

# POPULAÇÕES ESTÁVEIS / TEÓRICAS

## 22.1 INTRODUÇÃO

Até a década de 60 do século passado se podia supor, com um grau razoável de veracidade, que os países da África Subsaariana e Ásia viviam um regime demográfico de taxas de mortalidade e fecundidade mais ou menos constantes. Até certo ponto isso valia inclusive para boa parte da América Latina, embora as fortes imigrações para alguns países do continente e as quedas da mortalidade e fecundidade em países com Argentina e Uruguai antes de 1940 perturbassem tal situação em alguma medida. Um regime demográfico deste tipo se caracteriza por taxas de crescimento constantes e uma estrutura por idade e sexo constantes ao longo do tempo. Como se verá mais adiante, neste tipo de regime demográfico também existem relações muito simples entre a estrutura da população por idade e sexo e a tábua de vida, bem como outros indicadores. A esperança de vida, por exemplo, pode ser calculada de uma forma muito simples a partir da estrutura etária. Populações deste tipo, com mortalidade e fecundidade constantes e fechadas à migração por um século ou mais se chamam *estáveis*. A população estacionária do Capítulo 9 é um caso especial da população estável, com uma taxa de crescimento constante igual a zero. Como se viu na seção 9.3 do Capítulo 9, numa população deste tipo, a estrutura etária reflete, inclusive, a tábua de vida diretamente, sem a necessidade de cálculos adicionais.

Na prática a estabilidade é uma condição muito rara, porque a constância das funções de fecundidade, de mortalidade e migração exige que a população se mantenha isolada de qualquer interferência nos seus regimes demográficos. Essa condição pode ser alcançada de forma imediata apenas pelas populações fechadas que vivenciam a *semiestabilidade*, ou seja, a constância

da estrutura etária, independente do crescimento dos seus parâmetros (Caselli, Vallin e Wunsch, 2006: Cap. 20). Contudo, populações *semiestáveis* também não são muito frequentes no mundo. Por outro lado, a *quase-estabilidade* é a condição geralmente presente nas populações que antecedem o processo de transição demográfica, como aquelas descritas no parágrafo anterior, ou em populações que já passaram por esse processo. A população *quase-estável* apresenta uma estrutura etária pouco variante, devido à constância da função de fecundidade e a pequenas flutuações na função de mortalidade (Caselli, Vallin e Wunsch, 2006: Cap. 20). Na medida em que a maioria dos países do mundo, inclusive os da África Subsaariana, já experimentou alguma queda da sua mortalidade e fecundidade, a quase-estabilidade não é mais uma condição comum nos dias de hoje, tanto que Moultrie et al. (2013), na Introdução do seu manual para a análise de dados demográficos deficientes, praticamente descartam a possibilidade de basear estimativas demográficas confiáveis no uso deste modelo, como era comum nos anos 60 do século passado.

Entretanto, o modelo da população estável continua interessando os demógrafos por vários motivos:

1. A hipótese estável fornece um ponto de referência conveniente para certos cenários hipotéticos do tipo, “Suponha-se que os atuais níveis de mortalidade e fecundidade continuem inalterados durante o próximo século. Qual seria a implicação disso para a política social na área X que depende fortemente da estrutura etária da população ?”
2. O modelo de população estável pode ser usado como referência para ilustrar certos princípios de análise demográfica onde a estrutura da população tem um papel importante, como a estimação das probabilidades de morte  ${}_nq_x$  numa tábua de vida de período (ver seção 22.3).
3. Frequentemente é interessante decompor o crescimento de uma população numa componente “estrutural” ou “intrínseca”, concebida como uma população estável, e uma parte “inercial” ou “transitória”, que decorre das diferenças entre a estrutura etária real e a estrutura estável.
4. Mesmo que o modelo estável não se aplique à grande maioria das populações no mundo hoje em dia, poderá voltar a ser relevante no futuro, se a transição demográfica resultar outra vez em regimes de mortalidade e fecundidade mais ou menos constantes.
5. O modelo estável serve de ponto de partida para algumas generalizações que têm uma aplicabilidade mais ampla.

O modelo de população estável relaciona matematicamente parâmetros populacionais de curto e de longo prazo, evidenciando como diferentes componentes da estrutura etária e do processo populacional estão conectados. O princípio geral que fundamenta a teoria de populações estáveis é o princípio de *ergodicidade*, o qual afirma que no longo prazo a estrutura etária de uma população depende do comportamento da sua mortalidade e fecundidade (e eventualmente migração) e que a estrutura etária inicial será “esquecida”. Duas populações com estruturas etárias inicialmente diferentes que durante muito tempo são submetidas ao mesmo regime constante de mortalidade e fecundidade, na ausência de migração internacional, convergem para a mesma estrutura etária

no longo prazo. Isso se chama o *princípio ergódico forte*, que já foi introduzido formalmente em (17.60). O *princípio ergódico débil* afirma que, mesmo que as taxas de mortalidade e fecundidade não forem constantes, mas sim iguais para uma população e outra, as suas estruturas etárias convergirão. As provas matemáticas de ambas as proposições estão além deste texto.

Nas seções seguintes, o modelo de população estável será introduzido de forma sistemática, seguindo a exposição feita em Preston, Heuveline e Guillot (2001). Para uma apresentação alternativa, que em alguns aspectos pode ser mais intuitiva, o leitor é referido a Wachter (2014).

## 22.2 EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS DE UMA POPULAÇÃO ESTÁVEL

Por definição, uma população estável tem uma tábua de vida e uma função de fecundidade constantes e ela é fechada à migração<sup>1</sup>. Mas diferentemente da população estacionária da seção 8.3, o seu tamanho, bem como o número anual de nascimentos, varia no tempo. Supondo que o número de nascimentos cresce a uma taxa constante  $r$ , se verifica que

$$B(t) = B(0) e^{rt} \quad (22.1)$$

As pessoas que compõem o grupo etário de  $(x, x+n)$  anos exatos são os sobreviventes da coorte que nasceu, na média, faz  $x+n/2$  anos, cujo tamanho portanto foi aproximadamente  $B(0) e^{-r(x+n/2)}$ , de modo que o tamanho atual daquela coorte é

$${}_n P_x(0) = B(0) {}_n L_x e^{-r(x+\frac{n}{2})} / \ell_0 \quad (22.2.a)$$

e

$${}_n P_x(t) = B(0) {}_n L_x e^{rt-r(x+\frac{n}{2})} / \ell_0 \quad (22.2.b)$$

onde geralmente  $B$ ,  ${}_n P_x$  e  ${}_n L_x$  são todos diferenciados por sexo. Ou seja, uma população estável tem a estrutura de uma população estacionária, mas com um desconto de  $e^{-rx}$  em cada idade  $x$ . Como a tábua de vida é constante, o número de óbitos varia na mesma proporção de  $B(t)$ , ou seja

$$D(t) = D(0) e^{rt} \quad (22.3)$$

Como esta é a mesma taxa de crescimento da população, tanto a TBN como a TBM são constantes, com os seguintes valores:

$$TBN(t) = B(t) / \sum_{x=0}^{\omega} {}_n P_x(t) = \ell_0 / \sum_{x=0}^{\omega} {}_n L_x e^{-r(x+\frac{n}{2})} \quad (22.4)$$

e

$$TBM(t) = TBN(t) - r = TBN(0) - r \quad (22.5)$$

<sup>1</sup> Em realidade, a condição de ausência de migração não é estritamente necessária. É possível formular uma variante do modelo estável com migração, desde que as taxas de migração sejam constantes (Espenshade, Bouvier e Arthur, 1982). Evidentemente, isso mudaria a interpretação das relações apresentadas aqui.

Uma implicação importante de (22.4) é que, no caso em que  $r=0$ ,

$$TBN(t) = \ell_0 / \sum_{x=0}^{\omega} {}_nL_x = \frac{1}{e_0} \quad (22.6)$$

Noutras palavras, como já foi mencionado no Capítulo 9, numa população estacionária a TBN é igual a 1 dividida pela esperança de vida ao nascer. Por outro lado, a TBM também pode ser escrita como

$$\begin{aligned} TBM(t) &= \sum_{x=0}^{\omega} {}_nL_x(t) \quad {}_n m_x / \sum_{x=0}^{\omega} {}_nL_x(t) = \\ &= \sum_{x=0}^{\omega} {}_nL_x e^{-r(x+\frac{n}{2})} \quad {}_n m_x / \sum_{x=0}^{\omega} {}_nL_x e^{-r(x+\frac{n}{2})} \end{aligned} \quad (22.7)$$

Todas estas expressões também podem ser escritas como funções contínuas, usando integrais em vez de somas. Por exemplo, (22.7) pode ser escrita também como:

$$TBM(t) = \int_0^{\infty} \ell_x e^{-rx} \mu(x) dx / \int_0^{\infty} \ell_x e^{-rx} dx \quad (22.8)$$

Resta o problema de determinar  $r$  a partir das Taxas Específicas de Fecundidade  $f_x$ . Limitando o número de nascimentos  $B(0)$  só a nascimentos do sexo feminino, o mesmo número de nascimentos femininos no ano 0 também pode ser escrito como

$$\sum_{x=\alpha}^{\beta} B(0) e^{-r(x+\frac{n}{2})} \frac{{}_nL_x^F}{\ell_0} \frac{{}_nf_x}{1+RS_0} \quad (22.9)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  (normalmente  $\alpha=15$  e  $\beta=50$ ) são os limites do intervalo etário reprodutivo feminino, a primeira parte da expressão na soma é a população feminina de  $x$  a  $x+n$  anos (com  ${}_nL_x$  da tábua de vida feminina) e a segunda parte se refere ao número de nascimentos femininos ocorridos a mulheres de  $x$  a  $x+n$  anos. Mas o resultado de (22.9) deveria ser justamente  $B(0)$ , de modo que dá para dividir ambos os lados por  $B(0)$ , o que leva ao seguinte resultado:

$$\sum_{x=\alpha}^{\beta} e^{-r(x+\frac{n}{2})} \frac{{}_nL_x^F}{\ell_0} \frac{{}_nf_x}{1+RS_0} = 1 \quad (22.10)$$

Esta relação é conhecida como a *equação fundamental* de (Euler-)Lotka (1939). A sua versão contínua é a seguinte:

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{-rx} \ell^F(x) \frac{f(x)}{1+RS_0} dx = 1 \quad (22.11)$$

A taxa  $r$  que pode ser obtida como solução de (22.10) ou (22.11) é usualmente chamada de *taxa intrínseca de crescimento*. Esta é a taxa de crescimento dos nascimentos e da própria população que seria observada no longo prazo caso a população ficasse exposta às mesmas funções  $\ell(x)$  e  $f(x)$

por muito tempo. Para simplificar as relações (22.10) e (22.11)  $f_x / (1+RS_0)$  às vezes é chamada a *função de maternidade bruta*, notada como  $m(x)$ . A expressão  $L_x \cdot f_x / (\ell_0 \cdot (1+RS_0))$  no seu conjunto, com  $L_x$  obtida da tábua de vida feminina, às vezes é chamada a *função de maternidade líquida*.

