

# Espaces complets

## Table des matières

1. Suites de Cauchy	1
2. Complétude	2
3. Complétude des espaces de fonctions continues	3
4. Théorème du point fixe de Banach-Picard	3
4.1. Applications . . . . .	5

## 1. Suites de Cauchy

**Définition 1.1.** Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé et  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $E$ . On dit que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est de *Cauchy* si elle vérifie :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N}, p \geq N \text{ et } q \geq N \Rightarrow \|x_p - x_q\| \leq \varepsilon.$$

**Proposition 1.2.** Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites de Cauchy, et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors :

- (1)  $(x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy.
- (2)  $(\lambda x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy.
- (3)  $(\|x_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy.

*Démonstration.*

- (1) Soit  $\varepsilon > 0$ . Puisque  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy, il existe  $N_1 \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, p \geq N_1 \text{ et } q \geq N_1 \Rightarrow \|x_p - x_q\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

et puisque  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy, il existe  $N_2 \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, p \geq N_2 \text{ et } q \geq N_2 \Rightarrow \|y_p - y_q\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons  $N := \max(N_1, N_2)$ . Soit  $p, q \in \mathbb{N}$  tels que  $p \geq N$  et  $q \geq N$ . Alors

$$\|x_p + y_p - (x_q + y_q)\| \leq \|x_p - x_q\| + \|y_p - y_q\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

donc  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy.

(2)

(3)

□

**Proposition 1.3.** Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé et  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de Cauchy. Alors la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée.

*Démonstration.* Puisque  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy, il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, p \geq N \text{ et } q \geq N \Rightarrow \|x_p - x_q\| \leq 1$$

en particulier en posant  $q := N$ , on a

$$\forall p \in \mathbb{N}, p \geq N \Rightarrow \|x_p - x_N\| \leq 1$$

d'après l'inégalité triangulaire inversée, on a

$$\forall p \in \mathbb{N}, p \geq N \Rightarrow \|x_p\| \leq 1 + \|x_N\|.$$

Posons  $M := \max(\|x_0\|, \dots, \|x_N\|, 1 + \|x_N\|)$ . Alors  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée par  $M$ .  $\square$

**Proposition 1.4.** Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé et  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite convergente. Alors la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy.

*Démonstration.* Soit  $\varepsilon > 0$ . Puisque  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge, il existe  $N \in \mathbb{N}$  et  $\ell \in E$  tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \|x_n - \ell\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Soit  $p, q \in \mathbb{N}$  tels que  $p \geq N$  et  $q \geq N$ . Alors

$$\|x_p - x_q\| = \|x_p - \ell + \ell - x_q\| \leq \|x_p - \ell\| + \|x_q - \ell\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

donc  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy.  $\square$

**Proposition 1.5.** Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé et  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de Cauchy. Si la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admet une sous-suite convergente, alors  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente.

*Démonstration.* Soit  $\varepsilon > 0$ . Puisque  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admet une sous-suite convergente, il existe  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante,  $N_2 \in \mathbb{N}$  et  $\ell \in E$  tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_2 \Rightarrow \|x_{\varphi(n)} - \ell\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

et puisque  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy, il existe  $N_1 \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, p \geq N_1 \text{ et } q \geq N_1 \Rightarrow \|x_p - x_q\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

en particulier en posant  $q := \varphi(p) \geq p \geq N$ , on a

$$\forall p \in \mathbb{N}, p \geq N \Rightarrow \|x_p - x_{\varphi(p)}\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons  $N = \max(N_1, N_2)$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq N$ . Alors

$$\|x_n - \ell\| = \|x_n - x_{\varphi(n)} + x_{\varphi(n)} - \ell\| \leq \|x_n - x_{\varphi(n)}\| + \|x_{\varphi(n)} - \ell\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

donc  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente.  $\square$

## 2. Complétude

**Définition 2.1.** Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé et  $A$  un sous-ensemble de  $E$ . On dit que  $A$  est *complet* si toute suite de Cauchy de  $A$  est convergente dans  $A$ . Si  $E$  est complet, on dit que  $E$  est un *espace de Banach*.

