

Calcul différentiel 2

Table des matières

1. Calcul différentiel	2
1.1. Inversion et fonctions implicites	2
1.1.1. Théorèmes d'inversion locale et globale	3
1.1.2. Théorème des fonctions implicites	4
1.2. Sous-variétés de \mathbb{R}^n	6
1.2.1. Sous-variétés	6
1.2.2. Espace tangent à une sous-variété	7
1.2.3. Extrema liés	8
2. Équations différentielles	9
2.1. Équations différentielles du premier ordre	9
2.1.1. Solutions maximales et solutions globales	10
2.1.2. Équations intégrales et cylindre de sécurité	10
2.1.3. Théorème de Cauchy-Péano-Arzéla	11
2.1.4. Théorème de Cauchy-Lipschitz	12
2.1.5. Théorème des bouts	13
2.2. Équations différentielles linéaires du premier ordre	14
2.3. Équations différentielles d'ordre supérieur	14
2.4. Solutions d'équations différentielles linéaires à coefficients constants	15
2.4.1. Solutions exponentielles d'équations homogènes	15
2.4.1.1. Cas diagonalisable	16
2.4.1.2. Cas général	16
2.4.2. Solutions exponentielles	16

1. Calcul différentiel

1.1. Inversion et fonctions implicites

Définition 1.1. Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \cup \{+\infty\}$, U et V deux ouverts de \mathbb{R}^n , et $f : U \rightarrow V$ une application. On dit que f est un C^k -difféomorphisme de U sur V si :

- (1) f est bijective de U sur V ,
- (2) f est de classe C^k sur U ,
- (3) f^{-1} est de classe C^k sur V .

Remarque 1.2. Soit $f : U \rightarrow V$ un C^k -difféomorphisme, $x \in U$ et $y \in V$. Alors

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

$$f(f^{-1}(y)) = y$$

de plus en appliquant le théorème de composition des différentielles

$$(d_{f(x)}f^{-1}) \circ (d_x f) = \text{id}$$

$$(d_{f^{-1}(y)}f) \circ (d_y f^{-1}) = \text{id}$$

donc $d_x f$ est inversible avec $(d_x f)^{-1} = d_{f(x)}f^{-1}$.

Exemples 1.3.

1. On considère $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n; x \mapsto Ax$ où $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, alors f est C^∞ comme fonction linéaire et bijective de réciproque $y \mapsto A^{-1}y$. On remarque que f^{-1} est C^∞ comme fonction linéaire, donc f est un C^∞ -difféomorphisme.
2. On considère $f : U \rightarrow V; (x, y) \mapsto (x + y, xy)$ où U et V sont définis par

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y\}$$

$$V = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid s^2 - 4t > 0\}$$

alors f est un C^∞ difféomorphisme de U sur V , en effet

- a. f est bijective de U sur V , puisque pour $(x, y) \in U$ on a

$$(x + y)^2 - 4xy = x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 > 0$$

donc $f(U) \subset V$, réciproquement pour $(s, t) \in V$ on cherche $(x, y) \in U$ tels que

$$\begin{cases} x + y = s \\ xy = t \end{cases}$$

c'est-à-dire x et y sont racines du polynôme $X^2 - sX + t$, comme $x > y$ on a

$$\begin{cases} x = \frac{s + \sqrt{s^2 - 4t}}{2} \\ y = \frac{s - \sqrt{s^2 - 4t}}{2} \end{cases}$$

donc $V \subset f(U)$, f est bijective,

- b. f est de classe C^∞ sur U car polynomiale,
- c. f^{-1} est de classe C^∞ sur V car $(s, t) \mapsto s^2 - 4t$ et $\sqrt{\cdot}$ sont C^∞ sur V .
3. On considère $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^3$, alors f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} et bijective. Mais son inverse $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y \mapsto \sqrt[3]{y}$, n'est pas dérivable en 0 donc f n'est pas un C^∞ -difféomorphisme.

1.1.1. Théorèmes d'inversion locale et globale

Théorème 1.4 (Théorème d'inversion locale). Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n , $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe C^k et a un point de U . Si $d_a f$ est un isomorphisme, alors il existe un voisinage ouvert V de a et un voisinage ouvert W de $f(a)$ tels que $f : V \rightarrow W$ est un C^k -difféomorphisme.

Théorème 1.5 (Théorème d'inversion globale). Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe C^k . Si :

- (1) f est injective sur U ,
- (2) $\forall x \in U, d_x f$ est un isomorphisme.

Alors $f(U)$ est un ouvert de \mathbb{R}^n et $f : U \rightarrow f(U)$ est un C^k -difféomorphisme.

Démonstration. Soit $x \in U$, alors d'après le théorème d'inversion locale il existe un voisinage ouvert V_x de x et un voisinage ouvert $W_{f(x)}$ de $f(x)$ tels que $f : V_x \rightarrow W_{f(x)}$ est un C^k -difféomorphisme. En particulier $W_{f(x)} = f(V_x)$, et on en déduit que

$$f(U) = \bigcup_{x \in U} W_{f(x)}$$

est un ouvert de \mathbb{R}^n comme union d'ouverts. De plus puisque f est injective sur U , on en déduit que f est bijective de U sur $f(U)$. Enfin puisque la régularité est une notion locale f et f^{-1} sont respectivement de classe C^k sur U et $f(U)$. Donc $f : U \rightarrow f(U)$ est un C^k -difféomorphisme. \square

Exemples 1.6.

1. On considère $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; (r, \theta) \mapsto (f_1, f_2) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$, alors
 - a. f est de classe C^∞ sur \mathbb{R}^2 puisque \cos et \sin sont de classe C^∞ .
 - b. On pose $U :=]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[$, qui est un ouvert de \mathbb{R}^2 sur lequel f est injective.
 - c. Soit $(r, \theta) \in U$, alors

$$J_f(r, \theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

et $\det(J_f(r, \theta)) = r \cos^2(\theta) + r \sin^2(\theta) = r > 0$, donc $d_{(r, \theta)} f$ est inversible.

Donc d'après le **Théorème d'inversion globale** $f : U \rightarrow f(U)$ est un C^∞ -difféomorphisme.

