

Probabilités

Table des matières

1. Cadre général de la théorie des probabilités	2
1.1. Espace probabilisé général	2
1.2. Exemples d'espace probabilisés	4
1.2.1. Univers $\Omega = \mathbb{N}$	4
1.2.2. Univers $\Omega = \mathbb{R}$	4
1.2.3. Univers $\Omega = \mathbb{R}^d$	5
1.3. Classe monotone	5
2. Variables et vecteurs aléatoires	7
2.1. Loi d'un vecteur aléatoire	7

1. Cadre général de la théorie des probabilités

1.1. Espace probabilisé général

Définition 1.1. Soit Ω un ensemble. On appelle *tribu* sur Ω une famille \mathcal{F} de parties de Ω vérifiant :

- (1) \mathcal{F} est non-vidé : $\emptyset \in \mathcal{F}$,
- (2) la stabilité par passage au complémentaire : $\forall A \in \mathcal{F}, A^c \in \mathcal{F}$,
- (3) la stabilité par union dénombrable : $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}, \bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{F}$.

Définition 1.2. Soit Ω un ensemble et \mathcal{F} une tribu sur Ω . On appelle *mesure de probabilité* une mesure $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Définition 1.3. Soit Ω un ensemble, \mathcal{F} une tribu sur Ω et \mathbb{P} une mesure de probabilité sur (Ω, \mathcal{F}) . On appelle *espace probabilisé* le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on dit que Ω est l'univers et que \mathcal{F} sont les événements.

Remarque 1.4. Dans le cadre discret, on avait souvent $\mathcal{F} := \mathcal{P}(\Omega)$. Dans le cadre général, on aura souvent $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{P}(\Omega)$.

Définition 1.5. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On dit que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un *système complet* si elle vérifie :

- (1) les A_n sont disjoints deux à deux,
- (2) la probabilité de l'union des A_n est 1.

Proposition 1.6. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un système complet sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Alors on a

$$\forall B \in \mathcal{F}, \mathbb{P}(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B \cap A_n).$$

Démonstration. On pose $C := \bigcup_{n \geq 1} A_n$, puisque $\mathbb{P}(C) = 1$, on a $\mathbb{P}(C^c) = 0$ d'où $\mathbb{P}(B \cap C^c) = 0$. Soit $B \in \mathcal{F}$, on en déduit

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap C) + \underbrace{\mathbb{P}(B \cap C^c)}_{=0} = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 1} B \cap A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B \cap A_n).$$

□

Corollaire 1.7. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un système complet sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Alors pour tout $B \in \mathcal{F}$ on a

- (1) $\mathbb{P}(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) \mathbb{P}(B|A_n)$,
- (2) $\forall i \geq 1, \mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}(B|A_i)}{\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) \mathbb{P}(B|A_n)}$.

Théorème 1.8. (Continuité de la mesure de probabilité) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

(1) Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante d'événements. Alors on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right).$$

(2) Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante d'événements. Alors on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \geq 1} A_n\right).$$

Démonstration.

- (1) Pour tout $n \geq 1$, on pose $B_n := A_n \setminus A_{n-1}$ avec $A_0 = \emptyset$, tel que les $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forme un système complet sur $\bigcup_{n \geq 1} A_n$, on en déduit alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 1} B_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(A_{n-1})$$

on reconnaît une somme télescopique et on a donc

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(A_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

- (2) On obtient directement le résultat par passage au complémentaire.

□

Définition 1.9. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

- On appelle *limite supérieure* de la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la valeur

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n := \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k$$

intuitivement on considère les éléments qui appartiennent à une infinité d'événements.

- On appelle *limite inférieure* de la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la valeur

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} A_n := \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} A_k.$$

Corollaire 1.10. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Alors on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n\right) &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=m}^n A_k\right) \\ \mathbb{P}\left(\liminf_{n \rightarrow +\infty} A_n\right) &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=m}^n A_k\right) \end{aligned}$$

Proposition 1.11. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Alors on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Démonstration. On sait que le résultat est vérifié pour un nombre fini d'événements. Par passage à la limite et par continuité de la mesure \mathbb{P} on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^m A_n\right) \leq \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^m \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

□

Définition 1.12. Soit A un événement de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

- On dit que A est *négligeable* si $\mathbb{P}(A) = 0$.
- On dit que A est *presque-sûr* si $\mathbb{P}(A) = 1$.