A partir das fórmulas apresentadas acima podem ser derivadas outras que se aplicam ao caso especial da população estável. Para começar, existem três idades médias relevantes que caracterizam o comprimento médio de uma geração ( $T$ ), a idade média da população ( $x_p$ ) e a idade média dos óbitos ( $x_D$ ). A fórmula para o comprimento de uma geração seria

$$T = \int_{\alpha}^{\beta} x e^{-rx} \ell^F(x) \frac{f(x)}{1+RS_0} dx / \int_{\alpha}^{\beta} e^{-rx} \ell^F(x) \frac{f(x)}{1+RS_0} dx \quad (22.12)$$

Mas como o denominador é igual a 1 (segundo 22.11), o resultado é simplesmente

$$T = \int_{\alpha}^{\beta} x e^{-rx} \ell^F(x) \frac{f(x)}{1+RS_0} dx \quad (22.13)$$

As outras duas médias são

$$x_p = \int_0^{\infty} x \ell(x) e^{-rx} dx / \int_0^{\infty} \ell(x) e^{-rx} dx \quad (22.14)$$

e

$$x_D = \int_0^{\infty} x \ell(x) e^{-rx} \mu(x) dx / \int_0^{\infty} \ell(x) e^{-rx} \mu(x) dx \quad (22.15)$$

Pode ser provado (embora não se derive a prova aqui) que existe a seguinte relação entre  $x_p$  e  $x_D$ :

$$x_p = (1 - x_D TBM) / r \quad (22.16)$$

Esta relação não pode ser aplicada para populações estacionárias, onde  $r = 0$ . Nestas populações vale a seguinte relação alternativa:

$$x_p = \frac{1}{2} \left( e_0 + \frac{\sigma^2}{e_0} \right) \quad (22.17)$$

onde  $\sigma^2$  é a variância da idade ao morrer. A prova de (22.17) pode ser encontrada em Presat (1967). Finalmente vale mencionar as seguintes relações aproximadas cuja prova está em Schindler et al. (2012):

$$TBN \approx \frac{1}{e_0} + \frac{1}{2} r + \frac{1}{2} r \frac{\sigma^2}{e_0} \quad (22.18)$$

e

$$TBM \approx \frac{1}{e_0} - \frac{1}{2} r + \frac{1}{2} r \frac{\sigma^2}{e_0} \quad (22.19)$$

Para  $r = 0$ , estas expressões se reduzem a (22.6). Nota-se que  $TBN - TBM = r$ , conforme (22.5).

## 22.3 DUAS APLICAÇÕES BÁSICAS DO CONCEITO DE POPULAÇÕES ESTÁVEIS

### 22.3.1 A razão de dependência em populações estáveis

De uma forma geral, a Razão de Dependência de uma população depende do seu ritmo de crescimento. Populações que crescem muito rapidamente tendem a ter Razões de Dependência elevadas devido ao grande número de crianças na base da sua pirâmide etária. No outro extremo, populações que crescem pouco ou que diminuem também tendem a ter Razões de Dependência altas, devido à sua estrutura etária envelhecida. As razões mais baixas se encontram no meio. Agora, embora exista essa relação geral, na maioria das populações existem diversos outros fatores que afetam tanto a estrutura etária como a taxa de crescimento num determinado ano. A estrutura etária pode ser modificada pela migração externa ou por acontecimentos demográficos excepcionais do passado; e a taxa de crescimento pode variar significativamente de um ano para outro devido a flutuações conjunturais na TBN. Portanto, a relação pode ser ofuscada em alguma medida por outras questões. Mas numa população estável os únicos fatores que afetam a estrutura por idade e sexo são a tábua de vida subjacente e a taxa de crescimento intrínseco. Isso permite visualizar mais claramente qual é o perfil de mudança da Razão de Dependência com a variação da taxa de crescimento.

Lembrando da fórmula (6.6) que

*Razão de Dependência* =

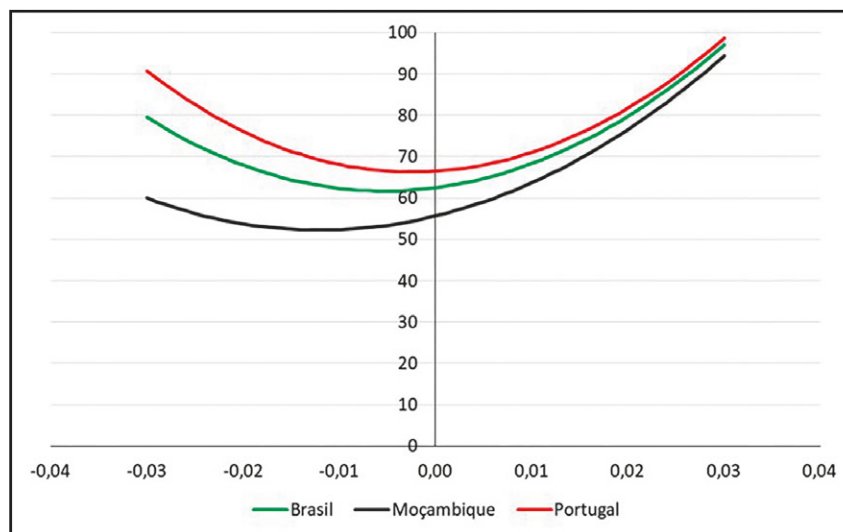
$$= 100 \cdot (\text{População de 0-14 anos} + \text{População de 65+ anos}) / \text{População de 15-64 anos}$$

e substituindo as populações por faixa etária de (22.2.b), obtém-se

$$\frac{{}_5L_0e^{-2.5r} + {}_5L_5e^{-7.5r} + {}_5L_{10}e^{-12.5r} + {}_5L_{65}e^{-67.5r} + {}_5L_{70}e^{-72.5r} + \dots + {}_nL_{\omega}e^{-5\omega - 2.5n}}{{}_5L_{15}e^{-17.5r} + \dots + {}_5L_{60}e^{-62.5r}} \quad (22.20)$$

Os fatores  $B(0)$  e  $\ell_0$ , que constam de (22.2.b), não aparecem em (22.20) porque fazem parte tanto do numerador como do denominador, de modo que podem ser omitidos. O comprimento do último intervalo aberto ( $n$ ) pode ser escolhido igual à esperança de vida na idade  $\omega$ . Os valores de  ${}_nL_x$  podem ser especificados separadamente para homens e mulheres ou obtidos de uma tábua de vida conjunta para os dois sexos.

Gráfico 22.1: Razões de Dependência implícitas em diferentes taxas de crescimento baseadas nas tábuas de vida combinadas para dois sexos do Brasil, Moçambique e Portugal em 2010-2014



Fonte: Calculado com dados da Divisão de População das Nações Unidas, Revisão de 2017.

No exemplo elaborado no Gráfico 22.1 foram usadas as tábuas de vida para os dois sexos combinados em 2010-2014 do Brasil, Moçambique e Portugal. Nos três casos se verifica o padrão mencionado acima, de razões mais altas para taxas de crescimento altas e baixas. Mas também há diferenças. No caso do país de mortalidade mais baixa (Portugal), as Razões de Dependência são mais altas, principalmente quando o crescimento demográfico for negativo, e a curva é mais ou menos simétrica, com a Razão de Dependência mais baixa para o caso onde  $r \approx 0$ . A curva de Moçambique é mais baixa, traduzindo o efeito de uma mortalidade mais alta sobre a Razão de Dependência, principalmente quando o crescimento demográfico for negativo. O mínimo da curva também está mais baixo, por volta de  $r = -0,012$ . Uma conclusão geral implícita no Gráfico 22.1 é a seguinte: quando o crescimento demográfico é positivo, este constitui o principal determinante da estrutura etária e mais especificamente da Razão de Dependência, mas quando o crescimento se torna negativo, o nível da mortalidade se torna um fator dominante.

