

# Calcul différentiel 2

## Table des matières

<b>1. Calcul différentiel</b>	<b>2</b>
1.1. Inversion et fonctions implicites . . . . .	2
1.1.1. Théorèmes d'inversion locale et globale . . . . .	3
1.1.2. Théorème des fonctions implicites . . . . .	4
1.2. Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	6
1.2.1. Sous-variétés . . . . .	6
1.2.2. Espace tangent à une sous-variété . . . . .	7
1.2.3. Extrema liés . . . . .	8
<b>2. Équations différentielles</b>	<b>9</b>
2.1. Résultats fondamentaux . . . . .	9
2.1.1. Équations différentielles du premier ordre . . . . .	9
2.1.2. Solutions maximales et solutions globales . . . . .	10
2.1.3. Equations intégrales et cylindre de sécurité . . . . .	10
2.1.4. Théorème de Cauchy-Péano-Arzéla . . . . .	11
2.1.5. Théorème de Cauchy-Lipschitz . . . . .	11

# 1. Calcul différentiel

## 1.1. Inversion et fonctions implicites

**Définition 1.1.** Soit  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \cup \{+\infty\}$ ,  $U$  et  $V$  deux ouverts de  $\mathbb{R}^n$ , et  $f : U \rightarrow V$  une application. On dit que  $f$  est un  $C^k$ -difféomorphisme de  $U$  sur  $V$  si :

- (1)  $f$  est bijective de  $U$  sur  $V$ ,
- (2)  $f$  est de classe  $C^k$  sur  $U$ ,
- (3)  $f^{-1}$  est de classe  $C^k$  sur  $V$ .

**Remarque 1.2.** Soit  $f : U \rightarrow V$  un  $C^k$ -difféomorphisme,  $x \in U$  et  $y \in V$ . Alors

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

$$f(f^{-1}(y)) = y$$

de plus en appliquant le théorème de composition des différentielles

$$(d_{f(x)}f^{-1}) \circ (d_x f) = \text{id}$$

$$(d_{f^{-1}(y)}f) \circ (d_y f^{-1}) = \text{id}$$

donc  $d_x f$  est inversible avec  $(d_x f)^{-1} = d_{f(x)}f^{-1}$ .

### Exemples 1.3.

1. On considère  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n; x \mapsto Ax$  où  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ , alors  $f$  est  $C^\infty$  comme fonction linéaire et bijective de réciproque  $y \mapsto A^{-1}y$ . On remarque que  $f^{-1}$  est  $C^\infty$  comme fonction linéaire, donc  $f$  est un  $C^\infty$ -difféomorphisme.
2. On considère  $f : U \rightarrow V; (x, y) \mapsto (x + y, xy)$  où  $U$  et  $V$  sont définis par

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y\}$$

$$V = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid s^2 - 4t > 0\}$$

alors  $f$  est un  $C^\infty$  difféomorphisme de  $U$  sur  $V$ , en effet

- a.  $f$  est bijective de  $U$  sur  $V$ , puisque pour  $(x, y) \in U$  on a

$$(x + y)^2 - 4xy = x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 > 0$$

donc  $f(U) \subset V$ , réciproquement pour  $(s, t) \in V$  on cherche  $(x, y) \in U$  tels que

$$\begin{cases} x + y = s \\ xy = t \end{cases}$$

c'est-à-dire  $x$  et  $y$  sont racines du polynôme  $X^2 - sX + t$ , comme  $x > y$  on a

$$\begin{cases} x = \frac{s + \sqrt{s^2 - 4t}}{2} \\ y = \frac{s - \sqrt{s^2 - 4t}}{2} \end{cases}$$

donc  $V \subset f(U)$ ,  $f$  est bijective,

- b.  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $U$  car polynomiale,
- c.  $f^{-1}$  est de classe  $C^\infty$  sur  $V$  car  $(s, t) \mapsto s^2 - 4t$  et  $\sqrt{\cdot}$  sont  $C^\infty$  sur  $V$ .
3. On considère  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^3$ , alors  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et bijective. Mais son inverse  $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y \mapsto \sqrt[3]{y}$ , n'est pas dérivable en 0 donc  $f$  n'est pas un  $C^\infty$ -difféomorphisme.

### 1.1.1. Théorèmes d'inversion locale et globale

**Théorème 1.4.** (Théorème d'inversion locale) Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application de classe  $C^k$  et  $a$  un point de  $U$ . Si  $d_a f$  est un isomorphisme, alors il existe un voisinage ouvert  $V$  de  $a$  et un voisinage ouvert  $W$  de  $f(a)$  tels que  $f : V \rightarrow W$  est un  $C^k$ -difféomorphisme.

**Théorème 1.5.** (Théorème d'inversion globale) Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application de classe  $C^k$ . Si :

- (1)  $f$  est injective sur  $U$ ,
- (2)  $\forall x \in U, d_x f$  est un isomorphisme.

Alors  $f(U)$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $f : U \rightarrow f(U)$  est un  $C^k$ -difféomorphisme.

