Calcul différentiel 2

Table des matières

1. Calcul différentiel

1.1. Inversion et fonctions implicites

Définition 1.1. Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \cup \{+\infty\}$, U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, et $f : U \to V$ une application. On dit que f est un C^k-*difféomorphisme* de U sur V si :
(1) f est bijective de U sur V,
(2) f est de classe C^k sur U,
(3) f^{-1} est de classe C^k sur V.

Remarque 1.2. Soit $f : U \to V$ un C^k-difféomorphisme, $x \in U$ et $y \in V$. Alors

$$f^{-1}(f(x)) = x$$
$$f\big(f^{-1}(y)\big) = y$$

de plus en appliquant le théorème de composition des différentielles

$$\big(\mathrm{d}_{f(x)} f^{-1}\big) \circ (\mathrm{d}_x f) = \mathrm{id}$$
$$\big(\mathrm{d}_{f^{-1}(y)} f\big) \circ \big(\mathrm{d}_y f^{-1}\big) = \mathrm{id}$$

donc $\mathrm{d}_x f$ est inversible avec $(\mathrm{d}_x f)^{-1} = \mathrm{d}_{f(x)} f^{-1}$.

Exemples 1.3.
1. On considère $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n; x \mapsto Ax$ où $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, alors f est C^∞ comme fonction linéaire et bijective de réciproque $y \mapsto A^{-1}y$. On remarque que f^{-1} est C^∞ comme fonction linéaire, donc f est un C^∞-difféomorphisme.
2. On considère $f : U \to V; (x, y) \mapsto (x + y, xy)$ où U et V sont définis par

$$
\begin{aligned}
U &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y\} \\
V &= \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid s^2 - 4t > 0\}
\end{aligned}
$$

alors f est un C^∞ difféomorphisme de U sur V, en effet

a. f est bijective de U sur V, puisque pour $(x,y) \in U$ on a

$$(x+y)^2 - 4xy = x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 > 0$$

donc $f(U) \subset V$, réciproquement pour $(s,t) \in V$ on cherche $(x,y) \in U$ tels que

$$\begin{cases} x + y = s \\ xy = t \end{cases}$$

c'est-à-dire x et y sont racines du polynôme $X^2 - sX + t$, comme $x > y$ on a

$$\begin{cases} x = \frac{s+\sqrt{s^2-4t}}{2} \\ y = \frac{s-\sqrt{s^2-4t}}{2} \end{cases}$$

donc $V \subset f(U)$, f est bijective,

b. f est de classe C^∞ sur U car polynômiale,

c. f^{-1} est de classe C^∞ sur V car $(s,t) \mapsto s^2 - 4t$ et $\sqrt{\cdot}$ sont C^∞ sur V.

3. On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto x^3$, alors f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et bijective. Mais son inverse $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; y \mapsto \sqrt[3]{y}$, n'est pas dérivable en 0 donc f n'est pas un C^∞-difféomorphisme.

1.1.1. Théorèmes d'inversion locale et globale

Théorème 1.4. (Théorème d'inversion locale) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^k et a un point de U. Si $\mathrm{d}_a f$ est un isomorphisme, alors il existe un voisinage ouvert V de a et un voisinage ouvert W de $f(a)$ tels que $f : V \to W$ est un C^k-difféomorphisme.

Théorème 1.5. (Théorème d'inversion globale) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^k. Si :

(1) f est injective sur U,

(2) $\forall x \in U, \mathrm{d}_x f$ est un isomorphisme.

Alors $f(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to f(U)$ est un C^k-difféomorphisme.

Démonstration. Soit $x \in U$, alors d'après le théorème d'inversion locale il existe un voisinage ouvert V_x de x et un voisinage ouvert $W_{f(x)}$ de $f(x)$ tels que $f : V_x \to W_{f(x)}$ est un C^k-difféomorphisme. En particulier $W_{f(x)} = f(V_x)$, et on en déduit que

$$f(U) = \bigcup_{x \in U} W_{f(x)}$$

est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ comme union d'ouverts. De plus puisque f est injective sur U, on en déduit que f est bijective de U sur $f(U)$. Enfin puisque la régularité est une notion locale f et f^{-1} sont respectivement de classe C^k sur U et $f(U)$. Donc $f : U \to f(U)$ est un C^k-difféomorphisme. □

Exemples 1.6.