Corollaire 1.13. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Alors

- L'union dénombrable d'événements négligeables est négligeable.
- L'intersection dénombrable d'événements presque-sûrs est presque-sûre.

Proposition 1.14. Soit \mathcal{A} une famille d'événements de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Alors il existe une unique tribu $\sigma(\mathcal{A})$ telle que $\sigma(\mathcal{A})$ soit la plus petite tribu contenant \mathcal{A} .

Démonstration. Il existe au moins une tribu contenant \mathcal{A} , à savoir $\mathcal{P}(\Omega)$. Alors l'intersection de toutes les tribus contenant \mathcal{A} est une tribu et convient. \square

Définition 1.15. Soit \mathcal{A} une famille d'événements de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On appelle *tribu engendrée* par \mathcal{A} , notée $\sigma(\mathcal{A})$, la tribu de la Proposition 1.14.

Exemple 1.16. Soit A un événement de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Alors $\sigma(\{A\}) = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$.

1.2. Exemples d'espace probabilisés

Définition 1.17. Soit (E, \mathcal{O}) un espace topologique. On appelle *tribu borélienne* sur E , notée $\mathcal{B}(E)$, la tribu engendrée par les intervalles ouverts de E , c'est-à-dire $\mathcal{B}(E) := \sigma(\mathcal{O})$.

Lemme 1.18. Soit $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de mesures de probabilité sur (Ω, \mathcal{F}) et $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs telle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n = 1$. Alors $\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \mu_n$ est une mesure de probabilité sur (Ω, \mathcal{F}) .

1.2.1. Univers $\Omega = \mathbb{N}$

Se référer au cours de *Probabilités* de deuxième année.

1.2.2. Univers $\Omega = \mathbb{R}$

Exemple 1.19. (Mesure de Dirac) Soit $x \in \mathbb{R}$, l'application $\delta_x : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \delta_x(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{si } x \in A \end{cases}$$

est une mesure de probabilité sur \mathbb{R} .

Exemple 1.20. (Mesure uniforme sur $\{1, \dots, n\}$) L'application $\mu = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_k$ est une mesure uniforme sur \mathbb{R} .

Exemple 1.21. (Mesure de Poisson) Soit $\lambda > 0$, l'application $\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \delta_n$ est une mesure de Poisson sur \mathbb{R} .

Définition 1.22. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction borélienne. On dit que f est une *densité de probabilité* sur \mathbb{R} si elle vérifie :

- (1) pour λ -presque tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$,
- (2) $\int_{\mathbb{R}} f(x) d\lambda(x) = 1$.

Lemme 1.23. Soit f une densité de probabilité sur \mathbb{R} . Alors l'application $\mu_f : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu_f(A) = \int_A f(x) d\lambda(x)$ est une mesure de probabilité sur \mathbb{R} .

Démonstration. On a bien $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu_f(A) \geq 0$. De plus $\mu_f(\mathbb{R}) = 1$. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ deux à deux disjoints. On pose $A := \bigcup_{n \geq 1} A_n$, alors $\mathbb{1}_A = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{A_n}$ et

$$\mu_f(A) = \int_A f(x) d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(x) f(x) d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{A_n}(x) f(x) d\lambda(x)$$

d'après le théorème de convergence monotone on a

$$\mu_f(A) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^m \mathbb{1}_{A_n} f(x) d\lambda(x) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^m \mu_f(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_f(A_n).$$

Donc μ_f est bien une mesure de probabilité sur \mathbb{R} . □

Remarque 1.24. On dit que μ_f est la *mesure de densité* f .

Proposition 1.25. Soit f et g deux densités de probabilités sur \mathbb{R} . Alors les mesures de densité μ_f et μ_g sont égales si et seulement si f et g sont égales presque partout.

Démonstration.