*Démonstration.* Soit  $x \in U$ , alors d'après le théorème d'inversion locale il existe un voisinage ouvert  $V_x$  de  $x$  et un voisinage ouvert  $W_{f(x)}$  de  $f(x)$  tels que  $f : V_x \rightarrow W_{f(x)}$  est un  $C^k$ -difféomorphisme. En particulier  $W_{f(x)} = f(V_x)$ , et on en déduit que

$$f(U) = \bigcup_{x \in U} W_{f(x)}$$

est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  comme union d'ouverts. De plus puisque  $f$  est injective sur  $U$ , on en déduit que  $f$  est bijective de  $U$  sur  $f(U)$ . Enfin puisque la régularité est une notion locale  $f$  et  $f^{-1}$  sont respectivement de classe  $C^k$  sur  $U$  et  $f(U)$ . Donc  $f : U \rightarrow f(U)$  est un  $C^k$ -difféomorphisme.  $\square$

#### Exemples 1.6.

1. On considère  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; (r, \theta) \mapsto (f_1, f_2) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ , alors
  - a.  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^2$  puisque  $\cos$  et  $\sin$  sont de classe  $C^\infty$ .
  - b. On pose  $U := ]0, +\infty[ \times ]-\pi, \pi[$ , qui est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  sur lequel  $f$  est injective.
  - c. Soit  $(r, \theta) \in U$ , alors

$$J_f(r, \theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

et  $\det(J_f(r, \theta)) = r \cos^2(\theta) + r \sin^2(\theta) = r > 0$ , donc  $d_{(r, \theta)} f$  est inversible.

Donc d'après le **Théorème 1.5**  $f : U \rightarrow f(U)$  est un  $C^\infty$ -difféomorphisme.

2. On considère  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3; (r, \theta, \varphi) \mapsto (f_1, f_2, f_3) = (r \cos(\theta) \cos(\varphi), r \sin(\theta) \cos(\varphi), r \sin(\varphi))$ .
  - a.  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^3$  puisque  $\cos$  et  $\sin$  sont de classes  $C^\infty$ .
  - b. On pose  $U := ]0, +\infty[ \times ]-\pi, \pi[ \times ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ , qui est un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  sur lequel  $f$  est injective.
  - c. Soit  $(r, \theta, \varphi) \in U$ , alors

$$J_f(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \cos(\varphi) & -r \sin(\theta) \cos(\varphi) & -r \cos(\theta) \sin(\varphi) \\ \sin(\theta) \cos(\varphi) & r \cos(\theta) \cos(\varphi) & -r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & 0 & r \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

et le déterminant de cette matrice est

$$\begin{aligned} \det(J_f(r, \theta, \varphi)) &= \sin(\varphi)(r^2 \sin^2(\theta) \cos(\varphi) \sin(\varphi) + r^2 \cos^2(\theta) \cos(\varphi) \sin(\varphi)) \\ &\quad + r \cos(\varphi)(r \cos^2(\theta) \cos^2(\varphi) + \sin^2(\theta) \cos^2(\varphi)) \\ &= \sin^2(\varphi) r^2 \cos(\varphi) + \cos^2(\varphi) r^2 \cos(\varphi) = r^2 \cos(\varphi) \neq 0 \end{aligned}$$

donc  $d_{(r, \theta, \varphi)} f$  est inversible.

Donc d'après le **Théorème 1.5**  $f : U \rightarrow f(U)$  est un  $C^\infty$ -difféomorphisme.

3. On pose  $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  et on considère  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2; (x, y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$ , alors

- a.  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $U$  puisque  $f$  est polynômiale.  
c. Soit  $(x, y) \in U$ , alors

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

et  $\det(J_f(x, y)) = 4(x^2 + y^2) > 0$  sur  $U$ , donc  $d_{(x,y)}f$  est inversible.

Donc d'après le **Théorème 1.4**  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  est un  $C^\infty$ -difféomorphisme local en tout point de  $U$ .  
Mais  $f(-1, -1) = f(1, 1)$ , donc  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  n'est pas  $C^\infty$ -difféomorphisme global.

- b. On pose  $U' := \{(x, y) \in U \mid x > 0\}$ , qui est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  sur lequel  $f$  est injective. En effet si  $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$ , alors on pose

$$\begin{cases} (x_1, y_1) = r_1(\cos(\theta_1), \sin(\theta_1)) \\ (x_2, y_2) = r_2(\cos(\theta_2), \sin(\theta_2)) \end{cases} \quad \text{où } r_1, r_2 > 0 \text{ et } \theta_1, \theta_2 \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

et on trouve

$$\begin{cases} r_1^2 \cos(2\theta_1) = r_2^2 \cos(2\theta_2) \\ r_1^2 \sin(2\theta_1) = r_2^2 \sin(2\theta_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \theta_1 = \theta_2 \mod 2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \theta_1 = \theta_2 \end{cases}$$

donc  $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$  et  $f$  est bien injective.

