Lehrstuhl für Energiehandel und Finanzdienstleistungen
Prof. Dr. Rüdiger Kiesel
Sascha Kollenberg

SS 2014
11.09.2014

Einführung in Optionen, Futures und derivative Finanzinstrumente (F&O)

Klausur

Nachname:	
Vorname:	
Matrikel-Nr.:	

Der Veröffentlichung der vorläufigen Klausurergebnisse in moodle stimme ich zu:

Unterschrift: ____________________________

Die endgültigen Ergebnisse werden in jedem Fall aussschließlich vom Prüfungsamt bekanntgegeben.

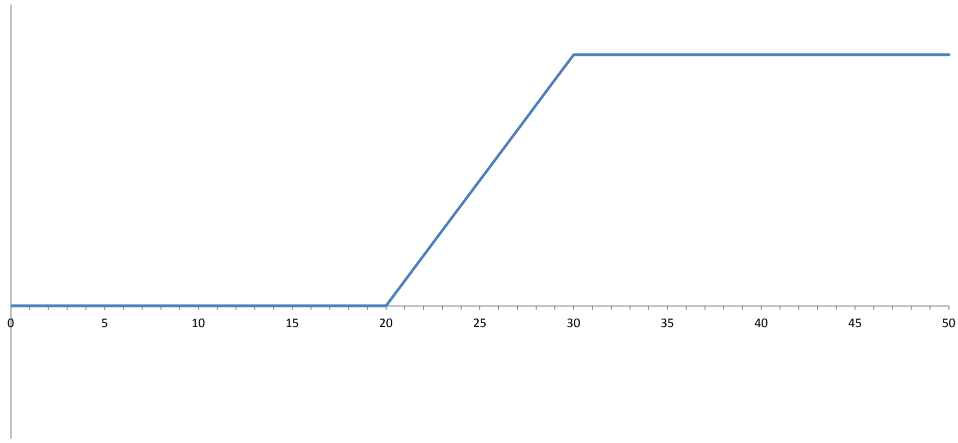
Es sind keine Hilfsmittel erlaubt. Die Lösungen sind in den Tabellen unterhalb der jeweiligen Aufgabenstellung, in der linken Spalte, einzutragen. Verwenden Sie den zusätzlichen Platz am Ende des Klausurbogens nur falls unbedingt notwendig und machen Sie Querverweise deutlich. Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	$\sum$
Max. Punkte	15	30	25	20	90
Erreichte Punkte					

Note:

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (Strategien) (15 Punkte)
Eine Händlerin kaufe einen sogenannten Bull-Spread, dessen Payoff-Diagramm unten abgebildet ist. Diese Optionsstrategie wird aus zwei europäischen Vanilla Optionen zusammengesetzt. Seien K_1 und K_2 die beiden Strike Preise und es gelte $K_1 < K_2$.



1. Wie sieht das Portfolio für obigen Bull-Spread aus (d.h. aus welchen Positionen in welchen Optionen wird er zusammengesetzt)? Geben Sie auch die Werte (in Zahlen!) der jeweiligen Strike-Preise der Optionen, sowie den Payoff jeder Einzelposition an. **(3 Punkte)**

2. Was ist offensichtlich die Erwartung der Händlerin über den zukünftigen Verlauf des Preises dieses Underlyings, sofern sie ihren erwarteten Payoff maximieren möchte? **(2 Punkte)**

Die Händlerin möchte nun stattdessen eine Butterfly Strategie anwenden. Diese Strategie besteht aus einem Put (Long Position, Strike $K_1 = 15$), zwei Puts (Short Position, Strike $K_2 = 20$) und einem Put (Long Position, Strike $K_3 = 25$). Die Optionen seinen auf dasselbe Underlying mit der selben Maturity geschrieben.

1. Zeichnen Sie das Payoff-Diagramm der Butterfly Strategie in obiges Diagramm. **(5 Punkte)**

2. Was ist offensichtlich die Erwartung der Händlerin über den zukünftigen Verlauf des Preises dieses Underlyings, sofern sie ihren erwarteten Payoff maximieren möchte? **(5 Punkte)**

Aufgabe 2 (Arbitrage) (30 Punkte)
Begründen Sie Ihre Antworten für folgende Fragen jeweils mittels Argumentation über Arbitrage. Verwenden Sie hierzu Arbitragetabellen. Wir nehmen stetige Verzinsung mit konstantem Zinsatz r an. Derivatepreise $\hat{X}(S, K, T)$ hängen vom Underlying S, dem Strike K und der Maturität T ab. Zeitangaben sind in Jahren. Verwenden Sie Arbitragetabellen in folgendem Format:

t	Positionswert	Cashflow	T	Payoff im Fall 1	Payoff im Fall 2	...
Position 1						
Position 2						
...						
$\sum$						

Machen Sie ihre wesentlichen Argumentationsschritte deutlich!

