

Problème du rectangle inscrit

Emanuel Morille

14 Mai 2025

Table des matières

1. Bases de théorie des catégories	2
2. Homologie singulière	3
2.1. Simplexes	3
2.2. Chaînes	4
2.3. Complexes de chaînes	6
2.4. Morphismes de chaînes	6
2.5. Paires d'espaces topologiques	7
Bibliographie	9

10632

1. Bases de théorie des catégories

Définition 1.1. Une *catégorie* \mathcal{C} est la donnée de :

- Une classe $\text{ob}(\mathcal{C})$ dont les éléments sont appelés les *objets* de \mathcal{C} .
- Une classe $\text{hom}(\mathcal{C})$ dont les éléments sont appelés les *morphismes* de \mathcal{C} .
Un morphisme $f \in \text{hom}(\mathcal{C})$ a un *domaine* $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$ et un *codomaine* $Y \in \text{ob}(\mathcal{C})$. On note alors ce morphisme $f : X \rightarrow Y$ et $\text{hom}(X, Y)$ l'ensemble des morphismes de X dans Y .
- Pour tout objets $X, Y, Z \in \text{ob}(\mathcal{C})$, une *composition* :

$$\circ : \text{hom}(Y, Z) \times \text{hom}(X, Y) \rightarrow \text{hom}(X, Z).$$
- Pour tout objet $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$, un morphisme *identité* :

$$\text{id}_X : X \rightarrow X.$$

Vérifiant les propriétés suivantes pour tout objets $X, Y, Z, T \in \text{ob}(\mathcal{C})$:

- *Associativité* : Pour tout morphismes $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ et $h : Z \rightarrow T$, on a :

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

- *Identité* : Pour tout morphisme $f : X \rightarrow Y$, on a :

$$\text{id}_Y \circ f = f = f \circ \text{id}_X.$$

Exemples 1.2.

- La catégorie Top_2 , les objets sont les paires d'espaces topologiques et les morphismes sont les applications continues.
- La catégorie Ab , les objets sont les groupes abéliens et les morphismes sont les morphismes de groupes.

Définition 1.3. Soit \mathcal{C} et \mathcal{D} deux catégories. Un *foncteur* $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est la donnée :

- Pour tout objet $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$, d'un objet $F(X) \in \text{ob}(\mathcal{D})$.
- Pour tout objets $X, Y \in \text{ob}(\mathcal{C})$ et morphisme $f : X \rightarrow Y$, d'un morphisme $F(f) : F(X) \rightarrow F(Y)$.

Vérifiant les propriétés suivantes pour tout objets $X, Y, Z \in \text{ob}(\mathcal{C})$:

- *Composition* : Pour tout morphismes $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$, on a :

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f).$$

- *Identité* : On a :

$$F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}.$$

Exemple 1.4.

- Pour toute catégorie \mathcal{C} , l'identité $\text{id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ est un foncteur.

Définition 1.5. Soit \mathcal{C} et \mathcal{D} deux catégories, $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ deux foncteurs. Une *transformation naturelle* ∂ est la donnée pour tout objet $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$, d'un morphisme $\partial_X : F(X) \rightarrow G(X)$, vérifiant la propriété suivante pour tout objet $Y \in \text{ob}(\mathcal{C})$ et pour tout morphisme $f : X \rightarrow Y$, on a :

$$\partial_Y \circ F(f) = G(f) \circ \partial_X.$$

Remarque 1.6. Cette dernière égalité revient à ce que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ \partial_X \downarrow & & \downarrow \partial_Y \\ G(X) & \xrightarrow{G(f)} & G(Y) \end{array}$$

2. Homologie singulière

La majorité des énoncés suivants sont issus de la source [1].

