UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Lehrstuhl für Energiehandel und Finanzdienstleistungen **SS 2014**
Prof. Dr. Rüdiger Kiesel
Andrea v. Avenarius

Energiehandel

Probeklausur

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Als Hilfsmittel ist nur ein nicht-programmierbarer Taschenrechner, ein Lineal und ein dokumentenechter Stift erlaubt. Begründen Sie Ihre Antworten und machen Sie Ihre endgültige Lösung deutlich. Runden Sie alle Ergebnisse auf drei Nachkommastellen genau. Verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt. Beantworten Sie alle Fragen!

Der Veröffentlichung der vorläufigen Klausurergenisse in Moodle2 stimme ich zu:

Unterschift: ________________________________
Eine verbindliche Bekanntmachung der Note findet ausschließlich durch das Prüfungsamt statt.

Name:

Vorname:

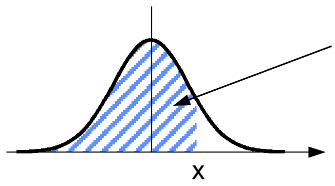
Matrikel-Nr.:

Bewertung:

1	2	3	4	Gesamt
max. 15	max. 25	max. 37	max. 13	max. 90

Note:

Tabelle der Standardnormalverteilung ($\mu = 0$, $\sigma = 1$)



$$F_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Ablesebeispiel: $F_N(2{,}36) = 0{,}990863$