Es gilt die Put-Call-Parität:

$$S(0) + \hat{P}_0(S, K, T) - \hat{C}_0(S, K, T) = Ke^{-rT}$$

1. Welchen Betrag muss eine Händlerin zum Zeitpunkt $t = 0$ zu einem Zinssatz von r anlegen um eine Auszahlung von K zum Zeitpunkt T zu garantieren? **(1 Punkte)**

2. Was ist der Gegenwartswert G_0 (Wert zum Zeitpunkt $t = 0$) einer Zahlung in Höhe von K zum Zeitpunkt T? **(1 Punkte)**

3. Beweisen Sie: $\hat{G}_0 = G_0$ ist der arbitragefreie Preis (zum Zeitpunkt 0) für das Recht auf eine sichere Zahlung von K zum Zeitpunkt T. Verwenden Sie eine Arbitragetabelle. **(8 Punkte)**

4. Es gelte $r = 0$. Man beobachte zum Zeitpunkt 0 am Markt folgende Preise für europäische Puts:

$$\hat{P}_0(S, 50, 1) = 2 \quad \hat{P}_0(S, 50, 2) = 1$$

   Sind diese Preise mit der Annahme der Arbitragefreiheit vereinbar? Sie dürfen für Ihr Argument eine aus der Übung bekannte Preisrelation verwenden. **(6 Punkte)**

5. Betrachten Sie zwei europäische Puts mit identischer Maturität auf das gleiche Underlying jedoch zu unterschiedlichen Strikes $K_1 < K_2$. Nehmen Sie Arbitragefreiheit an. Welcher der beiden Calls ist teurer? Begründen Sie Ihre Antwort mittels Arbitragetabelle. **(10 Punkte)**

6. Geben Sie eine knappe ökonomische Begründung für ihre Antwort auf Frage 5. **(4 Punkte)**

Aufgabe 3 (Diskrete Modelle) (25 Punkte)
Sei S_t der Wert eines Underlyings zum Zeitpunkt t, wobei t nur Werte in der diskreten Menge $\{1, ..., N\}$ annehmen kann. Der jetzige Zeitpunkt sei $t = 1$. Wir nehmen diskrete Verzinsung zum Zinssatz r an. Nehmen Sie zunächst an, $S_{t+1} = (1 + u)S_t$ mit Wahrscheinlichkeit q und $S_{t+1} = (1 + d)S_t$ mit Wahrscheinlichkeit $(1 - q)$.

1. Geben Sie den erwarteten Wert des Underlyings zum Zeitpunkt 2 an. **(1 Punkte)**
2. Berechnen Sie die arbitragefreien Wahrscheinlichkeiten q und $1 - q$. Begründen Sie Ihre Berechnung mittels Arbitragetabelle. **(10 Punkte)**
3. Zeichnen Sie den Binomialbaum für $N = 3$. **(3 Punkte)**
4. Wie viele Pfade führen zum Preis $S_3 = (1 + u)(1 + d)S_1$? **(1 Punkte)**
5. Berechnen Sie den erwarteten Preis zum Zeitpunkt 3. **(2 Punkte)**
6. Wie viele Pfade führen zum Preis $S_6 = (1 + u)^3(1 + d)^2S_1$? **(2 Punkte)**
7. Wie viele Pfade führen zum Preis $S_{n+1} = (1 + u)^k(1 + d)^{n-k}S_1$ mit $k < n < N$? **(2 Punkte)**
8. Geben Sie eine Formel für den Erwartungswert $\mathbb{E}[S_n]$ an. **(2 Punkte)**
9. Geben Sie die Formel des CRR-Modells für den Wert eines europäischen Calls zum Strike K auf obiges Underlying an. **(2 Punkte)**

Aufgabe 4 (Black-Scholes) (20 Punkte)
Die berühmte Black-Scholes Formel für einen europäischen Call ist

$$C(t) = S(t)\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$$

wobei

$$d_1 = \frac{\log(\frac{S(t)}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad , \quad d_2 = \frac{\log(\frac{S(t)}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

und $\Phi(\cdot)$ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichne. Für den Preis des Underlyings gilt (unter $\mathbb{Q}$)

$$S_T = S_t \exp\left(\sigma\sqrt{T-t}X + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)\right), \quad X \sim \mathcal{N}(0,1), \quad S_t \geq 0.$$

Die Dichte der Standardnormalverteilung ist gegeben durch $f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$. Es gilt die Formel $S_t f(d_1) = Ke^{-r(T-t)}f(d_2)$, welche unbewiesen verwendet werden darf.

1. Leiten Sie eine Formel zur Berechnung des Vega ($\mathcal{V}$) eines europäischen Puts her. **(10 Punkte)**
2. Steigt oder sinkt der Preis $C(t)$ eines europäischen Puts mit steigender Volatilität σ? Beweisen Sie ihre Behauptung mathematisch. **(5 Punkte)**
3. Sei $\sigma = 0$. Steigt oder sinkt der Preis S_T des Underlyings zum Zeitpunkt T für spätere Zeitpunkte T? Beweisen Sie ihre Behauptung mathematisch ***und*** geben Sie eine knappe ökonomische Begründung. **(5 Punkte)**