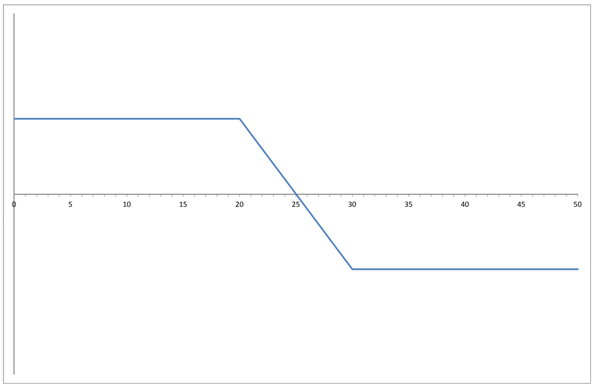
**Lehrstuhl für Energiehandel und Finanzdienstleistungen**
Prof. Dr. Rüdiger Kiesel
Sascha Kollenberg

**SS 2014**

# Einführung in Optionen, Futures und derivative Finanzinstrumente (F&O)

Klausur

**Aufgabe 1 (Strategien) (20 Punkte)** Eine Händlerin kaufe einen sogenannten Bear-Call-Spread, dessen Profit-Diagramm unten aufgetragen ist. Dabei ergibt sich der Profit aus dem Payoff abzüglich dem Preis des Portfolios. Diese Optionsstrategie wird mittels zwei europäischer Call-Optionen konstruiert. Seien $K_1$ und $K_2$ die beiden Strike-Preise und es gelte $K_1 < K_2$.




(a) Wie sieht das Portfolio für einen Bear-Call-Spread aus? Geben Sie auch die Werte der jeweiligen Strike-Preise der Optionen, sowie den Payoff jeder Einzelposition an.

(b) Was ist offensichtlich die Erwartung der Händlerin über den zukünftigen Verlauf des Preises dieses Underlyings, sofern sie ihren erwarteten Payoff maximieren möchte?

(c) Wie wird ein Bull-Call-Spread konstruiert?

(d) Skizzieren Sie das *Payoff*-Diagramm eines Bull-Spreads in obige Grafik.

**Aufgabe 2 (Arbitrage) (30 Punkte)** Begründen Sie Ihre Antworten für folgende Fragen jeweils mittels Argumentation über Arbitrage. Verwenden Sie hierzu Arbitragetabellen. Wir nehmen stetige Verzinsung mit konstantem Zinsatz $r$ an. Derivatepreise $\hat{X}(S,K,T)$ hängen vom Underlying $S$, dem Strike $K$ und der Maturität $T$ ab. Zeitangaben sind in Jahren. Verwenden Sie Arbitragetabellen in folgendem Format:

| $t$ | Positionswert | Cashflow | $T$ | Payoff im Fall 1 | Payoff im Fall 2 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Position 1 | | | | | | |
| Position 2 | | | | | | |
| ... | | | | | | |
| $\sum$ | | | | | | |

(a) Was ist der Gegenwartswert (Wert zum Zeitpunkt $t = 0$) einer Zahlung in Höhe von $K$ zum Zeitpunkt $T$?

(b) Nehmen Sie Arbitragefreiheit an. Leiten Sie die Put-Call-Parität her:

$$S(0) + \hat{P}_0(S,K,T) - \hat{C}_0(S,K,T) = Ke^{-rT}$$

Verwenden Sie hierzu eine Arbitragetabelle.

(c) Man beobachte zum Zeitpunkt $0$ am Markt folgende Preise für europäische Calls:

$$\hat{C}_0(S,50,1) = 2 \quad \hat{C}_0(S,50,2) = 1$$

Sind diese Preise mit der Annahme der Arbitragefreiheit vereinbar? Verwenden Sie eine bekannte Preisrelation.

(d) Betrachten Sie zwei europäische Calls mit identischer Maturität auf das gleiche Underlying jedoch zu unterschiedlichen Strikes $K_1 < K_2$. Nehmen Sie Arbitragefreiheit an. Welcher der beiden Calls ist teurer? Begründen Sie Ihre Antwort mittels Arbitragetabelle.

(e) Ist der Wert eines Bull-Call-Spreads positiv oder negativ? Beweisen Sie Ihre Antwort mittels Arbitragetabelle.

(f) Es gelte $r = \ln(1,5)$. Man beobachte nun zum Zeitpunkt $0$ am Markt folgende Preise:

$$S_0 = 20 \quad \hat{P}_0(S,30,1) = 3 \quad \hat{C}_0(S,30,1) = 2$$

Sind diese Preise mit der Annahme der Arbitragefreiheit vereinbar? Beweisen Sie ihre Antwort mittels einer bekannten Preisrelation.

**Aufgabe 3 (Diskrete Modelle) (15 Punkte)** Sei $S_t$ der Wert eines Underlyings zum Zeitpunkt $t$, wobei $t$ nur Werte in der diskreten Menge $\{1, ..., N\}$ annehmen kann. Der jetzige Zeitpunkt sei $t = 1$. Wir nehmen diskrete Verzinsung zum Zinssatz $r$ an. Nehmen Sie zunächst an, $S_{t+1} = (1 + u)S_t$ mit Wahrscheinlichkeit $q$ und $S_{t+1} = (1 + d)S_t$ mit Wahrscheinlichkeit $(1 - q)$.

(a) Geben Sie den erwarteten Wert des Underlyings zum Zeitpunkt $2$ an.

(b) Berechnen Sie die arbitragefreien Wahrscheinlichkeiten $q$ und $1 - q$. Begründen Sie Ihre Berechnung mittels Arbitragetabelle.

(c) Zeichnen Sie den Binomialbaum für $N = 3$.

(d) Wie viele Pfade führen zum Preis $S_3 = (1 + u)(1 + d)S_1$?

(e) Berechnen Sie den erwarteten Preis zum Zeitpunkt $3$.

(f) Wie viele Pfade führen zum Preis $S_{n+1} = (1 + u)^k(1 + d)^{n-k}S_1$ mit $k < n < N$?

(g) Geben Sie eine Formel für den Erwartungswert $\mathbb{E}[S_5]$ an.

**Aufgabe 4 (Black-Scholes) (25 Punkte)** Die berühmte Black-Scholes Formel für einen europäischen Call ist

$$C(t) = S(t)\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$$

wobei

$$d_1 = \frac{\log(\frac{S(t)}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad , \quad d_2 = \frac{\log(\frac{S(t)}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

und $\Phi(\cdot)$ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichne. Für den Preis des Underlyings gilt (unter $\mathbb{Q}$)

$$S_T = S_t \exp\left(\sigma\sqrt{T-t}X + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)\right), \quad X \sim \mathcal{N}(0,1), \quad S_t \geq 0.$$

Die Dichte der Standardnormalverteilung ist gegeben durch $f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$. Es gilt die Formel $S_t f(d_1) = Ke^{-r(T-t)}f(d_2)$, welche unbewiesen verwendet werden darf.

(a) Leiten Sie eine Formel zur Berechnung des Rho ($\rho$) eines europäischen Calls her.

(b) Steigt oder sinkt der Preis $C(t)$ eines europäischen Calls mit steigendem Zinssatz $r$? Beweisen Sie ihre Behauptung mathematisch.

(c) Steigt oder sinkt der Preis $S_T$ des Underlyings zum Zeitpunkt $T$ bei steigendem Zinssatz? Beweisen Sie ihre Behauptung mathematisch *oder* geben Sie eine knappe ökonomische Begründung.