### 22.3.2 A taxa específica de mortalidade em populações estacionárias e estáveis

Como se observou no Capítulo 9, a maioria das fórmulas para converter Taxas Específicas de Mortalidade  ${}_nM_x$  em probabilidades de morte  ${}_nq_x$  partem do princípio de que a população subjacente tem uma estrutura estacionária, ou seja que  ${}_nM_x = {}_nm_x$ . Este suposto é mais explícito na fórmula (9.17). Mas qual seria o tamanho do erro caso a estrutura subjacente não seja estacionária? Mais especificamente, qual seria o tamanho do erro se a estrutura subjacente fosse a de uma população estável com taxa intrínseca de crescimento  $r$ ? Não há nenhuma significância especial na escolha das populações estáveis como referência; simplesmente é conveniente. No caso de uma população estacionária, (9.17) pode ser reescrita como

$${}_nm_x = - \int_x^{x+n} \ell'(t) dt / \int_x^{x+n} \ell(t) dt \quad (22.21)$$

No caso em que a população subjacente é estável, isso deve ser mudado para:

$${}_nM_x = - \int_x^{x+n} e^{-rt} \ell'(t) dt / \int_x^{x+n} e^{-rt} \ell(t) dt \quad (22.22)$$

Supondo que  $\ell(x)$  representa a tábua de vida feminina do Brasil em 2015, e que  $r = -0,01$  ou  $r = 0,025$ , a Tabela 22.1 mostra as diferenças entre  ${}_nM_x$  e  ${}_nm_x$  (que corresponde a  $r=0$ ).

Tabela 22.1: Diferença percentual entre  ${}_nm_x$  para a tábua de vida feminina do Brasil em 2015 e  ${}_nM_x$  para populações estáveis subjacentes com  $r = -0,01$  e  $r = 0,025$

Grupo Etário	$100 \cdot ({}_nM_x / {}_nm_x - 1)$	
	$r = -0,01$	$r = 0,025$
0 - 4	- 1,74	4,43
5 - 9	- 0,26	0,66
10 - 14	0,22	- 0,54
15 - 19	0,08	- 0,20
20 - 24	0,00	0,00
25 - 29	0,03	- 0,07
30 - 34	0,05	- 0,12
35 - 39	0,07	- 0,17
40 - 44	0,10	- 0,25
45 - 49	0,09	- 0,21
50 - 54	0,07	- 0,19
55 - 59	0,08	- 0,19
60 - 64	0,09	- 0,23
65 - 69	0,11	- 0,27
70 - 74	0,11	- 0,28
75 - 79	0,11	- 0,29

Fonte: Elaboração própria a partir das tábuas de vida do IBGE.

Os resultados mostram que os erros são pequenos, da ordem de 0,25% ou menos, exceto nas faixas de 0-4, 5-9 e 10-14 anos.

## 22.4 A POPULAÇÃO ESTÁVEL EQUIVALENTE

Segundo o princípio ergódico forte, uma vez mantidos constantes os regimes de fecundidade e mortalidade, a condição de estabilidade será alcançada de forma inevitável. Portanto, toda população apresenta uma população estável implícita às suas funções correntes de fecundidade e mortalidade. A população estável implícita é usualmente denominada *população estável equivalente* (Preston, Heuveline e Guillot, 2001: 147). A taxa de crescimento, a taxa de natalidade, a taxa de mortalidade e a estrutura etária dessa população modelo são denominadas intrínsecas às funções  $\ell(x)$  e  $f(x)$  e não são influenciadas pela estrutura etária da população atual. A população estável equivalente resulta da aplicação das equações apresentadas na seção anterior, ao fixar as funções



$\ell(x)$  e  $f(x)$  correntes. Ao alcançar a estabilidade, a população apresentará a taxa de crescimento dos nascimentos constante e, conseqüentemente, também crescerá a um ritmo constante.

Para qualquer população é possível estimar a sua população estável equivalente, basta fixar as suas taxas de fecundidade e mortalidade correntes e projetar a sua estrutura etária ao longo do tempo, até que a mesma permaneça constante. A questão é: Quanto tempo leva para uma população se estabilizar depois de fixar um conjunto de  $\ell(x)$  e  $f(x)$  ?

Não existe uma resposta precisa para essa questão. A resposta depende, em partes, de qual a precisão que o analista requer. Depende também da diferença entre as distribuições etárias da população na qual as funções estão sendo impostas e da população estável que emergirá. Quanto maior a diferença, maior o tempo para alcançar a estabilidade. Se a diferença é muito grande e a aplicação demanda um alto grau de precisão, a estabilidade pode demorar mais que um século para ser alcançada. Quando existe uma grande disparidade entre as taxas de crescimento intrínsecas e a natural de uma população qualquer, tal situação indica que a população está sofrendo mudanças demográficas recentes. Para muitas propostas práticas, um período de 70 anos serve como uma conveniente “regra do dedão”. Esse valor foi estabelecido porque 70 anos representa o tempo gasto em dois ciclos reprodutivos, ou seja, espera-se que depois de passados dois ciclos reprodutivos a influência do tamanho das gerações das mães no momento em que as funções de fecundidade e mortalidade são impostas passa a ser próxima de zero.

A descrição das características de uma população equivalente estável começa com a identificação da taxa de crescimento intrínseca  $r$ . Antigamente se ensinavam várias fórmulas aproximadas para a solução de  $r$ , mas hoje em dia se tornou mais prático fazê-lo mediante um processo numérico de tentativa e erro. Abaixo se apresenta um programa muito simples em “R” que faz isso automaticamente, mas antes disso é preciso entender a lógica do processo passo a passo. Reescrevendo a equação (22.11) (ou 22.10, seria basicamente igual), busca-se um valor de  $r$ , de tal forma que

$$y(r) = \int_{\alpha}^{\beta} e^{-rx} \ell^F(x) \frac{f(x)}{1+RS_0} dx - 1 = 0 \quad (22.23)$$

onde  $y(r)$  representa toda a expressão à direita. A forma mais comum para resolver problemas deste tipo é por meio do método de Newton-Raphson, que determina a escolha de um valor inicial  $r_0$  para  $r$  e depois calcula as estimativas sucessivas  $r_n$  iterativamente com a seguinte fórmula:

$$r_{n+1} = r_n - \frac{y(r_n)}{y'(r_n)} \quad (22.24)$$

A derivada de  $y(r)$  que aparece no denominador pode ser calculada facilmente, com o seguinte resultado:

$$y'(r) = - \int_{\alpha}^{\beta} x e^{-rx} \ell^F(x) \frac{f(x)}{1+RS_0} dx \quad (22.25)$$

Segundo (22.13), esta expressão é aproximadamente igual a menos o comprimento médio das gerações  $T^2$ , de modo que (22.24) pode ser escrito como

$$r_{n+1} = r_n + \frac{y(r_n)}{T} \quad (22.26)$$

Normalmente este procedimento precisa ser aplicado entre 5 e 8 vezes para obter um valor suficientemente próximo da solução de (22.11). Uma boa aproximação para o valor inicial de  $r$  é  $r_0 = \ln(TLR) / 27$ , onde TLR representa a Taxa Líquida de Reprodução e 27 geralmente é uma boa aproximação para o comprimento das gerações. Para justificar esta escolha inicial de  $r_0$ , vale considerar o seguinte:

Conforme se viu no Capítulo 10, a Taxa Líquida de Reprodução é dada por:

$$TLR = \sum_{x=\alpha}^{\beta} \frac{nL_x^F}{\ell_0} \frac{nf_x}{1 + RS_0} \quad (22.27)$$

ou, na versão contínua:

$$TLR = \int_{\alpha}^{\beta} \ell^F(x) \frac{f(x)}{1 + RS_0} dx \quad (22.28)$$

A relação entre a TLR e a taxa de crescimento intrínseca foi formulada por Lotka da seguinte forma:

$$TLR = e^{rT} \quad (22.29)$$

ou seja

$$r = \frac{\ln(TLR)}{T} \quad (22.30)$$

onde  $T$  representa o comprimento médio da geração. Intuitivamente esta relação é fácil de entender na medida em que TLR simboliza a razão entre o tamanho da geração atual e a anterior. Como o crescimento entre uma geração e outra ocorre a uma taxa  $r$  durante  $T$  anos, (22.29) é relativamente óbvio. Também é intuitivamente claro que  $T$  dependerá da idade em que as mulheres têm seus filhos. De fato, numa população estável o valor de  $T$  está próximo da idade média à maternidade (Coale, 1972: 19), mas só se pode saber o número certo depois de determinar  $r$ . Entretanto, como valor inicial no processo iterativo para estimar  $r$ , é razoável usar (22.30) (segundo Coale, 1956) com  $T=27$  ou  $T=28$ .

<sup>2</sup> Para que (22.25) seja exatamente igual a  $-T$ , o denominador de  $T$ , tal como definido na equação (22.12), teria que ser igual a 1, o que acontece só quando a solução de  $r$  for alcançada. Para os valores de  $r$  usados nas iterações o denominador não será exatamente igual a 1 e (22.25) não será exatamente igual a  $-T$ , mas a diferença é pequena e não afeta o resultado do processo de iteração.