Définition 2.1. Une *théorie de l'homologie* sur la catégorie des paires d'espaces topologiques Top_2 dans la catégorie des groupes abéliens Ab est une suite de foncteurs $(H_n : \text{Top}_2 \rightarrow \text{Ab})_{n \in \mathbb{Z}}$ munie de transformations naturelles $(\partial_n : H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A) := H_{n-1}(A, \emptyset))_{n \in \mathbb{Z}}$ vérifiant les *axiomes d'Eilenberg-Steenrod* pour toutes paires d'espaces topologiques $(X, A), (Y, B)$ et $n \in \mathbb{Z}$:

- *Dimension* : Soit P un espace constitué d'un unique point. Alors le groupe $H_n(P)$ est non-trivial si et seulement si $n = 0$.
- *Exactitude* : En notant $i : A \rightarrow X$ et $j : X \rightarrow (X, A)$ les inclusions canoniques, alors la suite suivante est exacte :

$$\dots \rightarrow H_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A) \xrightarrow{H_n(i)} H_n(X) \xrightarrow{H_n(j)} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A) \rightarrow \dots$$

- *Homotopie* : Soit $f_0, f_1 : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ deux morphismes de paires homotopes. Alors les applications induites en homologie $H_n(f_0), H_n(f_1) : H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B)$ sont égales.
- *Excision* : Soit U un sous-ensemble de A tel que l'adhérence de U est contenue dans l'intérieur de A . En notant $i : (X \setminus U, A \setminus U) \rightarrow (X, A)$ l'inclusion canonique. Alors l'application induite en homologie $H_n(i) : H_n(X \setminus U, A \setminus U) \rightarrow H_n(X, A)$ est un isomorphisme.

2.1. Simplexes

Définition 2.2. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel et A un sous-ensemble de E . On dit que A est *convexe* si :

$$\forall p, q \in A, [p, q] := \{(1-t)p + tq \mid t \in [0, 1]\} \subset A.$$

Définition 2.3. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel, A un sous-ensemble de E et p_0, \dots, p_n des éléments de A . On appelle *combinaison convexe* une combinaison de la forme $t_0 p_0 + \dots + t_n p_n$, telle que $t_0, \dots, t_n \in [0, 1]$ et $t_0 + \dots + t_n = 1$.

Proposition 2.4. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel, A un sous-ensemble de E et p_0, \dots, p_n des éléments de A . Si A est convexe, alors toute combinaison convexe de p_0, \dots, p_n appartient à A .

Démonstration. Soit $t_0, \dots, t_n \in [0, 1]$ tels que $t_0 + \dots + t_n = 1$. Notons $H(n) : t_0 p_0 + \dots + t_n p_n \in A$. Pour $n = 1$. On pose $t := t_1$, alors puisque A est convexe $t_0 p_0 + t_1 p_1 = (1-t)p_0 + t p_1 \in A$. Pour $n > 1$. On suppose que $H(n-1)$ est vérifiée. Sans perte de généralité, on suppose que $t_n \neq 0$, et on pose :

$$p := \frac{t_0}{1-t_n} p_0 + \dots + \frac{t_{n-1}}{1-t_n} p_{n-1}$$

alors d'après $H(n-1)$ on a $p \in A$. Par convexité on a $t_0 p_0 + \dots + t_n p_n = (1-t_n)p + t_n p_n \in A$. \square

Définition 2.5. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel et A un sous-ensemble de E . On appelle *enveloppe convexe* de A , notée $[A]$, l'ensemble des combinaisons convexes d'éléments de A .

Proposition 2.6. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel et A un sous-ensemble de E . Alors l'enveloppe convexe de A est le plus petit ensemble convexe contenant A .

Démonstration. Soit $p, q \in [A]$ et $t \in [0, 1]$. Puisque p et q sont des combinaisons convexes d'éléments de A , la combinaison $(1-t)p + tq$ est aussi une combinaison convexe d'éléments de A , d'après la Proposition 2.4 on a $(1-t)p + tq \in [A]$. Donc l'ensemble $[A]$ est convexe.

Soit B un sous-ensemble convexe de E contenant A . Soit $x \in [A]$. Puisque x est une combinaison convexe d'éléments de $A \subset B$, d'après la Proposition 2.4 on a $x \in B$. Donc $[A] \subset B$. \square

Définition 2.7. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel et F une famille libre de $n + 1$ éléments de E . On appelle n -simplexe généré par F l'enveloppe convexe de F . On dit que les éléments de F sont les *sommets* de $[F]$ et que n est la *dimension* de $[F]$.

Définition 2.8. On appelle n -simplexe standard, noté Δ^n , le n -simplexe généré par la base canonique de \mathbb{R}^{n+1} .

Proposition 2.9. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel et $F := (f_0, \dots, f_n)$ une famille libre de $n + 1$ éléments de E . Alors l'application :

$$\langle f_0, \dots, f_n \rangle : \Delta^n \rightarrow [F]; (t_0, \dots, t_n) \mapsto t_0 f_0 + \dots + t_n f_n$$

est un homéomorphisme.