	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,00	0,500000	0,503989	0,507978	0,511967	0,515953	0,519939	0,523922	0,527903	0,531881	0,535856
0,10	0,539828	0,543795	0,547758	0,551717	0,555670	0,559618	0,563559	0,567495	0,571424	0,575345
0,20	0,579260	0,583166	0,587064	0,590954	0,594835	0,598706	0,602568	0,606420	0,610261	0,614092
0,30	0,617911	0,621719	0,625516	0,629300	0,633072	0,636831	0,640576	0,644309	0,648027	0,651732
0,40	0,655422	0,659097	0,662757	0,666402	0,670031	0,673645	0,677242	0,680822	0,684386	0,687933
0,50	0,691462	0,694974	0,698468	0,701944	0,705402	0,708840	0,712260	0,715661	0,719043	0,722405
0,60	0,725747	0,729069	0,732371	0,735653	0,738914	0,742154	0,745373	0,748571	0,751748	0,754903
0,70	0,758036	0,761148	0,764238	0,767305	0,770350	0,773373	0,776373	0,779350	0,782305	0,785236
0,80	0,788145	0,791030	0,793892	0,796731	0,799546	0,802338	0,805106	0,807850	0,810570	0,813267
0,90	0,815940	0,818589	0,821214	0,823814	0,826391	0,828944	0,831472	0,833977	0,836457	0,838913
1,00	0,841345	0,843752	0,846136	0,848495	0,850830	0,853141	0,855428	0,857690	0,859929	0,862143
1,10	0,864334	0,866500	0,868643	0,870762	0,872857	0,874928	0,876976	0,878999	0,881000	0,882977
1,20	0,884930	0,886860	0,888767	0,890651	0,892512	0,894350	0,896165	0,897958	0,899727	0,901475
1,30	0,903199	0,904902	0,906582	0,908241	0,909877	0,911492	0,913085	0,914656	0,916207	0,917736
1,40	0,919243	0,920730	0,922196	0,923641	0,925066	0,926471	0,927855	0,929219	0,930563	0,931888
1,50	0,933193	0,934478	0,935744	0,936992	0,938220	0,939429	0,940620	0,941792	0,942947	0,944083
1,60	0,945201	0,946301	0,947384	0,948449	0,949497	0,950529	0,951543	0,952540	0,953521	0,954486
1,70	0,955435	0,956367	0,957284	0,958185	0,959071	0,959941	0,960796	0,961636	0,962462	0,963273
1,80	0,964070	0,964852	0,965621	0,966375	0,967116	0,967843	0,968557	0,969258	0,969946	0,970621
1,90	0,971284	0,971933	0,972571	0,973197	0,973810	0,974412	0,975002	0,975581	0,976148	0,976705
2,00	0,977250	0,977784	0,978308	0,978822	0,979325	0,979818	0,980301	0,980774	0,981237	0,981691
2,10	0,982136	0,982571	0,982997	0,983414	0,983823	0,984222	0,984614	0,984997	0,985371	0,985738
2,20	0,986097	0,986447	0,986791	0,987126	0,987455	0,987776	0,988089	0,988396	0,988696	0,988989
2,30	0,989276	0,989556	0,989830	0,990097	0,990358	0,990613	0,990863	0,991106	0,991344	0,991576
2,40	0,991802	0,992024	0,992240	0,992451	0,992656	0,992857	0,993053	0,993244	0,993431	0,993613
2,50	0,993790	0,993963	0,994132	0,994297	0,994457	0,994614	0,994766	0,994915	0,995060	0,995201
2,60	0,995339	0,995473	0,995603	0,995731	0,995855	0,995975	0,996093	0,996207	0,996319	0,996427
2,70	0,996533	0,996636	0,996736	0,996833	0,996928	0,997020	0,997110	0,997197	0,997282	0,997365
2,80	0,997445	0,997523	0,997599	0,997673	0,997744	0,997814	0,997882	0,997948	0,998012	0,998074
2,90	0,998134	0,998193	0,998250	0,998305	0,998359	0,998411	0,998462	0,998511	0,998559	0,998605
3,00	0,998650	0,998694	0,998736	0,998777	0,998817	0,998856	0,998893	0,998930	0,998965	0,998999
3,10	0,999032	0,999064	0,999096	0,999126	0,999155	0,999184	0,999211	0,999238	0,999264	0,999289
3,20	0,999313	0,999336	0,999359	0,999381	0,999402	0,999423	0,999443	0,999462	0,999481	0,999499
3,30	0,999517	0,999533	0,999550	0,999566	0,999581	0,999596	0,999610	0,999624	0,999638	0,999650
3,40	0,999663	0,999675	0,999687	0,999698	0,999709	0,999720	0,999730	0,999740	0,999749	0,999758
3,50	0,999767	0,999776	0,999784	0,999792	0,999800	0,999807	0,999815	0,999821	0,999828	0,999835
3,60	0,999841	0,999847	0,999853	0,999858	0,999864	0,999869	0,999874	0,999879	0,999883	0,999888
3,70	0,999892	0,999896	0,999900	0,999904	0,999908	0,999912	0,999915	0,999918	0,999922	0,999925
3,80	0,999928	0,999930	0,999933	0,999936	0,999938	0,999941	0,999943	0,999946	0,999948	0,999950
3,90	0,999952	0,999954	0,999956	0,999958	0,999959	0,999961	0,999963	0,999964	0,999966	0,999967
4,00	0,999968	0,999970	0,999971	0,999972	0,999973	0,999974	0,999975	0,999976	0,999977	0,999978
4,10	0,999979	0,999980	0,999981	0,999982	0,999983	0,999983	0,999984	0,999985	0,999985	0,999986
4,20	0,999987	0,999987	0,999988	0,999988	0,999989	0,999989	0,999990	0,999990	0,999991	0,999991
4,30	0,999991	0,999992	0,999992	0,999993	0,999993	0,999993	0,999993	0,999994	0,999994	0,999994
4,40	0,999995	0,999995	0,999995	0,999995	0,999995	0,999996	0,999996	0,999996	0,999996	0,999996
4,50	0,999997	0,999997	0,999997	0,999997	0,999997	0,999997	0,999997	0,999998	0,999998	0,999998

Aufgabe 1 (15 Punkte)

Ein Investor kauft eine Swing Option.

(a) Definieren Sie, was eine Swing Option ist. (4 Punkte)
Lösung:
A swing option is similar to a cap or floor except that we have additional restrictions on the number of option exercises. Let $\phi_i \in \{0, 1\}$ be the decision whether to exercise ($\phi_i = 1$) or not to exercise ($\phi_i = 0$) the option at time t_i . The optionś payoff at time t_i is given by $\phi_i(S(t_i) - K)$ call resp. $\phi_i(K - S(t_i))$ put: We now require that the number of exercises is between Emin and Emax.