Certamente é possível implementar os cálculos propostos acima por meio de uma planilha de EXCEL. Entretanto, cálculos iterativos em EXCEL tendem a ocupar muito espaço. O módulo SP no pacote PASEX (ver Capítulo 17) já foi montado para este propósito. A seguinte função programada em “R” faz o mesmo trabalho de uma forma muito mais compacta, com as vantagens adicionais de maior portabilidade e flexibilidade, pois os vetores  $L$  e  $f$  (funções  ${}_nL_x$  e  ${}_nf_x$ ) podem ter qualquer tamanho desejado, desde que sejam consistentes. Normalmente  $L$  e  $f$  terão 7 ou 35 posições.

```
intrinsicr <- function(alpha,beta,L,l0,f,RS0) {
  # Calcula a taxa intrínseca de crescimento  $r$  a partir de  $nfa$  e  $nLa$  para vetores  $L$ 
  # e  $f$  de tamanhos arbitrários
  N <- length(L)
  age <- alpha + (beta-alpha)*((1:N)-0.5)/N
  TLR <- sum(L*f/(l0*(1+RS0))); r = log(TLR)/27
  for (i in (1:8)) {
    result <- sum(exp(-r*age)*L*f/(l0*(1+RS0))); r <- r + (result-1)/27
  }
  r
}
```

(22.31)

Tomando como exemplo Guiné-Bissau no período 1980-84 (dados da Divisão de População das Nações Unidas, Revisão de 2017), tem-se as seguintes entradas para a função `intrinsicr`:

```
> gbmort80 <- c(372259, 362579, 351511, 340092, 328322, 315939, 302876)
> gbfert80 <- c(0.1225, 0.305, 0.3409, 0.2722, 0.1781, 0.098, 0.0231)
```

(22.32)

Agora, assumindo uma Razão de Sexos ao Nascer de 103 e entrando com o comando seguinte

```
> intrinsicr(15, 50, gbmort80, 100000, gbfert80, 1.03)
```

(22.33)

aparece a seguinte resposta

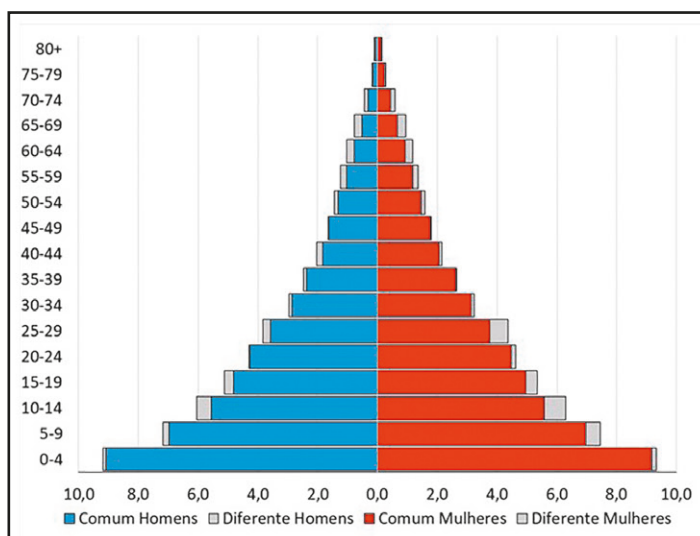
```
[1] 0.02946231
```

(22.34)

o que equivale a uma taxa intrínseca anualizada ( $e^r-1$ ) de 2,99% ao ano. Tendo o valor de  $r$ , agora dá para calcular  $T$  por meio da relação (22.13). O resultado é 27,44 anos, bastante próximo ao valor inicial de 27 e um pouco mais longe da idade média à maternidade (29,22 anos). Se a fecundidade  $f(x)$  fosse 20% mais alta (implicando  $r=0,0362$ ),  $T$  seria igual a 27,14 anos. Se fosse 50% mais baixa (implicando  $r=0,0047$ ),  $T$  seria 28,63 anos. Como se pode observar, a variação não é grande. Raramente encontram-se valores de  $T$  menores de 26 ou maiores de 33.

A outra quantidade, mais importante, que pode ser calculada agora é a estrutura da população, calculando  ${}_nL_x e^{-r(x+n/2)}$  para cada faixa etária  $(x, x+n)$  e dividindo pela população total. O resultado é mostrado no Gráfico 22.2, onde os tamanhos relativos são comparados com aqueles da população real de 1980. As áreas em azul ou vermelho são áreas de coincidência dos valores; as áreas amarelas mostram as divergências entre a população estável equivalente e a população real de 1980. Como se pode observar, a coincidência não é perfeita, mas sim, é bastante próxima. Pode-se concluir, então, que a população da Guiné-Bissau em 1980 encontrava-se bastante próxima da estabilidade e que a sua estrutura etária refletia razoavelmente bem os valores relativos de  ${}_nL_x$  multiplicados por  $e^{-r(x+n/2)}$ .

Gráfico 22.2: Estrutura etária relativa da Guiné-Bissau em 1980, comparada com a estrutura estável equivalente baseada na tábua de vida (masculina e feminina) de 1980-1984 e  $r = 0,0295$



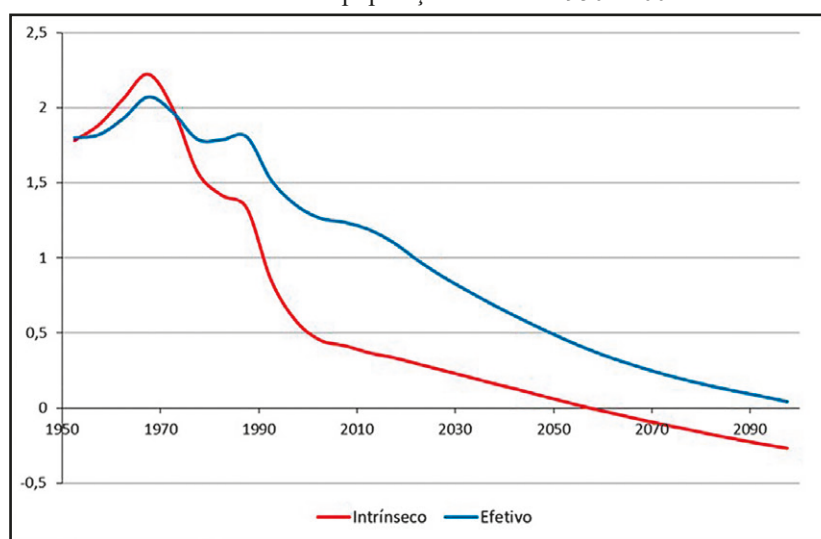
Fonte: Calculado com dados da Divisão de População das Nações Unidas, Revisão de 2017.

Apesar da proximidade da população da Guiné-Bissau de 1980 a uma estrutura estável, a sua taxa anual de crescimento da época (1,46%) era só a metade da taxa intrínseca  $r$ . A diferença se explica pelo nível relativamente elevado de emigração que o país experimentou na primeira década após a declaração da independência em 1973. Esta emigração teve um efeito considerável sobre o crescimento demográfico do país, mas aparentemente o impacto sobre a estrutura etária foi menos pronunciado. A diferença entre as duas taxas fornece uma ideia bastante próxima sobre o volume da migração da época.

Mas nem sempre é a migração internacional que explica o afastamento das taxas de crescimento demográfico com relação aos seus valores intrínsecos. No período entre 2010 e 2015, a população mundial como um todo cresceu a uma taxa de 1,19% ao ano. Mas a sua taxa de crescimento intrínseco  $r$  era somente 0,0044, ou seja 0,44% ao ano. Como evidentemente a população mundial na sua totalidade está fechada à migração, a explicação é que a estrutura etária atual da população mundial se encontra relativamente distante do seu equivalente estável. Há relativamente mais mulheres em idade reprodutiva do que será o caso no longo prazo, quando a população mundial se estabilizará, mesmo que as taxas atuais de mortalidade e fecundidade por idade se

mantenham inalteradas. O excesso relativo de mulheres em idade reprodutiva, que aumenta a taxa de crescimento demográfico a curto e médio prazo, é um tipo de “memória” transitória de uma situação anterior quando a fecundidade ainda era mais elevada. Esta tendência das populações, a preservar – pelo menos a curto e médio prazo – certas características remanescentes de um regime demográfico anterior caracterizado por taxas de mortalidade e fecundidade diferentes das atuais, é conhecida como *inércia demográfica* (“population inertia” ou “population momentum”, em inglês), um termo que já foi introduzido no Capítulo 7. No longo prazo, o princípio ergódico determina que esta “memória” será apagada. Enquanto isso, vale a pena considerar que quase 70% do crescimento da população mundial no período de 2015-2020 são devidos ao efeito inercial e que só 30% podem ser atribuídos a fatores intrínsecos ou estruturais associados aos níveis atuais da mortalidade e fecundidade. O crescimento intrínseco que ainda existe vem inteiramente por conta da África Subsaariana. Removendo a África Subsaariana das contas de fecundidade e mortalidade mundiais, o crescimento intrínseco do mundo para o período de 2015-2020 cai de  $r = 0,0034$  positivos para  $-0,0018$  negativos.

Gráfico 22.3: Taxas (por cento) observadas e projetadas (variante média) de crescimento anual efetivo e intrínseco da população mundial 1950-2100



Fonte: Calculado a partir de dados da Divisão de População das Nações Unidas, Revisão de 2019.

O Gráfico 22.3 ilustra a diferença entre o crescimento efetivo e intrínseco da população mundial entre 1950 e 2100. Chama a atenção que o crescimento efetivo reproduz as tendências intrínsecas com certo atraso. Entre 1970 e 2000 o crescimento intrínseco da população mundial diminuiu vertiginosamente, mas a queda do crescimento efetivo foi muito menos pronunciada. Neste sentido, o crescimento intrínseco serve como um tipo de “indicador direcionador” (“leading indicator”, em inglês) para as tendências futuras do crescimento efetivo. Nota-se também que a diminuição do crescimento intrínseco encontrou certo piso por volta de 2000 quando a fecundidade fora da África Subsaariana (e principalmente na China) essencialmente já não tinha como cair muito mais e a continuidade do declínio começou a depender cada vez mais de uma mudança na fecundidade africana, que tem sido mais difícil de conseguir do que em outras regiões. Também

vale observar que, segundo a Variante Média das projeções das Nações Unidas, a partir de 2070 o crescimento intrínseco mundial se tornará negativo, embora o crescimento efetivo provavelmente continue positivo por 40-50 anos mais.