**Exemples 2.2.**  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ,  $(\mathbb{C}, |\cdot|)$  et  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$  sont des espaces de Banach.

**Proposition 2.3.** Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé et  $A$  un sous-ensemble de  $E$ . Si  $A$  est complet, alors  $A$  est fermé.

*Démonstration.* Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $A$  qui converge vers  $\ell \in E$ . Puisque  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge,  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy. Puisque  $A$  est complet,  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge dans  $A$ , alors  $\ell \in A$ . Donc  $A$  est fermé.  $\square$

**Proposition 2.4.** Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé et  $A \subset B$  deux sous-ensembles de  $E$ . Si  $A$  est fermé et  $B$  est complet, alors  $A$  est complet.

*Démonstration.* Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de Cauchy d'éléments de  $A$ . Alors  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy d'éléments de  $B$ . Puisque  $B$  est complet,  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge dans  $B$ . Mais puisque  $A$  est fermé,  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge dans  $A$ . Donc  $A$  est complet.  $\square$

**Proposition 2.5.** Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé. Si  $E$  est de dimension finie, alors  $E$  est un espace de Banach.

*Démonstration.* Notons  $d$  la dimension de  $E$  et  $(e^1, \dots, e^d)$  une base de  $E$ . Puisque  $E$  est de dimension finie  $\|\cdot\|$  est équivalente à  $\|\cdot\|_\infty$ . Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de Cauchy. Alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N}, p \geq N \text{ et } q \geq N \Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, d\}, |u_p^i - u_q^i| \leq \varepsilon$$

on en déduit que pour tout  $i \in \{1, \dots, d\}$ , la suite  $(x_n^i)_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy dans  $\mathbb{R}$  et converge vers une limite  $x^i \in \mathbb{R}$ . Alors  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers une limite  $x := (x^1, \dots, x^d) \in E$ . Donc  $E$  est un espace de Banach.  $\square$

### 3. Complétude des espaces de fonctions continues

**Proposition 3.1.** Soit  $(E, \|\cdot\|_E)$  et  $(F, \|\cdot\|_F)$  deux espaces vectoriels normés,  $A$  un sous-ensemble de  $E$  et  $(C_b^0(A, F), \|\cdot\|_\infty)$  l'espace vectoriel normé des fonctions continues et bornées de  $A$  dans  $F$ . Si  $F$  est un espace de Banach, alors  $C_b^0(A, F)$  est aussi un espace de Banach.

*Démonstration.* Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de Cauchy d'éléments de  $C_b^0(A, F)$ . Soit  $\varepsilon > 0$ , alors puisque la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy, il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, p \geq N \text{ et } q \geq N \Rightarrow \forall a \in A, \|f_p(a) - f_q(a)\|_F \leq \varepsilon$$

en particulier, pour tout  $a \in A$ , la suite  $(f_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy dans  $F$ . Puisque  $F$  est complet, la suite  $(f_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $f(a) \in F$ . Montrons que la fonction  $f$  est continue et bornée.

On remarque en passant à la limite que l'on peut écrire

$$\forall q \in \mathbb{N}, q \geq N \Rightarrow \forall a \in A, \|f(a) - f_q(a)\|_F \leq \varepsilon$$

donc la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$ . Puisque les  $f_n$  sont continues, la fonction  $f$  est continue.

De la même manière en remarque que pour tout  $a \in A$ , on a  $\|f(a) - f_N(a)\|_F \leq \varepsilon$ , par une inégalité triangulaire inversée, on obtient

$$\|f(a)\|_F \leq \varepsilon + \|f_N(a)\|_F$$

donc la fonction  $f$  est bornée.  $\square$

### 4. Théorème du point fixe de Banach-Picard

**Lemme 4.1.** Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace de Banach et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  une série à termes dans  $E$ . Si  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  converge absolument, alors  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  converge simplement.