(b) Geben Sie an, wie man eine solche Option bepreisen kann, im Falle, dass das Underlying einem deterministischen Preispfad folgt. (4 Punkte)
Lösung:
To determine the swing option value, we have to find an optimal exercise strategy
$\Phi = (\phi_1, ..., \phi_N)$
maximising the expected payoff
$\sum_{i=1}^{N} e^{-r(t_i-t)}\mathbb{E}[\phi_i(S(t_i) - K)] \rightarrow max$
subject to
$E_{min} \leq \sum_{i=1}^{N} \phi_i \leq E_{max}$:
To calculate the option value various mathematical techniques are used.

Strategy For deterministic spot prices, we

- Calculate the discounted payoffs $P(t_i) = e^{-r(t_i-t)}(S(t_i) - K)$.
- Sort the discounted payoffs $P(t_i)$ in descending order.
- Take the first E_{min} payoffs regardless of their value and subsequent payoffs up to E_{max} until their sign become negative.

(c) Geben Sie an, wie man die Option normalerweise bepreisen würde (upper und lower bound). Wie ist dabei das Vorgehen? (5 Punkte)
Lösung:
For stochastic spot prices the MC-approach gives an upper bound, since information on the whole path is used, but in reality only information up to time t is available when deciding at time t.
Einschränken der Optionsrechte beim lower bound und Erweiterung der Optionsrechte beim upper bound.

(d) Kann eine Swing Option einen negativen Wert haben? Begründen Sie. (3 Punkte)
Lösung:
Ja, da nicht nur Recht, sondern auch Pflicht s. E_{min}! Payoffs könenn negativ sein.

Aufgabe 2 (25 Punkte)

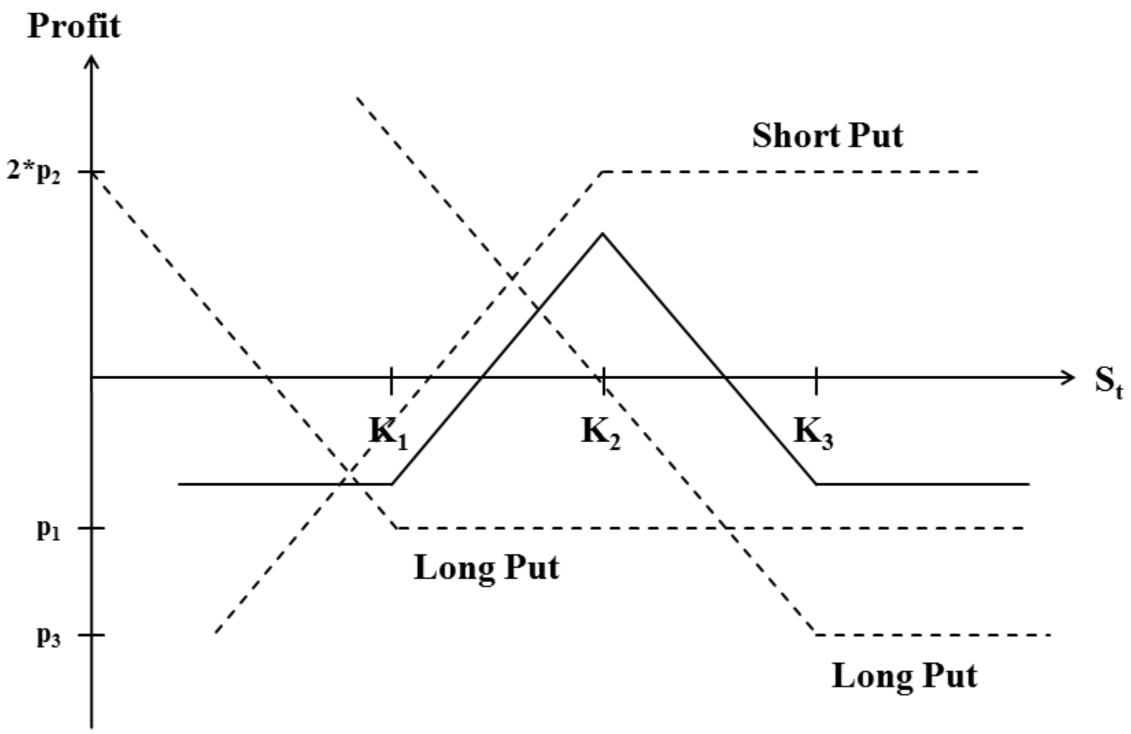
Ein Butterfly Spread wird erzeugt durch Kauf je einer Put Option mit den Ausübungspreisen K_1 und K_3. Gleichzeitig werden zwei Put Optionen mit dem Ausübungspreis K_2 verkauft. Für die Ausübungspreise gilt $K_1 < K_2 < K_3$ und $K_1 + K_3 = 2K_2$. Die Optionen sind vom Europäischen Typ, beziehen sich auf den gleichen Basiswert und haben dieselbe Laufzeit $T-t$. Die Prämie für die Put Option mit Ausübungspreis K_1 ist p_1, die Prämie für die Put Option mit Ausübungspreis K_2 ist p_2, die Prämie für die Put Option mit Ausübungspreis K_3 ist p_3 und es gilt $(2p_2 - p_1 - p_3) < 0$.

