

Péndulo simple

Natalia Estephania Granados Díaz

natalia.diaz@ciencias.unam.mx

Facultad de Ciencias

Universidad Nacional Autónoma de México

29 de junio de 2022

Resumen: Se realizó un experimento con el cual, se estimó el valor de g , donde se obtuvo $(9.49 \pm 0.09)m/s^2$. Para ello, se construyó un péndulo cuya longitud se varió nueve veces y se dejó oscilar hasta que se detuvo, con la finalidad de obtener el periodo de la oscilación para cada longitud. Finalmente con base en los datos obtenidos se realizaron dos gráficas, una del periodo en función de la longitud y otra del periodo al cuadrado en función de la longitud, para éste último caso se ajustó una recta $f(x) = [(4.16 \pm 0.12)s^2/m]x - [(0.12 \pm 0.06)s^2]$ que pasa por todos los puntos experimentales y que permitió obtener el valor de la aceleración de la gravedad.

Palabras clave: Gravedad, periodo, longitud, oscilación.

Índice

1. Introducción	2
2. Material	2
3. Procedimiento Experimental	2
4. Resultados	4
5. Análisis y discusión de resultados	5
6. Conclusiones.....	6

Objetivos

- Interpretar y analizar datos de medidas repetibles.
- Generar diagramas y las ecuaciones de ajuste a las mismas.
- Medir indirectamente el valor de la gravedad mediante los datos obtenidos en el experimento.

1. Introducción

El científico italiano Galileo Galilei hizo importantes contribuciones a la astronomía y a la física, entre ellos se tiene el descubrimiento de que el período de la oscilación de un péndulo de una longitud dada puede considerarse independiente de su amplitud (Pérez Montiel, 2011, p.113). Más tarde se comprobó que un péndulo permite determinar la aceleración local de la gravedad, esto teniendo en cuenta que el péndulo simple es un dispositivo que consta de una masa puntual suspendida de un punto fijo mediante un hilo de longitud inextensible y sin peso.

Además, sabemos que para desplazamientos pequeños, el periodo de un péndulo simple está dado por la ecuación (Resnick, Halliday y Krana, 2017, p.382)

$$T = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad (1)$$

donde T es el periodo del péndulo en segundos, ℓ es la longitud del péndulo en metros, y g es la magnitud de la aceleración de la gravedad.

Esta misma expresión, elevada al cuadrado nos da la ecuación (Tippens, 2001, p.294)

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} \ell \quad (2)$$

Así mismo, de la ecuación 3 se puede obtener el valor de la gravedad (Tippens, 2001, p.294)

$$g = \frac{4\pi^2}{T} \quad (3)$$

Y, si esto se quiere graficar, obtenemos que (Tippens, 2001, p.294)

$$g = \frac{4\pi^2}{m} \quad (4)$$

donde m es el valor de la pendiente.

Muchas veces se requiere hacer experimentos para calcular el periodo de oscilación de un péndulo con la finalidad de obtener el valor de la aceleración de la gravedad, para esto, se puede usar una aplicación que nos permita analizar el movimiento de un péndulo, un ejemplo podría ser el programa Tracker, un programa gratuito que nos permite analizar videos y además reduce los errores sistemáticos, es un programa sencillo de utilizar y nos permite obtener datos muy precisos siempre que los videos sean tomados en buenas condiciones.

2. Material

Para este trabajo se emplearon dos cartulinas negras, un gancho de plástico, un Flexómetro de $(3 \pm 0.003)m$ con resolución de 0.1 cm. Marca Truper, Cordón blanco de $(0.61 \pm 0.003)m$, un Cuarzo, una bolsa de tela, un teléfono, un tripie, una cinta doble cara y un transportador de $(180 \pm 0.1)cm$.

3. Procedimiento Experimental

Lo primero que se realizó fue construir el sistema de nuestro experimento. Para ello cubrimos la ventana de una cocina con tres cartulinas negras, con la finalidad de resaltar el péndulo en el video. Posteriormente en la parte superior de la ventana colocamos un gancho de plástico, el cual se queda pegado a presión, este gancho nos sirvió para colgar de él un cordón blanco de $(0.61 \pm 0.003)m$ de largo; así mismo, de este cordón se colgó una bolsa de tela en la cual se colocó un cuarzo para agregar peso al péndulo.

