Física Contemporánea

Natalia Estephania Granados Díaz

11 de noviembre de 2021

1.Untilizando la definición de derivada vista en clase $\left(\frac{df}{dt} := \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h}\right)$, calcule la derivada de la función $f(t) = t^n$ con $n \in \mathbb{N}$.

$$Hint : (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^k b^{n-k} \forall n \in \mathbb{N}$$

- Calcular $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^k b^{n-k} \forall n \in \mathbb{N}$

i) Sustitución con $f(t) = t^n$

$$(t+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} t^k h^{n-k}$$

ii) Desarrollo

$(t+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} t^k h^{n-k} = \frac{n!}{0!(n-0)!} t^0 h^{n-0} + \frac{n!}{1!(n-1)!} t^1 h^{n-1} + \frac{n!}{2!(n-2)!} t^2 h^{n-2}$
$+ \ldots + \frac{n!}{(n-2)!(n-(n-2))!} t^{n-2} h^{n-(n-2)} + \frac{n!}{(n-1)!(n-(n-1))!} t^{n-1} h^{n-(n-1)} + \frac{n!}{n!(n-n)!} t^n h^{n-n}$

$= h^n + nth^{n-1} + \frac{n\cdot(n-1)}{2} t^2 h^{n-2} + \cdots + \frac{n\cdot(n-1)}{2} t^{n-2} h^2 + nt^{n-1} h + t^n$
$= h(h^n + nth^{n-1} + \frac{n\cdot(n-1)}{2} t^2 h^{n-2} + \cdots + \frac{n\cdot(n-1)}{2} t^{n-2} h^2 + nt^{n-1}) + t^n$

iii) Sustitución de $(t+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} t^k h^{n-k}$ en $\left(\frac{df}{dt} := \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h}\right)$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(h^n + nth^{n-1} + ((n\cdot(n-1))/2)t^2 h^{n-2} + \cdots + ((n\cdot(n-1))/2)t^{n-2}h^2 + nt^{n-1}) + t^n - t^n}{h} \tag{1}$$

$$= \lim_{h\to 0} h^n + nth^{n-1} + ((n\cdot(n-1))/2)t^2 h^{n-2} + \cdots + ((n\cdot(n-1))/2)t^{n-2}h^2 + nt^{n-1}) \tag{2}$$

- Sacando el límite de toda la expresión se obtiene:

$= nt^{n-1}$

$$\boxed{\frac{df(x)}{dx} = nt^{n-1}}$$

2.Dado un campo vectorial $\overrightarrow{w}(x,y) = w_1(x,y)\hat{\imath} + w_2\hat{\jmath}$, se define su *divergencia* como $\nabla \cdot \overrightarrow{w} := \frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial y}$ y su *rotacional* como $\nabla \times \overrightarrow{w} := \frac{\partial w_2}{\partial x} - \frac{\partial w_1}{\partial y}$

i) Dibuje en un plano cartesiano el campo vectorial $\overrightarrow{u}(x,y) = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$ y calcule su divergencia y su rotacional.

- Divergencia

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \overrightarrow{w} &:= \frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial y}\\ &= 1 + 1 = 2\end{aligned}$$

$$\boxed{\nabla \cdot \overrightarrow{w} := \frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial y} = 2}$$

- Rotacional

$$\begin{aligned}\nabla \times \overrightarrow{w} &:= \frac{\partial w_2}{\partial x} - \frac{\partial w_1}{\partial y}\\ &= 0 - 0 = 0\end{aligned}$$

$$\boxed{\nabla \times \overrightarrow{w} := \frac{\partial w_2}{\partial x} - \frac{\partial w_1}{\partial y} = 0}$$

$\therefore$ Hay divergencia pero no hay rotacional.

ii) Dibuje en un plano cartesiano el campo vectorial $\overrightarrow{v}(x,y) = -y\hat{\imath} + x\hat{\jmath}$ y calcule su divergencia y su rotacional.

