} p_{n-1}$$

alors d'après $H(n-1)$ on a $p \in A$. Par convexité on a $t_0 p_0 + \dots + t_n p_n = (1-t_n)p + t_n p_n \in A$. \square

Définition 3.4. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel et A un sous-ensemble de E . On appelle *enveloppe convexe* de A , notée $\text{Conv}(A)$, l'ensemble des combinaisons convexes d'éléments de A .

Proposition 3.5. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel et A un sous-ensemble de E . Alors l'enveloppe convexe de A est le plus petit ensemble convexe contenant A .

Démonstration. Soit $p, q \in \text{Conv}(A)$ et $t \in [0, 1]$. Puisque p et q sont des combinaisons convexes d'éléments de A , d'après la Proposition 3.3 on a $(1-t)p + tq \in \text{Conv}(A)$. Donc l'ensemble $\text{Conv}(A)$ est convexe.

Soit B un sous-ensemble convexe de E contenant A . Soit $x \in \text{Conv}(A)$. Puisque x est une combinaison convexe d'éléments de $A \subset B$, d'après la Proposition 3.3 on a $x \in B$. Donc $\text{Conv}(A) \subset B$. \square

Définition 3.6. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel et F une famille libre de $n+1$ éléments de E . On appelle *n -simplexe généré par F* l'enveloppe convexe de F . On dit que les éléments de F sont les *sommets* de $\text{Conv}(F)$ et que n est la *dimension* de $\text{Conv}(F)$.

Définition 3.7. On appelle *n -simplexe standard*, noté Δ^n , le n -simplexe généré par la base canonique de \mathbb{R}^{n+1} .

Proposition 3.8. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel et $F := (f_0, \dots, f_n)$ une famille libre de $n+1$ éléments de E . Alors l'application :

$$\langle f_0, \dots, f_n \rangle : \Delta^n \rightarrow \text{Conv}(F); (t_0, \dots, t_n) \mapsto t_0 f_0 + \dots + t_n f_n$$

est un homéomorphisme.

Démonstration. Soit $(s_0, \dots, s_n), (t_0, \dots, t_n) \in \Delta^n$ tels que $s_0 f_0 + \dots + s_n f_n = t_0 f_0 + \dots + t_n f_n$. En particulier on a $(s_0 - t_0)f_0 + \dots + (s_n - t_n)f_n = 0$, et puisque la famille (f_0, \dots, f_n) est libre, on obtient $s_0 - t_0 = \dots = s_n - t_n = 0$, c'est-à-dire $(s_0, \dots, s_n) = (t_0, \dots, t_n)$. Donc $\langle f_0, \dots, f_n \rangle$ est injective.

Soit $x \in \text{Conv}(F)$. Alors il existe $(t_0, \dots, t_n) \in \Delta^n$ tels que $x := t_0 f_0 + \dots + t_n f_n$. Donc $\langle f_0, \dots, f_n \rangle$ est surjective. Puisque $\langle f_0, \dots, f_n \rangle$ est une application linéaire et que Δ^n est de dimension finie, $\langle f_0, \dots, f_n \rangle$ est continue. De plus Δ^n est compact et $\text{Conv}(F)$ est séparé, donc $\langle f_0, \dots, f_n \rangle$ est un homéomorphisme. \square

Définition 3.9. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel, $F := (f_0, \dots, f_n)$ une famille libre de $n + 1$ éléments de E et $x := t_0 f_0 + \dots + t_n f_n$ un élément de $\text{Conv}(F)$. On appelle *coordonnées barycentriques* de x les coefficients $t_0, \dots, t_n \in [0, 1]$.

Définition 3.10. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel, F une famille libre de $n + 1$ éléments de E et G une famille non-vide d'éléments de $m + 1$ éléments de F . On dit que $\text{Conv}(G)$ est une m -face de $\text{Conv}(F)$.

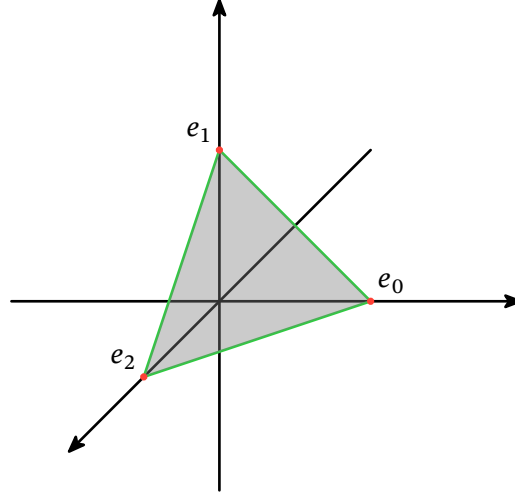


Fig. 3. – Un 2-simplexe standard.

En vert les arêtes sont des 1-faces du triangle.

En rouge les sommets sont des 0-faces du triangle et des arêtes.

3.2. Chaînes singulières

Définition 3.11. Soit X un espace topologique. On appelle n -simplexe singulier sur X une application continue de Δ^n dans X .

Exemple 3.12. L'application $\langle e_0, \dots, e_n \rangle$ de la Proposition 3.8, où (e_0, \dots, e_n) est la base canonique de \mathbb{R}^{n+1} , est un n -simplexe singulier sur \mathbb{R}^{n+1} .

Proposition 3.13. Soit X et Y deux espaces topologiques, $f : X \rightarrow Y$ une application continue et $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ un n -simplexe singulier sur X . Alors la composition $f \circ \sigma : \Delta^n \rightarrow Y$ est un n -simplexe singulier sur Y .

Démonstration. Puisque f est continue sur X et σ est continue sur Δ^n , par composition $f \circ \sigma$ est continue de Δ^n dans Y . Donc $f \circ \sigma$ est un n -simplexe singulier sur Y . \square

Définition 3.14. Soit X un espace topologique. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on appelle *groupe des n -chaînes singulières*, noté $C_n(X)$, le groupe abélien libre engendré par les n -simplexes singuliers sur X .

Définition 3.15. Soit X et Y deux espaces topologiques et $f : X \rightarrow Y$ une application continue. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle *application induite par f* , notée $C_n(f)$, le morphisme de groupes :

$$C_n(f) : C_n(X) \rightarrow C_n(Y); \sum_{k=0}^m \lambda_k \sigma_k \mapsto \sum_{k=0}^m \lambda_k (f \circ \sigma_k).$$

Proposition 3.16. Soit X , Y et Z trois espaces topologiques, $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ deux applications continues. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $C_n(g \circ f) = C_n(g) \circ C_n(f)$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque les n -chaînes singulières sont engendrées par les n -simplexes singuliers, il suffit de montrer le résultat pour un n -simplexe singulier $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$. Alors on a :

$$C_n(g \circ f)(\sigma) = (g \circ f) \circ \sigma = g \circ (f \circ \sigma) = g \circ C_n(f)(\sigma) = C_n(g)(C_n(f)(\sigma))$$

□

Proposition 3.17. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le groupe des n -chaînes singulières C_n est un foncteur de Top vers Ab.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Soit X un espace topologique. Alors le groupe des n -chaînes singulières $C_n(X)$ est bien un groupe abélien.
- Soit X et Y deux espaces topologiques, $f : X \rightarrow Y$ une application continue. Alors l'application induite $C_n(f) : C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$ est bien un morphisme de groupes.

La propriété de composition découle de la Proposition 3.16 et la propriété d'identité découle directement de la définition, donc C_n est bien un foncteur de Top vers Ab. □

Définition 3.18. Soit X un espace topologique et $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ un n -simplexe singulier sur X . On appelle *bord de σ* , noté $d_n\sigma$, la $(n-1)$ -chaîne singulière sur X définie par :

$$d_n\sigma := \sum_{k=0}^n (-1)^k (\sigma \circ \langle e_0, \dots, \widehat{e_k}, \dots, e_n \rangle).$$

où le symbole $\widehat{}$ signifie que l'élément est enlevé.

Remarque 3.19. Le bord d'un n -simplexe singulier est la somme alternée de ses $(n-1)$ -faces.

Définition 3.20. Soit X un espace topologique et $n \in \mathbb{N}$. On appelle *morphisme de bord*, noté d_n , le morphisme de groupes induit :

$$d_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X); \sum_{k=0}^m \lambda_k \sigma_k \mapsto \sum_{k=0}^m \lambda_k d_n \sigma_k.$$

Proposition 3.21. Soit X et Y deux espaces topologiques, $f : X \rightarrow Y$ une application continue. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $d_n C_n(f) = C_{n-1}(f) d_n$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque les n -chaînes singulières sont engendrées par les n -simplexes singuliers, il suffit de montrer le résultat pour un n -simplexe singulier $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$. Alors on a :

$$\begin{aligned} d_n C_n(f)(\sigma) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k ((f \circ \sigma) \circ \langle e_0, \dots, \widehat{e_k}, \dots, e_n \rangle) \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k (f \circ (\sigma \circ \langle e_0, \dots, \widehat{e_k}, \dots, e_n \rangle)) \\ &= C_{n-1}(f)(d_n \sigma). \end{aligned}$$

□

Proposition 3.22. Soit X un espace topologique. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $d_n d_{n+1} = 0$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque les n -chaînes singulières sont engendrées par les n -simplexes singuliers, il suffit de montrer le résultat pour un $(n+1)$ -simplexe singulier $\sigma : \Delta^{n+1} \rightarrow X$. Alors on a :

$$d_{n+1}\sigma = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k (\sigma \circ \langle e_0, \dots, \widehat{e_k}, \dots, e_{n+1} \rangle)$$

donc en appliquant d_n , on obtient :

$$\begin{aligned}
d_n d_{n+1} \sigma &= d_n \left(\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k (\sigma \circ \langle e_0, \dots, \widehat{e_k}, \dots, e_{n+1} \rangle) \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k d_n (\sigma \circ \langle e_0, \dots, \widehat{e_k}, \dots, e_{n+1} \rangle)
\end{aligned}$$

on sépare la somme en deux selon les éléments enlevés :

$$\begin{aligned}
d_n d_{n+1} \sigma &= \sum_{0 \leq k < l \leq n+1} (-1)^{k+l} (\sigma \circ \langle e_0, \dots, \widehat{e_k}, \dots, \widehat{e_l}, \dots, e_{n+1} \rangle) \\
&\quad + \sum_{0 \leq l < k \leq n+1} (-1)^{k+l-1} (\sigma \circ \langle e_0, \dots, \widehat{e_l}, \dots, \widehat{e_k}, \dots, e_{n+1} \rangle) \\
&= \sum_{0 \leq k < l \leq n+1} ((-1)^{k+l} + (-1)^{k+l+1}) (\sigma \circ \langle e_0, \dots, \widehat{e_k}, \dots, \widehat{e_l}, \dots, e_{n+1} \rangle) \\
&= 0
\end{aligned}$$

car les puissances de -1 s'annulent. □

3.3. Définitions de l'homologie singulière

3.3.1. D'un espace topologique

Proposition 3.23. La suite $(C_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ où pour tout $n < 0$, on pose $C_n := 0$, munie des morphismes des bords $(d_n : C_n \rightarrow C_{n-1})_{n \in \mathbb{Z}}$ est un foncteur de Top vers Comp.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

- Soit X un espace topologique. Alors la suite $(C_n(X))_{n \in \mathbb{Z}}$ munie des morphismes de bords $(d_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X))_{n \in \mathbb{Z}}$ est bien un complexe de chaînes d'après la Proposition 3.22.
- Soit X et Y deux espaces topologiques, $f : X \rightarrow Y$ une application continue. Alors la suite des applications induites $(C_n(f) : C_n(X) \rightarrow C_n(Y))_{n \in \mathbb{Z}}$ est bien un morphisme de complexes d'après la Proposition 3.21.

