

# Algèbre linéaire et bilinéaire

## Table des matières

<b>1. Rappels d'algèbre linéaire</b>	<b>2</b>
1.1. Espaces vectoriels . . . . .	2
1.2. Famille libre, famille génératrice et bases . . . . .	2
1.3. Applications linéaires . . . . .	3
1.4. Matrice d'une application linéaire . . . . .	4
1.5. Déterminant d'une matrice . . . . .	4
<b>2. Diagonalisation</b>	<b>5</b>
<b>3. Polynôme caractéristique</b>	<b>5</b>
<b>4. Trigonalisation</b>	<b>6</b>
<b>5. Polynôme d'endomorphisme</b>	<b>6</b>
5.1. Décomposition des noyaux . . . . .	6
5.2. Théorème de Cayley-Hamilton . . . . .	7
5.3. Polynôme minimal . . . . .	7
<b>6. Réduction d'endomorphisme</b>	<b>7</b>
6.1. Décomposition de Dunford . . . . .	7
6.2. Réduction de Jordan . . . . .	8
<b>7. Formes bilinéaires</b>	<b>9</b>
7.1. Ecriture dans une base . . . . .	9
7.2. Dualité . . . . .	9
7.3. Forme bilinéaire symétrique et forme quadratique . . . . .	9
7.4. Forme quadratique définie . . . . .	10
7.5. Réduction d'une forme quadratique . . . . .	10
7.6. Invariants d'une forme quadratique . . . . .	11
<b>8. Espaces euclidiens</b>	<b>12</b>
8.1. Norme d'un vecteur . . . . .	12
8.2. Orthogonalité, base orthogonale et base orthonormée . . . . .	12
8.3. Le groupe orthogonal . . . . .	13
8.4. Polynômes orthogonaux . . . . .	14
8.5. Endomorphismes symétriques . . . . .	15

# 1. Rappels d'algèbre linéaire

## 1.1. Espaces vectoriels

**Définition 1.1.** Soit  $\mathbb{K}$  un corps commutatif. On appelle *espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$* , ou  $\mathbb{K}$ -*espace vectoriel*, un ensemble  $E$  muni de deux lois

- une loi de composition interne  $+$  :  $E \times E \rightarrow E$ , telle que le couple  $(E, +)$  forme un groupe commutatif,
- et d'une loi de composition externe  $\cdot$  :  $\mathbb{K} \times E \rightarrow E$ , vérifiant les propriétés suivantes
  1. la loi  $\cdot$  est distributive à droite,  $\forall a, b \in \mathbb{K}, \forall x \in E, (a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$ ,
  2. la loi  $\cdot$  est distributive à gauche,  $\forall a \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E, a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$ ,
  3. la loi  $\cdot$  est associative mixte,  $\forall a, b \in \mathbb{K}, \forall x \in E, a \cdot (b \cdot x) = (ab) \cdot x$ ,
  4. le neutre de  $\mathbb{K}$  est neutre à gauche pour  $\cdot$ ,  $\forall x \in E, 1 \cdot x = x$ .

**Définition 1.2.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $F$  un sous-ensemble de  $E$ . On dit que  $F$  est un *sous-espace vectoriel de  $E$* , s'il est non-vide et stable par combinaisons linéaires.

**Proposition 1.3.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . Alors  $F \cap G$  est un sous-espace vectoriel.

**Définition 1.4.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . On définit la somme de  $F$  et  $G$  par

$$F + G := \{x + y \mid x \in F, y \in G\}.$$

**Proposition 1.5.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . Alors  $F + G$  est un sous-espace vectoriel.

**Définition 1.6.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $x_1, \dots, x_n \in E$ . On appelle *sous-espace vectoriel engendré par  $x_1, \dots, x_n$* , l'ensemble des combinaisons linéaires de  $x_1, \dots, x_n$ , noté

$$\text{Vect}(x_1, \dots, x_n) := \{a_1 \cdot x_1 + \dots + a_n \cdot x_n \mid a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}\}.$$

**Définition 1.7.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $(E_k)_{1 \leq k \leq n}$  une famille de sous-espaces vectoriels de  $E$ . On dit qu'ils sont en *somme directe* si

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n, \sum_{k=1}^n x_k = 0 \Rightarrow \forall 1 \leq k \leq n, x_k = 0$$

dans ce cas, on notera  $E_1 \oplus \dots \oplus E_n := E_1 + \dots + E_n$ .

**Remarque 1.8.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . Alors  $F$  et  $G$  sont en somme directe si  $F \cap G = \{0\}$ .

