

# Probabilités

## Table des matières

<b>1. Cadre général de la théorie des probabilités</b>	<b>2</b>
1.1. Espace probabilisé général . . . . .	2
1.1.1. Exemples d'espaces probabilisés . . . . .	4
1.1.1.1. Univers $\Omega = \mathbb{N}$ . . . . .	4
1.1.1.2. Univers $\Omega = \mathbb{R}$ . . . . .	4
1.1.1.3. Univers $\Omega = \mathbb{R}^d$ . . . . .	5
1.1.2. Classe monotone . . . . .	5
1.2. Variables et vecteurs aléatoires . . . . .	6
1.2.1. Loi d'un vecteur aléatoire . . . . .	7
1.3. Fonction de répartition . . . . .	7
1.3.1. Reconnaître une densité de probabilité . . . . .	8
1.3.2. Reconnaître une loi discrète . . . . .	8
<b>2. Espérance</b>	<b>9</b>
2.1. Calculs de l'espérance . . . . .	9
2.1.1. Définition et formule de transfert . . . . .	9
2.1.2. Variance . . . . .	9
2.1.3. Covariance . . . . .	9
2.1.4. Concentration . . . . .	10
2.2. Application au calcul de lois . . . . .	11
2.2.1. Méthode de la fonction muette . . . . .	11
<b>3. Indépendance</b>	<b>12</b>
3.1. Vecteurs aléatoires indépendants . . . . .	12
3.1.1. Critère d'indépendance pour des vecteurs discrets . . . . .	13
3.1.2. Critère d'indépendance pour des vecteurs à densité . . . . .	13
3.2. Somme de variables aléatoires indépendantes . . . . .	14
3.2.1. Cas de variables aléatoires discrètes . . . . .	14
3.2.2. Cas de variables aléatoires à densité . . . . .	14
3.3. Familles d'événements et de variables indépendantes . . . . .	14
<b>4. Convergence de suites de variables aléatoires</b>	<b>16</b>
4.1. Convergence en loi . . . . .	16
4.2. Convergence en probabilité . . . . .	18
4.2.1. Stabilité de la convergence en probabilité . . . . .	18
4.3. Convergence presque sûre . . . . .	19
4.4. Loi des grands nombres . . . . .	20
4.4.1. Loi faible des grands nombres . . . . .	20
4.4.2. Loi forte des grands nombres . . . . .	20
<b>5. Fonction caractéristique</b>	<b>21</b>
5.1. Propriétés élémentaires . . . . .	21
5.2. Application aux vecteurs aléatoires . . . . .	21
5.2.1. Somme de variables aléatoires indépendantes . . . . .	21
5.2.2. Fonction caractéristique et moments . . . . .	22
5.3. Théorème d'injectivité . . . . .	22
5.4. Théorème d'inversion . . . . .	22

# 1. Cadre général de la théorie des probabilités

## 1.1. Espace probabilisé général

**Définition 1.1.** Soit  $\Omega$  un ensemble. On appelle *tribu* sur  $\Omega$  une famille  $\mathcal{F}$  de parties de  $\Omega$  vérifiant :

- (1)  $\mathcal{F}$  est non-vidé :  $\emptyset \in \mathcal{F}$ ,
- (2) la stabilité par passage au complémentaire :  $\forall A \in \mathcal{F}, A^c \in \mathcal{F}$ ,
- (3) la stabilité par union dénombrable :  $\forall (A)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}, \bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{F}$ .

On dit que le couple  $(\Omega, \mathcal{F})$  est un *espace probabilisable* où  $\Omega$  est l'univers et  $\mathcal{F}$  sont les événements.

**Définition 1.2.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F})$  un espace probabilisable. On appelle *mesure de probabilité* sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  une mesure  $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}_+$  vérifiant  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ .

On dit que le triplet  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  est un *espace probabilisé*.

**Remarque 1.3.** Dans le cadre discret, on avait souvent  $\mathcal{F} := \mathcal{P}(\Omega)$ . Dans le cadre général, on aura souvent  $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{P}(\Omega)$ .

**Définition 1.4.** Soit  $(A)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'événements sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . On dit que  $(A)_{n \in \mathbb{N}}$  est un *système complet* si elle vérifie :

- (1) les  $A_n$  sont disjoints deux à deux :  $\forall i, j \in \mathbb{N}, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$ ,
- (2) la probabilité de l'union des  $A_n$  est 1 :  $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = 1$ .

**Proposition 1.5.** Soit  $(A)_{n \in \mathbb{N}}$  un système complet sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Alors on a

$$\forall B \in \mathcal{F}, \mathbb{P}(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B \cap A_n).$$

*Démonstration.* On pose  $C := \bigcup_{n \geq 1} A_n$ , puisque  $\mathbb{P}(C) = 1$ , on a  $\mathbb{P}(C^c) = 0$  d'où  $\mathbb{P}(B \cap C^c) = 0$ . Soit  $B \in \mathcal{F}$ , on en déduit

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap C) + \underbrace{\mathbb{P}(B \cap C^c)}_{=0} = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 1} B \cap A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B \cap A_n).$$

□

**Corollaire 1.6.** Soit  $(A)_{n \in \mathbb{N}}$  un système complet sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Alors pour tout  $B \in \mathcal{F}$  on a

- (1)  $\mathbb{P}(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) \mathbb{P}(B|A_n)$ ,
- (2)  $\forall i \geq 1, \mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}(B|A_i)}{\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) \mathbb{P}(B|A_n)}$ .

**Théorème 1.7.** (Continuité de la mesure de probabilité) Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé.

(1) Soit  $(A)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite croissante d'événements. Alors on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right).$$

(2) Soit  $(A)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite décroissante d'événements. Alors on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \geq 1} A_n\right).$$

*Démonstration.*

(1) Pour tout  $n \geq 1$ , on pose  $B_n := A_n \setminus A_{n-1}$  avec  $A_0 = \emptyset$ , tel que les  $(B)_{n \in \mathbb{N}}$  forment un système complet sur  $\bigcup_{n \geq 1} A_n$ , on en déduit alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 1} B_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(A_{n-1})$$

on reconnait une somme télescopique et on a donc

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(A_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

(2) On obtient directement le résultat par passage au complémentaire.

□

**Définition 1.8.** Soit  $(A)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'événements de  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .

- On appelle *limite supérieure* de la suite  $(A)_{n \in \mathbb{N}}$  la valeur

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n := \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k$$

intuitivement on considère les éléments qui appartiennent à une infinité d'événements.

- On appelle *limite inférieure* de la suite  $(A)_{n \in \mathbb{N}}$  la valeur

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} A_n := \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} A_k.$$

**Corollaire 1.9.** Soit  $(A)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'événements de  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Alors on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n\right) &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=m}^n A_k\right) \\ \mathbb{P}\left(\liminf_{n \rightarrow +\infty} A_n\right) &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=m}^n A_k\right) \end{aligned}$$

**Proposition 1.10.** Soit  $(A)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'événements de  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Alors on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

*Démonstration.* On sait que le résultat est vérifié pour un nombre fini d'événements. Par passage à la limite et par continuité de la mesure  $\mathbb{P}$  on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^m A_n\right) \leq \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^m \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

□

**Définition 1.11.** Soit  $A$  un événement de  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .

- On dit que  $A$  est *négligeable* si  $\mathbb{P}(A) = 0$ .
- On dit que  $A$  est *presque-sûr* si  $\mathbb{P}(A) = 1$ .