2. On considère $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3; (r, \theta, \varphi) \mapsto (f_1, f_2, f_3) = (r \cos(\theta) \cos(\varphi), r \sin(\theta) \cos(\varphi), r \sin(\varphi))$.
 - a. f est de classe C^∞ sur \mathbb{R}^3 puisque \cos et \sin sont de classes C^∞ .
 - b. On pose $U :=]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, qui est un ouvert de \mathbb{R}^3 sur lequel f est injective.
 - c. Soit $(r, \theta, \varphi) \in U$, alors

$$J_f(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \cos(\varphi) & -r \sin(\theta) \cos(\varphi) & -r \cos(\theta) \sin(\varphi) \\ \sin(\theta) \cos(\varphi) & r \cos(\theta) \cos(\varphi) & -r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & 0 & r \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

et le déterminant de cette matrice est

$$\begin{aligned} \det(J_f(r, \theta, \varphi)) &= \sin(\varphi)(r^2 \sin^2(\theta) \cos(\varphi) \sin(\varphi) + r^2 \cos^2(\theta) \cos(\varphi) \sin(\varphi)) \\ &\quad + r \cos(\varphi)(r \cos^2(\theta) \cos^2(\varphi) + \sin^2(\theta) \cos^2(\varphi)) \\ &= \sin^2(\varphi) r^2 \cos(\varphi) + \cos^2(\varphi) r^2 \cos(\varphi) = r^2 \cos(\varphi) \neq 0 \end{aligned}$$

donc $d_{(r, \theta, \varphi)} f$ est inversible.

Donc d'après le **Théorème d'inversion globale** $f : U \rightarrow f(U)$ est un C^∞ -difféomorphisme.

3. On pose $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et on considère $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2; (x, y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$, alors

- a. f est de classe C^∞ sur U puisque f est polynômiale.
c. Soit $(x, y) \in U$, alors

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

et $\det(J_f(x, y)) = 4(x^2 + y^2) > 0$ sur U , donc $d_{(x,y)}f$ est inversible.

Donc d'après le **Théorème d'inversion locale** $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ est un C^∞ -difféomorphisme local en tout point de U . Mais $f(-1, -1) = f(1, 1)$, donc $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ n'est pas C^∞ -difféomorphisme global.

- b. On pose $U' := \{(x, y) \in U \mid x > 0\}$, qui est un ouvert de \mathbb{R}^2 sur lequel f est injective. En effet si $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$, alors on pose

$$\begin{cases} (x_1, y_1) = r_1(\cos(\theta_1), \sin(\theta_1)) \\ (x_2, y_2) = r_2(\cos(\theta_2), \sin(\theta_2)) \end{cases} \quad \text{où } r_1, r_2 > 0 \text{ et } \theta_1, \theta_2 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

et on trouve

$$\begin{cases} r_1^2 \cos(2\theta_1) = r_2^2 \cos(2\theta_2) \\ r_1^2 \sin(2\theta_1) = r_2^2 \sin(2\theta_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \theta_1 = \theta_2 \mod 2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \theta_1 = \theta_2 \end{cases}$$

donc $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ et f est bien injective.

Donc d'après le **Théorème d'inversion globale** $f : U' \rightarrow f(U')$ est un C^∞ -difféomorphisme.

1.1.2. Théorème des fonctions implicites

Théorème 1.7 (Théorème des fonctions implicites). Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, (a, b) un point de U et $f = (f_1, \dots, f_q) : U \rightarrow \mathbb{R}^q$ une application de classe C^k . Si :

- (1) $f(a, b) = 0$,
- (2) la jacobienne de f par rapport à la deuxième variable en (a, b) est inversible.

Alors il existe un voisinage ouvert V de a , un voisinage ouvert W de b , avec $V \times W \subset U$, et une application $\varphi : V \rightarrow W$ de classe C^∞ qui vérifie $b = \varphi(a)$, tels que :

$$\begin{cases} (x, y) \in V \times W \\ f(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in V \\ y = \varphi(x) \end{cases}$$

De plus pour tout $x \in V$, $\frac{d\varphi}{dx}(x) = -\left(\frac{df}{dy}(x, \varphi(x))\right)^{-1} \circ \frac{df}{dx}(x, \varphi(x))$.

Démonstration. On considère l'application

$$g : U \rightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q; (x, y) \mapsto (x, f(x, y)).$$

Alors la matrice jacobienne de g en (a, b) est

$$J_g(a, b) = \begin{pmatrix} I_p & 0_q \\ \cdot & \frac{df}{dy}(a, b) \end{pmatrix}$$

et son déterminant $\det(J_g(a, b))$ est non nul par hypothèse.

Donc d'après le **Théorème d'inversion locale** il existe un voisinage ouvert U_1 de (a, b) et un voisinage ouvert U_2 de $g(a, b) = (a, f(a, b))$ tels que $g : U_1 \rightarrow U_2$ est un C^k -difféomorphisme.

En particulier il existe $\psi : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^q$ telle que pour tout $(x, y) \in U_2$ on a $g^{-1}(x, y) = (x, \psi(x, y))$.

On prend $V \times W \subset U_1$ et on pose $\varphi : V \rightarrow W; x \mapsto \psi(x, 0)$, alors l'équivalence du théorème est bien vérifiée et il suffit de dériver pour obtenir l'égalité. \square

Exemples 1.8.

1. On considère $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$ et $\mathbb{S}^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$. Les dérivées partielles de f sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y.$$

On remarque que pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant

$$\begin{cases} (x, y) \in \mathbb{S}^1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (x, y) \in \mathbb{S}^1 \\ y \neq 0 \end{cases}$$

on a $(x, y) \in \mathbb{S}^1 \setminus \{(1, 0), (-1, 0)\}$. On peut donc appliquer le **Théorème des fonctions implicites**, au voisinage V de x , \mathbb{S}^1 est le graphe d'une application $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$. De plus on a

$$\forall x \in V, x^2 + \varphi(x)^2 - 1 = 0$$

en dérivant on trouve

$$\forall x \in V, 2x + 2\varphi(x)\varphi'(x) = 0$$

et donc $\varphi'(x) = -\frac{x}{\varphi(x)}$.

2. On considère $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}; (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 1$, $\mathbb{S}^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 0\}$. Les dérivées partielles de f sont

$$\forall a \in \{x, y, z\}, \frac{\partial f}{\partial a}(x, y, z) = 2a.$$

On remarque que pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant

$$\begin{aligned} \begin{cases} (x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \neq 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} (x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \\ z \neq 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \\ (x, y, z) \neq (a, b, 0) \text{ où } (a, b) \in \mathbb{S}^1 \end{cases} \end{aligned}$$

on a $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \setminus (\mathbb{S}^1 \times \{0\})$. On peut donc appliquer le **Théorème des fonctions implicites**, au voisinage V de (x, y) , \mathbb{S}^2 est le graphe d'une application $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$. De plus on a

$$\forall (x, y) \in V, x^2 + y^2 + \varphi(x, y)^2 - 1 = 0$$

en dérivant par rapport à x on trouve

$$\forall (x, y) \in V, 2x + 2\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\varphi(x, y) = 0$$

donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{x}{\varphi(x, y)}$, et en dérivant par rapport à y on trouve

$$\forall (x, y) \in V, 2y + 2\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\varphi(x, y) = 0$$

donc $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{y}{\varphi(x, y)}$.

