Lehrstuhl für Energiehandel und Finanzdienstleistungen
Prof. Dr. Rüdiger Kiesel
Ya Wen

SS 2014

17.09.2014

Quantitative Climate Finance

Nachklausur

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Als Hilfsmittel ist nur ein nicht-programmierbarer Taschenrechner erlaubt. Zeigen Sie Ihre Rechenwege und begründen Sie Ihre Antworten. Machen Sie Ihre endgültige Lösung DEUTLICH. Runden Sie alle Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen genau.

Name:

Vorname:

Matrikel-Nr.:

Bewertung:

1	2	3	4	Gesamt
max. 25	max. 30	max. 25	max. 20	max. 100

Note:

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 **(Cap and Trade)** (25 Punkte)

Ein System bestehe aus $n = 20$ CO_2-emittierenden Unternehmen. Alle Unternehmen unterliegen einem Cap-and-Trade System mit konstantem CO_2-Preis $p > 0$. In diesem System muss jedes Unternehmen alle seine Emissionen am Ende des ersten Jahres durch Zertifikate abdecken.

Jedes Unternehmen $i \in \{1, ..., n\}$ emittiere ohne Minderungsmaßnahmen 20 Tonnen CO_2.

Unternehmen i reduziere seine Emissionen um durchschnittlich b^i Tonnen.

Die gesamte Emissionsmenge des Unternehmens i betrage also $e^i = 20 - b^i$.

Die Minderungskosten seien für alle Unternehmen definiert durch:

$$c(b^i) = \frac{(b^i)^2}{4} + 2b^i.$$

Der Regulator lege ein Cap von $K = 300$ fest, welches nicht überschritten werden darf.

(a) Stellen Sie das zugehörige Optimierungsproblem des Unternehmens i auf. Bestimmen Sie damit die optimalen Miderungsvolumen b^{i*} des Unternehmens in Abhängigkeit von p. **(9 Punkte)**

(b) Bestimmen Sie dann das optimale Emissionsniveau e^{i*}. **(3 Punkte)**

(c) Wie muss der CO_2-Preis p gewählt werden, damit die gesamten Emissionen das Cap K erreichen? **(3 Punkte)**

(d) Wie hoch ist die jährliche Minderungsrate d^i, welche zum Erreichen von e^{i*} notwendig ist? Verwenden Sie den Zertifikatepreis aus Aufgabenteil (c). **(4 Punkte)**

(e) Diese Minderungsrate bleibe für alle Unternehmen konstant in den nächsten 5 Jahren. Berechnen Sie die gesamten Emissionen in diesem Zeitraum, indem Sie die geometrische Reihe anwenden. **(6 Punkte)**

Aufgabe 2 (**Hybrid Schemes**) (30 Punkte)

Wir betrachten folgende Situation eines Cap-and-Trade Systems: Die marginalen sozialen Kosten von Emissionen seien beschrieben durch $\mathsf{MSC}(x) = e^x$. Alle Unternehmen seien identisch und es herrsche vollkommener Wettbewerb. Die Grenzvermeidungskosten (marginale Minderungskosten) der Unternehmen seien beschrieben durch $\mathsf{MAC}_1(x) = e^{a-x}$, $a > 0$. Der Definitionsbereich der MSC- und MAC-Funktionen sei das Intervall $[0, a]$.

(a) Berechnen Sie in dieser Situation die ökonomisch optimale Emissionsmenge Q_1. **(3 Punkte)**

(b) Geben Sie den resultierenden Zertifikatepreis P_1 an. **(2 Punkte)**

(c) Skizzieren Sie obige Situation in einer einzigen Grafik. **(3 Punkte)**

(d) (Fall 1) Wir nehmen an, es wurde aufgrund einer angenommenen marginalen Minderungskostenkurve von MAC_1 die oben berechnete Gesamtmenge von Q_1 Zertifikaten auf den Markt gebracht. Diese Annahme stelle sich jedoch als falsch heraus und es gelte stattdessen $\mathsf{MAC}_2(x) = e^{2(a-x)}$.

   (i) Skizzieren Sie den Graphen von MAC_2 in ihrer Grafik. **(2 Punkte)**

   (ii) Welcher Zertifikatepreis P_0 ist gemäß obigem Modell zu erwarten? **(3 Punkte)**

(e) (Fall 2) Um dem Problem nachträglich zu begegnen wird den Marktteilnehmern das Recht eingeräumt, zum Safety-Valve-Preis $P_{\mathsf{SV}} = P_1$ beliebig viele Zertifikate zu erwerben.

