Problème du rectangle inscrit

Emanuel Morille

13 Mai 2025

Table des matières

9709

1. Bases de théorie des catégories

Définition 1.1. Une *catégorie* $\mathcal{C}$ est la donnée de :
- Une classe $\mathrm{ob}(\mathcal{C})$ dont les éléments sont appelés les *objets de* $\mathcal{C}$.
- Une classe $\hom(\mathcal{C})$ dont les éléments sont appelés les *morphismes de* $\mathcal{C}$.
  Un morphisme $f \in \hom(\mathcal{C})$ a un *domaine* $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ et un *codomaine* $Y \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$. On note alors ce morphisme $f : X \to Y$ et $\hom(X, Y)$ l'ensemble des morphismes de X dans Y.
- Pour tout objets $X, Y, Z \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$, une *composition* :
$$\circ : \hom(Y, Z) \times \hom(X, Y) \to \hom(X, Z).$$
- Pour tout objet $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$, un morphisme *identité* :
$$\mathrm{id}_X : X \to X.$$

Vérifiant les propriétés suivantes pour tout objets $X, Y, Z, T \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$:
- *Associativité* : Pour tout morphismes $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ et $h : Z \to T$, on a :
$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$
- *Identité* : Pour tout morphisme $f : X \to Y$, on a :
$$\mathrm{id}_Y \circ f = f = f \circ \mathrm{id}_X .$$

Exemples 1.2.
- La catégorie Top_2, les objets sont les paires d'espaces topologiques et les morphismes sont les applications continues.
- La catégorie Ab, les objets sont les groupes abéliens et les morphismes sont les morphismes de groupes.

Définition 1.3. Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories. Un *foncteur* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est la donnée :
- Pour tout objet $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$, d'un objet $F(X) \in \mathrm{ob}(\mathcal{D})$.
- Pour tout objets $X, Y \in \mathrm{ob}(C)$ et morphisme $f : X \to Y$, d'un morphisme $F(f) : F(X) \to F(Y)$.

Vérifiant les propriétés suivantes pour tout objets $X, Y, Z \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$:
- *Composition* : Pour tout morphismes $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$, on a :
$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f).$$
- *Identité* : On a :
$$F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)} .$$

Exemple 1.4.
- Pour toute catégorie $\mathcal{C}$, l'identité $\mathrm{id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ est un foncteur.

Définition 1.5. Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ deux foncteurs. Une *transformation naturelle* ∂ est la donnée pour tout objet $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$, d'un morphisme $\partial_X : F(X) \to G(X)$, vérifiant la propriété suivante pour tout objet $Y \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ et pour tout morphisme $f : X \to Y$, on a :
$$\partial_Y \circ F(f) = G(f) \circ \partial_X.$$

Remarque 1.6. Cette dernière égalité revient à ce que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\partial_X"'] & F(Y) \arrow[d, "\partial_Y"] \\
G(X) \arrow[r, "G(f)"'] & G(Y)
\end{tikzcd}$$

2. Homologie singulière

La majorité des énoncés suivants sont issus de la source [1].

Définition 2.1. Une *théorie de l'homologie* sur la catégorie des paires d'espaces topologiques Top_2 dans la catégorie des groupes abéliens Ab est une suite de foncteurs $(H_n : \mathsf{Top}_2 \to \mathsf{Ab})_{n\in\mathbb{Z}}$ munie de transformations naturelles $(\partial_n : H_n(X,A) \to H_{n-1}(A) := H_{n-1}(A,\emptyset))_{n\in\mathbb{Z}}$ vérifiant les *axiomes d'Eilenberg-Steenrod* pour toutes paires d'espaces topologiques $(X,A),(Y,B)$ et $n \in \mathbb{Z}$:

