Geometría Analítica II

Natalia Estephania Granados Díaz

29 de junio de 2022

1. Recordemos que, para un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$, se define la aplicación lineal $g_{\mathbf{a}}$ mediante $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{a} \times \mathbf{u}$.

- Para cada $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$, encuentre la matriz asociada a $g_{\mathbf{a}}$.

Solución

Dado un vector $\mathbf{a} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ obtenemos la matriz asociada a $g_{\mathbf{a}}$, y para eso sólo evaluamos

Para e_1

$$\begin{aligned} g_{\mathbf{a}}(e_1) = \mathbf{a} \times e_1 &= \begin{bmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a & b & c \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \hat{\imath}[(b \cdot 0) - (c \cdot 0)] - \hat{\jmath}[(a \cdot 0) - (c \cdot 1)] + \hat{k}[(a \cdot 0) - (b \cdot 1)] \\ &= \hat{\imath}(0) + \hat{\jmath}(c) + \hat{k}(-b) \\ &= (0, c, -b) \end{aligned}$$

Para e_2

$$\begin{aligned} g_{\mathbf{a}}(e_2) = \mathbf{a} \times e_2 &= \begin{bmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \hat{\imath}[(b \cdot 0) - (c \cdot 1)] - \hat{\jmath}[(a \cdot 0) - (c \cdot 0)] + \hat{k}[(a \cdot 1) - (b \cdot 0)] \\ &= \hat{\imath}(-c) - \hat{\jmath}(0) + \hat{k}(a) \\ &= (-c, 0, a) \end{aligned}$$

Para e_3

$$\begin{aligned} g_{\mathbf{a}}(e_3) = \mathbf{a} \times e_3 &= \begin{bmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \hat{\imath}[(b \cdot 1) - (c \cdot 0)] - \hat{\jmath}[(a \cdot 1) - (c \cdot 0)] + \hat{k}[(a \cdot 0) - (b \cdot 0)] \\ &= \hat{\imath}(b) - \hat{\jmath}(a) + \hat{k}(0) \\ &= (b, -a, 0) \end{aligned}$$

Y así, obtenemos que la matriz asociada a $g_{\mathbf{a}}$ es

$$[g_{\mathbf{a}}] = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}$$

- Usando el inciso previo concluya que el único vector $\mathbf{a}$ para el cual $[g_{\mathbf{a}}] = O$ (la matriz cero) es el vector cero.

  Solución

  Para que la matriz $[g_{\mathbf{a}}]$ sea igual a cero, todas sus entradas deben ser cero, es decir

$$
\begin{aligned}
c = 0, -c = 0 \\
a = 0, -a = 0 \\
b = 0, -b = 0
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow [g_{\mathbf{a}}] = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0
$$

  Por lo tanto el único vector $\mathbf{a}$ para el cual $[g_{\mathbf{a}}] = O$ es

$$
\mathbf{a} = (0, 0, 0)
$$

- Demuestre que si $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in^3$ y $\lambda \in$, entonces $[g_{\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}}] = [g_{\mathbf{a}}] + \lambda\,[g_{\mathbf{b}}]$.

  Solución

  * Primero obtenemos la matriz asociada a $[g_{\mathbf{b}}]$:

  Dado un vector $\mathbf{b} = (d, e, f) \in \mathbb{R}^3$ obtenemos la matriz asociada a $g_{\mathbf{b}}$, y para eso sólo evaluamos

  Para e_1

$$
\begin{aligned}
g_{\mathbf{b}}(e_1) = \mathbf{b} \times e_1 &= \begin{bmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ d & e & f \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \hat{\imath}[(e \cdot 0) - (f \cdot 0)] - \hat{\jmath}[(d \cdot 0) - (f \cdot 1)] + \hat{k}[(d \cdot 0) - (e \cdot 1)] \\
&= \hat{\imath}(0) + \hat{\jmath}(f) + \hat{k}(-e) \\
&= (0, f, -e)
\end{aligned}
$$