1. On considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; (r,\theta) \mapsto (f_1, f_2) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$, alors

a. f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ puisque cos et sin sont de classe C^∞.

b. On pose $U :=]0, +\infty[\times] - \pi, \pi[$, qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ sur lequel f est injective.

c. Soit $(r,\theta) \in U$, alors

$$\mathrm{J}_f(r,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

et $\det\big(\mathrm{J}_f(r,\theta)\big) = r\cos^2(\theta) + r\sin^2(\theta) = r > 0$, donc $\mathrm{d}_{(r,\theta)}f$ est inversible.

Donc d'après le Théorème 1.5 $f : U \to f(U)$ est un C^∞-difféomorphisme.

2. On considère $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; (r,\theta,\varphi) \mapsto (f_1,f_2,f_3) = (r\cos(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$.
   a. f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^3$ puisque cos et sin sont de classes C^∞.
   b. On pose $U :=]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, qui est un ouvert de $\mathbb{R}^3$ sur lequel f est injective.
   c. Soit $(r,\theta,\varphi) \in U$, alors

$$\mathrm{J}_f(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\varphi) & -r\sin(\theta)\cos(\varphi) & -r\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\theta)\cos(\varphi) & r\cos(\theta)\cos(\varphi) & -r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & 0 & r\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

   et le déterminant de cette matrice est

$$\begin{aligned} \det\big(\mathrm{J}_f(r,\theta,\varphi)\big) &= \sin(\varphi)\big(r^2\sin^2(\theta)\cos(\varphi)\sin(\varphi) + r^2\cos^2(\theta)\cos(\varphi)\sin(\varphi)\big) \\ &\quad + r\cos(\varphi)\big(r\cos^2(\theta)\cos^2(\varphi) + \sin^2(\theta)\cos^2(\varphi)\big) \\ &= \sin^2(\varphi)r^2\cos(\varphi) + \cos^2(\varphi)r^2\cos(\varphi) = r^2\cos(\varphi) \neq 0 \end{aligned}$$

   donc $\mathrm{d}_{(r,\theta,\varphi)}f$ est inversible.

   Donc d'après le Théorème 1.5 $f : U \to f(U)$ est un C^∞-difféomorphisme.

3. On pose $U := R^2 \setminus \{(0,0)\}$ et on considère $f : U \to \mathbb{R}^2; (x,y) \mapsto \big(x^2-y^2, 2xy\big)$, alors
   a. f est de classe C^∞ sur U puisque f est polynômiale.
   c. Soit $(x,y) \in U$, alors

$$\mathrm{J}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

   et $\det\big(\mathrm{J}_f(x,y)\big) = 4\big(x^2+y^2\big) > 0$ sur U, donc $\mathrm{d}_{(x,y)}f$ est inversible.

   Donc d'après le Théorème 1.4 $f : U \to \mathbb{R}^2$ est un C^∞-difféomorphisme local en tout point de U. Mais $f(-1,-1) = f(1,1)$, donc $f : U \to \mathbb{R}^2$ n'est pas C^∞-difféomorphisme global.

   b. On pose $U' := \{(x,y) \in U \mid x > 0\}$, qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ sur lequel f est injective. En effet si $f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2)$, alors on pose

$$\begin{cases} (x_1,y_1) = r_1(\cos(\theta_1),\sin(\theta_1)) \\ (x_2,y_2) = r_2(\cos(\theta_2),\sin(\theta_2)) \end{cases} \quad \text{où } r_1,r_2 > 0 \text{ et } \theta_1,\theta_2 \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$$

   et on trouve

$$\begin{cases} r_1^2\cos(2\theta_1) = r_2^2\cos(2\theta_2) \\ r_1^2\sin(2\theta_1) = r_2^2\sin(2\theta_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \theta_1 = \theta_2 \bmod 2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \theta_1 = \theta_2 \end{cases}$$

   donc $(x_1,y_1) = (x_2,y_2)$ et f est bien injective.

   Donc d'après le Théorème 1.5 $f : U' \to f(U')$ est un C^∞-difféomorphisme.

1.1.2. Théorème des fonctions implicites

Théorème 1.7. (Théorème des fonctions implicites) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, (a,b) un point de U et $f = \left(f_1, \dots, f_q\right) : U \to \mathbb{R}^q$ une application de classe C^k. Si :
(1) $f(a,b) = 0$,
(2) la jacobienne de f par rapport à la deuxième variable en (a,b) est inversible.

Alors il existe un voisinage ouvert V de a, un voisinage ouvert W de b, avec $V \times W \subset U$, et une application $\varphi : V \to W$ de classe C^∞ qui vérifie $b = \varphi(a)$, tels que :

$$\begin{cases}(x,y) \in V \times W \\ f(x,y) = 0\end{cases} \iff \begin{cases} x \in V \\ y = \varphi(x)\end{cases}.$$

De plus pour tout $x \in V$, $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}(x) = -\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}(x, \varphi(x))\right)^{-1} \circ \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x, \varphi(x))$.