O Gráfico 22.3 ilustra uma maneira para expressar a importância quantitativa da inércia demográfica. Uma outra maneira, talvez mais direta, é por meio da pergunta “O que aconteceria com o crescimento da população caso a fecundidade fosse reduzida (ou aumentada) instantaneamente para o nível de reposição ( $TLR = 1$ ) e mantida neste nível permanentemente ?” No longo prazo (depois de 70-100 anos) uma TLR de 1 levaria a uma população estacionária, mas dependendo do tamanho da diferença entre a estrutura etária inicial e a final, a população ainda pode crescer (ou diminuir) substancialmente antes de alcançar a estacionariedade. A Tabela 22.2 retrata a razão entre o tamanho da população estacionária e a inicial (em 2015) para o mundo e países selecionados. Preston et al. (2001: Cap. 7.7) derivam um fórmula matemática para estimar esta razão, mas a Tabela 22.2 foi gerada simplesmente por meio das projeções de cada país para o período de 2015 até 2500. Como se pode ver, nos países africanos, que têm estruturas etárias muito jovens, com muitas mulheres em ou por entrar nas idades reprodutivas, o efeito inercial geralmente supera 50%. As razões para os países latino-americanos geralmente são menores, entre 1 e 1,5. No caso do Brasil, a razão de 1,22 mostra que, apesar da fecundidade baixa que prevalecia no país, a estrutura etária em 2015 ainda predispunha o país a um crescimento populacional significativo. Cuba e Portugal são os únicos países da lista com estruturas etárias tão envelhecidas que a curto prazo uma volta ao nível de reposição resultaria numa continuação do declínio da fecundidade, antes de alcançar a estacionariedade.

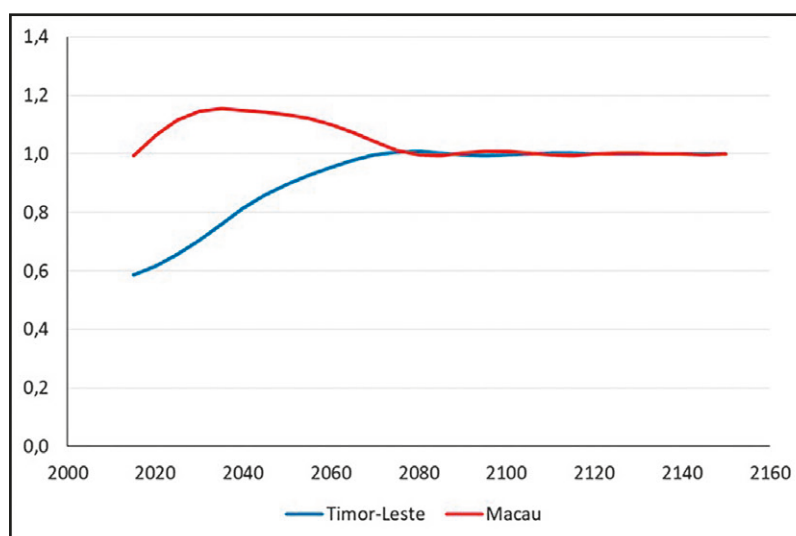
Tabela 22.2: Inércia demográfica implícita na estrutura etária de países selecionados, supondo  $TLR = 1$  a partir de 2015, sem migração internacional e mantendo os demais parâmetros constantes

Mundo	1,270
Angola	1,700
Argentina	1,270
Bolívia	1,494
Brasil	1,220
Cabo Verde	1,527
Colômbia	1,270
Cuba	0,933
Equador	1,462
Guiana	1,359
Guiné-Bissau	1,525
Guiné Equatorial	1,513
Macau	1,006
México	1,424
Moçambique	1,535
Paraguai	1,510
Peru	1,390
Portugal	0,813
São Tomé & Príncipe	1,703
Suriname	1,290
Timor-Leste	1,706
Uruguai	1,121
Venezuela	1,411

Fonte: Calculado a partir de Divisão de População das Nações Unidas, Revisão de 2017.

O Gráfico 22.4 mostra as trajetórias temporais das populações de dois países para alcançar a estacionariedade. O caso de Timor-Leste é interessante porque, segundo a Tabela 22.2, é o país com a maior inércia demográfica acumulada. Macau, por outro lado, tem praticamente nenhuma inércia demográfica, mas a sua estrutura etária é significativamente diferente da estrutura estacionária. Em ambos os casos, levaria entre 60 e 100 anos para atingir a estacionariedade, caso a TLR permanecesse constante a partir de 2015, sem migração internacional, mas as trajetórias seriam diferentes. Timor-Leste continuaria crescendo a uma taxa decrescente, com oscilações mínimas no final. Macau, por outro lado, inicialmente continuaria crescendo, mas finalmente começaria a diminuir, atingindo uma população muito parecida com a inicial por volta de 2075.

Gráfico 22.4: Trajetórias temporais relativas das populações totais de Timor-Leste e Macau para atingir a estacionariedade, sob as mesmas condições da Tabela 22.2



Fonte: Calculado a partir de Divisão de População das Nações Unidas, Revisão de 2017.

O conceito de inércia demográfica tem sido usado e desenvolvido por vários autores. Uma linha de pesquisa investiga como a inércia demográfica afeta populações onde a fecundidade não é constante, mas diminui gradualmente (Li e Tuljapurkar, 1999, 2000; Goldstein, 2002; Goldstein e Stecklov, 2002; Schoen e Jonsson, 2003). Por outro lado, Guillot (2005) e Espenshade, Olgiati e Levin (2011) propuseram decomposições da inércia demográfica em diferentes fatores. A decomposição de Guillot separa os efeitos diretos de melhorias na sobrevivência por coorte de flutuações no número anual de nascimentos. A decomposição proposta por Espenshade, Olgiati e Levin tem uma componente associada com a diferença entre a composição etária da população atual e a população estável equivalente e uma segunda componente associada à diferença entre a população estável equivalente e uma população estacionária.

Quando não é possível ter acesso ao programa (22.31),  $r$  pode ser aproximado mediante (22.30), usando o fato de que a TLR é aproximadamente igual à Taxa de Fecundidade Total (TFT) multiplicada pela probabilidade das mulheres para sobreviver até a idade  $T$  (mais ou menos  $(\ell_{25} + \ell_{30})/2\ell_0$ ) e dividida por  $1+RS_0$ . Assim se obtém



$$r \approx (\ln(TFT) + \ln((\ell_{25} + \ell_{30}) / 2\ell_0) - \ln(1 + RS_0)) / 27,5 \quad (22.35)$$

Aplicando esta fórmula ao caso da Guiné-Bissau, obtém-se um valor de 0,0299, bastante próximo ao valor de 0,0295 obtido em (22.34). Uma implicação importante de (22.35) é que, supondo a constância dos outros fatores,  $r$  varia proporcionalmente com o logaritmo de TFT, ou seja, uma diminuição  $\Delta TFT$  na TFT reduz  $r$  da seguinte forma:

$$\Delta r = \frac{\ln\left(1 - \frac{\Delta TFT}{TFT}\right)}{27,5} \approx - \frac{\Delta TFT}{27,5 TFT} \quad (22.36)$$

Portanto, o efeito na taxa de crescimento intrínseca depende somente do declínio proporcional na TFT e não do declínio absoluto. Um declínio da TFT de 3 para 2 tem exatamente o mesmo de um declínio de 6 para 4. Em termos de impacto no longo prazo nas taxas de crescimento, o declínio da fecundidade tem crescentes retornos.

Este resultado simplesmente reflete o fato de que a taxa de crescimento a longo prazo de uma população depende do tamanho de uma geração em relação à geração anterior. O efeito do declínio de uma criança na TFT na taxa de crescimento intrínseca difere de região para região durante 1995-2000. Claramente, o efeito é menor na África, onde as taxas de fecundidade ainda são altas, e este efeito é maior na Europa onde a TFT é baixa. Um declínio de uma criança por mulher na Europa reduziria a TFT dessa região para mais 50% e levaria a um declínio extremamente rápido da taxa de 0,056 por ano. A taxa de declínio populacional seria mais rápida do que a taxa de crescimento populacional em qualquer região durante qualquer substancial período do século XX.

Finalmente, a equação (22.35) mostra que o valor de  $T$  pode ter um importante efeito na taxa intrínseca de crescimento. Coale e Tye (1961) discutiram o caso das populações em crescimento, e mostram que se  $r$  é positivo, então o aumento da idade da reprodução reduzirá  $r$  mesmo se a TFT permanecer constante; o fator de crescimento entre as gerações estenderá mais anos porque o comprimento médio entre as gerações está maior. Quando a taxa intrínseca de crescimento é negativa, como na Europa contemporânea, aumentando  $T$  por um adiamento da maternidade aumentaria a taxa de crescimento intrínseca, isto é, tornaria a taxa menos negativa. O fator do declínio de uma geração para a próxima seria esticado durante um longo período entre as gerações. A distribuição etária intrínseca teria mais mulheres no final do seu período reprodutivo do que no início. Então, o adiamento da maternidade na vida da mulher, aumentaria a taxa de natalidade devido ao aumento da fecundidade entre as mulheres mais numerosas que são as mais velhas.

## 22.5 OS EFEITOS DE MUDANÇAS NA FECUNDIDADE E MORTALIDADE SOBRE A ESTRUTURA ETÁRIA, TAXA DE CRESCIMENTO, TAXA DE NATALIDADE E TAXA DE MORTALIDADE

Se as taxas de fecundidade e mortalidade permanecerem constantes durante um período longo o suficiente (aproximadamente 70 anos), a estrutura etária ficará constante e os demais parâmetros demográficos também. Cada combinação de  $\ell(x)$  e  $f(x)$  está associada a uma estrutura etária que expressa a situação da manutenção de  $\ell(x)$  e  $f(x)$  por um período longo.