Donc d'après le **Théorème 1.5**  $f : U' \rightarrow f(U')$  est un  $C^\infty$ -difféomorphisme.

### 1.1.2. Théorème des fonctions implicites

**Théorème 1.7.** (Théorème des fonctions implicites) Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ ,  $(a, b)$  un point de  $U$  et  $f = (f_1, \dots, f_q) : U \rightarrow \mathbb{R}^q$  une application de classe  $C^k$ . Si :

- (1)  $f(a, b) = 0$ ,
- (2) la jacobienne de  $f$  par rapport à la deuxième variable en  $(a, b)$  est inversible.

Alors il existe un voisinage ouvert  $V$  de  $a$ , un voisinage ouvert  $W$  de  $b$ , avec  $V \times W \subset U$ , et une application  $\varphi : V \rightarrow W$  de classe  $C^\infty$  qui vérifie  $b = \varphi(a)$ , tels que :

$$\begin{cases} (x, y) \in V \times W \\ f(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in V \\ y = \varphi(x) \end{cases}.$$

De plus pour tout  $x \in V$ ,  $\frac{d\varphi}{dx}(x) = -\left(\frac{df}{dy}(x, \varphi(x))\right)^{-1} \circ \frac{df}{dx}(x, \varphi(x))$ .

*Démonstration.* On considère l'application

$$g : U \rightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q; (x, y) \mapsto (x, f(x, y)).$$

Alors la matrice jacobienne de  $g$  en  $(a, b)$  est

$$J_g(a, b) = \begin{pmatrix} I_p & 0_q \\ \cdot & \frac{df}{dy}(a, b) \end{pmatrix}$$

et son déterminant  $\det(J_g(a, b))$  est non nul par hypothèse.

Donc d'après le **Théorème 1.4** il existe un voisinage ouvert  $U_1$  de  $(a, b)$  et un voisinage ouvert  $U_2$  de  $g(a, b) = (a, f(a, b))$  tels que  $g : U_1 \rightarrow U_2$  est un  $C^k$ -difféomorphisme.

En particulier il existe  $\psi : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^q$  telle que pour tout  $(x, y) \in U_2$  on a  $g^{-1}(x, y) = (x, \psi(x, y))$ .

On prend  $V \times W \subset U_1$  et on pose  $\varphi : V \rightarrow W; x \mapsto \psi(x, 0)$ , alors l'équivalence du théorème est bien vérifiée et il suffit de dériver pour obtenir l'égalité.  $\square$

**Exemples 1.8.**

1. On considère  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$  et  $\mathbb{S}^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$ . Les dérivées partielles de  $f$  sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y.$$

On remarque que pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  vérifiant

$$\begin{cases} (x, y) \in \mathbb{S}^1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (x, y) \in \mathbb{S}^1 \\ y \neq 0 \end{cases}$$

on a  $(x, y) \in \mathbb{S}^1 \setminus \{(1, 0), (-1, 0)\}$ . On peut donc appliquer le **Théorème 1.7**, au voisinage  $V$  de  $x$ ,  $\mathbb{S}^1$  est le graphe d'une application  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$ . De plus on a

$$\forall x \in V, x^2 + \varphi(x)^2 - 1 = 0$$

en dérivant on trouve

$$\forall x \in V, 2x + 2\varphi(x)\varphi'(x) = 0$$

et donc  $\varphi'(x) = -\frac{x}{\varphi(x)}$ .

2. On considère  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}; (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 1$ ,  $\mathbb{S}^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 0\}$ . Les dérivées partielles de  $f$  sont

$$\forall a \in \{x, y, z\}, \frac{\partial f}{\partial a}(x, y, z) = 2a.$$

On remarque que pour  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  vérifiant

$$\begin{aligned} \begin{cases} (x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \neq 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} (x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \\ z \neq 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \\ (x, y, z) \neq (a, b, 0) \text{ où } (a, b) \in \mathbb{S}^1 \end{cases} \end{aligned}$$

on a  $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \setminus (\mathbb{S}^1 \times \{0\})$ . On peut donc appliquer le **Théorème 1.7**, au voisinage  $V$  de  $(x, y)$ ,  $\mathbb{S}^2$  est le graphe d'une application  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$ . De plus on a

$$\forall (x, y) \in V, x^2 + y^2 + \varphi(x, y)^2 - 1 = 0$$

en dérivant par rapport à  $x$  on trouve

$$\forall (x, y) \in V, 2x + 2\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\varphi(x, y) = 0$$

donc  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{x}{\varphi(x, y)}$ , et en dérivant par rapport à  $y$  on trouve

$$\forall (x, y) \in V, 2y + 2\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\varphi(x, y) = 0$$

donc  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{y}{\varphi(x, y)}$ .

