Calcul différentiel 2

Table des matières

1. Calcul différentiel

1.1. Inversion et fonctions implicites

Définition 1.1. Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \cup \{+\infty\}$, U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, et $f : U \to V$ une application. On dit que f est un C^k-*difféomorphisme* de U sur V si :
(1) f est bijective de U sur V,
(2) f est de classe C^k sur U,
(3) f^{-1} est de classe C^k sur V.

Remarque 1.2. Soit $f : U \to V$ un C^k-difféomorphisme, $x \in U$ et $y \in V$. Alors

$$f^{-1}(f(x)) = x$$
$$f\big(f^{-1}(y)\big) = y$$

de plus en appliquant le théorème de composition des différentielles

$$\big(\mathrm{d}_{f(x)} f^{-1}\big) \circ (\mathrm{d}_x f) = \mathrm{id}$$
$$\big(\mathrm{d}_{f^{-1}(y)} f\big) \circ \big(\mathrm{d}_y f^{-1}\big) = \mathrm{id}$$

donc $\mathrm{d}_x f$ est inversible avec $(\mathrm{d}_x f)^{-1} = \mathrm{d}_{f(x)} f^{-1}$.

Exemples 1.3.

1. On considère $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n; x \mapsto Ax$ où $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, alors f est C^∞ comme fonction linéaire et bijective de réciproque $y \mapsto A^{-1}y$. On remarque que f^{-1} est C^∞ comme fonction linéaire, donc f est un C^∞-difféomorphisme.
2. On considère $f : U \to V; (x, y) \mapsto (x + y, xy)$ où U et V sont définis par
$$U = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y\big\}$$
$$V = \big\{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid s^2 - 4t > 0\big\}$$
alors f est un C^∞ difféomorphisme de U sur V, en effet
   a. f est bijective de U sur V, puisque pour $(x, y) \in U$ on a
   $$(x + y)^2 - 4xy = x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 > 0$$
   donc $f(U) \subset V$, réciproquement pour $(s, t) \in V$ on cherche $(x, y) \in U$ tels que
   $$\begin{cases} x + y = s \\ xy = t \end{cases}$$
   c'est-à-dire x et y sont racines du polynôme $X^2 - sX + t$, comme $x > y$ on a
   $$\begin{cases} x = \frac{s+\sqrt{s^2-4t}}{2} \\ y = \frac{s-\sqrt{s^2-4t}}{2} \end{cases}$$
   donc $V \subset f(U)$, f est bijective,
   b. f est de classe C^∞ sur U car polynômiale,
   c. f^{-1} est de classe C^∞ sur V car $(s, t) \mapsto s^2 - 4t$ et $\sqrt{\cdot}$ sont C^∞ sur V.
3. On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto x^3$, alors f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et bijective. Mais son inverse $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; y \mapsto \sqrt[3]{y}$, n'est pas dérivable en 0 donc f n'est pas un C^∞-difféomorphisme.

1.1.1. Théorèmes d'inversion locale et globale

Théorème 1.4 (Théorème d'inversion locale)**.** Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^k et a un point de U. Si $\mathrm{d}_a f$ est un isomorphisme, alors il existe un voisinage ouvert V de a et un voisinage ouvert W de $f(a)$ tels que $f : V \to W$ est un C^k-difféomorphisme.

Théorème 1.5 (Théorème d'inversion globale). Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^k. Si :

(1) f est injective sur U,

(2) $\forall x \in U, \mathrm{d}_x f$ est un isomorphisme.

Alors $f(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to f(U)$ est un C^k-difféomorphisme.

Démonstration. Soit $x \in U$, alors d'après le théorème d'inversion locale il existe un voisinage ouvert V_x de x et un voisinage ouvert $W_{f(x)}$ de $f(x)$ tels que $f : V_x \to W_{f(x)}$ est un C^k-difféomorphisme. En particulier $W_{f(x)} = f(V_x)$, et on en déduit que

$$f(U) = \bigcup_{x \in U} W_{f(x)}$$

est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ comme union d'ouverts. De plus puisque f est injective sur U, on en déduit que f est bijective de U sur $f(U)$. Enfin puisque la régularité est une notion locale f et f^{-1} sont respectivement de classe C^k sur U et $f(U)$. Donc $f : U \to f(U)$ est un C^k-difféomorphisme. □

Exemples 1.6.

1. On considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; (r, \theta) \mapsto (f_1, f_2) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$, alors
   a. f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ puisque cos et sin sont de classe C^∞.
   b. On pose $U :=]0, +\infty[\times] - \pi, \pi[$, qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ sur lequel f est injective.
   c. Soit $(r, \theta) \in U$, alors

   $$\mathrm{J}_f(r,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

   et $\det\big(\mathrm{J}_f(r,\theta)\big) = r\cos^2(\theta) + r\sin^2(\theta) = r > 0$, donc $\mathrm{d}_{(r,\theta)} f$ est inversible.

   Donc d'après le Théorème d'inversion globale $f : U \to f(U)$ est un C^∞-difféomorphisme.
2. On considère $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; (r, \theta, \varphi) \mapsto (f_1, f_2, f_3) = (r\cos(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$.
   a. f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^3$ puisque cos et sin sont de classes C^∞.
   b. On pose $U :=]0, +\infty[\times] - \pi, \pi[\times] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, qui est un ouvert de $\mathbb{R}^3$ sur lequel f est injective.
   c. Soit $(r, \theta, \varphi) \in U$, alors

   $$\mathrm{J}_f(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\varphi) & -r\sin(\theta)\cos(\varphi) & -r\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\theta)\cos(\varphi) & r\cos(\theta)\cos(\varphi) & -r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & 0 & r\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

   et le déterminant de cette matrice est

   $$\begin{aligned} \det\big(\mathrm{J}_f(r,\theta,\varphi)\big) &= \sin(\varphi)\big(r^2\sin^2(\theta)\cos(\varphi)\sin(\varphi) + r^2\cos^2(\theta)\cos(\varphi)\sin(\varphi)\big) \\ &\quad + r\cos(\varphi)\big(r\cos^2(\theta)\cos^2(\varphi) + \sin^2(\theta)\cos^2(\varphi)\big) \\ &= \sin^2(\varphi)r^2\cos(\varphi) + \cos^2(\varphi)r^2\cos(\varphi) = r^2\cos(\varphi) \neq 0 \end{aligned}$$

   donc $\mathrm{d}_{(r,\theta,\varphi)} f$ est inversible.

   Donc d'après le Théorème d'inversion globale $f : U \to f(U)$ est un C^∞-difféomorphisme.
3. On pose $U := R^2 \setminus \{(0,0)\}$ et on considère $f : U \to \mathbb{R}^2; (x, y) \mapsto \big(x^2 - y^2, 2xy\big)$, alors
   a. f est de classe C^∞ sur U puisque f est polynômiale.
   c. Soit $(x, y) \in U$, alors

   $$\mathrm{J}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

   et $\det\big(\mathrm{J}_f(x,y)\big) = 4\big(x^2 + y^2\big) > 0$ sur U, donc $\mathrm{d}_{(x,y)} f$ est inversible.