## 1.2. Famille libre, famille génératrice et bases

**Définition 1.9.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $x_1, \dots, x_n \in E$ . On dit que  $(x_1, \dots, x_n)$  est une *famille libre* si les droites  $(\mathbb{K}x_k)_{1 \leq k \leq n}$  sont en somme directe, c'est-à-dire

$$\forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}, a_1 \cdot x_1 + \dots + a_n \cdot x_n = 0 \Rightarrow \forall 1 \leq k \leq n, a_k = 0.$$

**Définition 1.10.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $x_1, \dots, x_n \in E$ . On dit que  $(x_1, \dots, x_n)$  est une *famille génératrice* si  $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n) = E$ , c'est-à-dire

$$\forall x \in E, \exists a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}, a_1 \cdot x_1 + \dots + a_n \cdot x_n = x.$$

**Définition 1.11.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $x_1, \dots, x_n \in E$ . On dit que  $(x_1, \dots, x_n)$  est une *base* si elle est libre et génératrice, c'est-à-dire

$$\forall x \in E, \exists ! a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}, a_1 \cdot x_1 + \dots + a_n \cdot x_n = x.$$

**Théorème 1.12.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et  $(x_1, \dots, x_n)$  et  $(x_1, \dots, x_m)$  deux bases de  $E$ . Alors elles ont le même nombre d'éléments  $n = m$ .

**Définition 1.13.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On appelle *dimension de  $E$* , notée  $\dim(E)$ , le nombre d'éléments dans une base de  $E$ .

**Théorème 1.14.** (de la base incomplète) Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $(x_1, \dots, x_m)$  une famille libre de  $E$ . Alors il existe  $x_{m+1}, \dots, x_n \in E$ , tels que  $(x_1, \dots, x_n)$  soit une base de  $E$ .

**Proposition 1.15.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  une famille d'éléments de  $E$ . Alors les énoncés suivants sont équivalents

1.  $\mathcal{E}$  est une base de  $E$ ,
2.  $\mathcal{E}$  est une famille libre de  $E$ ,
3.  $\mathcal{E}$  est une famille génératrice de  $E$ .

**Théorème 1.16.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . Alors

$$\dim(F) + \dim(G) = \dim(F + G) + \dim(F \cap G).$$

**Notation 1.17.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $x \in E$ , et  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  et  $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$  deux bases de  $E$ .

- On note  $[x]_{\mathcal{E}}$  les coordonnées de  $x$  dans la base  $\mathcal{E}$ .
- On note  $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} := ([f_1]_{\mathcal{E}} \dots [f_n]_{\mathcal{E}})$  la matrice de passage de la base  $\mathcal{E}$  à la base  $\mathcal{F}$ .

Alors les coordonnées de  $x$  dans les bases  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$  sont liées par

$$[x]_{\mathcal{E}} = \mathcal{P}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} [x]_{\mathcal{F}}$$

ce qui entraîne

$$\mathcal{P}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} = (\mathcal{P}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}})^{-1}.$$

### 1.3. Applications linéaires

**Définition 1.18.** Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, et  $u : E \rightarrow F$  une application. On dit que  $u$  est *linéaire*, si elle vérifie

$$\forall a, b \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E, u(a \cdot x + b \cdot y) = a \cdot u(x) + b \cdot u(y).$$

Si  $E = F$ , on dit que  $u$  est un *endomorphisme*.

**Notation 1.19.** Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. On note  $\mathcal{L}(E, F)$  l'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $F$ . Si  $E = F$ , on note  $\mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(E, E)$ .

**Définition 1.20.** Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, et  $u : E \rightarrow F$  une application linéaire.

- On appelle *image* de  $u$  l'ensemble  $\text{im}(u) := \{u(x) \mid x \in E\}$ .
- On appelle *noyau* de  $u$  l'ensemble  $\ker(u) := \{x \in E \mid u(x) = 0\}$ .

**Proposition 1.21.** Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, et  $u : E \rightarrow F$  une application linéaire. Alors  $\ker(u)$  et  $\text{im}(u)$  sont des espaces vectoriels.

**Définition 1.22.** Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, et  $u : E \rightarrow F$  une application linéaire. On appelle *rang* de  $u$ , noté  $\text{rg}(u)$ , la dimension de  $\text{im}(u)$ .

**Théorème 1.23.** (du rang) Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, et  $u : E \rightarrow F$  une application linéaire. Alors

$$\dim(E) = \dim(\text{im}(u)) + \dim(\ker(u)).$$

**Corollaire 1.24.** Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, et  $u : E \rightarrow F$  une application linéaire. Alors les énoncés suivants sont équivalents

1.  $u$  est bijective,
2.  $u$  est injective,
3.  $u$  est surjective.

## 1.4. Matrice d'une application linéaire

**Définition 1.25.** Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels,  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et  $\mathcal{F}$  une base de  $F$ , et  $u : E \rightarrow F$  une application linéaire. On appelle *matrice de  $u$*  dans les bases  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$ , la matrice

$$[u]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} := ([u(e_1)]_{\mathcal{F}} \cdots [u(e_n)]_{\mathcal{F}}).$$

Si  $E = F$ , on notera  $[u]_{\mathcal{E}} := [u]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$ , et on remarque  $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = [\text{id}]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$ .