  Para e_2

$$
\begin{aligned}
g_{\mathbf{b}}(e_2) = \mathbf{b} \times e_2 &= \begin{bmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ d & e & f \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \hat{\imath}[(e \cdot 0) - (f \cdot 1)] - \hat{\jmath}[(d \cdot 0) - (f \cdot 0)] + \hat{k}[(d \cdot 1) - (e \cdot 0)] \\
&= \hat{\imath}(-f) - \hat{\jmath}(0) + \hat{k}(d) \\
&= (-f, 0, d)
\end{aligned}
$$

  Para e_3

$$
\begin{aligned}
g_{\mathbf{b}}(e_3) = \mathbf{b} \times e_3 &= \begin{bmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \hat{\imath}[(e \cdot 1) - (f \cdot 0)] - \hat{\jmath}[(d \cdot 1) - (f \cdot 0)] + \hat{k}[(d \cdot 0) - (e \cdot 0)] \\
&= \hat{\imath}(e) - \hat{\jmath}(d) + \hat{k}(0) \\
&= (e, -d, 0)
\end{aligned}
$$

Y así, obtenemos que la matriz asociada a $g_{\mathbf{b}}$ es

$$
[g_{\mathbf{b}}] = \begin{bmatrix} 0 & -f & e \\ f & 0 & -d \\ -e & d & 0 \end{bmatrix}
$$

* Ahora obtenemos la matriz asociada a $g_{\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}}$:

Dados $\mathbf{a} = (a, b, c)$ y $\mathbf{b} = (d, e, f) \Rightarrow \mathbf{a} + \lambda\mathbf{b} = (a + \lambda d, b + \lambda e, c + \lambda f)$, con ésto obtenemos la matriz asociada a $g_{\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}}$, y para eso sólo evaluamos

Para e_1

$$
\begin{aligned}
g_{\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}}(e_1) = (\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}) \times e_1 &= \begin{bmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a + \lambda d & b + \lambda e & c + \lambda f \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \hat{\imath}[(b + \lambda e \cdot 0) - (c + \lambda f \cdot 0)] - \hat{\jmath}[(a + \lambda d \cdot 0) - (c + \lambda f \cdot 1)] \\
&+ \hat{k}[(a + \lambda d \cdot 0) - (b + \lambda e \cdot 1)] \\
&= \hat{\imath}(0) - \hat{\jmath}[-(c + \lambda f)] + \hat{k}[-(b + \lambda e)] \\
&= [0, c + \lambda f, -(b + \lambda e)]
\end{aligned}
$$

Para e_2

$$
\begin{aligned}
g_{\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}}(e_2) = (\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}) \times e_2 &= \begin{bmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a + \lambda d & b + \lambda e & c + \lambda f \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \hat{\imath}[(b + \lambda e \cdot 0) - (c + \lambda f \cdot 1)] - \hat{\jmath}[(a + \lambda d \cdot 0) - (c + \lambda f \cdot 0)] \\
&+ \hat{k}[(a + \lambda d \cdot 1) - (b + \lambda e \cdot 0)] \\
&= \hat{\imath}[-(c + \lambda f)] - \hat{\jmath}(0) + \hat{k}(a + \lambda d)] \\
&= [-(c + \lambda f), 0, a + \lambda d]
\end{aligned}
$$

Para e_3

$$g_{\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}}(e_3) = (\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}) \times e_3 = \begin{bmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a+\lambda d & b+\lambda e & c+\lambda f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \hat{\imath}[(b+\lambda e \cdot 1) - (c+\lambda f \cdot 0)] - \hat{\jmath}[(a+\lambda d \cdot 1) - (c+\lambda f \cdot 0)]$$
$$+ \hat{k}[(a+\lambda d \cdot 0) - (b+\lambda e \cdot 0)]$$
$$= \hat{\imath}(b+\lambda e) - \hat{\jmath}(a+\lambda d) + \hat{k}(0)]$$
$$= [b+\lambda e, -(a+\lambda d), 0]$$