La propriété de composition découle de la Proposition 3.16 et la propriété d'identité découle directement de la définition, donc C_n est bien un foncteur de Top vers Comp. □

Définition 3.24. Soit X un espace topologique. On appelle *complexe de chaînes singulières de X* , noté $C_\bullet(X)$, le complexe de chaînes déterminé par la suite $(C_n(X))_{n \in \mathbb{N}}$ munie des morphismes des bords $(d_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X))_{n \in \mathbb{N}}$.

Définition 3.25. Soit $C_\bullet(X)$ un complexe de chaînes singulières et $n \in \mathbb{Z}$.

- On appelle *n -cycle singulier* un élément de $Z_n(X) := Z_n(C_\bullet(X))$.
- On appelle *n -bord singulier* un élément de $B_n(X) := B_n(C_\bullet(X))$.
- On appelle *n^e groupe d'homologie singulière de X* le groupe $H_n(X) := H_n(C_\bullet(X))$.
- On appelle *homologie singulière de X* le groupe $H_\bullet(X) := H_\bullet(C_\bullet(X))$.

Définition 3.26. Soit X et Y deux espaces topologiques, $f : X \rightarrow Y$ une application continue. On appelle *morphisme de complexes induit par f* , notée $f_\bullet : C_\bullet(X) \rightarrow C_\bullet(Y)$, la suite des applications induites $f_\bullet := (C_n(f) : C_n(X) \rightarrow C_n(Y))_{n \in \mathbb{Z}}$

Corollaire 3.27. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le n^e groupe d'homologie singulière H_n est un foncteur de Top vers Ab.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$. D'après la Proposition 3.23 C_\bullet est un foncteur de Top vers Comp et d'après le Théorème 2.12 H_n est un foncteur de Comp vers Ab, par composition $H_n = H_n(C_\bullet)$ est bien un foncteur de Top vers Ab. □

Corollaire 3.28. L'homologie singulière H_\bullet est un foncteur de Top vers GrAb.

Démonstration. D'après la Proposition 3.23 C_\bullet est un foncteur de Top vers Comp et d'après le Corollaire 2.13 H_\bullet est un foncteur de Comp vers GrAb, par composition $H_\bullet = H_\bullet(C_\bullet)$ est bien un foncteur de Top vers GrAb. \square

3.3.2. D'une paire d'espace topologique

Proposition 3.29. La suite $(C_n/C_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ où pour tout $n < 0$, on pose $C_n := 0$, munie des morphismes des bords induits $(\bar{d}_n : C_n/C_n \rightarrow C_{n-1}/C_{n-1})_{n \in \mathbb{Z}}$ est un foncteur de Top_2 vers Comp.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

- Soit (X, A) une paire d'espaces topologiques. Alors il est clair que $C_\bullet(A)$ est un sous-complexe de chaînes de $C_\bullet(X)$, donc la suite $(C_n(X)/C_n(A))_{n \in \mathbb{Z}}$ munie des morphismes de bords induits $(\bar{d}_n : C_n(X)/C_n(A) \rightarrow C_{n-1}(X)/C_{n-1}(A))_{n \in \mathbb{Z}}$ est bien un complexe de chaînes d'après la Proposition 2.19.
- Soit (X, A) et (Y, B) deux paires d'espaces topologiques, $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ un morphisme de paires. Alors il est clair que $f_\bullet(C_\bullet(A)) \subset C_\bullet(B)$, donc le morphisme induit $\bar{f}_\bullet : C_n(X)/C_n(A) \rightarrow C_n(Y)/C_n(B)$ est bien un morphisme de complexes d'après la Proposition 2.22.

La propriété de composition découle de la Proposition 3.16 par passage au quotient et la propriété d'identité découle directement de la définition, donc C_n est bien un foncteur de Top vers Comp. \square

Définition 3.30. Soit (X, A) une paire d'espaces topologiques. On appelle *complexe de chaînes singulières de la paire (X, A)* , noté $C_\bullet(X, A)$, le complexe de chaînes quotient $C_\bullet(X, A) := C_\bullet(X)/C_\bullet(A)$.

Définition 3.31. Soit $C_\bullet(X, A)$ un complexe de chaînes singulières et $n \in \mathbb{Z}$.

- On appelle *n -cycle singulier* un élément de $Z_n(X, A) := Z_n(C_\bullet(X)/C_\bullet(A))$.
- On appelle *n -bord singulier* un élément de $B_n(X, A) := B_n(C_\bullet(X)/C_\bullet(A))$.
- On appelle *n^e groupe d'homologie singulière de X* le groupe $H_n(X, A) := H_n(C_\bullet(X)/C_\bullet(A))$.
- On appelle *homologie singulière de X* le groupe $H_\bullet(X, A) := H_\bullet(C_\bullet(X)/C_\bullet(A))$.

Corollaire 3.32. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le n^e groupe d'homologie singulière de paires H_n est un foncteur de Top_2 vers Ab.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$. D'après la Proposition 3.29 C_\bullet est un foncteur de Top_2 vers Comp et d'après le Théorème 2.12 H_n est un foncteur de Comp vers Ab, par composition $H_n = H_n(C_\bullet)$ est bien un foncteur de Top_2 vers Ab. \square

Corollaire 3.33. L'homologie singulière de paires H_\bullet est un foncteur de Top_2 vers GrAb.

Démonstration. D'après la Proposition 3.29 C_\bullet est un foncteur de Top_2 vers Comp et d'après le Corollaire 2.13 H_\bullet est un foncteur de Comp vers GrAb, par composition $H_\bullet = H_\bullet(C_\bullet)$ est bien un foncteur de Top_2 vers GrAb. \square

3.4. Principales propriétés et axiomes d'Eilenberg-Steenrod

Théorème 3.34 (Axiome de dimension). Soit P un espace topologique constitué d'un unique point. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$H_n(P) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Si $n < 0$, on a clairement $H_n(P) \simeq 0$.

Si $n \geq 0$, il existe un unique n -simplexe singulier $\sigma_n : \Delta^n \rightarrow P$, alors on a :

$$d_n \sigma_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \sigma_{n-1} = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \text{ ou } n \text{ est impair} \\ \sigma_{n-1} & \text{si } n \neq 0 \text{ et } n \text{ est pair} \end{cases}$$

dans le cas $n = 0$, alors $H_0(P) = \langle \sigma_0 \rangle / 0 \simeq \mathbb{Z}$,

dans le cas $n \neq 0$ et n est impair, alors $H_n(P) = \langle \sigma_n \rangle / \langle \sigma_n \rangle \simeq 0$,

dans le cas $n \neq 0$ et n est pair, alors $H_n(P) = 0/0 \simeq 0$. \square

Définition 3.35. Soit X et Y deux espaces topologiques, $f : X \rightarrow Y$ et $g : X \rightarrow Y$ deux applications continues. On dit que f et g sont *homotopes* s'il existe une application continue $h : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ telle que pour tout $x \in X$, on a $f(x) = h(x, 0)$ et $g(x) = h(x, 1)$.

Lemme 3.36. Soit X et Y deux espaces topologiques, $f : X \rightarrow Y$ et $g : X \rightarrow Y$ deux applications continues homotopes. Alors les morphismes de complexes $f_\bullet : C_\bullet(X) \rightarrow C_\bullet(Y)$ et $g : C_\bullet(X) \rightarrow C_\bullet(Y)$ sont homotopes.

Démonstration. Par définition de l'homotopie il existe une application continue $h : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ telle que $f(x) = h(x, 0)$ et $g(x) = h(x, 1)$.