- Divergencia

$$\nabla \cdot \overrightarrow{w} := \frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial y}$$
$$= 0 + 0 = 0$$

$$\boxed{\nabla \cdot \overrightarrow{w} := \frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial y} = 0}$$

- Rotacional

$$\nabla \times \overrightarrow{w} := \frac{\partial w_2}{\partial x} - \frac{\partial w_1}{\partial y}$$
$$= 1 + 1 = 2$$

$$\boxed{\nabla \times \overrightarrow{w} := \frac{\partial w_2}{\partial x} - \frac{\partial w_1}{\partial y} = 2}$$

$\therefore$ No hay divergencia pero hay rotacional.

iii) Con base en los dibujos y los clculos que realiz en los dos incisos anteriores, ¿Que significado geométrico parecen tener la divergencia y el rotacional de un campo vectorial?. Hint: Lo dice en el nombre.

En la interpretación geométrica de el rotacional, en el campo vectorial, los vectores forman curvas alrededor de un punto (parecen ir rotando), mientras que en la interpretación geométrica de la divergencia, el campo vectorial nos muestra la dirección de los vectores, que en este caso, parecen separarse de un punto en común, es decir, divergen de un punto en común.

3.Considera la función

$$f(t) = \frac{\sqrt{1-t^2}}{cos(ln(t))}$$

Calcula $\frac{df}{dt}$

i) $f'(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sqrt{1-t^2}}{cos(ln(t))}\right)$

$$f'(t) = \frac{((d/dt)(\sqrt{1-t^2}) \cdot cos(ln(t)) - \sqrt{1-t^2} \cdot (d/dt)(cos(ln(t)))}{(cos(ln(t)))^2}$$

ii) Derivada de las funciones compuestas

- $\frac{d}{dt}(\sqrt{1-t^2})$

$$\frac{d}{dt}(\sqrt{1-t^2}) = \frac{d}{dg}(\sqrt{g})\frac{d}{dt}(1-t^2) = \frac{1}{2\sqrt{g}} \cdot \frac{d}{dt}(-2t) = \frac{1}{2\sqrt{1-t^2}} \cdot (-2t)$$

- $\frac{d}{dt}(cos(ln(t)))$

$$\frac{d}{dt}(cos(ln(t))) = \frac{d}{dg}(cos(g))\frac{d}{dt}(ln(t)) = -sen(g) \cdot \frac{d}{dt}(ln(t)) = -sen(g) \cdot \frac{1}{t} = -sen(ln(t)) \cdot \frac{1}{t}$$

- Sustitución del resultado de las derivadas compuestas

$$f'(t) = \frac{(1/(2\sqrt{1-t^2})) \cdot (-2t) \cdot cos(ln(t)) - \sqrt{1-t^2} \cdot (-sen(ln(t)) \cdot (1/t))}{(cos(ln(t)))^2}$$

$$= \frac{(-(1/(2\sqrt{1-t^2}))) \cdot 2t \cdot cos(ln(t)) - \sqrt{1-t^2} \cdot (-(sen(ln(t))/t))}{(cos(ln(t)))^2}$$

$$= \frac{(-(1/(\sqrt{1-t^2}))) \cdot t \cdot cos(ln(t)) - \sqrt{1-t^2} \cdot (-(sen(ln(t))/t))}{(cos(ln(t)))^2}$$

$$= \frac{(-(t \cdot cos(ln(t)))/\sqrt{1-t^2}) - \sqrt{1-t^2} \cdot (-(sen(ln(t))/t))}{(cos(ln(t)))^2}$$

$$= \frac{(-(t \cdot cos(ln(t)))/\sqrt{1-t^2}) + \sqrt{1-t^2} \cdot (sen(ln(t))/t))}{(cos(ln(t)))^2}$$

$$= \frac{(-(t \cdot cos(ln(t))/\sqrt{1-t^2}) + ((\sqrt{1-t^2}sen(ln(t))/t)}{(cos(ln(t)))^2}$$

$$= \frac{(-t^2 \cdot cos(ln(t)) + (1-t^2) \cdot sen(ln(t))/\sqrt{1-t^2})}{(cos(ln(t)))^2}$$

$$= \frac{-t^2 \cdot cos(ln(t)) + (1-t^2) \cdot sen(ln(t))}{t\sqrt{1-t^2}(cos(ln(t)))^2}$$

$$\boxed{\therefore f'(t) = \frac{-t^2 \cdot cos(ln(t)) + (1-t^2) \cdot sen(ln(t))}{t\sqrt{1-t^2}(cos(ln(t)))^2}}$$