O modelo de população estável é um conveniente veículo para estudar os impactos de longo prazo das mudanças na fecundidade e mortalidade sobre a estrutura etária e outros parâmetros demográficos. Este modelo também é conhecido como modelo de comparações estáticas porque por meio dele é possível comparar duas populações estáveis que diferem uma da outra em algumas características específicas das condições de fecundidade ou mortalidade. O exercício é equivalente a questionar o que conseqüentemente aconteceria com uma população previamente estável se uma mudança na fecundidade ou mortalidade fosse imposta. A estrutura da população pós-mudança é examinada depois que a população alcançar uma nova situação de estabilidade. Esta nova estrutura é então comparada com a estrutura da população estável antes das mudanças. A dinâmica da transição para um novo equilíbrio é ignorada; a teoria de população estável assume que o novo equilíbrio será alcançado.

Algumas questões são levantadas, mas não podem ser respondidas: Qual é o efeito de uma mudança na taxa de crescimento sobre a estrutura etária de uma população? Essa questão não pode ser respondida porque a taxa de crescimento de uma população depende das taxas de fecundidade e mortalidade. As mudanças nas taxas de fecundidade e mortalidade têm radicalmente impactos diferentes sobre a estrutura etária populacional, portanto, é necessário conhecer as fontes das mudanças na taxa de crescimento.

### 22.5.1 Efeito de mudanças na fecundidade

O que acontece a uma população estável se a fecundidade aumentar para todas as idades, mantida a função de sobrevivência constante? Um aumento nos valores de  $f(x)$  leva a um desequilíbrio na equação fundamental de Lotka (22.10). Para manter o lado esquerdo dessa equação igual a 1, o valor de  $r$  (assumindo que  $\ell(x)$  está fixo) deve aumentar e o valor de  $e^{-rx}$  deve decrescer para todas as idades. Assim, um aumento nos níveis de fecundidade tem como consequência o aumento da taxa intrínseca de crescimento da população.

Com relação à TBN, qual é o efeito de uma variação positiva na fecundidade sobre esse parâmetro demográfico, quando  $\ell(x)$  é fixo? A partir de (22.4) é possível verificar que um aumento na fecundidade tem como consequência uma redução do denominador dessa equação, visto que  $e^{-rx}$  diminui para todas as idades e, portanto, a TBN aumenta, como intuitivamente se esperaria.

O efeito de uma mudança na fecundidade, se  $\ell(x)$  é fixo, para a TBM, pode ser mensurado tomando o logaritmo da equação (22.8) a diferenciando em relação a  $r$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \ln(TBM) &= \frac{d}{dr} \ln\left(\int_0^\infty \ell(x) e^{-rx} \mu(x) dx\right) - \frac{d}{dr} \ln\left(\int_0^\infty \ell(x) e^{-rx} dx\right) = \\ &= -\int_0^\infty x \ell(x) e^{-rx} \mu(x) / \int_0^\infty \ell(x) e^{-rx} \mu(x) dx + \int_0^\infty x \ell(x) e^{-rx} dx / \int_0^\infty \ell(x) e^{-rx} dx \end{aligned} \quad (22.37)$$

Usando (22.14) e (22.15), isso pode ser interpretado como

$$\frac{d}{dr} \ln(TBM) = x_p - x_D \quad (22.38)$$

Essa equação demonstra que o efeito da variação na fecundidade sobre a TBM depende da idade média à morte, que varia de população para população. Se a idade média à morte é maior do que a idade média populacional, o aumento da fecundidade (variação positiva em  $r$ ) tem um efeito negativo sobre a TBM. Por outro lado, se a fecundidade reduz (variação negativa em  $r$ ), os sinais dessa derivada se invertem, ou seja, o efeito da variação da fecundidade sobre a TBM passa a ser igual a  $(x_D - x_p)$ . Nesse caso, a variação da TBM será positiva, quando a idade média populacional é menor do que a idade média à morte. É importante ressaltar que essa relação somente é válida quando  $x_D$  é maior que  $x_p$ , ou seja, em média, morrem mais idosos do que jovens na população. Se essa desigualdade é inversa, um aumento da fecundidade terá um efeito positivo na TBM. Esse cenário somente é possível em populações muito jovens e com alta mortalidade, pois o aumento da fecundidade elevará o peso da população de 0-1 ano, cuja a taxa de mortalidade é elevada. Entretanto, esse cenário não é mais comum na maioria dos países do mundo (Preston, Heuveline e Guillot, 2001: 144).

Finalmente, quais são as consequências de uma mudança na fecundidade para a estrutura etária de uma população estável? A seguinte expressão toma a derivada com relação a  $r$  do logaritmo da distribuição relativa da população:

$$\frac{d}{dr} \ln (\ell(x)e^{-rx} / \int_0^\infty \ell(x) e^{-rx} dx) = -x + \int_0^\infty x \ell(x) e^{-rx} dx / \int_0^\infty \ell(x) e^{-rx} dx \quad (22.39)$$

o qual pode ser interpretado como  $x_p - x$ .

Segundo esta expressão, um aumento na fecundidade (variação positiva em  $r$ ) tem como consequência um efeito positivo para as idades abaixo de  $x_p$  e um efeito negativo para as idades acima de  $x_p$ . Isso significa que um aumento na fecundidade rejuvenesce a população na medida em que o peso das idades mais jovens sobre a estrutura etária aumenta, ao passo que o peso das idades avançadas se reduz. Quando a fecundidade declina (variação negativa em  $r$ ), o efeito sobre a estrutura etária passa a ser igual a  $(x - x_p)$ . Nesse caso, há um efeito negativo para as idades jovens, onde  $x < x_p$ , e para as idades acima de  $x_p$  o efeito é positivo. Portanto, a redução da fecundidade envelhece a população. De acordo com os estudos de Preston, Heuveline e Guillot (2001: 156-157), em ambos os casos, a estrutura etária da nova estável se cruzará com a estrutura etária da antiga estável em  $x_p$ , se a mudança em  $r$  for infinitesimal. Ou se cruzarão na média das idades médias da antiga e da nova estável, se a mudança em  $r$  não for infinitesimal.

Para ilustrar o efeito puro das mudanças na fecundidade, suponha que o Brasil apresentasse em 2100 a mesma função de mortalidade vivenciada em 1950 e a função de fecundidade fosse a projetada para 2050, pelo *Centro de Desenvolvimento e Planejamento Regional (CEDEPLAR)*<sup>3</sup>. Assim, os parâmetros demográficos implícitos à função de fecundidade de 2050 e à função de mortalidade de 1950 foram calculados, a partir de uma nova população estável equivalente.

<sup>3</sup> A projeção do CEDEPLAR prevê que o nível da fecundidade se reduza de forma significativa para 1,50 filhos por mulher em 2050.

Tabela 22.3: Efeito puro da fecundidade sobre os parâmetros demográficos brasileiros – TBN, TBM e  $r$ 

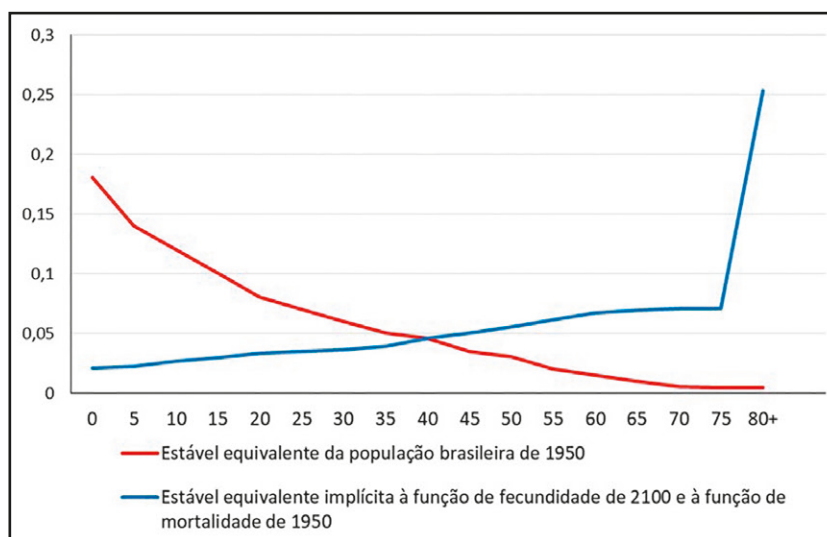
Período	Taxa Bruta de Natalidade	Taxa Bruta de Mortalidade	Taxa Intrínseca de Crescimento
1950	41,98	14,74	2,72 %
2100	3,71	25,44	-2,17 %

Fontes: Mortalidade de CELADE, *Observatorio Demográfico 4* (2007); Projeção CEDEPLAR BR2; fecundidade para 1950 de Frias e Carvalho, 1994; fecundidade para 2100 de Projeção CEDEPLAR BR2.

A redução da taxa de fecundidade total de 6,15 para 1,5 filhos por mulher, mantendo a mortalidade de 1950 constante, faria com que a população brasileira não mais crescesse a uma taxa de 2,72% ao ano, mas que, ao contrário, declinasse, anualmente, a uma taxa de 2,17%. A TBN sofreria uma queda 40,0 para 3,90 nascimentos por mil, e a TBM aumentaria em 10,7 óbitos por mil pessoas. Esses resultados são coerentes com a teoria de populações estáveis, na medida em que o declínio da fecundidade reduziria a taxa de crescimento e a TBN e elevaria a TBM.

A mudança em  $r$  não seria infinitesimal, a distribuição etária da nova estável cruzaria a distribuição antiga na média das duas idades médias das populações estáveis, ou seja, no ponto 42,61 anos. O Gráfico 22.5 ilustra esse resultado. Na Tabela 22.4 observa-se que a variação na proporção de pessoas nas idades abaixo de 42,61 anos seria negativa, e positiva para as idades acima da idade média. Portanto, o efeito puro do declínio acentuado na fecundidade sobre a estrutura etária brasileira seria consideravelmente envelhecendor, na medida em que reduziria a proporção de pessoas nas idades jovens e aumentaria nas idades avançadas.