Démonstration. On considère l'application

$$g : U \to \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q ; (x,y) \mapsto (x, f(x,y)).$$

Alors la matrice jacobienne de g en (a,b) est

$$\mathrm{J}_g(a,b) = \begin{pmatrix} I_p & 0_q \\ \cdot & \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}(a,b)\end{pmatrix}$$

et son déterminant $\det\left(\mathrm{J}_g(a,b)\right)$ est non nul par hypothèse.
Donc d'après le Théorème 1.4 il existe un voisinage ouvert U_1 de (a,b) et un voisinage ouvert U_2 de $g(a,b) = (a, f(a,b))$ tels que $g : U_1 \to U_2$ est un C^k-difféomorphisme.
En particulier il existe $\psi : U_2 \to \mathbb{R}^q$ telle que pour tout $(x,y) \in U_2$ on a $g^{-1}(x,y) = (x, \psi(x,y))$.
On prend $V \times W \subset U_1$ et on pose $\varphi : V \to W ; x \mapsto \psi(x, 0)$, alors l'équivalence du théorème est bien vérifiée et il suffit de dériver pour obtenir l'égalité. □

Exemples 1.8.

1. On considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} ; (x,y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$ et $\mathbb{S}^1 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 0\right\}$. Les dérivées partielles de f sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y.$$

   On remarque que pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant

$$\begin{cases}(x,y) \in \mathbb{S}^1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \neq 0\end{cases} \iff \begin{cases}(x,y) \in \mathbb{S}^1 \\ y \neq 0\end{cases}$$

   on a $(x,y) \in \mathbb{S}^1 \setminus \{(1,0), (-1,0)\}$. On peut donc appliquer le Théorème 1.7, au voisinage V de x, $\mathbb{S}^1$ est le graphe d'une application $\varphi : V \to \mathbb{R}$. De plus on a

$$\forall x \in V, x^2 + \varphi(x)^2 - 1 = 0$$

   en dérivant on trouve

$$\forall x \in V, 2x + 2\varphi(x)\varphi'(x) = 0$$

   et donc $\varphi'(x) = -\frac{x}{\varphi(x)}$.
2. On considère $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} ; (x,y,z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 1$, $\mathbb{S}^2 := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = 0\right\}$. Les dérivées partielles de f sont

$$\forall a \in \{x, y, z\}, \frac{\partial f}{\partial a}(x, y, z) = 2a.$$

On remarque que pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant

$$\begin{aligned}
\begin{cases} (x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \neq 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} (x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \\ z \neq 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} (x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \\ (x, y, z) \neq (a, b, 0) \text{ où } (a, b) \in \mathbb{S}^1 \end{cases}
\end{aligned}$$

on a $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \setminus \left(\mathbb{S}^1 \times \{0\}\right)$. On peut donc appliquer le Théorème 1.7, au voisinage V de (x, y), $\mathbb{S}^2$ est le graphe d'une application $\varphi : V \to \mathbb{R}$. De plus on a

$$\forall (x, y) \in V, x^2 + y^2 + \varphi(x, y)^2 - 1 = 0$$

en dérivant par rapport à x on trouve

$$\forall (x, y) \in V, 2x + 2\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\varphi(x, y) = 0$$

donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{x}{\varphi(x,y)}$, et en dérivant par rapport à y on trouve

$$\forall (x, y) \in V, 2y + 2\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\varphi(x, y) = 0$$

donc $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{y}{\varphi(x,y)}$.

1.2. Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

1.2.1. Sous-variétés

Définition 1.9. Soit X une partie de $\mathbb{R}^n$. On dit que X est une *sous-variété de* $\mathbb{R}^n$ *de classe* C^k *et de dimension* $d \in \mathbb{N}$ si pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U dans $\mathbb{R}^n$, un voisinage ouvert V de x et un C^k-difféomorphisme $\varphi : U \to V$ tels que :

$$V \cap X = \varphi\big(U \cap \big(\mathbb{R}^d \times \{0\}\big)\big).$$

On appelle *codimension* de X l'entier $n - d$.