   (i) Berechnen Sie Umkehrfunktion von MAC_2. **(4 Punkte)**

   (ii) Berechnen Sie die resultierende Emissionsmenge Q_H. Kennzeichnen Sie Q_H in Ihrer Grafik. **(3 Punkte)**

(f) (Fall 3) Die zeitabhängige Funktion MSC_t sei gegeben durch

$$\mathsf{MSC}_t(x) = xe^{-t} + e^x(1 - e^{-t}).$$

   (i) Beweisen Sie mit Hilfe des Itô-Lemmas die folgende SDE **(4 Punkte)**

$$d\mathsf{MSC}_t(x) = (e^x - \mathsf{MSC}_t(x))dt.$$

   (ii) Ist MSC_t ein Martingal? Begründen Sie Ihre Antwort. **(2 Punkte)**

   (iii) Berechnen sie $\overline{\mathsf{MSC}}(x) = \lim_{t\to\infty} \mathsf{MSC}_t(x)$. Wie hoch ist die ökonomisch optimale Emissionsmenge $\overline{Q}$ falls $\overline{\mathsf{MSC}}(x)$ gilt? **(4 Punkte)**

Aufgabe 3 **(Carbon Revenue Bonds)** (25 Punkte)

Ein Carbon-Revenue-Bond mit einer Laufzeit von 10 Jahren und dem Bondpreis P wird an einen Investor verkauft. Im Gegenzug dazu erhält dieser die Zusage, zum *Ende* jeden Jahres eine Auszahlung zu erhalten, die sich aus dem Verkauf der generierten CO_2-Zertifikate ergibt. Die erste Auszahlung erhält der Investor am *Ende* des ersten Jahres. Die jährlichen Auszahlungen seien mit C_k, $k = 1, ..., 10$, bezeichnet. Der effektive Jahreszinssatz betrage $r = 2\%$.

(a) Sei $(W_t)_{t\geq 0}$ eine eindimensionale Brownsche Bewegung (Wiener-Prozess). Welchen Erwartungswert und welche Varianz besitzt W_t, $t \geq 0$? Sei s ein weiterer Zeitpunkt mit $0 < s < t$. Welchen Erwartungswert und welche Varianz hat $W_t - W_s$? **(4 Punkte)**

(b) Der Preisprozess $(S_t)_{t\geq 0}$ der CO_2-Zertifikate sei gegeben durch

$$S_t = W_t^2 - t + 1.$$

Zeigen Sie, dass die Funktion $f(t, x) = x^2 - t + 1$ die folgende Differentialgleichung erfüllt: **(5 Punkte)**

$$D_t f(t, x) = -\frac{1}{2} D_x^2 f(t, x).$$

(c) Benutzen Sie (b) um zu zeigen, dass $(S_t)_{t\geq 0}$ ein Martingal ist. **(4 Punkte)**

(d) Berechnen Sie $\mathbb{E}[S_t]$. **(3 Punkte)**

(e) Die Menge der jährlich generierten Zertifikate sei mit N_k bezeichnet. Wir gehen davon aus, dass das Projekt jährlich 5 Zertifikate generiert. Die Auszahlung an den Investor sei definiert durch $C_k = \mathbb{E}[N_k S_k]$. Berechnen Sie C_k. **(3 Punkte)**

(f) Sei ab jetzt $C_k = 5$ für $k = 1, ..., 10$. Berechnen Sie den Bond-Preis P. **(6 Punkte)**

Aufgabe 4 (**Optimierungsproblem**) (20 Punkte)

Betrachten Sie einen Markt aus genau zwei Unternehmen A und B. Beide Unternehmen stellen eine Ware her, die zum festen Preis $\theta > 0$ verkauft werden könne. Die Produktionskosten seien null.

Die Unternehmen legen nun eine Produktionsmenge in Höhe x_A bzw. x_B fest. Bei der Produktion einer Einheit der Ware wird genau eine Tonne CO_2 emittiert, für die das Unternehmen eine Steuer τ bezahlen muss.

Der Regulator lege die Steuer in Abhängigkeit von der Gesamtemissionsmenge fest:

$$\tau(x_A, x_B) = t \cdot (x_A + x_B), \quad t > 0.$$

Die Produktionsentscheidungen sowie die Festlegung der Steuer geschehen alle zum gleichen Zeitpunkt. Beide Unternehmen versuchen, ihren Gewinn zu maximieren.

(a) Stellen Sie das Optimierungsproblem für Unternehmen A bzw. B auf und berechnen Sie die optimale Produktionsmenge in Abhängigkeit von der Produktionsmenge des jeweils anderen Unternehmens. **(6 Punkte)**

(b) Geben Sie ein Marktgleichgewicht (x_A, x_B) an. Begründen Sie Ihre Antwort. **(5 Punkte)**

(c) Wie hoch muss der Steuerparameter t mindestens gewählt werden, damit die Gesamtemissionsmenge unter dem Wert $E > 0$ liegt? **(4 Punkte)**

(d) Am Markt herrsche nun Unsicherheit über die Entscheidung des Regulators bzgl. des Steuerparameters t. Es werde von Seiten der Unternehmen angenommen, dass dieser als Zufallsvariable verteilt ist mit der Dichte

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\Big(-\frac{1}{2}(x-\mu)^2 \Big).$$

Was ist die optimale Produktionsmenge des Unternehmens i, $i \in \{A, B\}$ in Anhängigkeit von der Produktionsmenge des jeweils anderen Unternehmens und des erwarteten Steuerparameters? **(5 Punkte)**