- *Dimension* : Soit P un espace constitué d'un unique point. Alors le groupe $H_n(P)$ est non-trivial si et seulement si $n = 0$.
- *Exactitude* : En notant $i : A \to X$ et $j : X \to (X,A)$ les inclusions canoniques, alors la suite suivante est exacte :
$$\ldots \to H_{n+1}(X,A) \overset{\partial_{n+1}}{\to} H_n(A) \overset{H_n(i)}{\to} H_n(X) \overset{H_n(j)}{\to} H_n(X,A) \overset{\partial_n}{\to} H_{n-1}(A) \to \ldots$$
- *Homotopie* : Soit $f_0, f_1 : (X,A) \to (Y,B)$ deux morphismes de paires homotopes. Alors les applications induites en homologie $H_n(f_0), H_n(f_1) : H_n(X,A) \to H_n(Y,B)$ sont égales.
- *Excision* : Soit U un sous-ensemble de A tel que l'adhérence de U est contenue dans l'intérieur de A. En notant $i : (X \setminus U, A \setminus U) \to (X,A)$ l'inclusion canonique. Alors l'application induite en homologie $H_n(i) : H_n(X \setminus U, A \setminus U) \to H_n(X,A)$ est un isomorphisme.

2.1. Simplexes

Définition 2.2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et A un sous-ensemble de E. On dit que A est *convexe* si :
$$\forall p,q \in A, [p,q] := \{(1-t)p + tq \mid t \in [0,1]\} \subset A.$$

Définition 2.3. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, A un sous-ensemble de E et $p_0, \ldots, p_n$ des éléments de A. On appelle *combinaison convexe* une combinaison de la forme $t_0p_0 + \cdots + t_np_n$, telle que $t_0, \ldots, t_n \in [0,1]$ et $t_0 + \cdots + t_n = 1$.

Proposition 2.4. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, A un sous-ensemble de E et $p_0, \ldots, p_n$ des éléments de A. Si A est convexe, alors toute combinaison convexe de $p_0, \ldots, p_n$ appartient à A.

Démonstration. Soit $t_0, \ldots, t_n \in [0,1]$ tels que $t_0 + \cdots + t_n = 1$. Notons $H(n) : t_0p_0 + \cdots + t_np_n \in A$.
Pour $n = 1$. On pose $t := t_1$, alors puisque A est convexe $t_0p_0 + t_1p_1 = (1-t)p_0 + tp_1 \in A$.
Pour $n > 1$. On suppose que $H(n-1)$ est vérifiée. Sans perte de généralité, on suppose que $t_n \neq 0$, et on pose :
$$p := \frac{t_0}{1-t_n}p_0 + \cdots + \frac{t_{n-1}}{1-t_n}p_{n-1}$$
alors d'après $H(n-1)$ on a $p \in A$. Par convexité on a $t_0p_0 + \cdots + t_np_n = (1-t_n)p + t_np_n \in A$. □

Définition 2.5. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et A un sous-ensemble de E. On appelle *enveloppe convexe de* A, notée $[A]$, l'ensemble des combinaisons convexes d'éléments de A.

Proposition 2.6. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et A un sous-ensemble de E. Alors l'enveloppe convexe de A est le plus petit ensemble convexe contenant A.

Démonstration. Soit $p,q \in [A]$ et $t \in [0,1]$. Puisque p et q sont des combinaisons convexes d'éléments de A, la combinaison $(1-t)p + tq$ est aussi une combinaison convexe d'éléments de A, d'après la Proposition 2.4 on a $(1-t)p + tq \in [A]$. Donc l'ensemble $[A]$ est convexe.

Soit B un sous-ensemble convexe de E contenant A. Soit $x \in [A]$. Puisque x est une combinaison convexe d'éléments de $A \subset B$, d'après la Proposition 2.4 on a $x \in B$. Donc $[A] \subset B$. □

Définition 2.7. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et F une famille libre de $n+1$ éléments de E. On appelle *n-simplexe généré par F* l'enveloppe convexe de F. On dit que les éléments de F sont les *sommets* de $[F]$ et que n est la *dimension* de $[F]$.

Définition 2.8. On appelle *n-simplexe standard*, noté Δ^n, le n-simplexe généré par la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Proposition 2.9. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $F := (f_0, \dots, f_n)$ une famille libre de $n+1$ éléments de E. Alors l'application :

$$\langle f_0, \dots, f_n \rangle : \Delta^n \to [F]; (t_0, \dots, t_n) \mapsto t_0 f_0 + \dots + t_n f_n$$

est un homéomorphisme.