Démonstration. Soit $(s_0, \dots, s_n), (t_0, \dots, t_n) \in \Delta^n$ tels que $s_0 f_0 + \dots + s_n f_n = t_0 f_0 + \dots + t_n f_n$. En particulier on a $(s_0 - t_0) f_0 + \dots + (s_n - t_n) f_n = 0$, et puisque la famille (f_0, \dots, f_n) est libre, on obtient $s_0 - t_0 = \dots = s_n - t_n = 0$, c'est-à-dire $(s_0, \dots, s_n) = (t_0, \dots, t_n)$. Donc $\langle f_0, \dots, f_n \rangle$ est injective.

Soit $x \in [F]$. Alors par définition de $[F]$, il existe $(t_0, \dots, t_n) \in \Delta^n$ tels que $x := t_0 f_0 + \dots + t_n f_n$. Donc $\langle f_0, \dots, f_n \rangle$ est surjective.

Puisque $\langle f_0, \dots, f_n \rangle$ est une application linéaire et que Δ^n est de dimension finie, $\langle f_0, \dots, f_n \rangle$ est continue. De plus Δ^n est compact et $[F]$ est séparé, donc $\langle f_0, \dots, f_n \rangle$ est un homéomorphisme. \square

Définition 2.10. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel, $F := (f_0, \dots, f_n)$ une famille libre de $n + 1$ éléments de E et $x := t_0 f_0 + \dots + t_n f_n$ un élément de $[F]$. On appelle *coordonnées barycentriques* de x les coefficients $t_0, \dots, t_n \in [0, 1]$.

Définition 2.11. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel, F une famille libre de $n + 1$ éléments de E et G une famille non-vide d'éléments de F . On dit que $[G]$ est une *face* de $[F]$.

2.2. Chaînes

Définition 2.12. Soit X un espace topologique. On appelle n -simplexe singulier sur X une application continue de Δ^n dans X .

Exemple 2.13. L'application $\langle e_0, \dots, e_n \rangle$ de la Proposition 2.9, où (e_0, \dots, e_n) est la base canonique de \mathbb{R}^{n+1} , est un n -simplexe singulier sur \mathbb{R}^{n+1} .

Définition 2.14. Soit X un espace topologique. On note $C_n(X)$ le groupe abélien libre engendré par les n -simplexes singuliers sur X , on appelle n -chaîne singulière un élément de $C_n(X)$.

Proposition 2.15. Soit X et Y deux espaces topologiques, $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ un n -simplexe singulier sur X et $f : X \rightarrow Y$ une application continue. Alors la composition $f \circ \sigma : \Delta^n \rightarrow Y$ est un n -simplexe singulier sur Y .

Démonstration. Puisque f est continue sur X et σ est continue sur Δ^n , par composition $f \circ \sigma$ est continue de Δ^n dans Y . Donc $f \circ \sigma$ est un n -simplexe singulier sur Y . \square

Définition 2.16. Soit X et Y deux espaces topologiques et $f : X \rightarrow Y$ une application continue. On appelle *application induite par f* , notée f_* , le morphisme de groupes :

$$f_* : C_n(X) \rightarrow C_n(Y); \sum_{k=0}^m \lambda_k \sigma_k \mapsto \sum_{k=0}^m \lambda_k (f \circ \sigma_k).$$

Proposition 2.17. Soit X, Y et Z trois espaces topologiques, $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ deux applications continues. Alors $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque les n -chaînes singulières sont engendrées par les n -simplexes singuliers, il suffit de montrer le résultat pour un n -simplexe singulier $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$. Alors on a :

$$(g \circ f)_*(\sigma) = (g \circ f) \circ \sigma = g \circ (f \circ \sigma) = g \circ f_*(\sigma) = g_*(f_*(\sigma))$$

□

Définition 2.18. Soit X un espace topologique et $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ un n -simplexe singulier sur X . On appelle *bord de σ* , noté $d_n\sigma$, la $(n-1)$ -chaîne singulière sur X définie par :

$$d_n\sigma := \sum_{k=0}^n (-1)^k (\sigma \circ \langle e_0, \dots, \widehat{e_k}, \dots, e_n \rangle).$$

où le symbole $\widehat{}$ signifie que l'élément est enlevé.

