Lehrstuhl für Energiehandel und Finanzdienstleistungen **SS 2014**
Prof. Dr. Rüdiger Kiesel
Ya Wen

Quantitative Climate Finance

Übungsblatt 3

Aufgabe 2 (Martingal in diskreter Zeit)

In Emissionsmodellen betrachten wir manchmal die Entwicklung der CO_2-Preise $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ als ein Martingal.

(a) Wie ist der Begriff des diskreten Martingals definiert?

(b) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal und $m < n$. Beweisen Sie die Formel $\mathbb{E}[X_n|X_0, X_1, ..., X_m] = X_m$ mit Hilfe der Tower-Eigenschaft.

(c) Was ist ein Sub- bzw. Supermartingal?

Aufgabe 2 (Binomial-Modell für CO_2-Zertifikate-Preise)

Wir betrachten ein Binomialmodell für den Spot-Preis der CO_2-Zertifikate in diskreter Zeit. Der Anfangspreis zum Zeitpunkt $k = 0$ sei mit S_0 bezeichnet. Zu jedem nächsten Zeitpunkt steigt der Preis entweder mit einem Faktor u, oder sinkt mit einem Faktor d. Wir bezeichnen jedes Ereignis der Preissteigerung mit H und jedes Ereignis der Preissenkung mit T. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von H ist p und die Wahrscheinlichkeit für T ist $q = 1 - p$.

Nun betrachten wir ein dreistufiges Beispiel (d.h. die Preise S_0 bis S_3 für die Zeitpunkte $k = 0, 1, 2, 3$) und bezeichnen mit Ω die Menge der gesamten möglichen Ergeignisse bis zum Zeitpunkt $k = 3$.

(a) Wie sieht Ω aus? Wie kann man die Anzahl der Elemente in Ω bestimmen?

(b) Wie viele mögliche Zustände gibt es für S_k, $k = 0, 1, 2, 3$?

(c) Zeichnen Sie den Binomialbaum der CO_2-Zertifikate-Preise.

(d) Berechnen Sie den Erwartungswert von S_1 und S_2 sowie die Varianz von S_1.

Aufgabe 3 (Binomial-Modell für CO_2-Zertifikate-Preise - Teil 2)

Alle Bedingungen bleiben gleich wie in Aufgabe 2.

(a) Berechnen Sie $\mathbb{E}[S_2|H]$ bzw. $\mathbb{E}[S_3|HT]$.

(b) Berechnen Sie $\mathbb{E}[S_3|H]$.

Man sieht in (a), dass $\mathbb{E}[S_2|H] = (up + dq)S_1(H)$ und $\mathbb{E}[S_3|HT] = (up + dq)S_2(HT)$ gilt.

Sei $\mathcal{F}_k$ die von S_k erzeugte σ-Algebra, $k = 0, 1, 2, 3$. Das heißt, $\mathcal{F}_k$ enthält alle Informationen, die bis zum Zeitpunkt k erhältlich sind. Ohne Beweis kann ab jetzt verwendet werden, dass: $\mathbb{E}[S_2|\mathcal{F}_1] = (up + dq)S_1$ und $\mathbb{E}[S_3|\mathcal{F}_2] = (up + dq)S_2$.

(c) Beweisen Sie: $\mathbb{E}[S_3|\mathcal{F}_1] = (up + dq)^2 S_1$.

(d) Unter welcher Bedingung ist $(S_k)_{k=0,1,2,3}$ ein Martingal (bzw. ein Sub- oder Supermartingal)?

Aufgabe 4 (Symmetrische Besteuerung)

Ein Unternehmen unterliege sowohl einer CO_2-Steuer t als auch einem Cap-and-Trade System mit CO_2-Preis $p > 0$. In diesem System muss das Unternehmen die Steuer auf jede seiner Emissionseinheiten zahlen und zusätzlich alle Emissionen durch Zertifikate abdecken.

Seien e_0 die ursprünglichen Emissionen des Unternehmens und e bezeichne die Emissionen nach Emissionsminderungs-Maßnahmen. Das Unternehmen reduziere demnach $a = e_0 - e$ seiner Emissionen. Die Minderungskosten seien definiert durch:

$$c(a) = \exp(5a) - 1.$$

(a) Stellen Sie das zugehörige Optimierungsproblem des oben genannten Unternehmens auf.

(b) Lösen Sie das Optimierungsproblem aus (a). Wie sieht das optimale Emissionsniveau aus?

Ab jetzt bezeichne e^* das optimale Emissionsniveau des einzelnen Unternehmens.

(c) Berechnen Sie die partielle Ableitung des optimalen Emissionsniveaus e^* nach der Steuer t (d.h. $\partial e^* / \partial t$) und interpretieren Sie das Ergebnis.

Der gesamte Markt bestehe aus n indentischen Unternehmen. Der Regulator lege ein Cap in Höhe von

$$E = n \cdot e^*$$

fest.

(d) Berechnen Sie das totale Differential dE des Caps.

(e) Setzen Sie $dE = 0$ und berechnen Sie dp/dt. Interpretieren Sie das Ergebnis.