Démonstration. Soit $(s_0, \dots, s_n), (t_0, \dots, t_n) \in \Delta^n$ tels que $s_0 f_0 + \dots + s_n f_n = t_0 f_0 + \dots + t_n f_n$. En particulier on a $(s_0 - t_0) f_0 + \dots + (s_n - t_n) f_n = 0$, et puisque la famille $(f_0, \dots, f_n)$ est libre, on obtient $s_0 - t_0 = \dots = s_n - t_n = 0$, c'est-à-dire $(s_0, \dots, s_n) = (t_0, \dots, t_n)$. Donc $\langle f_0, \dots, f_n \rangle$ est injective.

Soit $x \in [F]$. Alors par définition de $[F]$, il existe $(t_0, \dots, t_n) \in \Delta^n$ tels que $x := t_0 f_0 + \dots + t_n f_n$. Donc $\langle f_0, \dots, f_n \rangle$ est surjective.

Puisque $\langle f_0, \dots, f_n \rangle$ est une application linéaire et que Δ^n est de dimension finie, $\langle f_0, \dots, f_n \rangle$ est continue. De plus Δ^n est compact et $[F]$ est séparé, donc $\langle f_0, \dots, f_n \rangle$ est un homéomorphisme. $\square$

Définition 2.10. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $F := (f_0, \dots, f_n)$ une famille libre de $n+1$ éléments de E et $x := t_0 f_0 + \dots + t_n f_n$ un élément de $[F]$. On appelle *coordonnées barycentriques de x* les coefficients $t_0, \dots, t_n \in [0, 1]$.

Définition 2.11. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, F une famille libre de $n+1$ éléments de E et G une famille non-vide d'éléments de F. On dit que $[G]$ est une *face* de $[F]$.

2.2. Chaînes

Définition 2.12. Soit X un espace topologique. On appelle *n-simplexe singulier sur X* une application continue de Δ^n dans X.

Exemple 2.13. L'application $\langle e_0, \dots, e_n \rangle$ de la Proposition 2.9, où $(e_0, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$, est un n-simplexe singulier sur $\mathbb{R}^{n+1}$.

Définition 2.14. Soit X un espace topologique. On note $C_n(X)$ le groupe abélien libre engendré par les n-simplexes singuliers sur X, on appelle *n-chaîne singulière* un élément de $C_n(X)$.

Proposition 2.15. Soit X et Y deux espaces topologiques, $\sigma : \Delta^n \to X$ un n-simplexe singulier sur X et $f : X \to Y$ une application continue. Alors la composition $f \circ \sigma : \Delta^n \to Y$ est un n-simplexe singulier sur Y.

Démonstration. Puisque f est continue sur X et σ est continue sur Δ^n, par composition $f \circ \sigma$ est continue de Δ^n dans Y. Donc $f \circ \sigma$ est un n-simplexe singulier sur X. $\square$

Définition 2.16. Soit X et Y deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application continue. On appelle *application induite par f*, notée f_*, le morphisme de groupes :

$$f_* : C_n(X) \to C_n(Y); \sum_{k=0}^{m} \lambda_k \sigma_k \mapsto \sum_{k=0}^{m} \lambda_k (f \circ \sigma_k).$$

Proposition 2.17. Soit X, Y et Z trois espaces topologiques, $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux applications continues. Alors $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque les n-chaînes singulières sont engendrées par les n-simplexes singuliers, il suffit de montrer le résultat pour un n-simplexe singulier $\sigma : \Delta^n \to X$. Alors on a :

$$(g \circ f)_*(\sigma) = (g \circ f) \circ \sigma = g \circ (f \circ \sigma) = g \circ f_*(\sigma) = g_*(f_*(\sigma))$$

□

Définition 2.18. Soit X un espace topologique et $\sigma : \Delta^n \to X$ un n-simplexe singulier sur X. On appelle *bord de* σ, noté $\mathrm{d}_n\sigma$, la $(n-1)$-chaîne singulière sur X définie par :

$$\mathrm{d}_n\sigma \coloneqq \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \Big(\sigma \circ \Big\langle e_0, \dots, \widehat{e_k}, \dots e_n \Big\rangle\Big).$$

où le symbole $\widehat{\cdot}$ signifie que l'élément est enlevé.