Por último, a un transportador se le colocaron tres marcas de cinta blanca para resaltar los ángulos y este transportador se colocó en la parte de atrás del gancho, además, en la parte superior izquierda de las cartulinas, se colocaron dos marcas con cinta blanca, para obtener una medida de referencia en el programa Tracker, estas dos marcas van desde (0.00 ± 0.003) a $(0.30 \pm 0.003)m$. Por otra parte, al otro lado de la ventana se colocó un tripie, como se muestra en la figura 2, con el propósito de grabar el movimiento del péndulo.

Después de construir el sistema, comenzamos a tomar los datos, para ello, primero colocamos el péndulo a una longitud de $(0.65 \pm 0.003)m$, como se muestra en la figura 1, y se abrió el ángulo a $(20 \pm 0.5)^\circ$, mientras que con el teléfono se grabó el movimiento del péndulo hasta que se detuvo. Este procedimiento

de grabar las oscilaciones se repitió nueve veces, variando nueve veces la longitud del péndulo. El ángulo al que se abrió el péndulo fue el mismo para todas las longitudes.

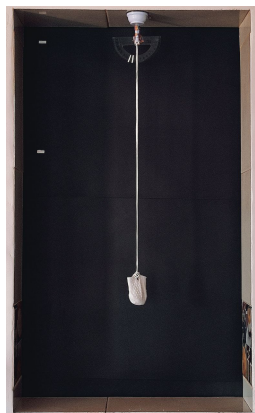


Figura 1. Se muestra el sistema, donde se observa la ventana cubierta con las cartulinas, las dos marcas de referencia con cinta, el péndulo con una longitud de $(0.65 \pm 0.003)m$, y el transportador en la parte de atrás del gancho.

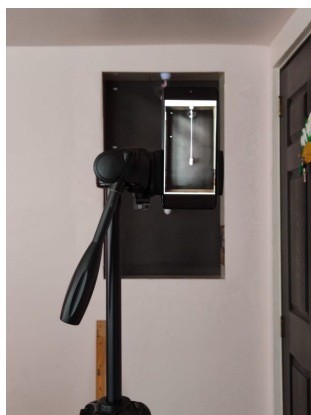


Figura 2. Se muestra el tripie con el teléfono grabando, colocado al otro lado de la ventana, en donde se encuentra el péndulo.

Al concluir de grabar los nueve videos, éstos fueron analizados con el programa Tracker. Para el procedimiento de análisis en Tracker, lo primero que se realizó fue insertar el video y con la opción de ajustes del corte se eligió el cuadro inicial del video y se seleccionó el cuadro final, esto con la finalidad de establecer el inicio y fin del video. Después, se agregó la

vara de calibración, basándose en las marcas blancas de cinta que se encuentran en la cartulina, así como, el eje de coordenadas, el cual se colocó justo en el péndulo.

Finalmente, para marcar la trayectoria del péndulo se agregó una masa puntual, y se eligió la opción de trayectoria automática. De ésta manera, en la parte derecha del programa aparecen los datos recolectados de la trayectoria automática, así como, el digrama de posición con respecto al tiempo, tal como se observa en la figura 3. El procedimiento para el análisis de video en el programa Tracker se repitió para los nueve videos.

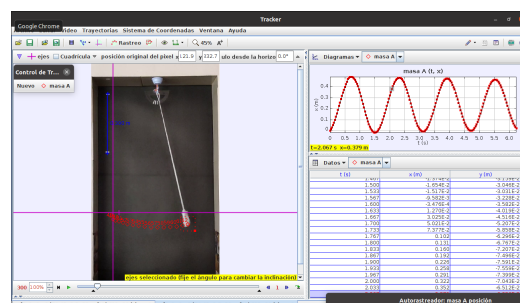


Figura 3. Se muestra la vista del programa Tracker para el análisis de los videos, en donde se observa la vara de calibración, el eje de coordenadas, la trayectoria del péndulo, los datos de la trayectoria, así como, el diagrama de posición con respecto del tiempo.

Posteriormente, los datos obtenidos de cada video se exportaron a un documento de hojas de cálculo, en donde se graficó la posición con respecto del tiempo, con el propósito de comparar las gráficas obtenidas en las hojas de cálculo con las gráficas proporcionadas por el programa Tracker. Y en ese mismo archivo se calculó el periodo por cada longitud de manera teórica 1 y gráfica, esto para comparar ambos valores. Además los datos obtenidos del periodo de manera gráfica se elevaron al cuadrado y se calculó la incertidumbre de la longitud.

Con los datos obtenidos del periodo, por cada longitud y el periodo elevado al cuadrado, así como la incertidumbre asociada a la longitud, se colocaron en otro archivo en hojas de cálculo, en la primera columna se colocaron las longitudes, en la segunda columna se colocó el periodo por cada longitud, en la tercera columna se colocó la incertidumbre asociada a la lon-

gitud y por último en la cuarta columna se colocó el periodo por cada longitud elevada al cuadrado. Éstos datos se graficaron en el programa Gnuplot.