Donc d'après le Théorème d'inversion locale $f : U \to \mathbb{R}^2$ est un C^∞-difféomorphisme local en tout point de U. Mais $f(-1,-1) = f(1,1)$, donc $f : U \to \mathbb{R}^2$ n'est pas C^∞-difféomorphisme global.

b. On pose $U' \coloneqq \{(x,y) \in U \mid x > 0\}$, qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ sur lequel f est injective. En effet si $f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2)$, alors on pose

$$\begin{cases}(x_1,y_1) = r_1(\cos(\theta_1),\sin(\theta_1)) \\ (x_2,y_2) = r_2(\cos(\theta_2),\sin(\theta_2))\end{cases} \quad \text{où } r_1,r_2 > 0 \text{ et } \theta_1,\theta_2 \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$$

et on trouve

$$\begin{cases}r_1^2\cos(2\theta_1) = r_2^2\cos(2\theta_2) \\ r_1^2\sin(2\theta_1) = r_2^2\sin(2\theta_2)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}r_1 = r_2 \\ \theta_1 = \theta_2 \bmod 2\pi\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}r_1 = r_2 \\ \theta_1 = \theta_2\end{cases}$$

donc $(x_1,y_1) = (x_2,y_2)$ et f est bien injective.

Donc d'après le Théorème d'inversion globale $f : U' \to f(U')$ est un C^∞-difféomorphisme.

1.1.2. Théorème des fonctions implicites

Théorème 1.7 (Théorème des fonctions implicites)**.** Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, (a,b) un point de U et $f = (f_1,\dots,f_q) : U \to \mathbb{R}^q$ une application de classe C^k. Si :

(1) $f(a,b) = 0$,

(2) la jacobienne de f par rapport à la deuxième variable en (a,b) est inversible.

Alors il existe un voisinage ouvert V de a, un voisinage ouvert W de b, avec $V \times W \subset U$, et une application $\varphi : V \to W$ de classe C^∞ qui vérifie $b = \varphi(a)$, tels que :

$$\begin{cases}(x,y) \in V \times W \\ f(x,y) = 0\end{cases} \iff \begin{cases}x \in V \\ y = \varphi(x)\end{cases}.$$

De plus pour tout $x \in V$, $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}(x) = -\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}(x,\varphi(x))\right)^{-1} \circ \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x,\varphi(x))$.

Démonstration. On considère l'application

$$g : U \to \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q; (x,y) \mapsto (x, f(x,y)).$$

Alors la matrice jacobienne de g en (a,b) est

$$\mathrm{J}_g(a,b) = \begin{pmatrix} I_p & 0_q \\ \cdot & \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}(a,b)\end{pmatrix}$$

et son déterminant $\det(\mathrm{J}_g(a,b))$ est non nul par hypothèse.
Donc d'après le Théorème d'inversion locale il existe un voisinage ouvert U_1 de (a,b) et un voisinage ouvert U_2 de $g(a,b) = (a, f(a,b))$ tels que $g : U_1 \to U_2$ est un C^k-difféomorphisme.
En particulier il existe $\psi : U_2 \to \mathbb{R}^q$ telle que pour tout $(x,y) \in U_2$ on a $g^{-1}(x,y) = (x,\psi(x,y))$.
On prend $V \times W \subset U_1$ et on pose $\varphi : V \to W; x \mapsto \psi(x,0)$, alors l'équivalence du théorème est bien vérifiée et il suffit de dériver pour obtenir l'égalité. □

Exemples 1.8.

1. On considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; (x,y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$ et $\mathbb{S}^1 \coloneqq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 0\}$. Les dérivées partielles de f sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y.$$

On remarque que pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant

$$\begin{cases}(x,y)\in\mathbb{S}^1\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\neq 0\end{cases}\iff\begin{cases}(x,y)\in\mathbb{S}^1\\ y\neq 0\end{cases}$$

on a $(x,y)\in\mathbb{S}^1\setminus\{(1,0),(-1,0)\}$. On peut donc appliquer le Théorème des fonctions implicites, au voisinage V de x, $\mathbb{S}^1$ est le graphe d'une application $\varphi : V\to\mathbb{R}$. De plus on a

$$\forall x\in V, x^2+\varphi(x)^2-1=0$$

en dérivant on trouve

$$\forall x\in V, 2x+2\varphi(x)\varphi'(x)=0$$

et donc $\varphi'(x)=-\frac{x}{\varphi(x)}$.

2. On considère $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}; (x,y,z)\mapsto x^2+y^2+z^2-1$, $\mathbb{S}^2 := \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=0\right\}$. Les dérivées partielles de f sont

$$\forall a\in\{x,y,z\}, \frac{\partial f}{\partial a}(x,y,z)=2a.$$

On remarque que pour $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ vérifiant

$$\begin{aligned}\begin{cases}(x,y,z)\in\mathbb{S}^2\\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\neq 0\end{cases}&\iff\begin{cases}(x,y,z)\in\mathbb{S}^2\\ z\neq 0\end{cases}\\ &\iff\begin{cases}(x,y,z)\in\mathbb{S}^2\\ (x,y,z)\neq(a,b,0)\text{ où }(a,b)\in\mathbb{S}^1\end{cases}\end{aligned}$$

on a $(x,y,z)\in\mathbb{S}^2\setminus\left(\mathbb{S}^1\times\{0\}\right)$. On peut donc appliquer le Théorème des fonctions implicites, au voisinage V de (x,y), $\mathbb{S}^2$ est le graphe d'une application $\varphi : V\to\mathbb{R}$. De plus on a

$$\forall (x,y)\in V, x^2+y^2+\varphi(x,y)^2-1=0$$

en dérivant par rapport à x on trouve

$$\forall (x,y)\in V, 2x+2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\varphi(x,y)=0$$

donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\frac{x}{\varphi(x,y)}$, et en dérivant par rapport à y on trouve

$$\forall (x,y)\in V, 2y+2\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\varphi(x,y)=0$$

donc $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\frac{y}{\varphi(x,y)}$.

1.2. Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

1.2.1. Sous-variétés

Définition 1.9. Soit X une partie de $\mathbb{R}^n$. On dit que X est une *sous-variété de* $\mathbb{R}^n$ *de classe* C^k *et de dimension* $d \in \mathbb{N}$ si pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U dans $\mathbb{R}^n$, un voisinage ouvert V de x et un C^k-difféomorphisme $\varphi : U \to V$ tels que :

$$V \cap X = \varphi\big(U \cap \big(\mathbb{R}^d \times \{0\}\big)\big).$$

On appelle *codimension* de X l'entier $n - d$.