## 1.2. Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

### 1.2.1. Sous-variétés

**Définition 1.9.** Soit  $X$  une partie de  $\mathbb{R}^n$ . On dit que  $X$  est une *sous-variété de  $\mathbb{R}^n$  de classe  $C^k$  et de dimension  $d \in \mathbb{N}$*  si pour tout  $x \in X$ , il existe un voisinage ouvert  $U$  dans  $\mathbb{R}^n$ , un voisinage ouvert  $V$  de  $x$  et un  $C^k$ -difféomorphisme  $\varphi : U \rightarrow V$  tels que :

$$V \cap X = \varphi(U \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})).$$

On appelle *codimension* de  $X$  l'entier  $n - d$ .

**Remarque 1.10.** Une sous-variété de dimension 1 est une *courbe*, une sous-variété de dimension 2 est une *surface*, une sous-variété de dimension  $n - 1$  (codimension 1) est une *hypersurface*

### Exemples 1.11.

1. Une courbe dans  $\mathbb{R}^2$  est difféomorphe à un segment.
2. Un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  est une sous-variété de dimension  $n$ .
3. On considère le cercle  $\mathbb{S}^1$ , on pose  $U' := ]0, +\infty[ \times ]-\pi, \pi[$ ,  $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{ ]-\infty, 0] \times \{0\} \}$ , ainsi que  $\psi : U' \rightarrow V; (r, \theta) \mapsto r(\cos(\theta), \sin(\theta))$  qui est un difféomorphisme de classe  $C^\infty$ . On a

$$\begin{aligned} V \cap \mathbb{S}^1 &= \mathbb{S}^1 \setminus \{(-1, 0)\} \\ &= \psi(\{1\} \times ]-\pi, \pi[) \\ &= \psi(U' \cap (\{1\} \times \mathbb{R})) \end{aligned}$$

on prend alors  $U := ]-\pi, \pi[ \times ]0, +\infty[$  et  $\varphi : U \rightarrow V; (\theta, r) \mapsto \psi(r + 1, \theta)$ , donc  $\mathbb{S}^1$  est bien une sous-variété de  $\mathbb{R}^2$  de classe  $C^\infty$  et de dimension 1.

**Définition 1.12.** Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $a \in U$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$  une application de classe  $C^k$ . On dit que  $f$  est une *immersion* en  $a$  si  $d_a f$  est injective.

**Définition 1.13.** Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $a \in U$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$  une application de classe  $C^k$ . On dit que  $f$  est une *submersion* en  $a$  si  $d_a f$  est surjective.

**Théorème 1.14.** Soit  $X$  une partie de  $\mathbb{R}^n$ . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) (*redressement*)  $X$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$  classe  $C^k$  et de dimension  $d \in \{0, \dots, n\}$ .
- (2) (*implicite*) Pour tout  $a \in X$ , il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $a$  dans  $\mathbb{R}^n$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$  une submersion en  $a$  de classe  $C^k$  tels que  $U \cap X = f^{-1}(f(a))$ .

*Démonstration.*

(1)  $\Rightarrow$  (2) : Supposons que  $X$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$  de classe  $C^k$  et de dimension  $d$ .

Soit  $a \in X$ , alors il existe un voisinage ouvert  $U$  dans  $\mathbb{R}^n$ , un voisinage ouvert  $V$  de  $a$  et un  $C^k$ -difféomorphisme  $\varphi : U \rightarrow V$  tels que

$$V \cap X = \varphi(U \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})).$$

On écrit  $\varphi^{-1} = (g_1, \dots, g_d, f_1, \dots, f_{n-d})$ , alors

$$V \cap X = \{x \in V \mid f_1(x) = \dots = f_{n-d}(x) = 0\}.$$

On pose  $f := (f_1, \dots, f_{n-d})$ , puisque  $\varphi$  est un difféomorphisme on en déduit que  $d_a f$  est surjective, donc  $f$  est une submersion en  $a$  de classe  $C^k$ .

(2)  $\Rightarrow$  (1) : Supposons que les hypothèses soient vérifiées. Sans perte de généralité, on suppose que  $f(a) = 0$  et que  $\det(J_f(a)) \neq 0$ . On pose  $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  définie par

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = (x_1 - a_1, \dots, x_d - a_d, f_1(x_{d+1}), \dots, f_{n-d}(x_n))$$

alors  $\det(J_\psi(a)) = \det(J_f(a)) \neq 0$ , quitte à restreindre  $V$ ,  $\psi$  est un  $C^k$ -difféomorphisme de  $V$  sur  $U := \psi(V)$ . En prenant  $\varphi := \psi^{-1}$ , on a bien

$$V \cap X = \varphi(U \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})).$$

□

**Exemple 1.15.** On considère le cercle  $\mathbb{S}^2$  décrit par  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}; (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$ . Alors  $f$  est de classe  $C^k$  sur  $\mathbb{R}^3$  et  $\det(\text{Jac}_f) \neq 0$  sur  $\mathbb{S}^2$ , donc  $f$  est une submersion en tout point de  $\mathbb{S}^2$ . On en déduit que  $\mathbb{S}^2$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^3$  de classe  $C^k$  et de dimension  $3 - 1 = 2$ .

