

Calcul différentiel 2

Table des matières

1. Calcul différentiel	2
1.1. Inversion et fonctions implicites	2
1.1.1. Théorèmes d'inversion locale et globale	3
1.1.2. Théorème des fonctions implicites	4
1.2. Sous-variétés de \mathbb{R}^n	6
1.2.1. Sous-variétés	6
1.2.2. Espace tangent à une sous-variété	7
1.2.3. Extrema liés	8
2. Équations différentielles	9
2.1. Résultats fondamentaux	9
2.1.1. Équations différentielles du premier ordre	9

1. Calcul différentiel

1.1. Inversion et fonctions implicites

Définition 1.1. Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \cup \{+\infty\}$, U et V deux ouverts de \mathbb{R}^n , et $f : U \rightarrow V$ une application. On dit que f est un C^k -difféomorphisme de U sur V si :

- (1) f est bijective de U sur V ,
- (2) f est de classe C^k sur U ,
- (3) f^{-1} est de classe C^k sur V .

Remarque 1.2. Soit $f : U \rightarrow V$ un C^k -difféomorphisme, $x \in U$ et $y \in V$. Alors

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

$$f(f^{-1}(y)) = y$$

de plus en appliquant le théorème de composition des différentielles

$$(d_{f(x)}f^{-1}) \circ (d_x f) = \text{id}$$

$$(d_{f^{-1}(y)}f) \circ (d_y f^{-1}) = \text{id}$$

donc $d_x f$ est inversible avec $(d_x f)^{-1} = d_{f(x)}f^{-1}$.

Exemples 1.3.

1. On considère $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n; x \mapsto Ax$ où $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, alors f est C^∞ comme fonction linéaire et bijective de réciproque $y \mapsto A^{-1}y$. On remarque que f^{-1} est C^∞ comme fonction linéaire, donc f est un C^∞ -difféomorphisme.
2. On considère $f : U \rightarrow V; (x, y) \mapsto (x + y, xy)$ où U et V sont définis par

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y\}$$

$$V = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid s^2 - 4t > 0\}$$

alors f est un C^∞ difféomorphisme de U sur V , en effet

- a. f est bijective de U sur V , puisque pour $(x, y) \in U$ on a

$$(x + y)^2 - 4xy = x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 > 0$$

donc $f(U) \subset V$, réciproquement pour $(s, t) \in V$ on cherche $(x, y) \in U$ tels que

$$\begin{cases} x + y = s \\ xy = t \end{cases}$$

c'est-à-dire x et y sont racines du polynôme $X^2 - sX + t$, comme $x > y$ on a

$$\begin{cases} x = \frac{s + \sqrt{s^2 - 4t}}{2} \\ y = \frac{s - \sqrt{s^2 - 4t}}{2} \end{cases}$$

donc $V \subset f(U)$, f est bijective,

- b. f est de classe C^∞ sur U car polynomiale,
- c. f^{-1} est de classe C^∞ sur V car $(s, t) \mapsto s^2 - 4t$ et $\sqrt{\cdot}$ sont C^∞ sur V .
3. On considère $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^3$, alors f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} et bijective. Mais son inverse $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y \mapsto \sqrt[3]{y}$, n'est pas dérivable en 0 donc f n'est pas un C^∞ -difféomorphisme.

1.1.1. Théorèmes d'inversion locale et globale

Théorème 1.4. (Théorème d'inversion locale) Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n , $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe C^k et a un point de U . Si $d_a f$ est un isomorphisme, alors il existe un voisinage ouvert V de a et un voisinage ouvert W de $f(a)$ tels que $f : V \rightarrow W$ est un C^k -difféomorphisme.

Théorème 1.5. (Théorème d'inversion globale) Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe C^k . Si :

- (1) f est injective sur U ,
- (2) $\forall x \in U, d_x f$ est un isomorphisme.

Alors $f(U)$ est un ouvert de \mathbb{R}^n et $f : U \rightarrow f(U)$ est un C^k -difféomorphisme.

Démonstration. Soit $x \in U$, alors d'après le théorème d'inversion locale il existe un voisinage ouvert V_x de x et un voisinage ouvert $W_{f(x)}$ de $f(x)$ tels que $f : V_x \rightarrow W_{f(x)}$ est un C^k -difféomorphisme. En particulier $W_{f(x)} = f(V_x)$, et on en déduit que

$$f(U) = \bigcup_{x \in U} W_{f(x)}$$

est un ouvert de \mathbb{R}^n comme union d'ouverts. De plus puisque f est injective sur U , on en déduit que f est bijective de U sur $f(U)$. Enfin puisque la régularité est une notion locale f et f^{-1} sont respectivement de classe C^k sur U et $f(U)$. Donc $f : U \rightarrow f(U)$ est un C^k -difféomorphisme. \square

Exemples 1.6.