**Corollaire 1.12.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé. Alors

- L'union dénombrable d'événements négligeables est négligeable.
- L'intersection dénombrable d'événements presque-sûrs est presque-sûre.

**Proposition 1.13.** Soit  $\mathcal{A}$  une famille d'événements de  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Alors il existe une unique tribu  $\sigma(\mathcal{A})$  telle que  $\sigma(\mathcal{A})$  soit la plus petite tribu contenant  $\mathcal{A}$ .

*Démonstration.* Il existe au moins une tribu contenant  $\mathcal{A}$ , à savoir  $\mathcal{P}(\Omega)$ . Alors l'intersection de toutes les tribus contenant  $\mathcal{A}$  est une tribu et convient.  $\square$

**Définition 1.14.** Soit  $\mathcal{A}$  une famille d'événements de  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . On appelle *tribu engendrée* par  $\mathcal{A}$ , notée  $\sigma(\mathcal{A})$ , la tribu de la Proposition 1.13.

**Exemple 1.15.** Soit  $A$  un événement de  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Alors  $\sigma(\{A\}) = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$ .

### 1.1.1. Exemples d'espaces probabilisés

**Définition 1.16.** Soit  $(E, \mathcal{O})$  un espace topologique. On appelle *tribu borélienne* sur  $E$ , notée  $\mathcal{B}(E)$ , la tribu engendrée par les intervalles ouverts de  $E$ , c'est-à-dire  $\mathcal{B}(E) := \sigma(\mathcal{O})$ .

**Lemme 1.17.** Soit  $(\mu)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de mesures de probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  et  $(\lambda)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres réels positifs telle que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n = 1$ . Alors  $\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \mu_n$  est une mesure de probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{F})$ .

#### 1.1.1.1. Univers $\Omega = \mathbb{N}$

Se référer au cours de *Probabilités* de deuxième année.

#### 1.1.1.2. Univers $\Omega = \mathbb{R}$

**Exemple 1.18.** (Mesure de Dirac) Soit  $x \in \mathbb{R}$ , l'application  $\delta_x : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_+$  définie par

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \delta_x(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{si } x \in A \end{cases}$$

est une mesure de probabilité sur  $\mathbb{R}$ .

**Exemple 1.19.** (Mesure uniforme sur  $\{1, \dots, n\}$ ) L'application  $\mu = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_k$  est une mesure uniforme sur  $\mathbb{R}$ .

**Exemple 1.20.** (Mesure de Poisson) Soit  $\lambda > 0$ , l'application  $\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \delta_n$  est une mesure de Poisson sur  $\mathbb{R}$ .

**Définition 1.21.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction borélienne. On dit que  $f$  est une *densité de probabilité* sur  $\mathbb{R}$  si elle vérifie :

- (1) pour  $\lambda$ -presque tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) \geq 0$ ,
- (2)  $\int_{\mathbb{R}} f(x) d\lambda(x) = 1$ .

**Lemme 1.22.** Soit  $f$  une densité de probabilité sur  $\mathbb{R}$ . Alors l'application  $\mu_f : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_+$  définie par  $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu_f(A) = \int_A f(x) d\lambda(x)$  est une mesure de probabilité sur  $\mathbb{R}$ .

*Démonstration.* On a bien  $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu_f(A) \geq 0$ . De plus  $\mu_f(\mathbb{R}) = 1$ . Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  deux à deux disjoints. On pose  $A := \bigcup_{n \geq 1} A_n$ , alors  $\mathbb{1}_A = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{A_n}$  et

$$\mu_f(A) = \int_A f(x) d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(x) f(x) d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{A_n}(x) f(x) d\lambda(x)$$

d'après le théorème de convergence monotone on a

$$\mu_f(A) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^m \mathbb{1}_{A_n}(x) f(x) d\lambda(x) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^m \mu_f(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_f(A_n).$$

Donc  $\mu_f$  est bien une mesure de probabilité sur  $\mathbb{R}$ .  $\square$

**Remarque 1.23.** On dit que  $\mu_f$  est la *mesure de densité*  $f$ .

**Proposition 1.24.** Soit  $f$  et  $g$  deux densités de probabilités sur  $\mathbb{R}$ . Alors les mesures de densité  $\mu_f$  et  $\mu_g$  sont égales si et seulement si  $f$  et  $g$  sont égales presque partout.

*Démonstration.*

$\Rightarrow$  : Supposons que  $\mu_f = \mu_g$ . On pose

$$A_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > g(x)\}$$

$$A_- := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < g(x)\}$$

ces deux ensembles sont boréliens car  $f$  et  $g$  sont boréliennes. Par construction

$$\int_{A_+} f - g \, d\lambda = \mu_f(A_+) - \mu_g(A_+) = 0 = \int_{A_-} f - g \, d\lambda$$

de plus  $A := \{x \in \mathbb{R} \mid |f(x) - g(x)| > 0\} = A_+ \cup A_-$ , on en déduit

$$\int_A |f - g| \, d\lambda = \int_A (f - g) \mathbb{1}_{A_+} + (g - f) \mathbb{1}_{A_-} \, d\lambda = 0$$

donc  $f - g = 0$  presque partout et  $f = g$  presque partout.

$\Leftarrow$  : Si  $f = g$  presque partout, alors il est évident que  $\mu_f = \mu_g$ . □

**Exemple 1.25.** (Loi uniforme) Soit  $c, d \in \mathbb{R}$  avec  $c < d$ . Alors la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{\mathbb{1}_{[c,d]}(x)}{d-c}$  est une densité de probabilité. En particulier, pour tout  $[a, b] \subset [c, d]$

$$\mu_f([a, b]) = \int_{[a,b]} f(x) \, d\lambda(x) = \frac{b-a}{d-c}.$$

On note la probabilité associée  $\mathcal{U}([c, d])$ .

**Exemple 1.26.** (Loi exponentielle) Soit  $\lambda > 0$ . Alors la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$  est une densité de probabilité. On note la probabilité associée  $\mathcal{E}(\lambda)$ .

**Exemple 1.27.** (Loi normale) La fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$  est une densité de probabilité. On note la probabilité associée  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

### 1.1.1.3. Univers $\Omega = \mathbb{R}^d$

On peut étendre les exemples de  $\mathbb{R}$ , ainsi que les définitions de densité et de mesures de probabilité associée.

### 1.1.2. Classe monotone

**Définition 1.28.** Soit  $\mathcal{C}$  une famille de parties d'un ensemble  $\Omega$ . On dit que  $\mathcal{C}$  est une *classe monotone* si elle vérifie :

- (1)  $\Omega \in \mathcal{C}$ ,
- (2)  $\forall A, B \in \mathcal{C}, A \subset B \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{C}$ ,
- (3)  $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}^{\mathbb{N}}$  croissante,  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{C}$ .

**Remarque 1.29.** Une tribu est une classe monotone, la réciproque est fausse.

**Lemme 1.30.** Soit  $\mathcal{C}$  une classe monotone. Alors  $\mathcal{C}$  est une tribu si et seulement si elle est stable par intersection finie, c'est-à-dire :

$$\forall A_1, \dots, A_n \in \mathcal{C}, \bigcap_{k=1}^n A_k \in \mathcal{C}.$$

*Démonstration.*

$\Rightarrow$  : Si  $\mathcal{C}$  est une tribu elle est stable par intersection finie.

