Probabilités

Table des matières

1. Cadre général de la théorie des probabilités **2**

1.1. Espace probabilisé général 2

1.2. Exemples d'espace probabilisés 4

1.2.1. Univers $\Omega = \mathbb{R}$ 4

1. Cadre général de la théorie des probabilités

1.1. Espace probabilisé général

Définition 1.1. Soit Ω un ensemble. On appelle *tribu* sur Ω une famille $\mathcal{F}$ de parties de Ω vérifiant :

1. $\mathcal{F}$ est non-vide : $\emptyset \in \mathcal{F}$,
2. la stabilité par passage au complémentaire : $\forall A \in \mathcal{F}, A^c \in \mathcal{F}$,
3. la stabilité par union dénombrable : $\forall (A_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}, \bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{F}$.

Définition 1.2. Soit Ω un ensemble et $\mathcal{F}$ une tribu sur Ω. On appelle *mesure de probabilité* une mesure $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}_+$ vérifiant $P(\Omega) = 1$.

Définition 1.3. Soit Ω un ensemble, $\mathcal{F}$ une tribu sur Ω et P une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$. On appelle *espace probabilisé* le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, on dit que Ω est l'univers et que $\mathcal{F}$ sont les événements.

Remarque 1.4. Dans le cadre discret, on avait souvent $\mathcal{F} := \mathcal{P}(\Omega)$. Dans le cadre général, on aura souvent $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{P}(\Omega)$.

Définition 1.5. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. On dit que $(A_n)_{n\geq 1}$ est un *système complet* si elle vérifie :

1. les A_n sont disjoints deux à deux,
2. la probabilité de l'union des A_n est 1.

Proposition 1.6. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ un système complet sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Alors on a

$$\forall B \in \mathcal{F}, P(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(B \cap A_n).$$

Démonstration. On pose $C := \bigcup_{n\geq 1} A_n$, puisque $P(C) = 1$, on a $P(C^c) = 0$ d'où $P(B \cap C^c) = 0$. Soit $B \in \mathcal{F}$, on en déduit

$$\begin{aligned}
P(B) &= P(B \cap C) + P(B \cap C^c) \\
&= P(B \cap C) \\
&= P\left(\bigcup_{n\geq 1} B \cap A_n\right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} P(B \cap A_n) \text{ par } \sigma\text{-additivité de } P.
\end{aligned}$$

□

Corollaire 1.7. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ un système complet sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Alors pour tout $B \in \mathcal{F}$ on a

1. $P(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) P(B|A_n)$,
2. $\forall i \geq 1, P(A_i|B) = \dfrac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n)P(B|A_n)}$.

Théorème 1.8. (Continuité de la mesure de probabilité) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé.

1. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante d'événements. Alors on a

$$\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right).$$

2. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite décroissante d'événements. Alors on a

$$\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n\geq 1} A_n\right).$$

Démonstration.

1. Pour tout $n \geq 1$, on pose $B_n := A_n \setminus A_{n-1}$ avec $A_0 = \emptyset$, tel que les $(B_n)_{n\geq 1}$ forme un système complet sur $\bigcup_{n\geq 1} A_n$, on en déduit alors

$$P\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n\geq 1} B_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(B_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) - P(A_{n-1})$$

   on reconnait une somme téléscopique et on a donc

$$P\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n) - P(A_0) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n).$$

2. On obtient directement le résultat par passage au complémentaire.

□

Définition 1.9. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements de $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

- On appelle *limite supérieure* de la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ la valeur

$$\limsup_{n\to+\infty} A_n := \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k$$

  intuitivement on considère les éléments qui appartiennent à une infinité d'événements.
- On appelle *limite inférieure* de la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ la valeur

$$\limsup_{n\to+\infty} A_n := \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} A_k.$$

Corollaire 1.10. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements de $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Alors on a

$$P\left(\limsup_{n\to+\infty} A_n\right) = \lim_{m\to+\infty} \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=m}^{n} A_k\right)$$

$$P\left(\liminf_{n\to+\infty} A_n\right) = \lim_{m\to+\infty} \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=m}^{n} A_k\right)$$