Définition 2.19. Soit X un espace topologique et $n \in \mathbb{N}$. On appelle *morphisme de bord*, noté d_n , le morphisme de groupes induit :

$$d_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X); \sum_{k=0}^m \lambda_k \sigma_k \mapsto \sum_{k=0}^m \lambda_k d_n \sigma_k.$$

Proposition 2.20. Soit X et Y deux espaces topologiques et $f : X \rightarrow Y$ une application continue. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $d_n f_* = f_* d_n$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque les n -chaînes singulières sont engendrées par les n -simplexes singuliers, il suffit de montrer le résultat pour un n -simplexe singulier $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$. Alors on a :

$$\begin{aligned} d_n f_*(\sigma) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k ((f \circ \sigma) \circ \langle e_0, \dots, \widehat{e_k}, \dots, e_n \rangle) \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k (f \circ (\sigma \circ \langle e_0, \dots, \widehat{e_k}, \dots, e_n \rangle)) \\ &= f_*(d_n \sigma). \end{aligned}$$

□

Proposition 2.21. Soit X un espace topologique. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $d_n \circ d_{n+1} = 0$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque les n -chaînes singulières sont engendrées par les n -simplexes singuliers, il suffit de montrer le résultat pour un n -simplexe singulier $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$. Alors on a :

$$d_{n+1}(\sigma) = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k (\sigma \circ \langle e_0, \dots, \widehat{e_k}, \dots, e_n \rangle)$$

donc en appliquant d_n , on obtient :

$$\begin{aligned} (d_n \circ d_{n+1})(\sigma) &= d_n \left(\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k (\sigma \circ \langle e_0, \dots, \widehat{e_k}, \dots, e_n \rangle) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k d_n (\sigma \circ \langle e_0, \dots, \widehat{e_k}, \dots, e_n \rangle) \\ &= \sum_{0 \leq k < l \leq n+1} (-1)^{k+l} (\sigma \circ \langle e_0, \dots, \widehat{e_k}, \dots, \widehat{e_l}, \dots, e_n \rangle) \\ &\quad + \sum_{0 \leq l < k \leq n+1} (-1)^{k+l-1} (\sigma \circ \langle e_0, \dots, \widehat{e_l}, \dots, \widehat{e_k}, \dots, e_n \rangle) \\ &= \sum_{0 \leq k < l \leq n+1} ((-1)^{k+l} + (-1)^{k+l+1}) (\sigma \circ \langle e_0, \dots, \widehat{e_k}, \dots, \widehat{e_l}, \dots, e_n \rangle) \\ &= 0 \end{aligned}$$

car les puissances de -1 s'annulent.

□

2.3. Complexes de chaînes

Définition 2.22. Soit X un espace topologique. On appelle *complexe de chaînes singulières*, noté $C_\bullet(X)$, la suite de groupes abéliens libres $(C_n(X))_{n \in \mathbb{Z}}$ munie des morphismes de bords $(d_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X))_{n \in \mathbb{Z}}$, avec pour convention $C_n(X)$ trivial si $n < 0$.

Définition 2.23. Soit $C_\bullet(X)$ un complexe de chaînes singulières et $n \in \mathbb{Z}$.

- On appelle *n-cycle singulier* un élément de $Z_n(X) := \ker(d_n)$.
- On appelle *n-bord singulier* un élément de $B_n(X) := \text{im}(d_{n+1})$.
- On appelle *n^e groupe d'homologie singulière* le groupe quotient $H_n(X) := Z_n(X)/B_n(X)$.

Remarque 2.24. Soit $C_\bullet(X)$ un complexe de chaînes singulières et $n \in \mathbb{Z}$. Puisque $d_n \circ d_{n+1} = 0$, on a $B_n(X) = \text{im}(d_{n+1}) \subset \ker(d_n) = Z_n(X)$.

Remarque 2.25. Soit $C_\bullet(X)$ un complexe de chaînes singulières et $n \in \mathbb{Z}$. Si $n < 0$, alors $Z_n(X)$ et $B_n(X)$ sont triviaux, donc $H_n(X)$ est trivial.

Définition 2.26. Soit $C_\bullet(X)$ un complexe de chaînes singulières et $n \in \mathbb{Z}$.

