Homologie singulière et problème du rectangle inscrit

Emanuel Morille

Avec les conseils de Jean-Baptiste Campesato

19 Août 2025

Table des matières

1. Bases de théorie des catégories

1.1. Catégories

Définition 1.1. Une *catégorie* $\mathcal{C}$ est la donnée de :
- Une classe $\mathrm{ob}(\mathcal{C})$ dont les éléments sont appelés les *objets de* $\mathcal{C}$.
- Une classe $\hom(\mathcal{C})$ dont les éléments sont appelés les *morphismes de* $\mathcal{C}$.
  Un morphisme $f \in \hom(\mathcal{C})$ a un *domaine* $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ et un *codomaine* $Y \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$. On note alors ce morphisme $f : X \to Y$ et $\hom(X, Y)$ l'ensemble des morphismes de X dans Y.
- Pour tout objets $X, Y, Z \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$, une *composition* :
$$\circ : \hom(Y, Z) \times \hom(X, Y) \to \hom(X, Z).$$
- Pour tout objet $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$, un morphisme *identité* :
$$\mathrm{id}_X : X \to X.$$

Vérifiant les propriétés suivantes pour tout objets $X, Y, Z, T \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$:
- *Associativité* : Pour tout morphismes $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ et $h : Z \to T$, on a :
$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$
- *Identité* : Pour tout morphisme $f : X \to Y$, on a :
$$\mathrm{id}_Y \circ f = f = f \circ \mathrm{id}_X .$$

Exemple 1.2. La catégorie Ab des groupes abéliens :
- Les objets de Ab sont les groupes abéliens.
- Les morphismes de Ab sont les morphismes de groupes.

Exemple 1.3. Un *groupe gradué* est un groupe G muni d'une famille de sous-groupes $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $G = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} G_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, un élément non-nul de G_n est dit *homogène de degré* n.

Soit $G \coloneqq \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} G_n$ et $H \coloneqq \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H_n$ deux groupes gradués. Un *morphisme de groupes gradués* est un morphisme de groupes $\varphi : G \to H$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\varphi(G_n) \subset H_n$.

On définit ainsi la catégorie GrAb des groupes abéliens gradués :
- Les objets de GrAb sont les groupes abéliens gradués.
- Les morphismes de GrAb sont les morphismes de groupes gradués.

Exemple 1.4. La catégorie Top des espaces topologiques :
- Les objets de Top sont les espaces topologiques.
- Les morphismes de Top sont les applications continues.

Exemple 1.5. Une paire d'espaces topologiques est un espace topologique X muni d'une partie A de lui-même. On la note (X, A).

Soit (X, A) et (Y, B) deux paires d'espaces topologiques. Un *morphisme de paires* est une application continue $f : X \to Y$ telle que $f(A) \subset B$. On le note $f : (X, A) \to (Y, B)$.

On définit ainsi catégorie Top_2 des paires d'espaces topologiques :
- Les objets de Top_2 sont les paires d'espaces topologiques.
- Les morphismes de Top_2 sont les morphismes de paires.

Exemple 1.6. Soit $(X, \leq)$ un ensemble partiellement ordonné. On définit la catégorie $\mathcal{C}(X, \leq)$:
- Les objets de $\mathcal{C}(X, \leq)$ sont les éléments de X.
- Pour tout $x, y \in X$, si $x \leq y$, on a un morphisme $f_{x,y} : x \to y$.
- Pour tout $x, y, z \in X$, si $x \leq y$ et $y \leq z$, on a bien $x \leq z$ et une composition $f_{y,z} \circ f_{x,y} = f_{x,z}$.
- Pour tout $x \in X$, on a bien $x \leq x$ et un morphisme identité $f_{x,x}$.

Définition 1.7. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. La *catégorie opposée (ou duale) de* $\mathcal{C}$, notée $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$, est la catégorie dont les objets sont les objets $\mathcal{C}$ et dont les morphismes sont les morphismes de $\mathcal{C}$ dont le domaine et le codomaine sont inversés.

Exemple 1.8. Soit $(X, \leq)$ un ensemble partiellement ordonné. Alors on a $\mathcal{C}(X, \leq)^{\mathrm{op}} = \mathcal{C}(X, \preceq)$ où pour tout $x, y \in X$, on a $x \preceq y$ si et seulement si $y \leq x$.

1.2. Foncteurs

Définition 1.9. Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories. Un *foncteur (covariant) F de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$* est la donnée :
- Pour tout objet $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$, d'un objet $F(X) \in \mathrm{ob}(\mathcal{D})$.
- Pour tout objets $X, Y \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ et morphisme $f : X \to Y$, d'un morphisme $F(f) : F(X) \to F(Y)$.

Vérifiant les propriétés suivantes pour tout objets $X, Y, Z \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$:
- *Composition* : Pour tout morphismes $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$, on a :
$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f).$$
- *Identité* : On a :
$$F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}.$$

Exemple 1.10. Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories. On définit le foncteur covariant constant $C : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$:
- On prend $D \in \mathcal{D}$, pour tout objet $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$, on a $C(X) \coloneqq D$.
- Pour tout objets $X, Y \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ et morphisme $f : X \to Y$, on a $C(f) \coloneqq \mathrm{id}_D$.

Exemple 1.11. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. On définit le foncteur covariant identité $\mathrm{id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$:
- Pour tout objet $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$, on a $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}(X) \coloneqq X$.
- Pour tout objets $X, Y \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ et morphisme $f : X \to Y$, on a $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}(f) \coloneqq f$.

Définition 1.12. Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories. Un *foncteur contravariant de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$* est un foncteur covariant de la catégorie opposée $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ vers $\mathcal{D}$.

Remarque 1.13. Un foncteur contravariant F est la donnée pour tout morphisme $f : X \to Y$, d'un morphisme $F(f) : F(Y) \to F(X)$, vérifiant la relation de composition $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$.

Exemple 1.14. Soit $\mathbb{K}$ un corps et Vect la catégorie des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On définit un foncteur contravariant $F : \mathsf{Vect}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Vect}$:
- Pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E \in \mathsf{Vect}$, on a $F(E) \coloneqq E^*$.
- Pour tout $\mathbb{K}$-espaces vectoriels $E, F \in \mathsf{Vect}$ et application linéaire $u : E \to F$, on a :
$$F(u) \coloneqq u^{\mathrm{T}} : F^* \to E^*.$$

1.3. Transformations naturelles

Définition 1.15. Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ deux foncteurs covariants. Une *transformation naturelle ∂ de F vers G* est la donnée pour tout objet $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$, d'un morphisme $\partial_X : F(X) \to G(X)$, vérifiant la propriété suivante pour tout objet $Y \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ et pour tout morphisme $f : X \to Y$, on a :
$$\partial_Y \circ F(f) = G(f) \circ \partial_X$$
c'est-à-dire que le diagramme suivant est commutatif :
$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\partial_X"'] & F(Y) \arrow[d, "\partial_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G(f)"'] & G(Y) \end{tikzcd}$$

2. Catégorie Comp des complexes de chaînes

2.1. Complexes de chaînes

Définition 2.1. On appelle *complexe de chaînes*, noté $C_\bullet$, une suite de groupes abéliens $(C_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ munie de morphismes de groupes $(\mathrm{d}_n : C_n \to C_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\mathrm{d}_n\mathrm{d}_{n+1} = 0$.

Définition 2.2. Soit $C_\bullet$ un complexe de chaînes et $n \in \mathbb{Z}$.
- On appelle *n-cycle* un élément de $Z_n(C_\bullet) \coloneqq \ker(\mathrm{d}_n)$.
- On appelle *n-bord* un élément de $B_n(C_\bullet) \coloneqq \mathrm{im}(\mathrm{d}_{n+1})$.

Proposition 2.3. Soit $C_\bullet$ un complexe de chaînes. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $B_n(C_\bullet) \subset Z_n(C_\bullet)$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors $\mathrm{d}_n\mathrm{d}_{n+1} = 0$, donc $B_n(C_\bullet) = \mathrm{im}(\mathrm{d}_{n+1}) \subset \ker(\mathrm{d}_n) = Z_n(C_\bullet)$. □

Définition 2.4. Soit $C_\bullet$ un complexe de chaînes et $n \in \mathbb{Z}$.
- On appelle *n*[e] *groupe d'homologie de* $C_\bullet$ le groupe quotient $H_n(C_\bullet) \coloneqq Z_n(C_\bullet)/B_n(C_\bullet)$.
- On appelle *homologie de* $C_\bullet$ le groupe abélien gradué $H_\bullet(C_\bullet) \coloneqq \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H_n(C_\bullet)$.

Définition 2.5. Soit $C_\bullet$ un complexe de chaînes et $n \in \mathbb{Z}$.
- On dit que $C_\bullet$ est *exact en* C_n si $H_n(C_\bullet)$ est trivial, c'est-à-dire, $\mathrm{im}(\mathrm{d}_{n+1}) = \ker(\mathrm{d}_n)$.
- On dit que $C_\bullet$ est *exact* si pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il est exact en C_n.
- On dit que $C_\bullet$ est *acyclique* si pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, il est exact en C_n.

2.2. Morphismes de complexes

Définition 2.6. Soit $C_\bullet$ et $D_\bullet$ deux complexes de chaînes. On appelle *morphisme de complexes*, noté $\varphi_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$, une suite de morphismes de groupes $(\varphi_n : C_n \to D_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\mathrm{d}_n\varphi_n = \varphi_{n-1}\mathrm{d}_n$$

c'est-à-dire que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} C_n \arrow[r, "\varphi_n"] \arrow[d, "\mathrm{d}_n"'] & D_n \arrow[d, "\mathrm{d}_n"] \\ C_{n-1} \arrow[r, "\varphi_{n-1}"'] & D_{n-1} \end{tikzcd}$$

Proposition 2.7. Soit $C_\bullet$, $D_\bullet$ et $E_\bullet$ trois complexes de chaînes, $\varphi_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ et $\psi_\bullet : D_\bullet \to E_\bullet$ deux morphismes de complexes. Alors la composition $\psi_\bullet \circ \varphi_\bullet : C_\bullet \to E_\bullet$ est un morphisme de complexes.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors on a :

$$\mathrm{d}_n(\psi_n \circ \varphi_n) = \psi_{n-1}\mathrm{d}_n\varphi_n = (\psi_{n-1} \circ \varphi_{n-1})\mathrm{d}_n.$$

Donc $(\psi_n \circ \varphi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est bien un morphisme de complexes. □

Proposition 2.8. Soit $C_\bullet$ un complexe de chaînes. Alors le morphisme identité $\mathrm{id}_{C_\bullet} : C_\bullet \to C_\bullet$ est un morphisme de complexes.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors on a :

$$\mathrm{d}_n \,\mathrm{id}_n = \mathrm{d}_n = \mathrm{id}_{n-1} \,\mathrm{d}_n.$$

Donc $\left(\mathrm{id}_{C_n}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est bien un morphisme de complexes. □

Proposition 2.9. Soit $C_\bullet$ et $D_\bullet$ deux complexes de chaînes, $\varphi_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ un morphisme de complexes. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, φ_n induit un morphisme de groupes $H_n(\varphi) : H_n(C_\bullet) \to H_n(D_\bullet)$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$.
Soit $z \in Z_n(C_\bullet)$. Alors on a $\mathrm{d}_n\varphi_n(z) = \varphi_{n-1}(\mathrm{d}_n z) = \varphi_{n-1}(0) = 0$, donc $\varphi_n(z) \in Z_n(D_\bullet)$.
Soit $b \in B_n(C_\bullet)$. Alors il existe $c \in C_{n+1}$ tel que $b = \mathrm{d}_{n+1}c$, et on a :

$$\varphi_n(b) = \varphi_n(\mathrm{d}_{n+1}c) = \mathrm{d}_{n+1}\varphi_{n+1}(c)$$

donc $\varphi_n(b) \in B_n(D_\bullet)$.

On considère $\overline{\varphi_n} : Z_n(C_\bullet) \to H_n(D_\bullet)$, alors $B_n(C_\bullet) \subset \ker(\overline{\varphi_n})$ et d'après la propriété universelle du groupe quotient le morphisme $\overline{\varphi_n}$ induit bien un morphisme $H_n(\varphi) : H_n(C_\bullet) \to H_n(D_\bullet)$. □

Définition 2.10. Soit $C_\bullet$ et $D_\bullet$ deux complexes de chaînes, $\varphi_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ un morphisme de complexes. On note $H_\bullet(\varphi) : H_\bullet(C_\bullet) \to H_\bullet(D_\bullet)$ le morphisme de groupes gradués $H_\bullet(\varphi) \coloneqq \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H_n(\varphi)$.

2.3. La catégorie Comp

Définition 2.11. On appelle Comp la catégorie des complexes de chaînes :
- Les objets de Comp sont les complexes de chaînes.
- Les morphismes de Comp sont les morphismes de complexes.
- La composition de Comp découle de la Proposition 2.7.
- Le morphisme identité de Comp découle de Proposition 2.8.

Théorème 2.12. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le n^{e} groupe d'homologie H_n est un foncteur de Comp vers Ab.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$.
- Soit $C_\bullet \in \mathrm{ob}(\mathsf{Comp})$ un complexe de chaînes. Alors le n^{e} groupe d'homologie $H_n(C_\bullet)$ est bien un groupe abélien.
- Soit $C_\bullet, D_\bullet \in \mathrm{ob}(\mathsf{Comp})$ deux complexes de chaînes et $\varphi_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ un morphisme de complexes. Alors le morphisme induit $H_n(\varphi) : H_n(C_\bullet) \to H_n(D_\bullet)$ est bien un morphisme de groupes.

La propriété de composition découle de la Proposition 2.7 et la propriété d'identité découle de la Proposition 2.8, donc H_n est bien un foncteur de Comp vers Ab. □

Corollaire 2.13. L'homologie $H_\bullet$ est un foncteur de Comp vers GrAb.

Démonstration.
- Soit $C_\bullet \in \mathrm{ob}(\mathsf{Comp})$ un complexe de chaînes. Alors l'homologie $H_\bullet(C_\bullet) \coloneqq \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H_n(C_\bullet)$ est bien un groupe abélien gradué.
- Soit $C_\bullet, D_\bullet \in \mathrm{ob}(\mathsf{Comp})$ deux complexes de chaînes et $\varphi_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ un morphisme de complexes. Alors le morphisme induit $H_\bullet(\varphi) : H_\bullet(C_\bullet) \to H_\bullet(D_\bullet)$ est bien un morphisme de groupes abéliens gradués.