Proposition 1.11. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements de $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Alors on a

$$P\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} A_n.$$

Démonstration. On sait que le résultat est vérifié pour un nombre fini d'événements. Par passage à la limite et par continuité de la mesure P on a

$$P\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \lim_{m\to+\infty} P\left(\bigcup_{n=1}^{m} A_n\right) \leq \lim_{m\to+\infty} \sum_{n=1}^{m} P(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n).$$

□

Définition 1.12. Soit A un événement de $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
- On dit que A est *négligeable* si $P(A) = 0$.
- On dit que A est *presque-sûr* si $P(A) = 1$.

Corollaire 1.13. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé. Alors
- L'union dénombrable d'événements négligeables est négligeable.
- L'intersection dénombrable d'événements presque-sûrs est presque-sûre.

Proposition 1.14. Soit $\mathcal{A}$ une famille d'événements de $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Alors il existe une unique tribu $\sigma(\mathcal{A})$ telle que $\sigma(\mathcal{A})$ soit la plus petite tribu contenant $\mathcal{A}$.

Démonstration. Il existe au moins une tribu contenant $\mathcal{A}$, à savoir $\mathcal{P}(\Omega)$. Alors l'intersection de toutes les tribus contenant $\mathcal{A}$ est une tribu et convient. □

Définition 1.15. Soit $\mathcal{A}$ une famille d'événements de $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. On appelle *tribu engendrée* par $\mathcal{A}$, notée $\sigma(\mathcal{A})$, la tribu de la Proposition 1.14.

Exemple 1.16. Soit A un événement de $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Alors $\sigma(\{A\}) = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$.

1.2. Exemples d'espace probabilisés

Définition 1.17. Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique. On appelle *tribu borélienne* sur E, notée $\mathcal{B}(E)$, la tribu engendrée par les intervalles ouverts de E, c'est-à-dire $\mathcal{B}(E) \coloneqq \sigma(\mathcal{O})$.

Lemme 1.18. Soit $(\mu_n)_{n\geq 1}$ une suite de mesures de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ et $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels positifs telle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n = 1$. Alors $\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \mu_n$ est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

1.2.1. Univers $\Omega = \mathbb{R}$

Exemple 1.19. (Mesure de Dirac) Soit $x \in \mathbb{R}$, l'application $\delta_x : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \delta_x(A) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \notin A \\ 1 \text{ si } x \in A \end{cases}$$

est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Exemple 1.20. (Mesure uniforme sur $\{1, ..., n\}$) L'application $\mu = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \delta_k$ est une mesure uniforme sur $\mathbb{R}$.

Exemple 1.21. (Mesure de Poisson) Soit $\lambda > 0$, l'application $\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \delta_n$ est une mesure de Poisson sur $\mathbb{R}$.

Définition 1.22. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne. On dit que f est une *densité de probabilité* sur $\mathbb{R}$ si elle vérifie :
1. pour λ-presque tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$,
2. $\int_{\mathbb{R}} f(x) \, \mathrm{d}\lambda(x) = 1$.

Lemme 1.23. Soit f une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$. Alors l'application $\mu_f : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ définie par $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu_f(A) = \int_A f(x) \, \mathrm{d}\lambda(x)$ est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. On a bien $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu_f(A) \geq 0$. De plus $\mu_f(\mathbb{R}) = 1$. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ deux à deux disjoints. On pose $A \coloneqq \bigcup_{n\geq 1} A_n$, alors $\mathbb{1}_A = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{A_n}$ et

$$\mu_f(A) = \int_A f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(x) f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{A_n}(x) f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x)$$

d'après le théorème de convergence monotone on a

$$\mu_f(A) = \lim_{m\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{m} \mathbb{1}_{A_n} f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \lim_{m\to+\infty} \sum_{n=1}^{m} \mu_f(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_f(A_n).$$

Donc μ_f est bien une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$. □

Remarque 1.24. On dit que μ_f est une *mesure de densité* f.