### 1.2.2. Espace tangent à une sous-variété

**Définition 1.16.** Soit  $X$  une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$  de classe  $C^k$  et de dimension  $d$ ,  $a \in X$  un point et  $v$  un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ . On dit que  $v$  est *tangent* à  $X$  en  $a$  s'il existe  $\varepsilon > 0$  et une courbe  $\gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^k$  vérifiant :

- (1)  $\gamma(0) = a$ ,
- (2)  $\gamma'(0) = v$ ,
- (3)  $\text{im}(\gamma) \subset X$ .

On appelle *espace tangent* à  $X$  en  $a$ , noté  $T_a X$ , l'ensemble des vecteurs tangents à  $X$  en  $a$ .

**Exemples 1.17.** Soit  $X$  une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$  de classe  $C^k$  et de dimension  $d$  et  $a \in X$  un point.

1. Le vecteur nul est tangent à  $X$  en tout point, avec  $\gamma : t \mapsto a$ .
2. Pour tout vecteur  $v$  tangent à  $X$  en  $a$ , pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda v$  est tangent à  $X$  en  $a$ .
3. Si  $X$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , alors pour tout  $v \in \mathbb{R}^n$ ,  $v$  est tangent à  $X$  en  $a$ .
4. Si  $X$  est un point, alors le seul vecteur tangent à  $X$  en  $a$  est 0.

**Théorème 1.18.** Soit  $X$  une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$  classe  $C^k$  et de dimension  $d$  et  $a \in X$  un point. Alors l'espace tangent  $T_a X$  est un espace vectoriel de dimension  $d$  et on a les caractérisations :

- (1) S'il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ , un voisinage ouvert  $V$  de  $a$  et un  $C^k$ -difféomorphisme  $\varphi : U \rightarrow V$  vérifiant  $V \cap X = \varphi(U \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\}))$ , alors  $T_a X = d_{\varphi^{-1}(a)}\varphi(\mathbb{R}^d \times \{0\})$ .
- (2) S'il existe un voisinage ouvert  $V$  de  $a$  et une submersion en  $a$   $f : V \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$  de classe  $C^k$  vérifiant  $V \cap X = f^{-1}(f(a))$ , alors  $T_a X = \ker(d_a f)$ .

*Démonstration.*

- (1) Supposons sans perte de généralité que  $\varphi^{-1}(a) = 0$ . Soit  $v \in T_a X$ , alors il existe  $\varepsilon > 0$  et une courbe  $\gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow V \cap X$  de classe  $C^k$  vérifiant  $\gamma(0) = a$  et  $\gamma'(0) = v$ . On pose  $\delta := \varphi^{-1}(\gamma)$ , alors on a  $\text{im}(\delta) \subset U \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})$ ,  $\delta(0) = 0$  et

$$\delta'(t) = d_{\gamma(t)}\varphi^{-1}(\gamma'(t))$$

d'où  $\delta'(0) = d_a\varphi^{-1}(v)$  et  $v = d_a\varphi^{-1}(\delta'(0))$ , donc  $T_a X \subset d_a\varphi^{-1}(\mathbb{R}^d \times \{0\})$ .

Réciproquement, on montre de la même manière que  $d_a\varphi^{-1}(\mathbb{R}^d \times \{0\}) \subset T_a X$ .

Donc  $T_a X = d_a\varphi^{-1}(\mathbb{R}^d \times \{0\})$ , on en déduit que  $T_a X$  est un espace vectoriel de dimension  $d$ .

- (2) Soit  $v \in T_a X$ , alors il existe  $\varepsilon > 0$  et une courbe  $\gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow V \cap X$  de classe  $C^k$  vérifiant  $\gamma(0) = a$  et  $\gamma'(0) = v$ . Soit  $t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$ , alors

$$\gamma(t) \in V \cap X \Rightarrow (f \circ \gamma)(t) = f(a) \Rightarrow (f \circ \gamma)'(t) = 0$$

or  $(f \circ \gamma)(t) = d_{\gamma(t)}f(\gamma'(t))$  et  $d_a f(v) = 0$ , donc  $T_a X \subset \ker(d_a f)$ . L'égalité des dimensions entraîne l'égalité des espaces.

□

**Remarque 1.19.** S'il existe un voisinage ouvert  $V$  de  $a$  et une submersion en  $a$   $f : V \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$  de classe  $C^k$  vérifiant  $V \cap X = f^{-1}(f(a))$ , alors  $T_a X = \text{Vect}(\nabla_{f_1}(a), \dots, \nabla_{f_{n-d}}(a))^\perp$ .

### 1.2.3. Extrema liés

**Théorème 1.20.** (Théorèmes des extrema liés) Soit  $X$  une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$  de classe  $C^k$  et de dimension  $d$ ,  $a \in X$  un point,  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^k$ .

