Mecánica vectorial

Natalia Estephania Granados Díaz

29 de junio de 2022

1. En la figura se representa el vector de aceleración que tiene en un instante dado una partícula que se mueve en el sentido de las manecillas del reloj en una circunferencia de radio 2.5 m. Para ese instante calcula

(a) La rapidez de la partícula.
Para sacar la rapidez de la partícula, es necesario primero sacar la aceleración centrípeta. (b)

(b) Su aceleración centrípeta.

Solución

Dado que la aceleración centrípeta es la componente de la aceleración que apunta en dirección al centro, entonces

$$a_c = cos30° \cdot a \tag{1}$$

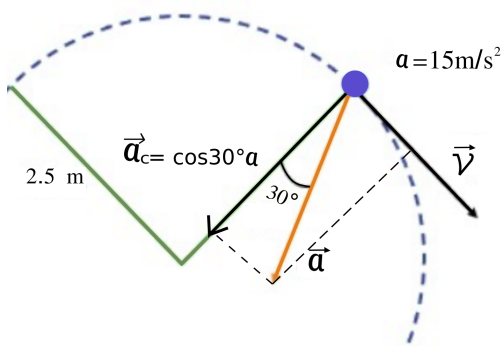

Figura 1. Aceleración centrípeta

Sustituyendo en la ecuación 1, tenemos

$$\begin{aligned} a_c =& (cos(30°))(15m/s^2) \\ =& (0.8660)(15m/s^2) \\ =& 12.99m/s^2 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Por lo tanto, la aceleración centrípeta para ese instante sería } a_c = 12.99m/s^2}$

Ahora podemos sacar la rapidez de la partícula

Condiciones iniciales

$a_c = 12.99 m/s^2$ (b)
$r = 2.5m$

Dado que

$$a_c = \frac{v^2}{r} \tag{2}$$

Entonces

$$v = \sqrt{a_c \cdot r} \tag{3}$$

Por lo tanto, sustituyendo con nuestras condiciones iniciales en la ecuación 3, tenemos

$$\begin{aligned} v =& \sqrt{(12.99m/s^2)(2.5m)} \\ =& \sqrt{32.47m^2/s^2} \\ =& 5.69m/s \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Por lo tanto, la rapidez de la partícula para ese instante sería } v = 5.69m/s}$

(c) Su aceleración tangencial.

Solución

Sea

$$a_t = sen30° \cdot a \tag{4}$$

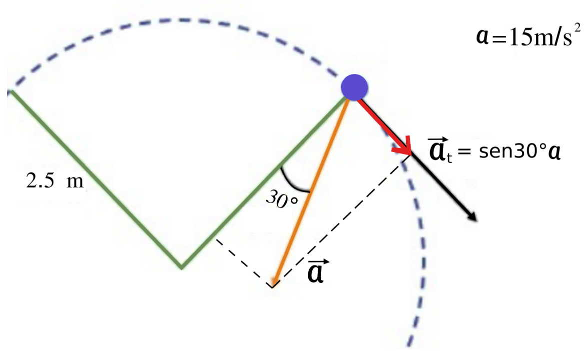

Figura 2. Aceleración tangencial

Sustituyendo en la ecuación 4, tenemos

$$\begin{aligned} a_t =& (sen(30°))(15m/s^2) \\ =& (0.5)(15m/s^2) \\ =& 7.5m/s^2 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Por lo tanto, la aceleración tangencial para ese instante sería } a_t = 7.5m/s^2}$

(d) Qué puedes decir del movimiento simplemente del hecho de que exista una componente paralela y una perpendicular de la aceleración a la velocidad.

Solución

Si tenemos una aceleración que tiene componente paralela y perpendicular, entonces podemos decir que la trayectoria de la partícula tendría que describir una línea curva, y que la partícula al moverse en ésta línea curva va cambiando la magnitud de su velocidad, es decir, va cambiando su rapidez, ya que, la componente de la aceleración paralela a la velocidad, hace que la velocidad aumente.

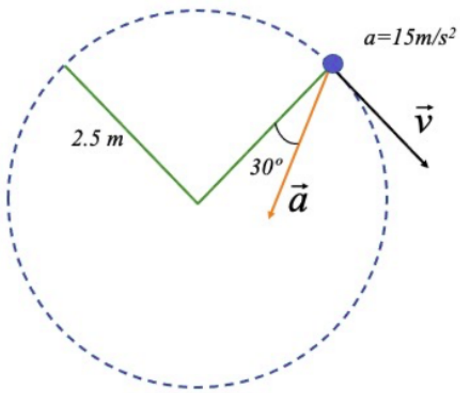

Figura 3

2. En las películas de ciencia ficción es común ver estaciones espaciales que tienen forma de un anillo que gira de tal manera que los astronautas experimentan una aceleración que sienten igual a la que se experimenta en la Tierra. Si una de estas estaciones tiene un radio de 200 m de radio, ¿cuántas revoluciones por minuto se necesitan para proporcionar una aceleración de $9.81m/s^2$?