- On dit que $C_\bullet(X)$ est *exact en $C_n(X)$* si $H_n(X)$ est trivial, c'est-à-dire, $\text{im}(d_{n+1}) = \ker(d_n)$.
- On dit que $C_\bullet(X)$ est *exact* s'il est exact en tout $(C_n(X))_{n \in \mathbb{Z}}$.
- On dit que $C_\bullet(X)$ est *acyclique* s'il est exact en tout $(C_n(X))_{n \in \mathbb{Z}}$ avec $n \neq 0$.

Définition 2.27. Soit $C_\bullet(X)$ un complexe de chaînes singulières et $n \in \mathbb{Z}$. On appelle *n^e nombre de Betti de X* le rang de $H_n(X)$ s'il est fini.

2.4. Morphismes de chaînes

Définition 2.28. Soit $C_\bullet(X)$ et $C_\bullet(Y)$ deux complexes de chaînes singulières. On appelle *morphisme de chaînes*, noté $\varphi_\bullet : C_\bullet(X) \rightarrow C_\bullet(Y)$, une suite de morphismes $(\varphi_n : C_n(X) \rightarrow C_n(Y))_{n \in \mathbb{Z}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $d_n \varphi_n = \varphi_{n-1} d_n$.

Proposition 2.29. Soit $C_\bullet(X)$ et $C_\bullet(Y)$ deux complexes de chaînes singulières, $\varphi_\bullet : C_\bullet(X) \rightarrow C_\bullet(Y)$ un morphisme de chaînes. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, φ_n induit un morphisme de $H_n(X)$ dans $H_n(Y)$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

Soit $\sigma \in Z_n(X)$. Alors on a $d_n \varphi_n(\sigma) = \varphi_{n-1}(d_n \sigma) = \varphi_{n-1}(0) = 0$, donc $\varphi_n(\sigma) \in Z_n(Y)$.

Soit $\beta \in B_n(X)$. Alors il existe $\sigma \in C_{n+1}(X)$ tel que $\beta = d_{n+1} \sigma$, et on a :

$$\varphi_n(\beta) = \varphi_n(d_{n+1} \sigma) = d_{n+1} \varphi_{n+1}(\sigma)$$

donc $\varphi_n(\beta) \in B_n(Y)$.

On pose $\psi_n := \overline{\varphi_n} : Z_n(X) \rightarrow H_n(Y)$, alors $B_n(X) \subset \ker(\psi_n)$ et d'après la propriété universelle du groupe quotient le morphisme ψ_n induit bien un morphisme de $H_n(X)$ dans $H_n(Y)$. \square

Définition 2.30. Soit $C_\bullet(X)$ et $C_\bullet(Y)$ deux complexes de chaînes singulières, $\varphi_\bullet : C_\bullet(X) \rightarrow C_\bullet(Y)$ un morphisme de chaînes. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note $H_n(\varphi) : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ le morphisme induit par φ_n .

Proposition 2.31. Soit $C_\bullet(X)$, $C_\bullet(Y)$ et $C_\bullet(Z)$ trois complexes de chaînes singulières, $\varphi_\bullet : C_\bullet(X) \rightarrow C_\bullet(Y)$ et $\psi_\bullet : C_\bullet(Y) \rightarrow C_\bullet(Z)$ deux morphismes de chaînes. Alors la composition $\psi_\bullet \circ \varphi_\bullet : C_\bullet(X) \rightarrow C_\bullet(Z)$ est un morphisme de chaînes.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors on a :

$$d_n(\psi_n \circ \varphi_n) = \psi_{n-1} d_n \varphi_n = (\psi_{n-1} \circ \varphi_{n-1}) d_n.$$

Donc $(\psi_n \circ \varphi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est bien un morphisme de chaînes. \square

Proposition 2.32. Soit $C_\bullet(X)$ et $C_\bullet(Y)$ deux complexes de chaînes singulières, et $f : X \rightarrow Y$ une application continue. Alors l'application induite f_* détermine un morphisme de chaînes.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on considère le morphisme défini par $\varphi_n := f_*$. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors d'après la Proposition 2.20 on a :

$$d_n \varphi_n = d_n f_* = f_* d_n = \varphi_{n-1} d_n.$$

Donc $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est bien un morphisme de chaînes. \square

Définition 2.33. Soit $C_\bullet(X)$ et $C_\bullet(Y)$ deux complexes de chaînes singulières, et $f : X \rightarrow Y$ une application continue. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note $H_n(f) : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ le morphisme induit par le morphisme de chaînes déterminé par f_* .