Entonces, la matriz asociada a $g_{\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}}$ es

$$\begin{aligned}
[g_{\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}}] &= \begin{bmatrix} 0 & -(c+\lambda f) & b+\lambda e \\ c+\lambda f & 0 & -(a+\lambda d) \\ -(b+\lambda e) & a+\lambda d & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0+\lambda 0 & -c-\lambda f & b+\lambda e \\ c+\lambda f & 0+\lambda 0 & -a-\lambda d \\ -b+\lambda e & a+\lambda d & 0+\lambda 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda 0 & -\lambda f & \lambda e \\ \lambda f & \lambda 0 & -\lambda d \\ -\lambda e & \lambda d & \lambda 0 \end{bmatrix} \\
&= [g_{\mathbf{a}}] + \lambda \begin{bmatrix} 0 & -f & e \\ f & 0 & -d \\ -e & d & 0 \end{bmatrix} \\
&= [g_{\mathbf{a}}] + \lambda [g_{\mathbf{b}}]
\end{aligned}$$

2. Decimos que una matriz $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es *antisimétrica* si $A^T = -A$.

- Pruebe que si $A \in \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ es antisimétrica, entonces A es de la forma

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}.$$

Esto muestra que las matrices antisimétricas solamente tienen *tres grados de libertad*.

Solución

Sea

$$A = \begin{bmatrix} e & a & b \\ f & d & c \\ i & g & h \end{bmatrix}$$

Si A es antisimétrica, entonces se cuple que

$$A^T = -A$$

Es decir

$$\begin{bmatrix} e & f & i \\ a & d & g \\ b & c & h \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} e & a & b \\ f & d & c \\ i & g & h \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} e = -e, & a = -f, & i = -b \\ a = -f, & d = -d, & g = -c \\ b = -i, & c = -g, & h = -h \end{array}$$

$$\text{Si } e = -e \Rightarrow e + e = 0 = 2e \Rightarrow e = 0$$
$$\text{Si } d = -d \Rightarrow d + d = 0 = 2d \Rightarrow d = 0$$
$$\text{Si } h = -h \Rightarrow h + h = 0 = 2h \Rightarrow h = 0$$

Por lo que, si $A \in \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ es antisimétrica, entonces A es de la forma

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}.$$

- Demuestre que, para cada $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$, la matriz $[g_{\mathbf{a}}]$ es antisimétrica.

  Solución

  Sea
  $$[g_{\mathbf{a}}] = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}$$

  Si $[g_{\mathbf{a}}]$ es antisimétrica, entonces se cumple
  $$[g_{\mathbf{a}}]^T = -[g_{\mathbf{a}}]$$

  Es decir
  $$\begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}$$

  $$\begin{array}{ccc} 0 = -0, & -c = -c, & -b = -b \\ -c = -c, & 0 = -0, & a = -a \\ b = b, & -a = -a, & 0 = -0 \end{array}$$

  $$a_{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}$$

  Por lo que la matriz $[g_{\mathbf{a}}]$ es antisimétrica.

- Recíprocamente, pruebe que: si $A \in \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ es antisimétrica, entonces existe un único vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ de modo que $A = [g_{\mathbf{a}}]$.

  Solución

Sabemos, por el primer inciso que si A es antisimétrica, entonces A es de la forma

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}.$$

Al ser la matriz $[g_{\mathbf{a}}]$ asimétrica, podemos decir que ambas tienen la misma forma, por lo que, entonces existe un único vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ de modo que $A = [g_{\mathbf{a}}]$.

3. Describa detalladamente - usando los incisos anteriores de ser necesario - el proceso visto en clase para encontrar el eje de una rotación R que no sea su propia inversa. Justifique que el vector propuesto es verdaderamente un punto fijo.
¿Por qué no funciona tal procedimiento para el caso en que $R = R^{-1}$?

