Calcul intégral et applications

Table des matières

1. Théorèmes

1.1. Convergence monotone (ou Beppo-Levi)

Théorème 1.1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions **mesurables positives**. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite **croissante**, alors $\lim_{n\to+\infty} f_n$ est mesurable positive et

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_E \lim_{n\to+\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Corollaire 1.2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions **mesurables positives**. Alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_E \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

1.2. Lemme de Fatou

Théorème 1.3. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions **mesurables positives**. Alors

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu \geq \int_E \liminf_{n\to+\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Corollaire 1.4. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions **mesurables positives**. S'il existe une fonction positive g **intégrable** telle que pour tout $x \in E, \forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) \leq g(x)$ alors

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \int_E \limsup_{n\to+\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

1.3. Convergence dominée

Théorème 1.5. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et f des fonctions **mesurables**. Si

1. pour μ-presque tout $x \in E, \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$,
2. il existe une fonction g **intégrable** avec pour μ-presque tout $x \in E, \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x)| \leq g(x)$,

alors $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ et f sont **intégrables** et

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_E \lim_{n\to+\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Corollaire 1.6. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions **mesurables**. Si $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_E |f_n| \,\mathrm{d}\mu$ est finie, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est **définie μ-presque partout** et **intégrable**, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_E \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

1.4. Continuité et dérivabilité sous le signe intégral

Théorème 1.7. Soit $f : E \times \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction et y_0 in $\mathbb{R}$. S'il existe une fonction g **intégrable** telle que

1. pour tout $y \in \mathbb{R}, x \mapsto f(x, y)$ est **mesurable**,
2. pour μ-presque tout $x \in E, y \mapsto f(x, y)$ est **continue en y_0**,
3. pour μ-presque tout $x \in E$ et pour tout $y \in \mathbb{R}, |f(x, y)| \leq g(x)$,

alors la fonction $y \mapsto \int_E f(x, y) \,\mathrm{d}\mu(x)$ est **définie sur $\mathbb{R}$** et **continue en y_0**.

Théorème 1.8. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : E \times I \to \mathbb{R}$ une fonction. S'il existe une fonction g **intégrable** telle que
1. pour tout $y \in \mathbb{R}, y \mapsto f(x, y)$ est **intégrable**,
2. pour μ-presque tout $x \in E, y \mapsto f(x, y)$ est **dérivable sur I**,
3. pour μ-presque tout $x \in E$ et pour tout $y \in \mathbb{R}, |\partial_y f(x, y)| \leq g(x)$,

alors la fonction $F : y \mapsto \int_E f(x, y) \,\mathrm{d}\mu(x)$ est **définie** et **dérivable sur I** avec

$$\forall y \in I, F'(y) = \int_E \partial_y f(x, y) \,\mathrm{d}\mu(x).$$

1.5. Fubini

Théorème 1.9. Soit μ et ν deux mesures **σ-finies**, et $f : E \times F \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction **mesurable positive**. Alors
1. Les fonctions $x \mapsto \int_F f(x, y) \,\mathrm{d}\nu(y)$ et $y \mapsto \int_E f(x, y) \,\mathrm{d}\mu(x)$ sont **mesurables**,
2. on a l'égalité

$$\int_{E \times F} f(x, y) \,\mathrm{d}(\mu \otimes \nu)(x, y) = \int_E \int_F f(x, y) \,\mathrm{d}\nu(y) \,\mathrm{d}\mu(x) = \int_F \int_E f(x, y) \,\mathrm{d}\mu(x) \,\mathrm{d}\nu(y).$$

Théorème 1.10. Soit μ et ν deux mesures **σ-finies**, et $f : E \times F \to \mathbb{R}$ une fonction **intégrable**.
1. pour μ-presque tout $x \in E$, $y \mapsto f(x, y)$ et pour μ-presque tout $y \in F$, $x \mapsto f(x, y)$ sont **intégrables**,
2. Les fonctions $x \mapsto \int_F f(x, y) \,\mathrm{d}\nu(y)$ et $y \mapsto \int_E f(x, y) \,\mathrm{d}\mu(x)$ sont **intégrables**,
3. on a l'égalité

$$\int_{E \times F} f(x, y) \,\mathrm{d}(\mu \otimes \nu)(x, y) = \int_E \int_F f(x, y) \,\mathrm{d}\nu(y) \,\mathrm{d}\mu(x) = \int_F \int_E f(x, y) \,\mathrm{d}\mu(x) \,\mathrm{d}\nu(y).$$