1.2. Sous-variétés de \mathbb{R}^n

1.2.1. Sous-variétés

Définition 1.9. Soit X une partie de \mathbb{R}^n . On dit que X est une *sous-variété de \mathbb{R}^n de classe C^k et de dimension $d \in \mathbb{N}$* si pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U dans \mathbb{R}^n , un voisinage ouvert V de x et un C^k -difféomorphisme $\varphi : U \rightarrow V$ tels que :

$$V \cap X = \varphi(U \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})).$$

On appelle *codimension* de X l'entier $n - d$.

Remarque 1.10. Une sous-variété de dimension 1 est une *courbe*, une sous-variété de dimension 2 est une *surface*, une sous-variété de dimension $n - 1$ (codimension 1) est une *hypersurface*

Exemples 1.11.

1. Une courbe dans \mathbb{R}^2 est difféomorphe à un segment.
2. Un ouvert de \mathbb{R}^n est une sous-variété de dimension n .
3. On considère le cercle \mathbb{S}^1 , on pose $U' :=]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[$, $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(-\infty, 0] \times \{0\}\}$, ainsi que $\psi : U' \rightarrow V; (r, \theta) \mapsto r(\cos(\theta), \sin(\theta))$ qui est un difféomorphisme de classe C^∞ . On a

$$\begin{aligned} V \cap \mathbb{S}^1 &= \mathbb{S}^1 \setminus \{(-1, 0)\} \\ &= \psi(\{1\} \times]-\pi, \pi[) \\ &= \psi(U' \cap (\{1\} \times \mathbb{R})) \end{aligned}$$

on prend alors $U :=]-\pi, \pi[\times]0, +\infty[$ et $\varphi : U \rightarrow V; (\theta, r) \mapsto \psi(r + 1, \theta)$, donc \mathbb{S}^1 est bien une sous-variété de \mathbb{R}^2 de classe C^∞ et de dimension 1.

Définition 1.12. Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n , $a \in U$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application de classe C^k . On dit que f est une *immersion* en a si $d_a f$ est injective.

Définition 1.13. Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n , $a \in U$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application de classe C^k . On dit que f est une *submersion* en a si $d_a f$ est surjective.

Théorème 1.14. Soit X une partie de \mathbb{R}^n . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) *Redressement* : X est une sous-variété de \mathbb{R}^n classe C^k et de dimension $d \in \{0, \dots, n\}$.
- (2) *Implicite* : Pour tout $a \in X$, il existe un voisinage ouvert U de a dans \mathbb{R}^n et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$ une submersion en a de classe C^k tels que $U \cap X = f^{-1}(f(a))$.

Démonstration.

(1) \Rightarrow (2) : Supposons que X est une sous-variété de \mathbb{R}^n de classe C^k et de dimension d .

Soit $a \in X$, alors il existe un voisinage ouvert U dans \mathbb{R}^n , un voisinage ouvert V de a et un C^k -difféomorphisme $\varphi : U \rightarrow V$ tels que

$$V \cap X = \varphi(U \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})).$$

On écrit $\varphi^{-1} = (g_1, \dots, g_d, f_1, \dots, f_{n-d})$, alors

$$V \cap X = \{x \in V \mid f_1(x) = \dots = f_{n-d}(x) = 0\}.$$

On pose $f := (f_1, \dots, f_{n-d})$, puisque φ est un difféomorphisme on en déduit que $d_a f$ est surjective, donc f est une submersion en a de classe C^k .

(2) \Rightarrow (1) : Supposons que les hypothèses soient vérifiées. Sans perte de généralité, on suppose que $f(a) = 0$ et que $\det(J_f(a)) \neq 0$. On pose $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = (x_1 - a_1, \dots, x_d - a_d, f_1(x_{d+1}), \dots, f_{n-d}(x_n))$$

alors $\det(J_\psi(a)) = \det(J_f(a)) \neq 0$, quitte à restreindre V , ψ est un C^k -difféomorphisme de V sur $U := \psi(V)$. En prenant $\varphi := \psi^{-1}$, on a bien

$$V \cap X = \varphi(U \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})).$$

□

Exemple 1.15. On considère le cercle \mathbb{S}^2 décrit par $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}; (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$. Alors f est de classe C^k sur \mathbb{R}^3 et $\det(\text{Jac}_f) \neq 0$ sur \mathbb{S}^2 , donc f est une submersion en tout point de \mathbb{S}^2 . On en déduit que \mathbb{S}^2 est une sous-variété de \mathbb{R}^3 de classe C^k et de dimension $3 - 1 = 2$.

1.2.2. Espace tangent à une sous-variété

Définition 1.16. Soit X une sous-variété de \mathbb{R}^n de classe C^k et de dimension d , $a \in X$ un point et v un vecteur de \mathbb{R}^n . On dit que v est *tangent* à X en a s'il existe $\varepsilon > 0$ et une courbe $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k vérifiant :

- (1) $\gamma(0) = a$,
- (2) $\gamma'(0) = v$,
- (3) $\text{im}(\gamma) \subset X$.

On appelle *espace tangent* à X en a , noté $T_a X$, l'ensemble des vecteurs tangents à X en a .

Exemples 1.17. Soit X une sous-variété de \mathbb{R}^n de classe C^k et de dimension d et $a \in X$ un point.

1. Le vecteur nul est tangent à X en tout point, avec $\gamma : t \mapsto a$.
2. Pour tout vecteur v tangent à X en a , pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λv est tangent à X en a .
3. Si X est un ouvert de \mathbb{R}^n , alors pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, v est tangent à X en a .
4. Si X est un point, alors le seul vecteur tangent à X en a est 0.

Théorème 1.18. Soit X une sous-variété de \mathbb{R}^n classe C^k et de dimension d et $a \in X$ un point. Alors l'espace tangent $T_a X$ est un espace vectoriel de dimension d et on a les caractérisations :

- (1) S'il existe un voisinage ouvert U de \mathbb{R}^n , un voisinage ouvert V de a et un C^k -difféomorphisme $\varphi : U \rightarrow V$ vérifiant $V \cap X = \varphi(U \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\}))$, alors $T_a X = d_{\varphi^{-1}(a)}\varphi(\mathbb{R}^d \times \{0\})$.
- (2) S'il existe un voisinage ouvert V de a et une submersion en a $f : V \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$ de classe C^k vérifiant $V \cap X = f^{-1}(f(a))$, alors $T_a X = \ker(d_a f)$.

Démonstration.

- (1) Supposons sans perte de généralité que $\varphi^{-1}(a) = 0$. Soit $v \in T_a X$, alors il existe $\varepsilon > 0$ et une courbe $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow V \cap X$ de classe C^k vérifiant $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$. On pose $\delta := \varphi^{-1}(\gamma)$, alors on a $\text{im}(\delta) \subset U \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})$, $\delta(0) = 0$ et

$$\delta'(t) = d_{\gamma(t)}\varphi^{-1}(\gamma'(t))$$

d'où $\delta'(0) = d_a \varphi^{-1}(v)$ et $v = d_a \varphi^{-1}(\delta'(0))$, donc $T_a X \subset d_a \varphi^{-1}(\mathbb{R}^d \times \{0\})$.