1. On considère $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; (r, \theta) \mapsto (f_1, f_2) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$, alors
 - a. f est de classe C^∞ sur \mathbb{R}^2 puisque \cos et \sin sont de classe C^∞ .
 - b. On pose $U :=]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[$, qui est un ouvert de \mathbb{R}^2 sur lequel f est injective.
 - c. Soit $(r, \theta) \in U$, alors

$$J_f(r, \theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

et $\det(J_f(r, \theta)) = r \cos^2(\theta) + r \sin^2(\theta) = r > 0$, donc $d_{(r, \theta)} f$ est inversible.

Donc d'après le **Théorème 1.5** $f : U \rightarrow f(U)$ est un C^∞ -difféomorphisme.

2. On considère $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3; (r, \theta, \varphi) \mapsto (f_1, f_2, f_3) = (r \cos(\theta) \cos(\varphi), r \sin(\theta) \cos(\varphi), r \sin(\varphi))$.
 - a. f est de classe C^∞ sur \mathbb{R}^3 puisque \cos et \sin sont de classes C^∞ .
 - b. On pose $U :=]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, qui est un ouvert de \mathbb{R}^3 sur lequel f est injective.
 - c. Soit $(r, \theta, \varphi) \in U$, alors

$$J_f(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \cos(\varphi) & -r \sin(\theta) \cos(\varphi) & -r \cos(\theta) \sin(\varphi) \\ \sin(\theta) \cos(\varphi) & r \cos(\theta) \cos(\varphi) & -r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & 0 & r \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

et le déterminant de cette matrice est

$$\begin{aligned} \det(J_f(r, \theta, \varphi)) &= \sin(\varphi)(r^2 \sin^2(\theta) \cos(\varphi) \sin(\varphi) + r^2 \cos^2(\theta) \cos(\varphi) \sin(\varphi)) \\ &\quad + r \cos(\varphi)(r \cos^2(\theta) \cos^2(\varphi) + \sin^2(\theta) \cos^2(\varphi)) \\ &= \sin^2(\varphi) r^2 \cos(\varphi) + \cos^2(\varphi) r^2 \cos(\varphi) = r^2 \cos(\varphi) \neq 0 \end{aligned}$$

donc $d_{(r, \theta, \varphi)} f$ est inversible.

Donc d'après le **Théorème 1.5** $f : U \rightarrow f(U)$ est un C^∞ -difféomorphisme.

3. On pose $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et on considère $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2; (x, y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$, alors

- a. f est de classe C^∞ sur U puisque f est polynômiale.
c. Soit $(x, y) \in U$, alors

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

et $\det(J_f(x, y)) = 4(x^2 + y^2) > 0$ sur U , donc $d_{(x,y)}f$ est inversible.

Donc d'après le **Théorème 1.4** $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ est un C^∞ -difféomorphisme local en tout point de U . Mais $f(-1, -1) = f(1, 1)$, donc $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ n'est pas C^∞ -difféomorphisme global.

- b. On pose $U' := \{(x, y) \in U \mid x > 0\}$, qui est un ouvert de \mathbb{R}^2 sur lequel f est injective. En effet si $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$, alors on pose

$$\begin{cases} (x_1, y_1) = r_1(\cos(\theta_1), \sin(\theta_1)) \\ (x_2, y_2) = r_2(\cos(\theta_2), \sin(\theta_2)) \end{cases} \quad \text{où } r_1, r_2 > 0 \text{ et } \theta_1, \theta_2 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

et on trouve

$$\begin{cases} r_1^2 \cos(2\theta_1) = r_2^2 \cos(2\theta_2) \\ r_1^2 \sin(2\theta_1) = r_2^2 \sin(2\theta_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \theta_1 = \theta_2 \mod 2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \theta_1 = \theta_2 \end{cases}$$

donc $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ et f est bien injective.

Donc d'après le **Théorème 1.5** $f : U' \rightarrow f(U')$ est un C^∞ -difféomorphisme.

