# Problème du rectangle inscrit

Emanuel Morille

1 Janvier 1980

## Table des matières

# 1. Homologie

## 1.1. Axiomes d'Eilenberg-Steenrod

**Définition 1.1.** Une *théorie de l'homologie* sur la catégorie des paires d'espaces topologiques $\mathsf{Top}_2$ dans la catégorie des groupes abéliens $\mathsf{Ab}$ est une suite de foncteurs $(H_n : \mathsf{Top}_2 \to \mathsf{Ab})_{n\in\mathbb{Z}}$ munie de transformations naturelles $(\partial_n : H_n(X,A) \to H_{n-1}(A) := H_{n-1}(A,\varnothing))_{n\in\mathbb{Z}}$ vérifiant les axomes suivants pour toutes paires d'espaces topologiques $(X,A), (Y,B)$ et $n \in \mathbb{Z}$ :

- *Homotopie* : Soit $f_0, f_1 : (X,A) \to (Y,B)$ deux applications homotopes. Alors les applications induites en homologie $f_{0*}, f_{1*} : H_n(X,A) \to H_n(Y,B)$ sont égales.
- *Excision* : Soit $U$ un sous-ensemble de $A$ tel que l'adhérence de $U$ est contenue dans l'intérieur de $A$. On note $i : (X \setminus U, A \setminus U) \to (X,A)$ l'inclusion canonique. Alors l'application induite en homologie $i_* : H_n(X \setminus U, A \setminus U) \to H_n(X,A)$ est un isomorphisme.
- *Dimension* : Soit $P$ l'espace constitué d'un unique point. Alors le groupe $H_n(P)$ est non-trivial si et seulement si $n = 0$.
- *Exactitude* : La suite :

$$\ldots \to H_{n+1}(X,A) \overset{\partial_{n+1}}{\to} H_n(A) \overset{i_A}{\to} H_n(X) \overset{i_X}{\to} H_n(X,A) \overset{\partial_n}{\to} H_{n-1}(A) \to \ldots$$

  est exacte.

## 1.2. Homologie singulière

### 1.2.1. Simplexes

**Définition 1.2.** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $A$ un sous-ensemble de $E$. On dit que $A$ est *convexe* si :

$$\forall p, q \in A, [p,q] := \{(1-t)p + tq \mid t \in [0,1]\} \subset A.$$

**Définition 1.3.** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $A$ un sous-ensemble de $E$ et $p_0, \ldots, p_n$ des éléments de $A$. On appelle *combinaison convexe* une combinaison de la forme $t_0 p_0 + \cdots + t_n p_n$, telle que $t_0, \ldots, t_n \in [0,1]$ et $t_0 + \cdots + t_n = 1$.

**Proposition 1.4.** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $A$ un sous-ensemble de $E$ et $p_0, \ldots, p_n$ des éléments de $A$. Alors si $A$ est convexe toute combinaison convexe de $p_0, \ldots, p_n$ appartient à $A$.

*Démonstration.* Soit $t_0, \ldots, t_n \in [0,1]$ tels que $t_0 + \cdots + t_n = 1$. Notons $H(n) : t_0 p_0 + \cdots + t_n p_n \in A$.
Pour $n = 1$. On pose $t := t_1$, alors puisque $A$ est convexe $t_0 p_0 + t_1 p_1 = (1-t)p_0 + t p_1 \in A$.
Pour $n > 1$. On suppose que $H(n-1)$ est vérifiée. Sans perte de généralité, on suppose que $t_n \neq 0$, et on pose

$$p := \frac{t_0}{1-t_n} p_0 + \cdots + \frac{t_{n-1}}{1-t_n} p_{n-1}$$

alors d'après $H(n-1)$ on a $p \in A$. Par convexité on a $t_0 p_0 + \cdots + t_n p_n = (1-t_n)p + t_n p_n \in A$. □

**Définition 1.5.** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $A$ un sous-ensemble de $E$. On appelle *enveloppe convexe de* $A$, notée $[A]$, l'ensemble des combinaisons convexes de sous-ensembles finis de $A$.

**Proposition 1.6.** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $A$ un sous-ensemble de $E$. Alors l'enveloppe convexe de $A$ est le plus petit ensemble convexe contenant $A$.

*Démonstration.* Soit $p, q \in [A]$ et $t \in [0,1]$. Puisque $(1-t)p + tq$ est une combinaison convexe d'un sous-ensemble fini de $A$, on a bien $(1-t)p + tq \in [A]$. Donc $[A]$ est convexe.