*Démonstration.* Notons  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite des sommes partielles de  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ . Soit  $M, N \in \mathbb{N}$  tels que  $M \geq N$ , alors par une inégalité triangulaire, on obtient

$$\|U_M - U_N\| = \left\| \sum_{n=N+1}^M u_n \right\| \leq \sum_{n=N+1}^M \|u_n\| = \sum_{n=0}^M \|u_n\| - \sum_{n=0}^N \|u_n\| \xrightarrow{M, N \rightarrow +\infty} 0$$

donc la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy, puisque  $E$  est un espace complet, la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge. Donc la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  converge simplement  $\square$

**Définition 4.2.** Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé,  $F$  un sous-ensemble de  $E$  et  $f : F \rightarrow F$  une application. On dit que  $f$  est *contractante* s'il existe  $\alpha \in [0, 1[$  tel que :

$$\forall x, y \in F, \|f(x) - f(y)\| \leq \alpha \|x - y\|.$$

**Théorème 4.3.** (Théorème du point fixe) Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace de Banach,  $F$  un sous-ensemble fermé de  $E$  et  $f : F \rightarrow F$  une application contractante. Alors  $f$  admet une unique point fixe sur  $F$ . De plus, la suite récurrente définie par :

$$\begin{cases} x_0 \in F \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

converge vers cette unique point fixe.

*Démonstration.* Puisque  $f$  est contractante, il existe  $\alpha \in [0, 1[$  tel que :

$$\forall x, y \in F, \|f(x) - f(y)\| \leq \alpha \|x - y\|.$$

Considérons la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} (x_{n+1} - x_n)$ . Soit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , on remarque que :

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \|f(x_n) - f(x_{n-1})\|$$

puisque  $f$  est contractante, on a :

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \alpha \|x_n - x_{n-1}\|$$

par récurrence directe, on obtient :

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \alpha^n \|x_1 - x_0\|$$

donc d'après le théorème de comparaison, la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} (x_{n+1} - x_n)$  converge absolument. Or comme  $E$  est un espace de Banach, d'après le **Lemme 4.1**, la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} (x_{n+1} - x_n)$  converge simplement. En particulier la suite des sommes partielles :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = x_n - x_0$$

converge vers un élément de  $E$ . On en déduit que la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un élément de  $E$ . Puisque la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dans  $F$ , qui est fermé, elle converge vers un élément  $l \in F$ . Enfin puisque  $f$  est contractante, elle est continue, par passage à la limite de l'égalité  $x_{n+1} = f(x_n)$ , on obtient  $f(l) = l$ .

Soit  $l, m \in F$  deux points fixes de  $f$ . Puisque  $f$  est contractante, on a :

$$\|l - m\| = \|f(l) - f(m)\| \leq \alpha \|l - m\|$$

d'où  $\|l - m\| = 0$  et  $l = m$ .  $\square$

**Remarque 4.4.** Le Théorème 4.3 possède de nombreuses applications :

- Le théorème de Cauchy-Lipschitz qui donne l'existence de solutions d'équations différentielles.
- Le théorème d'inversion locale.
- La résolution d'équations de dérivées partielles.

#### 4.1. Applications

**Théorème 4.5.** Soit  $(E, \|\cdot\|_E)$  et  $(F, \|\cdot\|_F)$  deux espaces de Banach,  $f : E \rightarrow F$  une application linéaire continue. Si  $f$  est bijective, alors  $f^{-1}$  est une application linéaire continue.

**Théorème 4.6.** Soit  $(E, \|\cdot\|_E)$  et  $(F, \|\cdot\|_F)$  deux espaces de Banach,  $U$  un ouvert non-vide de  $E$ ,  $a$  un point de  $U$  et  $f : U \rightarrow F$  une application de classe  $C^1$ . Si  $d_a f$  est bijective, alors il existe un voisinage ouvert  $V$  de  $a$  et un voisinage ouvert  $W$  de  $f(a)$  tels que  $f : V \rightarrow W$  soit un  $C^1$ -difféomorphisme.