Définition 2.19. Soit X un espace topologique et $n \in \mathbb{N}$. On appelle *morphisme de bord*, noté d_n, le morphisme de groupes induit:

$$\mathrm{d}_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X); \sum_{k=0}^{m} \lambda_k \sigma_k \mapsto \sum_{k=0}^{m} \lambda_k d_n \sigma_k.$$

Proposition 2.20. Soit X et Y deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application continue. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{d}_n f_* = f_* \mathrm{d}_n$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque les n-chaînes singulières sont engendrées par les n-simplexes singuliers, il suffit de montrer le résultat pour un n-simplexe singulier $\sigma : \Delta^n \to X$. Alors on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_n f_*(\sigma) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \Big((f \circ \sigma) \circ \Big\langle e_0, \dots, \widehat{e_k}, \dots, e_n \Big\rangle\Big) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \Big(f \circ \Big(\sigma \circ \Big\langle e_0, \dots, \widehat{e_k}, \dots, e_n \Big\rangle\Big)\Big) \\
&= f_*(d_n \sigma).
\end{aligned}$$

□

Proposition 2.21. Soit X un espace topologique. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{d}_n \circ \mathrm{d}_{n+1} = 0$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque les n-chaînes singulières sont engendrées par les n-simplexes singuliers, il suffit de montrer le résultat pour un n-simplexe singulier $\sigma : \Delta^n \to X$. Alors on a :

$$\mathrm{d}_{n+1}(\sigma) = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \Big(\sigma \circ \Big\langle e_0, \dots, \widehat{e_k}, \dots, e_n \Big\rangle\Big)$$

donc en appliquant d_n, on obtient :

$$\begin{aligned}
(\mathrm{d}_n \circ \mathrm{d}_{n+1})(\sigma) &= \mathrm{d}_n \left(\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \Big(\sigma \circ \Big\langle e_0, \dots, \widehat{e_k}, \dots, e_n \Big\rangle\Big)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \mathrm{d}_n \Big(\sigma \circ \Big\langle e_0, \dots, \widehat{e_k}, \dots, e_n \Big\rangle\Big)) \\
&= \sum_{0 \le k < l \le n+1} (-1)^{k+l} \Big(\sigma \circ \Big\langle e_0, \dots, \widehat{e_k}, \dots, \widehat{e_l}, \dots, e_n \Big\rangle\Big) \\
&\quad + \sum_{0 \le l < k \le n+1} (-1)^{k+l-1} \Big(\sigma \circ \Big\langle e_0, \dots, \widehat{e_l}, \dots, \widehat{e_k}, \dots, e_n \Big\rangle\Big) \\
&= \sum_{0 \le k < l \le n+1} \Big((-1)^{k+l} + (-1)^{k+l+1}\Big)\Big(\sigma \circ \Big\langle e_0, \dots, \widehat{e_k}, \dots, \widehat{e_l}, \dots, e_n \Big\rangle\Big) \\
&= 0
\end{aligned}$$

car les puissances de -1 s'annulent. □

2.3. Complexes de chaînes

Définition 2.22. Soit X un espace topologique. On appelle *complexe de chaînes singulières*, noté $C_\bullet(X)$, la suite de groupes abéliens libres $(C_n(X))_{n\in\mathbb{Z}}$ munie des morphismes de bords $(\mathrm{d}_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X))_{n\in\mathbb{Z}}$, avec pour convention $C_n(X)$ trivial si $n < 0$.

Définition 2.23. Soit $C_\bullet(X)$ un complexe de chaînes singulières et $n \in \mathbb{Z}$.
- On appelle *n-cycle singulier* un élément de $Z_n(X) \coloneqq \ker(\mathrm{d}_n)$.
- On appelle *n-bord singulier* un élément de $B_n(X) \coloneqq \mathrm{im}(\mathrm{d}_{n+1})$.
- On appelle *n^e groupe d'homologie singulière* le groupe quotient $H_n(X) \coloneqq Z_n(X)/B_n(X)$.

Remarque 2.24. Soit $C_\bullet(X)$ un complexe de chaînes singulières et $n \in \mathbb{Z}$. Puisque $d_n \circ d_{n+1} = 0$, on a $B_n(X) = \mathrm{im}(d_{n+1}) \subset \ker(d_n) = Z_n(X)$.

Remarque 2.25. Soit $C_\bullet(X)$ un complexe de chaînes singulières et $n \in \mathbb{Z}$. Si $n < 0$, alors $Z_n(X)$ et $B_n(X)$ sont triviaux, donc $H_n(X)$ est trivial.