Remarque 1.10. Une sous-variété de dimension 1 est une *courbe*, une sous-variété de dimension 2 est une *surface*, une sous-variété de dimension $n-1$ (codimension 1) est une *hypersurface*

Exemples 1.11.
1. Une courbe dans $\mathbb{R}^2$ est difféomorphe à un segment.
2. Un ouvert de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de dimension n.
3. On considère le cercle $\mathbb{S}^1$, on pose $U' \coloneqq]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[$, $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{]-\infty, 0] \times \{0\}\}$, ainsi que $\psi : U' \to V; (r, \theta) \mapsto r(\cos(\theta), \sin(\theta))$ qui est un difféomorphisme de classe C^∞. On a

$$\begin{aligned} V \cap \mathbb{S}^1 &= \mathbb{S}^1 \setminus \{(-1, 0)\} \\ &= \psi(\{1\} \times]-\pi, \pi[) \\ &= \psi(U' \cap (\{1\} \times \mathbb{R})) \end{aligned}$$

on prend alors $U :]-\pi, \pi[\times]0, +\infty[$ et $\varphi : U \to V; (\theta, r) \mapsto \psi(r+1, \theta)$, donc $\mathbb{S}^1$ est bien une sous-variété de $\mathbb{R}^2$ de classe C^∞ et de dimension 1.

Définition 1.12. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}^p$ une application de classe C^k. On dit que f est une *immersion* en a si $\mathrm{d}_a f$ est injective.

Définition 1.13. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}^p$ une application de classe C^k. On dit que f est une *submersion* en a si $\mathrm{d}_a f$ est surjective.

Théorème 1.14. Soit X une partie de $\mathbb{R}^n$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :
(1) (*redressement*) X est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ classe C^k et de dimension $d \in \{0, \dots, n\}$.
(2) (*implicite*) Pour tout $a \in X$, il existe un voisinage ouvert U de a dans $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^{n-d}$ une submersion en a de classe C^k tels que $U \cap X = f^{-1}(f(a))$.

Démonstration.
(1) ⇒ (2) : Supposons que X est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de classe C^k et de dimension d.
Soit $a \in X$, alors il existe un voisinage ouvert U dans $\mathbb{R}^n$, un voisinage ouvert V de a et un C^k-difféomorphisme $\varphi : U \to V$ tels que

$$V \cap X = \varphi\big(U \cap \big(\mathbb{R}^d \times \{0\}\big)\big).$$

On écrit $\varphi^{-1} = (g_1, \dots, g_d, f_1, \dots, f_{n-d})$, alors

$$V \cap X = \{x \in V \mid f_1(x) = \dots = f_{n-d}(x) = 0\}.$$

On pose $f \coloneqq (f_1, \dots, f_{n-d})$, puisque φ est un difféomorphisme on en déduit que $\mathrm{d}_a f$ est surjective, donc f est une submersion en a de classe C^k.

(2) ⇒ (1) : Supposons que les hypothèses soient vérifiées. Sans perte de généralité, on suppose que $f(a) = 0$ et que $\det\big(\mathrm{J}_f(a)\big) \neq 0$. On pose $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ définie par

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = (x_1 - a_1, \dots, x_d - a_d, f_1(x_{d+1}), \dots, f_{n-d}(x_n))$$

alors $\det(\mathrm{J}_\psi(a)) = \det(\mathrm{J}_f(a)) \neq 0$, quitte à restreindre V, ψ est un C^k-difféomorphisme de V sur $U := \psi(V)$. En prenant $\varphi := \psi^{-1}$, on a bien

$$V \cap X = \varphi\big(U \cap \big(\mathbb{R}^d \times \{0\}\big)\big).$$

$\square$

Exemple 1.15. On considère le cercle $\mathbb{S}^2$ décrit par $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}; (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$. Alors f est de classe C^k sur $\mathbb{R}^3$ et $\det(\mathrm{Jac}_f) \neq 0$ sur $\mathbb{S}^2$, donc f est une submersion en tout point de $\mathbb{S}^2$. On en déduit que $\mathbb{S}^2$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de classe C^k et de dimension $3 - 1 = 2$.

1.2.2. Espace tangent à une sous-variété

Définition 1.16. Soit X une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de classe C^k et de dimension d, $a \in X$ un point et v un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On dit que v est *tangent* à X en a s'il existe $\varepsilon > 0$ et une courbe $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}^n$ de classe C^k vérifiant :

(1) $\gamma(0) = a$,
(2) $\gamma'(0) = v$,
(3) $\mathrm{im}(\gamma) \subset X$.

On appelle *espace tangent* à X en a, noté T_aX, l'ensemble des vecteurs tangents à X en a.

Exemples 1.17. Soit X une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de classe C^k et de dimension d et $a \in X$ un point.

1. Le vecteur nul est tangent à X en tout point, avec $\gamma : t \mapsto a$.
2. Pour tout vecteur v tangent à X en a, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda v$ est tangent à X en a.
3. Si X est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, v est tangent à X en a.
4. Si X est un point, alors le seul vecteur tangent à X en a est 0.