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Puisque les n -chaînes singulières sont engendrées par les n -simplexes singuliers, il suffit de définir une homotopie pour un n -simplexe singulier $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$. Alors on pose :

$$h_n(\sigma) := \sum_{k=0}^n (-1)^k (h \circ (\sigma \times \text{id}) \circ \langle f_0, \dots, f_k, g_k, \dots, g_n \rangle) \in C_{n+1}(Y)$$

où $(f_0, \dots, f_n) := (e_0 \times \{1\}, \dots, e_n \times \{1\})$ et $(g_0, \dots, g_n) := (e_0 \times \{0\}, \dots, e_n \times \{0\})$. Calculons maintenant les deux expressions qui nous intéressent :

$$\begin{aligned} h_{n-1}(d_n \sigma) &= h_n \left(\sum_{l=0}^n (-1)^l (\sigma \circ \langle e_0, \dots, \widehat{e_l}, \dots, e_n \rangle) \right) \\ &= \sum_{0 \leq k < l \leq n} (-1)^{k+l} (h \circ (\sigma \times \text{id}) \circ \langle f_0, \dots, f_k, g_k, \dots, \widehat{g_l}, \dots, g_n \rangle) \\ &\quad + \sum_{0 \leq l < k \leq n} (-1)^{k+l-1} (h \circ (\sigma \times \text{id}) \circ \langle f_0, \dots, \widehat{f_l}, \dots, f_k, g_k, \dots, g_n \rangle) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} d_n h_n(\sigma) &= d_n \sum_{k=0}^n (-1)^k (h \circ (\sigma \times \text{id}) \circ \langle f_0, \dots, f_k, g_k, \dots, g_n \rangle) \\ &= \sum_{0 \leq l \leq k \leq n} (-1)^{k+l} (h \circ (\sigma \times \text{id}) \circ \langle f_0, \dots, \widehat{f_l}, \dots, f_k, g_k, \dots, g_n \rangle) \\ &\quad + \sum_{0 \leq k \leq l \leq n} (-1)^{k+l-1} (h \circ (\sigma \times \text{id}) \circ \langle f_0, \dots, f_k, g_k, \dots, \widehat{g_l}, \dots, g_n \rangle) \end{aligned}$$

en faisant la somme des deux expressions les termes d'indices différents s'annulent deux à deux :

$$\begin{aligned} h_{n-1}(d_n \sigma) + d_n h_n(\sigma) &= \sum_{k=0}^n (h \circ (\sigma \times \text{id}) \circ \langle f_0, \dots, f_{k-1}, g_k, \dots, g_n \rangle) \\ &\quad - \sum_{k=0}^n (h \circ (\sigma \times \text{id}) \circ \langle f_0, \dots, f_k, g_{k+1}, \dots, g_n \rangle) \\ &= (h \circ (\sigma \times \text{id}) \circ \langle g_0, \dots, g_n \rangle) - (h \circ (\sigma \times \text{id}) \circ \langle f_0, \dots, f_n \rangle) \\ &= (h \circ (\sigma \times \{0\})) - (h \circ (\sigma \times \{1\})) \\ &= (f \circ \sigma) - (g \circ \sigma) \\ &= C_n(f)(\sigma) - C_n(g)(\sigma) \end{aligned}$$

Donc les morphismes de complexes f_\bullet et g_\bullet sont bien homotopes. \square

Théorème 3.37 (Axiome d'homotopie). Soit X et Y deux espaces topologiques, $f : X \rightarrow Y$ et $g : X \rightarrow Y$ deux applications continues homotopes. Alors on a $H_\bullet(f) = H_\bullet(g)$.

Démonstration. Puisque f et g sont homotopes, d'après le [Lemme 3.36](#) f_\bullet et g_\bullet sont homotopes. Donc d'après le [Lemme 2.17](#) on a bien $H_\bullet(f) = H_\bullet(g)$. \square

Définition 3.38. Soit X et Y deux espaces topologiques. On dit que X et Y sont *homotopiquement équivalents* s'il existe deux applications continues $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow X$ telles que $g \circ f$ est homotope à id_X et $f \circ g$ est homotope à id_Y .

Corollaire 3.39. Soit X et Y deux espaces topologiques homotopiquement équivalents. Alors les homologies $H_\bullet(X)$ et $H_\bullet(Y)$ sont isomorphes.

Démonstration. Par définition il existe deux applications continues $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow X$ telles que $g \circ f$ est homotope à id_X et $f \circ g$ est homotope à id_Y . Alors d'après l'[Axiome d'homotopie](#) on a bien $H_\bullet(g) \circ H_\bullet(f) = \text{id}_{H_\bullet(X)}$ et $H_\bullet(f) \circ H_\bullet(g) = \text{id}_{H_\bullet(Y)}$, donc $H_\bullet(X) \simeq H_\bullet(Y)$. \square

Définition 3.40. Soit X un espace topologique et A un sous-ensemble de X . On dit que A est un *rétract par déformation de X* s'il existe une application continue $f : X \rightarrow X$ homotope à id_X telle que pour tout $x \in X$, on a $f(x) \in A$ et pour tout $a \in A$, on a $f(a) = a$.

Corollaire 3.41. Soit X un espace topologique et A un rétract par déformation de X . Alors les homologies $H_\bullet(X)$ et $H_\bullet(A)$ sont isomorphes.

Démonstration. Notons $i : A \rightarrow X$ l'inclusion canonique. Par définition il existe une application continue $f : X \rightarrow X$ homotope à id_X telle que pour tout $x \in X$, on a $f(x) \in A$ et pour tout $a \in A$, on a $f(a) = a$. Alors on a $f \circ i = \text{id}_A$ et $i \circ f$ est homotope à id_X , donc d'après le [Corollaire 3.39](#) on a bien $H_\bullet(X) \simeq H_\bullet(A)$. \square

Théorème 3.42 (Axiome d'exactitude). Soit $C_\bullet(X, A)$ un complexe de chaînes singulières. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il existe un morphisme de groupes $\partial_n : H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A)$ telle que la suite longue suivante est exacte :

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A) \xrightarrow{H_n(i)} H_n(X) \xrightarrow{H_n(j)} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A) \xrightarrow{H_{n-1}(i)} \dots$$

où $i : A \rightarrow X$ et $j : (X, \emptyset) \rightarrow (X, A)$ sont les inclusions canoniques.

Démonstration. On remarque que $i_\bullet : C_\bullet(A) \rightarrow C_\bullet(X)$ est l'inclusion canonique et qu'en passant au quotient $\bar{j}_\bullet : C_\bullet(X, \emptyset) \simeq C_\bullet(X) \rightarrow C_\bullet(X, A)$ devient la projection canonique.

Donc d'après le [Lemme 2.26](#) il existe bien un morphisme de groupes $\partial_n : H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A)$ tel que la suite longue est exacte. \square

Théorème 3.43 (Axiome d'excision). Soit (X, A) une paire d'espaces topologiques, U une partie de A telle que $\bar{U} \subset \mathring{A}$ et $i : (X \setminus U, A \setminus U) \rightarrow (X, A)$ l'inclusion canonique. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le morphisme induit $H_n(i) : H_n(X \setminus U, A \setminus U) \rightarrow H_n(X, A)$ est un isomorphisme.

Démonstration. Admise. \square

Théorème 3.44 (Théorème de Mayer-Vietoris). Soit X un espace topologique, U et V deux parties de X tels que $\mathring{U} \cup \mathring{V} = X$. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il existe un morphisme de groupes $\partial_n : H_n(U \cup V) \rightarrow H_{n-1}(U \cap V)$ tel que la suite longue suivante est exacte :

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(U \cap V) \xrightarrow{(-H_n(i), H_n(j))} H_n(U) \oplus H_n(V) \xrightarrow{H_n(k) + H_n(l)} H_n(X) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(U \cap V) \xrightarrow{(-H_{n-1}(i), H_{n-1}(j))} \dots$$

où $i : U \cap V \rightarrow U$, $j : U \cap V \rightarrow V$, $k : U \rightarrow U \cup V$ et $l : V \rightarrow U \cup V$ sont les inclusions canoniques.

Démonstration. Admise. \square

Définition 3.45. Une *théorie de l'homologie* sur la catégorie des paires d'espaces topologiques Top_2 dans la catégorie des groupes abéliens Ab est une suite de foncteurs $(H_n : \text{Top}_2 \rightarrow \text{Ab})_{n \in \mathbb{Z}}$ munie de transformations naturelles $(\partial_n : H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A) := H_{n-1}(A, \emptyset))_{n \in \mathbb{Z}}$ vérifiant les *axiomes d'Eilenberg-Steenrod* pour toutes paires d'espaces topologiques $(X, A), (Y, B)$ et $n \in \mathbb{Z}$:

- *Dimension* : Soit P un espace constitué d'un unique point. Alors le groupe $H_n(P)$ est non-trivial si et seulement si $n = 0$.
- *Homotopie* : Soit $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ et $g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ deux morphismes de paires homotopes. Alors on a $H_n(f) = H_n(g)$.
- *Exactitude* : La suite longue suivante est exacte :

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A) \xrightarrow{H_n(i)} H_n(X) \xrightarrow{H_n(j)} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A) \xrightarrow{H_{n-1}(i)} \dots$$

où $i : A \rightarrow X$ et $j : (X, \emptyset) \rightarrow (X, A)$ sont les inclusions canoniques.

- *Excision* : Soit U une partie de A telle que $\overline{U} \subset \mathring{A}$ et $i : (X \setminus U, A \setminus U) \rightarrow (X, A)$ l'inclusion canonique. Alors le morphisme induit $H_n(i) : H_n(X \setminus U, A \setminus U) \rightarrow H_n(X, A)$ est un isomorphisme.

Corollaire 3.46. La suite des n^{e} groupe d'homologie singulière de paires $(H_n : \text{Top}_2 \rightarrow \text{Ab})_{n \in \mathbb{Z}}$ munie des morphismes $(\partial_n : H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A))_{n \in \mathbb{Z}}$ est une théorie de l'homologie vérifiant les *axiomes d'Eilenberg-Steenrod*.

3.4.1. Connexité par arcs

Proposition 3.47. Soit X un espace topologique. Alors, en notant $(X)_{i \in I}$ les composantes connexes par arcs de X , pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $H_n(X) \simeq \bigoplus_{i \in I} H_n(X_i)$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Pour toute n -chaîne singulière $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$, puisque Δ^n est convexe, et en particulier connexe par arcs, par continuité de σ il existe un unique $i \in I$ tel que $\text{im}(\sigma) \subset X_i$. Alors on en déduit que $C_n(X) \simeq \bigoplus_{i \in I} C_n(X_i)$. De plus d_n préserve cette décomposition en somme directe, par passage au quotient on a bien $H_n(X) \simeq \bigoplus_{Y \in \pi(X)} H_n(Y)$. \square

Proposition 3.48. Soit X un espace topologique. Alors, en notant $(X)_{i \in I}$ les composantes connexes par arcs de X , on a $H_0(X) \simeq \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}$.

Démonstration. On a déjà $\ker(d_0) = C_0(X)$.

Supposons que X est non-vide et connexe par arcs. On pose $\varphi : C_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}; \sum_{k=0}^n \lambda_k \sigma_k \mapsto \sum_{k=0}^n \lambda_k$. Alors φ est un morphisme de groupes surjectif. Vérifions que $\text{im}(d_1) = \ker(\varphi)$.

Les 1-chaînes singulières sont engendrées par les 1-simplexes singuliers et pour tout 1-simplexe singulier $\sigma : \Delta^1 \rightarrow X$, on a $\varphi(d_1 \sigma) = \varphi(\sigma \circ \langle \overline{e_0}, e_1 \rangle - \sigma \circ \langle e_0, \overline{e_1} \rangle) = 1 - 1 = 0$, donc $\text{im}(d_1) \subset \ker(\varphi)$.