Réciproquement, on montre de la même manière que $d_a \varphi^{-1}(\mathbb{R}^d \times \{0\}) \subset T_a X$.

Donc $T_a X = d_a \varphi^{-1}(\mathbb{R}^d \times \{0\})$, on en déduit que $T_a X$ est un espace vectoriel de dimension d .

- (2) Soit $v \in T_a X$, alors il existe $\varepsilon > 0$ et une courbe $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow V \cap X$ de classe C^k vérifiant $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$. Soit $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, alors

$$\gamma(t) \in V \cap X \Rightarrow (f \circ \gamma)(t) = f(a) \Rightarrow (f \circ \gamma)'(t) = 0$$

or $(f \circ \gamma)'(t) = d_{\gamma(t)} f(\gamma'(t))$ et $d_a f(v) = 0$, donc $T_a X \subset \ker(d_a f)$. L'égalité des dimensions entraîne l'égalité des espaces.

□

Remarque 1.19. S'il existe un voisinage ouvert V de a et une submersion en a $f : V \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$ de classe C^k vérifiant $V \cap X = f^{-1}(f(a))$, alors $T_a X = \text{Vect}(\nabla_{f_1}(a), \dots, \nabla_{f_{n-d}}(a))^\perp$.

1.2.3. Extrema liés

Théorème 1.20 (Théorèmes des extrema liés). Soit X une sous-variété de \mathbb{R}^n de classe C^k et de dimension d , $a \in X$ un point, U un ouvert de \mathbb{R}^n et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^k .

Si f restreinte à X admet un extremum local en a et s'il existe une submersion $g : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$ de classe C^k telle que, en notant $g = (g_1, \dots, g_{n-d})$, on ait

$$X = \{x \in U \mid g_1(x) = \dots = g_{n-d}(x) = 0\}.$$

Alors il existe des uniques $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-d} \in \mathbb{R}$ tels que

$$\nabla_f(a) = \lambda_1 \nabla_{g_1}(a) + \dots + \lambda_{n-d} \nabla_{g_{n-d}}(a).$$

Ces réels sont appelés les *multiplieurs de Lagrange*.

Exemple 1.21. On cherche les extrema de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; (x, y) \mapsto x + y$, que l'on restreint à l'ensemble $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + y^4 = 1\}$.

On remarque que M est une sous-variété de \mathbb{R}^2 de classe C^∞ , en effet $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; (x, y) \mapsto x^4 + y^4$ est une submersion en tout point de M . Si $f|_M$ admet un extremum local en un point $(a, b) \in M$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla(f)(a, b) = \lambda \nabla(g)(a, b)$. On a donc le système suivant

$$\begin{cases} 1 = \lambda 4a^3 \\ 1 = \lambda 4b^3 \end{cases}$$

et on en déduit que $\lambda \neq 0$ et $a^3 = b^3 = \frac{1}{4\lambda}$, d'où $a = b$.

Comme $(a, b) \in M$ on a $a^4 + b^4 = 1$, d'où $2a^4 = 1$, donc $a = b = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$. On a deux extrema possibles

$$m_1 := \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \right) \text{ et } m_2 := \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}} \right)$$

comme f est continue et M est compact (comme fermé borné de \mathbb{R}^2), f admet au moins un minimum global et un maximum global, elle en a donc exactement deux : m_1 et m_2 .

On a $f(m_1) = -f(m_2) = \frac{2}{\sqrt[4]{2}}$, donc f atteint son minimum en m_2 et son maximum en m_1 .

2. Équations différentielles

2.1. Équations différentielles du premier ordre

Définition 2.1. Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue. On appelle *équation différentielle d'ordre 1 dans \mathbb{R}^n* , notée (E) , une équation de la forme suivante :

$$y' = f(t, y)$$

on dit que t est la *variable de temps* et que y est la *variable d'état*.

Définition 2.2. Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1. On appelle *solution* de (E) sur un intervalle I de \mathbb{R} une fonction $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ dérivable vérifiant :

- (1) $\forall t \in I, (t, y(t)) \in U$,
- (2) $\forall t \in I, y'(t) = f(t, y(t))$.

Remarque 2.3. Dans le cas où I n'est pas ouvert, la dérivabilité s'entend comme la dérivabilité à droite ou à gauche (selon l'extrémité).

Exemples 2.4.

1. On considère l'équation différentielle d'ordre 1 donnée par $y' = y$. La fonction $t \mapsto e^t$ est une solution de cette équation sur $]1, 2[$.
2. L'équation donnée par $y' = y^2 + t$ est une équation différentielle d'ordre 1 sur \mathbb{R} .
3. L'équation donnée par $y' = \frac{y+1}{t \ln(t)}$ est une équation différentielle d'ordre 1 sur \mathbb{R} . La fonction $t \mapsto -1 + \ln(t)$ est une solution de cette équation sur $]0, 1[$.

Définition 2.5. Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1 et $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. On appelle *problème de Cauchy de condition initiale* $y(t_0) = y_0$ le système composé des équations (E) et $y(t_0) = y_0$.

Exemple 2.6. La fonction $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; t \mapsto 2e^{-t}$ est une solution de l'équation différentielle $y' = -y$ de condition initiale $y(0) = 2$.

Définition 2.7. Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1. Soit M un point de U , on note \mathcal{D}_M la droite passant par M et de coefficient directeur $f(M)$. On appelle *champ des tangentes* l'application $M \mapsto \mathcal{D}_M$ associée à (E) . On appelle *courbe intégrale* une courbe \mathcal{C} de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ qui a pour tangente en chaque point M la droite \mathcal{D}_M du champ des tangentes.

Remarque 2.8. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Alors $\mathcal{D}_{(x_0, y_0)}$ a pour équation $y - y_0 = f(x_0, y_0)(x - x_0)$.

Exemples 2.9.

1. On considère l'équation différentielle $y' = 0$, ici $f \equiv 0$. Soit $M := (x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Alors \mathcal{D}_M est la droite d'équation $y = y_0$ et les courbes intégrales sont les droites \mathcal{D}_M .
2. On considère l'équation différentielle $y' = y$, ici $f(x, y) = y$. Soit $M := (x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Alors \mathcal{D}_M est la droite d'équation $y = y_0 + y_0(x - x_0)$.

Proposition 2.10. Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1 et $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une solution de (E) . Alors le graphe de y est une courbe intégrale.