Remarque 1.10. Une sous-variété de dimension 1 est une *courbe*, une sous-variété de dimension 2 est une *surface*, une sous-variété de dimension $n-1$ (codimension 1) est une *hypersurface*

Exemples 1.11.
1. Une courbe dans $\mathbb{R}^2$ est difféomorphe à un segment.
2. Un ouvert de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de dimension n.
3. On considère le cercle $\mathbb{S}^1$, on pose $U' \coloneqq]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[$, $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{]-\infty,0] \times \{0\}\}$, ainsi que $\psi : U' \to V; (r,\theta) \mapsto r(\cos(\theta),\sin(\theta))$ qui est un difféomorphisme de classe C^∞. On a
$$\begin{aligned} V \cap \mathbb{S}^1 &= \mathbb{S}^1 \setminus \{(-1,0)\} \\ &= \psi(\{1\}\times]-\pi,\pi[) \\ &= \psi(U' \cap (\{1\}\times\mathbb{R})) \end{aligned}$$
on prend alors $U :]-\pi,\pi[\times]0,+\infty[$ et $\varphi : U \to V; (\theta, r) \mapsto \psi(r+1,\theta)$, donc $\mathbb{S}^1$ est bien une sous-variété de $\mathbb{R}^2$ de classe C^∞ et de dimension 1.

Définition 1.12. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}^p$ une application de classe C^k. On dit que f est une *immersion* en a si $\mathrm{d}_a f$ est injective.

Définition 1.13. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}^p$ une application de classe C^k. On dit que f est une *submersion* en a si $\mathrm{d}_a f$ est surjective.

Théorème 1.14. Soit X une partie de $\mathbb{R}^n$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :
(1) *Redressement* : X est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ classe C^k et de dimension $d \in \{0,\dots,n\}$.
(2) *Implicite* : Pour tout $a \in X$, il existe un voisinage ouvert U de a dans $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^{n-d}$ une submersion en a de classe C^k tels que $U \cap X = f^{-1}(f(a))$.

Démonstration.
(1) $\Rightarrow$ (2) : Supposons que X est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de classe C^k et de dimension d.
Soit $a \in X$, alors il existe un voisinage ouvert U dans $\mathbb{R}^n$, un voisinage ouvert V de a et un C^k-difféomorphisme $\varphi : U \to V$ tels que

$$V \cap X = \varphi\big(U \cap \big(\mathbb{R}^d \times \{0\}\big)\big).$$

On écrit $\varphi^{-1} = (g_1,\dots,g_d,f_1,\dots,f_{n-d})$, alors
$$V \cap X = \{x \in V \mid f_1(x) = \dots = f_{n-d}(x) = 0\}.$$
On pose $f \coloneqq (f_1,\dots,f_{n-d})$, puisque φ est un difféomorphisme on en déduit que $\mathrm{d}_a f$ est surjective, donc f est une submersion en a de classe C^k.

(2) $\Rightarrow$ (1) : Supposons que les hypothèses soient vérifiées. Sans perte de généralité, on suppose que $f(a) = 0$ et que $\det\big(\mathrm{J}_f(a)\big) \neq 0$. On pose $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ définie par
$$\psi(x_1,\dots,x_n) = (x_1 - a_1,\dots,x_d - a_d, f_1(x_{d+1}),\dots,f_{n-d}(x_n))$$
alors $\det\big(\mathrm{J}_\psi(a)\big) = \det\big(\mathrm{J}_f(a)\big) \neq 0$, quitte à restreindre V, ψ est un C^k-difféomorphisme de V sur $U \coloneqq \psi(V)$. En prenant $\varphi \coloneqq \psi^{-1}$, on a bien

$$V \cap X = \varphi\big(U \cap \big(\mathbb{R}^d \times \{0\}\big)\big).$$

$\square$

Exemple 1.15. On considère le cercle $\mathbb{S}^2$ décrit par $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}; (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$. Alors f est de classe C^k sur $\mathbb{R}^3$ et $\det\big(\mathrm{Jac}_f\big) \neq 0$ sur $\mathbb{S}^2$, donc f est une submersion en tout point de $\mathbb{S}^2$. On en déduit que $\mathbb{S}^2$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de classe C^k et de dimension $3 - 1 = 2$.

1.2.2. Espace tangent à une sous-variété

Définition 1.16. Soit X une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de classe C^k et de dimension d, $a \in X$ un point et v un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On dit que v est *tangent* à X en a s'il existe $\varepsilon > 0$ et une courbe $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}^n$ de classe C^k vérifiant :

(1) $\gamma(0) = a$,
(2) $\gamma'(0) = v$,
(3) $\mathrm{im}(\gamma) \subset X$.

On appelle *espace tangent* à X en a, noté T_aX, l'ensemble des vecteurs tangents à X en a.

Exemples 1.17. Soit X une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de classe C^k et de dimension d et $a \in X$ un point.

1. Le vecteur nul est tangent à X en tout point, avec $\gamma : t \mapsto a$.
2. Pour tout vecteur v tangent à X en a, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λv est tangent à X en a.
3. Si X est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, v est tangent à X en a.
4. Si X est un point, alors le seul vecteur tangent à X en a est 0.

Théorème 1.18. Soit X une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ classe C^k et de dimension d et $a \in X$ un point. Alors l'espace tangent T_aX est un espace vectoriel de dimension d et on a les caractérisations :

(1) S'il existe un voisinage ouvert U de $\mathbb{R}^n$, un voisinage ouvert V de a et un C^k-difféomorphisme $\varphi : U \to V$ vérifiant $V \cap X = \varphi\big(U \cap \big(\mathbb{R}^d \times \{0\}\big)\big)$, alors $T_aX = \mathrm{d}_{\varphi^{-1}(a)}\varphi\big(\mathbb{R}^d \times \{0\}\big)$.
(2) S'il existe un voisinage ouvert V de a et une submersion en a $f : V \to \mathbb{R}^{n-d}$ de classe C^k vérifiant $V \cap X = f^{-1}(f(a))$, alors $T_aX = \ker(\mathrm{d}_a f)$.

Démonstration.