2.5. Paires d'espaces topologiques

Définition 2.34. Soit X un espace topologique et A un sous-ensemble de X . On appelle *paire d'espaces topologiques* le couple (X, A) .

Proposition 2.35. Soit (X, A) une paire d'espaces topologiques. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, d_n induit un morphisme \bar{d}_n de $C_n(X)/C_n(A)$ dans $C_{n-1}(X)/C_{n-1}(A)$ tel que $\bar{d}_n \circ \bar{d}_{n+1} = 0$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors on a $C_n(A) \subset C_n(X)$, on peut donc former le quotient $C_n(X)/C_n(A)$.

On pose $\delta_n := \bar{d}_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)/C_{n-1}(A)$, alors $C_n(A) \subset \ker(\delta_n)$ et d'après la propriété universelle du groupe quotient δ_n induit bien un morphisme \bar{d}_n de $C_n(X)/C_n(A)$ dans $C_{n-1}(X)/C_{n-1}(A)$. Enfin puisque $d_n \circ d_{n+1} = 0$, on a $\bar{d}_n \circ \bar{d}_{n+1} = 0$. \square

Remarque 2.36. Soit (X, A) une paire d'espaces topologiques. La suite $(C_n(X)/C_n(A))_{n \in \mathbb{Z}}$ munie des morphismes de bords induits $(\bar{d}_n : C_n(X)/C_n(A) \rightarrow C_{n-1}(X)/C_{n-1}(A))_{n \in \mathbb{Z}}$ forme un complexe de chaînes singulières.

Définition 2.37. Soit (X, A) une paire d'espaces topologiques. On appelle *complexe de chaînes singulières de la paire (X, A)* le complexe de chaînes singulières quotient $C_\bullet(X, A) := C_\bullet(X)/C_\bullet(A)$.

Remarque 2.38. Dans le cas de la paire d'espaces topologiques (X, \emptyset) , on trouve $C_\bullet(X, \emptyset) \simeq C_\bullet(X)$ et $H_\bullet(X, \emptyset) \simeq H_\bullet(X)$.

Définition 2.39. Soit (X, A) et (Y, B) deux paires d'espaces topologiques, et $f : X \rightarrow Y$ une application continue. On dit que f est un *morphisme de paires*, noté $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$, si $f(A)$ est contenue dans B .

Proposition 2.40. Soit $C_\bullet(X, A)$ et $C_\bullet(Y, B)$ deux complexes de chaînes singulières, et $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ un morphisme de paires. Alors l'application induite $f_* : C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$ détermine un morphisme de chaînes.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on pose $\varphi_n := \bar{f}_* : C_n(X) \rightarrow C_n(Y, B)$, alors puisque $f(A) \subset B$, on en déduit $f_*(C_n(A)) \subset \ker(\varphi_n)$ et d'après la propriété universelle du groupe quotient φ_n induit un morphisme $\bar{\varphi}_n$ de $C_n(X, A)$ dans $C_n(Y, B)$.

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors d'après la Proposition 2.20 puisque $d_n f_* = f_* d_n$, on a $\overline{d_n \varphi_n} = \overline{\varphi_{n-1} d_n}$. Donc φ_n est bien un morphisme de chaînes. \square

Définition 2.41. Soit $C_\bullet(X, A)$ et $C_\bullet(Y, B)$ deux complexes de chaînes singulières, et $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ un morphisme de paires. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note $H_n(f) : H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B)$ le morphisme induit par le morphisme de chaînes déterminé par f_* .

Théorème 2.42. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le n^e groupe d'homologie singulière des paires d'espaces topologiques $H_n : \text{Top}_2 \rightarrow \text{Ab}$ est un foncteur.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

- Soit (X, A) une paire d'espaces topologiques. Alors le n^e groupe d'homologie singulière $H_n(X, A)$ est bien un groupe abélien libre.
- Soit (X, A) et (Y, B) deux paires d'espaces topologiques, et $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ un morphisme de paires. Alors l'application $H_n(f) : H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B)$ est un bien morphisme de groupes.