Les propriétés de composition et d'identité découlent du Théorème 2.12, donc $H_\bullet$ est bien un foncteur de Comp vers GrAb. □

2.4. Premières propriétés

2.4.1. Homotopie

Définition 2.14. Soit $C_\bullet$ et $D_\bullet$ deux complexes de chaînes, $\varphi_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ et $\psi_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ deux morphismes de complexes. On dit que $\varphi_\bullet$ et $\psi_\bullet$ sont *homotopes* s'il existe une suite de morphismes de groupes $(h_n : C_n \to D_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\varphi_n - \psi_n = h_{n-1}\mathrm{d}_n + \mathrm{d}_n h_n$.

Proposition 2.15. L'homotopie est une relation d'équivalence sur les morphismes de complexes.

Démonstration. Notons $\sim$ la relation d'homotopie.
Soit $C_\bullet$ et $D_\bullet$ deux complexes de chaînes, ainsi que $\varphi_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$, $\psi_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ et $\xi_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ trois morphismes de complexes tels que $\varphi_\bullet \sim \psi_\bullet$ et $\psi_\bullet \sim \xi_\bullet$. Alors par définition il existe deux suites de

morphismes de groupes $(f_n : C_n \to D_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(g_n : C_n \to D_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\varphi_n - \psi_n = f_{n-1}\mathrm{d}_n + \mathrm{d}_n f_n$ et $\psi_n - \xi_n = g_{n-1}\mathrm{d}_n + \mathrm{d}_n g_n$.

- *Réflexivité* : Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on peut écrire $\varphi_n - \varphi_n = 0 = 0\mathrm{d}_n + \mathrm{d}_n 0$. Donc on a bien $\varphi_\bullet \sim \varphi_\bullet$.
- *Symétrie* : Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on pose $h_n \coloneqq -f_n$, alors on a $\psi_n - \varphi_n = -(\varphi_n - \psi_n) = h_{n-1}\mathrm{d}_n + \mathrm{d}_n h_n$. Donc on a bien $\psi_\bullet \sim \varphi_\bullet$.
- *Transitivité* : Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on pose $h_n \coloneqq f_n + g_n$, alors on a $\varphi_n - \xi_n = \varphi_n - \psi_n + \psi_n - \xi_n = h_{n-1}\mathrm{d}_n + \mathrm{d}_n h_n$. Donc on a bien $\varphi_\bullet \sim \xi_\bullet$.

Donc l'homotopie est bien une relation d'équivalence sur les morphismes de complexes. □

Proposition 2.16. Soit $A_\bullet$, $B_\bullet$ et $C_\bullet$ trois complexes de chaînes, $\varphi_\bullet : A_\bullet \to B_\bullet$ et $\psi_\bullet : A_\bullet \to B_\bullet$, ainsi que $\alpha_\bullet : B_\bullet \to C_\bullet$ et $\beta_\bullet : B_\bullet \to C_\bullet$ deux paires de morphismes de complexes homotopes. Alors les compositions $\alpha_\bullet \circ \varphi_\bullet : A_\bullet \to C_\bullet$ et $\beta_\bullet \circ \psi_\bullet : A_\bullet \to C_\bullet$ sont homotopes.

Démonstration. Par définition il existe deux suites de morphismes de groupes $(f_n : A_n \to B_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(g_n : B_n \to C_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\varphi_n - \psi_n = f_{n-1}\mathrm{d}_n + \mathrm{d}_n f_n$ et $\alpha_n - \beta_n = g_{n-1}\mathrm{d}_n + \mathrm{d}_n g_n$. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors on a:

$$\begin{aligned}
\alpha_n \circ \varphi_n - \beta_n \circ \psi_n &= \alpha_n \circ \varphi_n - \alpha_n \circ \psi_n + \alpha_n \circ \psi_n - \beta_n \circ \psi_n \\
&= \alpha_n \circ (\varphi_n - \psi_n) + (\alpha_n - \beta_n) \circ \psi_n \\
&= \alpha_n \circ (f_{n-1}\mathrm{d}_n + \mathrm{d}_n f_n) + (g_{n-1}\mathrm{d}_n + \mathrm{d}_n f_n) \circ \psi_n \\
&= (a_n \circ f_{n-1})\mathrm{d}_n + \mathrm{d}_n(a_{n+1} \circ f_n) + (g_{n-1} \circ \psi_{n-1})\mathrm{d}_n + \mathrm{d}_n(f_n \circ \psi_n) \\
&= (a_n \circ f_{n-1} + g_{n-1} \circ \psi_{n-1})\mathrm{d}_n + \mathrm{d}_n(a_{n+1} \circ f_n + f_n \circ \psi_n)
\end{aligned}$$

En posant $h_n \coloneqq a_{n+1} \circ f_n + g_n \circ \psi_n$, on obtient l'égalité voulue $\alpha_n \circ \varphi_n - \beta_n \circ \psi_n = h_{n-1}\mathrm{d}_n + \mathrm{d}_n h_n$. Donc $\alpha_\bullet \circ \varphi_\bullet$ et $\beta_\bullet \circ \psi_\bullet$ sont bien homotopes. □

Proposition 2.17. Soit $C_\bullet$ et $D_\bullet$ deux complexes de chaînes, $\varphi_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ et $\psi_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ deux morphismes de complexes homotopes. Alors on a $H_\bullet(\varphi) = H_\bullet(\psi)$.

Démonstration. Par définition il existe une suite de morphismes de groupes $(h_n : C_n \to D_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\varphi_n - \psi_n = h_{n-1}\mathrm{d}_n + \mathrm{d}_n h_n$.
Soit $n \in \mathbb{Z}$ et $\bar{c} \in H_n(C_\bullet)$. Alors on a $\varphi_n(c) - \psi_n(c) = h_{n-1}(\mathrm{d}_n c) + \mathrm{d}_n h_n(c) = \mathrm{d}_n h_n(c) \in B_n(D_\bullet)$, on en déduit $H_n(\varphi)(c) - H_n(\psi)(c) = 0 \in H_n(D_\bullet)$. Donc $H_\bullet(\varphi) = H_\bullet(\psi)$. □

2.4.2. Complexe de chaînes quotient

Définition 2.18. Soit $C_\bullet$ et $D_\bullet$ deux complexes de chaînes. On dit que $D_\bullet$ est un *sous-complexe de chaînes de* $C_\bullet$ si pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $D_n \subset C_n$.

Proposition 2.19. Soit $C_\bullet$ un complexe de chaînes et $D_\bullet$ un sous-complexe de chaînes de $C_\bullet$. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, d_n induit un morphisme $\overline{\mathrm{d}}_n : C_n/D_n \to C_{n-1}/D_{n-1}$ tel que $\overline{\mathrm{d}}_n\overline{\mathrm{d}}_{n+1} = 0$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors on a $D_n \subset C_n$, on peut donc former le quotient C_n/D_n.
On pose $\delta_n \coloneqq \overline{\mathrm{d}_n} : C_n \to C_{n-1}/D_{n-1}$, alors $D_n \subset \ker(\delta_n)$ et d'après la propriété universelle du groupe quotient δ_n induit bien un morphisme $\overline{\mathrm{d}}_n : C_n/D_n \to C_{n-1}/D_{n-1}$.
Enfin puisque $\mathrm{d}_n\mathrm{d}_{n+1} = 0$, on a bien $\overline{\mathrm{d}}_n\overline{\mathrm{d}}_{n+1} = \overline{\mathrm{d}_n\mathrm{d}_{n+1}} = 0$. □

Corollaire 2.20. Soit $C_\bullet$ un complexe de chaînes et $D_\bullet$ un sous-complexe de chaînes de $C_\bullet$. Alors la suite $(C_n/D_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ munie des morphismes de bords induits $\left(\overline{\mathrm{d}}_n : C_n/D_n \to C_{n-1}/D_{n-1}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ forme un complexe de chaînes.

Définition 2.21. Soit $C_\bullet$ un complexe de chaînes et $D_\bullet$ un sous-complexe de chaînes de $C_\bullet$. On appelle *complexe de chaînes quotient* le complexe de chaînes $C_\bullet/D_\bullet$.

Proposition 2.22. Soit $A_\bullet$ et $C_\bullet$ deux complexes de chaînes, $B_\bullet$ et $D_\bullet$ respectivement deux sous-complexe de chaînes de $A_\bullet$ et $C_\bullet$, et $\varphi_\bullet : A_\bullet \to C_\bullet$ un morphisme de complexes. Si $\varphi_\bullet(B_\bullet) \subset D_\bullet$, alors $\varphi_\bullet$ induit un morphisme de complexes $\overline{\varphi}_\bullet : A_\bullet/B_\bullet \to C_\bullet/D_\bullet$.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on considère $\overline{\varphi_n} : A_n \to C_n/D_n$, alors puisque $\varphi_n(B_n) \subset D_n$, on en déduit $B_n \subset \ker(\overline{\varphi_n})$ et d'après la propriété universelle du groupe quotient $\overline{\varphi_n}$ induit un morphisme $\overline{\varphi}_n : A_n/B_n \to C_n/D_n$. On pose $\overline{\varphi}_\bullet := (\overline{\varphi}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors par définition $\overline{\mathrm{d}}_n\overline{\varphi}_n = \overline{\mathrm{d}_n\varphi_n} = \overline{\varphi_{n-1}\mathrm{d}_n} = \overline{\varphi}_{n-1}\overline{\mathrm{d}}_n$. Donc $\varphi_\bullet$ est bien un morphisme de complexes. □

2.4.3. Exactitude

Définition 2.23. On dit qu'une suite courte de complexes de chaînes est *exacte*, notée :

$$0 \longrightarrow A_\bullet \xrightarrow{\varphi_\bullet} B_\bullet \xrightarrow{\psi_\bullet} C_\bullet \longrightarrow 0$$

si pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la suite courte de groupes suivante est exacte :

$$0 \longrightarrow A_n \xrightarrow{\varphi_n} B_n \xrightarrow{\psi_n} C_n \longrightarrow 0$$

c'est-à-dire que φ_n est injectif, $\mathrm{im}(\varphi_n) = \ker(\psi_n)$ et ψ_n est surjectif.

Lemme 2.24. Soit une suite exacte courte de complexes de chaînes :

$$0 \longrightarrow A_\bullet \xrightarrow{\varphi_\bullet} B_\bullet \xrightarrow{\psi_\bullet} C_\bullet \longrightarrow 0$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il existe un morphisme de groupes $\partial_n : H_n(C_\bullet) \to H_{n-1}(A_\bullet)$ telle que la suite longue des groupes d'homologie est exacte :

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A_\bullet) \xrightarrow{H_n(\varphi)} H_n(B_\bullet) \xrightarrow{H_n(\psi)} H_n(C_\bullet) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A_\bullet) \xrightarrow{H_{n-1}(\varphi)} \cdots$$

De plus pour tout diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_\bullet \arrow[r, "\varphi_\bullet"] \arrow[d, "f_\bullet"] & B_\bullet \arrow[r, "\psi_\bullet"] \arrow[d, "g_\bullet"] & C_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "h_\bullet"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A'_\bullet \arrow[r, "\varphi'_\bullet"'] & B'_\bullet \arrow[r, "\psi'_\bullet"'] & C'_\bullet \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

la transformation ∂_n est naturelle dans le sens où le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
H_n(C_\bullet) \arrow[r, "H_n(h)"] \arrow[d, "\partial_n"'] & H_n(C'_\bullet) \arrow[d, "\partial_n"] \\
H_{n-1}(A_\bullet) \arrow[r, "H_{n-1}(f)"'] & H_{n-1}(A'_\bullet)
\end{tikzcd}$$

Remarque 2.25. La naturalité de ∂_n coïncide bien avec la notion introduite dans le Chapitre 1.3 si on considère la catégorie des suites exactes courtes de complexes.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$. On commence par faire un diagramme en 3 dimensions pour la suite :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
 & & & \vdots \arrow[dd] & & \vdots \arrow[dd] & & \vdots \arrow[dd] & & \\
 & & \vdots \arrow[dd] & & \vdots \arrow[dd] & & \vdots \arrow[dd] & & & \\
 & 0 \arrow[rr] & & A'_{n+1} \arrow[rr] \arrow[dd] & & B'_{n+1} \arrow[rr] \arrow[dd] & & C'_{n+1} \arrow[rr] \arrow[dd] & & 0 \\
0 \arrow[rr] & & A_{n+1} \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd] & & B_{n+1} \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd] & & C_{n+1} \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd] & & 0 & \\
 & 0 \arrow[rr] & & A'_{n} \arrow[rr] \arrow[dd] & & B'_{n} \arrow[rr] \arrow[dd] & & C'_{n} \arrow[rr] \arrow[dd] & & 0 \\
0 \arrow[rr] & & A_{n} \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd] & & B_{n} \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd] & & C_{n} \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd] & & 0 & \\
 & 0 \arrow[rr] & & A'_{n-1} \arrow[rr] \arrow[dd] & & B'_{n-1} \arrow[rr] \arrow[dd] & & C'_{n-1} \arrow[rr] \arrow[dd] & & 0 \\
0 \arrow[rr] & & A_{n-1} \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd] & & B_{n-1} \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd] & & C_{n-1} \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd] & & 0 & \\
 & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & &
\end{tikzcd}$$

Soit $\overline{c} \in H_n(C_\bullet)$. Puisque ψ_n est surjective par exactitude, il existe $b \in B_n$ tel que $\psi_n(b) = c$. De plus on a $\psi_{n-1}(\mathrm{d}_n b) = \mathrm{d}_n\psi_n(b) = \mathrm{d}_n c = 0$, donc $\mathrm{d}_n b \in \ker(\psi_{n-1})$ et par exactitude il existe $a \in A_{n-1}$ tel que $\varphi_{n-1}(a) = \mathrm{d}_n b$. De plus on a $\varphi_{n-2}(\mathrm{d}_{n-1}a) = \mathrm{d}_{n-1}\varphi_{n-1}(a) = \mathrm{d}_{n-1}\mathrm{d}_n b = 0$, puisque φ_{n-2} est injective par exactitude, on a $\mathrm{d}_{n-1}a = 0$, donc $a \in Z_{n-1}(A_\bullet)$. Donc on pose $\partial_n\overline{c} := \overline{a} \in H_{n-1}(A_\bullet)$.