Réciproquement on considère $\sum_{k=0}^n \lambda_k \sigma_k \in \ker(\varphi)$. Pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, on note $\gamma_k : [0, 1] \rightarrow X$ un chemin d'un point $x \in X$ au point $\sigma_k(e_1) \in X$ et on pose $\sigma : \Delta^0 \rightarrow X$ un 0-simplexe singulier d'image x , en considérant γ_k comme un 1-simplexe singulier on a $d_1 \gamma_k = \sigma_k - \sigma$. Alors en considérant la n -chaîne singulière $\sum_{k=0}^n \lambda_k \gamma_k$, on a $d_1 \sum_{k=0}^n \lambda_k \gamma_k = \sum_{k=0}^n \lambda_k \sigma_k - \sum_{k=0}^n \lambda_k \sigma = \sum_{k=0}^n \lambda_k \sigma_k$, donc $\ker(\varphi) \subset \text{im}(d_1)$.

Alors d'après le premier théorème d'isomorphisme on a bien $H_0(X) = C_0(X) / \ker(\varphi) \simeq \mathbb{Z}$.

Dans le cas général, d'après la Proposition 3.47 on a $H_n(X) \simeq \bigoplus_{i \in I} H_n(X_i) \simeq \bigoplus_{Y \in \pi(X)} \mathbb{Z}$. \square

3.4.2. Cas particuliers

Remarque 3.49. Les propositions suivantes seront utilisées pour démontrer qu'il n'existe pas de plongement du plan projectif réel $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 . Certains calculs d'homologie singulière paraissent alambiqués mais ils s'enchaînent tout de même de manière naturelle. Dans la suite on note \mathbb{B}^n une boule de dimension n et $\mathbb{S}^n := \partial \mathbb{B}^{n+1}$ une sphère de dimension n .

Proposition 3.50. Soit \mathbb{S}^0 la sphère de dimension 0. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$H_n(\mathbb{S}^0) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration. On a $\mathbb{S}^0 \simeq \{-1, 1\}$. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Si $n < 0$, on a clairement $H_n(\mathbb{S}^0) \simeq 0$.

Si $n \geq 0$, il existe uniquement deux n -simplexes singuliers $\sigma_{-1} := -1, \sigma_1 := 1 : \Delta^n \rightarrow \mathbb{S}^0$ et ils sont constants. On en déduit que $C_n(\mathbb{S}^0) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Soit $\sigma : \Delta^n \rightarrow \mathbb{S}^0$ un n -simplexe singulier, on peut supposer sans perte de généralité que $\sigma = 1$, alors on a :

$$d_n \sigma = \sum_{k=0}^n (-1)^k = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

dans le cas $n = 0$, alors $H_0(\mathbb{S}^0) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$,

dans le cas n pair, alors $H_n(\mathbb{S}^0) \simeq 0/0 \simeq 0$,

dans le cas n impair, alors $H_n(\mathbb{S}^0) \simeq (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})/(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \simeq 0$. □

Proposition 3.51. Soit \mathbb{S}^1 la sphère de dimension 1. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$H_n(\mathbb{S}^1) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n \in \{0, 1\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration. On recouvre \mathbb{S}^1 par deux arcs ouverts U et V dont l'intersection est composée de deux arcs disjoints :

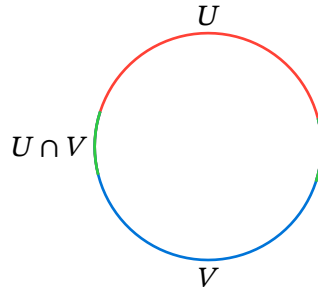


Fig. 4. – Recouvrement de \mathbb{S}^1 .

Les arcs U et V sont homotopiquement équivalents à un point, et l'intersection $U \cap V$ est homotopiquement équivalente à \mathbb{S}^0 . Alors d'après le [Corollaire 3.39](#), l'[Axiome de dimension](#) et la [Proposition 3.50](#), pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$H_n(U) \simeq H_n(V) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad H_n(U \cap V) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors d'après le [Théorème de Mayer-Vietoris](#) la suite suivante est exacte :

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow H_2(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\partial_2} 0 \xrightarrow{\varphi_1} 0 \xrightarrow{\psi_1} H_1(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi_0} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi_0} H_0(\mathbb{S}^1) \rightarrow 0$$

On en déduit directement que si $n \geq 2$, on a $H_n(\mathbb{S}^1) \simeq 0$.

On étudie $\varphi_0 := (-H_0(i), H_0(j)) : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ où $i : U \cap V \rightarrow U$ et $j : U \cap V \rightarrow V$ sont les inclusions canoniques, alors il est clair que $\varphi_0(1, 0) = \varphi_0(0, 1) = (-1, 1)$, donc pour tout $a, b \in \mathbb{Z}$, on a $\varphi_0(a, b) = (-(a + b), a + b)$.

Alors on a $\ker(\varphi_0) = \{(a, -a) \mid a \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}$. Par exactitude de la suite, ∂_1 est injective et on a bien $H_1(\mathbb{S}^1) \simeq \text{im}(\partial_1) = \ker(\varphi_0) \simeq \mathbb{Z}$.

Enfin on a $\text{im}(\varphi_0) = \{(-(a + b), a + b) \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}$. Par exactitude de la suite, ψ_0 est surjective et on a bien $H_0(\mathbb{S}^1) \simeq (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) / \ker(\psi_0) \simeq (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) / \text{im}(\varphi_0) \simeq (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) / \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}$. □

Proposition 3.52. Soit \mathbb{S}^2 la sphère de dimension 2. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$H_n(\mathbb{S}^2) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n \in \{0, 2\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration. On recouvre \mathbb{S}^2 par deux ouverts U et V recouvrant chacun un hémisphère :

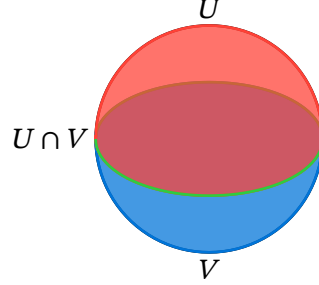


Fig. 5. – Recouvrement de \mathbb{S}^2 .

Les ouverts U et V sont homotopiquement équivalents à un point, et l'intersection $U \cap V$ est homotopiquement équivalente à \mathbb{S}^1 . Alors d'après le [Corollaire 3.39](#), l'[Axiome de dimension](#) et la [Proposition 3.51](#), pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$H_n(U) \simeq H_n(V) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad H_n(U \cap V) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n \in \{0, 1\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors d'après le [Théorème de Mayer-Vietoris](#) la suite suivante est exacte :

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow H_2(\mathbb{S}^2) \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi_1} 0 \xrightarrow{\psi_1} H_1(\mathbb{S}^2) \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi_0} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi_0} H_0(\mathbb{S}^2) \rightarrow 0$$

On en déduit directement que si $n \geq 3$, on a $H_n(\mathbb{S}^2) \simeq 0$.

En étudiant $\varphi_0 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ on trouve que pour tout $a \in \mathbb{Z}$, on a $\varphi_0(a) = (-a, a)$.

Par exactitude de la suite, ∂_2 est bijective, donc on a bien $H_2(\mathbb{S}^2) \simeq \mathbb{Z}$.

De plus on a $\ker(\varphi_0) \simeq 0$. Par exactitude de la suite, ∂_1 est injective et on a bien $H_1(\mathbb{S}^2) \simeq \text{im}(\partial_1) = \ker(\varphi_0) \simeq 0$.

Enfin on a $\text{im}(\varphi_0) = \{(-a, a) \mid a \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}$. Par exactitude de la suite, ψ_0 est surjective et on a bien $H_0(\mathbb{S}^2) \simeq (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) / \text{im}(\varphi_0) \simeq (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) / \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}$. \square

Proposition 3.53. Soit X un sous-espace de \mathbb{S}^3 homéomorphe à \mathbb{B}^m . Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$H_n(\mathbb{S}^3 \setminus X) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration. On considère un plongement $f : \mathbb{B}^m \rightarrow \mathbb{S}^3$ et on raisonne par récurrence sur m avec :

$$P(m) : H_n(\mathbb{S}^3 \setminus f(\mathbb{B}^m)) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour $m = 0$, l'espace \mathbb{B}^0 est composé d'un unique point, par [Projection stéréographique](#) $\mathbb{S}^3 \setminus f(\mathbb{B}^0)$ est homéomorphe à \mathbb{R}^3 et \mathbb{R}^3 est homotopiquement équivalent à un point. Alors d'après le [Corollaire 3.39](#) et l'[Axiome de dimension](#), pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$H_n(\mathbb{S}^3 \setminus f(\mathbb{B}^0)) \simeq H_n(\mathbb{R}^3) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit $m > 0$, on suppose que $P(m - 1)$ est vérifiée. L'espace \mathbb{B}^m est homéomorphe à $\mathbb{B}^{m-1} \times [0, 1]$.

Alors on recouvre $\mathbb{B}^{m-1} \times [0, 1]$ par deux fermés $\mathbb{B}^- := \mathbb{B}^{m-1} \times [0, 1/2]$ et $\mathbb{B}^+ := \mathbb{B}^{m-1} \times [1/2, 1]$, ils sont homéomorphes à \mathbb{B}^m , et leur intersection $\mathbb{B}^- \cap \mathbb{B}^+ = \mathbb{B}^{m-1} \times \{1/2\}$ est homéomorphe à \mathbb{B}^{m-1} . Ainsi on recouvre $\mathbb{S}^3 \setminus f(\mathbb{B}^{m-1} \times \{1/2\})$ par les ouverts $U := \mathbb{S}^3 \setminus f(\mathbb{B}^-)$ et $V := \mathbb{S}^3 \setminus f(\mathbb{B}^+)$, et leur intersection vaut $U \cap V = \mathbb{S}^3 \setminus f(\mathbb{B}^m)$.

Alors d'après le **Théorème de Mayer-Vietoris** la suite suivante est exacte :

$$\dots \xrightarrow{\psi_{n+1}} H_{n+1}(U \cup V) \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(U \cap V) \xrightarrow{\varphi_n} H_n(U) \oplus H_n(V) \xrightarrow{\psi_n} H_n(U \cup V) \xrightarrow{\partial_n} \dots$$

où $\varphi_n := (i_0, j_0) : H_n(U \cap V) \rightarrow H_n(U) \oplus H_n(V)$ est induite par les inclusions canoniques.