Soit (X, A) , (Y, B) et (Z, C) trois paires d'espaces topologiques.

- Soit $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ et $g : (Y, B) \rightarrow (Z, C)$ deux morphismes de paires. Alors la composition $g \circ f : (X, A) \rightarrow (Z, C)$ est un morphisme de paires qui passe au quotient et vérifie :

$$H_n(g \circ f) = H_n(g) \circ H_n(f).$$

- On considère $\text{id}_{(X, A)}$. Soit $\sigma : \Delta^n \rightarrow (X, A)$ un n -simplexe singulier, alors :

$$\text{id}_{(X, A)*}(\sigma) = \text{id}_{(X, A)} \circ \sigma = \sigma$$

puisque les n -chaînes singulières sont engendrées par les n -simplexes singuliers, on en déduit que $\text{id}_{(X, A)*} = \text{id}_{C_n(X, A)}$, par passage au quotient on a :

$$H_n(\text{id}_{(X, A)}) = \text{id}_{H_n(X, A)}.$$

Donc H_n est un foncteur. □

Proposition 2.43. Soit $C_\bullet(X, A)$ un complexe de chaînes singulières. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, les groupes $H_n(X, A)$ et $d_n^{-1}(C_{n-1}(A))/(d_{n+1}(C_{n+1}(X)) + C_n(A))$ sont isomorphes.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

Soit $\tau \in d_{n+1}(C_{n+1}(X)) + C_n(A)$, il existe $\sigma_1 \in C_{n+1}(X)$ et $\sigma_2 \in C_n(A)$ tels que $\tau = d_{n+1}\sigma_1 + \sigma_2$. Alors d'après la Proposition 2.21 on a :

$$d_n\tau = d_n(d_{n+1}\sigma_1 + \sigma_2) = (d_n \circ d_{n+1})\sigma_1 + d_n\sigma_2 = d_n\sigma_2$$

donc $\tau \in d_n^{-1}(C_{n-1}(A))$, on peut donc former le quotient $d_n^{-1}(C_{n-1}(A))/(d_{n+1}(C_{n+1}(X)) + C_n(A))$.

On pose $\varphi : d_n^{-1}(C_{n-1}(A)) \rightarrow H_n(X, A); \sigma \mapsto \bar{\sigma}$, qui est bien un morphisme de groupes.

- Soit $\eta \in \overline{H_n(X, A)}$, il existe $\zeta \in Z_n(X, A)$ et $z \in C_n(X)$ tels que $\eta = \bar{\zeta}$ et $\zeta = \bar{z}$.
Puisque $\bar{d}_nz = \bar{d}_n\zeta = 0 \in C_n(X, A)$, il existe $\sigma \in C_{n-1}(A)$ tel que $d_nz = \sigma$, d'où $z \in d_n^{-1}(C_{n-1}(A))$.
Donc $\varphi(z) = \eta$ et φ est surjectif.
- Soit $\sigma \in \ker(\varphi)$. Puisque $\bar{\tau} = 0 \in H_n(X, A)$, il existe $b \in B_n(X, A)$ tel que $\bar{\tau} = \bar{b}$. C'est-à-dire qu'il existe $c \in C_{n+1}(X, A)$ et $\sigma \in C_{n+1}(X)$ tels que $b = \bar{d}_{n+1}c$ et $c = \bar{\sigma}$.
On peut écrire $\bar{\tau} = \bar{d}_{n+1}\bar{\sigma} = \bar{d}_{n+1}\sigma \in C_n(X, A)$, donc $\tau \in d_{n+1}(C_{n+1}(X)) + C_n(A)$.

Soit $\tau \in d_{n+1}(C_{n+1}(X)) + C_n(A)$, il existe $\sigma_1 \in C_{n+1}(X)$ et $\sigma_2 \in C_n(A)$ tels que $\tau = d_{n+1}\sigma_1 + \sigma_2$. Alors $\bar{\tau} = \bar{d}_{n+1}\sigma_1 = \bar{d}_{n+1}\bar{\sigma} \in C_n(X, A)$, d'où $\bar{\tau} \in B_n(X, A)$ et $\bar{\tau} = 0 \in H_n(X, A)$, donc $\tau \in \ker(\varphi)$.