**Proposition 1.26.** Soit  $E, F$  et  $G$  trois  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels,  $\mathcal{E}, \mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  des bases respectives de  $E, F$  et  $G$ , et  $u : E \rightarrow F$  et  $v : F \rightarrow G$  deux applications linéaires. Alors

$$[v \circ u]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{G}} = [v]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{G}} [u]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}.$$

**Corollaire 1.27.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$  deux bases de  $E$ , et  $u : E \rightarrow E$  un endomorphisme sur  $E$ . Alors

$$[u]_{\mathcal{F}} = \mathcal{P}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} [u]_{\mathcal{E}} \mathcal{P}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}.$$

## 1.5. Déterminant d'une matrice

**Définition 1.28.** Soit  $M$  une matrice carrée de taille  $n$ . On appelle *déterminant* de  $M$ , le nombre

$$\det(M) := \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) m_{1, \sigma(1)} \cdots m_{n, \sigma(n)}.$$

**Proposition 1.29.** Soit  $A$  et  $B$  deux matrices carrées de même taille. Alors

$$\det(AB) = \det(A) \det(B).$$

**Corollaire 1.30.** Soit  $P$  une matrice inversible. Alors

$$\det(P^{-1}) = \det(P)^{-1}$$

et si  $M$  est une matrice carrée de même taille, on a

$$\det(P^{-1}AP) = \det(A).$$

**Corollaire 1.31.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$  deux bases de  $E$ , et  $u : E \rightarrow E$  un endomorphisme sur  $E$ . Alors

$$\det([u]_{\mathcal{E}}) = \det([u]_{\mathcal{F}}).$$

**Définition 1.32.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $u : E \rightarrow E$  un endomorphisme sur  $E$ . On appelle *déterminant* de  $u$ , noté  $\det(u)$ , le déterminant de la matrice de  $u$  dans une base de  $E$ .

**Proposition 1.33.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $u : E \rightarrow E$  un endomorphisme sur  $E$ . Alors  $u$  est inversible si et seulement si son déterminant est non-nul.

**Proposition 1.34.** Soit  $M$  une matrice carrée de la forme

$$\left( \begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array} \right)$$

où  $A$  et  $B$  sont des blocs carrés. Alors

$$\det(M) = \det(A) \det(B).$$

## 2. Diagonalisation

**Définition 2.1.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme. On dit que  $F$  est *stable* par  $u$  si  $u(F) \subset F$ , dans ce cas on note  $u_F := u|_F \in \mathcal{L}(F)$  l'endomorphisme induit.

**Définition 2.2.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme et  $\lambda \in \mathbb{K}$ . On dit que  $\lambda$  est une *valeur propre* de  $u$  s'il existe  $x \in E \setminus \{0\}$  tel que  $u(x) = \lambda x$ , on dit que  $x$  est un *vecteur propre* associé à  $\lambda$ .

**Définition 2.3.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme et  $\lambda \in \mathbb{K}$  une valeur propre de  $u$ . On appelle *espace propre* associé à  $\lambda$ , l'ensemble

$$E_\lambda(u) := \ker(u - \lambda \text{id}).$$

**Théorème 2.4.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme. Alors les espaces propres de  $u$  sont en somme directe.

**Corollaire 2.5.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme. Alors  $u$  a au plus  $n$  valeurs propres.

**Définition 2.6.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme. On appelle *spectre* de  $u$ , noté  $\text{Sp}(u)$ , l'ensemble des valeurs propres de

**Définition 2.7.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme. On dit que  $u$  est *diagonalisable* si  $E$  est la somme directe des espaces propres de  $u$ .

**Proposition 2.8.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme. Alors  $u$  est diagonalisable si et seulement si il existe une base  $\mathcal{E}$  de  $E$  telle que  $[u]_{\mathcal{E}}$  est diagonale.

**Théorème 2.9.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme. Alors si  $u$  admet  $n$  valeurs propres distinctes,  $u$  est diagonalisable.

**Définition 2.10.** Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice carrée. On étend toutes les définitions précédentes à  $M$  en l'associant à  $u_M : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n, X \mapsto MX$ .

## 3. Polynôme caractéristique

**Définition 3.1.** Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice carrée. On appelle *polynôme caractéristique*, le polynôme  $\chi_M := \det(XI_n - M)$ .

**Lemme 3.2.** Soit  $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  deux matrices carrées. Alors si  $M$  et  $N$  sont semblables, elles ont le même polynôme caractéristique.

**Définition 3.3.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme. On étend la définition de *polynôme caractéristique* en lui associant la matrice de  $u$  dans une base de  $E$ .

**Proposition 3.4.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme, et  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Alors  $\lambda$  est une valeur propre de  $u$  si et seulement si  $\chi_u(\lambda) = 0$ .

**Proposition 3.5.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme. Alors si  $F$  est stable par  $u$ , le polynôme  $\chi_{u_F}$  divise  $\chi_u$ .

**Proposition 3.6.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme nilpotent. Alors  $\chi_u = X^n$ .

**Théorème 3.7.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme. Alors  $u$  est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé et si la multiplicité de chaque valeur propre en tant que racine est égale à la dimension de son espace propre associé, c'est-à-dire

$$\chi_u = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)^{\dim(E_\lambda(u))}.$$

## 4. Trigonalisation

**Définition 4.1.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme. On dit que  $u$  est *trigonalisable* s'il existe une base  $\mathcal{E}$  de  $E$  telle que  $[u]_{\mathcal{E}}$  est triangulaire supérieure.