Soit $B$ un sous-ensemble convexe de $E$ contenant $A$. Soit $x \in [A]$, alors il existe $p_0, \ldots, p_n \in A$ et $t_0, \ldots, t_n \in [0,1]$ tels que $t_0 + \cdots + t_n = 1$ et $x = t_0 p_0 + \cdots + t_n p_n$. D'après la Proposition 1.4 on a bien $x \in B$. Donc $[A] \subset B$. □

**Définition 1.7.** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $F$ une famille libre de $n+1$ éléments de $E$. On appelle *n-simplexe généré par F* l'enveloppe convexe de $F$. On dit que les éléments de $F$ sont les *sommets* de $[F]$ et que $n$ est la *dimension* de $[F]$.

**Définition 1.8.** On appelle *n-simplexe standard*, noté $\Delta^n$, le $n$-simplexe généré par la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

**Définition 1.9.** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $[F]$ un $n$-simplexe et $x = t_0 p_0 + \cdots + t_n p_n$ un élément de $[F]$. On appelle *coordonnées barycentriques de x* les coefficients $t_0, \ldots, t_n$.

### 1.2.2. Chaînes

**Définition 1.10.** Soit $X$ un espace topologique. On appelle *n-simplexe singulier sur X* une application continue de $\Delta^n$ dans $X$.

**Définition 1.11.** Soit $X$ un espace topologique. On note $C_n(X)$ le groupe abélien libre engendré par les $n$-simplexes singuliers sur $X$, on appelle *n-chaîne singulière* un élément de $C_n(X)$.

**Proposition 1.12.** Soit $X$ et $Y$ deux espaces topologiques, $\sigma : \Delta^n \to X$ un $n$-simplexe singulier sur $X$ et $f : X \to Y$ une application continue. Alors la composition $f \circ \sigma : \Delta^n \to Y$ est un $n$-simplexe singulier sur $Y$.

**Définition 1.13.** Soit $X$ et $Y$ deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application continue. On appelle *implication induite par f*, notée $f_*$, le morphisme :

$$f_* : C_n(X) \to C_n(Y); \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \sigma_k \mapsto \sum_{k=0}^{n} \lambda_k (f \circ \sigma_k).$$

**Proposition 1.14.** Soit $X$, $Y$ et $Z$ trois espaces topologiques, $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux applications continues. Alors $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

**Définition 1.15.** Soit $X$ un espace topologique et $\sigma : \Delta^n \to X$ un $n$-simplexe singulier sur $X$. On appelle *bord de σ*, noté $\partial_n \sigma$, le $(n-1)$-simplexe singulier sur $X$ défini par :

$$\partial_n \sigma \coloneqq \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sigma|_{[e_0, \ldots, e_{k-1}, e_{k+1}, \ldots, e_n]}.$$

On appelle *morphisme bord* l'application étendue $\partial_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$.

**Proposition 1.16.** Soit $X$ et $Y$ deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application continue. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\partial_n f_* = f_* \partial_n$.

*Démonstration.* Soit $\sigma : \Delta^n \to X$ un $n$-simplexe singulier sur $X$. Alors on a :

$$\partial_n f_*(\sigma) = \partial_n (f \circ \sigma) = f_*(\partial_n \sigma).$$

□

**Proposition 1.17.** Soit $X$ un espace topologique. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$.

*Démonstration.* Soit $\sigma : \Delta^{n+1} \to X$ un $(n+1)$-simplexe singulier sur $X$. Alors on a :

$$\partial_{n+1}(\sigma) = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \sigma|_{[e_0, \ldots, e_{k-1}, e_{k+1}, \ldots, e_{n+1}]}$$

donc en appliquant $\partial_n$, on obtient :

$$\begin{aligned}(\partial_n \circ \partial_{n+1})(\sigma) &= \partial_n\left(\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \sigma|_{[e_0,\ldots,e_{k-1},e_{k+1},\ldots,e_{n+1}]}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \partial_n\left(\sigma|_{[e_0,\ldots,e_{k-1},e_{k+1},\ldots,e_{n+1}]}\right) \\ &= \sum_{0\leq k<l\leq n+1} (-1)^{k+l} \sigma|_{[e_0,\ldots,e_{k-1},e_{k+1},\ldots,e_{l-1},e_{l+1},\ldots,e_{n+1}]} \\ &\quad + \sum_{0\leq l<k\leq n+1} (-1)^{k+l-1} \sigma|_{[e_0,\ldots,e_{l-1},e_{l+1},\ldots,e_{k-1},e_{k+1},\ldots,e_{n+1}]}) \\ &= 0\end{aligned}$$