D'après le premier théorème d'isomorphisme φ induit un isomorphisme entre les groupes $H_n(X, A)$ et $d_n^{-1}(C_{n-1}(A))/(d_{n+1}(C_{n+1}(X)) + C_n(A))$. □

Proposition 2.44. Soit $C_\bullet(X, A)$ un complexe de chaînes singulières. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, d_n induit un morphisme ∂_n de $H_n(X, A)$ dans $H_{n-1}(A)$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$. D'après la Proposition 2.43 il existe un isomorphisme :

$$\varphi : d_n^{-1}(C_{n-1}(A))/(d_{n+1}(C_{n+1}(X)) + C_n(A)) \rightarrow H_n(X, A).$$

Pour tout $\eta \in H_n(X, A)$, il existe $\tau \in d_n^{-1}(C_{n-1}(A))$ tel que $\eta = \varphi(\bar{\tau})$. Alors d'après la Proposition 2.21 on a $d_{n-1}d_n\tau = 0$, donc $d_n\tau \in Z_{n-1}(A)$. On pose $\partial_n(\eta) := \bar{d}_n\tau \in H_{n-1}(A)$.

Supposons que $\eta = 0$, c'est-à-dire $\tau \in d_{n+1}(C_{n+1}(X)) + C_n(A)$, alors $d_n\tau \in B_n(A)$, d'où $\partial_n(\eta) = 0$. Donc ∂_n est un morphisme bien défini. □

Théorème 2.45. Soit $C_\bullet(X, A)$ et $C_\bullet(Y, B)$ deux complexes de chaînes singulières, $\varphi_\bullet : C_\bullet(X) \rightarrow C_\bullet(Y)$ un morphisme de chaînes. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le morphisme ∂_n est une transformation naturelle, c'est-à-dire :

$$\partial_n \varphi_n = \varphi_{n-1} \partial_n.$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Puisque ∂_n est induit par d_n , d'après la Proposition 2.21 on a bien :

$$\partial_n \varphi_n = \varphi_{n-1} \partial_n.$$

□

Théorème 2.46. La suite des n^e groupe d'homologie singulière des paires d'espaces topologiques $(H_n : \text{Top}_2 \rightarrow \text{Ab})_{n \in \mathbb{Z}}$ munie des morphismes $(\partial_n : H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A))_{n \in \mathbb{Z}}$ est une théorie de l'homologie vérifiant les axiomes d'Eilenberg-Steenrod.

Démonstration de l'axiome de dimension. Si $n < 0$, on a clairement $H_n(P) \simeq \{0\}$.

Si $n \geq 0$, il existe un unique n -simplexe singulier $\sigma_n : \Delta^n \rightarrow P$, alors on a :

$$\partial_n \sigma_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \text{ ou } n \text{ est impair} \\ \sigma_{n-1} & \text{si } n \neq 0 \text{ et } n \text{ est pair} \end{cases}$$

dans le cas $n = 0$, alors $H_0(P) = \langle \sigma_0 \rangle / \{0\} \simeq \mathbb{Z}$,

dans le cas $n \neq 0$ et n est impair, alors $H_n(P) = \langle \sigma_n \rangle / \langle \sigma_n \rangle \simeq \{0\}$,

dans le cas $n \neq 0$ et n est pair, alors $H_n(P) = \{0\} / \{0\} \simeq \{0\}$.

□

Démonstration de l'axiome d'exactitude. TODO.

□

Démonstration de l'axiome d'homotopie. TODO.

□

Démonstration de l'axiome d'excision. TODO.

□

Théorème 2.47 (Théorème de Mayer-Vietoris). Soit U et V deux ouverts d'un espace topologique. En notant $i_U : U \cap V \rightarrow U$, $i_V : U \cap V \rightarrow V$, $j_U : U \rightarrow U \cup V$ et $j_V : V \rightarrow U \cup V$ les inclusions canoniques, alors la suite suivante est exacte :

$$\dots \rightarrow H_{n+1}(U \cup V) \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(U \cap V) \xrightarrow{(-i_{U*}, i_{V*})} H_n(U) \oplus H_n(V) \xrightarrow{j_{U*} + j_{V*}} H_n(U \cup V) \rightarrow \dots$$

Démonstration. TODO.

□

Bibliographie

[1] Eduard Looijenga, *Algebraic Topology - an introduction*. 2010.