Solución

- En clase vimos la *fórmula de Rodrigues*, la cual nos dice que la rotación $R := R^{\alpha}_{\vec{k}}$ con eje $\vec{k}$ y por un ángulo α se puede escribir como $R = \mathrm{Id} + \sin\alpha g_{\vec{k}} + (1 - \cos\alpha) g_{\vec{k}}{}^2$. Usando dicha fórmula, encuentre explícitamente la matriz asociada a la rotación R.

  Solución

  * Primero vamos a encontrar la matriz $[g_{\mathbf{k}}]$
  Sea

$$[g_{\mathbf{k}}] = \begin{bmatrix} 0 & -k_z & k_y \\ k_z & 0 & -k_x \\ -k_y & k_x & 0 \end{bmatrix}$$

  Por lo tanto

$$\begin{bmatrix} 0 & -k_z & k_y \\ k_z & 0 & -k_x \\ -k_y & k_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -k_z & k_y \\ k_z & 0 & -k_x \\ -k_y & k_x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_z^2 - k_y^2 & k_y k_x & k_x k_z \\ k_y k_x & -h_z^2 - k_x^2 & k_y k_z \\ k_x k_z & k_y k_z & -k_y^2 - k_x^2 \end{bmatrix}$$

  Multiplicamos por $[1 - cos(\alpha)]$

$$[1 - cos(\alpha)][g_{\mathbf{k}}]^2 = \begin{bmatrix} [1 - cos(\alpha)](-k_z^2 - k_y^2) & [1 - cos(\alpha)](k_x k_y) & [1 - cos(\alpha)](k_x k_z) \\ [1 - cos(\alpha)](k_y k_x) & [1 - cos(\alpha)](-k_x^2 - k_z^2) & [1 - cos(\alpha)](k_y k_z) \\ [1 - cos(\alpha)](k_x k_z) & [1 - cos(\alpha)](k_y k_z) & [1 - cos(\alpha)](-k_y^2 - k_x^2) \end{bmatrix}$$

$$sen(\alpha)[g_{\mathbf{k}}] = \begin{bmatrix} 0 & -sen(\alpha)k_z & sen(\alpha)k_y \\ sen(\alpha)k_z & 0 & -sen(\alpha)k_x \\ -sen(\alpha)k_y & sen(\alpha)k_x & 0 \end{bmatrix}$$

  Sabemos

$$Id = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  Sumamos $Id + sen(\alpha)[g_{\mathbf{k}}] + [1 - cos(\alpha)]g_k^2$

$$[1 - cos(\alpha)][g_{\mathbf{k}}]^2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + [1 - cos(\alpha)](-k_y^2 - k_z^2) & -sen(\alpha)k_z + [1 - cos(\alpha)](k_x k_y) & sen(\alpha)k_y + [1 - cos(\alpha)](k_x k_z) \\ sen(\alpha)k_z + [1 - cos(\alpha)](k_x k_y) & 1 + [1 - cos(\alpha)](-k_x^2 - k_z^2) & -sen(\alpha)k_x + [1 - cos(\alpha)](k_y k_z) \\ -sen(\alpha)k_y + [1 - cos(\alpha)](k_x k_z) & sen(\alpha)k_x + [1 - cos(\alpha)](k_y k_z) & 1 + [1 - cos(\alpha)](-k_x^2 - k_y^2) \end{bmatrix}$$

- Elija dos ángulos $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, 2\pi)$ y dos direcciones (distintas) $\vec{k}_1, \vec{k}_2 \in \mathbb{S}^2$ (puede elegir a lo más una canónica). Luego, encuentre la matriz asociada a las rotaciones $R^{\alpha_1}_{\vec{k}_1}$ y $R^{\alpha_2}_{\vec{k}_2}$.