Démonstration. Soit $M = (x_0, y_0)$ un point du graphe de y . L'équation de la tangente au graphe en M est donnée par :

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0) = f(x_0, y_0)(x - x_0)$$

on reconnaît l'équation de \mathcal{D}_M . □

Définition 2.11. Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1 et $m \in \mathbb{R}$. On appelle *isocline de pente m* associée à (E) , l'ensemble :

$$\Gamma_m := \{(x, y) \in U \mid f(x, y) = m\}.$$

2.1.1. Solutions maximales et solutions globales

Définition 2.12. Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1, et $y_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $y_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ deux solutions de (E) . On dit que y_2 est un *prolongement* de y_1 si $I_1 \subset I_2$ et $y_2|_{I_1} = y_1$.

Définition 2.13. Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1 et $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une solution de (E) . On dit que y est *maximale* si elle n'admet pas de prolongement.

Exemple 2.14. On considère l'équation différentielle d'ordre 1 donnée par $y' = y^2$. Alors une solution maximale est $t \mapsto \frac{1}{1-t}$ sur $] -\infty, 1[$.

Théorème 2.15. Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1 et $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une solution de (E) . Alors y admet un prolongement maximal.

Démonstration. On prolonge successivement y à gauche et à droite en créant par récurrence des prolongements successifs et en passant à la limite. \square

Définition 2.16. Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1 et $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une solution de (E) . On suppose que U s'écrit $U = J \times K$ où J est un ouvert de \mathbb{R} et K un ouvert de \mathbb{R}^n . Alors on dit que y est *globale* si $I = J$.

Proposition 2.17. Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1 et $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une solution de (E) . Si y est une solution globale, alors y est une solution maximale.

Proposition 2.18. Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1 et $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une solution de (E) . Si f est de classe C^k , alors y est de classe C^{k+1} .

Démonstration. Soit $n \in \{0, \dots, k-1\}$. On pose $P(n) : y$ est de classe C^n .

Pour $n = 0$, par définition y est dérivable, donc y est continue.

Pour $n \in \{0, \dots, k\}$, on suppose que $P(n)$ est vérifiée, y est de classe C^n , alors $y' = f(x, y)$ est de classe C^n par composition de fonctions de classe C^n , donc y est de classe C^{n+1} .

D'après $P(k+1)$, y est de classe C^{k+1} . \square

2.1.2. Équations intégrales et cylindre de sécurité

Lemme 2.19. Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1 et $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction. Alors y est une solution du problème de Cauchy de condition initiale $y(t_0) = y_0$ si et seulement si :

- (1) y est continue et $\forall t \in I, (t, y(t)) \in U$,
- (2) $\forall t \in I, y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(x, y(x)) dx$.

Démonstration.

\Rightarrow : Supposons que y est solution du problème de Cauchy de condition initiale $y(t_0) = y_0$.

Alors y est dérivable donc continue et $\forall t \in I, (t, y(t)) \in U$. Soit $t \in I$, d'après le théorème fondamental de l'analyse en intégrant l'égalité $y' = f(t, y)$ on obtient :

$$y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^t f(x, y(x)) dx$$

puisque y est solution du problème de Cauchy de condition initiale $y(t_0) = y_0$, on a :

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(x, y(x)) dx.$$

\Leftarrow : Supposons les hypothèses de l'énoncé vérifiées.

Puisque y et f sont continues, d'après le théorème fondamental de l'analyse $t \mapsto \int_{t_0}^t f(x, y(x)) dx$ est dérivable, donc y est dérivable et $\forall t \in I, (t, y(t)) \in U$. Soit $t \in I$, en dérivant on obtient :

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

et $y(t_0) = y_0 + \int_{t_0}^{t_0} f(x, y(x)) dx = y_0$. Donc y est solution du problème de Cauchy de condition initiale $y(t_0) = y_0$ \square

Définition 2.20. Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1, (t_0, y_0) un point de U et $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times B(y_0, r)$ un cylindre dans U . On dit que C est un *cylindre de sécurité* si toute solution $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ du problème de Cauchy de condition initiale $y(t_0) = y_0$ avec $I \subset [t_0 - T, t_0 + T]$ reste contenue dans $\bar{B}(y_0, r)$.

Proposition 2.21. Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1 et (t_0, y_0) un point de U . Alors il existe $T > 0$ tel que $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times B(y_0, r)$ soit un cylindre de sécurité.

Démonstration. Considérons un cylindre $C_0 := [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times B(y_0, r_0)$ dans U . Alors C_0 est fermé et borné, donc C_0 est compact. Puisque f est C^0 sur C_0 , on obtient que f est bornée sur C_0 , on note $M := \max_{(t,y) \in C_0} \|f(t, y)\| \in \mathbb{R}$.

On suppose que f n'est pas identiquement nulle sur C_0 , donc $M > 0$. Et on pose $T := \min\left(T_0, \frac{r_0}{M}\right)$, $r := r_0$ et $C := [t_0 - T, t_0 + T] \times \bar{B}(y_0, r)$.

Soit $y : I \rightarrow \bar{B}(y_0, r)$ une solution du problème de Cauchy de condition initiale $y(t_0) = y_0$ avec $I \subset [t_0 - T, t_0 + T]$. Alors pour tout $t \in I$, on a :

$$\|y(t) - y_0\| = \left\| \int_{t_0}^t f(x, y(x)) dx \right\| \leq \int_{t_0}^t \|f(x, y(x))\| dx \leq M|t - t_0| \leq r$$

Donc C est un cylindre de sécurité pour (E) . \square

2.1.3. Théorème de Cauchy-Péano-Arzéla

Théorème 2.22 (Théorème de Cauchy-Péano-Arzéla). Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1, (t_0, y_0) un point de U et $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times B(y_0, r)$ un cylindre de sécurité. Alors il existe une solution $y : [t_0 - T, t_0 + T] \rightarrow \bar{B}(y_0, r)$ du problème de Cauchy de condition initiale $y(t_0) = y_0$.

Corollaire 2.23. Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1 et (t_0, y_0) un point de U . Alors il existe une solution maximale $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ du problème de Cauchy de condition initiale $y(t_0) = y_0$, de plus I est ouvert.

Démonstration. D'après la Proposition 2.21 il existe un cylindre de sécurité $C := [t_0 - T, t_0 + T] \times \bar{B}(y_0, r)$, d'après le Théorème de Cauchy-Péano-Arzéla il existe une solution $z : [t_0 - T, t_0 + T] \rightarrow \bar{B}(y_0, r)$ du problème de Cauchy de condition initiale $y(t_0) = y_0$, enfin d'après le Théorème 2.15 la solution z se prolonge en une solution maximale $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$.

De plus I est ouvert, sinon on pourrait prolonger y en l'une de ses extrémités en y appliquant de nouveau la Proposition 2.21 et le Théorème de Cauchy-Péano-Arzéla. \square

Exemple 2.24. On considère l'équation différentielle d'ordre 1 $y' = 3|y|^{\frac{2}{3}}$, alors le problème de Cauchy de condition initiale $y(0) = 0$ admet au moins deux solutions maximales $t \mapsto 0$ et $t \mapsto t^3$, en particulier ces solutions sont globales.