Para el procedimiento en Gnuplot lo primero que se hizo fue crear un script en el programa Emacs, en éste script se importó el documento con las cuatro columnas de datos, y se establecieron las especificaciones para cada gráfica. Para la primera gráfica se estableció graficar el periodo en función de la longitud y la ecuación de ajuste a los datos, así como la incertidumbre correspondiente a la longitud. Ésto mismo para la segunda gráfica de el periodo al cuadrado en función de la longitud. Este script se cargó en Gnuplot, con lo cual obtuvimos las dos gráficas que necesitábamos.

Finalmente, se obtuvieron las ecuaciones de ajuste a cada gráfica, la R^2 , la pendiente de cada gráfica y con éstos datos se midió el valor de la gravedad, mediante la ecuación 4 y se calculó su incertidumbre, todos éstos datos, se especificaron en la bitácora.

4. Resultados

En la tabla 1 en la primera columna a la izquierda se muestran las nueve longitudes que se variaron para el péndulo, en unidades de metros, así como, su incertidumbre asociada a la longitud. En la segunda columna se muestran los nueve periodos, en unidades de segundos, correspondientes a cada longitud. Finalmente, en la tercera columna se muestra el periodo correspondiente a cada longitud elevado al cuadrado, en unidades de segundos al cuadrado.

Nótese que la incertidumbre de la longitud es de $(\pm 0.003)m$, esto se debe a que es una medida repetible, la cual se hizo con el mismo instrumento de medida, un flexómetro. Mientras que, en las columnas de la izquierda no se muestra una incertidumbre asociada al periodo, esto se debe a que el experimento se realizó con el programa Tracker, en donde no se obtuvo una incertidumbre asociada al periodo.

Los cálculos de las incertidumbres y periodos teóricos 1 y experimentales 1 se encuentran detallados en la bitácora.

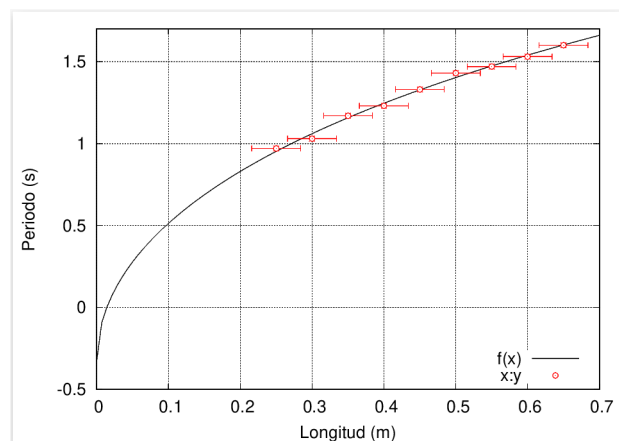
En la gráfica 1 se observa el periodo de oscilaciones del péndulo en función de las nueve longitudes distintas, así como la línea de tendencia y las incertidumbres asociadas a la longitud. De ésta gráfica también se obtuvo la función que se ajusta a los datos

Tabla 1. Longitud y periodo del péndulo.

Longitud (m) (± 0.003)m	Periodo (s)	Periodo ² (s ²)
0.25	0.97	0.93
0.30	1.03	1.07
0.35	1.17	1.36
0.40	1.23	1.52
0.45	1.33	1.78
0.50	1.43	2.05
0.55	1.47	2.15
0.60	1.53	2.35
0.65	1.60	2.56

proporcionados que es la siguiente

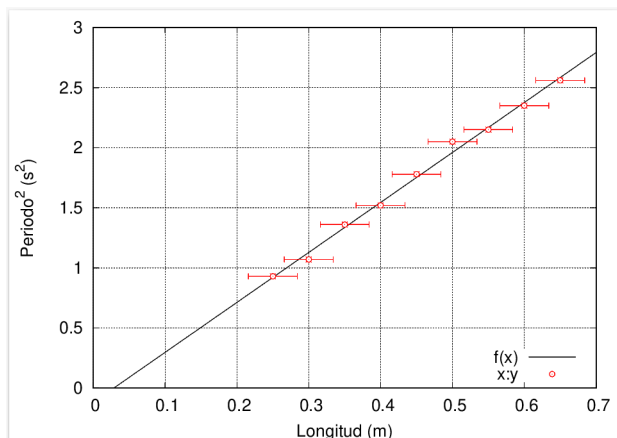
$$f(x) = [(2.84 \pm 1.04)s/\sqrt{m}]x^{1/2} - [(0.55 \pm 0.79)s/m]x - [(0.33 \pm 0.34)s], \text{ con una } R^2 = 0.99.$$



Gráfica 1. Se muestra el periodo de oscilaciones que el péndulo tiene en su componente y , en unidades de segundos, en función de la longitud en su componente x , en unidades de metros. Se muestra también una línea sólida negra que representa la estimación teórica de los valores para el periodo, así como, las barras de error en función de la longitud.