1.1.2. Théorème des fonctions implicites

Théorème 1.7. (Théorème des fonctions implicites) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, (a, b) un point de U et $f = (f_1, \dots, f_q) : U \rightarrow \mathbb{R}^q$ une application de classe C^k . Si :

- (1) $f(a, b) = 0$,
- (2) la jacobienne de f par rapport à la deuxième variable en (a, b) est inversible.

Alors il existe un voisinage ouvert V de a , un voisinage ouvert W de b , avec $V \times W \subset U$, et une application $\varphi : V \rightarrow W$ de classe C^∞ qui vérifie $b = \varphi(a)$, tels que :

$$\begin{cases} (x, y) \in V \times W \\ f(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in V \\ y = \varphi(x) \end{cases}.$$

De plus pour tout $x \in V$, $\frac{d\varphi}{dx}(x) = -\left(\frac{df}{dy}(x, \varphi(x))\right)^{-1} \circ \frac{df}{dx}(x, \varphi(x))$.

Démonstration. On considère l'application

$$g : U \rightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q; (x, y) \mapsto (x, f(x, y)).$$

Alors la matrice jacobienne de g en (a, b) est

$$J_g(a, b) = \begin{pmatrix} I_p & 0_q \\ \cdot & \frac{df}{dy}(a, b) \end{pmatrix}$$

et son déterminant $\det(J_g(a, b))$ est non nul par hypothèse.

Donc d'après le **Théorème 1.4** il existe un voisinage ouvert U_1 de (a, b) et un voisinage ouvert U_2 de $g(a, b) = (a, f(a, b))$ tels que $g : U_1 \rightarrow U_2$ est un C^k -difféomorphisme.

En particulier il existe $\psi : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^q$ telle que pour tout $(x, y) \in U_2$ on a $g^{-1}(x, y) = (x, \psi(x, y))$.

On prend $V \times W \subset U_1$ et on pose $\varphi : V \rightarrow W; x \mapsto \psi(x, 0)$, alors l'équivalence du théorème est bien vérifiée et il suffit de dériver pour obtenir l'égalité. \square

Exemples 1.8.

1. On considère $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$ et $\mathbb{S}^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$. Les dérivées partielles de f sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y.$$

On remarque que pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant

$$\begin{cases} (x, y) \in \mathbb{S}^1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (x, y) \in \mathbb{S}^1 \\ y \neq 0 \end{cases}$$

on a $(x, y) \in \mathbb{S}^1 \setminus \{(1, 0), (-1, 0)\}$. On peut donc appliquer le **Théorème 1.7**, au voisinage V de x , \mathbb{S}^1 est le graphe d'une application $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$. De plus on a

$$\forall x \in V, x^2 + \varphi(x)^2 - 1 = 0$$

en dérivant on trouve

$$\forall x \in V, 2x + 2\varphi(x)\varphi'(x) = 0$$

et donc $\varphi'(x) = -\frac{x}{\varphi(x)}$.

2. On considère $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}; (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 1$, $\mathbb{S}^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 0\}$. Les dérivées partielles de f sont

$$\forall a \in \{x, y, z\}, \frac{\partial f}{\partial a}(x, y, z) = 2a.$$

On remarque que pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant

$$\begin{aligned} \begin{cases} (x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \neq 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} (x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \\ z \neq 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \\ (x, y, z) \neq (a, b, 0) \text{ où } (a, b) \in \mathbb{S}^1 \end{cases} \end{aligned}$$

on a $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \setminus (\mathbb{S}^1 \times \{0\})$. On peut donc appliquer le **Théorème 1.7**, au voisinage V de (x, y) , \mathbb{S}^2 est le graphe d'une application $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$. De plus on a

$$\forall (x, y) \in V, x^2 + y^2 + \varphi(x, y)^2 - 1 = 0$$

en dérivant par rapport à x on trouve

$$\forall (x, y) \in V, 2x + 2\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\varphi(x, y) = 0$$

donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{x}{\varphi(x, y)}$, et en dérivant par rapport à y on trouve

$$\forall (x, y) \in V, 2y + 2\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\varphi(x, y) = 0$$

donc $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{y}{\varphi(x, y)}$.

1.2. Sous-variétés de \mathbb{R}^n

1.2.1. Sous-variétés

Définition 1.9. Soit X une partie de \mathbb{R}^n . On dit que X est une *sous-variété de \mathbb{R}^n de classe C^k et de dimension $d \in \mathbb{N}$* si pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U dans \mathbb{R}^n , un voisinage ouvert V de x et un C^k -difféomorphisme $\varphi : U \rightarrow V$ tels que :

$$V \cap X = \varphi(U \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})).$$

On appelle *codimension* de X l'entier $n - d$.