(1) Supposons sans perte de généralité que $\varphi^{-1}(a) = 0$. Soit $v \in T_aX$, alors il existe $\varepsilon > 0$ et une courbe $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to V \cap X$ de classe C^k vérifiant $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$. On pose $\delta := \varphi^{-1}(\gamma)$, alors on a $\mathrm{im}(\delta) \subset U \cap \big(\mathbb{R}^d \times \{0\}\big)$, $\delta(0) = 0$ et
$$\delta'(t) = \mathrm{d}_{\gamma(t)}\varphi^{-1}(\gamma'(t))$$
d'où $\delta'(0) = \mathrm{d}_a\varphi^{-1}(v)$ et $v = \mathrm{d}_a\varphi^{-1}\varphi(\delta'(0))$, donc $T_aX \subset \mathrm{d}_a\varphi^{-1}\varphi\big(\mathbb{R}^d \times \{0\}\big)$.
Réciproquement, on montre de la même manière que $\mathrm{d}_a\varphi^{-1}\varphi\big(\mathbb{R}^d \times \{0\}\big) \subset T_aX$.
Donc $T_aX = \mathrm{d}_a\varphi^{-1}\varphi\big(\mathbb{R}^d \times \{0\}\big)$, on en déduit que T_aX est un espace vectoriel de dimension d.
(2) Soit $v \in T_aX$, alors il existe $\varepsilon > 0$ et une courbe $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to V \cap X$ de classe C^k vérifiant $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$. Soit $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, alors
$$\gamma(t) \in V \cap X \Rightarrow (f \circ \gamma)(t) = f(a) \Rightarrow (f \circ \gamma)'(t) = 0$$
or $(f \circ \gamma)(t) = \mathrm{d}_{\gamma(t)}f(\gamma'(t))$ et $\mathrm{d}_a f(v) = 0$, donc $T_aX \subset \ker(\mathrm{d}_a f)$. L'égalité des dimensions entraine l'égalité des espaces.

$\square$

Remarque 1.19. S'il existe un voisinage ouvert V de a et une submersion en a $f : V \to \mathbb{R}^{n-d}$ de classe C^k vérifiant $V \cap X = f^{-1}(f(a))$, alors $T_aX = \mathrm{Vect}\big(\nabla_{f_1}(a), \ldots, \nabla_{f_{n-d}}(a)\big)^{\perp}$.

1.2.3. Extrema liés

Théorème 1.20 (Théorèmes des extrema liés)**.** Soit X une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de classe C^k et de dimension d, $a \in X$ un point, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^k.
Si f restreinte à X admet un extremum local en a et s'il existe une submersion $g : U \to \mathbb{R}^{n-d}$ de classe C^k telle que, en notant $g = (g_1, ..., g_{n-d})$, on ait

$$X = \{x \in U \mid g_1(x) = ... = g_{n-d}(x) = 0\}.$$

Alors il existe des uniques $\lambda_1, ..., \lambda_{n-d} \in \mathbb{R}$ tels que

$$\nabla_f(a) = \lambda_1 \nabla_{g_1}(a) + \cdots + \lambda_{n-d} \nabla_{g_{n-d}}(a).$$

Ces réels sont appellés les *multiplicateurs de Lagrange*.

Exemple 1.21. On cherche les extrema de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; (x, y) \mapsto x + y$, que l'on restreint à l'ensemble $M \coloneqq \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + y^4 = 1\right\}$.
On remarque que M est une sous-variété de $\mathbb{R}^2$ de classe C^∞, en effet $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; (x, y) \mapsto x^4 + y^4$ est une submersion en tout point de M. Si $f|_M$ admet un extremum local en un point $(a, b) \in M$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla(f)(a, b) = \lambda \nabla(g)(a, b)$. On a donc le système suivant

$$\begin{cases} 1 = \lambda 4a^3 \\ 1 = \lambda 4b^3 \end{cases}$$

et on en déduit que $\lambda \neq 0$ et $a^3 = b^3 = \frac{1}{4\lambda}$, d'où $a = b$.
Comme $(a, b) \in M$ on a $a^4 + b^4 = 1$, d'où $2a^4 = 1$, donc $a = b = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$. On a deux extrema possibles

$$m_1 \coloneqq \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right) \text{ et } m_2 \coloneqq \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$$

comme f est continue et M est compact (comme fermé borné de $\mathbb{R}^2$), f admet au moins un minimum global et un maximum global, elle en a donc exactement deux : m_1 et m_2.
On a $f(m_1) = -f(m_2) = \frac{2}{\sqrt[4]{2}}$, donc f atteint son minimum en m_2 et son maximum en m_1.

2. Équations différentielles

2.1. Équations différentielles du premier ordre

Définition 2.1. Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue. On appelle *équation différentielle d'ordre 1 dans* $\mathbb{R}^n$, notée (E), une équation de la forme suivante :

$$y' = f(t, y)$$

on dit que t est la *variable de temps* et que y est la *variable d'état*.

Définition 2.2. Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1. On appelle *solution* de (E) sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ une fonction $y : I \to \mathbb{R}^n$ dérivable vérifiant :
(1) $\forall t \in I, (t, y(t)) \in U$,
(2) $\forall t \in I, y'(t) = f(t, y(t))$.

Remarque 2.3. Dans le cas où I n'est pas ouvert, la dérivabilité s'entend comme la dérivabilité à droite ou à gauche (selon l'extrémité).

Exemples 2.4.
1. On considère l'équation différentielle d'ordre 1 donnée par $y' = y$. La fonction $t \mapsto e^t$ est une solution de cette équation sur $]1, 2[$.
2. L'équation donnée par $y' = y^2 + t$ est une équation différentielle d'ordre 1 sur $\mathbb{R}$.
3. L'équation donnée par $y' = \frac{y+1}{t\ln(t)}$ est une équation différentielle d'ordre 1 sur $\mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto -1 + \ln(t)$ est une solution de cette équation sur $]0, 1[$.

Définition 2.5. Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1 et $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. On appelle *problème de Cauchy de condition initiale* $y(t_0) = y_0$ le système composé des équations (E) et $y(t_0) = y_0$.

Exemple 2.6. La fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; t \mapsto 2e^{-t}$ est une solution de l'équation différentielle $y' = -y$ de condition initiale $y(0) = 2$.

Définition 2.7. Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1. Soit M un point de U, on note $\mathcal{D}_M$ la droite passant par M et de coefficient directeur $f(M)$. On appelle *champ des tangentes* l'application $M \mapsto \mathcal{D}_M$ associée à (E). On appelle *courbe intégrale* une courbe $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ qui a pour tangente en chaque point M la droite $\mathcal{D}_M$ du champ des tangentes.

Remarque 2.8. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Alors $\mathcal{D}_{(x_0,y_0)}$ a pour équation $y - y_0 = f(x_0, y_0)(x - x_0)$.

Exemples 2.9.
1. On considère l'équation différentielle $y' = 0$, ici $f \equiv 0$. Soit $M := (x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Alors $\mathcal{D}_M$ est la droite d'équation $y = y_0$ et les courbes intégrales sont les droites $\mathcal{D}_M$.
2. On considère l'équation différentielle $y' = y$, ici $f(x, y) = y$. Soit $M := (x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Alors $\mathcal{D}_M$ est la droite d'équation $y = y_0 + y_0(x - x_0)$.

Proposition 2.10. Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1 et $y : I \to \mathbb{R}^n$ une solution de (E). Alors le graphe de y est une courbe intégrale.