Pour $n = 0$, on remarque que $\mathbb{S}^3 \setminus f(\mathbb{B}^m)$ est connexe par arcs, donc d'après la **Proposition 3.48** on a bien $H_0(\mathbb{S}^3 \setminus f(\mathbb{B}^m)) \simeq \mathbb{Z}$.

Soit $n \geq 1$, on suppose par l'absurde qu'il existe $\alpha_0 \in H_n(U \cap V)$ non-nul. Alors par hypothèse de récurrence on a $H_n(U \cup V) \simeq 0$, par exactitude de la suite φ_n est injective et on peut supposer sans perte de généralité qu'il existe $\alpha_1 \in H_n(U)$ non-nul tel que $i_0(\alpha_0) = \alpha_1$ (sinon on prend $\alpha_1 \in H_n(V)$ et $j_0(\alpha_0) = \alpha_1$).

Puisque \mathbb{B}^- est homéomorphe à \mathbb{B}^m , on peut refaire le même raisonnement avec $\mathbb{S}^3 \setminus f(\mathbb{B}^-)$ à la place de $\mathbb{S}^3 \setminus f(\mathbb{B}^m)$, alors il existe $\alpha_2 \in H_n(\mathbb{S}^3 \setminus f(\mathbb{B}^{m-1} \times [0, 1/4]))$ non-nul tel que $i_1(\alpha_1) = \alpha_2$, où $i_1 : H_n(\mathbb{S}^3 \setminus f(\mathbb{B}^-)) \rightarrow H_n(\mathbb{S}^3 \setminus f(\mathbb{B} \times [0, 1/4]))$ est induite par l'inclusion canonique.

En itérant ce raisonnement on obtient une suite $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$, où pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\alpha_k \in H_n(A_k) := H_n(\mathbb{S}^3 \setminus f(\mathbb{B}^{m-1} \times [0, 1/2^k]))$ qui est non-nul tel que $i_k(\alpha_k) = \alpha_{k+1}$, où $i_k : H_n(A_k) \rightarrow H_n(A_{k+1})$ est induite par l'inclusion canonique.

Soit $\sigma : \Delta^n \rightarrow A_0$ un n -cycle singulier représentant α_0 . Puisque pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $i_k(\alpha_k) = \alpha_{k+1}$, on en déduit que σ est aussi un représentant de tous les α_k .

On note $Y := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k = \mathbb{S}^3 \setminus f(\mathbb{B}^{m-1} \times \{0\})$. Alors $\mathbb{B}^{m-1} \times \{0\}$ est homéomorphe à \mathbb{B}^{m-1} , donc par hypothèse de récurrence on a $H_n(Y) \simeq 0$. De plus par inclusion on a $\sigma \in Z_n(Y)$ et $\bar{\sigma} = 0 \in H_n(Y)$.

Alors on a $\sigma \in B_n(Y)$ et il existe une $(n+1)$ -chaîne singulière $\tau : \Delta^{n+1} \rightarrow Y$ telle que $d_{n+1}\tau = \sigma$. Puisque τ est continue et Δ^{n+1} est compact, son image $K := \tau(\Delta^{n+1})$ est compacte. Or $Y := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ est un recouvrement ouvert de K , donc par définition il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $K \subset A_{k_0}$.

Alors $\sigma = d_{n+1}\tau \in B_{n+1}(A_{k_0})$ et $a_{k_0} = \bar{\sigma} = 0 \in H_n(A_{k_0})$, d'où une contradiction.

Donc on a bien $H_n(\mathbb{S}^3 \setminus f(\mathbb{B}^m)) \simeq 0$. □

Proposition 3.54. Soit X un sous-espace de \mathbb{R}^3 homéomorphe à \mathbb{B}^2 . Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$H_n(\mathbb{R}^3 \setminus X) \simeq H_n(\mathbb{S}^2) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n \in \{0, 2\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration. Par **Projection stéréographique** $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ est homéomorphe à \mathbb{S}^3 , en particulier la restriction $(\mathbb{R}^3 \setminus X) \cup \{\infty\}$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^3 \setminus X$. Alors on recouvre $(\mathbb{R}^3 \setminus X) \cup \{\infty\}$ par deux ouverts $U := \mathbb{R}^3 \setminus X$ et V une boule au voisinage de ∞ qui n'intersecte pas X (qui est compact).

L'ouvert V est homotopiquement équivalent au point $\{\infty\}$ et l'intersection $U \cap V = V \setminus \{\infty\}$ est homotopiquement équivalente à \mathbb{S}^2 . Alors d'après le **Corollaire 3.39**, l'**Axiome de dimension**, la **Proposition 3.52** et la **Proposition 3.53**, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$H_n(U \cup V) \simeq H_n(V) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad H_n(U \cap V) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n \in \{0, 2\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors d'après le **Théorème de Mayer-Vietoris** la suite suivante est exacte :

$$\dots \rightarrow 0 \xrightarrow{\partial_3} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi_2} H_2(U) \xrightarrow{\psi_2} 0 \xrightarrow{\partial_2} 0 \xrightarrow{\varphi_1} H_1(U) \xrightarrow{\psi_1} 0 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi_0} H_0(U) \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi_0} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

En étudiant $\varphi_0 : \mathbb{Z} \rightarrow H_0(U) \oplus \mathbb{Z}$ on trouve qu'il existe un 0-cycle singulier $\sigma : \Delta^0 \rightarrow U$, c'est-à-dire un point, tel que pour tout $a \in \mathbb{Z}$, on a $\varphi_0(a) = (-a\bar{\sigma}, a)$.

Par exactitude de la suite, φ_2 est bijective et on a bien $H_2(\mathbb{R}^3 \setminus X) \simeq \mathbb{Z}$.

Par exactitude de la suite, φ_1 est bijective et on a bien $H_1(\mathbb{R}^3 \setminus X) \simeq 0$.

Enfin on a $\text{im}(\varphi_0) \simeq \mathbb{Z}$. Par exactitude de la suite, ψ_0 est surjective, de plus $\ker(\psi_0) = \text{im}(\varphi_0) \simeq \mathbb{Z}$ et on a $(H_0(\mathbb{R}^3 \setminus X) \oplus \mathbb{Z})/\mathbb{Z} \simeq (H_0(\mathbb{R}^3 \setminus X) \oplus \mathbb{Z})/\ker(\psi_0) \simeq \mathbb{Z}$, d'après la Proposition 3.48 le groupe $H_0(\mathbb{R}^3 \setminus X)$ est un groupe abélien libre, donc $H_0(\mathbb{R}^3 \setminus X) \simeq \mathbb{Z}$. \square

Proposition 3.55. Soit X un sous-espace de \mathbb{S}^3 homéomorphe à \mathbb{S}^1 . Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$H_n(\mathbb{S}^3 \setminus X) \simeq H_n(\mathbb{S}^1) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n \in \{0, 1\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration. On recouvre \mathbb{S}^1 par deux arcs fermés A_+ et A_- , ils sont homéomorphes à \mathbb{B}^1 , et leur intersection vaut $A_+ \cap A_- = \mathbb{S}^0$. On considère un plongement $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^3$ tel que $f(\mathbb{S}^1) = X$ et on pose deux ouverts $U := \mathbb{S}^3 \setminus f(A_+)$ et $V := \mathbb{S}^3 \setminus f(A_-)$.

Par Projection stéréographique l'union $U \cup V = \mathbb{S}^3 \setminus f(\mathbb{S}^0)$ est homéomorphe à \mathbb{S}^2 . Alors d'après la Proposition 3.52 et la Proposition 3.53, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$H_n(U) \simeq H_n(V) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad H_n(U \cup V) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n \in \{0, 2\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors d'après le Théorème de Mayer-Vietoris la suite suivante est exacte :

$$\dots \rightarrow 0 \xrightarrow{\psi_2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_2} H_1(\mathbb{S}^3 \setminus X) \xrightarrow{\varphi_1} 0 \xrightarrow{\psi_1} 0 \xrightarrow{\partial_1} H_0(\mathbb{S}^3 \setminus X) \xrightarrow{\varphi_0} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi_0} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

On en déduit directement que si $n \geq 2$, on a $H_n(\mathbb{S}^3 \setminus X) \simeq 0$.

En étudiant $\psi_0 : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ on trouve que pour tout $(a, b) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, on a $\psi_0(a, b) = a + b$.

Par exactitude de la suite, ∂_2 est bijective et on a bien $H_1(\mathbb{S}^3 \setminus X) \simeq \mathbb{Z}$.

De plus $\ker(\psi_0) \simeq \mathbb{Z}$. Par exactitude de la suite, φ_0 est injective et on a $H_0(\mathbb{S}^3 \setminus X) \simeq \text{im}(\varphi_0) = \ker(\psi_0) \simeq \mathbb{Z}$. \square

Proposition 3.56. Soit X un sous-espace de \mathbb{R}^3 homéomorphe à \mathbb{S}^1 . Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$H_n(\mathbb{R}^3 \setminus X) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n \in \{0, 1, 2\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration. Par Projection stéréographique $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ est homéomorphe à \mathbb{S}^3 , en particulier la restriction $(\mathbb{R}^3 \setminus X) \cup \{\infty\}$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^3 \setminus X$. Alors on recouvre $(\mathbb{R}^3 \setminus X) \cup \{\infty\}$ par deux ouverts $U := \mathbb{R}^3 \setminus X$ et V une boule au voisinage de ∞ qui n'intersecte pas X (qui est compact).

L'ouvert V est homotopiquement équivalent à $\{\infty\}$ et l'intersection $U \cap V = V \setminus \{\infty\}$ est homotopiquement équivalente à \mathbb{S}^2 . Alors d'après le Corollaire 3.39, l'Axiome de dimension, la Proposition 3.52 et la Proposition 3.55, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$H_n(U \cup V) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n \in \{0, 1\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad H_n(V) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad H_n(U \cap V) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n \in \{0, 2\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors d'après le Théorème de Mayer-Vietoris la suite suivante est exacte :

$$\dots \rightarrow 0 \xrightarrow{\partial_3} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi_2} H_2(U) \xrightarrow{\psi_2} 0 \xrightarrow{\partial_2} 0 \xrightarrow{\varphi_1} H_1(U) \xrightarrow{\psi_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi_0} H_0(U) \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi_0} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

On en déduit directement que si $n > 2$, on a $H_n(\mathbb{R}^3 \setminus X) \simeq 0$.