2.1.4. Théorème de Cauchy-Lipschitz

Définition 2.25. Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1. On dit que f est *localement lipschitzienne* par rapport à la deuxième variable si pour tout point $y(t_0) = y_0$ dans U , il existe un cylindre $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times B(y_0, r)$ dans U et une constante $k \geq 0$ tels que f soit k -lipschitzienne par rapport à la deuxième variable sur C :

$$\forall (t, y_1), (t, y_2) \in C, \|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq k|y_1 - y_2|.$$

Remarque 2.26. On considère $f = (f_1, \dots, f_n)$. Si f admet des dérivées partielles par rapport à la deuxième variable continues sur U . Alors en appliquant le théorème des accroissements finis on obtient que f est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable. Cela est vrai en particulier si f est C^1 .

Lemme 2.27. Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1, (t_0, y_0) un point de U et $C_0 = [t_0 - T, t_0 + T] \times B(y_0, r)$ un cylindre de sécurité sur lequel f est k -lipschitzienne par rapport à la deuxième variable. Alors pour tout couple $y_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n, y_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ de solutions du problème de Cauchy de condition initiale $y(t_0) = y_0$, on a

$$\forall t \in [t_0 - T, t_0 + T], y_1(t) = y_2(t).$$

Démonstration. On suppose que $t_0 = 0$ et on se restreint à $[0, T]$. Pour tout $t \in [0, T]$, on pose :

$$v(t) := \int_0^t \|y_1(x) - y_2(x)\| dx$$

puisque f est k -lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, on a :

$$\|y_1'(t) - y_2'(t)\| = \|f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))\| \leq k\|y_1(t) - y_2(t)\|$$

puisque $y_1(0) = y_2(0) = y_0$, on a :

$$y_1(t) - y_2(t) = \int_0^t y_1'(x) - y_2'(x) dx$$

on en déduit $v'(t) \leq kv(t)$, en particulier :

$$(v'(t) - kv(t))e^{-kt} \leq 0$$

en intégrant cette inégalité entre 0 et t , on obtient :

$$v(t)e^{-kt} \leq 0$$

donc $v(t) \leq 0$ et $v(t) = 0$, d'où $y_1(t) = y_2(t)$. □

Théorème 2.28 (Théorème de Cauchy-Lipschitz). Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1 et (t_0, y_0) un point de U . Si f est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, alors pour tout cylindre de sécurité $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times B(y_0, r)$, le problème de Cauchy de condition initiale $y(t_0) = y_0$ admet une unique solution sur $[t_0 - T, t_0 + T]$.

Démonstration. Soit $y_1, y_2 : [t_0 - T, t_0 + T] \rightarrow \bar{B}(y_0, r)$ deux solutions du problème de Cauchy de condition initiale $y(t_0) = y_0$. Alors d'après le [Lemme 2.27](#), on a $y_1 = y_2$. □

Théorème 2.29. Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1, $y_1 : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $y_2 : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ deux solutions de (E) . Si f est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable et s'il existe $t_0 \in I$ tel que $y_1(t_0) = y_2(t_0)$, alors $y_1 = y_2$.

Démonstration. On pose $J := (y_1 - y_2)^{-1}(0)$. Puisque y_1 et y_2 sont continues, J est un fermé de I . Soit $s_0 \in J$, alors d'après le **Théorème de Cauchy-Lipschitz**, il existe S tel que y_1 et y_2 coïncident sur l'intervalle $[s_0 - S, s_0 + S]$, donc J est un ouvert de I .

Puisque $t_0 \in J$, J est non-vide, de plus I est connexe. Donc puisque J est ouvert et fermé, $J = I$. \square

Corollaire 2.30. Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1 et (t_0, y_0) un point de U . Si f est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, alors il existe une unique solution maximale du problème de Cauchy de condition initiale $y(t_0) = y_0$.

Démonstration. Le **Corollaire 2.23** donne l'existence d'une solution maximale du problème de Cauchy de condition initiale $y(t_0) = y_0$ et le **Théorème 2.29** donne l'unicité de cette solution. \square

2.1.5. Théorème des bouts

Théorème 2.31. Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1 et $y :]c, d[\rightarrow \mathbb{R}^n$ une solution maximale de (E) . Si f est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, alors pour tout compact $K \subset U$, il existe un voisinage $V \subset]c, d[$ de c tel que :

$$\forall t \in V, (t, y(t)) \notin K$$

et un voisinage $W \subset]c, d[$ de d tel que :

$$\forall t \in W, (t, y(t)) \notin K.$$

Corollaire 2.32 (Théorème des bouts). Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1 sur $U :=]a, b[\times \mathbb{R}^n$ et $y :]c, d[\rightarrow \mathbb{R}^n$ une solution maximale de (E) . Si f est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, si $c > a$, alors on a :

$$\lim_{t \rightarrow c^+} \|y(t)\| = +\infty$$

et si $d < b$, alors on a :

$$\lim_{t \rightarrow d^-} \|y(t)\| = +\infty.$$

En particulier si y est bornée, alors $a = c$ et $d = b$.

Démonstration. Supposons sans perte de généralité que $c > a$. Pour tout $r > 0$, la boule fermée $\overline{B}(0, r)$ est compacte, donc d'après le **Théorème 2.31**, il existe un voisinage $V \subset]c, d[$ de c tel que :

$$\forall t \in V, (t, y(t)) \notin \overline{B}(0, r)$$

Donc $\lim_{t \rightarrow c^+} \|y(t)\| = +\infty$. \square

Corollaire 2.33. Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1 sur $U :=]a, b[\times \mathbb{R}^n$ et $y :]c, d[\rightarrow \mathbb{R}^n$ une solution maximale de (E) . Si f est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable et bornée, alors y est une solution globale.

Démonstration. On pose $M := \sup_{(t,y) \in U} \|f(t, y)\|$. Supposons par l'absurde que $c > a$, donc $c > +\infty$. Soit $t_0 \in]c, d[$. Pour tout $t \in]c, t_0[$, on a :

$$\begin{aligned} \|y(t)\| &= \left\| y(t_0) + \int_{t_0}^t f(x, y(x)) \, dx \right\| \\ &\leq \|y(t_0)\| + \int_{t_0}^t \|f(x, y(x))\| \, dx \\ &\leq \|y(t_0)\| + M\|t - t_0\| \leq \|y(t_0)\| + M\|c - t_0\| \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Or d'après le **Théorème des bouts**, on a $\lim_{t \rightarrow c^+} \|y(t)\| = +\infty$, d'où une contradiction, donc $c = a$. De la même manière on a $d = b$. Donc y est une solution globale. \square

2.2. Équations différentielles linéaires du premier ordre

Définition 2.34. Soit I un intervalle de \mathbb{R} , $A : I \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ et $B : I \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ deux fonctions continues. On appelle *équation différentielle linéaire d'ordre 1*, notée (L) , une équation différentielle d'ordre 1 de la forme suivante :

$$y' = A(t)y + B(t).$$

Théorème 2.35. Soit (L) une équation différentielle linéaire d'ordre 1 et (t_0, y_0) un point de $I \times \mathbb{R}^n$. Alors il existe une unique solution maximale du problème de Cauchy de condition initiale $y(t_0) = y_0$, de plus cette solution est globale.