Démonstration. Soit $M = (x_0, y_0)$ un point du graphe de y. L'équation de la tangente au graphe en M est donnée par :

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0) = f(x_0, y_0)(x - x_0)$$

on reconnait l'équation de $\mathcal{D}_M$. □

Définition 2.11. Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1 et $m \in \mathbb{R}$. On appelle *isocline de pente m associée à* (E), l'ensemble :

$$\Gamma_m := \{(x, y) \in U \mid f(x, y) = m\}.$$

2.1.1. Solutions maximales et solutions globales

Définition 2.12. Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1, et $y_1 : I_1 \to \mathbb{R}^n$ et $y_2 : I_2 \to \mathbb{R}^n$ deux solutions de (E). On dit que y_2 est un *prolongement de* y_1 si $I_1 \subset I_2$ et $y_2|_{I_1} = y_1$.

Définition 2.13. Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1 et $y : I \to \mathbb{R}^n$ une solution de (E). On dit que y est *maximale* si elle n'admet pas de prolongement.

Exemple 2.14. On considère l'équation différentielle d'ordre 1 donnée par $y' = y^2$. Alors une solution maximale est $t \mapsto \frac{1}{1-t}$ sur $]-\infty, 1[$.

Théorème 2.15. Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1 et $y : I \to \mathbb{R}^n$ une solution de (E). Alors y admet un prolongement maximal.

Démonstration. On prolonge successivement y à gauche et à droite en créant par récurrence des prolongements successifs et en passant à la limite. □

Définition 2.16. Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1 et $y : I \to \mathbb{R}^n$ une solution de (E). On suppose que U s'écrit $U = J \times K$ où J est un ouvert de $\mathbb{R}$ et K un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Alors on dit que y est *globale* si $I = J$.

Proposition 2.17. Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1 et $y : I \to \mathbb{R}^n$ une solution de (E). Si y est une solution globale, alors y est une solution maximale.

Proposition 2.18. Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1 et $y : I \to \mathbb{R}^n$ une solution de (E). Si f est de classe C^k, alors y est de classe C^{k+1}.

Démonstration. Soit $n \in \{0, \ldots, k-1\}$. On pose $P(n)$: y est de classe C^n.
Pour $n = 0$, par définition y est dérivable, donc y est continue.
Pour $n \in \{0, \ldots, k\}$, on suppose que $P(n)$ est vérifiée, y est de classe C^n, alors $y' = f(x, y)$ est de classe C^n par composition de fonctions de classe C^n, donc y est de classe C^{n+1}.
D'après $P(k+1)$, y est de classe C^{k+1}. □

2.1.2. Équations intégrales et cylindre de sécurité

Lemme 2.19. Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1 et $y : I \to \mathbb{R}^n$ une fonction. Alors y est une solution du problème de Cauchy de condition initiale $y(t_0) = y_0$ si et seulement si :
(1) y est continue et $\forall t \in I, (t, y(t)) \in U$,
(2) $\forall t \in I, y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(x, y(x))\, \mathrm{d}x$.

Démonstration.
$\Rightarrow$: Supposons que y est solution du problème de Cauchy de condition initiale $y(t_0) = y_0$.
Alors y est dérivable donc continue et $\forall t \in I, (t, y(t)) \in U$. Soit $t \in I$, d'après le théorème fondamental de l'analyse en intégrant l'égalité $y' = f(t, y)$ on obtient :

$$y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(x, y(x))\, \mathrm{d}x$$

puisque y est solution du problème de Cauchy de condition initiale $y(t_0) = y_0$, on a :

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(x, y(x))\, \mathrm{d}x.$$

$\Leftarrow$: Supposons les hypothèses de l'énoncé vérifiées.
Puisque y et f sont continues, d'après le théorème fondamental de l'analyse $t \mapsto \int_{t_0}^{t} f(x, y(x))\, \mathrm{d}x$ est dérivable, donc y est dérivable et $\forall t \in I, (t, y(t)) \in U$. Soit $t \in I$, en dérivant on obtient :

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

et $y(t_0) = y_0 + \int_{t_0}^{t_0} f(x, y(x))\,\mathrm{d}x = y_0$. Donc y est solution du problème de Cauchy de condition initiale $y(t_0) = y_0$ □

Définition 2.20. Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1, (t_0, y_0) un point de U et $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times B(y_0, r)$ un cylindre dans U. On dit que C est un *cylindre de sécurité* si toute solution $y : I \to \mathbb{R}^n$ du problème de Cauchy de condition initiale $y(t_0) = y_0$ avec $I \subset [t_0 - T, t_0 + T]$ reste contenue dans $\overline{B}(y_0, r)$.

Proposition 2.21. Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1 et (t_0, y_0) un point de U. Alors il existe $T > 0$ tel que $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times B(y_0, r)$ soit un cylindre de sécurité.

Démonstration. Considérons un cylindre $C_0 := [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times B(y_0, r_0)$ dans U. Alors C_0 est fermé et borné, donc C_0 est compact. Puisque f est C^0 sur C_0, on obtient que f est bornée sur C_0, on note $M := \max_{(t,y)\in C_0} \|f(t, y)\| \in \mathbb{R}$.

On suppose que f n'est pas identiquement nulle sur C_0, donc $M > 0$. Et on pose $T := \min\left(T_0, \frac{r_0}{M}\right)$, $r := r_0$ et $C := [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r)$.

Soit $y : I \to \overline{B}(y_0, r)$ une solution du problème de Cauchy de condition initiale $y(t_0) = y_0$ avec $I \subset [t_0 - T, t_0 + T]$. Alors pour tout $t \in I$, on a :

$$\|y(t) - y_0\| = \left\| \int_{t_0}^{t} f(x, y(x))\,\mathrm{d}x \right\| \leq \int_{t_0}^{t} \|f(x, y(x))\|\,\mathrm{d}x \leq M|t - t_0| \leq r$$

Donc C est un cylindre de sécurité pour (E). □

2.1.3. Théorème de Cauchy-Péano-Arzéla

Théorème 2.22 (Théorème de Cauchy-Péano-Arzéla)**.** Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1, (t_0, y_0) un point de U et $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times B(y_0, r)$ un cylindre de sécurité. Alors il existe une solution $y : [t_0 - T, t_0 + T] \to \overline{B}(y_0, r)$ du problème de Cauchy de condition initiale $y(t_0) = y_0$.

Corollaire 2.23. Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1 et (t_0, y_0) un point de U. Alors il existe une solution maximale $y : I \to \mathbb{R}^n$ du problème de Cauchy de condition initiale $y(t_0) = y_0$, de plus I est ouvert.

Démonstration. D'après la Proposition 2.21 il existe un cylindre de sécurité $C := [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r)$, d'après le Théorème de Cauchy-Péano-Arzéla il existe une solution $z : [t_0 - T, t_0 + T] \to \overline{B}(y_0, r)$ du problème de Cauchy de condition initiale $y(t_0) = y_0$, enfin d'après le Théorème 2.15 la solution z se prolonge en une solution maximale $y : I \to \mathbb{R}^n$.