Définition 2.26. Soit $C_\bullet(X)$ un complexe de chaînes singulières et $n \in \mathbb{Z}$.
- On dit que $C_\bullet(X)$ est *exact en $C_n(X)$* si $H_n(X)$ est trivial, c'est-à-dire, $\mathrm{im}(d_{n+1}) = \ker(d_n)$.
- On dit que $C_\bullet(X)$ est *exact* s'il est exact en tout $(C_n(X))_{n\in\mathbb{Z}}$.
- On dit que $C_\bullet(X)$ est *acyclique* s'il est exact en tout $(C_n(X))_{n\in\mathbb{Z}}$ avec $n \neq 0$.

Définition 2.27. Soit $C_\bullet(X)$ un complexe de chaînes singulières et $n \in \mathbb{Z}$. On appelle *n^e nombre de Betti de X* le rang de $H_n(X)$ s'il est fini.

2.4. Morphismes de chaînes

Définition 2.28. Soit $C_\bullet(X)$ et $C_\bullet(Y)$ deux complexes de chaînes singulières. On appelle *morphisme de chaînes*, noté $\varphi_\bullet : C_\bullet(X) \to C_\bullet(Y)$, une suite de morphismes $(\varphi_n : C_n(X) \to C_n(Y))_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\mathrm{d}_n\varphi_n = \varphi_{n-1}\mathrm{d}_n$.

Proposition 2.29. Soit $C_\bullet(X)$ et $C_\bullet(Y)$ deux complexes de chaînes singulières, $\varphi_\bullet : C_\bullet(X) \to C_\bullet(Y)$ un morphisme de chaînes. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, φ_n induit un morphisme de $H_n(X)$ dans $H_n(Y)$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$.
Soit $\sigma \in Z_n(X)$. Alors on a $d_n\varphi_n(\sigma) = \varphi_{n-1}(d_n\sigma) = \varphi_{n-1}(0) = 0$, donc $\varphi_n(\sigma) \in Z_n(Y)$.
Soit $\beta \in B_n(X)$. Alors il existe $\sigma \in C_{n+1}(X)$ tel que $\beta = d_{n+1}\sigma$, et on a :

$$\varphi_n(\beta) = \varphi_n(d_{n+1}\sigma) = d_{n+1}\varphi_{n+1}(\sigma)$$

donc $\varphi_n(\beta) \in B_n(Y)$.

On pose $\psi_n \coloneqq \overline{\varphi_n} : Z_n(X) \to H_n(Y)$, alors $B_n(X) \subset \ker(\psi_n)$ et d'après la propriété universelle du groupe quotient le morphisme ψ_n induit bien un morphisme de $H_n(X)$ dans $H_n(Y)$. □

Définition 2.30. Soit $C_\bullet(X)$ et $C_\bullet(Y)$ deux complexes de chaînes singulières, $\varphi_\bullet : C_\bullet(X) \to C_\bullet(Y)$ un morphisme de chaînes. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note $H_n(\varphi) : H_n(X) \to H_n(Y)$ le morphisme induit par φ_n.

Proposition 2.31. Soit $C_\bullet(X)$, $C_\bullet(Y)$ et $C_\bullet(Z)$ trois complexes de chaînes singulières, $\varphi_\bullet : C_\bullet(X) \to C_\bullet(Y)$ et $\psi_\bullet : C_\bullet(Y) \to C_\bullet(Z)$ deux morphismes de chaînes. Alors la composition $\psi_\bullet \circ \varphi_\bullet : C_\bullet(X) \to C_\bullet(Z)$ est un morphisme de chaînes.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors on a :

$$\mathrm{d}_n(\psi_n \circ \varphi_n) = \psi_{n-1}\mathrm{d}_n\varphi_n = (\psi_{n-1} \circ \varphi_{n-1})\mathrm{d}_n.$$

Donc $(\psi_n \circ \varphi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est bien un morphisme de chaînes. □