En étudiant $\varphi_0 : \mathbb{Z} \rightarrow H_0(U) \oplus \mathbb{Z}$ on trouve qu'il existe un 0-cycle singulier $\sigma : \Delta^0 \rightarrow U$, c'est-à-dire un point, tel que pour tout $a \in \mathbb{Z}$, on a $\varphi_0(a) = (-a\bar{\sigma}, a)$.

Par exactitude de la suite, φ_2 est bijective et on a bien $H_2(\mathbb{R}^3 \setminus X) \simeq \mathbb{Z}$.

De plus on a $\ker(\varphi_0) \simeq 0$. Par exactitude de la suite, ψ_1 est injective, de plus $\text{im}(\partial_1) = \ker(\varphi_0) \simeq 0$ et on a bien $H_1(\mathbb{R}^3 \setminus X) \simeq \text{im}(\psi_1) = \ker(\partial_1) \simeq \mathbb{Z}$.

Enfin on a $\text{im}(\varphi_0) \simeq \mathbb{Z}$. Par exactitude de la suite, ψ_0 est surjective, de plus $\ker(\psi_0) = \text{im}(\varphi_0) \simeq \mathbb{Z}$ et on a $(H_0(\mathbb{R}^3 \setminus X) \oplus \mathbb{Z})/\mathbb{Z} \simeq (H_0(\mathbb{R}^3 \setminus X) \oplus \mathbb{Z})/\ker(\psi_0) \simeq \mathbb{Z}$, d'après la [Proposition 3.48](#) le groupe $H_0(\mathbb{R}^3 \setminus X)$ est un groupe abélien libre, donc $H_0(\mathbb{R}^3 \setminus X) \simeq \mathbb{Z}$. \square

4. Droite et plan projectifs réels

4.1. La droite projective réelle

Définition 4.1. On appelle *droite projective réelle*, noté $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$, le quotient de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ par la relation d'équivalence $\sim_{\mathbb{P}^1}$ où pour tout $u, v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, on a $u \sim_{\mathbb{P}^1} v$ s'il existe $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tel que $u = \lambda v$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. On appelle *coordonnées homogènes de* (x, y) le point associé sur la droite projective réelle $[x : y] := \overline{(x, y)} \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$.

Remarque 4.2. Formellement un point de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ est induit par une droite linéaire de \mathbb{R}^2 .

Définition 4.3. On appelle *cartes affines de* $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ les sous-ensembles suivants :

- $A_x := \{[x : y] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \mid x \neq 0\} = \{[1 : y] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1\}$.
- $A_y := \{[x : y] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \mid y \neq 0\} = \{[x : 1] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1\}$.

Remarque 4.4. Les cartes affines A_x et A_y sont homéomorphes à \mathbb{R} .

On a $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 = A_x \cup A_y$, mais surtout $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 = A_y \sqcup \{\infty\}$ où $\infty := [1 : 0]$.

Intuitivement $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ s'obtient donc à partir de \mathbb{R} auquel on ajoute un point à l'infini.

Remarque 4.5. La proposition suivante est naturelle puisque $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ est donnée par les droites linéaires de \mathbb{R}^2 et \mathbb{S}^1 par les demi-droites linéaires de \mathbb{R}^2 .

Proposition 4.6. La droite projective réelle $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ est homéomorphe au quotient du cercle \mathbb{S}^1 par la relation d'équivalence $\sim_{\mathbb{S}^1}$ où pour tout $u, v \in \mathbb{S}^1$, on a $u \sim_{\mathbb{S}^1} v$ si $u = \pm v$.

Démonstration. On pose $i : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1; (x, y) \mapsto [x : y]$. Alors i est bien définie, pour tout $u, v \in \mathbb{S}^1$, si $u \sim_{\mathbb{S}^1} v$, alors $u = \pm v$, d'où $i(u) = i(v)$. De plus i est continue par composition de fonctions continues. Donc l'application $I : \mathbb{S}^1 / \sim_{\mathbb{S}^1} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ telle que $I \circ \pi = i$ est continue.

Réciproquement on pose $j : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^1 / \sim_{\mathbb{S}^1}; u \mapsto \overline{u/\|u\|}$. Alors j est bien définie, en effet pour tout $u, v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, si $u \sim_{\mathbb{P}^1} v$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tel que $u = \lambda v$, d'où $j(u) = j(\lambda v) = j(v)$. De plus j est continue par composition de fonctions continues. Donc l'application $J : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 / \sim_{\mathbb{S}^1}$ telle que $J \circ \pi = j$ est continue.

Enfin il est clair que $J \circ I = \text{id}$ et $I \circ J = \text{id}$, donc I et J sont bien des homéomorphismes de la droite projective réelle $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ dans $\mathbb{S}^1 / \sim_{\mathbb{S}^1}$. \square

4.2. Le plan projectif réel

Définition 4.7. On appelle *plan projectif réel*, noté $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$, le quotient de $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ par la relation d'équivalence $\sim_{\mathbb{P}^2}$ où pour tout $u, v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, on a $u \sim_{\mathbb{P}^2} v$ s'il existe $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tel que $u = \lambda v$. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. On appelle *coordonnées homogènes de* (x, y, z) le point associé sur le plan projectif réel $[x : y : z] := \overline{(x, y, z)} \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$.

Remarque 4.8. Formellement un point de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ est induit par une droite linéaire de \mathbb{R}^3 et une droite de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ est induite par un plan linéaire de \mathbb{R}^3 . On déduit de la formule de Grassmann que deux droites distinctes de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ (même parallèles) s'intersectent en un point de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$.

Définition 4.9. On appelle *cartes affines de* $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ les sous-ensembles suivants :

- $A_x := \{[x : y : z] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \mid x \neq 0\} = \{[1 : y : z] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2\}$.
- $A_y := \{[x : y : z] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \mid y \neq 0\} = \{[x : 1 : z] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2\}$.
- $A_z := \{[x : y : z] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \mid z \neq 0\} = \{[x : y : 1] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2\}$.

Remarque 4.10. Les cartes affines A_x, A_y et A_z sont homéomorphes à \mathbb{R}^2 .

On a $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 = A_x \cup A_y \cup A_z$, mais surtout $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 = A_z \sqcup \ell_{\infty}$ où $\ell_{\infty} := \{[x : y : 0] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2\}$.

De plus l'ensemble ℓ_{∞} est homéomorphe à $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$, intuitivement $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ s'obtient donc à partir de \mathbb{R}^2 auquel on ajoute une copie de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ à l'infini.

Remarque 4.11. Pour être exact dans la Remarque 4.8, une droite de A_z intersecte ℓ_∞ en un point dépendant uniquement de son vecteur directeur. En effet, soit $D := \{(x_0 + ta, y_0 + tb) \mid t \in \mathbb{R}\}$ une droite de $\mathbb{R}^2 \simeq A_z$ passant par un point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et de vecteur directeur $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Alors l'image de D dans A_z est donnée par $D_z := \{[x_0 + ta : y_0 + tb : 1] \mid t \in \mathbb{R}\}$, et on a :

$$[x_0 + ta : y_0 + tb : 1] = \left[\frac{x_0}{t} + a : \frac{y_0}{t} + b : \frac{1}{t} \right] \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} [a : b : 0] \in \ell_\infty$$

Donc D_z intersecte ℓ_∞ en $[a : b : 0]$.

Soit D_1 et D_2 deux droites distinctes de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$, on note $A_1 := D_1 \cap A_z$ et $A_2 := D_2 \cap A_z$.

- Si $D_1 \neq \ell_\infty$ et $D_2 \neq \ell_\infty$, alors $A_1 \neq \emptyset$ et $A_2 \neq \emptyset$.
Si A_1 et A_2 sont parallèles, elles ont le même vecteur directeur, donc D_1 et D_2 s'intersectent en ℓ_∞ .
Sinon A_1 et A_2 s'intersectent, donc D_1 et D_2 s'intersectent en A_z .
- Si $D_1 = \ell_\infty$, alors D_2 intersecte bien $D_1 = \ell_\infty$.

Remarque 4.12. La proposition suivante est naturelle puisque $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ est donné par les droites linéaires de \mathbb{R}^3 et \mathbb{S}^2 par les demi-droites linéaires de \mathbb{R}^3 .

Proposition 4.13. Le plan projectif réel $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ est homéomorphe au quotient de la sphère \mathbb{S}^2 par la relation d'équivalence $\sim_{\mathbb{S}^2}$ où pour tout $u, v \in \mathbb{S}^2$, on a $u \sim_{\mathbb{S}^2} v$ si $u = \pm v$.

Démonstration. La démonstration est similaire à celle de la Proposition 4.6, on identifie chaque élément de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ à deux éléments antipodaux de \mathbb{S}^2 . \square

Proposition 4.14. Le plan projectif réel $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ est homéomorphe au quotient du carré $[0, 1]^2$ par la relation d'équivalence $\sim_{[0,1]}$ où pour tout $t \in [0, 1]$, on a $(t, 0) \sim_{[0,1]} (1 - t, 1)$ et $(0, t) \sim_{[0,1]} (1, 1 - t)$.

Démonstration. D'après la Proposition 4.13 le plan projectif $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^2 / \sim_{\mathbb{S}^2}$, ensuite puisque l'on identifie les points antipodaux de \mathbb{S}^2 , on peut considérer seulement l'hémisphère nord de \mathbb{S}^2 en identifiant les points antipodaux du cercle de l'équateur :

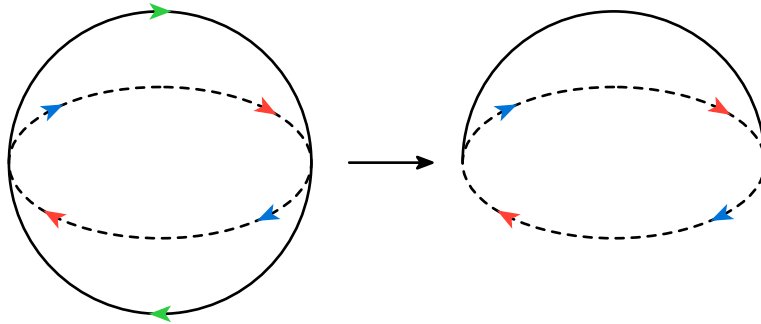


Fig. 6. – Passage de la sphère à la demi-sphère.