Vérifions que $\partial_n\overline{c}$ ne dépend pas des choix réalisés. Soit $b' \in B_n$ tel que $\psi_n(b') = c$ et $a' \in A_{n-1}$ tel que $\mathrm{d}_n b' = \varphi_{n-1}(a')$. Alors on a $\psi_n(b - b') = c - c = 0$, donc $b - b' \in \ker(\psi_n)$ et par exactitude il existe $\hat{a} \in A_n$ tel que $\varphi_n(\hat{a}) = b - b'$. Alors $\varphi_{n-1}(\mathrm{d}_n\hat{a}) = \mathrm{d}_n b - \mathrm{d}_n b' = \varphi_{n-1}(a - a')$, puisque φ_{n-1} est injective par exactitude, on a $\mathrm{d}_n\hat{a} = a - a'$, donc $a - a' \in B_{n-1}(A_\bullet)$ et $\overline{a} = \overline{a'} \in H_{n-1}(A_\bullet)$.

Vérifions que la suite longue est exacte.

- Soit $\overline{a} \in \mathrm{im}(\partial_{n+1})$. Par construction il existe $b \in B_{n+1}$ tel que $\varphi_n(a) = \mathrm{d}_{n+1}b$, d'où $\varphi_n(a) \in B_n(B_\bullet)$ et $H_n(\varphi)\big(\overline{a}\big) = 0 \in H_n(B_\bullet)$. Donc $\overline{a} \in \ker(H_n(\varphi))$.

  Soit $\overline{a} \in \ker(H_n(\varphi))$. Alors $\varphi_n(a) \in B_n(B_\bullet)$ et il existe $b \in B_{n+1}$ tel que $\varphi_n(a) = \mathrm{d}_{n+1}b$. De plus par exactitude on a $d_{n+1}\psi_{n+1}(b) = \psi_n(\mathrm{d}_{n+1}(b)) = \psi_n(\varphi_n(a)) = 0$, d'où $\psi_{n+1}(b) \in Z_{n+1}(C_\bullet)$, et par construction on retrouve bien $\partial_n\overline{\psi_{n+1}(b)} = \overline{a} \in H_n(A_\bullet)$. Donc $\overline{a} \in \mathrm{im}(\partial_{n+1})$.
- Soit $\overline{b} \in \mathrm{im}(H_n(\varphi))$. Il existe $a \in A_n$ tel que $\varphi_n(a) = b$. Alors on a $b \in \mathrm{im}(\varphi_n)$ et par exactitude $b \in \ker(\psi_n)$. Donc $\overline{b} \in \ker(H_n(\psi))$.

  Soit $\overline{b} \in \ker(H_n(\psi))$. Alors $\psi_n(b) \in B_n(C_\bullet)$ et il existe $c \in C_{n+1}$ tel que $\psi_n(b) = \mathrm{d}_{n+1}c$. Puisque ψ_{n+1} est surjective par exactitude, il existe $b' \in B_{n+1}$ tel que $\psi_{n+1}(b') = c$. De plus on a $\psi_n(d_{n+1}b') = \mathrm{d}_{n+1}\psi_{n+1}(b') = \mathrm{d}_{n+1}c = \psi_n(b)$, donc $b - \mathrm{d}_{n+1}b' \in \ker(\psi_n)$ et par exactitude il existe $a \in A_n$ tel que $\varphi_n(a) = b - \mathrm{d}_{n+1}b'$. Alors $\varphi_{n-1}(\mathrm{d}_n a) = \mathrm{d}_n b - \mathrm{d}_n\mathrm{d}_{n+1}b' = \mathrm{d}_n b = 0$, puisque φ_{n-1} est injective par exactitude, on a $\mathrm{d}_n a = 0$, donc $a \in Z_n(A_\bullet)$. De plus $H_n(\varphi)\big(\overline{a}\big) = \overline{b} \in H_n(B_\bullet)$. Donc $\overline{b} \in \mathrm{im}(H_n(\varphi))$.
- Soit $\overline{c} \in \mathrm{im}(H_n(\psi))$. Il existe $b \in Z_n(B_\bullet)$ tel que $\psi_n(b) = c$. De plus on a $\mathrm{d}_n b = 0 \in \ker(\psi_{n-1})$, par exactitude il existe $a \in A_{n-1}$ tel que $\varphi_{n-1}(a) = \mathrm{d}_n b = 0$, puisque φ_{n-1} est injective par exactitude, on a $a = 0$ et par construction $\partial_n\overline{c} = \overline{a} = 0 \in H_{n-1}(A_\bullet)$. Donc $\overline{c} \in \ker(\partial_n)$.

  Soit $\overline{c} \in \ker(\partial_n)$. Alors $c \in Z_n(C_\bullet)$, puisque ψ_n est surjective par exactitude, il existe $b \in B_n$ tel que $\psi_n(b) = c$, d'où $H_n(\psi)\big(\overline{b}\big) = \overline{c}$. Donc $\overline{c} \in \mathrm{im}(H_n(\psi))$.

Vérifions que ∂_n est naturelle. Soit $\overline{c} \in H_n(C_\bullet)$.
Par construction il existe $b \in B_n$ tel que $\psi_n(b) = c$ et il existe $a \in Z_{n-1}(A_\bullet)$ tel que $\varphi_{n-1}(a) = \mathrm{d}_n b$ et $\partial_n\overline{c} = \overline{a} \in H_{n-1}(A_\bullet)$. Donc on a $H_{n-1}(f)\big(\partial_n\overline{c}\big) = \overline{f_{n-1}(a)} \in H_{n-1}(A'_\bullet)$.
De plus $\psi'_n(g_n(b)) = h_n(\psi_n(b)) = h_n(c)$ et $\varphi'_{n-1}(f_{n-1}(a)) = g_{n-1}(\varphi_{n-1}(a)) = g_{n-1}(\mathrm{d}_n b) = \mathrm{d}_n g_n(b)$, alors par construction on a $\partial_n H_n(h)\big(\overline{c}\big) = \overline{f_{n-1}(a)} \in H_{n-1}(A'_\bullet)$. Donc $H_{n-1}(f)(\partial_n) = \partial_n H_n(h)$. $\square$

Corollaire 2.26. Soit $C_\bullet$ un complexe de chaînes et $D_\bullet$ un sous-complexe de chaînes de $C_\bullet$. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il existe un morphisme de groupes $\partial_n : H_n(C_\bullet/D_\bullet) \to H_{n-1}(D_\bullet)$ telle que la suite longue suivante est exacte :

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(D_\bullet) \xrightarrow{H_n(i)} H_n(C_\bullet) \xrightarrow{H_n(\pi)} H_n(C_\bullet/D_\bullet) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(D_\bullet) \xrightarrow{H_{n-1}(i)} \cdots$$

où $i_\bullet : D_\bullet \to C_\bullet$ est l'inclusion canonique et $\pi_\bullet : C_\bullet \to C_\bullet/D_\bullet$ est la projection canonique.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Par définition l'inclusion $i_n : D_n \to C_n$ est injective, de plus on a clairement $\mathrm{im}(i_n) = D_n = \ker(\pi_n)$ et par définition la projection $\pi_n : C_n \to C_n/D_n$ est surjective.
Donc on a une suite exacte courte de complexe de chaînes :

$$0 \longrightarrow D_\bullet \xrightarrow{i_\bullet} C_\bullet \xrightarrow{\pi_\bullet} C_\bullet/D_\bullet \longrightarrow 0$$

Alors d'après le Lemme 2.24 il existe bien un morphisme de groupes $\partial_n : H_n(C_\bullet/D_\bullet) \to H_{n-1}(D_\bullet)$ tel que la suite longue est exacte. $\square$

3. Homologie singulière

3.1. Simplexes

Définition 3.1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et A un sous-ensemble de E. On dit que A est *convexe* si :

$$\forall p, q \in A, [p, q] \coloneqq \{(1-t)p + tq \mid t \in [0,1]\} \subset A.$$

Définition 3.2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, A un sous-ensemble de E et $f_0, \ldots, f_n$ des éléments de A. On appelle *combinaison convexe* une combinaison linéaire de la forme $t_0 f_0 + \cdots + t_n f_n$ où $t_0, \ldots, t_n \in [0,1]$ et $t_0 + \cdots + t_n = 1$.

Proposition 3.3. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, A un sous-ensemble de E et $f_0, \ldots, f_n$ des éléments de A. Si A est convexe, alors toute combinaison convexe de $f_0, \ldots, f_n$ appartient à A.

Démonstration. Soit $t_0, \ldots, t_n \in [0,1]$ tels que $t_0 + \cdots + t_n = 1$. Notons $H(n) : t_0 f_0 + \cdots + t_n f_n \in A$.
Pour $n = 1$. On pose $t \coloneqq t_1$, alors puisque A est convexe $t_0 f_0 + t_1 f_1 = (1-t) f_0 + t f_1 \in A$.
Pour $n > 1$. On suppose que $H(n-1)$ est vérifiée. Sans perte de généralité, on suppose que $t_n \neq 1$, et on pose :

$$p \coloneqq \frac{t_0}{1-t_n} f_0 + \cdots + \frac{t_{n-1}}{1-t_n} f_{n-1}$$

alors d'après $H(n-1)$ on a $p \in A$. Par convexité on a $t_0 f_0 + \cdots + t_n f_n = (1-t_n)p + t_n f_n \in A$. $\square$

Définition 3.4. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et A un sous-ensemble de E. On appelle *enveloppe convexe de* A, notée $\mathrm{Conv}(A)$, l'ensemble des combinaisons convexes d'éléments de A.

Proposition 3.5. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et A un sous-ensemble de E. Alors l'enveloppe convexe de A est le plus petit ensemble convexe contenant A.

Démonstration. Soit $p, q \in \mathrm{Conv}(A)$ et $t \in [0,1]$. Puisque p et q sont des combinaisons convexes d'éléments de A, d'après la Proposition 3.3 on a $(1-t)p + tq \in \mathrm{Conv}(A)$. Donc l'ensemble $\mathrm{Conv}(A)$ est convexe.

Soit B un sous-ensemble convexe de E contenant A. Soit $x \in \mathrm{Conv}(A)$. Puisque x est une combinaison convexe d'éléments de $A \subset B$, d'après la Proposition 3.3 on a $x \in B$. Donc $\mathrm{Conv}(A) \subset B$. $\square$

Définition 3.6. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et F une famille libre de $n+1$ éléments de E. On appelle *n-simplexe généré par F* l'enveloppe convexe de F. On dit que les éléments de F sont les *sommets* de $\mathrm{Conv}(F)$ et que n est la *dimension* de $\mathrm{Conv}(F)$.

Définition 3.7. On appelle *n-simplexe standard*, noté Δ^n, le n-simplexe généré par la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Proposition 3.8. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $F \coloneqq (f_0, \ldots, f_n)$ une famille libre de $n+1$ éléments de E. Alors l'application :

$$\langle f_0, \ldots, f_n \rangle : \Delta^n \to \mathrm{Conv}(F); (t_0, \ldots, t_n) \mapsto t_0 f_0 + \ldots + t_n f_n$$

est un homéomorphisme.

Démonstration. Soit $(s_0, \ldots, s_n), (t_0, \ldots, t_n) \in \Delta^n$ tels que $s_0 f_0 + \ldots + s_n f_n = t_0 f_0 + \ldots + t_n f_n$. En particulier on a $(s_0 - t_0) f_0 + \ldots + (s_n - t_n) f_n = 0$, et puisque la famille $(f_0, \ldots, f_n)$ est libre, on obtient $s_0 - t_0 = \ldots = s_n - t_n = 0$, c'est-à-dire $(s_0, \ldots, s_n) = (t_0, \ldots, t_n)$. Donc $\langle f_0, \ldots, f_n \rangle$ est injective.
Soit $x \in \mathrm{Conv}(F)$. Alors il existe $(t_0, \ldots, t_n) \in \Delta^n$ tels que $x \coloneqq t_0 f_0 + \ldots + t_n f_n$. Donc $\langle f_0, \ldots, f_n \rangle$ est surjective. Puisque $\langle f_0, \ldots, f_n \rangle$ est une application linéaire et que Δ^n est de dimension finie, $\langle f_0, \ldots, f_n \rangle$ est continue. De plus Δ^n est compact, donc d'après le Théorème B $\langle f_0, \ldots, f_n \rangle$ est un homéomorphisme. $\square$

Définition 3.9. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $F := (f_0, \dots, f_n)$ une famille libre de $n+1$ éléments de E et $x := t_0 f_0 + \dots + t_n f_n$ un élément de $\mathrm{Conv}(F)$. On appelle *coordonnées barycentriques de x* les coefficients $t_0, \dots, t_n \in [0,1]$.

Définition 3.10. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, F une famille libre de $n+1$ éléments de E et G une famille non-vide d'éléments de $m+1$ éléments de F. On dit que $\mathrm{Conv}(G)$ est une *m-face* de $\mathrm{Conv}(F)$.

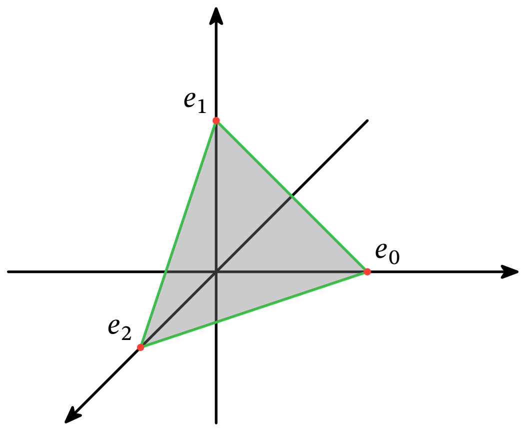

Fig. 1. – Un 2-simplexe standard.
En vert les arêtes sont des 1-faces du triangle.
En rouge les sommets sont des 0-faces du triangle et des arêtes.

3.2. Chaînes singulières

Définition 3.11. Soit X un espace topologique. On appelle *n-simplexe singulier sur X* une application continue de Δ^n dans X.