Proposition 2.32. Soit $C_\bullet(X)$ et $C_\bullet(Y)$ deux complexes de chaînes singulières, et $f : X \to Y$ une application continue. Alors l'application induite f_* détermine un morphisme de chaînes.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on considère le morphisme défini par $\varphi_n := f_*$. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors d'après la Proposition 2.20 on a :

$$\mathrm{d}_n\varphi_n = \mathrm{d}_n f_* = f_*\mathrm{d}_n = \varphi_{n-1}\mathrm{d}_n.$$

Donc $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est bien un morphisme de chaînes. $\square$

Définition 2.33. Soit $C_\bullet(X)$ et $C_\bullet(Y)$ deux complexes de chaînes singulières, et $f : X \to Y$ une application continue. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note $H_n(f) : H_n(X) \to H_n(Y)$ le morphisme induit par le morphisme de chaînes déterminé par f_*.

2.5. Paires d'espaces topologiques

Définition 2.34. Soit X un espace topologique et A un sous-ensemble de X. On appelle *paire d'espaces topologiques* le couple (X, A).

Proposition 2.35. Soit (X, A) une paire d'espaces topologiques. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, d_n induit un morphisme $\overline{d}_n$ de $C_n(X)/C_n(A)$ dans $C_{n-1}(X)/C_{n-1}(A)$ tel que $\overline{d}_n \circ \overline{d}_{n+1} = 0$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors on a $C_n(A) \subset C_n(X)$, on peut donc former le quotient $C_n(X)/C_n(A)$.

On pose $\delta_n := \overline{d_n} : C_n(X) \to C_{n-1}(X)/C_{n-1}(A)$, alors $C_n(A) \subset \ker(\delta_n)$ et d'après la propriété universelle du groupe quotient δ_n induit bien un morphisme $\overline{d}_n$ de $C_n(X)/C_n(A)$ dans $C_{n-1}(X)/C_{n-1}(A)$. Enfin puisque $d_n \circ d_{n+1} = 0$, on a $\overline{d}_n \circ \overline{d}_{n+1} = 0$. $\square$

Remarque 2.36. Soit (X, A) une paire d'espaces topologiques. La suite $(C_n(X)/C_n(A))_{n\in\mathbb{Z}}$ munie des morphismes de bords induits $\left(\overline{d}_n : C_n(X)/C_n(A) \to C_{n-1}(X)/C_{n-1}(A)\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ forme un complexe de chaînes singulières.

Définition 2.37. Soit (X, A) une paire d'espaces topologiques. On appelle *complexe de chaînes singulières de la paire* (X, A) le complexe de chaînes singulières quotient $C_\bullet(X, A) := C_\bullet(X)/C_\bullet(A)$.

Remarque 2.38. Dans le cas de la paire d'espaces topologiques $(X, \varnothing)$, on trouve $C_\bullet(X, \varnothing) = C_\bullet(X)$ et $H_\bullet(X, \varnothing) = H_\bullet(X)$.

Définition 2.39. Soit (X, A) et (Y, B) deux paires d'espaces topologiques, et $f : X \to Y$ une application continue. On dit que f est un *morphisme de paires*, noté $f : (X, A) \to (Y, B)$, si $f(A)$ est contenue dans B.

Proposition 2.40. Soit $C_\bullet(X, A)$ et $C_\bullet(Y, B)$ deux complexes de chaînes singulières, et $f : (X, A) \to (Y, B)$ un morphisme de paires. Alors l'application induite $f_* : C_n(X) \to C_n(Y)$ détermine un morphisme de chaînes.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on pose $\varphi_n := \overline{f_*} : C_n(X) \to C_n(Y, B)$, alors puisque $f(A) \subset B$, on en déduit $f_*(C_n(A)) \subset \ker(\varphi_n)$ et d'après la propriété universelle du groupe quotient φ_n induit un morphisme $\overline{\varphi_n}$ de $C_n(X, A)$ dans $C_n(Y, B)$.

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors d'après la Proposition 2.20 puisque $d_n f_* = f_* d_n$, on a $\overline{d_n\varphi_n} = \overline{\varphi_{n-1}d_n}$. Donc φ_n est bien un morphisme de chaînes. $\square$

Définition 2.41. Soit $C_\bullet(X, A)$ et $C_\bullet(Y, B)$ deux complexes de chaînes singulières, et $f : (X, A) \to (Y, B)$ un morphisme de paires. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note $H_n(f) : H_n(X, A) \to H_n(Y, B)$ le morphisme induit par le morphisme de chaînes déterminé par f_*.

