Lehrstuhl für Energiehandel und Finanzdienstleistungen
Prof. Dr. Rüdiger Kiesel
Ya Wen

SS 2014

23.07.2014

Quantitative Climate Finance

Klausur

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Als Hilfsmittel ist nur ein nicht-programmierbarer Taschenrechner erlaubt. Zeigen Sie Ihre Rechenwege und begründen Sie Ihre Antworten. Machen Sie Ihre endgültige Lösung DEUTLICH. Runden Sie alle Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen genau.

Name:

Vorname:

Matrikel-Nr.:

Bewertung:

1	2	3	4	Gesamt
max. 25	max. 25	max. 25	max. 25	max. 100

Note:

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (**Cap and Trade**) (25 Punkte)

Ein System bestehe aus $n = 30$ CO_2-emittierenden Unternehmen.

Wir betrachten einen Zeitraum von $zwei$ Jahren.

Alle Unternehmen unterliegen einem Cap-and-Trade System mit konstantem CO_2-Preis $p > 0$. In diesem System muss jedes Unternehmen alle seine Emissionen am Ende des zweiten Jahres durch Zertifikate abdecken.

Jedes Unternehmen $i \in \{1, ..., n\}$ emittiere pro Jahr durchschnittlich 5 Tonnen CO_2. Die Gesamtemissionen jedes Unternehmens ohne Minderungsmaßnahmen seien also 10 Tonnen CO_2.

Unternehmen i reduziere seine Emissionen im ersten bzw. zweiten Jahr um b_t^i Tonnen, mit $t \in \{1, 2\}$.

Die gesamte Emissionsmenge des Unternehmens i betrage also $e^i = 10 - b^i$ mit $b^i = b_1^i + b_2^i$.

Die Minderungskosten seien für alle Unternehmen definiert durch:

$$c(b^i) = \frac{(b^i)^2}{2} + 4b^i.$$

Der Regulator lege ein Cap von $K = 150$ fest, welches nicht überschritten werden darf.

(a) Stellen Sie das zugehörige Optimierungsproblem des Unternehmens i auf. Bestimmen Sie damit das optimale Emissionsniveau e^{i*} des Unternehmens in Abhängigkeit von p. **(10 Punkte)**

(b) Wie muss der CO_2-Preis p gewählt werden, damit die folgende Bedingung erfüllt ist **(4 Punkte)**:

$$K = \sum_{i=1}^{n} e^{i*} \quad ?$$

(c) Wie hoch ist die durchschnittliche jährliche Minderungsrate $\bar{d^i}$, welche zum Erreichen von e^{i*} notwendig ist? Verwenden Sie den Zertifikatepreis aus Aufgabenteil (b). **(5 Punkte)**

(d) Beschreiben Sie die Emissionsminderungsziele der EU vom Februar 2011: Um wieviel Prozent sollen die Emissionen bis 2020 bzw. 2050, bezogen auf das Level von 1990, vermindert werden? **(6 Punkte)**

Aufgabe 2 (**Binomialmodell**) (25 Punkte)

Wir betrachten ein Binomialmodell für den Spot-Preis der CO_2-Zertifikate in diskreter Zeit. Der Anfangspreis zum Zeitpunkt $k = 0$ sei mit S_0 bezeichnet. Zu jedem nächsten Zeitpunkt steige der Preis entweder mit einem Faktor u, oder sinke mit einem Faktor d. Wir bezeichnen jedes Ereignis der Preissteigerung mit H und jedes Ereignis der Preissenkung mit T. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von H sei $p \in [0, 1]$ und die Wahrscheinlichkeit für T ist $q = 1 - p$.

Nun betrachten wir ein dreistufiges Beispiel (d.h. die Preise S_0 bis S_3 für die Zeitpunkte $k = 0, 1, 2, 3$).

(a) Zeichnen Sie den Binomialbaum der CO_2-Zertifikate-Preise. **(5 Punkte)**

(b) Wie ist ein diskretes Martingal definiert? **(4 Punkte)**

(c) Seien $u = 1.5$ und $d = 0.5$. Weiter gelte $\mathbb{E}[S_k] = (up + dq)S_{k-1}$, für $k = 1, 2, 3$. Für welche Werte von p und q ist der Prozess S_k ein Martingal? **(5 Punkte)**

(d) Sei der Prozess S_k ein (diskretes) Martingal. Beweisen Sie unter dieser Annahme die folgende Eigenschaft **(5 Punkte)**:

$$\mathbb{E}[S_3|\mathcal{F}_1] = S_1.$$

Seien nun $S_0 = 10$; $p = \frac{1}{2}$; $u = \frac{5}{4}$ und $d = \frac{3}{4}$.