De plus I est ouvert, sinon on pourrait prolonger y en l'une de ses extrémités en y appliquant de nouveau la Proposition 2.21 et le Théorème de Cauchy-Péano-Arzéla. □

Exemple 2.24. On considère l'équation différentielle d'ordre 1 $y' = 3|y|^{\frac{2}{3}}$, alors le problème de Cauchy de condition initiale $y(0) = 0$ admet au moins deux solutions maximales $t \mapsto 0$ et $t \mapsto t^3$, en particulier ces solutions sont globales.

2.1.4. Théorème de Cauchy-Lipschitz

Définition 2.25. Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1. On dit que f est *localement lipschitzienne* par rapport à la deuxième variable si pour tout point $y(t_0) = y_0$ dans U, il existe un cylindre $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times B(y_0, r)$ dans U et une constante $k \geq 0$ tels que f soit k-lipschitzienne par rapport à la deuxième variable sur C :

$$\forall (t, y_1), (t, y_2) \in C, \|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq k|y_1 - y_2|.$$

Remarque 2.26. On considère $f = (f_1, \dots, f_n)$. Si f admet des dérivées partielles par rapport à la deuxième variable continues sur U. Alors en appliquant le théorème des accroissements finis on obtient que f est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable. Cela est vrai en particulier si f est C^1.

Lemme 2.27. Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1, (t_0, y_0) un point de U et $C_0 = [t_0 - T, t_0 + T] \times B(y_0, r)$ un cylindre de sécurité sur lequel f est k-lipschitzienne par rapport à la deuxième variable. Alors pour tout couple $y_1 : I_1 \to \mathbb{R}^n, y_2 : I_2 \to \mathbb{R}^n$ de solutions du problème de Cauchy de condition initiale $y(t_0) = y_0$, on a

$$\forall t \in [t_0 - T, t_0 + T], y_1(t) = y_2(t).$$

Démonstration. On suppose que $t_0 = 0$ et on se restreint à $[0, T]$. Pour tout $t \in [0, T]$, on pose :

$$v(t) := \int_0^t \|y_1(x) - y_2(x)\| \,\mathrm{d}x$$

puisque f est k-lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, on a :

$$\|y_1'(t) - y_2'(t)\| = \|f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))\| \leq k\|y_1(t) - y_2(t)\|$$

puisque $y_1(0) = y_2(0) = y_0$, on a :

$$y_1(t) - y_2(t) = \int_0^t y_1'(x) - y_2'(x) \,\mathrm{d}x$$

on en déduit $v'(t) \leq kv(t)$, en particulier :

$$(v'(t) - kv(t))e^{-kt} \leq 0$$

en intégrant cette inégalité entre 0 et t, on obtient :

$$v(t)e^{-kt} \leq 0$$

donc $v(t) \leq 0$ et $v(t) = 0$, d'où $y_1(t) = y_2(t)$. □

Théorème 2.28 (Théorème de Cauchy-Lipschitz)**.** Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1 et (t_0, y_0) un point de U. Si f est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, alors pour tout cylindre de sécurité $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times B(y_0, r)$, le problème de Cauchy de condition initiale $y(t_0) = y_0$ admet une unique solution sur $[t_0 - T, t_0 + T]$.

Démonstration. Soit $y_1, y_2 : [t_0 - T, t_0 + T] \to \overline{B}(y_0, r)$ deux solutions du problème de Cauchy de condition initiale $y(t_0) = y_0$. Alors d'après le Lemme 2.27, on a $y_1 = y_2$. □

Théorème 2.29. Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1, $y_1 : I \to \mathbb{R}^n$ et $y_2 : I \to \mathbb{R}^n$ deux solutions de (E). Si f est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable et s'il existe $t_0 \in I$ tel que $y_1(t_0) = y_2(t_0)$, alors $y_1 = y_2$.

Démonstration. On pose $J := (y_1 - y_2)^{-1}(0)$. Puisque y_1 et y_2 sont continues, J est un fermé de I. Soit $s_0 \in J$, alors d'après le Théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe S tel que y_1 et y_2 coïncident sur l'intervalle $[s_0 - S, s_0 + S]$, donc J est un ouvert de I.
Puisque $t_0 \in J$, J est non-vide, de plus I est connexe. Donc puisque J est ouvert et fermé, $J = I$. □

Corollaire 2.30. Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1 et (t_0, y_0) un point de U. Si f est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, alors il existe une unique solution maximale du problème de Cauchy de condition initiale $y(t_0) = y_0$.

Démonstration. Le Corollaire 2.23 donne l'existence d'une solution maximale du problème de Cauchy de condition initiale $y(t_0) = y_0$ et le Théorème 2.29 donne l'unicité de cette solution. □

2.1.5. Théorème des bouts

Théorème 2.31. Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1 et $y :]c, d[\to \mathbb{R}^n$ une solution maximale de (E). Si f est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, alors pour tout compact $K \subset U$, il existe un voisinage $V \subset]c, d[$ de c tel que :

$$\forall t \in V, (t, y(t)) \notin K$$

et un voisinage $W \subset]c, d[$ de d tel que :

$$\forall t \in W, (t, y(t)) \notin K.$$

Corollaire 2.32 (Théorème des bouts)**.** Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1 sur $U :=]a, b[\times \mathbb{R}^n$ et $y :]c, d[\to \mathbb{R}^n$ une solution maximale de (E). Si f est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, si $c > a$, alors on a :

$$\lim_{t \to c^+} \|y(t)\| = +\infty$$

et si $d < b$, alors on a :

$$\lim_{t \to d^-} \|y(t)\| = +\infty.$$

En particulier si y est bornée, alors $a = c$ et $d = b$.

Démonstration. Supposons sans perte de généralité que $c > a$. Pour tout $r > 0$, la boule fermée $\overline{B}(0, r)$ est compacte, donc d'après le Théorème 2.31, il existe un voisinage $V \subset]c, d[$ de c tel que :

$$\forall t \in V, (t, y(t)) \notin \overline{B}(0, r)$$

Donc $\lim_{t \to c^+} \|y(t)\| = +\infty$. □

Corollaire 2.33. Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1 sur $U :=]a, b[\times \mathbb{R}^n$ et $y :]c, d[\to \mathbb{R}^n$ une solution maximale de (E). Si f est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable et bornée, alors y est une solution globale.

Démonstration. On pose $M := \sup_{(t,y) \in U} \|f(t, y)\|$. Supposons par l'absurde que $c > a$, donc $c > +\infty$. Soit $t_0 \in]c, d[$. Pour tout $t \in]c, t_0[$, on a :

$$\begin{aligned} \|y(t)\| &= \left\| y(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(x, y(x)) \, \mathrm{d}x \right\| \\ &\leq \|y(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} \|f(x, y(x))\| \, \mathrm{d}x \\ &\leq \|y(t_0)\| + M\|t - t_0\| \leq \|y(t_0)\| + M\|c - t_0\| \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Or d'après le Théorème des bouts, on a $\lim_{t \to c^+} \|y(t)\| = +\infty$, d'où une contradiction, donc $c = a$. De la même manière on a $d = b$. Donc y est une solution globale. □

2.2. Équations différentielles linéaires du premier ordre

Définition 2.34. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $A : I \to M_n(\mathbb{R})$ et $A : I \to M_n(\mathbb{R})$ deux fonctions continues. On appelle *équation différentielle linéaire d'ordre 1*, notée (L), une équation différentielle d'ordre 1 de la forme suivante :

$$y' = A(t)y + B(t).$$

Théorème 2.35. Soit (L) une équation différentielle linéaire d'ordre 1 et (t_0, y_0) un point de $I \times \mathbb{R}^n$. Alors il existe une unique solution maximale du problème de Cauchy de condition initiale $y(t_0) = y_0$, de plus cette solution est globale.