**Théorème 4.2.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme. Alors  $u$  est trigonalisable si et seulement si  $\chi_u$  est scindé.

**Corollaire 4.3.** Tout endomorphisme sur un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel est trigonalisable.

## 5. Polynôme d'endomorphisme

**Définition 5.1.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme et  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  un polynôme. On note

$$P(u) := \sum_{k=0}^n a_k u^k.$$

**Proposition 5.2.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme et  $P, Q$  deux polynômes. Alors  $P(u) + Q(u) = (P + Q)(u)$  et  $P(u) \circ Q(u) = (PQ)(u) = (QP)(u)$ .

**Proposition 5.3.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme et  $P$  un polynôme. Alors si  $P(u) = 0$ , les valeurs propres de  $u$  sont racines de  $P$ .

### 5.1. Décomposition des noyaux

**Théorème 5.4.** (Lemme des noyaux) Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme et  $(P_i)_{1 \leq i \leq n}$  une famille de polynômes deux à deux premiers entre eux. Alors

$$\ker((P_1 \dots P_n)(u)) = \bigoplus_{i=1}^n \ker(P_i(u))$$

**Théorème 5.5.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme. Alors  $u$  est diagonalisable si et seulement s'il existe un polynôme  $P$  simplement scindé tel que  $P(u) = 0$ .

**Corollaire 5.6.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme diagonalisable. Alors si  $F$  est stable par  $u$ ,  $u_F$  est diagonalisable.

## 5.2. Théorème de Cayley-Hamilton

**Définition 5.7.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme. On appelle *polynômes annulateurs* de  $u$  l'ensemble

$$I_u := \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u) = 0\}.$$

**Proposition 5.8.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme. Alors  $I_u$  est un idéal de  $\mathbb{K}[X]$ , c'est-à-dire qu'il vérifie les propriétés suivantes

1.  $0 \in I_u$ ,
2.  $\forall P, Q \in I_u, P + Q \in I_u$ ,
3.  $\forall P \in I_u, Q \in \mathbb{K}[X], PQ \in I_u$ .

**Théorème 5.9.** (de Cayley-Hamilton) Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme. Alors  $\chi_u(u) = 0$ .

## 5.3. Polynôme minimal

**Définition 5.10.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme. On appelle *polynôme minimal* de  $u$ , noté  $\mu_u$ , le polynôme unitaire non-nul de degré minimal dans  $I_u$ .

**Proposition 5.11.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme. Alors le polynôme minimal de  $u$  divise tout élément de  $I_u$ .

**Théorème 5.12.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme. Alors  $u$  est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est simplement scindé.

## 6. Réduction d'endomorphisme

### 6.1. Décomposition de Dunford

**Lemme 6.1.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $u, v \in \mathcal{L}(E)$  deux endomorphismes diagonalisables. Alors si  $u$  et  $v$  commutent, il existe une base  $\mathcal{E}$  de  $E$  telle que  $[u]_{\mathcal{E}}$  et  $[v]_{\mathcal{E}}$  soient diagonales. On dit que  $u$  et  $v$  sont *codiagonalisables*.

**Définition 6.2.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ ,  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme,  $\lambda \in \mathbb{K}$  une valeur propre de  $u$  et  $n_\lambda$  sa multiplicité en tant que racine. On appelle *sous-espace caractéristique* associé à  $\lambda$  l'ensemble

$$N_\lambda(u) := \ker((u - \lambda \text{id})^{n_\lambda}).$$

**Proposition 6.3.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme de polynôme caractéristique scindé. Alors

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} N_\lambda(u).$$

**Théorème 6.4.** (Décomposition de Dunford) Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme de polynôme caractéristique scindé. Alors il existe  $d, v \in \mathcal{L}(E)$  tels que  $u = d + v$  vérifiant les propriétés suivantes

- $d$  est diagonalisable,
- $v$  est nilpotent,
- $d$  et  $v$  commutent.

## 6.2. Réduction de Jordan

**Proposition 6.5.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme. Alors il existe un unique  $r \in \mathbb{N}$  tel que

$$\{0\} = \ker(u^0) \subsetneq \ker(u) \subsetneq \dots \subsetneq \ker(u^r) = \ker(u^{r+1}) = \dots$$

**Définition 6.6.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme. On appelle *indice* de  $u$  l'entier vérifiant la Proposition 6.5.