On peut déformer continûment cette demi-sphère sur le disque en identifiant toujours les points antipodaux du cercle :

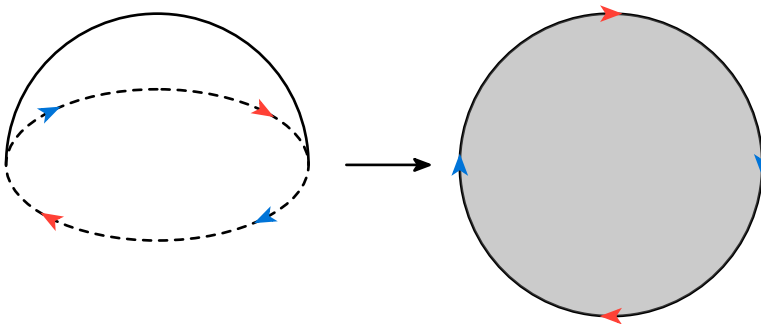


Fig. 7. – Passage de la demi-sphère au disque.

On peut de nouveau déformer continûment ce disque sur le carré en identifiant les points sur le bord du carré et en conservant l'orientation :

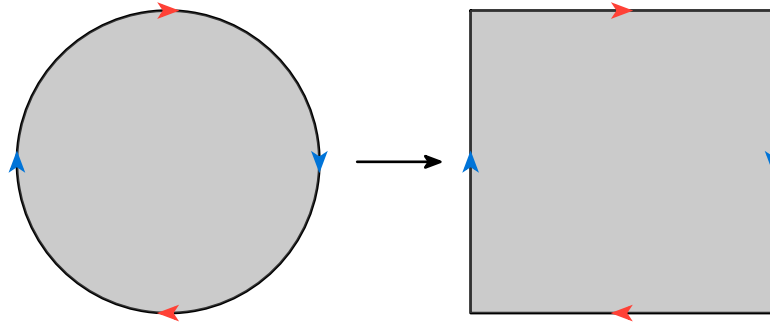


Fig. 8. – Passage du disque au carré.

Puisque les déformations à chaque étapes sont continues et préservent les points identifiés, on a bien construit un homéomorphisme du plan projectif réel $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ dans $[0, 1]^2 / \sim_{[0,1]}$. \square

Proposition 4.15. Le plan projectif réel $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ se décompose en l'union de deux ensembles $M \cup D$ tels que M est homéomorphe une bande de Möbius, D est homéomorphe à un disque fermé, et l'intersection $M \cap D = \partial M = \partial D$ est homéomorphe à \mathbb{S}^1 .

Démonstration. D'après la Proposition 4.14 le plan projectif réel $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ est homéomorphe à $[0, 1]^2 / \sim_{[0,1]}$, ensuite on peut découper dans ce carré une bande de Möbius :

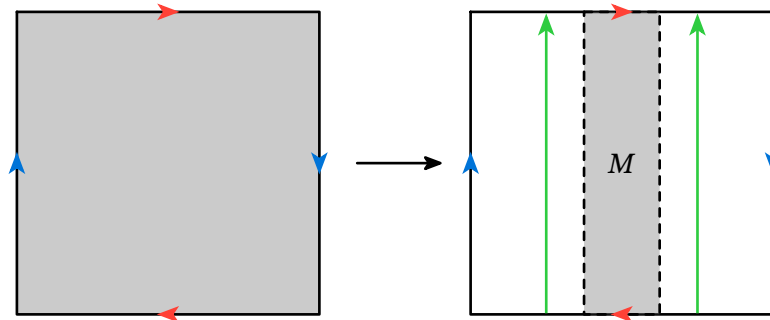


Fig. 9. – Découpage d'une bande de Möbius.

On peut recoller les parties restantes en suivant l'orientation des flèches bleues, puis l'orientation des flèches rouges pour obtenir un disque fermé :

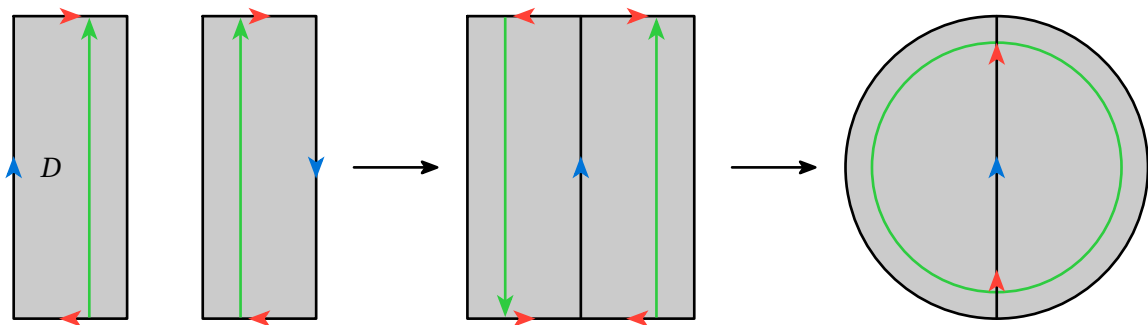


Fig. 10. – Recollage du disque fermé.

De plus $M \cap D = \partial M = \partial D$ est homéomorphe au bord du disque, donc à \mathbb{S}^1 .

Puisque les déformations à chaque étapes sont continues et préservent les points identifiés, on a bien décomposé le plan projectif réel $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ comme l'union $M \cup D$ de deux ensembles tels que M est homéomorphe à une bande de Möbius, D est homéomorphe à un disque fermé et $M \cap D$ est homéomorphe à \mathbb{S}^1 . \square

4.2.1. Non-plongement dans l'espace euclidien

Définition 4.16. Soit X et Y deux espaces topologiques, $f : X \rightarrow Y$ une application. On dit que f est un *plongement de X dans Y* si elle induit un homéomorphisme de X dans $f(X)$.

Théorème 4.17. Il n'existe pas de plongement du plan projectif réel $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 .

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'il existe un plongement $f : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

D'après la Proposition 4.15 on peut écrire $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 = M \cup D$ où M est homéomorphe à une bande de Möbius, D est homéomorphe à un disque fermé et $M \cap D = \partial M = \partial D$ est homéomorphe à \mathbb{S}^1 , dans la suite on identifie $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$, M et D avec leur images $f(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2)$, $f(M)$ et $f(D)$ dans \mathbb{R}^3 .

Le complémentaire de la bande de Möbius $\mathbb{R}^3 \setminus M$ se rétracte par déformation sur $\mathbb{R}^3 \setminus C$ où C est le cercle central de M , homéomorphe à \mathbb{S}^1 . Alors d'après le Corollaire 3.41 et la Proposition 3.56, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$H_n(\mathbb{R}^3 \setminus M) \simeq H_n(\mathbb{R}^3 \setminus C) \simeq H_n(\mathbb{S}^1) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n \in \{0, 1, 2\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et on en déduit qu'un générateur de $H_1(\mathbb{R}^3 \setminus M) \simeq H_1(\mathbb{S}^1)$ est donné par la classe d'un 1-simplexe singulier $\sigma : \Delta^1 \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus M$ dont l'image est un cercle enlacé autour de M .

De plus le bord de la bande Möbius ∂M est homéomorphe à \mathbb{S}^1 . Alors d'après la Proposition 3.56, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$H_n(\mathbb{R}^3 \setminus \partial M) \simeq H_n(\mathbb{S}^1) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n \in \{0, 1, 2\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et on en déduit qu'un générateur de $H_1(\mathbb{R}^3 \setminus \partial M) \simeq H_1(\mathbb{S}^1)$ est donné par la classe d'un 1-simplexe singulier $\tau : \Delta^1 \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \partial M$ dont l'image est un cercle enlacé autour de ∂M avec la même orientation que σ .

On considère $i : \mathbb{R}^3 \setminus M \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \partial M$ l'inclusion canonique. Alors la composition $i \circ \sigma$ est homotope à deux cercles enlacés autour de ∂M avec la même orientation que σ et ayant un point d'intersection :

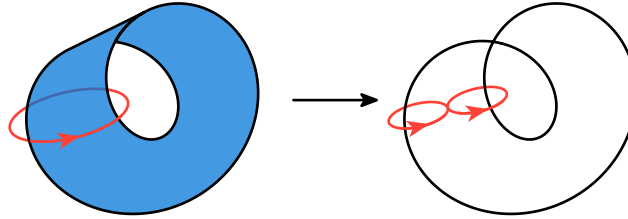


Fig. 11. – Homotopie de l'inclusion de σ dans $\mathbb{R}^3 \setminus M$.

Alors puisque leur orientation est la même, la classe des deux cercles dans $H_1(\mathbb{R}^3 \setminus \partial M)$ est la même, c'est-à-dire $\bar{\tau}$, on en déduit que $H_1(i)(\bar{\sigma}) = 2\bar{\tau}$, donc $H_1(i)$ est la multiplication par 2.

Le disque fermé D est homéomorphe à \mathbb{B}^2 . Alors d'après la Proposition 3.54, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$H_n(\mathbb{R}^3 \setminus D) \simeq H_n(\mathbb{S}^2) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n \in \{0, 2\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors d'après le Théorème de Mayer-Vietoris la suite suivante est exacte en $H_1(\mathbb{R}^3 \setminus \partial M)$:

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{H_1(i)} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_0} H_0(\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2)$$

Par exactitude de la suite, on a $\ker(\partial_0) = \text{im}(H_1(i)) = 2\mathbb{Z}$, d'où $\partial_0(1) \neq 0$ et $2\partial_0(1) = \partial_0(2) = 0$, donc $\partial_0(1)$ est un élément non-nul d'ordre 2 de $H_0(\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2)$.

Mais d'après la [Proposition 3.48](#) $H_0(\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2)$ est un groupe abélien libre, donc il n'existe aucun élément non-nul d'ordre 2 de $H_0(\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2)$, d'où une contradiction. Donc il n'existe pas de plongement du plan projectif réel $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 .

□

Conclusion

Démonstration du Problème du rectangle inscrit. Soit C une courbe de Jordan.