$\Leftarrow$  : Supposons que  $\mathcal{C}$  est stable par intersection finie. Soit  $(A)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $\mathcal{C}$ . Puisque  $\mathcal{C}$  est stable par passage au complémentaire,  $\mathcal{C}$  est aussi stable par union finie, en effet

$$A, B, \in \mathcal{C} \Rightarrow A^c, B^c \in \mathcal{C} \Rightarrow A^c \cap B^c \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cup B = (A^c \cap B^c)^c \in \mathcal{C}$$

on a donc pour tout  $N \in \mathbb{N}$ ,  $\bigcup_{n=0}^N A_n \in \mathcal{C}$ , et par union croissante

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \underbrace{\bigcup_{n=0}^N A_n}_{\text{croissante}} \in \mathcal{C}$$

donc  $\mathcal{C}$  est bien une tribu. □

**Définition 1.31.** Soit  $\mathcal{A}$  une famille de parties d'un ensemble  $\Omega$ . On appelle *classe monotone engendrée* par  $\mathcal{A}$ , notée  $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ , l'intersection de toutes les classes monotones contenant  $\mathcal{A}$ .

**Théorème 1.32.** (Théorème de la classe monotone) Soit  $\mathcal{A}$  une famille de parties d'un ensemble  $\Omega$ . Si  $\mathcal{A}$  est stable par intersection finie, alors  $\mathcal{C}(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$ .

*Démonstration.* Soit  $A \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$ , on pose  $\mathcal{C}_A := \{B \in \mathcal{C}(\mathcal{A}) \mid A \cap B \in \mathcal{C}(\mathcal{A})\}$ . Puisque  $\mathcal{C}_A$  est une classe monotone contenant  $A$ , on a  $\mathcal{C}_A = \mathcal{C}(\mathcal{A})$ . Donc  $\mathcal{C}(\mathcal{A})$  est stable par intersection finie. D'après le **Lemme 1.30**  $\mathcal{C}(\mathcal{A})$  est une tribu. □

**Corollaire 1.33.** Soit  $\mu$  et  $\nu$  deux mesures de probabilités sur  $(\Omega, \mathcal{F})$ . S'il existe une famille de parties  $\mathcal{A}$  stable par intersection finie sur laquelle  $\mu$  et  $\nu$  coïncident, alors elles coïncident sur  $\sigma(\mathcal{A})$ .

## 1.2. Variables et vecteurs aléatoires

**Définition 1.34.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F})$  un espace probabilisable. On appelle *vecteur aléatoire* une application borélienne  $X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ . Dans le cas  $d = 1$ , on dit que  $X$  est une *variable aléatoire*.

**Proposition 1.35.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F})$  un espace probabilisable.

(1) Une application  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est une variable aléatoire si et seulement si

$$\forall t \in \mathbb{R}, X^{-1}([-\infty, t]) \in \mathcal{F}$$

(2) Une application  $X = (X_1, \dots, X_d) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  est un vecteur aléatoire si et seulement si  $X_1, \dots, X_d$  sont des variables aléatoires.

(3) Soit  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  un vecteur aléatoire et  $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application borélienne. Alors  $\varphi \circ X$  est un vecteur aléatoire.

*Démonstration.*

(1)  $\Rightarrow$  : Si  $X$  est une variable aléatoire, alors  $X$  est mesurable et le résultat est évident.

$\Leftarrow$  : Si pour tout  $t \in \mathbb{R}$  on a  $X^{-1}([-\infty, t]) \in \mathcal{F}$ . Alors puisque la famille  $\{[-\infty, t] \mid t \in \mathbb{R}\}$  engendre  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ,  $X$  est mesurable. Donc  $X$  est une variable aléatoire.

(2) On obtient le résultat par projection en appliquant (1) à  $X_1, \dots, X_n$ .

(3) On obtient le résultat par composition de fonctions boréliennes. □

**Proposition 1.36.** Soit  $(X)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires sur  $(\Omega, \mathcal{F})$ .

(1) Si les applications  $S := \sup_{n \in \mathbb{N}} X_n$  et  $I := \inf_{n \in \mathbb{N}} X_n$  sont finies, alors  $S$  et  $I$  sont des variables aléatoires.

(2) Si  $(X)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers une limite finie  $X$ , alors  $X$  est une variable aléatoire.

*Démonstration.*

- (1) On remarque que pour tout  $t \in \mathbb{R}$  on a  $S^{-1}(]-\infty, t]) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} X^{-1}(]-\infty, t])$  et que l'on peut écrire de la même manière pour  $I$ .
- (2) On remarque que  $X = \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = \limsup_{n \rightarrow +\infty} X_n = \inf_{m \rightarrow +\infty} (\sup_{n \geq m} X_n)$ .

□

### 1.2.1. Loi d'un vecteur aléatoire

**Proposition 1.37.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  un vecteur aléatoire. Alors l'application  $\mathbb{P}_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}_+; A \mapsto \mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A))$  est une mesure de probabilité sur  $\mathbb{R}^d$ .

**Définition 1.38.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  un vecteur aléatoire. On appelle *loi de  $X$* , notée  $\mathbb{P}_X$ , la mesure de probabilité de la Proposition 1.37. On dit aussi que  $X$  suit la loi  $\mathbb{P}_X$ .

**Définition 1.39.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  un vecteur aléatoire. On appelle *atomes de  $X$* , noté  $\mathcal{V}_X$ , l'ensemble

$$\mathcal{V}_X := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \mathbb{P}_X(\{x\}) > 0\}.$$

**Exemple 1.40.** (Loi de Bernoulli) On considère  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  avec  $\Omega = \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$  et  $\mathbb{P}$  la mesure uniforme sur  $[0, 1]$ . On prend  $X = \mathbb{1}_{[0, p]}$  avec  $p \in [0, 1]$ . Soit  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_X(A) &= \mathbb{P}(X^{-1}(A)) = \mathbb{P}(X^{-1}(A \cap \{0\})) + \mathbb{P}(X^{-1}(A \cap \{1\})) \\ &= \delta_0(A) \mathbb{P}(X^{-1}(0)) + \delta_1(A) \mathbb{P}(X^{-1}(1)) = \delta_0(A)(1 - p) + \delta_1(A)p \end{aligned}$$

donc  $\mathbb{P}_X = \delta_0(1 - p) + \delta_1 p$ .

**Proposition 1.41.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $X = (X_1, \dots, X_d) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  un vecteur aléatoire. Si  $X$  admet une densité  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ , alors les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_d$  admettent des densités  $f_1, \dots, f_d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  avec

$$\forall i \in \{1, \dots, d\}, f_i(x) := \int_{\mathbb{R}^{d-1}} f(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_d) d\lambda(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d).$$

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer le théorème de Fubini. □

## 1.3. Fonction de répartition

**Définition 1.42.** Soit  $\mathbb{P}$  une mesure de probabilité sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ . On appelle *fonction de répartition*, notée  $F_{\mathbb{P}}$ , la fonction  $F_{\mathbb{P}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+; t \mapsto \mathbb{P}(]-\infty, t])$ .