Si  $f$  restreinte à  $X$  admet un extremum local en  $a$  et s'il existe une submersion  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$  de classe  $C^k$  telle que, en notant  $g = (g_1, \dots, g_{n-d})$ , on ait

$$X = \{x \in U \mid g_1(x) = \dots = g_{n-d}(x) = 0\}.$$

Alors il existe des uniques  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-d} \in \mathbb{R}$  tels que

$$\nabla_f(a) = \lambda_1 \nabla_{g_1}(a) + \dots + \lambda_{n-d} \nabla_{g_{n-d}}(a).$$

Ces réels sont appelés les *multiplieurs de Lagrange*.

**Exemple 1.21.** On cherche les extrema de la fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; (x, y) \mapsto x + y$ , que l'on restreint à l'ensemble  $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + y^4 = 1\}$ .

On remarque que  $M$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^2$  de classe  $C^\infty$ , en effet  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; (x, y) \mapsto x^4 + y^4$  est une submersion en tout point de  $M$ . Si  $f|_M$  admet un extremum local en un point  $(a, b) \in M$ , alors il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $\nabla(f)(a, b) = \lambda \nabla(g)(a, b)$ . On a donc le système suivant

$$\begin{cases} 1 = \lambda 4a^3 \\ 1 = \lambda 4b^3 \end{cases}$$

et on en déduit que  $\lambda \neq 0$  et  $a^3 = b^3 = \frac{1}{4\lambda}$ , d'où  $a = b$ .

Comme  $(a, b) \in M$  on a  $a^4 + b^4 = 1$ , d'où  $2a^4 = 1$ , donc  $a = b = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ . On a deux extrema possibles

$$m_1 := \left( \frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \right) \text{ et } m_2 := \left( -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}} \right)$$

comme  $f$  est continue et  $M$  est compact (comme fermé borné de  $\mathbb{R}^2$ ),  $f$  admet au moins un minimum global et un maximum global, elle en a donc exactement deux :  $m_1$  et  $m_2$ .

On a  $f(m_1) = -f(m_2) = \frac{2}{\sqrt[4]{2}}$ , donc  $f$  atteint son minimum en  $m_2$  et son maximum en  $m_1$ .



## 2. Équations différentielles

### 2.1. Résultats fondamentaux

#### 2.1.1. Équations différentielles du premier ordre

**Définition 2.1.** Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction continue. On appelle *équation différentielle d'ordre 1 dans  $\mathbb{R}^n$* , notée  $(E)$ , une équation de la forme suivante :

$$y' = f(t, y)$$

on dit que  $t$  est la *variable de temps* et que  $y$  est la *variable d'état*.

**Définition 2.2.** Soit  $(E)$  une équation différentielle d'ordre 1. On appelle *solution* de  $(E)$  un couple de la forme  $(I, y)$  où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonction dérivable sur  $I$  vérifiant :

- (1)  $\forall t \in I, (t, y(t)) \in U$ ,
- (2)  $\forall t \in I, y'(t) = f(t, y(t))$ .

**Remarque 2.3.** Dans le cas où  $I$  n'est pas ouvert, la dérivabilité s'entend comme la dérivabilité à droite ou à gauche (selon l'extrémité).

#### Exemples 2.4.

- 1. On considère l'équation différentielle d'ordre 1 donnée par  $y' = y$ . Le couple  $(]1, 2[, t \mapsto e^t)$  est une solution de cette équation.
- 2. L'équation donnée par  $y' = y^2 + t$  est une équation différentielle d'ordre 1 sur  $\mathbb{R}$ .
- 3. L'équation donnée par  $y' = \frac{y+1}{t \ln(t)}$  est une équation différentielle d'ordre 1 sur  $\mathbb{R}$ . Le couple  $(]0, 1[, t \mapsto -1 + \ln(t))$  est une solution de cette équation.

**Définition 2.5.** Soit  $(E)$  une équation différentielle d'ordre 1 et  $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ . On appelle *problème de Cauchy* avec donnée  $(t_0, y_0)$  le système composé des équations  $(E)$  et  $y(t_0) = y_0$ . On dit que l'équation  $y(t_0) = y_0$  est la *condition initiale* (ou de Cauchy).

**Exemple 2.6.** La fonction  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; t \mapsto 2e^{-t}$  est une solution de l'équation différentielle  $y' = -y$  de condition initiale  $y(0) = 2$ .

**Définition 2.7.** Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  et  $y' = f(x, y)$  une équation différentielle d'ordre 1. Soit  $M$  un point de  $U$ , on note  $\mathcal{D}_M$  la droite passant par  $M$  et de coefficient directeur  $f(M)$ . On appelle *champ des tangentes* l'application  $M \mapsto \mathcal{D}_M$  associée à l'équation  $y' = f(x, y)$ . On appelle *courbe intégrale* une courbe  $\mathcal{C}$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  qui a pour tangente en chaque point  $M$  la droite  $\mathcal{D}_M$  du champ des tangentes.

**Remarque 2.8.** Soit  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Alors  $\mathcal{D}_{(x_0, y_0)}$  a pour équation  $y - y_0 = f(x_0, y_0)(x - x_0)$ .

