Espaces complets

Table des matières

1. Suites de Cauchy

Définition 1.1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de *Cauchy* si elle vérifie :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N}, p \geq N \text{ et } q \geq N \Rightarrow \left\|x_p - x_q\right\| \leq \varepsilon.$$

Proposition 1.2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de Cauchy, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :
(1) $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.
(2) $(\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.
(3) $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

Démonstration.

(1) Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, p \geq N_1 \text{ et } q \geq N_1 \Rightarrow \left\|x_p - x_q\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

et puisque $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, p \geq N_2 \text{ et } q \geq N_2 \Rightarrow \left\|y_p - y_q\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons $N \coloneqq \max(N_1, N_2)$. Soit $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \geq N$ et $q \geq N$. Alors

$$\left\|x_p + y_p - (x_q + y_q)\right\| \leq \left\|x_p - x_q\right\| + \left\|y_p - y_q\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

(2)

(3)

$\square$

Proposition 1.3. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Démonstration. Puisque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, p \geq N \text{ et } q \geq N \Rightarrow \left\|x_p - x_q\right\| \leq 1$$

en particulier en posant $q \coloneqq N$, on a

$$\forall p \in \mathbb{N}, p \geq N \Rightarrow \left\|x_p - x_N\right\| \leq 1$$

d'après l'inégalité triangulaire inversée, on a

$$\forall p \in \mathbb{N}, p \geq N \Rightarrow \left\|x_p\right\| \leq 1 + \|x_N\|.$$

Posons $M \coloneqq \max(\|x_0\|, \ldots, \|x_N\|, 1 + \|x_N\|)$. Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par M. $\square$

Proposition 1.4. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente. Alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, il existe $N \in \mathbb{N}$ et $\ell \in E$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \|x_n - \ell\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Soit $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \geq N$ et $q \geq N$. Alors

$$\left\|x_p - x_q\right\| = \left\|x_p - \ell + \ell - x_q\right\| \leq \left\|x_p - \ell\right\| + \left\|x_q - \ell\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. □

Proposition 1.5. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente, il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante, $N_2 \in \mathbb{N}$ et $\ell \in E$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_2 \Rightarrow \left\|x_{\varphi(n)} - \ell\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

et puisque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, p \geq N_1 \text{ et } q \geq N_1 \Rightarrow \left\|x_p - x_q\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

en particulier en posant $q \coloneqq \varphi(p) \geq p \geq N$, on a

$$\forall p \in \mathbb{N}, p \geq N \Rightarrow \left\|x_p - x_{\varphi(p)}\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$. Alors

$$\|x_n - \ell\| = \left\|x_n - x_{\varphi(n)} + x_{\varphi(n)} - \ell\right\| \leq \left\|x_n - x_{\varphi(n)}\right\| + \left\|x_{\varphi(n)} - \ell\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. □

2. Complétude

Définition 2.1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et A un sous-ensemble de E. On dit que A est *complet* si toute suite de Cauchy de A est convergente dans A. Si E est complet, on dit que E est un *espace de Banach*.

Exemples 2.2. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ et $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ sont des espaces de Banach.

Proposition 2.3. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et A un sous-ensemble de E. Si A est complet, alors A est fermé.

Démonstration. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A qui converge vers $\ell \in E$. Puisque $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Puisque A est complet, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans A, alors $\ell \in A$. Donc A est fermé. □

Proposition 2.4. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $A \subset B$ deux sous-ensembles de E. Si A est fermé et B est complet, alors A est complet.

Démonstration. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy d'éléments de A. Alors $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy d'éléments de B. Puisque B est complet, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans B. Mais puisque A est fermé, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans A. Donc A est complet. □

Proposition 2.5. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Si E est de dimension finie, alors E est un espace de Banach.

Démonstration. Notons d la dimension de E et $(e^1, \dots, e^d)$ une base de E. Puisque E est de dimension finie $\|\cdot\|$ est équivalente à $\|\cdot\|_\infty$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N}, p \geq N \text{ et } q \geq N \Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, d\}, \left|u_p^i - u_q^i\right| \leq \varepsilon$$

on en déduit que pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$, la suite $\left(x_n^i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et converge vers une limite $x^i \in \mathbb{R}$. Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $x \coloneqq (x^1, \dots, x^d) \in E$. Donc E est un espace de Banach. □

3. Complétude des espaces de fonctions continues

Proposition 3.1. Soit $\left(E, \|\cdot\|_E\right)$ et $\left(F, \|\cdot\|_F\right)$ deux espaces vectoriels normés, A un sous-ensemble de E et $\left(C_b^0(A, F), \|\cdot\|_\infty\right)$ l'espace vectoriel normé des fonctions continues et bornées de A dans F. Si F est un espace de Banach, alors $C_b^0(A, F)$ est aussi un espace de Banach.

Démonstration. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy d'éléments de $C_b^0(A, F)$. Soit $\varepsilon > 0$, alors puisque la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, p \geq N \text{ et } q \geq N \Rightarrow \forall a \in A, \left\|f_p(a) - f_q(a)\right\|_F \leq \varepsilon$$

en particulier, pour tout $a \in A$, la suite $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans F. Puisque F est complet, la suite $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a) \in F$. Montrons que la fonction f est continue et bornée.

On remarque en passant à la limite que l'on peut écrire

$$\forall q \in \mathbb{N}, q \geq N \Rightarrow \forall a \in A, \|f(a) - f_n(a)\| \leq \varepsilon$$

donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f. Puisque les f_n sont continues, la fonction f est continue.

De la même manière en remarque que pour tout $a \in A$, on a $\|f(a) - f_N(a)\|_F \leq 1$, par une inégalité triangulaire inversée, on obtient

$$\|f(a)\|_F \leq 1 + \|f_N(a)\|_F$$

donc la fonction f est bornée. □

4. Théorème du point fixe de Banach-Picard

Lemme 4.1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série à termes dans E. Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge absolument, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge simplement.

Démonstration. Notons $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$. Soit $M, N \in \mathbb{N}$ tels que $M \geq N$, alors par une inégalité triangulaire, on obtient

$$\|U_M - U_N\| = \left\|\sum_{n=N+1}^{M} u_n\right\| \leq \sum_{n=N+1}^{M} \|u_n\| = \sum_{n=0}^{M} \|u_n\| - \sum_{n=0}^{N} \|u_n\| \underset{M,N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, puisque E est un espace complet, la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge simplement □