Exemple 3.12. L'application $\langle e_0, \dots, e_n \rangle$ de la Proposition 3.8, où $(e_0, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$, est un n-simplexe singulier sur $\mathbb{R}^{n+1}$.

Proposition 3.13. Soit X et Y deux espaces topologiques, $f : X \to Y$ une application continue et $\sigma : \Delta^n \to X$ un n-simplexe singulier sur X. Alors la composition $f \circ \sigma : \Delta^n \to Y$ est un n-simplexe singulier sur Y.

Démonstration. Puisque f est continue sur X et σ est continue sur Δ^n, par composition $f \circ \sigma$ est continue de Δ^n dans Y. Donc $f \circ \sigma$ est un n-simplexe singulier sur X. □

Définition 3.14. Soit X un espace topologique. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on appelle *groupe des n-chaînes singulières*, noté $C_n(X)$, le groupe abélien libre engendré par les n-simplexes singuliers sur X.

Définition 3.15. Soit X et Y deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application continue. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle *application induite par f*, notée $C_n(f)$, le morphisme de groupes :

$$C_n(f) : C_n(X) \to C_n(Y); \sum_{k=0}^{m} \lambda_k \sigma_k \mapsto \sum_{k=0}^{m} \lambda_k (f \circ \sigma_k).$$

Proposition 3.16. Soit X, Y et Z trois espaces topologiques, $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux applications continues. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $C_n(g \circ f) = C_n(g) \circ C_n(f)$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque les n-chaînes singulières sont engendrées par les n-simplexes singuliers, il suffit de montrer le résultat pour un n-simplexe singulier $\sigma : \Delta^n \to X$. Alors on a :

$$C_n(g \circ f)(\sigma) = (g \circ f) \circ \sigma = g \circ (f \circ \sigma) = g \circ C_n(f)(\sigma) = C_n(g)(C_n(f)(\sigma))$$

□

Proposition 3.17. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le groupe des n-chaînes singulières C_n est un foncteur de Top vers Ab.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Soit X un espace topologique. Alors le groupe des n-chaînes singulières $C_n(X)$ est bien un groupe abélien.
- Soit X et Y deux espaces topologiques, $f : X \to Y$ une application continue. Alors l'application induite $C_n(f) : C_n(X) \to C_n(Y)$ est bien un morphisme de groupes.

La propriété de composition découle de la Proposition 3.16 et la propriété d'identité découle directement de la définition, donc C_n est bien un foncteur de Top vers Ab. □

Définition 3.18. Soit X un espace topologique et $\sigma : \Delta^n \to X$ un n-simplexe singulier sur X. On appelle *bord de* σ, noté $\mathrm{d}_n\sigma$, la $(n-1)$-chaîne singulière sur X définie par :

$$\mathrm{d}_n\sigma \coloneqq \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\Big(\sigma \circ \Big\langle e_0, \dots, \widehat{e_k}, \dots e_n\Big\rangle\Big).$$

où le symbole $\widehat{\cdot}$ signifie que l'élément est enlevé.

Remarque 3.19. Le bord d'un n-simplexe singulier est la somme alternée de ses $(n-1)$-faces.

Définition 3.20. Soit X un espace topologique et $n \in \mathbb{N}$. On appelle *morphisme de bord*, noté d_n, le morphisme de groupes induit :

$$\mathrm{d}_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X); \sum_{k=0}^{m} \lambda_k\sigma_k \mapsto \sum_{k=0}^{m} \lambda_k \mathrm{d}_n\sigma_k.$$

Proposition 3.21. Soit X et Y deux espaces topologiques, $f : X \to Y$ une application continue. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{d}_n C_n(f) = C_{n-1}(f)\mathrm{d}_n$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Il suffit de montrer le résultat pour un n-simplexe singulier $\sigma : \Delta^n \to X$. Alors on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_n C_n(f)(\sigma) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\Big((f \circ \sigma) \circ \Big\langle e_0, \dots, \widehat{e_k}, \dots, e_n\Big\rangle\Big) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\Big(f \circ \Big(\sigma \circ \Big\langle e_0, \dots, \widehat{e_k}, \dots, e_n\Big\rangle\Big)\Big) \\
&= C_{n-1}(f)(\mathrm{d}_n\sigma).
\end{aligned}$$

□

Proposition 3.22. Soit X un espace topologique. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{d}_n\mathrm{d}_{n+1} = 0$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Il suffit de montrer le résultat pour un $(n+1)$-simplexe singulier $\sigma : \Delta^{n+1} \to X$. Alors on a :

$$\mathrm{d}_{n+1}\sigma = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k\Big(\sigma \circ \Big\langle e_0, \dots, \widehat{e_k}, \dots, e_{n+1}\Big\rangle\Big)$$

donc en appliquant d_n, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_n\mathrm{d}_{n+1}\sigma &= \mathrm{d}_n\left(\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k\Big(\sigma \circ \Big\langle e_0, \dots, \widehat{e_k}, \dots, e_{n+1}\Big\rangle\Big)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \mathrm{d}_n\Big(\sigma \circ \Big\langle e_0, \dots, \widehat{e_k}, \dots, e_{n+1}\Big\rangle\Big)
\end{aligned}$$

on sépare la somme en deux selon les éléments enlevés :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_n\mathrm{d}_{n+1}\sigma &= \sum_{0\le k<l\le n+1} (-1)^{k+l}\left(\sigma\circ\left\langle e_0,\ldots,\widehat{e_k},\ldots,\widehat{e_l},\ldots,e_{n+1}\right\rangle\right)\\
&\quad+\sum_{0\le l<k\le n+1} (-1)^{k+l-1}\left(\sigma\circ\left\langle e_0,\ldots,\widehat{e_l},\ldots,\widehat{e_k},\ldots,e_{n+1}\right\rangle\right)\\
&= \sum_{0\le k<l\le n+1} \left((-1)^{k+l}+(-1)^{k+l+1}\right)\left(\sigma\circ\left\langle e_0,\ldots,\widehat{e_k},\ldots,\widehat{e_l},\ldots,e_{n+1}\right\rangle\right)\\
&= 0
\end{aligned}$$

car les puissances de -1 s'annulent. □

3.3. Définitions de l'homologie singulière

3.3.1. D'un espace topologique

Proposition 3.23. La suite $(C_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ où pour tout $n<0$, on pose $C_n \coloneqq 0$, munie des morphismes des bords $(\mathrm{d}_n : C_n \to C_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}$ est un foncteur de Top vers Comp.

Démonstration. Soit $n\in\mathbb{Z}$.

- Soit X un espace topologique. Alors la suite $(C_n(X))_{n\in\mathbb{Z}}$ munie des morphismes de bords $(\mathrm{d}_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X))_{n\in\mathbb{Z}}$ est bien un complexe de chaînes d'après la Proposition 3.22.
- Soit X et Y deux espaces topologiques, $f : X \to Y$ une application continue. Alors la suite des applications induites $(C_n(f) : C_n(X) \to C_n(Y))_{n\in\mathbb{Z}}$ est bien un morphisme de complexes d'après la Proposition 3.21.

La propriété de composition découle de la Proposition 3.16 et la propriété d'identité découle directement de la définition, donc C_n est bien un foncteur de Top vers Comp. □

Définition 3.24. Soit X un espace topologique. On appelle *complexe de chaînes singulières de X*, noté $C_\bullet(X)$, le complexe de chaînes déterminé par la suite $(C_n(X))_{n\in\mathbb{N}}$ munie des morphismes de bords $(\mathrm{d}_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X))_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 3.25. Soit $C_\bullet(X)$ un complexe de chaînes singulières et $n\in\mathbb{Z}$.

- On appelle *n-cycle singulier* un élément de $Z_n(X) \coloneqq Z_n(C_\bullet(X))$.
- On appelle *n-bord singulier* un élément de $B_n(X) \coloneqq B_n(C_\bullet(X))$.
- On appelle *nᵉ groupe d'homologie singulière de X* le groupe $H_n(X) \coloneqq H_n(C_\bullet(X))$.
- On appelle *homologie singulière de X* le groupe $H_\bullet(X) \coloneqq H_\bullet(C_\bullet(X))$.

Définition 3.26. Soit X et Y deux espaces topologiques, $f : X \to Y$ une application continue. On appelle *morphisme de complexes induit par f*, notée $f_\bullet : C_\bullet(X) \to C_\bullet(Y)$, la suite des applications induites $f_\bullet \coloneqq (C_n(f) : C_n(X) \to C_n(Y))_{n\in\mathbb{Z}}$

Corollaire 3.27. Pour tout $n\in\mathbb{Z}$, le nᵉ groupe d'homologie singulière H_n est un foncteur de Top vers Ab.

Démonstration. Soit $n\in\mathbb{Z}$. D'après la Proposition 3.23 $C_\bullet$ est un foncteur de Top vers Comp et d'après le Théorème 2.12 H_n est un foncteur de Comp vers Ab, par composition $H_n = H_n(C_\bullet)$ est bien un foncteur de Top vers Ab. □

Corollaire 3.28. L'homologie singulière $H_\bullet$ est un foncteur de Top vers GrAb.

Démonstration. D'après la Proposition 3.23 $C_\bullet$ est un foncteur de Top vers Comp et d'après le Corollaire 2.13 $H_\bullet$ est un foncteur de Comp vers GrAb, par composition $H_\bullet = H_\bullet(C_\bullet)$ est bien un foncteur de Top vers GrAb. □

3.3.2. D'une paire d'espace topologique

Proposition 3.29. La suite $(C_n/C_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ où pour tout $n<0$, on pose $C_n \coloneqq 0$, munie des morphismes des bords induits $\left(\overline{\mathrm{d}}_n : C_n/C_n \to C_{n-1}/C_{n-1}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un foncteur de Top_2 vers Comp.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

- Soit (X,A) une paire d'espaces topologiques. Alors il est clair que $C_\bullet(A)$ est un sous-complexe de chaînes de $C_\bullet(X)$, donc la suite $(C_n(X)/C_n(A))_{n\in\mathbb{Z}}$ munie des morphismes de bords induits $\left(\overline{\mathrm{d}}_n : C_n(X)/C_n(A) \to C_{n-1}(X)/C_{n-1}(A)\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est bien un complexe de chaînes d'après la Proposition 2.19.
- Soit (X,A) et (Y,B) deux paires d'espaces topologiques, $f:(X,A)\to(Y,B)$ un morphisme de paires. Alors il est clair que $f_\bullet(C_\bullet(A)) \subset C_\bullet(B)$, donc le morphisme induit $\overline{f}_\bullet : C_n(X)/C_n(A) \to C_n(Y)/C_n(B)$ est bien un morphisme de complexes d'après la Proposition 2.22.

La propriété de composition découle de la Proposition 3.16 par passage au quotient et la propriété d'identité découle directement de la définition, donc C_n est bien un foncteur de Top vers Comp. □

Définition 3.30. Soit (X,A) une paire d'espaces topologiques. On appelle *complexe de chaînes singulières de la paire* (X,A), noté $C_\bullet(X,A)$, le complexe de chaînes quotient $C_\bullet(X,A) \coloneqq C_\bullet(X)/C_\bullet(A)$.

Définition 3.31. Soit $C_\bullet(X,A)$ un complexe de chaînes singulières et $n\in\mathbb{Z}$.

- On appelle *n-cycle singulier* un élément de $Z_n(X,A) \coloneqq Z_n(C_\bullet(X)/C_\bullet(A))$.
- On appelle *n-bord singulier* un élément de $B_n(X,A) \coloneqq B_n(C_\bullet(X)/C_\bullet(A))$.
- On appelle *n^e groupe d'homologie singulière de* (X,A) le groupe $H_n(X,A) \coloneqq H_n(C_\bullet(X)/C_\bullet(A))$.
- On appelle *homologie singulière de* (X,A) le groupe $H_\bullet(X,A) \coloneqq H_\bullet(C_\bullet(X)/C_\bullet(A))$.

Corollaire 3.32. Pour tout $n\in\mathbb{Z}$, le n^e groupe d'homologie singulière de paires H_n est un foncteur de Top_2 vers Ab.

Démonstration. Soit $n\in\mathbb{Z}$. D'après la Proposition 3.29 $C_\bullet$ est un foncteur de Top_2 vers Comp et d'après le Théorème 2.12 H_n est un foncteur de Comp vers Ab, par composition $H_n = H_n(C_\bullet)$ est bien un foncteur de Top_2 vers Ab. □

Corollaire 3.33. L'homologie singulière de paires $H_\bullet$ est un foncteur de Top_2 vers GrAb.

Démonstration. D'après la Proposition 3.29 $C_\bullet$ est un foncteur de Top_2 vers Comp et d'après le Corollaire 2.13 $H_\bullet$ est un foncteur de Comp vers GrAb, par composition $H_\bullet = H_\bullet(C_\bullet)$ est bien un foncteur de Top_2 vers GrAb. □

3.4. Principales propriétés

3.4.1. Axiomes d'Eilenberg-Steenrod

Théorème 3.34 (Axiome de dimension)**.** Soit P un espace topologique constitué d'un unique point. Alors pour tout $n\in\mathbb{Z}$, on a :

$$H_n(P) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} \text{ si } n=0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Démonstration. Soit $n\in\mathbb{Z}$. Si $n<0$, on a clairement $H_n(P)\simeq 0$.
Si $n\geq 0$, il existe un unique n-simplexe singulier $\sigma_n : \Delta^n \to P$, alors on a :

$$\mathrm{d}_n\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sigma_{n-1} = \begin{cases} 0 & \text{si } n=0 \text{ ou } n \text{ est impair} \\ \sigma_{n-1} & \text{si } n\neq 0 \text{ et } n \text{ est pair} \end{cases}$$

dans le cas $n=0$, alors $H_0(P) = \langle\sigma_0\rangle/0 \simeq \mathbb{Z}$,
dans le cas $n\neq 0$ et n est impair, alors $H_n(P) = \langle\sigma_n\rangle/\langle\sigma_n\rangle \simeq 0$,
dans le cas $n\neq 0$ et n est pair, alors $H_n(P) = 0/0 \simeq 0$. □

Définition 3.35. Soit X et Y deux espaces topologiques, $f : X \to Y$ et $g : X \to Y$ deux applications continues. On dit que f et g sont *homotopes* s'il existe une application continue $h : X \times [0,1] \to Y$ telle que pour tout $x \in X$, on a $f(x) = h(x,0)$ et $g(x) = h(x,1)$.

