Lehrstuhl für Energiehandel und Finanzdienstleistungen
Prof. Dr. Rüdiger Kiesel
Sascha Kollenberg

SS 2014

Einführung in Optionen, Futures und derivative Finanzinstrumente (F&O)

Probeklausur

Aufgabe 1 (Arbitrage) (30 Punkte) Begründen Sie Ihre Antworten für folgende Fragen jeweils mittels Argumentation über Arbitrage. Verwenden Sie hierzu Arbitragetabellen. Wir nehmen stetige Verzinsung mit konstantem Zinsatz r an. Derivatepreise $\hat{X}(S,K,T)$ hängen vom Underlying S, dem Strike K und der Maturität T ab. Zeitangaben sind in Jahren.

(a) Nehmen Sie Arbitragefreiheit an. Leiten Sie die Put-Call-Parität her. Arbitragetabelle genügt.

(b) Man beobachte zum Zeitpunkt 0 am Markt folgende Preise für Europäische Calls:

$$\hat{C}_0(S,50,1) = 2 \quad \hat{C}_0(S,50,2) = 1$$

Sind diese Preise mit der Annahme der Arbitragefreiheit vereinbar?

(c) Es gelte $r = \ln(1,02)$. Man beobachte nun zum Zeitpunkt 0 am Markt folgende Preise:

$$S_0 = 100 \quad \hat{P}_0(S,102,1) = 3 \quad \hat{C}_0(S,102,1) = 2$$

Sind diese Preise mit der Annahme der Arbitragefreiheit vereinbar?

Aufgabe 2 (Diskrete Modelle) (20 Punkte) Sei S_t der Wert eines Underlyings zum Zeitpunkt t, wobei t nur Werte in der diskreten Menge $\{1,...,N\}$ annehmen kann. Der jetzige Zeitpunkt sei $t = 1$. Nehmen Sie zunächst an, $S_{t+1} = (1+u)S_t$ mit Wahrscheinlichkeit q und $S_{t+1} = (1+d)S_t$ mit Wahrscheinlichkeit $(1-q)$.

(a) Geben Sie den erwarteten Wert des Underlyings zum Zeitpunkt 2 an.

(b) Berechnen Sie die arbitragefreien Wahrscheinlichkeiten q und $1-q$. Begründen Sie Ihre Berechnung mittels Arbitrageargument.

(c) Zeichnen Sie den Binomialbaum für $N = 3$.

(d) Wie viele Pfade führen zum Preis $S_3 = (1+u)(1+d)S_1$?

(e) Berechnen Sie den erwarteten Preis zum Zeitpunkt 3.

(f) Der Preis S_{t+1} könne nun drei mögliche Werte annehmen:
$S_{t+1} \in \{(1+u)S_t,\ (1+m)S_t,\ (1+d)S_t\}$ jeweils mit Wahrscheinlichkeit q_u, q_m bzw. q_d. Berechnen Sie den erwarteten Wert des Underlyings zum Zeitpunkt 2.

Aufgabe 3 (Black-Scholes) (40 Punkte) Die berühmte Black-Scholes Formel für einen europäischen Call ist

$$C(t) = S(t)\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$$

wobei

$$d_1 = \frac{\log(\frac{S(t)}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad , \quad d_2 = \frac{\log(\frac{S(t)}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

und $\Phi(\cdot)$ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichne. Für den Preis des Underlyings gilt (unter $\mathbb{Q}$)

$$S_T = S_t \exp\left(\sigma\sqrt{T-t}X + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)\right), \quad X \sim \mathcal{N}(0,1), \quad S_t \geq 0.$$

(a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Halter eines Europäischen Puts seine Option in T ausübt?

(b) Können negative Preise für das Underlying auftreten? Begründen Sie ihre Antwort aus mathematischer Sicht.

(c) Es gelte $r = \frac{\sigma^2}{2}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Log-return für das Underlying zwischen t und T größer als x ist sei gegeben durch α. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit dass er kleiner ist als $-x$? Begründen Sie Ihre Antwort.

(d) Eine Zufallsvariable X sei standardnormalverteilt. Geben Sie die Verteilungsfunktion von $aX + b$ an für $a, b \in \mathbb{R}$. Verwenden Sie hierzu, dass die Dichte einer standardnormalverteilten Zufallsvariable gegeben ist durch $f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{y^2}{2})$.

(e) Nehmen Sie an, $\sigma = 0$ und $S_t = 1$. Was ist der Erwartungswert $\mathbb{E}(S_T)$ von S_T? Drücken Sie den Wert eines Zero-Coupon Bonds, der in T genau 1 auszahlt mittels dieses Erwartungswertes aus.