**Définition 1.43.** Soit  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P})$  un espace probabilisé, et  $X$  une variable aléatoire. On appelle *fonction de répartition de  $X$* , notée  $F_X$ , la fonction de répartition liée à  $\mathbb{P}_X$ .

**Proposition 1.44.** Soit  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P})$  un espace probabilisé, et  $X, Y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux variables aléatoires. Alors  $X$  et  $Y$  ont la même loi si et seulement si elles ont la même fonction de répartition.

*Démonstration.*

$\Rightarrow$  : Supposons que  $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$ . Alors on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, F_X(t) = \mathbb{P}_X(]-\infty, t]) = \mathbb{P}_Y(]-\infty, t]) = F_Y(t)$$

donc  $F_X = F_Y$ .

$\Leftarrow$  : Supposons que  $F_X = F_Y$ . Alors on pose  $\mathcal{A} := \{]-\infty, t] \mid t \in \mathbb{R}\}$  qui est stable par intersection avec  $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , on pose  $\mathcal{C} := \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \mid \mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}_Y(A)\}$  qui est une classe monotone, alors d'après le théorème de la classe monotone  $\mathcal{C} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Donc  $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$ . □

### 1.3.1. Reconnaître une densité de probabilité

**Proposition 1.45.** Soit  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une variable aléatoire. Alors si la fonction de répartition de  $X$  est  $C^1$  par morceaux,  $X$  admet une densité de probabilité définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par  $f(x) = F'_X(x)$  si  $F_X$  est dérivable en  $x$  et  $f(x) = 0$  sinon.

*Démonstration.* Puisque  $F_X$  est  $C^k$  par morceaux, il existe une suite croissante  $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\lim_{n \rightarrow -\infty} a_n = +\infty$$

et pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $F_X$  soit dérivable sur  $]a_n, a_{n+1}[$ . Soit  $n \in \mathbb{Z}$ , alors

$$\forall s, t \in ]a_n, a_{n+1}[ , \int_s^t f(x) dx = F_X(t) - F_X(s)$$

et par passage à la limite pour  $s \rightarrow a_n$  et  $t \rightarrow a_{n+1}$  on a

$$\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x) dx = F_X(a_n) - F_X(a_{n+1}).$$

Soit  $t \in \mathbb{R}$ , alors il existe  $n \in \mathbb{Z}$  tel que  $t \in ]a_n, a_{n+1}[$  et

$$\int_{-\infty}^t f(x) dx = \sum_{k=-\infty}^n \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x) dx + \int_{a_n}^t f(x) dx$$

on reconnaît une somme télescopique et on a donc

$$\int_{-\infty}^t f(x) dx = F_X(t) - \underbrace{\lim_{k \rightarrow -\infty} F_X(a_k)}_{=0} = F_X(t) = \mathbb{P}_X([-\infty, t]).$$

□

### 1.3.2. Reconnaître une loi discrète

**Définition 1.46.** Soit  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une variable aléatoire. On appelle *saut* de la fonction de répartition de  $X$ , noté  $\Delta_X$ , la fonction définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \Delta_X(t) := F_X(t) - \lim_{x \rightarrow t^-} F_X(x).$$

**Lemme 1.47.** Soit  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une variable aléatoire. Alors l'ensemble des points de discontinuités, noté  $\mathcal{D}_X := \{t \in \mathbb{R} \mid \Delta_X(t) > 0\}$ , est dénombrable avec  $\sum_{t \in \mathcal{D}_X} \Delta_X(t) \leq 1$  de plus  $X$  est discrète si et seulement si  $\sum_{t \in \mathcal{D}_X} \Delta_X(t) = 1$ .



## 2. Espérance

### 2.1. Calculs de l'espérance

#### 2.1.1. Définition et formule de transfert

**Définition 2.1.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  un vecteur aléatoire. On appelle *espérance* de  $X$ , notée  $\mathbb{E}[X]$ , la valeur

$$\mathbb{E}[X] := \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} x d\mathbb{P}_X(x).$$

**Remarque 2.2.** Pour que l'intégrale précédente ait du sens dans  $\mathbb{R}$  on a besoin que :

- $X \geq 0$  presque sûrement,
- $X$  soit intégrable sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .

**Théorème 2.3.** (Formule de transfert) Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé,  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  un vecteur aléatoire et  $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$  une application mesurable. Alors

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] = \int_{\Omega} \varphi(X(\omega)) d\mathbb{P}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) d\mathbb{P}_X(x).$$

**Remarque 2.4.** Pour que l'intégrale précédente ait du sens on a besoin que :

- $\varphi(X)$  soit intégrable sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , c'est-à-dire que  $\varphi$  soit intégrable sur  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mathbb{P}_X)$ .

**Proposition 2.5.** (Cas discret) Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé,  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  un vecteur aléatoire et  $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$  une application mesurable. Alors

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] = \sum_{\omega \in \mathcal{V}_X} \varphi(\omega) \mathbb{P}(X = \omega).$$

**Proposition 2.6.** (Cas à densité) Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé,  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  un vecteur aléatoire à densité  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$  et  $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$  une application mesurable. Alors

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) f(x) d\lambda(x).$$

#### 2.1.2. Variance

**Définition 2.7.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  un vecteur aléatoire. On appelle *variance* de  $X$ , notée  $V(X)$ , la valeur

$$V(X) := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2].$$

**Proposition 2.8.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  un vecteur aléatoire. Alors la variance de  $X$  vérifie les propriétés suivantes :

- (1)  $V(X)$  ne dépend que de  $X$ .
- (2)  $V(X) \geq 0$ , avec égalité si et seulement si  $X$  est constante.
- (3)  $\forall a, b \in \mathbb{R}, V(aX + b) = a^2 V(X)$ .
- (4)  $V(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$ .

#### 2.1.3. Covariance

**Définition 2.9.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  deux vecteurs aléatoires. On appelle *covariance* de  $X$  et  $Y$ , notée  $\text{Cov}(X, Y)$ , la valeur

$$\text{Cov}(X, Y) := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])].$$

**Proposition 2.10.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  deux vecteurs aléatoires. Alors la covariance vérifie les propriétés suivantes :

- (1) Cov est bilinéaire symétrique.
- (2)  $\text{Cov}(X, X) = V(X)$ .
- (3)  $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ .
- (4)  $\text{Cov}(X, Y) \leq \sqrt{V(X)V(Y)}$ , avec égalité si et seulement si  $X$  et  $Y$  sont en relation affine.
- (5)  $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2 \text{Cov}(X, Y)$ .

#### 2.1.4. Concentration

**Définition 2.11.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  deux vecteurs aléatoires. Alors si  $\text{Cov}(X, Y) = 0$  on dit que  $X$  et  $Y$  sont *non corrélées*.

**Corollaire 2.12.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  deux vecteurs aléatoires. Alors si  $X$  et  $Y$  sont non-corrélées, on a  $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ .

**Définition 2.13.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $X_1, \dots, X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  des vecteurs aléatoires. On appelle *moyenne empirique* de  $X_1, \dots, X_n$ , notée  $\bar{X}_n$ , le vecteur aléatoire

$$\bar{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k.$$

**Proposition 2.14.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $X_1, \dots, X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  des vecteurs aléatoires. Alors l'espérance de  $\bar{X}_n$  est donnée par

$$\mathbb{E}[\bar{X}_n] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[X_k]$$

et sa variance par

$$V(\bar{X}_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n V(X_k)$$

**Proposition 2.15.** (Inégalité de Markov et de Bienaymé-Chebychev) Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une variable aléatoire.

- (1) Si  $X \geq 0$  presque sûrement, alors on a

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(X \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{\varepsilon}.$$

- (2) Si  $X$  est intégrable, alors on a

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

*Démonstration.*

- (1) Soit  $\varepsilon > 0$ , on remarque que l'on a toujours l'inégalité

$$\varepsilon \mathbb{1}_{\{X \geq \varepsilon\}} \leq X$$

par passage à l'espérance on trouve

$$\varepsilon \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X \geq \varepsilon\}}] \leq \mathbb{E}[X]$$

ce qui donne bien l'inégalité de Markov.

- (2) On applique l'inégalité de Markov à  $(X - \mathbb{E}[X])^2$ .

□

**Proposition 2.16.** (Inégalité de Jensen) Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé,  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une variable aléatoire intégrable et  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe bornée inférieurement. Alors

$$\varphi(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X)].$$

**Théorème 2.17.** (Inégalité de Hoeffding) Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $X_1, \dots, X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  des variables aléatoires indépendantes de sorte que pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ , il existe  $a_k, b_k \in \mathbb{R}$  tels que  $a_k \leq X_k \leq b_k$  presque sûrement. Si on note  $S_n := X_1 + \dots + X_n$ , alors

$$\forall t > 0, \max(\mathbb{P}(S_n - \mathbb{E}[S_n] \geq t), \mathbb{P}(S_n - \mathbb{E}[S_n] \leq -t)) < \exp\left(-\frac{t^2}{\sum_{k=1}^n (b_k - a_k)^2}\right).$$

## 2.2. Application au calcul de lois

### 2.2.1. Méthode de la fonction muette

**Proposition 2.18.** (Méthode) Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  un vecteur aléatoire de densité  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Alors pour toute fonction borélienne positive

$$\mathbb{E}[h(X)] = \int_{\mathbb{R}^d} h(x)f(x) d\lambda(x)$$

en particulier pour tout  $A \in \mathcal{F}$  en prenant  $h := \mathbb{1}_A$  on trouve

$$\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A(X)] = \int_A f(x) d\lambda(x).$$

ce qui montre que  $X$  est de densité  $f$ .

### 3. Indépendance

#### 3.1. Vecteurs aléatoires indépendants

**Définition 3.1.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $X_1, \dots, X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d_i}$  des vecteurs aléatoires. On dit que  $X_1, \dots, X_n$  sont *indépendants*, noté  $X_1 \perp \dots \perp X_n$ , si

$$\forall A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_1}) \times \dots \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_n}), \mathbb{P}(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \in A_i).$$

**Lemme 3.2.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé, et  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$  et  $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^q$  deux vecteurs aléatoires. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- (1)  $X$  et  $Y$  sont indépendants.
- (2)  $\mathbb{P}_{(X,Y)} = \mathbb{P}_X \otimes \mathbb{P}_Y$ .
- (3) Pour toutes fonctions boréliennes positives  $g$  et  $h$ ,  $\mathbb{E}[g(X)h(Y)] = \mathbb{E}[g(X)]\mathbb{E}[h(Y)]$

*Démonstration.*

(1)  $\Rightarrow$  (2) : Soit  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$  et  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^q)$ . Puisque  $X$  et  $Y$  sont indépendants on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{(X,Y)}(A \times B) &= \mathbb{P}((X, Y) \in A \times B) \\ &= \mathbb{P}(X \in A, Y \in B) \\ &= \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B) \\ &= \mathbb{P}_X(A)\mathbb{P}_Y(B) = (\mathbb{P}_X \otimes \mathbb{P}_Y)(A \times B) \end{aligned}$$

par unicité de la mesure produit  $\mathbb{P}_{(X,Y)} = \mathbb{P}_X \otimes \mathbb{P}_Y$ .

(2)  $\Rightarrow$  (3) : Soit  $g$  et  $h$  deux fonctions boréliennes positives. Alors par la formule de transfert, en posant  $\varphi : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}_+; (x, y) \mapsto g(x)h(y)$ , on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\varphi(X, Y)] &= \int_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q} \varphi(x, y) d\mathbb{P}_{(X,Y)}(x, y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q} g(x)h(y) d(\mathbb{P}_X \otimes \mathbb{P}_Y)(x, y) \end{aligned}$$

en appliquant Fubini, on trouve

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\varphi(X, Y)] &= \int_{\mathbb{R}^q} \int_{\mathbb{R}^p} g(x)h(y) d\mathbb{P}_X(x) d\mathbb{P}_Y(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^q} h(y) \int_{\mathbb{R}^p} g(x) d\mathbb{P}_X(x) d\mathbb{P}_Y(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^p} g(x) d\mathbb{P}_X(x) \int_{\mathbb{R}^q} h(y) d\mathbb{P}_Y(y) \\ &= \mathbb{E}[g(X)]\mathbb{E}[h(Y)]. \end{aligned}$$

(3)  $\Rightarrow$  (1) : Soit  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$  et  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^q)$ . Il suffit de prendre  $g := \mathbb{1}_A$  et  $h := \mathbb{1}_B$  pour obtenir l'indépendance.  $\square$

**Proposition 3.3.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé.

- (1) Soit  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$  et  $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^q$  deux vecteurs aléatoires indépendants. Alors pour toutes fonctions boréliennes  $f$  et  $g$ ,  $f(X)$  et  $g(Y)$  sont indépendants.
- (2) Soit  $X_1, \dots, X_m : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d_i}$  des vecteurs aléatoires indépendants. Alors pour tout  $1 \leq n < m$ ,  $(X_1, \dots, X_n)$  et  $(X_{n+1}, \dots, X_m)$  sont indépendants.

*Démonstration.*

- (1) Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions boréliennes. Alors il suffit d'appliquer le point (3) du **Lemme 3.2** aux compositions de  $f$  et  $g$  avec des fonctions boréliennes positives pour obtenir l'indépendance de  $f(X)$  et  $g(Y)$ .
- (2) Soit  $1 \leq n < m$ . Alors il suffit d'appliquer le point (2) du **Lemme 3.2** pour obtenir l'indépendance de  $(X_1, \dots, X_n)$  et  $(X_{n+1}, \dots, X_m)$ .