Remarque 1.10. Une sous-variété de dimension 1 est une *courbe*, une sous-variété de dimension 2 est une *surface*, une sous-variété de dimension $n - 1$ (codimension 1) est une *hypersurface*

Exemples 1.11.

1. Une courbe dans \mathbb{R}^2 est difféomorphe à un segment.
2. Un ouvert de \mathbb{R}^n est une sous-variété de dimension n .
3. On considère le cercle \mathbb{S}^1 , on pose $U' :=]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[$, $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{]-\infty, 0] \times \{0\} \}$, ainsi que $\psi : U' \rightarrow V; (r, \theta) \mapsto r(\cos(\theta), \sin(\theta))$ qui est un difféomorphisme de classe C^∞ . On a

$$\begin{aligned} V \cap \mathbb{S}^1 &= \mathbb{S}^1 \setminus \{(-1, 0)\} \\ &= \psi(\{1\} \times]-\pi, \pi[) \\ &= \psi(U' \cap (\{1\} \times \mathbb{R})) \end{aligned}$$

on prend alors $U :=]-\pi, \pi[\times]0, +\infty[$ et $\varphi : U \rightarrow V; (\theta, r) \mapsto \psi(r + 1, \theta)$, donc \mathbb{S}^1 est bien une sous-variété de \mathbb{R}^2 de classe C^∞ et de dimension 1.

Définition 1.12. Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n , $a \in U$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application de classe C^k . On dit que f est une *immersion* en a si $d_a f$ est injective.

Définition 1.13. Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n , $a \in U$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application de classe C^k . On dit que f est une *submersion* en a si $d_a f$ est surjective.

Théorème 1.14. Soit X une partie de \mathbb{R}^n . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) (*redressement*) X est une sous-variété de \mathbb{R}^n classe C^k et de dimension $d \in \{0, \dots, n\}$.
- (2) (*implicite*) Pour tout $a \in X$, il existe un voisinage ouvert U de a dans \mathbb{R}^n et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$ une submersion en a de classe C^k tels que $U \cap X = f^{-1}(f(a))$.

Démonstration.

(1) \Rightarrow (2) : Supposons que X est une sous-variété de \mathbb{R}^n de classe C^k et de dimension d .

Soit $a \in X$, alors il existe un voisinage ouvert U dans \mathbb{R}^n , un voisinage ouvert V de a et un C^k -difféomorphisme $\varphi : U \rightarrow V$ tels que

$$V \cap X = \varphi(U \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})).$$

On écrit $\varphi^{-1} = (g_1, \dots, g_d, f_1, \dots, f_{n-d})$, alors

$$V \cap X = \{x \in V \mid f_1(x) = \dots = f_{n-d}(x) = 0\}.$$

On pose $f := (f_1, \dots, f_{n-d})$, puisque φ est un difféomorphisme on en déduit que $d_a f$ est surjective, donc f est une submersion en a de classe C^k .

(2) \Rightarrow (1) : Supposons que les hypothèses soient vérifiées. Sans perte de généralité, on suppose que $f(a) = 0$ et que $\det(J_f(a)) \neq 0$. On pose $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = (x_1 - a_1, \dots, x_d - a_d, f_1(x_{d+1}), \dots, f_{n-d}(x_n))$$

alors $\det(J_\psi(a)) = \det(J_f(a)) \neq 0$, quitte à restreindre V , ψ est un C^k -difféomorphisme de V sur $U := \psi(V)$. En prenant $\varphi := \psi^{-1}$, on a bien

$$V \cap X = \varphi(U \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})).$$

□

Exemple 1.15. On considère le cercle \mathbb{S}^2 décrit par $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}; (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$. Alors f est de classe C^k sur \mathbb{R}^3 et $\det(\text{Jac}_f) \neq 0$ sur \mathbb{S}^2 , donc f est une submersion en tout point de \mathbb{S}^2 . On en déduit que \mathbb{S}^2 est une sous-variété de \mathbb{R}^3 de classe C^k et de dimension $3 - 1 = 2$.

1.2.2. Espace tangent à une sous-variété

Définition 1.16. Soit X une sous-variété de \mathbb{R}^n de classe C^k et de dimension d , $a \in X$ un point et v un vecteur de \mathbb{R}^n . On dit que v est *tangent* à X en a s'il existe $\varepsilon > 0$ et une courbe $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k vérifiant :

- (1) $\gamma(0) = a$,
- (2) $\gamma'(0) = v$,
- (3) $\text{im}(\gamma) \subset X$.