(a) Geben Sie die Auszahlungsfunktion des Butterfly Spreads an. (8 Punkte)
Lösung:
long Put mit Strike K_1: $(K_1 - S_T)^+$
long Put mit Strike K_3: $(K_3 - S_T)^+$
zwei short Puts mit Strike K_2: $-2(K_2 - S_T)^+$

	$(K_1 - S_T)^+$	$(K_3 - S_T)^+$	$-2(K_2 - S_T)^+$	Total
$S_T < K_1$	$K_1 - S_T$	$K_3 - S_T$	$-2(K_2 - S_T)$	$K_1 + K_3 - 2K_2$
$K_1 \leq S_T < K_2$	0	$K_3 - S_T$	$-2(K_2 - S_T)$	$K_3 - 2K_2 + S_T$
$K_2 \leq S_T < K_3$	0	$K_3 - S_T$	0	$K_3 - S_T$
$S_T \geq K_3$	0	0	0	0

(b) Interpretieren Sie den Geldbetrag $(2p_2 - p_1 - p_3)$. Welche von den beiden gekauften Put Optionen ist teuerer? Begründen Sie Ihre Antwort. (4 Punkte)
Lösung:
Der Geldbetrag $(2p_2 - p_1 - p_3) < 0$ gibt die Kosten (Anfangsinvestition) des Butterfly Spreads wider. Put Option mit höherem Strike (K_3) ist teurer, da das Recht etwas zu einem höhrene Preis zu verkaufen mehr wert ist, als das Recht etwas zu einem geringeren Preis verkaufen zu können bei gleichem Basisgut. Also: $p_1 < p_3$.

(c) Skizzieren Sie das Gewinn-/Verlustprofil des Butterfly Spreads. (Neben der Auszahlung werden dabei die Optionsprämien p_1, p_2 und p_3 berücksichtigt.) (6 Punkte)
Lösung:



(d) Was erwartet der Investor, der einen Butterfly Spread erwirbt? (3 Punkte)
Lösung:
Der Investor erwartet Spotpreise um K_2. Bzw. falls die aktuellen Spotpreise bei K_2 liegen, erwartet man geringe Volatilität der Spotpreise.

(e) Wie würden Sie einen Butterfly Spread im Black-Scholes-Modell bewerten? Erläutern Sie die Grundidee. (4 Punkte)
Lösung:
Man kann die einzelnen Optionen mithilfe der Black-Scholes Optionspreisformel preisen. Die Preise sind dann gegeben durch p_1, p_2, p_3. Der Preis des Butterfly Spreads ist dann $2p_2 - p_1 - p_3$.

Aufgabe 3 (37 Punkte)

Wir haben in der Vorlesung Optionspreisformeln kennen gelernt. Sei $t = 0,\ T = 1$ und der risikolose Zins sei 4%. Wir nehmen an, dass wir ein Underlying haben, das sich gemäß der Geometrisch Brownschen Bewegung verhält. Die Parameter sind: $S_t = 22,\ \sigma = 0,8$.