Démonstration. On pose $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow M_n(\mathbb{R}); (t, y) \mapsto A(t)y + B(t)$. Alors la fonction f est linéaire et continue, donc f est lipschitzienne, d'après le **Corollaire 2.30** il existe une unique solution maximale $y : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ du problème de Cauchy de condition initiale $y(t_0) = y_0$.

On peut montrer que y est bornée (**Lemme de Grönwall**), donc d'après le **Théorème des bouts** y est une solution globale. \square

Définition 2.36. Soit (L) une équation différentielle linéaire d'ordre 1. On dit que (L) est *homogène* si $B = 0$.

Proposition 2.37. Soit (L) une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène. Alors l'ensemble des solutions maximales de l'équation est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n .

Démonstration. On note $S \subset C^0(I, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des solutions maximales de (L) .

- D'après le **Théorème de Cauchy-Péano-Arzéla** S est non-vide.
- Soit $y_1, y_2 \in S$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, alors $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in S$.

Donc S est un \mathbb{R} -espace vectoriel. Soit $t_0 \in I$, on pose $\varphi_{t_0} : S \rightarrow \mathbb{R}^n; y \mapsto y(t_0)$. L'application φ_{t_0} est linéaire, d'après le **Théorème de Cauchy-Péano-Arzéla** elle est surjective et d'après le **Théorème de Cauchy-Lipschitz** elle est injective. Donc φ_{t_0} est un isomorphisme et $\dim(S) = \dim(\mathbb{R}^n) = n$. \square

Corollaire 2.38. Soit (L) une équation différentielle linéaire d'ordre 1 et $y_0 : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une solution globale de (L) . On note S l'ensemble des solutions maximales de l'équation homogène associée à (L) . Alors l'ensemble des solutions de (L) est $y_0 + S$.

Démonstration. Soit $y_1 : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une solution globale de (L) , alors $y_1 - y_0$ est solution de l'équation homogène associée à (L) donc $y_1 - y_0 \in S$, d'où $y_1 \in y_0 + S$. \square

2.3. Équations différentielles d'ordre supérieur

Définition 2.39. Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n)^p$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue. On appelle *équation différentielle d'ordre p* , notée (E_p) , une équation de la forme suivante :

$$y^{(p)} = f(t, y, y', \dots, y^{(p-1)}).$$

Définition 2.40. Soit (E_p) une équation différentielle d'ordre p . On appelle *solution* de (E_p) sur un intervalle I de \mathbb{R} une fonction $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ p -fois dérivable vérifiant :

- (1) $\forall t \in I, (t, y(t), y'(t), \dots, y^{(p-1)}(t)) \in U$,
- (2) $\forall t \in I, y^{(p)} = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(p-1)}(t))$.

Proposition 2.41. Soit (E_p) une équation différentielle d'ordre p et $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une solution de (E_p) . Si f est de classe C^k , alors y est de classe C^{k+p} .

Démonstration. Voir Proposition 2.18. □

Proposition 2.42. Soit (E_p) une équation différentielle d'ordre p et $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction. Posons :

$$Y := \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ \dots \\ Y_{p-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \dots \\ y^{(p-1)} \end{pmatrix}$$

Alors y est une solution de (E_p) si et seulement si Y est une solution de (E) l'équation différentielle d'ordre 1 donnée par :

$$Y' = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \dots \\ Y_{p-1} \\ f(t, Y) \end{pmatrix}$$

Démonstration.

\Rightarrow : Supposons que y est solution de (E_p) . On a alors :

$$Y' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ \dots \\ y^{(p)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \dots \\ Y_{p-1} \\ f(t, Y) \end{pmatrix}$$

Donc Y est solution de (E) .

\Leftarrow : Supposons que Y est solution de (E) . Alors Y est dérivable, donc pour tout $i \in \{0, \dots, p-1\}$, la fonction $y^{(i)}$ est dérivable. En particulier la fonction y est p -fois dérivable, avec $y^{(p)} = f(t, Y)$. Donc y est solution de (E_p) . □

Corollaire 2.43. Soit (E_p) une équation différentielle d'ordre p et $(t_0, y_0, \dots, y_{p-1})$ un point de U . Alors il existe une solution maximale $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ du problème de Cauchy de condition initiale $y(t_0) = (y_0, \dots, y_{p-1})$ définie sur un ouvert I .

Corollaire 2.44. Soit (E_p) une équation différentielle d'ordre p et $(t_0, y_0, \dots, y_{p-1})$ un point de U . Si f est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, alors il existe une unique solution maximale $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ du problème de Cauchy de condition initiale $y(t_0) = (y_0, \dots, y_{p-1})$ définie sur un ouvert I .

2.4. Solutions d'équations différentielles linéaires à coefficients constants

Définition 2.45. Soit (L) une équation différentielle linéaire d'ordre 1. On dit que (L) est à *coefficients constants* si $A \in M_n(\mathbb{R})$.

2.4.1. Solutions exponentielles d'équations homogènes

Proposition 2.46. Soit (L) une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène à coefficients constants. Alors la fonction $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n; t \mapsto e^{\lambda t} v$ est solution de (L) si et seulement si λ est une valeur propre de A et v est un vecteur propre de A associé à λ .

Démonstration. Pour tout $t \in I$, on a $y'(t) = \lambda e^{\lambda t} v$, donc y est solution de (L) si et seulement si $\lambda e^{\lambda t} v = A e^{\lambda t} v$, si et seulement si $\lambda v = Av$, si et seulement si λ est une valeur propre de A et v est un vecteur propre de A associé à λ . □

2.4.1.1. Cas diagonalisable

Proposition 2.47. Soit (L) une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène à coefficients constants. Si A est diagonalisable, il existe une base (v_1, \dots, v_n) de \mathbb{R}^n de vecteurs propres de A associées aux valeurs propres $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de A . Alors pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la fonction $y_i : I \rightarrow \mathbb{R}^n; t \mapsto e^{\lambda_i t} v_i$ est une solution de (L) , de plus ces solutions sont indépendantes.