#### Exemples 2.9.

- 1. On considère l'équation différentielle  $y' = 0$ , ici  $f \equiv 0$ . Soit  $M := (x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Alors  $\mathcal{D}_M$  est la droite d'équation  $y = y_0$  et les courbes intégrales sont les droites  $\mathcal{D}_M$ .
- 2. On considère l'équation différentielle  $y' = y$ , ici  $f(x, y) = y$ . Soit  $M := (x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Alors  $\mathcal{D}_M$  est la droite d'équation  $y = y_0 + y_0(x - x_0)$ .

**Proposition 2.10.** Soit  $y' = f(x, y)$  une équation différentielle d'ordre 1 et  $(I, y)$  une solution de cette équation. Alors le graphe de  $y$  est une courbe intégrale.

*Démonstration.* Soit  $M = (x_0, y_0)$  un point du graphe de  $y$ . L'équation de la tangente au graphe en  $M$  est donnée par

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0) = f(x_0, y_0)(x - x_0)$$

on reconnaît l'équation de  $\mathcal{D}_M$ . □

**Définition 2.11.** Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ,  $y' = f(x, y)$  une équation différentielle d'ordre 1 et  $m \in \mathbb{R}$ . On appelle *isocline de pente  $m$  associée à l'équation*, l'ensemble

$$\Gamma_m := \{(x, y) \in U \mid f(x, y) = m\}.$$

### 2.1.2. Solutions maximales et solutions globales

**Définition 2.12.** Soit  $y' = f(x, y)$  une équation différentielle d'ordre 1, et  $(I_1, y_1)$  et  $(I_2, y_2)$  deux solutions de cette équation. On dit que  $(I_2, y_2)$  est un *prolongement* de  $y_1$  si  $I_1 \subset I_2$  et  $y_2|_{I_1} = y_1$ .

**Définition 2.13.** Soit  $y' = f(x, y)$  une équation différentielle d'ordre 1 et  $(I, y)$  une solution de cette équation. On dit que  $(I, y)$  est *maximale* si elle n'admet pas de prolongement.

**Exemple 2.14.** On considère l'équation différentielle d'ordre 1 donnée par  $y' = y^2$ . Alors une solution maximale est  $\left(]-\infty, 1[, t \mapsto \frac{1}{1-t}\right)$ .

**Théorème 2.15.** Soit  $y' = f(x, y)$  une équation différentielle d'ordre 1 et  $(I_1, y_1)$  une solution de cette équation. Alors  $(I_1, y_1)$  admet un prolongement  $(I, y)$  maximal.

*Démonstration.* On construit un prolongement maximal à droite en construisant par récurrence une suite croissante de prolongement, et on construit de la même manière un prolongement maximal à gauche.  $\square$

**Définition 2.16.** Soit  $y' = f(x, y)$  une équation différentielle d'ordre 1 et  $(I, y)$  une solution de cette équation. On suppose que  $U$  s'écrit  $U = J \times K$  où  $J$  est un ouvert de  $\mathbb{R}$  et  $K$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Alors on dit que  $(I, y)$  est *globale* si  $I = J$ .

**Proposition 2.17.** Soit  $y' = f(x, y)$  une équation différentielle d'ordre 1 et  $(I, y)$  une solution de cette équation. Si  $(I, y)$  est une solution globale, alors  $(I, y)$  est une solution maximale.

**Proposition 2.18.** Soit  $y' = f(x, y)$  une équation différentielle d'ordre 1 et  $(I, y)$  une solution de cette équation. Si  $f$  est de classe  $C^k$ , alors  $y$  est de classe  $C^{k+1}$ .

### 2.1.3. Equations intégrales et cylindre de sécurité

**Lemme 2.19.** Soit  $y' = f(x, y)$  une équation différentielle d'ordre 1 et  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction. Alors  $(I, y)$  est une solution du problème de Cauchy de condition initiale  $(t_0, y_0)$  si et seulement si :

- (1)  $y$  est continue et  $\forall t \in I, (t, y(t)) \in U$ ,
- (2)  $\forall t \in I, y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(x, y(x)) dx$ .

*Démonstration.*

$\Rightarrow$  : On suppose que  $(I, y)$  est solution de l'équation. Puisque  $y$  est dérivable,  $y$  est continue. De plus pour tout  $t \in I$ , on a  $(t, y(t)) \in U$  et  $y'(t) = f(t, y(t))$ , on intègre sur  $]t_0, t[$  et on trouve

$$y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^t f(x, y(x)) dx$$

d'où  $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(x, y(x)) dx$ .

$\Leftarrow$  : On suppose que  $(I, y)$  vérifie les hypothèses. D'après le théorème fondamentale de l'analyse  $y$  est dérivable et pour tout  $t \in I$ , on a  $y'(t) = f(t, y(t))$ . De plus on a bien  $y(t_0) = y_0$ .  $\square$

**Définition 2.20.** Soit  $y' = f(x, y)$  une équation différentielle d'ordre 1,  $(t_0, y_0)$  un point de  $U$  et  $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times B(y_0, r)$  un cylindre dans  $U$ . On dit que  $C$  est un *cylindre de sécurité* si toute solution  $(I, y)$  du problème de Cauchy de condition initiale  $(t_0, y_0)$  avec  $I \subset [t_0 - T, t_0 + T]$  reste contenue dans  $\overline{B}(y_0, r)$ .