Théorème 1.18. Soit X une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ classe C^k et de dimension d et $a \in X$ un point. Alors l'espace tangent T_aX est un espace vectoriel de dimension d et on a les caractérisations :

(1) S'il existe un voisinage ouvert U de $\mathbb{R}^n$, un voisinage ouvert V de a et un C^k-difféomorphisme $\varphi : U \to V$ vérifiant $V \cap X = \varphi\big(U \cap \big(\mathbb{R}^d \times \{0\}\big)\big)$, alors $T_aX = \mathrm{d}_{\varphi^{-1}(a)}\varphi\big(\mathbb{R}^d \times \{0\}\big)$.
(2) S'il existe un voisinage ouvert V de a et une submersion en a $f : V \to \mathbb{R}^{n-d}$ de classe C^k vérifiant $V \cap X = f^{-1}(f(a))$, alors $T_aX = \ker(\mathrm{d}_a f)$.

Démonstration.

(1) Supposons sans perte de généralité que $\varphi^{-1}(a) = 0$. Soit $v \in T_aX$, alors il existe $\varepsilon > 0$ et une courbe $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to V \cap X$ de classe C^k vérifiant $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$. On pose $\delta := \varphi^{-1}(\gamma)$, alors on a $\mathrm{im}(\delta) \subset U \cap \big(\mathbb{R}^d \times \{0\}\big)$, $\delta(0) = 0$ et

$$\delta'(t) = \mathrm{d}_{\gamma(t)}\varphi^{-1}(\gamma'(t))$$

d'où $\delta'(0) = \mathrm{d}_a\varphi^{-1}(v)$ et $v = \mathrm{d}_a\varphi^{-1}\varphi(\delta'(0))$, donc $T_aX \subset \mathrm{d}_a\varphi^{-1}\varphi\big(\mathbb{R}^d \times \{0\}\big)$.
Réciproquement, on montre de la même manière que $\mathrm{d}_a\varphi^{-1}\varphi\big(\mathbb{R}^d \times \{0\}\big) \subset T_aX$.
Donc $T_aX = \mathrm{d}_a\varphi^{-1}\varphi\big(\mathbb{R}^d \times \{0\}\big)$, on en déduit que T_aX est un espace vectoriel de dimension d.

(2) Soit $v \in T_aX$, alors il existe $\varepsilon > 0$ et une courbe $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to V \cap X$ de classe C^k vérifiant $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$. Soit $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, alors

$$\gamma(t) \in V \cap X \Rightarrow (f \circ \gamma)(t) = f(a) \Rightarrow (f \circ \gamma)'(t) = 0$$

or $(f \circ \gamma)(t) = \mathrm{d}_{\gamma(t)}f(\gamma'(t))$ et $\mathrm{d}_a f(v) = 0$, donc $T_aX \subset \ker(\mathrm{d}_a f)$. L'égalité des dimensions entraine l'égalité des espaces.

$\square$

Remarque 1.19. S'il existe un voisinage ouvert V de a et une submersion en a $f : V \to \mathbb{R}^{n-d}$ de classe C^k vérifiant $V \cap X = f^{-1}(f(a))$, alors $T_a X = \mathrm{Vect}\left(\nabla_{f_1}(a), \ldots, \nabla_{f_{n-d}}(a)\right)^{\perp}$.

1.2.3. Extrema liés

Théorème 1.20. (Théorèmes des extrema liés) Soit X une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de classe C^k et de dimension d, $a \in X$ un point, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^k.
Si f restreinte à X admet un extremum local en a et s'il existe une submersion $g : U \to \mathbb{R}^{n-d}$ de classe C^k telle que, en notant $g = (g_1, \ldots, g_{n-d})$, on ait

$$X = \{x \in U \mid g_1(x) = \ldots = g_{n-d}(x) = 0\}.$$

Alors il existe des uniques $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-d} \in \mathbb{R}$ tels que

$$\nabla_f(a) = \lambda_1 \nabla_{g_1}(a) + \cdots + \lambda_{n-d} \nabla_{g_{n-d}}(a).$$

Ces réels sont appellés les *multiplicateurs de Lagrange*.