Lemme 3.36. Soit X et Y deux espaces topologiques, $f : X \to Y$ et $g : X \to Y$ deux applications continues homotopes. Alors les morphismes de complexes $f_\bullet : C_\bullet(X) \to C_\bullet(Y)$ et $g : C_\bullet(X) \to C_\bullet(Y)$ sont homotopes.

Démonstration. Par définition de l'homotopie il existe une application continue $h : X \times [0,1] \to Y$ telle que pour tout $x \in X$, on a $f(x) = h(x,0)$ et $g(x) = h(x,1)$.

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Il suffit de définir une homotopie pour un n-simplexe singulier $\sigma : \Delta^n \to X$. On pose :

$$h_n(\sigma) \coloneqq \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (h \circ (\sigma \times \mathrm{id}) \circ \langle f_0, \dots, f_k, g_k, \dots, g_n \rangle) \in C_{n+1}(Y)$$

où $(f_0, \dots, f_n) \coloneqq (e_0 \times \{1\}, \dots, e_n \times \{1\})$ et $(g_0, \dots, g_n) \coloneqq (e_0 \times \{0\}, \dots, e_n \times \{0\})$. Calculons maintenant les deux expressions qui nous intéressent :

$$\begin{aligned} h_{n-1}(\mathrm{d}_n\sigma) &= h_n\left(\sum_{l=0}^{n} (-1)^l \left(\sigma \circ \left\langle e_0, \dots, \widehat{e_l}, \dots, e_n \right\rangle\right)\right) \\ &= \sum_{0 \le k < l \le n} (-1)^{k+l} \left(h \circ (\sigma \times \mathrm{id}) \circ \left\langle f_0, \dots, f_k, g_k, \dots, \widehat{g_l}, \dots, g_n \right\rangle\right) \\ &\quad + \sum_{0 \le l < k \le n} (-1)^{k+l-1} \left(h \circ (\sigma \times \mathrm{id}) \circ \left\langle f_0, \dots, \widehat{f_l}, \dots, f_k, g_k, \dots, g_n \right\rangle\right) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_n h_n(\sigma) &= \mathrm{d}_n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (h \circ (\sigma \times \mathrm{id}) \circ \langle f_0, \dots, f_k, g_k, \dots, g_n \rangle) \\ &= \sum_{0 \le l \le k \le n} (-1)^{k+l} \left(h \circ (\sigma \times \mathrm{id}) \circ \left\langle f_0, \dots, \widehat{f_l}, \dots, f_k, g_k, \dots, g_n \right\rangle\right) \\ &\quad + \sum_{0 \le k \le l \le n} (-1)^{k+l-1} \left(h \circ (\sigma \times \mathrm{id}) \circ \left\langle f_0, \dots, f_k, g_k, \dots, \widehat{g_l}, \dots, g_n \right\rangle\right) \end{aligned}$$

en faisant la somme des deux expressions les termes d'indices différents s'annulent deux à deux :

$$\begin{aligned} h_{n-1}(\mathrm{d}_n\sigma) + \mathrm{d}_n h_n(\sigma) &= \sum_{k=0}^{n} (h \circ (\sigma \times \mathrm{id}) \circ \langle f_0, \dots, f_{k-1}, g_k, \dots, g_n \rangle) \\ &\quad - \sum_{k=0}^{n} (h \circ (\sigma \times \mathrm{id}) \circ \langle f_0, \dots, f_k, g_{k+1}, \dots, g_n \rangle) \\ &= (h \circ (\sigma \times \mathrm{id}) \circ \langle g_0, \dots, g_n \rangle) - (h \circ (\sigma \times \mathrm{id}) \circ \langle f_0, \dots, f_n \rangle) \\ &= (h \circ (\sigma \times \{0\})) - (h \circ (\sigma \times \{1\})) \\ &= (f \circ \sigma) - (g \circ \sigma) \\ &= C_n(f)(\sigma) - C_n(g)(\sigma) \end{aligned}$$

Donc les morphismes de complexes $f_\bullet$ et $g_\bullet$ sont bien homotopes. □

Théorème 3.37 (Axiome d'homotopie)**.** Soit X et Y deux espaces topologiques, $f : X \to Y$ et $g : X \to Y$ deux applications continues homotopes. Alors on a $H_\bullet(f) = H_\bullet(g)$.

Démonstration. Puisque f et g sont homotopes, d'après le Lemme 3.36 $f_\bullet$ et $g_\bullet$ sont homotopes. Donc d'après le Proposition 2.17 on a bien $H_\bullet(f) = H_\bullet(g)$. □

Théorème 3.38 (Axiome d'exactitude)**.** Soit $C_\bullet(X,A)$ un complexe de chaînes singulières. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il existe un morphisme de groupes $\partial_n : H_n(X,A) \to H_{n-1}(A)$ telle que la suite longue suivante est exacte :

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A) \xrightarrow{H_n(i)} H_n(X) \xrightarrow{H_n(j)} H_n(X,A) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A) \xrightarrow{H_{n-1}(i)} \cdots$$

où $i : A \to X$ et $j : (X,\varnothing) \to (X,A)$ sont les inclusions canoniques.

Démonstration. On remarque que $i_\bullet : C_\bullet(A) \to C_\bullet(X)$ est l'inclusion canonique et qu'en passant au quotient $\overline{j}_\bullet : C_\bullet(X,\varnothing) \simeq C_\bullet(X) \to C_\bullet(X,A)$ devient la projection canonique.
Donc d'après le Corollaire 2.26 il existe bien un morphisme de groupes $\partial_n : H_n(X,A) \to H_{n-1}(A)$ tel que la suite longue est exacte. □

Théorème 3.39 (Axiome d'excision)**.** Soit (X,A) une paire d'espaces topologiques, U une partie de A telle que $\overline{U} \subset \mathring{A}$ et $i : (X \setminus U, A \setminus U) \to (X,A)$ l'inclusion canonique. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le morphisme induit $H_n(i) : H_n(X \setminus U, A \setminus U) \to H_n(X,A)$ est un isomorphisme.

Démonstration. Admise. □

Définition 3.40. Une *théorie de l'homologie* sur la catégorie des paires d'espaces topologiques Top_2 dans la catégorie des groupes abéliens Ab est une suite de foncteurs $(H_n : \mathsf{Top}_2 \to \mathsf{Ab})_{n\in\mathbb{Z}}$ munie de transformations naturelles $(\partial_n : H_n(X,A) \to H_{n-1}(A) \coloneqq H_{n-1}(A,\varnothing))_{n\in\mathbb{Z}}$ vérifiant les *axiomes d'Eilenberg-Steenrod* pour toutes paires d'espaces topologiques $(X,A),(Y,B)$ et $n \in \mathbb{Z}$:

- *Dimension* : Soit P un espace constitué d'un unique point. Alors le groupe $H_n(P)$ est non-trivial si et seulement si $n = 0$.
- *Homotopie* : Soit $f : (X,A) \to (Y,B)$ et $g : (X,A) \to (Y,B)$ deux morphismes de paires homotopes. Alors on a $H_n(f) = H_n(g)$
- *Exactitude* : La suite longue suivante est exacte :

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A) \xrightarrow{H_n(i)} H_n(X) \xrightarrow{H_n(j)} H_n(X,A) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A) \xrightarrow{H_{n-1}(i)} \cdots$$

  où $i : A \to X$ et $j : (X,\varnothing) \to (X,A)$ sont les inclusions canoniques.
- *Excision* : Soit U une partie de A telle que $\overline{U} \subset \mathring{A}$ et $i : (X \setminus U, A \setminus U) \to (X,A)$ l'inclusion canonique. Alors le morphisme induit $H_n(i) : H_n(X \setminus U, A \setminus U) \to H_n(X,A)$ est un isomorphisme.

Corollaire 3.41. La suite des n^{e} groupe d'homologie singulière de paires $(H_n : \mathsf{Top}_2 \to \mathsf{Ab})_{n\in\mathbb{Z}}$ munie des morphismes $(\partial_n : H_n(X,A) \to H_{n-1}(A))_{n\in\mathbb{Z}}$ est une théorie de l'homogie vérifiant les axiomes d'Eilenberg-Steenrod et $H_0(P) \simeq \mathbb{Z}$.

3.4.2. Équivalence d'homotopie

Définition 3.42. Soit X et Y deux espaces topologiques. On dit que X et Y sont *homotopiquement équivalents* s'il existe deux applications continues $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ telles que $g \circ f$ est homotope à id_X et $f \circ g$ est homotope à id_Y.

Exemple 3.43. Les espaces $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et $\mathbb{S}^1$ sont homotopiquement équivalents.
On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{S}^1; u \mapsto u/\|u\|$ et on note $i : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ l'inclusion canonique. On pose $h : (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}; (x,t) \mapsto (1-t)x + tf(x)$, alors h est continue et pour tout $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, on a $h(x,0) = x$ et $h(x,1) = f(x)$, donc $i \circ f = f$ est bien homotope à $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2\setminus\{0\}}$ et enfin $f \circ i = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$.

Proposition 3.44. L'équivalence d'homotopie est une relation d'équivalence sur les espaces topologiques.

Démonstration. La démonstration est similaire à celle de la Proposition 2.15. □

Corollaire 3.45. Soit X et Y deux espaces topologiques homotopiquement équivalents. Alors les homologies $H_\bullet(X)$ et $H_\bullet(Y)$ sont isomorphes.

Démonstration. Par définition il existe deux applications continues $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ telles que $g \circ f$ est homotope à id_X et $f \circ g$ est homotope à id_Y. Alors d'après l'Axiome d'homotopie on a bien $H_\bullet(g) \circ H_\bullet(f) = \mathrm{id}_{H_\bullet(X)}$ et $H_\bullet(f) \circ H_\bullet(g) = \mathrm{id}_{H_\bullet(Y)}$, donc $H_\bullet(X) \simeq H_\bullet(Y)$. □

Définition 3.46. Soit X un espace topologique et A un sous-ensemble de X. On dit que A est un *rétract par déformation de X* s'il existe une application continue $r : X \to A$ telle que $i \circ r$ est homotope à id_X où $i : A \to X$ est l'inclusion canonique et pour tout $a \in A$, on a $r(a) = a$, dans ce cas on dit que r est une *rétraction par déformation*.

Remarque 3.47. Un rétract par déformation est un cas particulier d'équivalence d'homotopie.

Exemple 3.48. L'espace $\mathbb{S}^1$ est un rétract par déformation de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Corollaire 3.49. Soit X un espace topologique et A un rétract par déformation de X. Alors les homologies $H_\bullet(X)$ et $H_\bullet(A)$ sont isomorphes.

Définition 3.50. Soit X un espace topologique. On dit que X est contractile s'il est homotopiquement équivalent à un point.

Corollaire 3.51. Soit X un espace topologique contractile.

3.4.3. Connexité par arcs

Proposition 3.52. Soit X un espace topologique. Alors, en notant $(X)_{i\in I}$ les composantes connexes par arcs de X, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $H_n(X) \simeq \bigoplus_{i\in I} H_n(X_i)$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Pour toute n-chaîne singulière $\sigma : \Delta^n \to X$, puisque Δ^n est convexe, et en particulier connexe par arcs, par continuité de σ il existe un unique $i \in I$ tel que $\mathrm{im}(\sigma) \subset X_i$. Alors on en déduit que $C_n(X) \simeq \bigoplus_{i\in I} C_n(X_i)$. De plus d_n préserve cette décomposition en somme directe, par passage au quotient on a bien $H_n(X) \simeq \bigoplus_{i\in I} H_n(X_i)$. □

Proposition 3.53. Soit X un espace topologique. Alors, en notant $(X)_{i\in I}$ les composantes connexes par arcs de X, on a $H_0(X) \simeq \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}$.

Démonstration. On a déjà $\ker(\mathrm{d}_0) = C_0(X)$.

Supposons que X est non-vide et connexe par arcs. On pose $\varphi : C_0(X) \to \mathbb{Z}; \sum_{k=0}^n \lambda_k \sigma_k \mapsto \sum_{k=0}^n \lambda_k$. Alors φ est un morphisme de groupes surjectif. Vérifions que $\mathrm{im}(\mathrm{d}_1) = \ker(\varphi)$.

Les 1-chaînes singulières sont engendrées par les 1-simplexes singuliers et pour tout 1-simplexe singulier $\sigma : \Delta^1 \to X$, on a $\varphi(\mathrm{d}_1\sigma) = \varphi\left(\sigma \circ \left\langle \widehat{e_0}, e_1\right\rangle - \sigma \circ \left\langle e_0, \widehat{e_1}\right\rangle\right) = 1 - 1 = 0$, donc $\mathrm{im}(\mathrm{d}_1) \subset \ker(\varphi)$.

Réciproquement on considère $\sum_{k=0}^n \lambda_k \sigma_k \in \ker(\varphi)$. Pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, on note $\gamma_k : [0,1] \to X$ un chemin d'un point $x \in X$ au point $\sigma_k(e_1) \in X$ et on pose $\sigma : \Delta^0 \to X$ un 0-simplexe singulier d'image x, en considérant γ_k comme un 1-simplexe singulier on a $\mathrm{d}_1\gamma_k = \sigma_k - \sigma$. Alors en considérant la n-chaîne singulière $\sum_{k=0}^n \lambda_k \gamma_k$, on a $\mathrm{d}_1 \sum_{k=0}^n \lambda_k \gamma_k = \sum_{k=0}^n \lambda_k \sigma_k - \sum_{k=0}^n \lambda_k \sigma = \sum_{k=0}^n \lambda_k \sigma_k$, donc $\ker(\varphi) \subset \mathrm{im}(\mathrm{d}_1)$.

Alors d'après le premier théorème d'isomorphisme on a bien $H_0(X) = C_0(X)/\ker(\varphi) \simeq \mathbb{Z}$.