Démonstration. On pose $f : I \times \mathbb{R}^n \to M_n(\mathbb{R}); (t, y) \mapsto A(t)y + B(t)$. Alors la fonction f est linéaire et continue, donc f est lipschitzienne, d'après le Corollaire 2.30 il existe une unique solution maximale $y : J \to \mathbb{R}^n$ du problème de Cauchy de condition initiale $y(t_0) = y_0$.

On peut montrer que y est bornée (Lemme de Grönwall), donc d'après le Théorème des bouts y est une solution globale. □

Définition 2.36. Soit (L) une équation différentielle linéaire d'ordre 1. On dit que (L) est *homogène* si $B = 0$.

Proposition 2.37. Soit (L) une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène. Alors l'ensemble des solutions maximales de l'équation est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n.

Démonstration. On note $S \subset C^0(I, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des solutions maximales de (L).
- D'après le Théorème de Cauchy-Péano-Arzéla S est non-vide.
- Soit $y_1, y_2 \in S$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, alors $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in S$.

Donc S est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit $t_0 \in I$, on pose $\varphi_{t_0} : S \to \mathbb{R}^n; y \mapsto y(t_0)$. L'application φ_{t_0} est linéaire, d'après le Théorème de Cauchy-Péano-Arzéla elle est surjective et d'après le Théorème de Cauchy-Lipschitz elle est injective. Donc φ_{t_0} est un isomorphisme et $\dim(S) = \dim(\mathbb{R}^n) = n$. □

Corollaire 2.38. Soit (L) une équation différentielle linéaire d'ordre 1 et $y_0 : I \to \mathbb{R}^n$ une solution globale de (L). On note S l'ensemble des solutions maximales de l'équation homogène associée à (L). Alors l'ensemble des solutions de (L) est $y_0 + S$.

Démonstration. Soit $y_1 : I \to \mathbb{R}^n$ une solution globale de (L), alors $y_1 - y_0$ est solution de l'équation homogène associée à (L) donc $y_1 - y_0 \in S$, d'où $y_1 \in y_0 + S$. □

2.3. Équations différentielles d'ordre supérieur

Définition 2.39. Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n)^p$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue. On appelle *équation différentielle d'ordre p*, notée (E_p), une équation de la forme suivante :

$$y^{(p)} = f\left(t, y, y', \dots, y^{(p-1)}\right).$$

Définition 2.40. Soit (E_p) une équation différentielle d'ordre p. On appelle *solution* de (E_p) sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ une fonction $y : I \to \mathbb{R}^n$ p-fois dérivable vérifiant :
(1) $\forall t \in I, \left(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(p-1)}(t)\right) \in U$,
(2) $\forall t \in I, y^{(p)} = f\left(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(p-1)}(t)\right)$.

Proposition 2.41. Soit (E_p) une équation différentielle d'ordre p et $y : I \to \mathbb{R}^n$ une solution de (E_p). Si f est de classe C^k, alors y est de classe C^{k+p}.

Démonstration. Voir Proposition 2.18. □

Proposition 2.42. Soit (E_p) une équation différentielle d'ordre p et $y : I \to \mathbb{R}^n$ une fonction. Posons :

$$Y := \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ \dots \\ Y_{p-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \dots \\ y^{(p-1)} \end{pmatrix}$$

Alors y est une solution de (E_p) si et seulement Y est une solution de (E) l'équation différentielle d'ordre 1 donnée par :

$$Y' = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \dots \\ Y_{p-1} \\ f(t,Y) \end{pmatrix}$$

Démonstration.
⇒ : Supposons que y est solution de (E_p). On a alors :

$$Y' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ \dots \\ y^{(p)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \dots \\ Y_{p-1} \\ f(t,Y) \end{pmatrix}$$

Donc Y est solution de (E).

⇐ : Supposons que Y est solution de (E). Alors Y est dérivable, donc pour tout $i \in \{0, \dots, p-1\}$, la fonction $y^{(i)}$ est dérivable. En particulier la fonction y est p-fois dérivable, avec $y^p = f(t,Y)$. Donc y est solution de (E_p). □

Corollaire 2.43. Soit (E_p) une équation différentielle d'ordre p et $(t_0, y_0, \dots, y_{p-1})$ un point de U. Alors il existe une solution maximale $y : I \to \mathbb{R}^n$ du problème de Cauchy de condition initiale $y(t_0) = (y_0, \dots, y_{p-1})$ définie sur un ouvert I.

Corollaire 2.44. Soit (E_p) une équation différentielle d'ordre p et $(t_0, y_0, \dots, y_{p-1})$ un point de U. Si f est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, alors il existe une unique solution maximale $y : I \to \mathbb{R}^n$ du problème de Cauchy de condition initiale $y(t_0) = (y_0, \dots, y_{p-1})$ définie sur un ouvert I.

2.4. Solutions d'équations différentielles linéaires à coefficients constants

Définition 2.45. Soit (L) une équation différentielle linéaire d'ordre 1. On dit que (L) est à *coefficients constants* si $A \in M_n(\mathbb{R})$.

2.4.1. Solutions exponentielles d'équations homogènes

Proposition 2.46. Soit (L) une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène à coefficients constants. Alors la fonction $y : I \to \mathbb{R}^n; t \mapsto e^{\lambda t}v$ est solution de (L) si et seulement si λ est une valeur propre de A et v est un vecteur propre de A associé à λ.

Démonstration. Pour tout $t \in I$, on a $y'(t) = \lambda e^{\lambda t}v$, donc y est solution de (L) si et seulement si $\lambda e^{\lambda t}v = Ae^{\lambda t}v$, si et seulement si $\lambda v = Av$, si et seulement si λ est une valeur propre de A et v est un vecteur propre de A associé à λ. □

2.4.1.1. Cas diagonalisable

Proposition 2.47. Soit (L) une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène à coefficients constants. Si A est diagonalisable, il existe une base $(v_1, \dots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$ de vecteurs propres de A associées aux valeurs propres $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de A. Alors pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la fonction $y_i : I \to \mathbb{R}^n; t \mapsto e^{\lambda_i t}v_i$ est une solution de (L), de plus ces solutions sont indépendantes.