Théorème 2.42. La suite des n^{e} groupe d'homologie singulière des paires d'espaces topologiques $(H_n : \mathsf{Top}_2 \to \mathsf{Ab})_{n\in\mathbb{Z}}$ est un foncteur.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

- Soit (X, A) une paire d'espaces topologiques. Alors le n^e groupe d'homologie singulière $H_n(X, A)$ est bien un groupe abélien libre.
- Soit (X, A) et (Y, B) deux paires d'espaces topologiques, et $f : (X, A) \to (Y, B)$ un morphisme de paires. Alors l'application $H_n(f) : H_n(X, A) \to H_n(Y, B)$ est un bien morphisme de groupes.

Soit $(X, A), (Y, B)$ et (Z, C) trois paires d'espaces topologiques.

- Soit $f : (X, A) \to (Y, B)$ et $g : (Y, B) \to (Z, C)$ deux morphismes de paires. Alors la composition $g \circ f : (X, A) \to (Z, C)$ est un morphisme de paires qui passe au quotient et vérifie :
$$H_n(g \circ f) = H_n(g) \circ H_n(f).$$
- On considère $\mathrm{id}_{(X,A)}$. Soit $\sigma : \Delta^n \to (X, A)$ un n-simplexe singulier, alors :
$$\mathrm{id}_{(X,A)*}(\sigma) = \mathrm{id}_{(X,A)} \circ \sigma = \sigma$$
puisque les n-chaînes singulières sont engendrées par les n-simplexes singuliers, on en déduit que $\mathrm{id}_{(X,A)*} = \mathrm{id}_{C_n(X,A)}$, par passage au quotient on a :
$$H_n\big(\mathrm{id}_{(X,A)}\big) = \mathrm{id}_{H_n(X,A)}.$$

Donc H_n est un foncteur. □

Théorème 2.43. La suite des n^e groupe d'homologie singulière des paires d'espaces topologiques $(H_n : \mathsf{Top}_2 \to \mathsf{Ab})_{n \in \mathbb{Z}}$ munie des morphismes ? (à définir) $(\partial_n : H_n(X, A) \to H_{n-1}(A))_{n \in \mathbb{Z}}$ est une théorie de l'homogie vérifiant les axiomes d'Eilenberg-Steenrod.

Démonstration de l'axiome de dimension. Si $n < 0$, on a clairement $H_n(P) \simeq \{0\}$.
Si $n \geq 0$, il existe un unique n-simplexe singulier $\sigma_n : \Delta^n \to P$, alors on a :
$$\partial_n \sigma_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \text{ ou } n \text{ est impair} \\ \sigma_{n-1} & \text{si } n \neq 0 \text{ et } n \text{ est pair} \end{cases}$$
dans le cas $n = 0$, alors $H_0(P) = \langle \sigma_0 \rangle / \{0\} \simeq \mathbb{Z}$,
dans le cas $n \neq 0$ et n est impair, alors $H_n(P) = \langle \sigma_n \rangle / \langle \sigma_n \rangle \simeq \{0\}$,
dans le cas $n \neq 0$ et n est pair, alors $H_n(P) = \{0\}/\{0\} \simeq \{0\}$. □

Démonstration de l'axiome d'exactitude. TODO. □

Démonstration de l'axiome d'homotopie. TODO. □

Démonstration de l'axiome d'excision. TODO. □

Théorème 2.44 (Théorème de Mayer-Vietoris)**.** Soit U et V deux ouverts d'un espace topologique. En notant $i_U : U \cap V \to U$, $i_V : U \cap V \to V$, $j_U : U \to U \cup V$ et $j_V : V \to U \cup V$ les inclusions canoniques, alors la suite suivante est exacte :
$$\ldots \to H_{n+1}(U \cup V) \overset{\partial_{n+1}}{\to} H_n(U \cap V) \overset{(-i_{U*}, i_{V*})}{\to} H_n(U) \oplus H_n(V) \overset{j_{U*} + j_{V*}}{\to} H_n(U \cup V) \to \ldots$$

Démonstration. TODO. □

Bibliographie

[1] Eduard Looijenga, *Algebraic Topology - an introduction*. 2010.