  Solución

  Sea

  $$k = (k_x, k_y, k_z) = (1, 0, 0) \in \mathbb{S}^2$$

  Y

  $$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

  * Encontremos $R^{\alpha_2}_{\vec{k}_2}$

  $$\begin{bmatrix} 1 + (1-0)(-0-0) & -1(0) + (1-0)(1-0) & 1(0) + (1-0)(0-0) \\ 1(0) + (1-0)(1-0) & 1 + (1-0)(-1-0) & -1(1) + (1-0)(0-0) \\ -1(0) + (1-0)(1-0) & 1(1) + (1-0)(0-0) & 1 + (1-0)(-1-0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = R^{\alpha_2}_{\vec{k}_2}$$

4. Se define la *traza de una matriz* cuadrada $M = [m_{i\,j}] \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ como $\mathrm{tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i\,i}$. Demuestre que la función

$$\mathrm{tr} : M \in \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{tr}(M)$$

es lineal y además satisface que para cualesquiera $A, B \in \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

Si lo demuestra para $n \in \mathbb{N}$ arbitraria (en lugar de $n = 3$), obtiene un punto extra en esta tarea.

Solución

* Primero demostramos que es lineal

Sean $m_{ii} \in A$ y $n_{ii} \in B$

$$\mathrm{tr}(A+B) = \sum_{i=1}^{n} m_{ii} + n_{ii} = \sum_{i=1}^{n} m_{ii} + \sum_{i=1}^{n} n_{ii} = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$$

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{tr}(\lambda A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda m_{ii} = \lambda \sum_{i=1}^{n} m_{ii} = \lambda\, \mathrm{tr}(A)$$

Entonces

$$\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$$

$$\mathrm{tr}(\lambda A) = \lambda\, \mathrm{tr}(A)$$

Por lo tanto, es lineal $\mathrm{tr}\, iM \Rightarrow \mathrm{tr}(M)$

Sea

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix}$$

Y

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 & b_6 \\ b_7 & b_8 & b_9 \end{bmatrix}$$

Y sea $G = AB$. Sabemos que la diagonal de AB está dada por

$$G_{11} = a_1b_1 + a_2b_4 + a_3b_7$$
$$G_{22} = a_4b_2 + a_5b_5 + a_6b_8$$
$$G_{33} = a_7b_3 + a_8b_6 + a_9b_9$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(AB) &= \sum_{i=1}^{3} G_{ii} \\
&= G_{11} + G_{22} + G_{33} \\
&= (a_1b_1 + a_2b_4 + a_3b_7) + (a_4b_2 + a_5b_5 + a_6b_8) + (a_7b_3 + a_8b_6 + a_9b_9)
\end{aligned}$$

Y, sea $F = BA$

$$F_{11} = b_1a_1 + b_2a_4 + b_3a_7$$
$$F_{22} = b_4a_2 + b_5a_5 + b_6a_8$$
$$F_{33} = b_7a_3 + b_8a_6 + b_9a_9$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(BA) &= \sum_{i=1}^{3} F_{ii} \\
&= F11 + F_{22} + F_{33} \\
&= (b_1a_1 + b_2a_4 + b_3a_7) + (b_4a_2 + b_5a_5 + b_6a_8) + (b_7a_3 + b_8a_6 + b_9a_9)
\end{aligned}$$

* Haremos

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(BA) &= \sum_{i=1}^{3} G_{ii} - \sum_{i=1}^{3} F_{ii} \\
&= [(a_1b_1 + a_2b_4 + a_3b_7) + (a_4b_2 + a_5b_5 + a_6b_8) + (a_7b_3 + a_8b_6 + a_9b_9)] \\
&- [(b_1a_1 + b_2a_4 + b_3a_7) + (b_4a_2 + b_5a_5 + b_6a_8) + (b_7a_3 + b_8a_6 + b_9a_9)] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(BA) = 0$$

5. Recordemos que el producto de dos números complejos se define como:

$$(a + bi) \cdot_{\mathbb{C}} (c + di) = ac - bd + (ad + bc)i$$

- Dado un complejo $z = a + bi := (a, b) \in^2$, se define $p_z :^2 \to^2$ como $p_z(w) = z \cdot_{\mathbb{C}} w$. Pruebe que p_z es lineal y encuentre la matriz asociada, $[p_z]$, a dicha función lineal.