Pour commencer, au lieu de considérer un rectangle comme 4 sommets, on va considérer un rectangle comme 2 paires de sommets formant les diagonales :

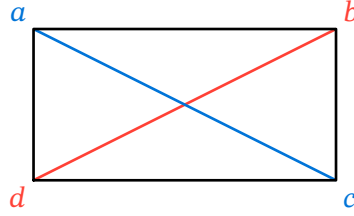


Fig. 12. – 2 paires de sommets formant un rectangle.

On note $P := C \times C$ l'ensemble des paires de points de C . Cette représentation d'un rectangle nous permet de le caractériser de la manière suivante, 2 paires non-ordonnées de P forment un rectangle si et seulement si elles sont distinctes, ont le même milieu et ont la même distance.

Le fait que les paires soient non-ordonnées est très important, on va donc considérer le quotient de P par la relation d'équivalence \sim où pour tout $(u, v) \in P$, on a $(u, v) \sim (v, u)$.

Maintenant que l'on a caractérisé un rectangle par cette propriété, on va définir une fonction qui regroupe les informations dont nous avons besoin :

$$f : P \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}; (u, v) \mapsto \left(\frac{u+v}{2}, d(u, v) \right)$$

où $d(\cdot, \cdot)$ est la distance euclidienne. En parcourant toutes les paires de P cette fonction dessine une surface dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^3$:

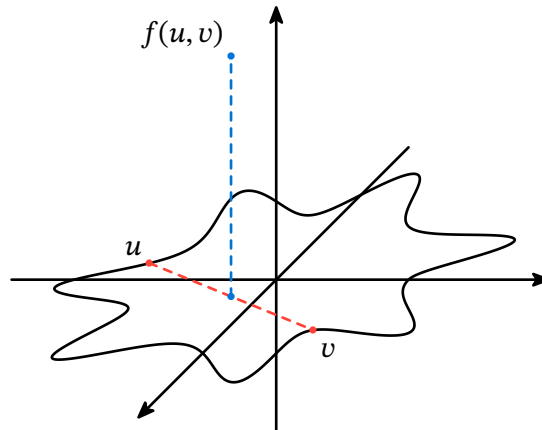


Fig. 13. – Image d'une paire de sommets par la fonction f .

Puisque chacune de ses composantes est continue, la fonction f est continue. De plus puisque pour tout $(u, v) \in P$, on a $f(u, v) = f(v, u)$, la fonction f passe bien au quotient pour la relation d'équivalence \sim et induit une fonction continue $\varphi : P/\sim \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Ainsi 2 paires non-ordonnées de sommets $\bar{p}, \bar{q} \in P/\sim$ forment un rectangle si et seulement si elles sont distinctes et $\varphi(\bar{p}) = \varphi(\bar{q})$, donc montrer l'existence d'un rectangle inscrit dans C revient à montrer que la fonction φ n'est pas injective.

Supposons par l'absurde que la fonction φ est injective.

Puisque P/\sim est compact et φ est une bijection continue de P/\sim sur son image $\varphi(P/\sim)$, d'après le *Théorème 4.2* φ est un homéomorphisme de P/\sim sur son image $\varphi(P/\sim)$.

Puisque la courbe de Jordan C est paramétrée par une fonction continue $\gamma_C : [0, 1] \rightarrow C$, on peut paramétrer P/\sim par la fonction $\gamma := (\gamma_C, \gamma_C) : [0, 1]^2 \rightarrow P/\sim$:

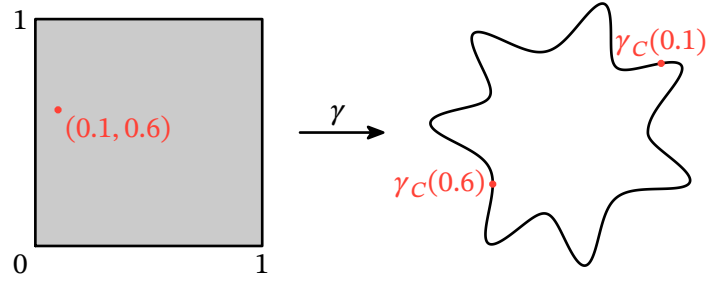


Fig. 14. – Image d'un point du carré par la fonction $\gamma_C \cdot \gamma_C$.

Mais ce paramétrage n'est pas un homéomorphisme, en effet $\gamma_C(0) = \gamma_C(1)$, et pour tout $t \in [0, 1]$, on a $\gamma(0, t) = \gamma(1, t)$ et $\gamma(t, 0) = \gamma(t, 1)$. On va donc considérer le quotient de $[0, 1]^2$ par la relation d'équivalence \sim_1 où pour tout $t \in [0, 1]$, on a $(0, t) \sim_1 (1, t)$ et $(t, 0) \sim_1 (t, 1)$, on représente cette identification par des flèches :

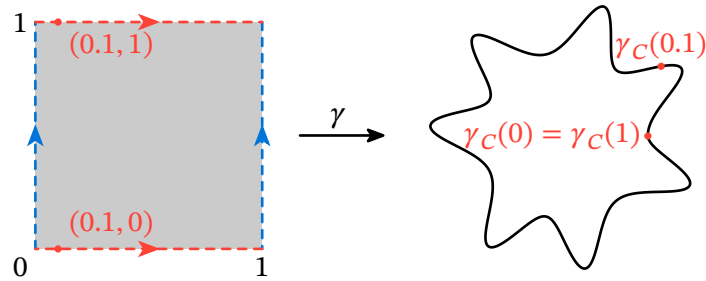


Fig. 15. – Quotient du carré par la relation \sim_1 .

De plus pour tout $(a, b) \in [0, 1]^2$, on a $\gamma(a, b) = \gamma(b, a)$ car les paires sont non-ordonnées. On va donc considérer le quotient de $[0, 1]^2$ par la relation d'équivalence \sim_2 où pour tout $(a, b) \in [0, 1]^2$, on a $(a, b) \sim_2 (b, a)$, on représente cette identification en pliant le carré le long de la droite $y = x$:

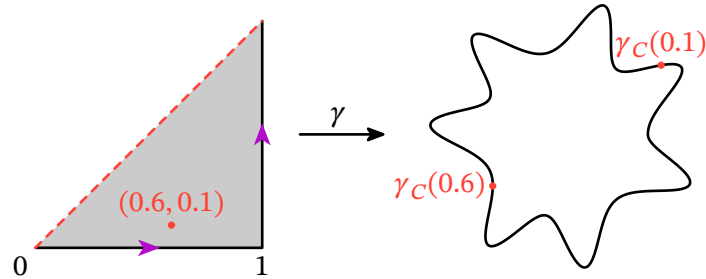


Fig. 16. – Quotient du carré par la relation \sim_2 .

On découpe le long de la hauteur du triangle pour pouvoir recoller les flèches :

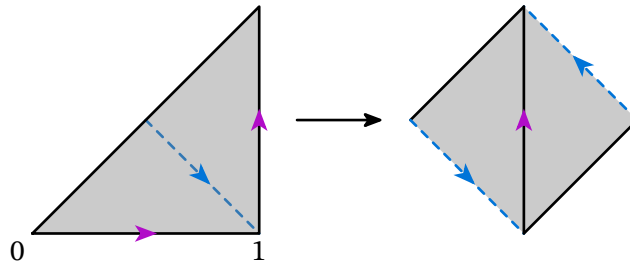


Fig. 17. – Apparition d'une bande de Möbius.

La figure ainsi obtenue est une bande de Möbius.

On a créé un homéomorphisme d'une bande de Möbius aux paires non-ordonnées de la courbe de Jordan P/\sim , puisque φ est un homéomorphisme de P/\sim sur son image $\varphi(P/\sim) \subset \mathbb{R}^3$, par composition on obtient donc un plongement d'une bande de Möbius dans \mathbb{R}^3 .

Ce plongement a une particularité, il envoie le bord de la bande de Möbius sur la courbe de Jordan C dans \mathbb{R}^3 , en effet les points sur le bord de la bande de Möbius sont les points sur la diagonale du carré, c'est-à-dire les points de la forme $(a, a) \in [0, 1]^2$, que le paramétrage γ envoie sur $(u, u) \in P$ et qui vérifie $f(u, u) = (u, 0)$ appartient à la courbe de Jordan C dans \mathbb{R}^3 .

D'après le théorème de Jordan la courbe de Jordan C est homéomorphe à un cercle et son intérieur est homéomorphe à un disque, or d'après la [Proposition 4.15](#) l'espace obtenu en collant une bande de Möbius à un disque fermé le long de leur bord est le plan projectif réel $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$, on obtient donc un plongement du plan projectif réel $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ dans \mathbb{R}^3 .

Mais d'après le [Théorème 4.17](#) il n'existe pas de plongement du plan projectif réel $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ dans \mathbb{R}^3 , d'où une contradiction, φ n'est pas injective.

Donc il existe un rectangle inscrit dans la courbe de Jordan C .

□

Annexe

Théorème 4.1 (Projection stéréographique). $\mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ est homéomorphe à \mathbb{R}^n où $N := (0, \dots, 0, 1)$ est le pôle nord de \mathbb{S}^n .

Démonstration. On définit une application :

$$f : \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n; (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right)$$

elle est bien définie, continue, et son inverse est donnée par :

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{S}^n \setminus \{N\}; y := (y_1, \dots, y_n) \mapsto \left(\frac{2y_1}{\|y\|^2 + 1}, \dots, \frac{2y_n}{\|y\|^2 + 1}, \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1} \right)$$

qui est bien définie et continue. Donc f est bien un homéomorphisme entre $\mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ et \mathbb{R}^n . \square

Théorème 4.2. Soit K un compact de \mathbb{R}^n , L une partie de \mathbb{R}^n et $f : K \rightarrow L$ une bijection continue. Alors f est un homéomorphisme.

Démonstration. Notons $g := f^{-1}$. Soit F un fermé de K . Puisque K est compact et F est fermé, F est compact. Puisque f est continue et F est compact, $g^{-1}(F) = f(F)$ est compact. Puisque $g^{-1}(F)$ est compact, $g^{-1}(F)$ est fermé. Donc $f^{-1} = g$ est continue et f est bien un homéomorphisme. \square

Bibliographie

- [1] Eduard Looijenga, *Algebraic Topology - an introduction*. 2010.
- [2] Allen Hatcher, *Algebraic Topology*. 2001.
- [3] Grégory Ginot, *Topologie Algébrique*. 2019.
- [4] Math3ma, « Clever Homotopy Equivalence ».