Démonstration. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, d'après la Proposition 2.46 la fonction y_i est solution de (L). Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n = 0$. Alors on a :

$$\forall t \in I, \sum_{k=0}^{n} \alpha_k e^{\lambda_k t} v_k = 0$$

puisque $(v_1, \dots, v_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, on a donc $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. Donc les solutions sont indépendantes. □

Corollaire 2.48. Soit (L) une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène à coefficients constants. Si A est diagonalisable, il existe une base $(v_1, \ldots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$ de vecteurs propres de A associées aux valeurs propres $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ de A. Alors la solution générale de (L) est donnée par :

$$y : I \to \mathbb{R}^n; t \mapsto c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \ldots + c_n e^{\lambda_n t} v_n$$

où $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$.

2.4.1.2. Cas général

Théorème 2.49. Soit (L) une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène à coefficients constants. Alors la solution générale de (L) est donnée par :

$$y : I \to \mathbb{R}^n; t \mapsto e^{tA} v$$

où $v \in \mathbb{R}^n$.

Démonstration. Pour tout $t \in I$, on a $y'(t) = Ae^{tA}v = Ay(t)$, donc y est solution de (L).
Notons $v_1(t), \ldots, v_n(t)$ les colonnes de e^{tA}, la fonction associée à chacune de ces colonnes est solution de (L). De plus $\det(e^{tA}) = e^{\mathrm{Tr}(tA)} \neq 0$, donc $(v_1(t), \ldots, v_n(t))$ forme une base de $\mathbb{R}^n$, on en déduit que $(v_1, \ldots, v_n)$ forme une base de l'espace des solutions de (L). □

Corollaire 2.50. Soit (L) une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène à coefficients constants et (t_0, v_0) un point de U. Alors la solution du problème de Cauchy de condition initiale $y(t_0) = v_0$ est donnée par :

$$y : I \to \mathbb{R}^n; t \mapsto e^{(t-t_0)A} v_0$$

2.4.2. Solutions exponentielles

Théorème 2.51. Soit (L) une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants. Alors la solution générale de (L) est donnée par :

$$y : I \to \mathbb{R}^n; t \mapsto e^{tA} v + T(t)$$

où $v \in \mathbb{R}^n$ et $T : I \to \mathbb{R}^n$ est une solution particulière de (L).

Remarque 2.52. Soit (L) une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants. Pour trouver une solution particulière, on applique la méthode de *variation de la constante*.
Pour tout $t \in I$, on pose :

$$T(t) = e^{tA} v(t)$$

et on dérive pour obtenir :

$$T'(t) = e^{tA} A v(t) + e^{tA} v'(t) = AT(t) + e^{tA} v'(t)$$

on cherche donc $e^{tA} v'(t) = B(t)$, c'est-à-dire $v'(t) = e^{-tA} B(t)$, et on intègre pour trouver :

$$v(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-xA} B(x) \, \mathrm{d}x$$

donc :

$$T(t) = e^{tA} \int_{t_0}^{t} e^{-xA} B(x) \, \mathrm{d}x$$

est une solution particulière de (L), qui vérifie le problème de Cauchy $T(t_0) = 0$.

Exemples 2.53.

1. On considère le système différentiel linéaire à coefficients constants (S) donné par :

$$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 2x + y \end{cases}$$

On écrit le système sous la forme $Y' = AY$, où :

$$Y := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice A est diagonalisable car symétrique, avec comme polynôme caractéristique :

$$\chi_A = (X+1)(X-3)$$

donc ses valeurs propres sont -1 et 3. Et ses espaces propres sont donnés par :

$$E_{-1} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad E_3 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Les solutions de (S) sont donc de la forme :

$$Y(t) = ae^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + be^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x = ae^{-t} + be^{3t} \\ y = -ae^{-t} + be^{3t} \end{cases}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$.

2. On considère le système différentiel linéaire à coefficients constants (S) donné par :

$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 2y \end{cases}$$

On écrit le système sous la forme $Y' = AY$, où :

$$Y := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice A n'est pas diagonalisable. On écrit $A = 2I_2 + R$, où :

$$R := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

en passant à l'exponentielle on trouve :

$$e^{tA} = e^{2t}e^{tR}$$

mais $R^2 = 0$, d'où $e^{tR} = I_2 + tR$, et on obtient :

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

Les solutions de (S) sont donc de la forme :

$$Y(t) = e^{tA}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^{2t} + bte^{2t} \\ be^{2t} \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x = ae^{2t} + bte^{2t} \\ y = be^{2t} \end{cases}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$.

3. On considère le système différentiel linéaire à coefficients constants (S) donné par :

$$\begin{cases} x' = 6x + 3y - 3t + 4e^{3t} \\ y' = -4x - y + 4t - 4e^{3t} \end{cases}$$

On écrit le système sous la forme $Y' = AY + B(t)$, où :

$$Y := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A := \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} -3t + 4e^{3t} \\ 4t - 4e^{3t} \end{pmatrix}$$

On trouve que les solutions du système homogène associé à (S) sont de la forme :

$$Y(t) = ae^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + be^{2t}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x = ae^{3t} + 3be^{2t} \\ y = -ae^{3t} - 4be^{2t} \end{cases}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière de (S) en appliquant la méthode de variation de la constante :

$$\begin{cases} x = \alpha(t)e^{3t} + 3\beta(t)e^{2t} \\ y = -\alpha(t)e^{3t} - 4\beta(t)e^{2t} \end{cases}$$

et on dérive pour obtenir :

$$\begin{cases} x' = 3\alpha(t)e^{3t} + \alpha'(t)e^{3t} + 6\beta(t)e^{2t} + 3\beta'(t)e^{2t} \\ y' = -3\alpha(t)e^{3t} - \alpha'(t)e^{3t} - 8\beta(t)e^{2t} - 4\beta'(t)e^{2t} \end{cases}$$

on cherche donc :

$$\begin{cases} \alpha'(t)e^{3t} + 3\beta'(t)e^{2t} = -3t + 4e^{3t} \\ -\alpha'(t)e^{3t} - 4\beta'(t)e^{2t} = 4t - 4e^{3t} \end{cases}$$

on voit que $\alpha'(t) = 4$ et $\beta'(t) = -te^{-2t}$ conviennent, et on intègre pour obtenir $\alpha(t) = 4t$ et :

$$\beta(t) = \int_{-\frac{1}{2}}^{t} -xe^{-2x}\,\mathrm{d}x = \left[\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)e^{-2x}\right]_{-\frac{1}{2}}^{t} = \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\right)e^{-2t}$$

Les solutions de (S) sont donc de la forme :

$$\begin{cases} x = ae^{3t} + 3be^{2t} + 4te^{3t} + \frac{3}{2}t + \frac{3}{4} \\ y = -ae^{3t} - 4be^{2t} - 4te^{3t} - 2t - 1 \end{cases}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$.