car les termes s'annulent deux à deux. □

### 1.2.3. Complexes de chaînes

**Définition 1.18.** Soit $X$ un espace topologique. On appelle *complexe de chaînes singulières*, noté $C_\bullet(X)$, la suite de groupes abéliens libres $(C_n(X))_{n\in\mathbb{Z}}$ munie des morphismes de bords $(\partial_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X))_{n\in\mathbb{Z}}$, avec pour convention $C_n(X)$ trivial si $n < 0$.

**Définition 1.19.** Soit $C_\bullet(X)$ un complexe de chaînes singulières et $n \in \mathbb{Z}$.
- On appelle *$n$-cycle singulier* un élément de $Z_n(X) \coloneqq \ker(\partial_n)$.
- On appelle *$n$-bord singulier* un élément de $B_n(X) \coloneqq \mathrm{im}(\partial_{n+1})$.
- On appelle *$n^e$-groupe d'homologie singulière* le groupe quotient $H_n(X) \coloneqq Z_n(X)/B_n(X)$.

**Définition 1.20.** Soit $C_\bullet(X)$ un complexe de chaînes singulières et $n \in \mathbb{Z}$.
- On dit que $C_\bullet(X)$ est *exact en $C_n(X)$* si $H_n(X)$ est trivial.
- On dit que $C_\bullet(X)$ est *exact* s'il est exact en tout $(C_n(X))_{n\in\mathbb{Z}}$.
- On dit que $C_\bullet(X)$ est *acyclique* s'il est exact en tout $(C_n(X))_{n\in\mathbb{Z}}$ avec $n \neq 0$.

### 1.2.4. Morphismes de chaînes

**Définition 1.21.** Soit $C_\bullet(X)$ et $C_\bullet(Y)$ deux complexes de chaînes singulières. On appelle *morphisme de chaînes*, noté $\varphi_\bullet : C_\bullet(X) \to C_\bullet(Y)$, une suite de morphismes $(\varphi_n : C_n(X) \to C_n(Y))_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\partial_n\varphi_n = \varphi_{n-1}\partial_n$.

**Proposition 1.22.** Soit $C_\bullet(X)$ et $C_\bullet(Y)$ deux complexes de chaînes singulières, $\varphi_\bullet : C_\bullet(X) \to C_\bullet(Y)$ un morphisme de chaînes. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le morphisme $\varphi_n$ induit un morphisme entre les $n^e$-groupes d'homologie $H_n(\varphi) : H_n(X) \to H_n(Y)$.

**Proposition 1.23.** Soit $C_\bullet(X)$ et $C_\bullet(Y)$ deux complexes de chaînes singulières, et $f : X \to Y$ une application continue. Alors l'application induite $f_*$ est un morphisme de chaînes.

### 1.2.5. Paires d'espaces topologiques

**Définition 1.24.** Soit $(X, A)$ une paire d'espaces topologiques. On appelle *complexe de chaînes singulières de la paire* $(X, A)$ le complexe de chaînes singulières quotient $C_\bullet(X, A) \coloneqq C_\bullet(X)/C_\bullet(A)$.

**Définition 1.25.** Soit $(X, A)$ et $(Y, B)$ deux paires d'espaces topologiques, et $f : X \to Y$ une application continue. On dit que $f$ est un *morphisme de paires*, noté $f : (X, A) \to (Y, B)$, si $f(A)$ est contenue dans $B$.

**Proposition 1.26.** Soit $C_\bullet(X, A)$ et $C_\bullet(Y, B)$ deux complexes de chaînes singulières, et $f : (X, A) \to (Y, B)$ un morphisme de paires. Alors l'application induite $f_*$ est un morphisme de chaînes.

**Théorème 1.27.** La suite des $n^{\mathrm{e}}$-groupe d'homologie singulière des paires d'espaces topologiques $(H_n : \mathsf{Top}_2 \to \mathsf{Ab})_{n\in\mathbb{Z}}$ munie des morphismes de bords $(\partial_n : H_n(X,A) \to H_{n-1}(A,\varnothing))_{n\in\mathbb{Z}}$ est une théorie de l'homologie 1.1.