□

### 3.1.1. Critère d'indépendance pour des vecteurs discrets

**Proposition 3.4.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé, et  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$  et  $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^q$  deux vecteurs aléatoires discrets. Alors s'ils existent des fonctions  $f : \mathcal{V}_X \rightarrow \mathbb{R}_+$  et  $g : \mathcal{V}_Y \rightarrow \mathbb{R}_+$  telles que

$$\forall (x, y) \in \mathcal{V}_X \times \mathcal{V}_Y, \mathbb{P}(X = x, Y = y) = f(x)g(y)$$

alors  $X$  et  $Y$  sont indépendants, et il existe  $c > 0$  tel que

$$\mathbb{P}_X(\{x\}) = cf(x) \text{ et } \mathbb{P}_Y(\{y\}) = \frac{1}{c}g(y).$$

*Démonstration.* Soit  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$  et  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^q)$  alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \in A, Y \in B) &= \sum_{x \in \mathcal{V}_X \cap A} \sum_{y \in \mathcal{V}_Y \cap B} \mathbb{P}(X = x, Y = y) \\ &= \sum_{x \in \mathcal{V}_X \cap A} \sum_{y \in \mathcal{V}_Y \cap B} f(x)g(y) \\ &= \sum_{x \in \mathcal{V}_X \cap A} f(x) \sum_{y \in \mathcal{V}_Y \cap B} g(y) \end{aligned}$$

en particulier si on pose  $B := \mathbb{R}^q$  et  $c := \sum_{y \in \mathcal{V}_Y \cap B} g(y)$ , on trouve

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A, Y \in \mathbb{R}^q) = c \sum_{x \in \mathcal{V}_X \cap A} f(x)$$

d'où pour tout  $x \in \mathcal{V}_X$ ,  $\mathbb{P}_X(\{x\}) = cf(x)$ . On fait la même chose avec  $A := \mathbb{R}^p$  et  $d := \sum_{x \in \mathcal{V}_X \cap A} f(x)$ . Mais  $\mathbb{P}(X \in \mathbb{R}^p, Y \in \mathbb{R}^q) = c \times d = 1$ , donc  $d = \frac{1}{c}$ . Enfin

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \in A, Y \in B) &= \sum_{x \in \mathcal{V}_X \cap A} \mathbb{P}(X = x) \sum_{y \in \mathcal{V}_Y \cap B} \mathbb{P}(Y = y) \\ &= \mathbb{P}(X \in A) \mathbb{P}(Y \in B) \end{aligned}$$

donc  $X$  et  $Y$  sont indépendants.

□

### 3.1.2. Critère d'indépendance pour des vecteurs à densité

**Proposition 3.5.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé, et  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$  et  $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^q$  deux vecteurs aléatoires à densités respectives  $f_X$  et  $f_Y$ .

- (1) Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes. Alors le vecteur  $(X, Y)$  admet une densité  $f$  vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

- (2) Si  $(X, Y)$  admet une densité  $f$  de la forme :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, f(x, y) = g(x)h(y)$$

où  $g$  et  $h$  sont boréliennes. Alors  $X$  et  $Y$  sont indépendantes et il existe  $c > 0$  tel que

$$f_X = cg \text{ et } f_Y = ch.$$

*Démonstration.*

- (1) Supposons que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes. Soit  $\varphi : \mathbb{R}^{p+q} \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction borélienne, alors par la formule de transfert

$$\mathbb{E}[\varphi(X, Y)] = \int_{\mathbb{R}^{p+q}} \varphi(x, y) d\mathbb{P}_{(X, Y)}(x, y)$$

puisque  $X$  et  $Y$  sont indépendantes on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\varphi(X, Y)] &= \int_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q} \varphi(x, y) d\mathbb{P}_X(x) \otimes \mathbb{P}_Y(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^q} \int_{\mathbb{R}^p} \varphi(x, y) d\mathbb{P}_X(x) d\mathbb{P}_Y(y) \end{aligned}$$

et puisque  $X$  et  $Y$  admettent des densités

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\varphi(X, Y)] &= \int_{\mathbb{R}^q} \int_{\mathbb{R}^p} \varphi(x, y) f_X(x) d\lambda(x) f_Y(y) d\lambda(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{p+q}} \varphi(x, y) f_X(x) f_Y(y) d\lambda(x, y). \end{aligned}$$

Donc  $(X, Y)$  admet bien une densité  $(x, y) \mapsto f_X(x) f_Y(y)$ .

- (2) La réciproque se montre une nouvelle fois en appliquant le théorème de Fubini

□

## 3.2. Somme de variables aléatoires indépendantes

### 3.2.1. Cas de variables aléatoires discrètes

**Proposition 3.6.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé, et  $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$  deux variables aléatoires discrètes indépendantes à valeurs entières. On pose  $S := X + Y$ . Alors on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(S = n) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y = n - k)$$

### 3.2.2. Cas de variables aléatoires à densité

**Proposition 3.7.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé, et  $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  deux variables aléatoires à densités respectives  $f_X$  et  $f_Y$ . On pose  $S := X + Y$ . Alors la densité de  $S$  est donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) := \int_{\mathbb{R}} f_X(x) f_Y(t - x) d\lambda(x).$$

## 3.3. Familles d'événements et de variables indépendantes

**Définition 3.8.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé.

- (1) Soit  $(X_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R})_{i \in I}$  une famille de variables aléatoires. On dit que la famille est *indépendante* si les variables de tout sous-ensemble fini sont indépendantes.
- (2) Soit  $(A_i)_{i \in I}$  une famille d'événements. On dit que la famille est *indépendante* si la famille de variables aléatoires  $(\mathbb{1}_{A_i})_{i \in I}$  est indépendante.

**Lemme 3.9.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $(A_i)_{i \in I}$  une famille d'événements. Alors la famille est indépendante si et seulement si pour tout sous-ensemble  $J$  de  $I$  fini, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{i \in J} \mathbb{P}(A_j).$$

**Théorème 3.10.** (Premier lemme de Borel-Cantelli) Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'événements. Si la série  $\sum \mathbb{P}(A_n)$  converge, alors  $\mathbb{P}(\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n) = 0$ .

*Démonstration.* Puisque la suite  $(U_{k \geq n}(A_k))_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante, on a

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k \geq n} \mathbb{P}(A_k) = 0.$$

□

**Théorème 3.11.** (Second lemme de Borel-Cantelli) Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'événements indépendants. Si la série  $\sum \mathbb{P}(A_n)$  diverge, alors  $\mathbb{P}(\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n) = 1$ .

*Démonstration.* Puisque la suite  $(U_{k \geq n}(A_k))_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante, on a

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right)$$

mais pour tout  $n, m \in \mathbb{N}$  avec  $n \geq m$ , puisque  $A_n, A_{n+1}, \dots, A_m$  sont indépendants, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^m A_k\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^m A_k^c\right) = 1 - \prod_{k=n}^m \mathbb{P}(A_k^c) = 1 - \prod_{k=n}^m (1 - \mathbb{P}(A_k))$$

en utilisant l'inégalité  $\forall x \in \mathbb{R}, 1 - x \leq e^{-x}$ , on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^m A_k\right) \geq 1 - \prod_{k=n}^m e^{-\mathbb{P}(A_k)} = 1 - e^{-\sum_{k=n}^m \mathbb{P}(A_k)} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 1.$$

□

## 4. Convergence de suites de variables aléatoires

### 4.1. Convergence en loi

**Définition 4.1.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F})$  un espace probabilisable,  $(X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de vecteurs aléatoires et  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  un vecteur aléatoire. On dit que la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge en loi vers  $X$  si pour toute fonction  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  continue et bornée, on a

$$\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[f(X)].$$

**Théorème 4.2.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F})$  un espace probabilisable,  $(X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de vecteurs aléatoires et  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  un vecteur aléatoire. Alors la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge en loi vers  $X$  si et seulement si pour tout  $t \in \mathbb{R}$  tels que  $\lim_{x \rightarrow t-} F_X(x) = F_X(t)$ , on a

$$F_{X_n}(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} F_X(t).$$

**Remarque 4.3.** On peut caractériser la convergence en loi par la fonction de répartition.

**Théorème 4.4.** (Théorème de Portemanteau) Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé,  $M$  un espace métrique,  $(X_n : \Omega \rightarrow M)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de vecteurs aléatoires et  $X : \Omega \rightarrow M$  un vecteur aléatoire. Alors les énoncés suivants sont équivalents :