**Remarque 6.7.** L'indice de  $u$  est aussi

- le plus petit  $r \in \mathbb{N}$  vérifiant  $\ker(u^r) = \ker(u^{r+1})$ ,
- si  $u$  est nilpotent, le plus petit  $r \in \mathbb{N}$  vérifiant  $u^r = 0$ ,
- le nombre  $r \in \mathbb{N}$  vérifiant  $E = \operatorname{im}(u^r) \oplus \ker(u^r)$  et

$$E = \operatorname{im}(u^0) \supsetneq \operatorname{im}(u) \supsetneq \dots \supsetneq \operatorname{im}(u^r) = \operatorname{im}(u^{r+1}) = \dots$$

**Théorème 6.8.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ ,  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme de polynôme caractéristique scindé et  $\lambda \in \mathbb{K}$  une valeur propre de  $u$ . Alors la multiplicité de  $\lambda$  en tant que racine est donnée par l'indice de l'endomorphisme  $u - \lambda \operatorname{id}$ .

**Définition 6.9.** Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$  et  $k \in \mathbb{N}$ . On appelle *bloc de Jordan* la matrice de la forme

$$J_k(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Soit  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$  et  $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}$ . On appelle *matrice de Jordan* la matrice de la forme

$$J := \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(\lambda_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_{k_r}(\lambda_r) \end{pmatrix}.$$

**Théorème 6.10.** (Réduction de Jordan d'un endomorphisme nilpotent) Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme nilpotent. Alors il existe une base  $\mathcal{E}$  de  $E$  et des entiers  $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}$  tels que

$$[u]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} J_{k_1}(0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(0) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_{k_r}(0) \end{pmatrix}.$$

**Théorème 6.11.** (Réduction de Jordan d'un endomorphisme) Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme de polynôme caractéristique simplement scindé. Alors il existe une base  $\mathcal{E}$  de  $E$ , des nombres  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$  et  $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}$  tels que

$$[u]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(\lambda_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_{k_r}(\lambda_r) \end{pmatrix}.$$



## 7. Formes bilinéaires

**Définition 7.1.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $\Phi : E \times E \rightarrow E$  une application. On dit que  $\Phi$  est une *forme bilinéaire*, si pour tout  $x \in E$ , les applications  $y \mapsto \Phi(x, y)$  et  $y \mapsto \Phi(y, x)$  sont linéaires.

### 7.1. Ecriture dans une base

**Définition 7.2.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et  $\Phi : E \times E \rightarrow E$  une forme bilinéaire. On appelle *matrice* de  $\Phi$  dans la base  $\mathcal{E}$ , la matrice

$$[\Phi]_{\mathcal{E}} := (\Phi(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq n}.$$

**Proposition 7.3.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et  $\Phi : E \times E \rightarrow E$  une forme bilinéaire. Alors par bilinéarité

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in E, \Phi(x, y) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i y_j \Phi(e_i, e_j) = [x]_{\mathcal{E}}^T [\Phi]_{\mathcal{E}} [y]_{\mathcal{E}}.$$

**Proposition 7.4.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$  deux bases de  $E$ , et  $\Phi : E \times E \rightarrow E$  une forme bilinéaire. Alors

$$[\Phi]_{\mathcal{F}} = \mathcal{P}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}^T} [\Phi]_{\mathcal{E}} \mathcal{P}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}.$$

### 7.2. Dualité

**Définition 7.5.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ . On appelle *dual* de  $E$ , noté  $E^*$ , l'ensemble des formes linéaires sur  $E$ . Si  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ , on appelle *base duale*, la famille  $\mathcal{E}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$  telle que

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, e_i^*(e_j) := \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

**Proposition 7.6.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ . Soit  $u : E \rightarrow \mathbb{K}$  une forme linéaire, alors

$$u = \sum_{i=1}^n u(e_i) e_i^*$$

Soit  $f$  un élément de  $E$ , alors

$$f = \sum_{i=1}^n e_i^*(f) e_i.$$

**Définition 7.7.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$  une base de  $E^*$ . On appelle *base antéduale*, l'unique base  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  telle que  $\mathcal{E}^* = \mathcal{F}$ .

**Définition 7.8.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $\Phi : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$  une forme bilinéaire. On appelle *application linéaire associée à  $\Phi$* , l'application

$$u_{\Phi} : E \rightarrow E^*, x \mapsto (y \mapsto \Phi(x, y)).$$

### 7.3. Forme bilinéaire symétrique et forme quadratique

**Définition 7.9.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $\Phi : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$  une forme bilinéaire. On dit que  $\Phi$  est *symétrique*, si

$$\forall (x, y) \in E \times E, \Phi(x, y) = \Phi(y, x).$$

**Définition 7.10.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $Q : E \rightarrow \mathbb{K}$  une application. On dit que  $Q$  est une *forme quadratique*, s'il existe une forme bilinéaire symétrique  $\Phi : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$  telle que

$$\forall x \in E, Q(x) = \Phi(x, x)$$

dans ce cas, on dit que  $Q$  est la *forme quadratique associée* à  $\Phi$ .