Dans le cas général, d'après la Proposition 3.52 on a $H_n(X) \simeq \bigoplus_{i\in I} H_n(X_i) \simeq \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}$. □

Exemple 3.54. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$H_n(\mathbb{S}^0) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration. $\mathbb{S}^0$ est composé de deux points et a deux composantes connexes par arcs, donc d'après la Proposition 3.52 et l'Axiome de dimension on a bien le résultat. □

3.4.4. Suite exacte de Mayer-Vietoris

Théorème 3.55 (Théorème de Mayer-Vietoris)**.** Soit X un espace topologique, U et V deux parties de X tels que $\mathring{U} \cup \mathring{V} = X$. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il existe un morphisme de groupes $\partial_n : H_n(U \cup V) \to H_{n-1}(U \cap V)$ tel que la suite longue suivante est exacte :

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(U \cap V) \xrightarrow{(-H_n(i), H_n(j))} H_n(U) \oplus H_n(V) \xrightarrow{H_n(k)+H_n(l)} H_n(X) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(U \cap V) \xrightarrow{(-H_{n-1}(i), H_{n-1}(j))} \cdots$$

où $i : U \cap V \to U$, $j : U \cap V \to V$, $k : U \to U \cup V$ et $l : V \to U \cup V$ sont les inclusions canoniques.

Démonstration. Admise. □

Exemple 3.56. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$H_n(\mathbb{S}^1) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} \text{ si } n \in \{0,1\} \\ 0 \ \text{ sinon} \end{cases}$$

On recouvre $\mathbb{S}^1$ par deux arcs ouverts U et V recouvrant chacun un demi-cercle :

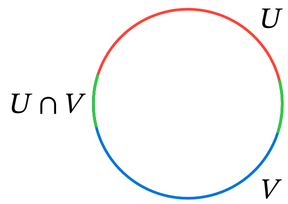

Fig. 2. – Recouvrement de $\mathbb{S}^1$.

Les arcs U et V sont contractiles, et l'intersection $U \cap V$ est homotopiquement équivalente à $\mathbb{S}^0$. D'après le Corollaire 3.45, l'Axiome de dimension et l'Exemple 3.54 on a :

$$H_n(U) \simeq H_n(V) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} \text{ si } n = 0 \\ 0 \ \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad H_n(U \cap V) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \text{ si } n = 0 \\ 0 \qquad \text{ sinon} \end{cases}$$

et d'après le Théorème de Mayer-Vietoris la suite suivante est exacte :

$$\cdots \to 0 \to H_1(\mathbb{S}^1) \overset{\partial_1}{\to} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \overset{\varphi_0}{\to} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \overset{\psi_0}{\to} H_0(\mathbb{S}^1) \to 0$$

On en déduit directement que si $n \geq 2$, on a $H_n(\mathbb{S}^1) \simeq 0$.

En étudiant $\varphi_0 := (H_0(i), H_0(j)) : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ où $i : U \cap V \to U$ et $j : U \cap V \to V$ sont les inclusions canoniques, on trouve que $\varphi_0(1,0) = \varphi_0(0,1) = (1,1)$.

Alors $\ker(\varphi_0) = \{(a,-a) \mid a \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}$ et $\operatorname{im}(\varphi_0) = \{(a+b, a+b) \mid a,b \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}$. Par exactitude ∂_1 est injective et on a $H_1(\mathbb{S}^1) \simeq \operatorname{im}(\partial_1) = \ker(\varphi_0) \simeq \mathbb{Z}$. De même, par exactitude ψ_0 est surjective et on a $H_0(\mathbb{S}^1) \simeq (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) / \ker(\psi_0) \simeq (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) / \operatorname{im}(\varphi_0) \simeq (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}$.

Exemple 3.57. Pour tout $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$H_n(\mathbb{S}^m) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} \text{ si } n \in \{0,m\} \\ 0 \ \text{ sinon} \end{cases}$$

On raisonne par récurrence en recouvrant $\mathbb{S}^m$ par deux ouverts U et V homotopiquement équivalents à $\mathbb{S}^{m-1}$. Alors on peut calculer $H_n(\mathbb{S}^m)$ de la même manière que dans l'Exemple 3.56.

3.4.5. Complémentaire d'une boule dans une sphère ou dans l'espace euclidien

Proposition 3.58. Soit X un sous-espace de $\mathbb{S}^p$ homéomorphe à $\mathbb{B}^q$. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$H_n(\mathbb{S}^p \setminus X) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} \text{ si } n = 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Démonstration. Soit $f : \mathbb{B}^q \to X$ un homéomorphisme, on raisonne par récurrence sur $q < p$ avec :

$$P(q) : H_n(\mathbb{S}^p \setminus f(\mathbb{B}^q)) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} \text{ si } n = 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Pour $q = 0$. L'espace $\mathbb{B}^0$ est réduit à un unique point, par Projection stéréographique l'espace $\mathbb{S}^p \setminus f(\mathbb{B}^0)$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^p$, qui est contractile. D'après le Corollaire 3.45 et l'Axiome de dimension on a :

$$H_n\big(\mathbb{S}^p \setminus f(\mathbb{B}^0)\big) \simeq H_n(\mathbb{R}^p) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} \text{ si } n = 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Soit $q > 0$. On suppose que $P(q-1)$ est vérifiée. L'espace $\mathbb{B}^q$ est homéomorphe à $\mathbb{B}^{q-1} \times [0,1]$. On recouvre $\mathbb{B}^{q-1} \times [0,1]$ par deux fermés $\mathbb{B}^- := \mathbb{B}^{q-1} \times [0,1/2]$ et $\mathbb{B}^+ := \mathbb{B}^{q-1} \times [1/2,1]$, ils sont homéomorphes à $\mathbb{B}^q$, et l'intersection $\mathbb{B}^- \cap \mathbb{B}^+ = \mathbb{B}^{q-1} \times \{1/2\}$ est homéomorphe à $\mathbb{B}^{q-1}$. Alors on recouvre $\mathbb{S}^p \setminus f\big(\mathbb{B}^{q-1} \times \{1/2\}\big)$ par les ouverts $U := \mathbb{S}^p \setminus f(\mathbb{B}^-)$ et $V := \mathbb{S}^p \setminus f(\mathbb{B}^+)$, et l'intersection vaut $U \cap V = \mathbb{S}^p \setminus f(\mathbb{B}^q)$. D'après le Théorème de Mayer-Vietoris la suite suivante est exacte :

$$\cdots \xrightarrow{\psi_{n+1}} H_{n+1}(U \cup V) \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(U \cap V) \xrightarrow{\varphi_n} H_n(U) \oplus H_n(V) \xrightarrow{\psi_n} H_n(U \cup V) \xrightarrow{\partial_n} \cdots$$

où $\varphi_n := (i,j) : H_n(U \cap V) \to H_n(U) \oplus H_n(V)$ est induite par les inclusions canoniques.

Si $n = 0$. $\mathbb{S}^p \setminus f(\mathbb{B}^q)$ est connexe par arcs, d'après la Proposition 3.53 on a $H_0(\mathbb{S}^p \setminus f(\mathbb{B}^q)) \simeq \mathbb{Z}$.

Si $n \geq 1$. On suppose par l'absurde qu'il existe $\alpha_0 \in H_n(U \cap V)$ non-nul. D'après $P(q-1)$ on a $H_{n+1}(U \cup V) \simeq 0$, par exactitude φ_n est injective, donc $\varphi_n(\alpha_0) = (i(\alpha_0), j(\alpha_0)) \neq (0,0)$ et il existe $\alpha_1 \in H_n\big(\mathbb{S}^p \setminus f\big(\mathbb{B}^{q-1} \times I_1\big)\big)$ non-nul tel que $i_0(\alpha_0) = \alpha_1$, où I_1 est un segment de longueur $1/2$ et i_0 est induite par l'inclusion canonique.

Puisque $\mathbb{B}^{q-1} \times I_1$ est homéomorphe à $\mathbb{B}^q$, on peut refaire un raisonnement similaire avec l'espace $\mathbb{S}^p \setminus f\big(\mathbb{B}^{q-1} \times I_1\big)$, alors il existe $\alpha_2 \in H_n\big(\mathbb{S}^p \setminus f\big(\mathbb{B}^{q-1} \times I_2\big)\big)$ non-nul tel que $i_1(\alpha_1) = \alpha_2$, où I_2 est un segment de longueur $1/4$ et i_1 est induite par l'inclusion canonique.

En itérant ce raisonnement on obtient une suite $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ où pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\alpha_k \in H_n(A_k) := H_n\big(\mathbb{S}^p \setminus f\big(\mathbb{B}^{q-1} \times I_k\big)\big)$ non-nul tel que $i_k(\alpha_k) = \alpha_{k+1}$, où I_k est un segment de longueur $1/2^k$ et i_k est induite par l'inclusion canonique.

Soit $\sigma : \Delta^n \to A_0$ un n-cycle singulier représentant α_0. Puisque pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $i_k(\alpha_k) = \alpha_{k+1}$, on en déduit que σ est un représentant de tous les α_k.

On note $Y := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = \mathbb{S}^p \setminus f\big(\mathbb{B}^{q-1} \times \{0\}\big)$. Alors puisque $\mathbb{B}^{q-1} \times \{0\}$ est homéomorphe à $\mathbb{B}^{q-1}$, d'après $P(q-1)$ on a $H_n(Y) \simeq 0$. De plus $\sigma \in Z_n(Y)$ et $\overline{\sigma} = 0 \in H_n(Y)$.

Alors $\sigma \in B_n(Y)$ et il existe une $(n+1)$-chaîne singulière $\tau : \Delta^{n+1} \to Y$ telle que $\mathrm{d}_{n+1}\tau = \sigma$. Puisque τ est continue et Δ^{n+1} est compact, $\mathrm{im}(\tau)$ est compacte. Or $Y := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ est un recouvrement ouvert de $\mathrm{im}(\tau)$, donc par définition il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{im}(\tau) \subset A_{k_0}$.

Enfin $\sigma = \mathrm{d}_{n+1}\tau \in B_{n+1}\big(A_{k_0}\big)$ et $a_{k_0} = \overline{\sigma} = 0 \in H_n\big(A_{k_0}\big)$, d'où une contradiction.

Donc $H_n(\mathbb{S}^p \setminus f(\mathbb{B}^q)) \simeq 0$. ☐

Proposition 3.59. Soit X un sous-espace de $\mathbb{R}^p$ homéomorphe à $\mathbb{B}^q$. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$H_n(\mathbb{R}^p \setminus X) \simeq H_n\big(\mathbb{S}^{p-1}\big) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} \text{ si } n \in \{0, p-1\} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Démonstration. Par Projection stéréographique $\mathbb{R}^p \cup \{\infty\}$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^p$, en particulier la restriction $(\mathbb{R}^p \setminus X) \cup \{\infty\}$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^p \setminus X$. On recouvre $(\mathbb{R}^p \setminus X) \cup \{\infty\}$ par deux ouverts $U \coloneqq \mathbb{R}^p \setminus X$ et V une boule au voisinage de ∞ qui n'intersecte pas X (qui est compact).

Alors on peut calculer $H_n(\mathbb{R}^p \setminus X)$ de la même manière que dans l'Exemple 3.56. $\square$

Proposition 3.60. Soit X un sous-espace de $\mathbb{S}^p$ homéomorphe à $\mathbb{S}^q$. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$H_n(\mathbb{S}^p \setminus X) \simeq H_n\big(\mathbb{S}^{p-q-1}\big) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} \text{ si } n \in \{0, p-q-1\} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Démonstration. On recouvre $\mathbb{S}^q$ par deux arcs fermés A_+ et A_-, ils sont homéomorphes à $\mathbb{B}^q$, et leur intersection vaut $A_+ \cap A_- = \mathbb{S}^{q-1}$. On considère un homéomorphisme $f : \mathbb{S}^q \to X$ et on pose deux ouverts $U \coloneqq \mathbb{S}^p \setminus f(A_+)$ et $V \coloneqq \mathbb{S}^p \setminus f(A_-)$.

Alors on peut calculer $H_n(\mathbb{S}^p \setminus X)$ de la même manière que dans l'Exemple 3.56 et par récurrence on se ramène au cas $q = 0$.

D'après le Projection stéréographique l'espace $\mathbb{S}^p \setminus f\big(\mathbb{S}^0\big)$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^p \setminus \{0\}$, qui est homotopiquement équivalent à $\mathbb{S}^{p-1}$. $\square$

Proposition 3.61. Soit X un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ homéomorphe à $\mathbb{S}^1$. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$H_n\big(\mathbb{R}^3 \setminus X\big) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} \text{ si } n \in \{0, 1, 2\} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Démonstration. On peut recouvrir de la même manière que dans la Proposition 3.59 et calculer $H_n\big(\mathbb{S}^3 \setminus X\big)$ de la même manière que dans l'Exemple 3.56 $\square$

4. Droite et plan projectifs réels

4.1. La droite projective réelle

Définition 4.1. On appelle *droite projective réelle*, noté $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$, le quotient de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ par la relation d'équivalence $\sim_{\mathbb{P}^1}$ où pour tout $u, v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, on a $u \sim_{\mathbb{P}^1} v$ s'il existe $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tel que $u = \lambda v$.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. On note $[x : y] := \overline{(x, y)} \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ la classe de (x, y).

Remarque 4.2. Un point de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ est donc induit par une droite linéaire de $\mathbb{R}^2$.

Définition 4.3. On appelle *cartes affines de* $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ les sous-ensembles suivants :
- $A_x := \{[x : y] \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \mid x \neq 0\} = \{[1 : y] \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}\}$.
- $A_y := \{[x : y] \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \mid y \neq 0\} = \{[x : 1] \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}\}$.

Remarque 4.4. Les cartes affines A_x et A_y sont homéomorphes à $\mathbb{R}$.
On a $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} = A_x \cup A_y$ et $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} = A_y \sqcup \{\infty\}$ où $\infty := [1 : 0]$.
Intuitivement $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ s'obtient donc à partir de $\mathbb{R}$ auquel on ajoute un point à l'infini.

Remarque 4.5. La proposition suivante est naturelle puisque $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ est donnée par les droites linéaires de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{S}^1$ par les demi-droites linéaires de $\mathbb{R}^2$.

Proposition 4.6. La droite projective réelle $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ est homéomorphe au quotient du cercle $\mathbb{S}^1$ par la relation d'équivalence $\sim_{\mathbb{S}^1}$ où pour tout $u, v \in \mathbb{S}^1$, on a $u \sim_{\mathbb{S}^1} v$ si $u = \pm v$.