  Solución

  Sean
  $z = a + bi$
  $w = c + di$
  $v = e + fi$

* Primero vamos a probar que la función es lineal

$$\begin{aligned} P_z(w+v) = z \cdot \mathbb{C}(w+v) &= (a+bi) \cdot \mathbb{C}(c+di+e+fi) \\ &= (a+bi) \cdot \mathbb{C}[(c+e)+(d+f)i] \\ &= a(c+e) - b(d+f) + [a(d+f)+b(c+e)]i \\ &= ac+ae-bd-bf+[ad+af+bc+be]i \\ &= ac-bd+(ad+bc)i+ae-bf+(af+be)i \end{aligned}$$

$$\therefore P_z(w+v) = P_z(w) + P_z(v)$$

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$

$$P_z(\lambda w) = \lambda ac - \lambda bd + \lambda(ad+bc)i = \lambda[ac-bd+(ad+bc)i]$$

Entonces

$$P_z(\lambda w) = \lambda P_z(w)$$

Por lo que P_z es lineal

* Ahora encontraremos la matriz asociada

Debido a que $a+bi$ puede expresar como

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, esa es la matriz asociada a P_z, esto se puede comprobar haciendo $z \cdot w$ que equivale a q

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac-bd & -bc-ad \\ bc+ad & ac-bd \end{bmatrix} = ac-bd+(bc+ad)i$$

- Usando el inciso anterior, pruebe que $[p_z]$ representa a la matriz asociada a una rotación seguida de una homotecia. Así pues, la multiplicación de complejos tiene la interpretación geométrica anterior.

  Solución

  Sea

  $$[p_z] = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

  Si los vectores (a,b) y $(-b,a)$ son unitarios, entonces la matriz $[P_z]$ es una rotación.

  * Haremos a los vectores de la matriz $[p_z]$ unitarios

  $$\sqrt{a^2+b^2} \begin{bmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{bmatrix}$$

  Entonces se puede expresar una homotecia, debido a que $\sqrt{a^2+b^2} \in \mathbb{R}$, donde

Si

$$\sqrt{a^2+b^2} < 1 \ \textit{se encoge}$$
$$\sqrt{a^2+b^2} > 1 \ \textit{se agranda}$$
$$\sqrt{a^2+b^2} = 1 \ \textit{se queda igual}$$

Por lo que $[p_z]$ es una rotación seguida de una homotecia.

- Pruebe que toda matriz de rotación en $\mathbb{R}^2$ tiene una raíz cuadrada.

  $$(i.e. \forall R \in SO(2) \exists Q \in SO(2) \quad (Q^2 = R))$$

  Sugerencia: Recuerde que toda matriz de rotación en $\mathbb{R}^2$ corresponde esencialmente con un complejo $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ y que $e^{i\theta+i\eta} = e^{i\theta} \cdot_{\mathbb{C}} e^{i\eta}$.

  Solución

  Toda matriz de rotación en $\mathbb{R}^2$ corresponde esencialmente con un complejo $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ y que $e^{i\theta+i\eta} = e^{i\theta} \cdot_{\mathbb{C}} e^{i\eta}$.

  Sea la matriz de rotación

  $$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix}$$

  Y sea

  $$\mathbf{R}_{\theta/2} = \begin{bmatrix} cos(\theta/2) & -sen(\theta/2) \\ sen(\theta/2) & cos(\theta/2) \end{bmatrix}$$

  Si hacemos una rotación de $\theta/2$ y le aplicamos la composición se obtiene la rotación original, es decir $\mathbf{R}_{\theta/2} \cdot \mathbf{R}_{\theta/2} = \mathbf{R}$

  $$\begin{bmatrix} cos(\theta/2) & -sen(\theta/2) \\ sen(\theta/2) & cos(\theta/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos(\theta/2) & -sen(\theta/2) \\ sen(\theta/2) & cos(\theta/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix} \tag{1}$$