**Proposition 7.11.** (Formule de polarisation) Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $\Phi : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$  une forme bilinéaire et  $Q : E \rightarrow \mathbb{K}$  la forme quadratique associée à  $\Phi$ . Alors

$$\forall (x, y) \in E \times E, \Phi(x, y) = \frac{1}{2}(Q(x+y) - Q(x) - Q(y)) = \frac{1}{4}(Q(x+y) - Q(x-y)).$$

**Remarque 7.12.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $Q : E \rightarrow \mathbb{K}$  une forme quadratique. Alors d'après la Proposition 7.11,  $Q$  détermine une forme bilinéaire symétrique, on l'appelle *forme polaire associée* à  $Q$ .

**Remarque 7.13.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $\Phi : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$  une forme bilinéaire symétrique. Alors sa matrice dans la base canonique est symétrique.

## 7.4. Forme quadratique définie

**Définition 7.14.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $\Phi : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$  une forme bilinéaire symétrique. On dit que  $\Phi$  est *non-dégénérée* si

$$\forall x \in E, (\forall y \in E, \Phi(x, y) = 0) \Rightarrow x = 0.$$

**Définition 7.15.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $\Phi : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$  une forme bilinéaire symétrique. On dit que  $\Phi$  est *définie* si

$$\forall x \in E, \Phi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

**Proposition 7.16.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $\Phi : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$  une forme bilinéaire symétrique. Alors si  $\Phi$  est définie, elle est non-dégénérée.

**Définition 7.17.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $\Phi : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$  une forme bilinéaire symétrique définie.

- On dit que  $\Phi$  est *définie positive* si

$$\forall x \in E \setminus \{0\}, \Phi(x, x) > 0.$$

- On dit que  $\Phi$  est *définie négative* si

$$\forall x \in E \setminus \{0\}, \Phi(x, x) < 0.$$

**Proposition 7.18.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $\Phi : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$  une forme bilinéaire symétrique définie. Alors  $Q$  est soit définie positive, soit définie négative.

**Remarque 7.19.** On étend toutes les énoncés précédents aux formes quadratiques avec leur forme polaire associée.

## 7.5. Réduction d'une forme quadratique

**Théorème 7.20.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $Q : E \rightarrow \mathbb{K}$  une forme quadratique. Alors il existe des formes linéaires indépendantes  $f_1, \dots, f_m$  sur  $E$  et des éléments non-nuls  $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{K}$  tels que

$$\forall x \in E, Q(x) = a_1 f_1(x)^2 + \dots + a_m f_m(x)^2.$$

*Démonstration.* On applique l'algorithme de *réduction de Gauss*. □

**Remarque 7.21.** La famille de formes linéaires indépendantes qui intervient dans le **Théorème 7.20** n'est pas nécessairement unique.

## 7.6. Invariants d'une forme quadratique

**Théorème 7.22.** (d'inertie de Sylvester) Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $Q : E \rightarrow \mathbb{K}$  une forme quadratique. Alors le nombre  $m$  de formes linéaires indépendantes qui interviennent dans une décomposition de  $Q$  est égal au rang de la forme polaire de  $Q$ .

**Théorème 7.23.** (d'inertie de Sylvester dans  $\mathbb{R}$ ) Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $Q : E \rightarrow \mathbb{R}$  une forme quadratique. Soit

$$Q = a_1 f_1^2 + \dots + a_s f_s^2 - a_{s+1} f_{s+1}^2 - \dots - a_{s+t} f_{s+t}^2$$

une décomposition de  $Q$  en sommes de carrés telle que  $\forall i \in \{1, \dots, s+t\}, a_i > 0$ . Alors les nombres  $s$  et  $t$  ne dépendent que de  $Q$ .

**Définition 7.24.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $Q : E \rightarrow \mathbb{K}$  une forme quadratique. On appelle *signature* de  $Q$ , le couple  $(s, t)$  du **Théorème 7.23**.

## 8. Espaces euclidiens

**Définition 8.1.** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. On appelle *produit scalaire* sur  $E$ , noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , une forme bilinéaire symétrique définie positive. Si  $E$  est de dimension finie, on appelle *espace euclidien* le couple  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .

**Définition 8.2.** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien. On appelle *norme associée au produit scalaire*, l'application  $\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}$ .

### 8.1. Norme d'un vecteur

**Théorème 8.3.** (Inégalité de Cauchy-Schwarz) Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien. Alors

$$\forall x, y \in E, |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

avec égalité si et seulement si les deux éléments sont liés.

**Proposition 8.4.** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien. Alors l'application  $\| \cdot \|$  est une norme.

### 8.2. Orthogonalité, base orthogonale et base orthonormée

**Définition 8.5.** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien et  $x, y \in E$ . On dit que  $x$  et  $y$  sont *orthogonaux*, noté  $x \perp y$ , si  $\langle x, y \rangle = 0$ .

**Définition 8.6.** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien et  $F$  un sous-ensemble de  $E$ . On appelle *orthogonal* de  $F$ , noté  $F^\perp$ , l'ensemble

$$F^\perp := \{x \in E \mid \forall y \in F, \langle x, y \rangle = 0\}.$$

**Notation 8.7.** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien et  $x \in E$ . On note  $x^\perp := \{x\}^\perp$ .