Démonstration. On pose $i : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}; (x, y) \mapsto [x : y]$. Alors i est bien définie, pour tout $u, v \in \mathbb{S}^1$, si $u \sim_{\mathbb{S}^1} v$, alors $u = \pm v$, d'où $i(u) = i(v)$. De plus i est continue par composition de fonctions continues. Donc l'application $I : \mathbb{S}^1 / \sim_{\mathbb{S}^1} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ telle que $I \circ \pi = i$ est continue.

Réciproquement on pose $j : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{S}^1 / \sim_{\mathbb{S}^1}; u \mapsto \overline{u / \|u\|}$. Alors j passe au quotient pour $\sim_{\mathbb{S}^1}$, en effet pour tout $u, v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, si $u \sim_{\mathbb{P}^1} v$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tel que $u = \lambda v$, d'où $j(u) = j(\lambda v) = j(v)$. De plus j est continue par composition de fonctions continues. Donc l'application $J : \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \to \mathbb{S}^1 / \sim_{\mathbb{S}^1}$ telle que $J \circ \pi = j$ est continue.

Enfin il est clair que $J \circ I = \mathrm{id}$ et $I \circ J = \mathrm{id}$, donc I et J sont bien des homéomorphismes entre la droite projective réelle $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ et $\mathbb{S}^1 / \sim_{\mathbb{S}^1}$. $\square$

4.2. Le plan projectif réel

Définition 4.7. On appelle *plan projectif réel*, noté $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, le quotient de $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ par la relation d'équivalence $\sim_{\mathbb{P}^2}$ où pour tout $u, v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, on a $u \sim_{\mathbb{P}^2} v$ s'il existe $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tel que $u = \lambda v$.
Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. On note $[x : y : z] := \overline{(x, y, z)} \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ la classe de (x, y, z).

Remarque 4.8. Un point de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ est donc induit par une droite linéaire de $\mathbb{R}^3$ et une droite de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ est induite par un plan linéaire de $\mathbb{R}^3$. On déduit de la formule de Grassmann que deux droites distinctes de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ (même parallèles) s'intersectent en un point de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$.

Définition 4.9. On appelle *cartes affines de* $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ les sous-ensembles suivants :
- $A_x := \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \mid x \neq 0\} = \{[1 : y : z] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}\}$.
- $A_y := \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \mid y \neq 0\} = \{[x : 1 : z] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}\}$.
- $A_z := \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \mid z \neq 0\} = \{[x : y : 1] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}\}$.

Remarque 4.10. Les cartes affines A_x, A_y et A_z sont homéomorphes à $\mathbb{R}^2$.
On a $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} = A_x \cup A_y \cup A_z$ et $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} = A_z \sqcup \ell_\infty$ où $\ell_\infty := \{[x : y : 0] \in \mathbb{R}^2\}$.
De plus l'ensemble ℓ_∞ est homéomorphe à $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$, intuitivement $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ s'obtient donc à partir de $\mathbb{R}^2$ auquel on ajoute une copie de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ à l'infini.

Remarque 4.11. On peut affiner la Remarque 4.8, une droite de A_z intersecte ℓ_∞ en un point dépendant uniquement de son vecteur directeur. En effet, soit $D := \{(x_0 + ta, y_0 + tb) \mid t \in \mathbb{R}\}$ une droite de $\mathbb{R}^2 \simeq A_z$ passant par un point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et de vecteur directeur $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Alors l'image de D dans A_z est donnée par $D_z \coloneqq \{[x_0 + ta : y_0 + tb : 1] \mid t \in \mathbb{R}\}$, et on a :

$$[x_0 + ta : y_0 + tb : 1] = \left[\frac{x_0}{t} + a : \frac{y_0}{t} + b : \frac{1}{t}\right] \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} [a : b : 0] \in \ell_\infty$$

Donc D_z intersecte ℓ_∞ en $[a : b : 0]$.

Soit D_1 et D_2 deux droites distinctes de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, on note $A_1 \coloneqq D_1 \cap A_z$ et $A_2 \coloneqq D_2 \cap A_z$.

- Si $D_1 \neq \ell_\infty$ et $D_2 \neq \ell_\infty$, alors $A_1 \neq \varnothing$ et $A_2 \neq \varnothing$.
  Si A_1 et A_2 sont parallèles dans $A_z \simeq \mathbb{R}^2$, elles ont le même vecteur directeur, donc D_1 et D_2 s'intersectent dans ℓ_∞. Sinon A_1 et A_2 s'intersectent, donc D_1 et D_2 s'intersectent dans A_z.
- Si $D_1 = \ell_\infty$, alors D_2 intersecte bien $D_1 = \ell_\infty$.

Remarque 4.12. La proposition suivante est naturelle puisque $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ est donné par les droites linéaires de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{S}^2$ par les demi-droites linéaires de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 4.13. Le plan projectif réel $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ est homéomorphe au quotient de la sphère $\mathbb{S}^2$ par la relation d'équivalence $\sim_{\mathbb{S}^2}$ où pour tout $u, v \in \mathbb{S}^2$, on a $u \sim_{\mathbb{S}^2} v$ si $u = \pm v$.

Démonstration. La démonstration est similaire à celle de la Proposition 4.6, on identifie chaque élément de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ à deux éléments antipodaux de $\mathbb{S}^2$. □

Proposition 4.14. Le plan projectif réel $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ est homéomorphe au quotient du carré $[0,1]^2$ par la relation d'équivalence $\sim_{[0,1]}$ définie par $(t, 0) \sim_{[0,1]} (1 - t, 1)$ et $(0, t) \sim_{[0,1]} (1, 1 - t)$ où $t \in [0, 1]$.

Démonstration. D'après la Proposition 4.13 le plan projectif $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^2 / \sim_{\mathbb{S}^2}$, ensuite puisque l'on identifie les points antipodaux de $\mathbb{S}^2$, on peut considérer seulement l'hémisphère nord de $\mathbb{S}^2$ en identifiant les points antipodaux du cercle de l'équateur :

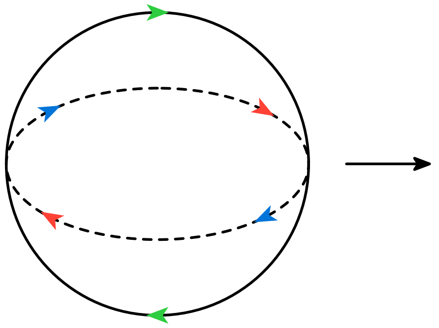

Fig. 3. – Passage de la sphère à la demi-sphère.

On peut déformer continûment cette demi-sphère sur le disque en identifiant toujours les points antipodaux du cercle :

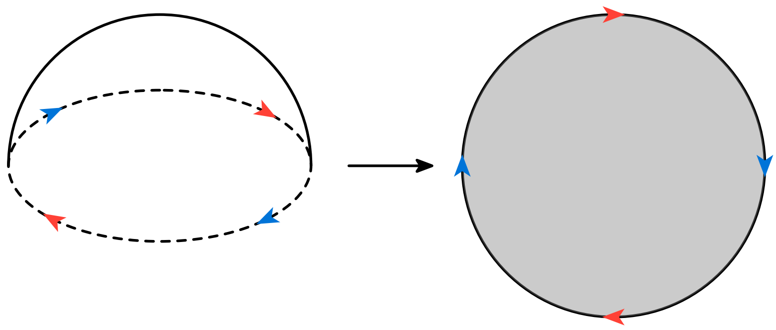

Fig. 4. – Passage de la demi-sphère au disque.

On peut de nouveau déformer continûment ce disque sur le carré en identifiant les points sur le bord du carré et en conservant l'orientation :

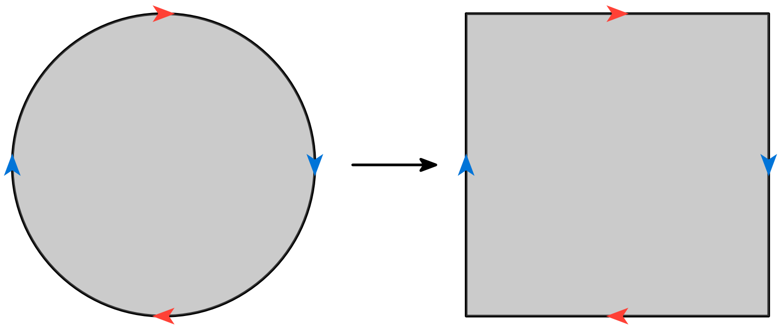

Fig. 5. – Passage du disque au carré.

Puisque les déformations à chaque étapes sont continues et préservent les points identifiés, on a bien construit un homéomorphisme du plan projectif réel $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ dans $[0,1]^2/\sim_{[0,1]}$. □

Proposition 4.15. Le plan projectif réel $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ se décompose en l'union de deux ensembles $M \cup D$ tels que M est homéomorphe une bande de Möbius, D est homéomorphe à un disque fermé, et l'intersection $M \cap D = \partial M = \partial D$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^1$.

Démonstration. D'après la Proposition 4.14 le plan projectif $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ est homéomorphe à $[0,1]^2/\sim_{[0,1]}$, ensuite on peut découper dans ce carré une bande de Möbius :

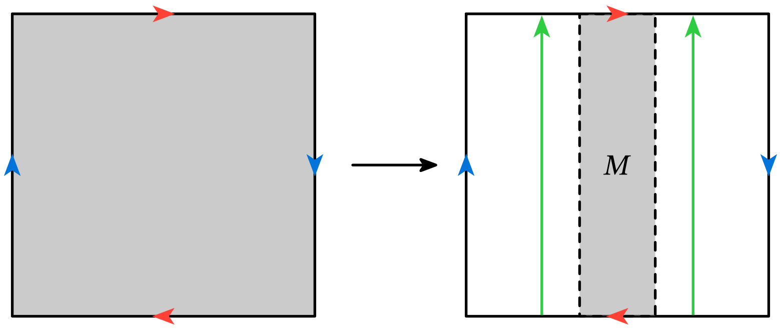

Fig. 6. – Découpage d'une bande de Möbius.

On peut recoller les parties restantes en suivant l'orientation des flèches bleues, puis l'orientation des flèches rouges pour obtenir un disque fermé :

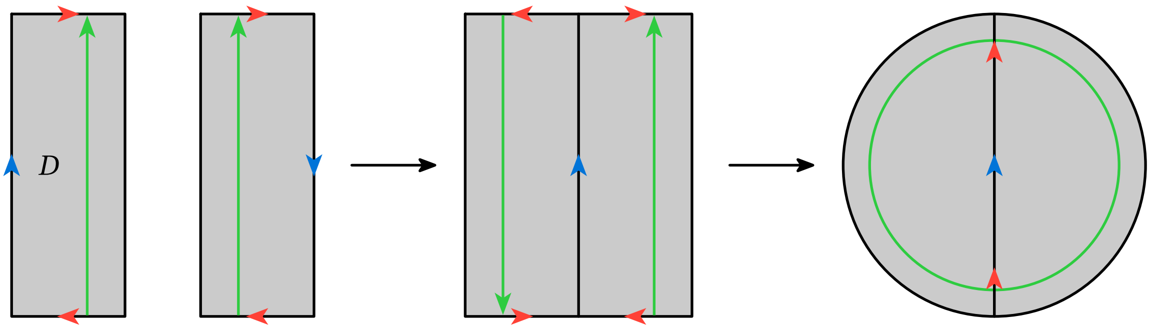

Fig. 7. – Recollage du disque fermé.

De plus $M \cap D = \partial M = \partial D$ est homéomorphe au bord du disque, donc à $\mathbb{S}^1$.

Puisque les déformations à chaque étapes sont continues et préservent les points identifiés, on a bien décomposé le plan projectif réel $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ comme l'union $M \cup D$ de deux ensembles tels que M est homéomorphe à une bande de Möbius, D est homéomorphe à un disque fermé et $M \cap D$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^1$. □

4.2.1. Non-plongement dans $\mathbb{R}^3$

L'objectif de cette section est de montrer que $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ ne se plonge pas dans $\mathbb{R}^3$ en utilisant l'homologie singulière présentée dans les sections précédentes.

Définition 4.16. Soit X et Y deux espaces topologiques, $f : X \to Y$ une application. On dit que f est un *plongement de X dans Y* si elle induit un homéomorphisme de X dans $f(X)$ muni de la topologie induite.

Théorème 4.17. Il n'existe pas de plongement du plan projectif réel $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ dans $\mathbb{R}^3$.

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'il existe un plongement $f : \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^3$.
D'après la Proposition 4.15 on peut écrire $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} = M \cup D$ où M est homéomorphe à une bande de Möbius, D est homéomorphe à un disque fermé et $M \cap D = \partial M = \partial D$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^1$, dans la suite on identifie $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, M et D avec leur images $f\big(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}\big)$, $f(M)$ et $f(D)$ dans $\mathbb{R}^3$.

Le complémentaire de la bande de Möbius $\mathbb{R}^3 \setminus M$ est un rétract par déformation de $\mathbb{R}^3 \setminus C$ où C le cercle central de M est homéomorphe à $\mathbb{S}^1$. D'après le Corollaire 3.49 et la Proposition 3.61, on a :

$$H_1\big(\mathbb{R}^3 \setminus M\big) \simeq H_1\big(\mathbb{R}^3 \setminus C\big) \simeq \mathbb{Z}$$

et on en déduit qu'un générateur de $H_1\big(\mathbb{R}^3 \setminus M\big) \simeq H_1\big(\mathbb{S}^1\big)$ est donné par la classe d'un 1-simplexe singulier $\sigma : \Delta^1 \to \mathbb{R}^3 \setminus M$ dont l'image est un cercle enlacé autour de M.

