Problème du rectangle inscrit

Emanuel Morille

Table des matières

1. Homologie

1.1. Axiomes d'Eilenberg-Steenrod

Définition 1.1. Une *théorie de l'homologie* sur la catégorie des paires d'espaces topologiques Top_2 dans la catégorie des groupes abéliens Ab est une suite :

- de foncteurs, notée $(H_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, avec pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$H_n : \mathsf{Top}_2 \to \mathsf{Ab}$$

- et de transformations naturelles, notée $(\partial_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, avec pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$\partial_n : H_n(X, A) \to H_{n-1}(A) \coloneqq H_{n-1}(A, \varnothing)$$

vérifiant les axomes suivants pour toutes paires d'espaces topologiques $(X, A), (Y, B)$ et $n \in \mathbb{Z}$:

- *Homotopie* : Soit $f_0, f_1 : (X, A) \to (Y, B)$ deux applications homotopes. Alors les applications induites en homologie $f_{0*}, f_{1*} : H_n(X, A) \to H_n(Y, B)$ sont égales.
- *Excision* : Soit U un sous-ensemble de A tel que l'adhérence de U est contenue dans l'intérieur de A. On note $i : (X \setminus U, A \setminus U) \to (X, A)$ l'inclusion canonique. Alors l'application induite en homologie $i_* : H_n(X \setminus U, A \setminus U) \to H_n(X, A)$ est un isomorphisme.
- *Dimension* : Soit P l'espace constitué d'un unique point. Alors le groupe $H_n(P)$ est non-trivial si et seulement si $n = 0$.
- *Exactitude* : La suite :

$$\dots \to H_{n+1}(X, A) \overset{\partial_{n+1}}{\to} H_n(A) \overset{i_A}{\to} H_n(X) \overset{i_X}{\to} H_n(X, A) \overset{\partial_n}{\to} H_{n-1}(A) \to \dots$$

  est exacte.

1.2. Homologie singulière

1.2.1. Construction

1.2.1.1. Simplexes

Définition 1.2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et A un sous-ensemble de E. On dit que A est *convexe* si :

$$\forall p, q \in A, [p, q] \coloneqq \{(1-t)p + tq \mid t \in [0, 1]\} \subset A.$$

Définition 1.3. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, A un sous-ensemble de E et $p_0, \dots, p_n$ des éléments de A. On appelle *combinaison convexe* une combinaison de la forme $t_0 p_0 + \dots + t_n p_n$, telle que $t_0, \dots, t_n \in [0, 1]$ et $t_0 + \dots + t_n = 1$.

Proposition 1.4. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, A un sous-ensemble de E et $p_0, \dots, p_n$ des éléments de A. Alors si A est convexe toute combinaison convexe de $p_0, \dots, p_n$ appartient à A.

Démonstration. Soit $t_0, \dots, t_n \in [0, 1]$ tels que $t_0 + \dots + t_n = 1$. Notons $H(n) : t_0 p_0 + \dots + t_n p_n \in A$.
Pour $n = 1$. On pose $t \coloneqq t_1$, alors puisque A est convexe $t_0 p_0 + t_1 p_1 = (1-t)p_0 + t p_1 \in A$.
Pour $n > 1$. On suppose que $H(n-1)$ est vérifiée. Sans perte de généralité, on suppose que $t_n \neq 0$, et on pose

$$p \coloneqq \frac{t_0}{1-t_n} p_0 + \dots + \frac{t_{n-1}}{1-t_n} p_{n-1}$$

alors d'après $H(n-1)$ on a $p \in A$. Par convexité on a $t_0 p_0 + \dots + t_n p_n = (1-t_n)p + t_n p_n \in A$. □

Définition 1.5. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et A un sous-ensemble de E. On appelle *enveloppe convexe de A*, notée $[A]$, l'ensemble des combinaisons convexes de sous-ensembles finis de A.

Proposition 1.6. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et A un sous-ensemble de E. Alors l'enveloppe convexe de A est le plus petit ensemble convexe contenant A.

Démonstration. Soit $p, q \in [A]$ et $t \in [0,1]$. Puisque $(1-t)p + tq$ est une combinaison convexe d'un sous-ensemble fini de A, on a bien $(1-t)p + tq \in [A]$. Donc $[A]$ est convexe.

Soit B un sous-ensemble convexe de E contenant A. Soit $x \in [A]$, alors il existe $p_0, \ldots, p_n \in A$ et $t_0, \ldots, t_n \in [0,1]$ tels que $t_0 + \cdots + t_n = 1$ et $x = t_0 p_0 + \cdots + t_n p_n$. D'après la Proposition 1.4 on a bien $x \in B$. Donc $[A] \subset B$. □

Définition 1.7. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et F une famille libre de $n+1$ éléments de E. On appelle *n-simplexe généré par F* l'enveloppe convexe de F. On dit que les éléments de F sont les *sommets* de $[F]$ et que n est la *dimension* de $[F]$.

Définition 1.8. On appelle *n-simplexe standard*, noté Δ^n, le n-simplexe généré par la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Définition 1.9. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $[F]$ un n-simplexe et $x = t_0 p_0 + \cdots + t_n p_n$ un élément de $[F]$. On appelle *coordonnées barycentriques de x* les coefficients $t_0, \ldots, t_n$.

1.2.1.2. Chaînes

Définition 1.10. Soit X un espace topologique. On appelle *n-simplexe singulier sur X* une application continue de Δ^n dans X.

Définition 1.11. Soit X un espace topologique, $a_0, \ldots, a_k$ des entiers et $\sigma_0, \ldots, \sigma_k$ des n-simplexes singuliers sur X. On appelle *n-chaîne* l'application $a_0\sigma_0 + \cdots + a_k\sigma_k$. On note $C_n(X)$ l'ensemble des n-chaînes.

Proposition 1.12. Soit X et Y deux espaces topologiques, σ un n-simplexe singulier sur X et $f : X \to Y$ une application continue. Alors la composition $f \circ \sigma : \Delta^n \to Y$ est un n-simplexe.

Définition 1.13. Soit X et Y deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application continue. On appelle *implication induite par f*, notée f_*, le morphisme

Définition 1.14. Soit X un espace topologique et σ un n-simplexe singulier sur X. On appelle *bord de σ*, noté $\partial_n\sigma$, le $(n-1)$-simplexe singulier sur X défini par :

$$\partial_n \sigma \coloneqq \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sigma|_{[e_0,\ldots,e_{k-1},e_{k+1},\ldots,e_n]}.$$

On appelle *morphisme bord* l'application $\partial_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ induite.

Proposition 1.15. Soit X un espace topologique. Alors $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$.

Démonstration. Soit σ un $(n+1)$-simplexe singulier sur X. Alors

$$\begin{aligned}
(\partial_n \circ \partial_{n+1})(\sigma) &= \partial_n\left(\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \sigma|_{[e_0,\ldots,e_{k-1},e_{k+1},\ldots,e_{n+1}]}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \partial_n\left(\sigma|_{[e_0,\ldots,e_{k-1},e_{k+1},\ldots,e_{n+1}]}\right) \\
&= \sum_{0 \le k < l \le n} (-1)^{k+l} \sigma|_{[e_0,\ldots,e_{k-1},e_{k+1},\ldots,e_{l-1},e_{l+1},\ldots,e_{n+1}]} \\
&\quad + \sum_{0 \le l < k \le n} (-1)^{k+l-1} \sigma|_{[e_0,\ldots,e_{l-1},e_{l+1},\ldots,e_{k-1},e_{k+1},\ldots,e_{n+1}]}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□