\Rightarrow : Supposons que $\mu_f = \mu_g$. On pose

$$A_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > g(x)\}$$

$$A_- := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < g(x)\}$$

ces deux ensembles sont boréliens car f et g sont boréliennes. Par construction

$$\int_{A_+} f - g d\lambda = \mu_f(A_+) - \mu_g(A_+) = 0 = \int_{A_-} f - g d\lambda$$

de plus $A := \{x \in \mathbb{R} \mid |f(x) - g(x)| > 0\} = A_+ \cup A_-$, on en déduit

$$\int_A |f - g| d\lambda = \int_A (f - g) \mathbb{1}_{A_+} + (g - f) \mathbb{1}_{A_-} d\lambda = 0$$

donc $f - g = 0$ presque partout et $f = g$ presque partout.

\Leftarrow : Si $f = g$ presque partout, alors il est évident que $\mu_f = \mu_g$. □

Exemple 1.26. (Loi uniforme) Soit $c, d \in \mathbb{R}$ avec $c < d$. Alors la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\mathbb{1}_{[c,d]}(x)}{d-c}$ est une densité de probabilité. En particulier, pour tout $[a, b] \subset [c, d]$

$$\mu_f([a, b]) = \int_{[a,b]} f(x) d\lambda x = \frac{b-a}{d-c}.$$

On note la probabilité associée $\mathcal{U}([c, d])$.

Exemple 1.27. (Loi exponentielle) Soit $\lambda > 0$. Alors la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$ est une densité de probabilité. On note la probabilité associée $\mathcal{E}(\lambda)$.

Exemple 1.28. (Loi normale) La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ est une densité de probabilité. On note la probabilité associée $\mathcal{N}(0, 1)$.

1.2.3. Univers $\Omega = \mathbb{R}^d$

On peut étendre les exemples de \mathbb{R} , ainsi que les définitions de densité et de mesures de probabilité associée.

1.3. Classe monotone

Définition 1.29. Soit \mathcal{C} une famille de parties d'un ensemble Ω . On dit que \mathcal{C} est une *classe monotone* si elle vérifie :

- (1) $\Omega \in \mathcal{C}$,
- (2) $\forall A, B \in \mathcal{C}, A \subset B \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{C}$,
- (3) $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}^{\mathbb{N}}$ croissante, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{C}$.

Remarque 1.30. Une tribu est une classe monotone, la réciproque est fausse.

Lemme 1.31. Soit \mathcal{C} une classe monotone. Alors \mathcal{C} est une tribu si et seulement si elle est stable par intersection finie, c'est-à-dire :

$$\forall A_1, \dots, A_n \in \mathcal{C}, \bigcap_{k=1}^n A_k \in \mathcal{C}.$$

Démonstration.

\Rightarrow : Si \mathcal{C} est une tribu elle est stable par intersection finie.

\Leftarrow : Supposons que \mathcal{C} est stable par intersection finie. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de \mathcal{C} . Puisque \mathcal{C} est stable par passage au complémentaire, \mathcal{C} est aussi stable par union finie, en effet

$$A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A^c, B^c \in \mathcal{C} \Rightarrow A^c \cap B^c \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cup B = (A^c \cap B^c)^c \in \mathcal{C}$$

on a donc pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{n=0}^N A_n \in \mathcal{C}$, et par union croissante

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \underbrace{\bigcup_{n=0}^N A_n}_{\text{croissante}} \in \mathcal{C}$$

donc \mathcal{C} est bien une tribu. □

Définition 1.32. Soit \mathcal{A} une famille de parties d'un ensemble Ω . On appelle *classe monotone engendrée* par \mathcal{A} , notée $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, l'intersection de toutes les classes monotones contenant \mathcal{A} .

Théorème 1.33. (Théorème de la classe monotone) Soit \mathcal{A} une famille de partie d'un ensemble Ω . Si \mathcal{A} est stable par intersection finie, alors $\mathcal{C}(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$.

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$, on pose $\mathcal{C}_A := \{B \in \mathcal{C}(\mathcal{A}) \mid A \cap B \in \mathcal{C}(\mathcal{A})\}$. Puisque \mathcal{C}_A est une classe monotone contenant A , on a $\mathcal{C}_A = \mathcal{C}(\mathcal{A})$. Donc $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ est stable par intersection finie. D'après le [Lemme 1.31](#) $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ est une tribu. □

Corollaire 1.34. Soit μ et ν deux mesures de probabilités sur (Ω, \mathcal{F}) . S'il existe une famille de parties \mathcal{A} stable par intersection finie sur laquelle μ et ν coïncident, alors elles coïncident sur $\sigma(\mathcal{A})$.