De plus le bord de la bande Möbius ∂M est homéomorphe à $\mathbb{S}^1$. D'après la Proposition 3.61, on a :

$$H_1\big(\mathbb{R}^3 \setminus \partial M\big) \simeq \mathbb{Z}$$

On considère $i : \mathbb{R}^3 \setminus M \to \mathbb{R}^3 \setminus \partial M$ l'inclusion canonique. Alors la composition $i \circ \sigma$ est homotope à deux cercles enlacés autour de ∂M avec la même orientation que σ et ayant un point d'intersection :

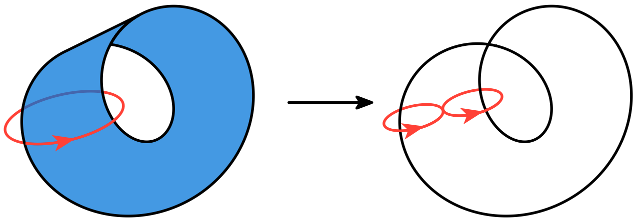

Fig. 8. – Homotopie de l'inclusion de σ dans $\mathbb{R}^3 \setminus M$.

Alors puisque leur orientation est la même, la classe des deux cercles dans $H_1\big(\mathbb{R}^3 \setminus \partial M\big)$ est le même générateur de $H_1\big(\mathbb{R}^3 \setminus \partial M\big)$, donc $H_1(i)$ est la multiplication par 2.

Le disque fermé D est homéomorphe à $\mathbb{B}^2$. D'après la Proposition 3.59, on a :

$$H_1\big(\mathbb{R}^3 \setminus D\big) \simeq H_1\big(\mathbb{S}^2\big) \simeq 0$$

Alors d'après le Théorème de Mayer-Vietoris la suite suivante est exacte en $H_1\big(\mathbb{R}^3 \setminus \partial M\big)$:

$$H_1\big(\mathbb{R}^3 \setminus M\big) \simeq \mathbb{Z} \oplus H_1\big(\mathbb{R}^3 \setminus D\big) \simeq 0 \xrightarrow{H_1(i)} H_1\big(\mathbb{R}^3 \setminus \partial M\big) \simeq \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_0} H_0\big(\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}\big)$$

Par exactitude on a $\ker(\partial_0) = \operatorname{im}(H_1(i)) = 2\mathbb{Z}$, d'où $\partial_0(1) \neq 0$ et $2\partial_0(1) = \partial_0(2) = 0$, donc $\partial_0(1)$ est un élément non-nul d'ordre 2 de $H_0\big(\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}\big)$.

Mais d'après la Proposition 3.53 $H_0\big(\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}\big)$ est un groupe abélien libre, donc il n'existe aucun élément non-nul d'ordre 2 de $H_0\big(\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}\big)$, d'où une contradiction.

Donc il n'existe pas de plongement du plan projectif réel $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ dans $\mathbb{R}^3$. $\square$

5. Applications

5.1. Le problème du rectangle inscrit

L'origine de cette application est le *problème du carré inscrit*, énoncé par Otto Toeplitz en 1911 de la manière suivante :

« Toute courbe de Jordan admet-elle un carré inscrit ? »

Cette question fut l'objet de nombreuses recherches, mais elle n'est toujours pas résolue, en revanche nous sommes capables d'en démontrer une version simplifiée :

« Toute courbe de Jordan admet-elle un ~~carré~~ rectangle inscrit ? »

C'est ce que nous appellerons le *problème du rectangle inscrit*.

Par exemple dans le cas d'un cercle, on peut évidemment toujours trouver une infinité de carrés et de rectangles inscrits, le problème devient plus difficile lorsque la courbe est quelconque.

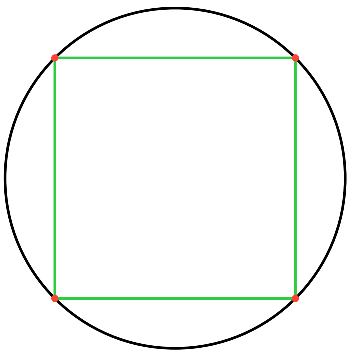

Fig. 9. – Un carré inscrit.

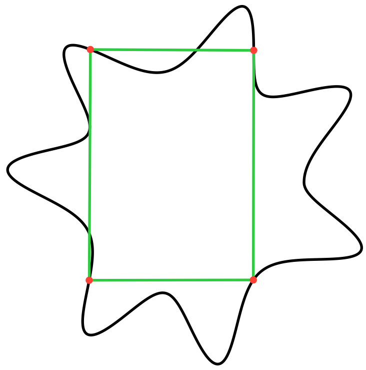

Fig. 10. – Un rectangle inscrit.

Définition 5.1. Soit C une partie de $\mathbb{R}^2$. On dit que C est une *courbe de Jordan* s'il existe une fonction continue $\gamma_C : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ telle que :
- C est l'image de γ_C : $\mathrm{im}(\gamma_C) = C$.
- C est fermée : $\gamma_C(0) = \gamma_C(1)$.
- C est simple : γ_C est injective sur $[0,1[$, c'est-à-dire $\forall x, y \in [0,1[, \gamma_C(x) = \gamma_C(y) \Rightarrow x = y$.

Exemple 5.2. Le cercle C de la Fig. 9 est bien une courbe de Jordan, en effet, on pose :

$$\gamma_C : [0,1] \to \mathbb{R}^2; (x,y) \mapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$$

Alors γ_C est bien continue, de plus :
- On a clairement $\mathrm{im}(\gamma_C) = C$.
- On a $\gamma_C(0) = (1,0) = \gamma_C(1)$.
- Pour $x \in [0,1[$, on a $2\pi x \in [0, 2\pi[$, donc γ_C est injective sur $[0,1[$.

Définition 5.3. Soit C une courbe de Jordan et $R \coloneqq (a,b,c,d)$ un rectangle de $\mathbb{R}^2$. On dit que le rectangle R est *inscrit dans* C si $a,b,c,d \in C$.

Exemple 5.4. Le carré $R \coloneqq \left(\left(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right), \left(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right), \left(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2\right), \left(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2\right)\right)$ est bien inscrit dans le cercle C de la Fig. 9, en effet :

- On a $\gamma_C(1/8) = \left(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right)$, donc $\left(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right) \in C$.
- On a $\gamma_C(3/8) = \left(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right)$, donc $\left(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right) \in C$.
- On a $\gamma_C(5/8) = \left(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2\right)$, donc $\left(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2\right) \in C$.
- On a $\gamma_C(7/8) = \left(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2\right)$, donc $\left(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2\right) \in C$.

Théorème 5.5. Soit C une courbe de Jordan. Alors il existe un rectangle inscrit dans C.

Démonstration. Pour commencer, au lieu de représenter un rectangle par 4 sommets, on le représente par 2 paires de sommets formant les diagonales :

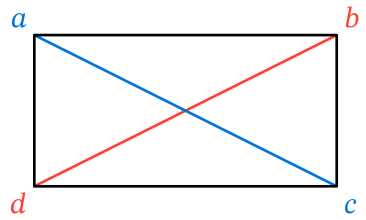

Fig. 11. – 2 paires de sommets formant un rectangle.

On note $P \coloneqq C \times C$. Cette représentation nous permet de caractériser un rectangle de la manière suivante : 2 paires <u>non-ordonnées</u> de P forment un rectangle si et seulement si elles sont distinctes, ont le même milieu et ont la même distance.

2 paires ordonnées pourraient être distinctes et décrire la même diagonale. Pour éviter ça, on étudie le quotient Q de P par la relation d'équivalence $\sim$ où pour tout $(u,v) \in P$, on a $(u,v) \sim (v,u)$.

Alors pour regrouper ces informations, on définit l'application :

$$f : P \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}; (u,v) \mapsto \left(\frac{u+v}{2}, d(u,v)\right)$$

elle décrit une surface dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^3$:

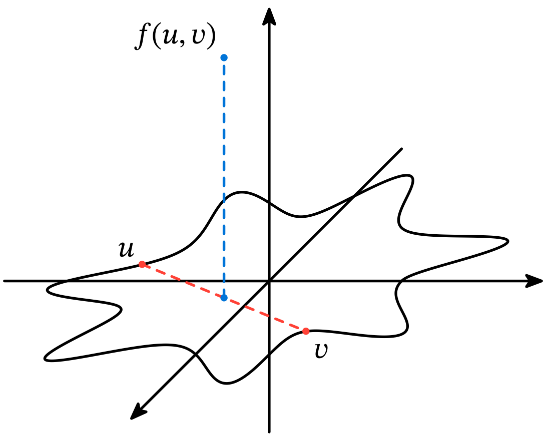

Fig. 12. – Image d'une paire par l'application f.

Pour tout $(u,v) \in P$, on a $f(u,v) = f(v,u)$, de plus f est continue, donc f passe au quotient pour $\sim$ et induit une application continue $\varphi : Q \to \mathbb{R}^3$.

Alors $p, q \in Q$ forment un rectangle si et seulement si $p \neq q$ et $\varphi(p) = \varphi(q)$. Il existe un rectangle inscrit dans C si et seulement φ n'est pas injective.

Supposons par l'absurde que φ est injective.

Alors Q est compact et la restriction $\varphi : Q \to \varphi(Q)$ est une bijection continue, d'après le Théorème B $\varphi : Q \to \varphi(Q)$ est un homéomorphisme.

Puisque C est paramétrée par une application continue $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, on peut paramétrer Q par l'application $\mu \coloneqq \overline{(\gamma, \gamma)} : [0,1]^2 \to (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)/\sim$. Mais par définition $\gamma(0) = \gamma(1)$, pour tout $t \in [0,1]$, on a $\mu(0,t) = \mu(1,t)$ et $\mu(t,0) = \mu(t,1)$, de plus pour tout $(a,b) \in [0,1]^2$, on a $\mu(a,b) = \mu(b,a)$.

Pour éviter ça, on étudie le quotient successif de $[0,1]^2$ par les relations d'équivalence $\sim_1$ définie par $(0,t) \sim_1 (1,t)$ et $(t,0) \sim_1 (t,1)$ où $t \in [0,1]$, et $\sim_2$ où pour tout $(a,b) \in [0,1]^2$, on a $(a,b) \sim_2 (b,a)$:

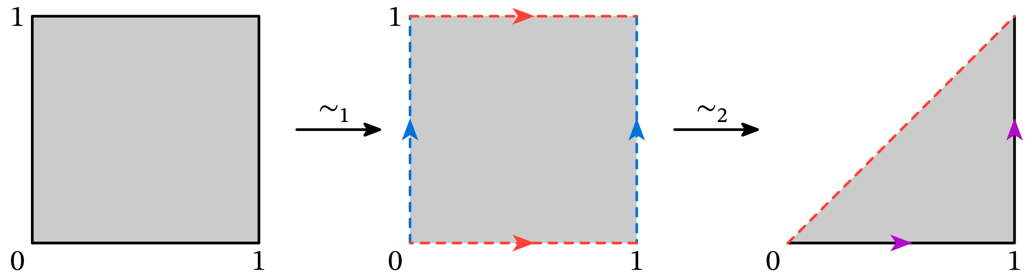

Fig. 13. – Quotient de $[0,1]^2$ par $\sim_1$ et $\sim_2$

On découpe le triangle pour recoller les flèches et obtenir une bande de Möbius M :

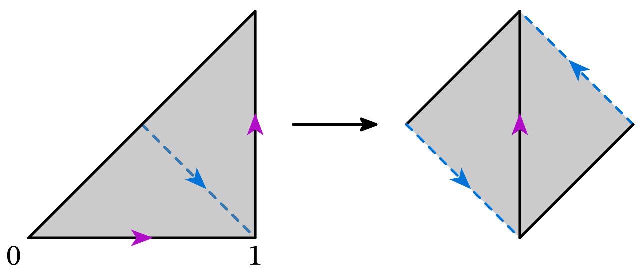

Fig. 14. – Recollement d'une bande de Möbius.

Alors μ passe au quotient pour $\sim_1$ et $\sim_2$, et la déformation est continue, donc μ induit un homéomorphisme $\lambda : M \to Q$. Par composition $\varphi \circ \lambda : M \to \varphi(Q)$ est un homéomorphisme.

Il vérifie $(\varphi \circ \lambda)(\partial M) = C \subset \mathbb{R}^3$. En effet ∂M est identifié avec la diagonale de $[0,1]^2$, donc avec les points $(a,a) \in [0,1]^2$, ils sont envoyés sur $\overline{(u,u)} \in Q$ par μ, puis sur les $(u,0) \in C \subset \mathbb{R}^3$ par φ.

D'après le théorème de Jordan C est homéomorphe à $\mathbb{S}^1$ et D la partie de $\mathbb{R}^2$ délimitée par C est homéomorphe à $\mathbb{B}^2$, d'après la Proposition 4.15 en collant M à D le long de leur bord $\partial M = \partial D = C$, on obtient $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$. Donc $\varphi \circ \lambda$ induit un plongement de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ dans $\mathbb{R}^3$.

Mais d'après le Théorème 4.17 il n'existe pas de plongement de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ dans $\mathbb{R}^3$, d'où une contradiction.

Donc φ n'est pas injective et il existe un rectangle inscrit dans C. $\square$

Annexe

Théorème A (Projection stéréographique). $\mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ où $N \coloneqq (0, \dots, 0, 1)$ est le pôle nord de $\mathbb{S}^n$.

Démonstration. On définit une application :

$$f : \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n; (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right)$$

elle est bien définie, continue, et son inverse est donnée par :

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n \setminus \{N\}; y \coloneqq (y_1, \dots y_n) \mapsto \left(\frac{2y_1}{\|y\|^2 + 1}, \dots, \frac{2y_n}{\|y\|^2 + 1}, \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1} \right)$$

qui est bien définie et continue. Donc f est bien un homéomorphisme entre $\mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ et $\mathbb{R}^n$. □

Théorème B. Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$, L une partie de $\mathbb{R}^n$ et $f : K \to L$ une bijection continue. Alors f est un homéomorphisme.

Démonstration. Notons $g \coloneqq f^{-1}$. Soit F un fermé de K. Puisque K est compact et F est fermé, F est compact. Puisque f est continue et F est compact, $g^{-1}(F) = f(F)$ est compact. Puisque $g^{-1}(F)$ est compact, $g^{-1}(F)$ est fermé. Donc $f^{-1} = g$ est continue et f est bien un homéomorphisme. □

Bibliographie

[1] Eduard Looijenga, *Algebraic Topology - an introduction*. 2010.

[2] Allen Hatcher, *Algebraic Topology*. 2001.

[3] Grégory Ginot, *Topologie Algébrique*. 2019.

[4] Vaughan, *Rectangles and simple closed curves*. 1977.