Gráfico 22.5: Efeito puro da fecundidade sobre a estrutura etária brasileira



Fontes: Função de mortalidade para 1950, CELADE (2007). *Observatorio Demográfico 4* (2007); função de fecundidade para 1950 e 2100, Frias e Carvalho (1994); função de mortalidade para 2100, projeção BR2 do CEDEPLAR.

Tabela 22.4: Efeito puro da fecundidade sobre a estrutura etária brasileira

Idade	Estrutura Etária		
	1950	Fecundidade 2100 com Mortalidade 1950	Diferença
0	0,1778	0,0196	-0,1582
5	0,1380	0,0218	-0,1162
10	0,1189	0,0242	-0,0946
15	0,1025	0,0270	-0,0755
20	0,0878	0,0301	-0,0577
25	0,0747	0,0334	-0,0413
30	0,0632	0,0372	-0,0260
35	0,0532	0,0414	-0,0118
40	0,0444	0,0460	0,0016
45	0,0366	0,0509	0,0143
50	0,0297	0,0561	0,0264
55	0,0236	0,0614	0,0378
60	0,0182	0,0664	0,0482
65	0,0134	0,0708	0,0575
70	0,0090	0,0735	0,0645
75	0,0054	0,0725	0,0671
80+	0,0036	0,2601	0,2565
xP	22,86	62,09	
Índice de idosos	0,0585	5,1537	

Fontes: a) Função de mortalidade para 1950 e 2100: CELADE. *Observatorio Demográfico* 4 (2007); b) Função de fecundidade para 1950: Frias e Carvalho (1994); c) Função de fecundidade para 2100: Projeção CEDEPLAR – Cenário BR2

## 22.5.2 Efeito de mudanças na mortalidade

Uma mudança na fecundidade tem como impacto inicial apenas a variação no número de nascimentos. A mudança na mortalidade, por sua vez, impacta a probabilidade de sobrevivência de vários grupos etários, sendo, portanto, mais complexa de ser analisada (Preston, Heuveline e Guillot, 2001: 158).

Segundo a equação fundamental de Lotka, as mudanças na mortalidade somente influenciam a taxa intrínseca de crescimento quando as probabilidades de sobrevivência das idades do período reprodutivo feminino são afetadas. Noutras palavras, para que a taxa intrínseca de crescimento de uma população seja afetada, é necessário que a mudança na mortalidade ocorra nas idades abaixo do limite superior do período reprodutivo ( $\beta = 50$  anos), visto que o declínio da Taxa Específica de Mortalidade (TEM) da idade  $x$  afeta as probabilidades de sobrevivências das idades superiores a  $x$ . Desse modo, as mudanças nas probabilidades de morte para as idades abaixo de  $\alpha$  (limite inferior do período reprodutivo, usualmente 15 anos) afetam as probabilidades de sobrevivência dos grupos etários reprodutivos. Por outro lado, as mudanças na mortalidade para as idades acima de  $\beta$  não afetam  $r$ , uma vez que essa variação influencia apenas a probabilidade de sobrevivência das idades que estão fora do período reprodutivo. Portanto, a redução das TEMs para as idades acima de  $\beta$  apenas fará com que a população atual seja maior do que a antiga, sem que isso afete a taxa intrínseca de crescimento (Preston, Heuveline e Guillot, 2001: 158).

Existem dois tipos de mudanças na mortalidade: *neutra* e *não neutra*. A mudança neutra da mortalidade é produzida por um declínio igual e absoluto nas taxas de mortalidade em todas as idades:

$$\mu_{mod.}(x) = \mu(x) - k \quad (x \geq 0) \quad (22.40)$$

onde  $\mu(x)$  é a taxa instantânea de mortalidade da idade  $x$ .

Quando o valor de  $\mu(x)$  é modificado dessa forma, o efeito sobre a função  $\ell(x)$  é:

$$\ell_{mod.}(x) = \exp \left( - \int_0^x (\mu(t) - k) dt \right) = \ell(x) e^{kx} \quad (22.41)$$

O efeito em  $r$  do declínio neutro da mortalidade pode ser entendido por meio da equação fundamental de Lotka (22.11), a qual deve manter o equilíbrio antes e depois da mudança (Preston, Heuveline e Guillot, 2001: 159):

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{-r_{mod.}x} \ell^F(x) e^{kx} \frac{f(x)}{1+RS_0} dx = 1 \quad (22.42)$$

É fácil de ver que um  $r$  modificado igual a  $r+k$  restabelece o equilíbrio.

Com relação à estrutura etária, o efeito desse declínio absoluto  $k$  na taxa de mortalidade para todas as idades é nulo, conforme demonstrado a seguir (Preston, Heuveline e Guillot, 2001: 159):

$$\begin{aligned} e^{-r_{mod.}x} \ell_{mod.}(x) / \int_0^{\infty} e^{-r_{mod.}x} \ell_{mod.}(x) dx &= \\ = e^{-(r+k)x} \ell(x) e^{kx} / \int_0^{\infty} e^{-(r+k)x} \ell(x) e^{kx} dx &= \\ = e^{-rx} \ell(x) / \int_0^{\infty} e^{-rx} \ell(x) dx & \end{aligned} \quad (22.43)$$

Portanto, uma mudança neutra na mortalidade não tem efeito na distribuição etária e, consequentemente, também não altera a taxa de natalidade, quando as taxas de fecundidade são constantes. A TBM, para manter o equilíbrio, deve reduzir num montante  $k$ , uma vez que  $r$  aumenta por um montante  $k$ .

Apesar das suas propriedades analíticas convenientes, uma mudança neutra da mortalidade é pouco realista porque é difícil que  $\mu(x)$  nas idades de mortalidade mais baixa (5-14 anos) seja reduzida com o mesmo valor absoluto das idades de mortalidade mais elevada (acima dos 75 anos). Uma mudança proporcional como aquela discutida na seção 17.3, pode ser mais realista, mas não leva a fórmulas tão simples e transparentes como (22.42) e (22.43). Trata-se de uma mudança não neutra da mortalidade. As mudanças não neutras na mortalidade são aquelas que afetam a estrutura etária, visto que as variações na mortalidade não são uniformes com a idade. Por exemplo, se a queda da mortalidade é mais expressiva nas idades jovens, isso terá como efeito um crescimento no número de pessoas nessas idades e consequentemente a população rejuvenescerá. Se o declínio da mortalidade é mais intenso nas idades avançadas, a população envelhecerá (Preston, Heuveline

e Guillot, 2001: 160). Portanto, como a mudança não neutra da mortalidade afeta de forma distinta os grupos etários, a análise dessa mudança sobre os parâmetros demográficos é mais complexa, se comparada à análise da mudança na fecundidade (Preston, Heuveline e Guillot, 2001: 158). Por isso, o efeito da mudança não neutra da mortalidade em cada parâmetro demográfico é discutido a seguir, a partir do exemplo do Brasil.

O efeito puro da mudança na mortalidade sobre os parâmetros demográficos pode ser ilustrado por um exemplo conforme realizado para verificar o efeito puro da fecundidade. Supõe-se que a população brasileira em 2100 passaria a ser uma população com a mesma função de fecundidade que vivenciou em 1950 e com taxas de mortalidade projetadas para 2050 pelo CEDEPLAR<sup>4</sup>. A mudança na mortalidade seria mais expressiva nas idades jovens e nas idades avançadas, ou seja, não seria uma mudança neutra, sendo por isso mais complexa de se analisar se comparada às mudanças na fecundidade.

A Tabela 22.5 evidencia que a taxa intrínseca de crescimento aumentaria com a redução da mortalidade, uma vez que a diferença entre o  $r$  da população brasileira no novo cenário e o  $r$  da população brasileira antes da mudança da mortalidade é de 1,01%. Assim, de acordo com a teoria, pode-se inferir que a variação positiva em  $r$ , entre 1950 e 2100, ocorrerá devido ao declínio das TEMs nas idades inferiores a  $\beta$  (limite inferior do período reprodutivo feminino). O declínio nas idades avançadas contribuiria apenas para o tamanho da população, sem afetar a taxa intrínseca de crescimento.

Tabela 22.5: Efeito puro da mortalidade sobre a taxa intrínseca de crescimento  $r$

Período	$r$
1950	2,72 %
2100	3,73 %
$\Delta r$	1,01 % (1)
Mudança média nas TEMs entre a idade 0 e A	0,95 % (2)
Diferença entre (erro) = (1) – (2)	-0,06 %

Fontes: Mortalidade de CELADE, *Observatorio Demográfico* 4 (2007); Projeção CEDEPLAR BR2; fecundidade para 1950 de Frias e Carvalho, 1994; fecundidade para 2100 de Projeção CEDEPLAR BR2.

Neste cenário, a TBN se reduziria com a queda da mortalidade, uma vez que o denominador (total de anos-pessoa vividos) crescería como consequência do aumento na longevidade (Tabela 22.6). É importante destacar que o aumento em  $r$  tem um efeito positivo sobre a TBN, na medida em que ele reduz o denominador dessa taxa. Portanto, neste caso a redução da TBN somente ocorreria porque o efeito do aumento da sobrevivência dos indivíduos seria mais expressivo do que o aumento de  $r$ . Outra informação importante é a redução da TBM com o declínio da mortalidade. Esse fato pode ser justificado pela redução do número de óbitos e pelo aumento do total de anos-pessoa vividos.

<sup>4</sup> Para a mortalidade, a hipótese é de que a tabela limite de sobrevivência, elaborada pelo US Bureau of the Census, será atingida em 2050. Para maiores detalhes sobre a projeção, consulte Turra (2008).