En la gráfica 2 se observa el periodo de oscilaciones al cuadrado del péndulo en función de las nueve longitudes distintas, así como, la línea de tendencia y las incertidumbres asociadas a la longitud. De ésta gráfica también se obtuvo la función que se ajusta a los datos proporcionados que es la siguiente $f(x) = [(4.16 \pm 0.12)s^2/m]x - [(0.12 \pm 0.06)s^2]$, con una $R^2 = 0.99$. Además, de éstos datos, también

se obtuvo el valor de g , dado por la siguiente ecuación $4\pi^2/[(4.16 \pm 0.12)s^2/m]$, lo que nos proporciona $g = (9.49 \pm 0.09)m/s^2$.



Gráfica 2. Se muestra el periodo de oscilaciones al cuadrado que el péndulo tiene en su componente y , en unidades de segundos, en función de la longitud en su componente x , en unidades de metros. Se muestra también una línea sólida negra que representa la estimación teórica de los valores para el periodo al cuadrado, así como, las barras de error en función de la longitud.

5. Análisis y discusión de resultados

En el primer gráfico 1 del periodo en función de la longitud, como se esperaba, se le ajustó una ecuación $f(x) = [(2.84 \pm 1.04)s/\sqrt{m}]x^{1/2} - [(0.55 \pm 0.79)s/m]x - [(0.33 \pm 0.34)s]$, es decir los datos siguen un comportamiento de una parábola, en donde $f(x) = T$, $[(2.84 \pm 1.04)s/\sqrt{m}] = 2\pi/\sqrt{g}$, $\sqrt{x} = \sqrt{l}$ de acuerdo con el siguiente modelo sobre el periodo de un péndulo simple cuando su amplitud es pequeña

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad [1]$$

como en éste caso tenemos dos componentes más en la ecuación, el modelo indica que se debe a que la amplitud de la oscilación no es pequeña, lo que indica que T se incrementa al aumentar la amplitud, consideraremos los otros dos términos muy pequeños, pero

se considera que el resultado difiere del modelo matemático por menos del 0.5% (Resnick, Halliday y Krana, 2017, p.382).

Y se puede destacar, también del gráfico 1, que de acuerdo con su $R^2 = 0.99$ el ajuste fue muy preciso. Además podemos observar que las incertidumbres se presentan únicamente en función de la longitud, esto se debe a que no se obtuvo una incertidumbre asociada al periodo, debido a el análisis en el programa Tracker.

Por otro lado, a pesar de que el ajuste fue muy exacto, de acuerdo a la $R^2 = 0.99$ obtenida, aún se puede observar en la gráfica 1 que los puntos experimentales no son totalmente exactos en la función, pero están dentro del rango de comportamiento, podemos darnos cuenta que ningún punto experimental se sale del comportamiento esperado por la función.

En el gráfico 2 para obtener el valor de la aceleración de la gravedad, se realizó un cambio de variable del periodo al periodo elevado al cuadrado, del cual se ajusta la recta $f(x) = [(4.16 \pm 0.12)s^2/m]x - [(0.12 \pm 0.06)s^2]$ a los datos obtenidos, donde $f(x) = T^2$, $[(4.16 \pm 0.12)s^2/m] = 4\pi^2/g$ y b es la ordenada al origen, pero b se consideró muy pequeña, por lo que, el modelo que se considera es

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g}l$$

Con la pendiente de la recta podemos obtener el valor de g de acuerdo con la ecuación 4. Al comparar el valor experimental de $g = (9.49 \pm 0.09)m/s^2$ que obtuvimos con el valor teórico esperado $g = 9.78m/s^2$ (Moreno Corral, 2014), se obtiene que difieren un 2.96%.

Si comparamos los resultados obtenidos con otros trabajos en donde se obtuvo el valor de la aceleración de la gravedad de una manera similar, por ejemplo, con el trabajo realizado para el XXI Concurso Universitario Feria De Las Ciencias, La Tecnología Y La Innovación ¹, en donde se obtuvo experimentalmente el valor de la aceleración de la gravedad mediante un péndulo simple y un sensor infrarrojo conectado a un arduino uno, obtuvieron un valor de $g = (9.54 \pm 0.26)$ donde podemos destacar que el error porcentual que obtuvieron 2.27% es muy cercano al obtenido en éste trabajo 2.96%.