Exemple 1.21. On cherche les extrema de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; (x, y) \mapsto x + y$, que l'on restreint à l'ensemble $M := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + y^4 = 1\right\}$.
On remarque que M est une sous-variété de $\mathbb{R}^2$ de classe C^∞, en effet $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; (x, y) \mapsto x^4 + y^4$ est une submersion en tout point de M. Si $f|_M$ admet un extremum local en un point $(a, b) \in M$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla(f)(a, b) = \lambda \nabla(g)(a, b)$. On a donc le système suivant

$$\begin{cases} 1 = \lambda 4 a^3 \\ 1 = \lambda 4 b^3 \end{cases}$$

et on en déduit que $\lambda \neq 0$ et $a^3 = b^3 = \frac{1}{4\lambda}$, d'où $a = b$.
Comme $(a, b) \in M$ on a $a^4 + b^4 = 1$, d'où $2a^4 = 1$, donc $a = b = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$. On a deux extrema possibles

$$m_1 := \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right) \text{ et } m_2 := \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$$

comme f est continue et M est compact (comme fermé borné de $\mathbb{R}^2$), f admet au moins un minimum global et un maximum global, elle en a donc exactement deux : m_1 et m_2.
On a $f(m_1) = -f(m_2) = \frac{2}{\sqrt[4]{2}}$, donc f atteint son minimum en m_2 et son maximum en m_1.

2. Équations différentielles

2.1. Équations différentielles du premier ordre

Définition 2.1. Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue. On appelle *équation différentielle d'ordre 1 dans* $\mathbb{R}^n$, notée (E), une équation de la forme suivante :

$$y' = f(t, y)$$

on dit que t est la *variable de temps* et que y est la *variable d'état*.

Définition 2.2. Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1. On appelle *solution* de (E) sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ une fonction $y : I \to \mathbb{R}^n$ dérivable vérifiant :
(1) $\forall t \in I, (t, y(t)) \in U$,
(2) $\forall t \in I, y'(t) = f(t, y(t))$.

Remarque 2.3. Dans le cas où I n'est pas ouvert, la dérivabilité s'entend comme la dérivabilité à droite ou à gauche (selon l'extrémité).

Exemples 2.4.
1. On considère l'équation différentielle d'ordre 1 donnée par $y' = y$. La fonction $t \mapsto e^t$ est une solution de cette équation sur $]1, 2[$.
2. L'équation donnée par $y' = y^2 + t$ est une équation différentielle d'ordre 1 sur $\mathbb{R}$.
3. L'équation donnée par $y' = \frac{y+1}{t\ln(t)}$ est une équation différentielle d'ordre 1 sur $\mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto -1 + \ln(t)$ est une solution de cette équation sur $]0, 1[$.

Définition 2.5. Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1 et $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. On appelle *problème de Cauchy* avec donnée (t_0, y_0) le système composé des équations (E) et $y(t_0) = y_0$. On dit que l'équation $y(t_0) = y_0$ est la *condition initiale* (ou de Cauchy).

Exemple 2.6. La fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; t \mapsto 2e^{-t}$ est une solution de l'équation différentielle $y' = -y$ de condition initiale $y(0) = 2$.

Définition 2.7. Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1. Soit M un point de U, on note $\mathcal{D}_M$ la droite passant par M et de coefficient directeur $f(M)$. On appelle *champ des tangentes* l'application $M \mapsto \mathcal{D}_M$ associée à (E). On appelle *courbe intégrale* une courbe $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ qui a pour tangente en chaque point M la droite $\mathcal{D}_M$ du champ des tangentes.

Remarque 2.8. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Alors $\mathcal{D}_{(x_0,y_0)}$ a pour équation $y - y_0 = f(x_0, y_0)(x - x_0)$.

Exemples 2.9.
1. On considère l'équation différentielle $y' = 0$, ici $f \equiv 0$. Soit $M := (x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Alors $\mathcal{D}_M$ est la droite d'équation $y = y_0$ et les courbes intégrales sont les droites $\mathcal{D}_M$.
2. On considère l'équation différentielle $y' = y$, ici $f(x, y) = y$. Soit $M := (x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Alors $\mathcal{D}_M$ est la droite d'équation $y = y_0 + y_0(x - x_0)$.

Proposition 2.10. Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1 et $y : I \to \mathbb{R}^n$ une solution de (E). Alors le graphe de y est une courbe intégrale.

Démonstration. Soit $M = (x_0, y_0)$ un point du graphe de y. L'équation de la tangente au graphe en M est donnée par :

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0) = f(x_0, y_0)(x - x_0)$$

on reconnait l'équation de $\mathcal{D}_M$. □

Définition 2.11. Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1 et $m \in \mathbb{R}$. On appelle *isocline de pente m associée à* (E), l'ensemble :

$$\Gamma_m := \{(x,y) \in U \mid f(x,y) = m\}.$$

2.1.1. Solutions maximales et solutions globales

Définition 2.12. Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1, et $y_1 : I_1 \to \mathbb{R}^n$ et $y_2 : I_2 \to \mathbb{R}^n$ deux solutions de (E). On dit que y_2 est un *prolongement de* y_1 si $I_1 \subset I_2$ et $y_2|_{I_1} = y_1$.