On appelle *espace tangent* à X en a , noté $T_a X$, l'ensemble des vecteurs tangents à X en a .

Exemples 1.17. Soit X une sous-variété de \mathbb{R}^n de classe C^k et de dimension d et $a \in X$ un point.

1. Le vecteur nul est tangent à X en tout point, avec $\gamma : t \mapsto a$.
2. Pour tout vecteur v tangent à X en a , pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λv est tangent à X en a .
3. Si X est un ouvert de \mathbb{R}^n , alors pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, v est tangent à X en a .
4. Si X est un point, alors le seul vecteur tangent à X en a est 0.

Théorème 1.18. Soit X une sous-variété de \mathbb{R}^n de classe C^k et de dimension d et $a \in X$ un point. Alors l'espace tangent $T_a X$ est un espace vectoriel de dimension d et on a les caractérisations :

- (1) S'il existe un voisinage ouvert U de \mathbb{R}^n , un voisinage ouvert V de a et un C^k -difféomorphisme $\varphi : U \rightarrow V$ vérifiant $V \cap X = \varphi(U \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\}))$, alors $T_a X = d_{\varphi^{-1}(a)}\varphi(\mathbb{R}^d \times \{0\})$.
- (2) S'il existe un voisinage ouvert V de a et une submersion en a $f : V \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$ de classe C^k vérifiant $V \cap X = f^{-1}(f(a))$, alors $T_a X = \ker(d_a f)$.

Démonstration.

- (1) Supposons sans perte de généralité que $\varphi^{-1}(a) = 0$. Soit $v \in T_a X$, alors il existe $\varepsilon > 0$ et une courbe $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow V \cap X$ de classe C^k vérifiant $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$. On pose $\delta := \varphi^{-1}(\gamma)$, alors on a $\text{im}(\delta) \subset U \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})$, $\delta(0) = 0$ et

$$\delta'(t) = d_{\gamma(t)}\varphi^{-1}(\gamma'(t))$$

d'où $\delta'(0) = d_a\varphi^{-1}(v)$ et $v = d_a\varphi^{-1}(\delta'(0))$, donc $T_a X \subset d_a\varphi^{-1}(\mathbb{R}^d \times \{0\})$.

Réciproquement, on montre de la même manière que $d_a\varphi^{-1}(\mathbb{R}^d \times \{0\}) \subset T_a X$.

Donc $T_a X = d_a\varphi^{-1}(\mathbb{R}^d \times \{0\})$, on en déduit que $T_a X$ est un espace vectoriel de dimension d .

- (2) Soit $v \in T_a X$, alors il existe $\varepsilon > 0$ et une courbe $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow V \cap X$ de classe C^k vérifiant $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$. Soit $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, alors

$$\gamma(t) \in V \cap X \Rightarrow (f \circ \gamma)(t) = f(a) \Rightarrow (f \circ \gamma)'(t) = 0$$

or $(f \circ \gamma)(t) = d_{\gamma(t)}f(\gamma'(t))$ et $d_a f(v) = 0$, donc $T_a X \subset \ker(d_a f)$. L'égalité des dimensions entraîne l'égalité des espaces.

□

Remarque 1.19. S'il existe un voisinage ouvert V de a et une submersion en a $f : V \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$ de classe C^k vérifiant $V \cap X = f^{-1}(f(a))$, alors $T_a X = \text{Vect}(\nabla_{f_1}(a), \dots, \nabla_{f_{n-d}}(a))^\perp$.

1.2.3. Extrema liés

Théorème 1.20. (Théorèmes des extrema liés) Soit X une sous-variété de \mathbb{R}^n de classe C^k et de dimension d , $a \in X$ un point, U un ouvert de \mathbb{R}^n et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^k .

Si f restreinte à X admet un extremum local en a et s'il existe une submersion $g : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$ de classe C^k telle que, en notant $g = (g_1, \dots, g_{n-d})$, on ait

$$X = \{x \in U \mid g_1(x) = \dots = g_{n-d}(x) = 0\}.$$

Alors il existe des uniques $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-d} \in \mathbb{R}$ tels que

$$\nabla_f(a) = \lambda_1 \nabla_{g_1}(a) + \dots + \lambda_{n-d} \nabla_{g_{n-d}}(a).$$

Ces réels sont appelés les *multiplieurs de Lagrange*.