- (1)  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge en loi vers  $X$ .
- (2) Pour toute fonction  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uniformément continue et bornée, on a

$$\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[f(X)].$$

- (3) Pour tout fermé  $F \in M$ , on a

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n \in F) \leq \mathbb{P}(X \in F).$$

- (4) Pour tout ouvert  $O \in M$ , on a

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n \in O) \geq \mathbb{P}(X \in O).$$

- (5) Pour tout  $A \in M$  tel que  $\mathbb{P}(X \in \partial A) = 0$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n \in A) = \mathbb{P}(X \in A).$$

*Démonstration.*

(1)  $\Rightarrow$  (2) : Soit  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction uniformément continue et bornée. Alors en particulier  $f$  est continue et bornée et on a bien

$$\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[f(X)].$$

(2)  $\Rightarrow$  (3) : Soit  $F \in M$  un fermé. On pose la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Pour tout  $k \geq 1$ , on pose  $F_k := \{x \in M \mid d(x, F) \leq \frac{1}{k}\}$  et  $f_k : M \rightarrow [0, 1]; x \mapsto f(kd(x, F))$  qui vaut :

$$\forall x \in M, f_k(x) = \begin{cases} 1 - kd(x, F) & \text{si } x \in F_k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On remarque que pour tout  $x \in M$ , on a



$$\mathbb{1}_F(x) \leq f_k(x) \leq \mathbb{1}_{F_k}(x)$$

par passage à l'espérance et à la limite, on obtient

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n \in F) \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[f_k(X_n)]$$

puisque  $f_k$  est uniformément continue et bornée, on a

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n \in F) \leq \mathbb{E}[f_k(X)] \leq \mathbb{P}(X \in F_k)$$

puisque la suite  $(F_k)_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$  est décroissante et que les  $F_k$  sont fermés, par passage à la limite et continuité de la mesure, on a

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n \in F) \leq \mathbb{P}(X \in F).$$

(3)  $\Rightarrow$  (4) : Passage au complémentaire.

(3) + (4)  $\Rightarrow$  (5) :  $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n \in A) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n \in A) = \mathbb{P}(X \in A)$ .

(5)  $\Rightarrow$  (1) : Soit  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et bornée. Alors

$$\mathbb{E}[f(X_n)] = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}(f(X_n) > x) dx = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}(X_n \in f^{-1}(]x, +\infty[)) dx$$

et par passage à la limite, on a

$$\mathbb{E}[f(X)] = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}(f(X) > x) dx = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}(X \in f^{-1}(]x, +\infty[)) dx$$

mais puisque  $f$  est continue, on a  $\partial f^{-1}(]x, +\infty[) = f^{-1}(\{x\})$  et on a

$$\sum_{x \in \mathbb{R}} \mathbb{P}(X \in \partial f^{-1}(]x, +\infty[)) = \sum_{x \in \mathbb{R}} \mathbb{P}(X \in f^{-1}(x)) < +\infty$$

donc  $\{x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}(X \in \partial f^{-1}(]x, +\infty[)) > 0\}$  est dénombrable et on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n \in f^{-1}(]x, +\infty[)) = \mathbb{P}(X \in f^{-1}(]x, +\infty[))$$

enfin par convergence dominée  $\mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}[f(X)]$ . □

**Lemme 4.5.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé,  $(X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de vecteurs aléatoires qui converge en loi vers une constante  $a \in \mathbb{R}^d$ . Alors

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n \in B(a, \varepsilon)) = 1.$$

*Démonstration.* Soit  $\varepsilon > 0$ . Puisque  $B(a, \varepsilon)$  est ouvert, d'après la propriété (4) du [Théorème 4.4](#) on a

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n \in B(a, \varepsilon)) \geq \mathbb{P}(a \in B(a, \varepsilon)) = 1.$$

□

**Lemme 4.6.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F})$  un espace probabilisable,  $(X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(Y_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites de vecteurs aléatoires qui convergent en loi respectivement vers un vecteur aléatoire  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  et une constante  $a \in \mathbb{R}^d$ . Alors la suite  $((X_n, a))_{n \in \mathbb{N}}$  converge en loi vers  $(X, a)$ .

## 4.2. Convergence en probabilité

**Définition 4.7.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé,  $(X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de vecteurs aléatoires et  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  un vecteur aléatoire. On dit que la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  *converge en probabilité* vers  $X$  si pour tout  $\varepsilon > 0$ , elle vérifie :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0.$$

**Proposition 4.8.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé,  $(X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de vecteurs aléatoires,  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  et  $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  deux vecteurs aléatoires. Si  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $X$  et  $Y$  en probabilité, alors  $X = Y$  presque sûrement.

### 4.2.1. Stabilité de la convergence en probabilité

**Définition 4.9.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $(X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de vecteurs aléatoires. On dit que  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est *tendue* si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un compact  $K \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X_n \in K) \geq 1 - \varepsilon.$$

**Lemme 4.10.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé,  $(X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de vecteurs aléatoires et  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  un vecteur aléatoire. Si  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $X$  en loi et  $X$  est presque sûrement fini, alors  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est tendue.

**Proposition 4.11.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé,  $(X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(Y_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites de vecteurs aléatoires qui convergent en probabilité respectivement vers deux vecteurs aléatoires  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  et  $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ . Alors pour toute fonction  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  continue, on a que  $(\varphi(X_n, Y_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\varphi(X, Y)$  en probabilité. En particulier :

- (1) Pour tout  $a, b \in \mathbb{R}$ , on a que  $(aX_n + bY_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $aX + bY$  en probabilité.
- (2) Pour toute fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue, on a que  $(f(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $f(X)$  en probabilité.
- (3)  $(X_n Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $XY$  en probabilité.

**Proposition 4.12.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé,  $(X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de vecteurs aléatoires et  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  un vecteur aléatoire. Si  $X$  est presque sûrement fini :

- Si  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge en probabilité vers  $X$ , alors  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge en loi vers  $X$ .
- Si  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge en loi vers  $X$  qui est constante, alors  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge en probabilité vers  $X$ .