Définition 2.13. Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1 et $y : I \to \mathbb{R}^n$ une solution de (E). On dit que y est *maximale* si elle n'admet pas de prolongement.

Exemple 2.14. On considère l'équation différentielle d'ordre 1 donnée par $y' = y^2$. Alors une solution maximale est $t \mapsto \frac{1}{1-t}$ sur $]-\infty, 1[$.

Théorème 2.15. Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1 et $y : I \to \mathbb{R}^n$ une solution de (E). Alors y admet un prolongement maximal.

Définition 2.16. Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1 et $y : I \to \mathbb{R}^n$ une solution de (E). On suppose que U s'écrit $U = J \times K$ où J est un ouvert de $\mathbb{R}$ et K un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Alors on dit que y est *globale* si $I = J$.

Proposition 2.17. Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1 et $y : I \to \mathbb{R}^n$ une solution de (E). Si y est une solution globale, alors y est une solution maximale.

Proposition 2.18. Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1 et $y : I \to \mathbb{R}^n$ une solution de (E). Si f est de classe C^k, alors y est de classe C^{k+1}.

2.1.2. Equations intégrales et cylindre de sécurité

Lemme 2.19. Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1 et $y : I \to \mathbb{R}^n$ une fonction. Alors y est une solution du problème de Cauchy de condition initiale (t_0, y_0) si et seulement si :
(1) y est continue et $\forall t \in I, (t, y(t)) \in U$,
(2) $\forall t \in I, y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(x, y(x))\,\mathrm{d}x$.

Définition 2.20. Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1, (t_0, y_0) un point de U et $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times B(y_0, r)$ un cylindre dans U. On dit que C est un *cylindre de sécurité* si toute solution $y : I \to \mathbb{R}^n$ du problème de Cauchy de condition initiale (t_0, y_0) avec $I \subset [t_0 - T, t_0 + T]$ reste contenue dans $\overline{B}(y_0, r)$.

Proposition 2.21. Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1 et (t_0, y_0) un point de U. Alors il existe $T > 0$ tel que $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times B(y_0, r)$ soit un cylindre de sécurité.

2.1.3. Théorème de Cauchy-Péano-Arzéla

Théorème 2.22. Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1, (t_0, y_0) un point de U et $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times B(y_0, r)$ un cylindre de sécurité. Alors il existe une solution $y : I \to \mathbb{R}^n$ du problème de Cauchy de condition initiale (t_0, y_0)telle que $y(I) \subset B(y_0, r)$

Corollaire 2.23. Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1 et (t_0, y_0) un point de U. Alors il existe une solution $y : I \to \mathbb{R}^n$ maximale et I est ouvert.

2.1.4. Théorème de Cauchy-Lipschitz

Définition 2.24. Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1. On dit que f est *localement lipschitzienne* par rapport à la variable y si pour tout point (t_0, y_0) dans U, il existe un cylindre $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times B(y_0, r)$ dans U et une constante $k \geq 0$ tels que f soit k-lipschitzienne par rapport à la variable y sur C :

$$\forall (t, y_1), (t, y_2) \in C, \|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq k|y_1 - y_2|.$$

Remarque 2.25. On considère $f = (f_1, \ldots, f_n)$. Si f admet des dérivées partielles par rapport à la variable y continues sur U. Alors en appliquant le théorème des accroissements finis on obtient que f est localement lipschitzienne par rapport à la variable y. Cela est vrai en particulier si f est C^1.

Lemme 2.26. Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1, (t_0, y_0) un point de U et $C_0 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times B(y_0, r_0)$ un cylindre sur lequel f est k-lipschitzienne par rapport à la variable y. Posons $M := \sup_{C_0} \|f\|$, $T := \min\left(T_0, \frac{r_0}{M}\right)$ et $C := [t_0 - T, t_0 + T] \times B(y_0, r_0)$. Alors pour tout couple $y_1 : I_1 \to \mathbb{R}^n, y_2 : I_2 \to \mathbb{R}^n$ de solutions du problème de Cauchy de condition initiale (t_0, y_0), on a

$$\forall t \in [t_0 - T, t_0 + T], y_1(t) = y_2(t).$$

Théorème 2.27. (Théorème de Cauchy-Lipschitz) Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1 et (t_0, y_0) un point de U. Si f est localement lipschitzienne par rapport à la variable y, alors pour tout cylindre de sécurité $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times B(y_0, r)$, le problème de Cauchy de condition initiale (t_0, y_0) admet une unique solution sur $[t_0 - T, t_0 + T]$.