Exemple 1.21. On cherche les extrema de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; (x, y) \mapsto x + y$, que l'on restreint à l'ensemble $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + y^4 = 1\}$.

On remarque que M est une sous-variété de \mathbb{R}^2 de classe C^∞ , en effet $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; (x, y) \mapsto x^4 + y^4$ est une submersion en tout point de M . Si $f|_M$ admet un extremum local en un point $(a, b) \in M$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla(f)(a, b) = \lambda \nabla(g)(a, b)$. On a donc le système suivant

$$\begin{cases} 1 = \lambda 4a^3 \\ 1 = \lambda 4b^3 \end{cases}$$

et on en déduit que $\lambda \neq 0$ et $a^3 = b^3 = \frac{1}{4\lambda}$, d'où $a = b$.

Comme $(a, b) \in M$ on a $a^4 + b^4 = 1$, d'où $2a^4 = 1$, donc $a = b = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$. On a deux extrema possibles

$$m_1 := \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \right) \text{ et } m_2 := \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}} \right)$$

comme f est continue et M est compact (comme fermé borné de \mathbb{R}^2), f admet au moins un minimum global et un maximum global, elle en a donc exactement deux : m_1 et m_2 .

On a $f(m_1) = -f(m_2) = \frac{2}{\sqrt[4]{2}}$, donc f atteint son minimum en m_2 et son maximum en m_1 .

2. Équations différentielles

2.1. Résultats fondamentaux

2.1.1. Équations différentielles du premier ordre

Définition 2.1. Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue. On appelle *équation différentielle d'ordre 1 dans \mathbb{R}^n* , notée (E) , une équation de la forme suivante :

$$y' = f(t, y)$$

on dit que t est la *variable de temps* et que y est la *variable d'état*.

Définition 2.2. Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1. On appelle *solution* de (E) un couple de la forme (I, y) où I est un intervalle de \mathbb{R} et $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction dérivable sur I vérifiant :

- (1) $\forall t \in I, (t, y(t)) \in U$,
- (2) $\forall t \in I, y'(t) = f(t, y(t))$.

Remarque 2.3. Dans le cas où I n'est pas ouvert, la dérivabilité s'entend comme la dérivabilité à droite ou à gauche (selon l'extrémité).

Exemples 2.4.

1. On considère l'équation différentielle d'ordre 1 donnée par $y' = y$. Le couple $(]1, 2[, t \mapsto e^t)$ est une solution de cette équation.
2. L'équation donnée par $y' = y^2 + t$ est une équation différentielle d'ordre 1 sur \mathbb{R} .
3. L'équation donnée par $y' = \frac{y+1}{t \ln(t)}$ est une équation différentielle d'ordre 1 sur \mathbb{R} . Le couple $(]0, 1[, t \mapsto -1 + \ln(t))$ est une solution de cette équation.

Définition 2.5. Soit (E) une équation différentielle et $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. On appelle *problème de Cauchy* avec donnée (t_0, y_0) le système composé des équations (E) et $y(t_0) = y_0$. On dit que l'équation $y(t_0) = y_0$ est la *condition initiale* (ou de Cauchy).

Exemple 2.6. La fonction $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; t \mapsto 2e^{-t}$ est une solution de l'équation différentielle $y' = -y$ de condition initiale $y(0) = 2$.

Définition 2.7. Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $y' = f(x, y)$ une équation différentielle d'ordre 1. Soit M un point de U , on note \mathcal{D}_M la droite passant par M et de coefficient directeur $f(M)$. On appelle *champ des tangentes* l'application $M \mapsto \mathcal{D}_M$ associée à l'équation $y' = f(x, y)$. On appelle *courbe intégrale* une courbe \mathcal{C} de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ qui a pour tangente en chaque point M la droite \mathcal{D}_M du champ des tangentes.

Remarque 2.8. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Alors $\mathcal{D}_{(x_0, y_0)}$ a pour équation $y - y_0 = f(x_0, y_0)(x - x_0)$.

Exemples 2.9.

1. On considère l'équation différentielle $y' = 0$, ici $f \equiv 0$. Soit $M := (x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Alors \mathcal{D}_M est la droite d'équation $y = y_0$ et les courbes intégrales sont les droites \mathcal{D}_M .
2. On considère l'équation différentielle $y' = y$, ici $f(x, y) = y$. Soit $M := (x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Alors \mathcal{D}_M est la droite d'équation $y = y_0 + y_0(x - x_0)$.