*Démonstration.* On pose  $M := \|d_a f^{-1}\| > 0$ . Soit  $x \in U$  et  $y \in F$ . On considère l'équation  $y = f(x)$  et on pose  $\varphi : U \rightarrow F; x \mapsto f(x) - f(a) - d_a f(x - a)$ , alors on a :

$$y - f(a) - d_a f(x - a) = \varphi(x)$$

puisque  $d_a f$  est bijective, on a :

$$x = a + d_a f^{-1}(y - f(a) - \varphi(x)).$$

On observe que  $\varphi(a) = d_a \varphi = 0$ . Par continuité il existe  $r_1 > 0$  tel que :

$$\forall x \in \bar{B}(a, r_1), \|d_x \varphi\| \leq \frac{1}{2M}$$

d'après le théorème des accroissements finis, on a :

$$\forall x_1, x_2 \in \bar{B}(a, r_1), \|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\| \leq \frac{1}{2M} \|x_1 - x_2\|$$

en particulier pour  $x_2 = a$ , on obtient :

$$\forall x \in \bar{B}(a, r_1), \|\varphi(x)\| \leq \frac{1}{2M} \|x_1 - a\| \leq \frac{r_1}{2M}.$$

On pose  $F_y : \bar{B}(a, r_1) \rightarrow B(a, r_1); x \mapsto a + d_a f^{-1}(y - f(a) - \varphi(x))$ . Soit  $x \in \bar{B}(a, r_1)$ , alors on a :

$$\|F_y(x) - a\| = \|d_a f^{-1}(y - f(a) - \varphi(x))\| \leq M \|y - f(a) - \varphi(x)\|$$

on pose  $r_2 := \frac{r_1}{2M}$  et soit  $y \in B(f(a), r_2)$ , alors on obtient :

$$\|F_y(x) - a\| < M \left( \frac{r_1}{M} \right) = r_1$$

ainsi  $F_y(x) \in B(a, r_1)$ .

Soit  $x_1, x_2 \in \bar{B}(a, r_1)$ , alors on a :

$$\begin{aligned} \|F_y(x_1) - F_y(x_2)\| &= \|a + d_a f^{-1}(y - f(a) - \varphi(x_1)) - (a + d_a f^{-1}(y - f(a) - \varphi(x_2)))\| \\ &= \|d_a f^{-1}(\varphi(x_2) - \varphi(x_1))\| \\ &\leq M \|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)\| \\ &\leq \frac{M}{2M} \|x_2 - x_1\| = \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\| \end{aligned}$$

donc  $F_y$  est contractante.

D'après le théorème du point fixe,  $F_y$  admet un unique point fixe dans  $B(a, r_1)$ . En particulier l'équation  $y = f(x)$  admet une unique solution dans  $B(a, r_1)$ .

On pose  $W := B(f(a), r_2)$  et  $V := B(a, r_1) \cap f^{-1}(W)$  de sorte que  $f : V \rightarrow W$  est bijective.

Soit  $y_1, y_2 \in W$ , alors  $f^{-1}$  vérifie :

$$\begin{aligned} f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2) &= F_{y_1}(f^{-1}(y_1)) - F_{y_2}(f^{-1}(y_2)) \\ &= d_a f^{-1}(y_1 - y_2) - d_a f^{-1}(\varphi(f^{-1}(y_1)) - \varphi(f^{-1}(y_2))) \end{aligned}$$

on en déduit :

$$\|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)\| \leq M\|y_1 - y_2\| + \frac{1}{2}\|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)\|$$

donc  $f^{-1}$  est lipschitzienne, et en particulier continue. On peut alors montrer que  $f$  est un  $C^1$ -difféomorphisme.  $\square$