Tabela 22.6: Efeito puro da mortalidade sobre a TBN e TBM

Período	Taxa Bruta de Natalidade	Taxa Bruta de Mortalidade
1950	41,98	14,74
2100	39,59	2,28

Fontes: Mortalidade de CELADE, *Observatorio Demográfico* 4 (2007); Projeção CEDEPLAR BR2; fecundidade para 1950 de Frias e Carvalho, 1994; fecundidade para 2100 de Projeção CEDEPLAR BR2.

Com relação à estrutura etária, os dados apresentados na Tabela 22.7 e no Gráfico 22.6 evidenciam que o efeito puro de uma mudança na mortalidade não apresentaria um impacto tão significativo como o efeito puro da fecundidade. No entanto, é importante destacar a complexidade do efeito de uma mudança não neutra na mortalidade sobre a estrutura etária brasileira, os grupos etários entre 20 e 60 anos sofreriam redução na sua representatividade sobre a população total, ao passo que os grupos etários mais jovens e mais velhos sofreriam um acréscimo. Diante dessa variação da estrutura etária, não é tarefa simples determinar se a população está envelhecendo ou rejuvenescendo. Somente com base na idade média populacional ( $x_p$ ) e no índice de idosos, é possível perceber que o declínio da mortalidade teria um pequeno efeito envelhecedor sobre a estrutura etária da população brasileira.

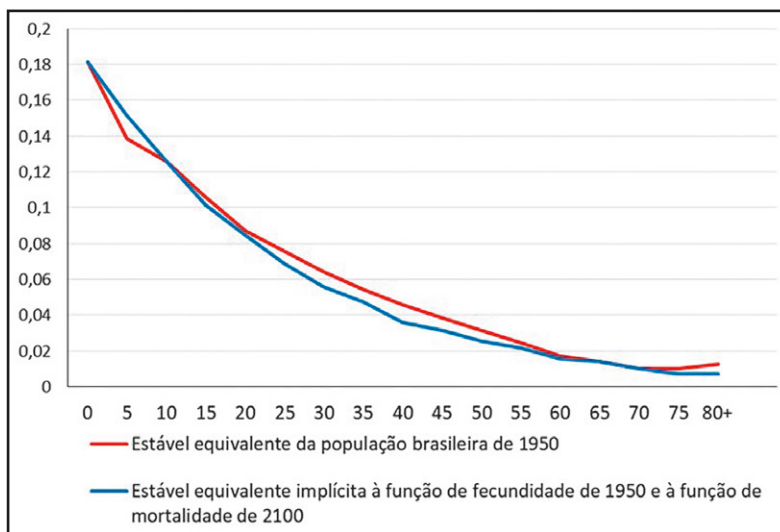
Tabela 22.7: Efeito puro da mortalidade sobre a estrutura etária brasileira

Estrutura Etária			
Idade	1950	Fecundidade 1950 com Mortalidade 2100	Diferença
0	0,1778	0,1800	0,0022
5	0,1380	0,1490	0,0110
10	0,1189	0,0236	0,0047
15	0,1025	0,1025	0,0000
20	0,0878	0,0849	-0,0029
25	0,0747	0,0703	-0,0044
30	0,0632	0,0583	-0,0050
35	0,0532	0,0482	-0,0050
40	0,0444	0,0399	-0,0045
45	0,0366	0,0329	-0,0037
50	0,0297	0,0270	-0,0028
55	0,0236	0,0220	-0,0017
60	0,0182	0,0177	-0,0005
65	0,0134	0,0140	0,0007
70	0,0090	0,0108	0,0018
75	0,0054	0,0080	0,0026
80+	0,0036	0,0111	0,0075
$x_p$	22,86	22,95	
Índice de idosos	0,0585	0,0792	

Fonte: Tabela 22.6.



Gráfico 22.6: Efeito puro da mortalidade sobre estrutura etária brasileira



Fontes: Função de mortalidade para 1950, CELADE (2007). *Observatorio Demográfico 4* (2007); função de fecundidade para 1950 e 2100, Frias e Carvalho (1994); função de mortalidade para 2100, projeção BR2 do CEDEPLAR.

Diante das ilustrações propostas para o Brasil, pode-se inferir que a mudança na fecundidade apresentaria um papel definidor no processo de envelhecimento populacional brasileiro, ao longo dos 150 anos necessários para a população brasileira alcançar uma nova condição de quase-estabilidade. Por outro lado, o efeito puro acumulado da mudança na mortalidade evidencia o papel secundário dessa componente sobre o envelhecimento. Esse exercício corrobora a intuição da maioria dos demógrafos em relação ao papel principal das mudanças na fecundidade sobre o processo de envelhecimento da estrutura etária brasileira.

## 22.6 A GENERALIZAÇÃO DO CONCEITO DE POPULAÇÃO ESTÁVEL

Até aqui todas as expressões que foram derivadas se baseiam no suposto de que a taxa de crescimento  $r$  está constante e tem estado constante por um período relativamente longo. Esta é a essência da ideia de estabilidade. Entretanto, todas as fórmulas que descrevem populações estáveis podem ser generalizadas com relativa facilidade para aplicar-se a populações fechadas que não satisfazem o suposto da estabilidade. Por exemplo, a fórmula (22.2.b) afirma o seguinte:

$${}_n P_x(t) = B(0) {}_n L_x e^{rt - r(x + \frac{n}{2})} / \ell_0 = B(t) {}_n L_x e^{-r(x + \frac{n}{2})} / \ell_0 \quad (22.44)$$

onde foi usado a propriedade de que  $B(t) = B(0)e^{rt}$ . Tudo que é preciso para que esta expressão se aplique a qualquer população, estável ou não, é a substituição da expressão no expoente da exponencial por

$$- \int_0^{x+n/2} r(a, t) da \quad (22.45)$$



Note-se que, no caso de uma função  $r(a, t)$  constante, essa expressão se reduz a (22.44). A prova dessa formulação mais geral de (22.44) vai além do conteúdo deste livro, mas pode ser encontrada, por exemplo, em Caselli, Vallin e Wunsch (2006: 262). As outras fórmulas mostradas neste capítulo podem ser adaptadas da mesma forma. A principal utilidade desta generalização é que ela serve de base para certos métodos de estimação da mortalidade que serão discutidos no Capítulo 23, particularmente o método de Bennett-Horiuchi.

Na versão contínua de (22.44), a integral vai de 0 a  $x$ , em vez de  $x+n/2$ . Aplicando essa substituição, a equação de Lotka (22.11) se converte em:

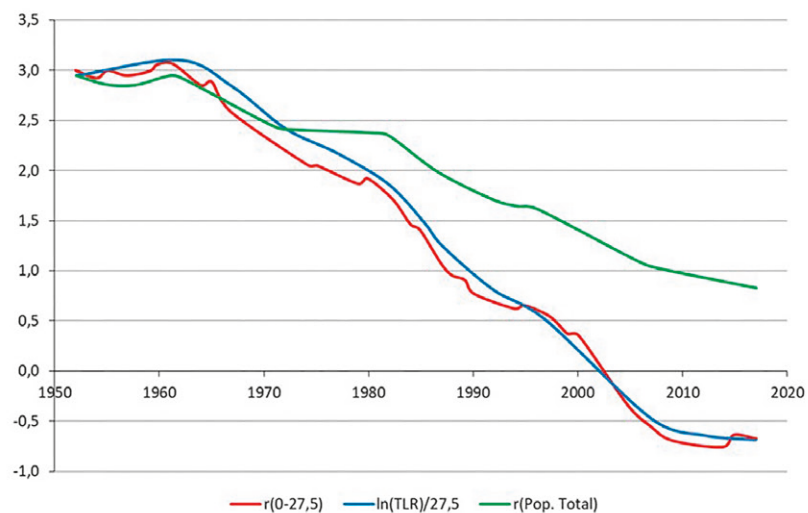
$$\int_0^x \exp(-\int_0^a r(a) da) \ell^F(x) \frac{f(x)}{1+RS_0} dx = 1 \quad (22.46)$$

A prova formal desta identidade pode ser encontrada em Preston e Coale (1982). A partir de (22.46), Preston (1986) conseguiu mostrar que

$$\frac{1}{T} \int_0^T r(a, t) da = r + O(T) \quad (22.47)$$

onde  $O(T)$  é uma expressão que é igual a zero no caso de uma população efetivamente estável, mas que mesmo em populações não estáveis tende a ser relativamente pequena. A expressão do lado esquerdo, por sua vez, é aproximadamente igual à taxa de crescimento da população menor de  $T$  anos. A implicação deste resultado é que mesmo em populações não estáveis, o grupo etário de 0 a  $T$  anos cresce a uma taxa próxima à taxa intrínseca e que os desvios em relação ao crescimento estável vêm predominantemente por conta da população maior de  $T$  anos. O Gráfico 22.7 ilustra isso com a evolução do crescimento da população brasileira desde o início da década de 50. A linha azul e a linha vermelha mostram, respectivamente, a expressão (22.30), com  $T = 27,5$ , e a taxa anual de crescimento da população menor de 27,5 anos. As duas curvas são bastante semelhantes. O crescimento da população total, por outro lado, começa a desviar dessa trajetória na década de 70 e reflete um comportamento marcado pela influência da inércia demográfica de épocas anteriores, quando o crescimento era mais rápido.

Gráfico 22.7: Brasil 1952-2017 - Comparação de duas aproximações para a taxa intrínseca de crescimento ( $\ln(TLR)/27,5$  e crescimento da população menor de 27,5 anos) com a taxa de crescimento da população total



Fonte: Calculado a partir de Divisão de População das Nações Unidas, Revisão de 2019.