¹Medición de la gravedad terrestre mediante un péndulo simple con Arduino

Otro trabajo con el que podemos comparar resultados es con el realizado por Biera, Huck, y Palermo en la Facultad de Cs. Exactas- Universidad Nacional del centro de la Provincia de Buenos Aires². Podemos observar que se midió el período de las primeras diez oscilaciones mediante un fotosensor conectado a un interfaz de adquisición que transmitía los datos a una computadora, en donde se obtuvo un valor de $g = (9,7 \pm 0,2)m/s^2$ y una incertidumbre porcentual de 2%.

Esto nos comprueba que los resultados obtenidos en éste trabajo no se encuentran fuera del rango de los resultados obtenidos mediante otras formas experimentales de la medición de la aceleración de la gravedad, esto considerando las condiciones en las que se realizó éste experimento.

Con la finalidad de mejorar el ajuste de nuestra curva a cada gráfico, se hizo la comparación de los datos obtenidos en hojas de cálculo y Gnuplot, donde observamos que la pendiente y la ecuación que se ajusta a los puntos experimentales de cada gráfico nos dieron los mismos valores. De aquí podemos mencionar, que el uso de los dos programas para ajustar funciones a datos y obtener las incertidumbres son procesos que arrojan los mismos resultados. La única ventaja de graficar con el programa Gnuplot, es que se puede tener un control más detallado del tipo de función que se quiere ajustar y de la forma de visualizar las gráficas, aspecto que no se puede controlar fácilmente en las hojas de cálculo.

Por otro lado, el manejo de las incertidumbres para los gráficos 1 y 2 es muy difícil en las hojas de cálculo, porque de manera predeterminada coloca las incertidumbres en el eje de las y , lo cual no es el caso para éste trabajo. En el caso de Gnuplot es posible graficar las incertidumbres usando cualquier tipo de variable, ésta es la principal razón por la que se decidió graficar con el programa Gnuplot, después de muchos intentos de graficar en las hojas de cálculo de google drive y en las hojas de cálculo de Libre Office.

6. Conclusiones

Las herramientas, Tracker, Teléfono, Péndulo y Gnuplot, que se utilizaron para obtener los datos, para analizarlos y manejarlos, permiten obtener resultados muy cercanos a los que se reportan con otros dispositivos experimentales, tecnológicamente más precisos como en el caso de los trabajos [1] y [6]. La ecuación

que modela el periodo al cuadrado contra la longitud en el gráfico 2 es $f(x) = [(4.16 \pm 0.12)s^2/m]x - [(0.12 \pm 0.06)s^2]$, del cuál se obtiene por la ecuación 4 el valor de $g = (9.54 \pm 0.26)$. El valor de g se ajusta mucho al valor teórico que se contempló para éste trabajo $g = 9.78m/s^2$ (Moreno Corral, 2014), con lo que podemos concluir que el procedimiento realizado y el manejo de los datos con Tracker y Gnuplot permite obtener resultados con incertidumbres dentro de un rango de precisión por debajo del 3%.

Referencias

- [1] XXI Concurso Universitario Feria De Las Ciencias, La Tecnología Y La Innovación. (2013). Medición de la gravedad terrestre mediante un péndulo simple con Arduino. (N.o 7538253). <https://n9.cl/j931e>
- [2] Domínguez, M. (2015). Uso de Tracker para Análisis y Modelado de Datos Experimentales en Laboratorios Tradicionales de Física. REVISTA DE LA ESCUELA DE FÍSICA, UNAH, IV, 64-69.
- [3] Tippens, P. (2001). Física, Conceptos Y Aplicaciones, (7.a ed.). MCGRAW HILL EDDUCATION.
- [4] Resnick, R., Halliday, D., Krane, K. (2017). Física. Vol. 2. (5ta edición) (5.a ed.). Grupo Editorial Patria S.A. de C.V.
- [5] Montiel, H. P. (2011). Física General (6.a ed.). Grupo Editorial Patria.
- [6] Biera, Huck, Palermo, A. G. P. (2006). Aceleración de la gravedad Péndulo simple. Facultad de Cs. Exactas- Universidad Nacional del centro de la Provincia de Buenos Aires. <https://n9.cl/r8oj2>

²Aceleración de la gravedad Péndulo simple