**Proposition 8.8.** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien et  $F$  un sous-ensemble de  $E$ . Alors  $F^\perp$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

**Proposition 8.9.** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien et  $x, y \in E$ . Alors

$$x \perp y \Leftrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \Leftrightarrow \|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

**Proposition 8.10.** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien et  $x \in E \setminus \{0\}$ . Alors  $\text{Vect}(x)^\perp = x^\perp$  et

$$E = \text{Vect}(x) \oplus x^\perp.$$

**Définition 8.11.** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien et  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ .

- On dit que  $\mathcal{E}$  est *orthogonale* si elle vérifie

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j \Rightarrow \langle e_i, e_j \rangle = 0.$$

- On dit que  $\mathcal{E}$  est *orthonormée* si elle vérifie

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}.$$

**Remarque 8.12.** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien et  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  une base orthogonale de  $E$ . Alors la famille  $\left(\frac{e_1}{\|e_1\|}, \dots, \frac{e_n}{\|e_n\|}\right)$  est une base orthonormée de  $E$ .

**Théorème 8.13.** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien. Alors il existe une base orthonormée de  $E$ .

**Proposition 8.14.** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Alors

1.  $E = F \oplus F^\perp$ ,
2.  $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$ ,
3.  $(F^\perp)^\perp = F$ .

**Théorème 8.15.** (Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt) Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien et  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Alors il existe une base orthonormée  $(f_1, \dots, f_n)$  de  $E$  telle que

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(f_1, \dots, f_k).$$

*Démonstration.* On raisonne par récurrence sur le cardinal  $k$  de la famille.

- Pour  $k = 1$ , on pose  $f_1 := \frac{e_1}{\|e_1\|}$ .
- Pour  $k > 1$ , supposons qu'il existe une famille orthonormée  $(f_1, \dots, f_{k-1})$  telle que

$$\text{Vect}(e_1, \dots, e_{k-1}) = \text{Vect}(f_1, \dots, f_{k-1})$$

alors on pose  $f'_k := e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k, f_i \rangle f_i$ . Soit  $j \in \{1, \dots, k-1\}$ , alors

$$\langle f'_k, f_j \rangle = \langle e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k, f_i \rangle f_i, f_j \rangle$$

et par bilinéarité du produit scalaire

$$\begin{aligned} \langle f'_k, f_j \rangle &= \langle e_k, f_j \rangle - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k, f_i \rangle \langle f_i, f_j \rangle \\ &= \langle e_k, f_j \rangle - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k, f_i \rangle \delta_{i,j} \\ &= \langle e_k, f_j \rangle - \langle e_k, f_j \rangle = 0. \end{aligned}$$

Enfin on pose  $f_k := \frac{f'_k}{\|f'_k\|}$ , donc la famille  $(f_1, \dots, f_k)$  est orthonormée et vérifie l'égalité.

□

### 8.3. Le groupe orthogonal

**Définition 8.16.** Soit  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  une matrice inversible. On dit que  $A$  est *orthogonale* si  $A^T = A^{-1}$ . On appelle *groupe orthogonal*, le sous-groupe

$$O_n(\mathbb{R}) := \{A \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \mid AA^T = A^T A = I_n\}.$$

**Remarque 8.17.** Soit  $A \in O_n(\mathbb{R})$  une matrice orthogonale. Alors on remarque que  $\det(A) = \pm 1$ , on appelle *groupe spécial orthogonal*, le sous-groupe

$$SO_n(\mathbb{R}) := O_n(\mathbb{R}) \cap \det^{-1}(1).$$

**Définition 8.18.** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien et  $f \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme. On dit que  $f$  est un *endomorphisme orthogonal* si

$$\forall x, y \in E, \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle.$$

On appelle *groupe orthogonal*, noté  $O(E)$ , le sous-groupe des endomorphismes orthogonaux.

**Proposition 8.19.** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien et  $f \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme. Alors les énoncés suivants sont équivalents

1.  $f$  est orthogonal.
2. Soit  $x \in E$ , alors  $\|f(x)\| = \|x\|$ .
3. Soit  $\mathcal{E}$  une base orthonormée de  $E$ , alors  $[f]_{\mathcal{E}} \in O_n(\mathbb{R})$ .
4. Il existe  $\mathcal{E}$  une base orthonormée de  $E$ , telle que  $[f]_{\mathcal{E}} \in O_n(\mathbb{R})$ .

**Remarque 8.20.** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien et  $f \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme orthogonal. Alors on remarque que  $\det(f) = \pm 1$ , on appelle *groupe spécial orthogonal* le sous-groupe

$$SO(E) := O(E) \cap \det^{-1}(1).$$

## 8.4. Polynômes orthogonaux

**Proposition 8.21.** Soit  $[a, b]$  un intervalle fermé de  $\mathbb{R}$  et  $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ . Alors la forme bilinéaire symétrique définie par

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}[X], \langle P, Q \rangle := \int_a^b P(t)Q(t)w(t) dt$$

est un produit scalaire.