  * Vamos a probar (1)

  $$\begin{bmatrix} cos(\theta/2) & -sen(\theta/2) \\ sen(\theta/2) & cos(\theta/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos(\theta/2) & -sen(\theta/2) \\ sen(\theta/2) & cos(\theta/2) \end{bmatrix}$$
  $$= \begin{bmatrix} cos^2(\theta/2) - sen^2(\theta/2) & -sen(\theta/2)cos(\theta/2) - sen(\theta/2)cos(\theta/2) \\ sen(\theta/2)cos(\theta/2) + sen(\theta/2)cos(\theta/2) & -sen^2(\theta/2) + cos^2(\theta/2) \end{bmatrix}$$

  Sean

  $\mathbf{R}_{11} = cos^2(\theta/2) - sen^2(\theta/2)$
  $\mathbf{R}_{21} = sen(\theta/2)cos(\theta/2) + sen(\theta/2)cos(\theta/2)$
  $\mathbf{R}_{12} = -sen(\theta/2)cos(\theta/2) - sen(\theta/2)cos(\theta/2)$

$\mathbf{R}_{22} = -sen^2(\theta/2) + cos^2(\theta/2)$

Resolvemos para $\mathbf{R}_{11}$

$$\begin{aligned} cos^2(\theta/2) - sen^2(\theta/2) &= cos^2(\theta/2) - [1 - cos^2(\theta/2)] \\ &= 2cos^2(\theta/2) - 1 \\ &= cos[2(\theta/2)] \\ &= cos\theta \end{aligned}$$

Para $\mathbf{R}_{21}$

$$\begin{aligned} sen(\theta/2)cos(\theta/2) + sen(\theta/2)cos(\theta/2) &= 2[sen(\theta/2)cos(\theta/2)] \\ &= sen[(\theta/2) + (\theta/2)] - sen[(\theta/2) - (\theta/2)] \\ &= sen[2(\theta/2)] - sen(0) \\ &= sen\theta \end{aligned}$$

Para $\mathbf{R}_{22}$

$$\begin{aligned} sen(\theta/2)cos(\theta/2) + sen(\theta/2)cos(\theta/2) &= 2[sen(\theta/2)cos(\theta/2)] \\ &= sen[(\theta/2) + (\theta/2)] - sen[(\theta/2) - (\theta/2)] \\ &= sen[2(\theta/2)] - sen(\theta) \\ &= sen\theta \end{aligned}$$

Para $\mathbf{R}_{12}$

$$\begin{aligned} -sen(\theta/2)cos(\theta/2) - sen(\theta/2)cos(\theta/2) &= 2[-sen(\theta/2)] \\ &= cos\theta \end{aligned}$$

Esto nos demuestra que

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix}$$

Entonces, hemos demostrado que su raíz es

$$\mathbf{R}_{\theta/2} = \begin{bmatrix} cos(\theta/2) & -sen(\theta/2) \\ sen(\theta/2) & cos(\theta/2) \end{bmatrix}$$

- Por último, elevando al cuadrado la matriz del inciso anterior (es decir, la *matriz raíz*) deduzca las relaciones trigonométricas para la mitad de un ángulo[1].

Solución

$$\mathbf{R}^2_{\theta/2} = \begin{bmatrix} cos(\theta/2) & -sen(\theta/2) \\ sen(\theta/2) & cos(\theta/2) \end{bmatrix}$$

[1]Esto es, escribir $\cos(\theta)$ y $\sin(\theta)$ en términos de $\cos(\theta/2)$ y $\sin(\theta/2)$.

$$cos^2(\theta/2) - sen^2(\theta/2) = cos\theta$$
$$\Rightarrow cos^2(\theta/2) - cos\theta = sen^2(\theta/2)$$
$$\Rightarrow 1 - sen^2(\theta/2) - cos\theta = sen^2(\theta/2)$$
$$\Rightarrow \frac{1 - cos\theta}{2} = sen^2(\theta/2)$$

Por lo tanto

$$sen(\theta/2) = \sqrt{\frac{1 - cos\theta}{2}}$$