*Démonstration.* Soit  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction uniformément continue et bornée. Alors :

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, & \mathbb{E}[f(X_n) - f(X)] \leq \mathbb{E}[|f(X_n) - f(X)|] \\ &= \mathbb{E}[|f(X_n) - f(X)| \mathbb{1}_{\{|X_n - X| \leq \eta\}}] \\ &\quad + \mathbb{E}[|f(X_n) - f(X)| \mathbb{1}_{\{|X_n - X| > \eta\}}] \\ &\leq \varepsilon + 2\|f\|_{\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \eta) \end{aligned}$$

par passage à la limite, on en déduit :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[f(X_n) - f(X)] \leq \varepsilon$$

donc  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge en loi vers  $X$ . □

### 4.3. Convergence presque sûre

**Définition 4.13.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $(X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de vecteurs aléatoires et  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  un vecteur aléatoire. On dit que la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge *presque sûrement* vers  $X$  si elle vérifie :

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = X\right) = 1.$$

**Lemme 4.14.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $(X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de vecteurs aléatoires. Alors  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge presque sûrement vers 0 si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} \{|X_n| > \varepsilon\}\right) = 0.$$

**Corollaire 4.15.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $(X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de vecteurs aléatoires. Alors  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge presque sûrement vers 0 si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

- (1)  $\forall \varepsilon > 0, \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) < +\infty.$
- (2)  $\exists \alpha > 0, \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}[|X_n|^\alpha] < +\infty.$

*Démonstration.*

- (1) Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on peut écrire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{|X_n| > \varepsilon\}}] < +\infty$$

d'après le théorème de convergence monotone, on peut intervertir somme et intégrale :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) = \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{|X_n| > \varepsilon\}}\right] < +\infty$$

en particulier, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{|X_n| > \varepsilon\}} < +\infty \Rightarrow \mathbb{1}_{\{|X_n| > \varepsilon\}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow \mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} \{|X_n| > \varepsilon\}\right) = 0$$

donc  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge presque sûrement vers 0.

- (2) De la même manière on peut intervertir somme et intégrale.

□

**Proposition 4.16.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé,  $(X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de vecteurs aléatoires et  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  un vecteur aléatoire. Si  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge presque sûrement vers  $X$ , alors  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge en probabilité vers  $X$ .

*Démonstration.* Soit  $\varepsilon > 0$ . Alors puisque  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge presque sûrement vers  $X$ , on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k \geq n} |X_k - X| > \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} \{|X_n - X| > \varepsilon\}\right) = 0$$

donc  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge en probabilité vers  $X$ .

□

**Proposition 4.17.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé,  $(X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de vecteurs aléatoires et  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  un vecteur aléatoire. Si  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge en probabilité vers  $X$ , alors il existe une suite extraite de  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge presque sûrement vers  $X$ .

*Démonstration.* Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Puisque  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge en probabilité, il existe  $n_k \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\mathbb{P}\left(|X_{n_k} - X| > \frac{1}{k+1}\right) \leq \frac{1}{2^k}$$

par passage à la somme, en s'assurant que la suite  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante, on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(|X_{n_k} - X| > \frac{1}{k+1}\right) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} < +\infty$$

donc  $(X_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  converge presque sûrement vers  $X$ . □

## 4.4. Loi des grands nombres

### 4.4.1. Loi faible des grands nombres

**Théorème 4.18.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé,  $(X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de vecteurs aléatoires  $\mathcal{L}^1$  indépendants et de même loi d'espérance  $m$ . Alors la suite des moyennes empiriques  $(\bar{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $m$  dans  $\mathcal{L}^1$ , c'est-à-dire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[|\bar{X}_n - m|] = 0$$

en particulier  $(\bar{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge en probabilité vers  $m$ .

### 4.4.2. Loi forte des grands nombres

**Théorème 4.19.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé,  $(X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de vecteurs aléatoires  $\mathcal{L}^1$  indépendants et de même loi d'espérance  $m$ . Alors la suite des moyennes empiriques  $(\bar{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge presque sûrement vers  $m$ .

## 5. Fonction caractéristique

### 5.1. Propriétés élémentaires

**Définition 5.1.** Soit  $\mathbb{P}$  une mesure de probabilité sur  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ . On appelle *fonction caractéristique* de  $\mathbb{P}$  la fonction  $\hat{\mathbb{P}} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, \hat{\mathbb{P}}(t) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t, x \rangle} d\mathbb{P}(x).$$

**Proposition 5.2.** Soit  $\mathbb{P}$  une mesure de probabilité sur  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ . Alors on a :

- (1)  $\hat{\mathbb{P}}(0) = 1$ ,
- (2)  $\forall t \in \mathbb{R}^d, |\hat{\mathbb{P}}(t)| \leq 1$ .

**Proposition 5.3.** La mesure gaussienne sur  $\mathbb{R}$  a pour fonction caractéristique  $t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$ .

*Démonstration.* Notons  $\nu$  la mesure gaussienne de densité  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ . Alors pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\hat{\nu}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(tx) e^{-\frac{x^2}{2}} dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(tx) e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right)$$

puisque  $x \mapsto \sin(tx) e^{-\frac{x^2}{2}}$  est impaire, on obtient :

$$\hat{\nu}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(tx) e^{-\frac{x^2}{2}} dx \in \mathbb{R}$$

en remarquant que  $\hat{\nu}$  est réelle et solution de l'équation différentielle  $y' + ty = 0$ , on trouve :

$$\hat{\nu}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

□

### 5.2. Application aux vecteurs aléatoires

**Définition 5.4.** Soit  $X$  un vecteur aléatoire sur  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mathbb{P})$ . On appelle *fonction caractéristique associée à  $X$* , notée  $\varphi_X$ , la fonction caractéristique de  $\mathbb{P}_X$ , c'est-à-dire :

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, \varphi_X(t) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t, x \rangle} d\mathbb{P}_X(x) = \mathbb{E}[e^{i\langle t, X \rangle}].$$

#### 5.2.1. Somme de variables aléatoires indépendantes

**Proposition 5.5.** Soit  $X_1, \dots, X_n$  des vecteurs aléatoires indépendants sur  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mathbb{P})$ . Alors la fonction caractéristique de leur somme  $S := X_1 + \dots + X_n$  est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, \varphi_S(t) := \prod_{k=1}^n \varphi_{X_k}(t).$$

*Démonstration.* Soit  $t \in \mathbb{R}^d$ . Alors on a :

$$e^{i\langle t, S \rangle} = e^{i\langle t, X_1 \rangle + \dots + i\langle t, X_n \rangle} = \prod_{k=1}^n e^{i\langle t, X_k \rangle}$$

par passage à l'espérance, on a donc :

$$\varphi_S(t) = \mathbb{E} \left[ \prod_{k=1}^n e^{i\langle t, X_k \rangle} \right] = \prod_{k=1}^n \mathbb{E} [e^{i\langle t, X_k \rangle}] = \prod_{k=1}^n \varphi_{X_k}(t)$$

□

### 5.2.2. Fonction caractéristique et moments

**Proposition 5.6.** Soit  $X$  une variable aléatoire  $\mathcal{L}^p$ . Alors la fonction caractéristique de  $X$  est  $p$ -fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $k \in \{0, \dots, p\}$ , on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi_X^{(k)}(t) := i^k \mathbb{E}[X^k e^{itX}]$$

en particulier  $\varphi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}[X^k]$ .

### 5.3. Théorème d'injectivité

**Théorème 5.7.** Soit  $\mu$  et  $\nu$  deux mesures de probabilité sur  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ . Si pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a  $\hat{\mu}(t) = \hat{\nu}(t)$ , alors  $\mu = \nu$ .

### 5.4. Théorème d'inversion

**Théorème 5.8.** Soit  $\mu$  une mesure de probabilité sur  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ . Si la fonction caractéristique de  $\mu$  est  $\mathcal{L}^1$ , alors  $\mu$  admet une densité  $f$  donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, f(x) := \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle t, x \rangle} \hat{\mu}(t) dt.$$