Démonstration. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, d'après la Proposition 2.46 la fonction y_i est solution de (L) . Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n = 0$. Alors on a :

$$\forall t \in I, \sum_{k=1}^n \alpha_k e^{\lambda_k t} v_k = 0$$

puisque (v_1, \dots, v_n) est une base de \mathbb{R}^n , on a donc $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. Donc les solutions sont indépendantes. \square

Corollaire 2.48. Soit (L) une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène à coefficients constants. Si A est diagonalisable, il existe une base (v_1, \dots, v_n) de \mathbb{R}^n de vecteurs propres de A associées aux valeurs propres $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de A . Alors la solution générale de (L) est donnée par :

$$y : I \rightarrow \mathbb{R}^n; t \mapsto c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} v_n$$

où $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$.

2.4.1.2. Cas général

Théorème 2.49. Soit (L) une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène à coefficients constants. Alors la solution générale de (L) est donnée par :

$$y : I \rightarrow \mathbb{R}^n; t \mapsto e^{tA} v$$

où $v \in \mathbb{R}^n$.

Démonstration. Pour tout $t \in I$, on a $y'(t) = A e^{tA} v = A y(t)$, donc y est solution de (L) .

Notons $v_1(t), \dots, v_n(t)$ les colonnes de e^{tA} , la fonction associée à chacune de ces colonnes est solution de (L) . De plus $\det(e^{tA}) = e^{\text{Tr}(tA)} \neq 0$, donc $(v_1(t), \dots, v_n(t))$ forme une base de \mathbb{R}^n , on en déduit que (v_1, \dots, v_n) forme une base de l'espace des solutions de (L) . \square

Corollaire 2.50. Soit (L) une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène à coefficients constants et (t_0, v_0) un point de U . Alors la solution du problème de Cauchy de condition initiale $y(t_0) = v_0$ est donnée par :

$$y : I \rightarrow \mathbb{R}^n; t \mapsto e^{(t-t_0)A} v_0$$

2.4.2. Solutions exponentielles

Théorème 2.51. Soit (L) une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants. Alors la solution générale de (L) est donnée par :

$$y : I \rightarrow \mathbb{R}^n; t \mapsto e^{tA} v + T(t)$$

où $v \in \mathbb{R}^n$ et $T : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une solution particulière de (L) .

Remarque 2.52. Soit (L) une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants. Pour trouver une solution particulière, on applique la méthode de *variation de la constante*.

Pour tout $t \in I$, on pose :

$$T(t) = e^{tA} v(t)$$

et on dérive pour obtenir :

$$T'(t) = e^{tA}Av(t) + e^{tA}v'(t) = AT(t) + e^{tA}v'(t)$$

on cherche donc $e^{tA}v'(t) = B(t)$, c'est-à-dire $v'(t) = e^{-tA}B(t)$, et on intègre pour trouver :

$$v(t) = \int_{t_0}^t e^{-xA}B(x) dx$$

donc :

$$T(t) = e^{tA} \int_{t_0}^t e^{-xA}B(x) dx$$

est une solution particulière de (L) , qui vérifie le problème de Cauchy $T(t_0) = 0$.

Exemples 2.53.

1. On considère le système différentiel linéaire à coefficients constants (S) donné par :

$$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 2x + y \end{cases}$$

On écrit le système sous la forme $Y' = AY$, où :

$$Y := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice A est diagonalisable car symétrique, avec comme polynôme caractéristique :

$$\chi_A = (X + 1)(X - 3)$$

donc ses valeurs propres sont -1 et 3 . Et ses espaces propres sont donnés par :

$$E_{-1} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad E_3 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Les solutions de (S) sont donc de la forme :

$$Y(t) = ae^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + be^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x = ae^{-t} + be^{3t} \\ y = -ae^{-t} + be^{3t} \end{cases}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$.

2. On considère le système différentiel linéaire à coefficients constants (S) donné par :

$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 2y \end{cases}$$

On écrit le système sous la forme $Y' = AY$, où :

$$Y := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice A n'est pas diagonalisable. On écrit $A = 2I_2 + R$, où :

$$R := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

en passant à l'exponentielle on trouve :

$$e^{tA} = e^{2t} e^{tR}$$

mais $R^2 = 0$, d'où $e^{tR} = I_2 + tR$, et on obtient :

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

Les solutions de (S) sont donc de la forme :

$$Y(t) = e^{tA} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^{2t} + bte^{2t} \\ be^{2t} \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x = ae^{2t} + bte^{2t} \\ y = be^{2t} \end{cases}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$.

3. On considère le système différentiel linéaire à coefficients constants (S) donné par :

$$\begin{cases} x' = 6x + 3y - 3t + 4e^{3t} \\ y' = -4x - y + 4t - 4e^{3t} \end{cases}$$

On écrit le système sous la forme $Y' = AY + B(t)$, où :

$$Y := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A := \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} -3t + 4e^{3t} \\ 4t - 4e^{3t} \end{pmatrix}$$

On trouve que les solutions du système homogène associé à (S) sont de la forme :

$$Y(t) = ae^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + be^{2t} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x = ae^{3t} + 3be^{2t} \\ y = -ae^{3t} - 4be^{2t} \end{cases}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière de (S) en appliquant la méthode de variation de la constante :

$$\begin{cases} x = \alpha(t)e^{3t} + 3\beta(t)e^{2t} \\ y = -\alpha(t)e^{3t} - 4\beta(t)e^{2t} \end{cases}$$

et on dérive pour obtenir :

$$\begin{cases} x' = 3\alpha(t)e^{3t} + \alpha'(t)e^{3t} + 6\beta(t)e^{2t} + 3\beta'(t)e^{2t} \\ y' = -3\alpha(t)e^{3t} - \alpha'(t)e^{3t} - 8\beta(t)e^{2t} - 4\beta'(t)e^{2t} \end{cases}$$

on cherche donc :

$$\begin{cases} \alpha'(t)e^{3t} + 3\beta'(t)e^{2t} = -3t + 4e^{3t} \\ -\alpha'(t)e^{3t} - 4\beta'(t)e^{2t} = 4t - 4e^{3t} \end{cases}$$

on voit que $\alpha'(t) = 4$ et $\beta'(t) = -te^{-2t}$ conviennent, et on intègre pour obtenir $\alpha(t) = 4t$ et :

$$\beta(t) = \int_{-\frac{1}{2}}^t -xe^{-2x} dx = \left[\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \right) e^{-2x} \right]_{-\frac{1}{2}}^t = \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \right) e^{-2t}$$

Les solutions de (S) sont donc de la forme :

$$\begin{cases} x = ae^{3t} + 3be^{2t} + 4te^{3t} + \frac{3}{2}t + \frac{3}{4} \\ y = -ae^{3t} - 4be^{2t} - 4te^{3t} - 2t - 1 \end{cases}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$.