2. Variables et vecteurs aléatoires

Définition 2.1. Soit (Ω, \mathcal{F}) un espace probabilisable. On appelle *vecteur aléatoire* une application borélienne $X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. Dans le cas $d = 1$, on dit que X est une *variable aléatoire*.

Proposition 2.2. Soit (Ω, \mathcal{F}) un espace probabilisable.

(1) Une application $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une variable aléatoire si et seulement si

$$\forall t \in \mathbb{R}, X^{-1}([-\infty, t]) \in \mathcal{F}$$

(2) Une application $X = (X_1, \dots, X_d) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ est un vecteur aléatoire si et seulement si X_1, \dots, X_d sont des variables aléatoires.

(3) Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ un vecteur aléatoire et $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application borélienne. Alors $\varphi \circ X$ est un vecteur aléatoire.

Démonstration.

(1) \Rightarrow : Si X est une variable aléatoire, alors X est mesurable et le résultat est évident.

\Leftarrow : Si pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $X^{-1}([-\infty, t]) \in \mathcal{F}$. Alors puisque la famille $\{[-\infty, t] \mid t \in \mathbb{R}\}$ engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, X est mesurable. Donc X est une variable aléatoire.

(2) On obtient le résultat par projection en appliquant (1) à X_1, \dots, X_n .

(3) On obtient le résultat par composition de fonctions boréliennes.

□

Proposition 2.3. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires sur (Ω, \mathcal{F}) .

(1) Si les applications $S := \sup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ et $I := \inf_{n \in \mathbb{N}} X_n$ sont finies, alors S et I sont des variables aléatoires.

(2) Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une limite finie X , alors X est une variable aléatoire.

Démonstration.

(1) On remarque que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $S^{-1}([-\infty, t]) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n^{-1}([-\infty, t])$ et que l'on peut écrire de la même manière pour I .

(2) On remarque que $X = \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = \limsup_{n \rightarrow +\infty} X_n = \liminf_{n \rightarrow +\infty} X_n$.

□

2.1. Loi d'un vecteur aléatoire

Proposition 2.4. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ un vecteur aléatoire. Alors l'application $\mathbb{P}_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}_+, A \mapsto \mathbb{P}(X^{-1}(A))$ est une mesure de probabilité sur \mathbb{R}^d .

Définition 2.5. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ un vecteur aléatoire. On appelle *loi de X* , notée \mathbb{P}_X , la mesure de probabilité de la Proposition 2.4. On dit aussi que X suit la loi \mathbb{P}_X .

Définition 2.6. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ un vecteur aléatoire. On appelle *atomes de X* , noté \mathcal{V}_X , l'ensemble

$$\mathcal{V}_X := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \mathbb{P}_X(\{x\}) > 0\}.$$

Exemple 2.7. (Loi de Bernoulli) On considère $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ avec $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et \mathbb{P} la mesure uniforme sur $[0, 1]$. On prend $X = \mathbb{1}_{[0, p]}$ avec $p \in [0, 1]$. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_X(A) &= \mathbb{P}(X^{-1}(A)) = \mathbb{P}(X^{-1}(A \cap \{0\})) + \mathbb{P}(X^{-1}(A \cap \{1\})) \\ &= \delta_0(A)\mathbb{P}(X^{-1}(0)) + \delta_1(A)\mathbb{P}(X^{-1}(1)) = \delta_0(A)(1 - p) + \delta_1(A)p \end{aligned}$$

donc $\mathbb{P}_X = \delta_0(1 - p) + \delta_1 p$.

Proposition 2.8. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $X = (X_1, \dots, X_d) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ un vecteur aléatoire. Si X admet une densité $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$, alors les variables aléatoires X_1, \dots, X_d admettent des densités $f_1, \dots, f_d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ avec

$$\forall i \in \{1, \dots, d\}, f_i(x) := \int_{\mathbb{R}^{d-1}} f(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_d) \, d\lambda(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d).$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème de Fubini. □