(e) Berechnen Sie $\mathbb{E}[S_2]$ sowie $\mathbb{E}[S_3|HT]$. **(6 Punkte)**

Aufgabe 3 (**Hybrid Schemes**) (25 Punkte)

Wir betrachten folgende Situation eines Cap-and-Trade Systems: Die marginalen sozialen Kosten von Emissionen seien beschrieben durch $\mathsf{MSC}(x) = x^2 + 1$. Alle Unternehmen seien identisch und es herrsche vollkommener Wettbewerb. Die Grenzvermeidungskosten (marginale Minderungskosten) der Unternehmen seien beschrieben durch $\mathsf{MAC}_1(x) = x^2 - 4x + 4$. Der Definitionsbereich der MSC- und MAC-Funktionen sei das Intervall $[0, 2]$.

(a) Berechnen Sie in dieser Situation die ökonomisch optimiale Emissionsmenge Q_1. **(3 Punkte)**

(b) Geben Sie den resultierenden Zertifikatepreis P_1 an. **(3 Punkte)**

(c) Skizzieren Sie obige Situation in einer einzigen Grafik. **(3 Punkte)**

(d) (Fall 1) Wir nehmen an, es wurde aufgrund einer angenommenen marginalen Minderungskostenkurve von MAC_1 die oben berechnete Gesamtmenge von Q_1 Zertifikaten auf den Markt gebracht. Diese Annahme stelle sich jedoch als falsch heraus und es gelte stattdessen $\mathsf{MAC}_2(x) = 2x^2 - 8x + 8$.

  (i) Welcher Zertifikatepreis P_0 ist gemäß obigem Modell zu erwarten? **(3 Punkte)**

(e) (Fall 2) Um dem Problem nachträglich zu begegnen wird den Marktteilnehmern das Recht eingeräumt, zum Safety-Valve-Preis $P_{\mathsf{SV}} = P_1$ beliebig viele Zertifikate zu erwerben.

  (i) Beweisen Sie: die Umkehrfunktion von MAC_2 ist gegeben durch: $\mathsf{MAC}_2^{-1}(P) = 2 - \sqrt{\frac{P}{2}}$. **(4 Punkte)**

  (ii) Berechnen Sie die resultierende Emissionsmenge Q_H. Kennzeichnen Sie Q_H in Ihrer Grafik. **(4 Punkte)**

  (iii) Wir betrachten nun $\mathsf{MAC}_2^{-1}(P)$ als einen stochastischen Prozess, wobei P eine Brownsche Bewegung W_t bezeichne. Bestimmen Sie die Dynamik $d\mathsf{MAC}_2^{-1}(P)$. **(5 Punkte)**

Aufgabe 4 (**Carbon Revenue Bonds**) (25 Punkte)

Ein Carbon-Revenue-Bond mit einer Laufzeit von 3 Jahren und dem Bondpreis P wird an einen Investor verkauft. Im Gegenzug dazu erhält dieser die Zusage, zum *Anfang* jedes Jahres eine Auszahlung zu erhalten, die sich aus dem Verkauf der generierten CO_2-Zertifikate ergibt. Die erste Auszahlung erhält der Investor am *Anfang* des ersten Jahres. Die jährlichen Auszahlungen seien mit C_k, $k = 1, 2, 3$, bezeichnet. Der effektive Zinssatz betrage $r = 5\%$.

(a) Sei $(W_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung (Wiener-Prozess). Beschreiben Sie die unabhängigen Zuwächsen von einer Brownschen Bewegung. Sei s ein weiterer Zeitpunkt mit $0 < s < t$. Welchen Erwartungswert und welche Varianz hat $W_t - W_s$? **(3 Punkte)**

(b) Der Preisprozess $(S_t)_{t\geq 0}$ der CO_2-Zertifikate sei gegeben durch

$$S_t = \exp\left(\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t\right),$$

mit $\sigma > 0$. Berechnen Sie dS_t mit Hilfe der Itô-Formel. **(4 Punkte)**

(c) Der Prozess $(S_t)_{t\geq 0}$ ist ein Martingal. Erläutern Sie dies intuitiv anhand der in (b) erhaltenen stochastischen Differentialgleichung. **(2 Punkte)**

(d) Ist der Prozess $(S_t)_{t\geq 0}$ eine geometrische Brownsche Bewegung? Welchen Anfangszustand hat er? Erläutern Sie dies intuitiv. **(4 Punkte)**

(e) Beweisen Sie $\mathbb{E}[e^{\sigma W_t}] = e^{\frac{\sigma^2}{2} t}$ mit den Ergebnissen in (b) (c) und (d). **(4 Punkte)**

(f) Die Menge der jährlich generierten Zertifikate sei mit N_k bezeichnet. Wir gehen davon aus, dass das Projekt jährlich 10 Zertifikate generiert. Die Auszahlung an den Investor sei definiert durch $C_k = \mathbb{E}\left[N_k S_k\right]$. Berechnen Sie C_k. **(4 Punkte)**

(g) Sei ab jetzt $C_k = 10$ für $k = 1, 2, 3$. Berechnen Sie den Bond-Preis P. **(4 Punkte)**