**Proposition 2.21.** Soit  $y' = f(x, y)$  une équation différentielle d'ordre 1 et  $(t_0, y_0)$  un point de  $U$ . Alors il existe  $T > 0$  tel que  $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times B(y_0, r)$  soit un cylindre de sécurité.

*Démonstration.* On prend un cylindre  $C_0 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times B(y_0, r_0) \subset U$ . Puisque  $C_0$  est fermé et borné dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $C_0$  est compact dans  $\mathbb{R}^n$ . Puisque  $f$  est continue sur  $C_0$ , elle est bornée sur  $C_0$ . Posons  $M := \max_{(t,y) \in C_0} \|f(t, y)\|$ . On suppose que  $f \not\equiv 0$  sur  $C_0$ , alors on pose  $T := \min\left(T_0, \frac{r_0}{M}\right)$  et le cylindre  $C := [t_0 - T, t_0 + T] \times B(y_0, r_0)$ . Soit  $(I, y)$  une solution du problème de Cauchy de condition initiale  $(t_0, y_0)$  avec  $I \subset [t_0 - T, t_0 + T]$ . Alors pour tout  $t \in I$ , on a

$$\|y(t) - y_0\| = \left\| \int_{t_0}^t f(x, y(x)) dx \right\| \leq \int_{t_0}^t \|f(x, y(x))\| dx \leq M \|t - t_0\| \leq r_0$$

c'est-à-dire  $y(t) \in \overline{B}(y_0, r_0)$ . Donc  $C$  est un cylindre de sécurité.  $\square$

#### 2.1.4. Théorème de Cauchy-Péano-Arzéla

**Théorème 2.22.** Soit  $y' = f(x, y)$  une équation différentielle d'ordre 1,  $(t_0, y_0)$  un point de  $U$  et  $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times B(y_0, r)$  un cylindre de sécurité. Alors il existe une solution  $(I, y)$  du problème de Cauchy de condition initiale  $(t_0, y_0)$  telle que  $y(I) \subset B(y_0, r)$

**Corollaire 2.23.** Soit  $y' = f(x, y)$  une équation différentielle d'ordre 1 et  $(t_0, y_0)$  un point de  $U$ . Alors il existe une solution  $(I, y)$  maximale, de plus  $I$  est ouvert.

#### 2.1.5. Théorème de Cauchy-Lipschitz

**Définition 2.24.** Soit  $y' = f(x, y)$  une équation différentielle d'ordre 1. On dit que  $f$  est *localement lipschitzienne* par rapport à la variable  $y$  si pour tout point  $(t_0, y_0)$  dans  $U$ , il existe un cylindre  $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times B(y_0, r)$  dans  $U$  et une constante  $k \geq 0$  tels que  $f$  soit  $k$ -lipschitzienne par rapport à la variable  $y$  sur  $C$  :

$$\forall (t, y_1), (t, y_2) \in C, \|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq k|y_1 - y_2|.$$

**Remarque 2.25.** On considère  $f = (f_1, \dots, f_n)$ . Si  $f$  admet des dérivées partielles par rapport à la variable  $y$  continues sur  $U$ . Alors en appliquant le théorème des accroissements finis on obtient que  $f$  est localement lipschitzienne par rapport à la variable  $y$ . Cela est vrai en particulier si  $f$  est  $C^1$ .

**Lemme 2.26.** Soit  $y' = f(x, y)$  une équation différentielle d'ordre 1,  $(t_0, y_0)$  un point de  $U$  et  $C_0 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times B(y_0, r_0)$  un cylindre sur lequel  $f$  est  $k$ -lipschitzienne par rapport à la variable  $y$ . Posons  $M := \sup_{(t,y) \in C_0} \|f(t, y)\|$ ,  $T := \min\left(T_0, \frac{r_0}{M}\right)$  et  $C := [t_0 - T, t_0 + T] \times B(y_0, r_0)$ . Alors pour tout couple  $(I_1, y_1), (I_2, y_2)$  de solutions du problème de Cauchy de condition initiale  $(t_0, y_0)$ , on a

$$\forall t \in [t_0 - T, t_0 + T], y_1(t) = y_2(t).$$

**Théorème 2.27.** Soit  $y' = f(x, y)$  une équation différentielle d'ordre 1 et  $(t_0, y_0)$  un point de  $U$ . Si  $f$  est localement lipschitzienne par rapport à la variable  $y$ , alors pour tout cylindre de sécurité  $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times B(y_0, r)$ , le problème de Cauchy de condition initiale  $(t_0, y_0)$  admet une unique solution sur  $[t_0 - T, t_0 + T]$ .