*Démonstration.* Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ , alors  $P^2 w$  est continue et positive, de plus

$$\begin{aligned} \langle P, P \rangle = 0 &\Rightarrow \int_a^b P^2(t)w(t) dt = 0 \\ &\Rightarrow \forall t \in [a, b], P^2(t)w(t) = 0 \\ &\Rightarrow \forall t \in [a, b], P(t) = 0 \\ &\Rightarrow P = 0 \end{aligned}$$

donc  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire. □

**Définition 8.22.** Soit  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  un produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$ . On appelle *famille de polynômes orthogonaux*, une famille  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de polynômes qui vérifie

$$\begin{cases} \forall i, j \in \mathbb{N}, i \neq j \Rightarrow \langle P_i, P_j \rangle = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \deg(P_n) = n \end{cases}$$

**Proposition 8.23.** Soit  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux familles de polynômes orthogonaux. Soit  $n \in \mathbb{N}$ , alors  $P_n$  et  $Q_n$  sont colinéaires.

*Démonstration.*  $P_n$  et  $Q_n$  appartiennent à la même droite  $\mathbb{R}_n[X] \cap \mathbb{R}_n[X]^\perp$ . □

**Définition 8.24.** Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $p_n \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$  la projection orthogonale sur  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ . On pose l'application  $T_n : \mathbb{R}_{n-1}[X] \rightarrow \mathbb{R}_{n-1}[X], P \mapsto p_n(XP)$ .

**Proposition 8.25.** Soit  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une famille de polynômes orthogonaux. Soit  $n \in \mathbb{N}$ , alors  $T_n$  est symétrique et son spectre est de cardinal  $n$ . Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $T_n$ , alors  $\lambda$  est racine de  $P_n$  et l'espace propre associé est la droite engendrée par le quotient de  $P_n$  par  $X - \lambda$ .

*Démonstration.* Soit  $P, Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ , alors

$$\begin{aligned} \langle T_n(P), Q \rangle &= \langle p_n(XP), Q \rangle \\ &= \langle XP, p_n(Q) \rangle \\ &= \langle XP, Q \rangle \\ &= \langle P, XQ \rangle = \langle P, T_n(Q) \rangle \end{aligned}$$

donc  $T_n$  est symétrique. □

## 8.5. Endomorphismes symétriques

**Notation 8.26.** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien et  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme. On note  $\theta_u : E \rightarrow E^*$ , l'application définie par

$$\forall y \in E, \theta_u(y) := x \mapsto \langle u(x), y \rangle.$$

**Définition 8.27.** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien et  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme. On appelle *application transposée* (ou *adjoint*) de  $u$ , l'application définie par  $u^* := \theta_{\text{id}}^{-1} \circ \theta_u$ .

**Proposition 8.28.** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien et  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme. Alors

$$\forall x, y \in E, \langle x, u^*(y) \rangle = \langle u(x), y \rangle.$$

Soit  $\mathcal{E}$  une base orthonormée de  $E$ , on a  $[u^*]_{\mathcal{E}} = [u]_{\mathcal{E}}^T$ .

*Démonstration.* Soit  $x, y \in E$ . Alors

$$\langle x, u^*(y) \rangle = \theta_{\text{id}}(u^*(y))(x) = (\theta_{\text{id}} \circ u^*)(y)(x) = \theta_u(y)(x) = \langle u(x), y \rangle.$$

□

**Définition 8.29.** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien et  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme. On dit que  $u$  est *symétrique* (ou *auto-adjoint*), si  $u^* = u$ .

**Proposition 8.30.** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien et  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme. Alors  $u$  est symétrique si et seulement si sa matrice dans une base orthonormée de  $E$  est symétrique.

**Proposition 8.31.** Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice symétrique. Alors toutes les valeurs propres complexes de  $M$  sont réelles.

*Démonstration.* Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$  une valeur propre de  $M$  et  $X$  un vecteur propre associé. On a  $MX = \lambda X$ , en passant au conjugué  $M\bar{X} = \bar{\lambda}\bar{X}$ , et en passant à la transposée  $\bar{X}^T M = \bar{\lambda}\bar{X}^T$ . En multipliant par  $X$  on obtient

$$\lambda \bar{X}^T X = \bar{X}^T (MX) = (\bar{X}^T M) X = \bar{\lambda} \bar{X}^T X$$

or  $\bar{X}^T X > 0$ , on en déduit que  $\lambda = \bar{\lambda}$  est un nombre réel. □

**Théorème 8.32.** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien et  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme. Alors  $u$  est diagonalisable dans une base orthonormée de  $E$ .

**Théorème 8.33.** Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice symétrique. Alors il existe une matrice orthogonale  $P$  telle que  $P^T M P$  soit diagonale.

**Corollaire 8.34.** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien,  $Q$  une forme quadratique définie positive sur  $E$  et  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$  ses valeurs propres ordonnées. Alors

$$\forall x \in E, \lambda_1 \|x\|^2 \leq Q(x) \leq \lambda_n \|x\|^2$$

et ces inégalités sont optimales.