Théorème 2.28. Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1, $y_1 : I_1 \to \mathbb{R}^n$ et $y_2 : I_2 \to \mathbb{R}^n$ deux solutions de (E). Si f est localement lipschitzienne par rapport à la variable y et s'il existe $t_0 \in I$ tel que $y_1(t_0) = y_2(t_0)$, alors $y_1 = y_2$.

Corollaire 2.29. Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1 et (t_0, y_0) un point de U. Si f est localement lipschitzienne par rapport à la variable y, alors il existe une unique solution maximale du problème de Cauchy de condition initiale (t_0, y_0).

2.1.5. Théorème des bouts

Théorème 2.30. Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1 et $y :]c, d[\to \mathbb{R}^n$ une solution maximale de (E). Si f est localement lipschitzienne par rapport à la variable y, alors pour tout compact $K \subset U$, il existe un voisinage $V \subset]c, d[$ de d tel que :

$$\forall t \in V, (t, y(t)) \notin K$$

et un voisinage $W \subset]c, d[$ de c tel que :

$$\forall t \in W, (t, y(t)) \notin K.$$

Corollaire 2.31. (Théorème des bouts) Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1 sur $U :=]a, b[\times \mathbb{R}^n$ et $y :]c, d[\to \mathbb{R}^n$ une solution maximale de (E). Si $c > a$, alors on a :

$$\lim_{t \to c^+} \|y(t)\| = +\infty$$

et si $d < b$, alors on a :

$$\lim_{t \to d^-} \|y(t)\| = +\infty.$$

En particulier si y est bornée, alors $a = c$ et $d = b$.

Proposition 2.32. Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1 sur $U :=]a, b[\times \mathbb{R}^n$ et $y :]c, d[\to \mathbb{R}^n$ une solution maximale de (E). Si f est bornée, alors y est une solution globale.

2.2. Equations différentielles linéaires du premier ordre

Définition 2.33. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $A : I \to M_n(\mathbb{R})$ et $A : I \to M_n(\mathbb{R})$ deux fonctions continues. On appelle *équation différentielle linéaire d'ordre 1*, notée (L), une équation différentielle d'ordre 1 de la forme suivante :

$$y' = A(t)y + B(t).$$

Théorème 2.34. Soit (L) une équation différentielle linéaire d'ordre 1 et (t_0, y_0) un point de $I \times \mathbb{R}^n$. Alors il existe une unique solution maximale du problème de Cauchy de condition initiale (t_0, y_0), de plus cette solution est globale.

Définition 2.35. Soit (L) une équation différentielle linéaire d'ordre 1. On dit que (L) est *homogène* si $B = 0$.

Proposition 2.36. Soit (L) une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène. Alors l'ensemble des solutions maximales de l'équation est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n.

Corollaire 2.37. Soit (L) une équation différentielle linéaire d'ordre 1 et $y_0 : I \to \mathbb{R}^n$ une solution globale de (L). On note S l'ensemble des solutions maximales de l'équation homogène associée à (L). Alors l'ensemble des solutions de (L) est $y_0 + S$.

2.2.1. Equations différentielles d'ordre supérieur

Définition 2.38. Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n)^p$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue. On appelle *équation différentielle d'ordre* p, notée $\left(E_p\right)$, une équation de la forme suivante :

$$y^{(p)} = f\left(t, y, y', \dots, y^{(p-1)}\right).$$

Définition 2.39. Soit $\left(E_p\right)$ une équation différentielle d'ordre p. On appelle *solution* de $\left(E_p\right)$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ une fonction $y : I \to \mathbb{R}^n$ p-fois dérivable vérifiant :
(1) $\forall t \in I, \left(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(p-1)}(t)\right) \in U,$
(2) $\forall t \in I, y^{(p)} = f\left(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(p-1)}(t)\right).$

Proposition 2.40. Soit $\left(E_p\right)$ une équation différentielle d'ordre p et $y : I \to \mathbb{R}^n$ une solution de $\left(E_p\right)$. Si f est de classe C^k, alors y est de classe C^{k+p}.

Proposition 2.41. Soit $\left(E_p\right)$ une équation différentielle d'ordre p et $y : I \to \mathbb{R}^n$ une fonction. Posons :

$$Y := \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ \dots \\ Y_{p-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \dots \\ y^{(p-1)} \end{pmatrix}$$

Alors y est une solution de $\left(E_p\right)$ si et seulement Y est une solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 donnée par :

$$Y' = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \dots \\ Y_{p-1} \\ f(t, Y) \end{pmatrix}$$