(a) Was ist eine Option wert, die es dem Halter erlaubt, in T das Underlying S zum Preis von 20 zu VERKAUFEN?(8 Punkte)
Lösung:
Black-Scholes:

$$\begin{aligned} Put_{BS}(S,t,T,K,r,\sigma) &= Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - S_tN(-d_1) \\ d_1 &= \frac{\ln(S/K) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}, d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \\ d_1 &= -0,331, d_2 = -1,131 \\ N(-d_1) &= N(0,331) = 0,629, N(-d_2) = N(1,131) = 0,871 \\ Put_{BS} &= 2,899 \end{aligned}$$

(b) Was ist eine Option wert, die es dem Halter erlaubt, in T das Underlying S zum Preis von 40 zu KAUFEN?(6 Punkte)
Lösung:

$$\begin{aligned} Call_{BS}(S,t,T,K,r,\sigma) &= S_tN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \\ d_1 &= \frac{\ln(S/K) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}, d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \\ d_1 &= -1,197, d_2 = 1,997 \\ N(d_1) &= N(-1,197) = 1 - 0,885 = 0,115 \\ N(d_2) &= N(-1,997) = 1 - 0,977 = 0,023 \\ Call_{BS} &= 1,646 \end{aligned}$$

(c) Was würden Sie bezahlen, um in T den Absolutbetrag der Differenz des Preises des Underlyings und 20, maximal aber 20 ausgezahlt zu bekommen? (bestimme den fairen Preis. Nochmals der Payoff als Formel: $P = \min\{20, |S_T - 20|\}$). Stellen Sie außerdem den Payoff

und Ihren Lösungsansatz mittels einer geeigneten Skizze dar. (14 Punkte)
Lösung:
long Put mit $K = 20$ (aus (a) mit $Put_20 = 2,889$), long Call mit $K = 20$, short Put mit $K = 40$
Um die Preise vom long Call und short Put zu bestimmen nutzen wir die Put-Call-Parität

$$\begin{aligned}
S_t + P_t &= C_t + Ke^{-0,04} \\
Call_20 &= 22 + 2,889 - 20e^{-0,04} = 5,673 \\
Put_40 &= 1,646 - 22 + 40e^{-0,04} = 18,078 \\
V_t &= -2,889 - 5,673 + 18,078 = 9,516
\end{aligned}$$

(d) Nennen Sie die Annahmen im Black-Scholes Modell. (9 Punkte)
Lösung:

- Alle Wertpapiere sind ohne Einschränkung teilbar
- die stetige Rendite ($\ln\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right)$) des Underlyings ist normalverteilt
- konstante Zinsrate (Habenzins = Sollzins); risikoloser Zins ist konstant und für alle Laufzeiten identisch
- unlimitiertes short-selling (Leerverkäufe sind erlaubt)
- keine Transaktionskosten
- keine Dividenden
- keine Arbitrage
- keine Steuern
- Handel mit Wertpapieren findet fortlaufend statt

Aufgabe 4 (13 Punkte)

(a) Schreiben Sie die stochastische Differentialgleichung der Geometrisch Brownschen Bewegung auf und erklären Sie die verschiedenen Parameter. (4 Punkte)
Lösung:
Der Parameter μ ist der deterministische Drift, der nicht-stochastische Zuwächse modelliert. Die Volatilität σ beschreibt, wie stark der Prozess oszilliert.

$$dX(t) = \mu X(t)dt + \sigma X(t)dW(t)$$

(b) Warum eignet sich die Geometrische Brownsche Bewegung nicht als Elektrizitätspreisprozess? (2 Punkte)
Lösung:
keine negativen Werte, keine Preissprünge, keine mean-reverting Eigenschaft

(c) Es sei $(W(t))_{t\geq 0}$ eine Standard-Brownsche Bewegung. Für den Prozess $(X(t))_{t\geq 0}$ gelte $dX(t) = (\mu - \frac{\sigma^2}{2})dt + \sigma dW(t)$. Zeigen Sie unter Verwendung des Lemmas von Itô, dass für $S(t) = f(X(t), t) = S_0 e^{X(t)}$, $S_0 \in \mathbb{R}$ gilt:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t).$$

(7 Punkte)
Lösung:

$$\begin{aligned} f(t,x) &= S_0 e^x \\ dX_t &= (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dW_t \\ m &= (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) \\ s &= \sigma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_t &= 0 \\ f_x &= S_0 e^x = f_{xx}, S_0 e^x = S_t \\ df &= (0 + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)S(t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S(t))dt + \sigma S(t)dW_t \\ &= \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW_t \end{aligned}$$