Solución

Condiciones iniciales

$a = 9.81m/s^2$
$r = 200m$

Tomando en cuenta que

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

Entonces

$$v = \sqrt{a_c \cdot r} \tag{5}$$

Sustituyendo con nuestras condiciones iniciales en la ecuación 5, tenemos

$$
\begin{aligned}
v =& \sqrt{(9.81m/s^2)(200m)} \\
=& \sqrt{1962m^2/s^2} \\
=& 44.29m/s
\end{aligned}
$$

$\therefore$v=44.29m/s
Ahora, para saber cuanto tiempo tarda en completarse una revolución, consideramos

$$t = \frac{d}{v} \tag{6}$$

Por lo que, sustituyendo con nuestras condiciones iniciales en la equación 6, tenemos

$$
\begin{aligned}
t =& \frac{((2\pi)(r)}{v} \\
=& \frac{(2\pi)(200m)}{44.29m/s} \\
=& \frac{1256.63m}{44.29m/s} \\
=& 28.37s
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, una revolución se completa en $28.37s$.

Ahora calculamos cuántas son por minuto

1 rev	——	28.37s
x	——	60s

Figura 4

Entonces

$$x = 2.11rev$$

$\boxed{\text{Por lo tanto, se necesitan 2.11 } rev/min \text{ para proporcionar una aceleración de } 9.81m/s^2}$

3. En el acelerador Fermilab se obliga a los protones a viajar en un tubo al vacío en una órbita circular de 2.0 km de diámetro. Los protones tienen una rapidez casi igual a la de la luz (99.99995 % la rapidez de la luz). ¿Cuál es la aceleración centrípeta de estos protones?
Expresa tu respuesta en m/s^2 y compárala con el valor de g.

Solución

Condiciones iniciales

$c = 300,000km/s$
$r = 1km$

Para saber la velocidad, sacamos el porcentaje

$$300,000km/s \cdot 0.9999995 = 299,999.85km/s \tag{7}$$

Considerando la aceleración como

$$a_c = \frac{v^2}{r} \tag{8}$$

Sustituyendo con nuestras condiciones iniciales

$$\begin{aligned} a_c =& \frac{(299,999.85)^2 km^2/s^2}{1km} \\ =& 8.999991 \times 10^{10} km/s^2 \end{aligned}$$

Ahora calculamos el valor de la aceleración centrípeta expresado en m/s^2

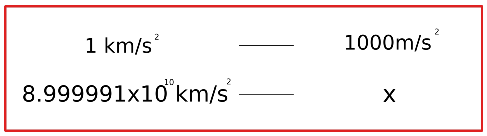

Figura 5

Entonces

$$x = 8.999991 \times 10^{13} m/s^2$$

$\boxed{\text{Por lo tanto, a aceleración centrípeta de estos protones expresada en } m/s^2 \text{ sería } a_c = 8.999991 \times 10^{13} m/s^2}$

Ahora la comparamos con el valor de g

$$\begin{aligned} \frac{a_c}{g} =& \frac{8.999991 \times 10^{13} m/s^2}{9.81 m/s^2} \\ =& 9.17430275 \times 10^{12} \end{aligned}$$

Por lo tanto, a aceleración centrípeta de estos protones comparada con el valor de g sería

$9.17430275 \times 10^{12}$ veces mayor que g

4. Ordena, de mayor a menor, la aceleración centrípeta de las partículas que siguen las siguientes trayectorias.

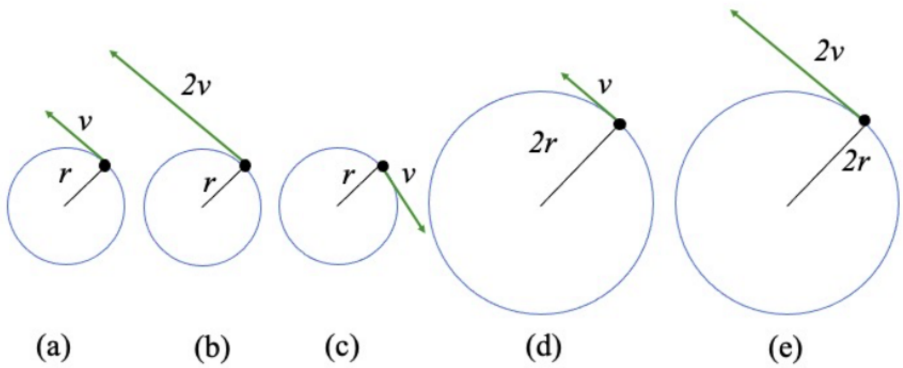

Figura 6

Aceleración centrípeta (a)

$$a_{c(a)} = \frac{v^2}{r} \tag{9}$$

Aceleración centrípeta (b)

$$a_{c(b)} = \frac{(2v)^2}{r} = \frac{4v^2}{r} \tag{10}$$

Aceleración centrípeta (c)

$$a_{c(c)} = \frac{(-v)^2}{r} = \frac{v^2}{r} \tag{11}$$

Aceleración centrípeta (d)

$$a_{c(d)} = \frac{v^2}{(2r)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{r} \tag{12}$$

Aceleración centrípera (e)

$$a_{c(e)} = \frac{(2v)^2}{2r} = \frac{4v^2}{2r} = \frac{2v^2}{r} \tag{13}$$

Por lo tanto, el resultado de ordenar de mayor a menor la aceleración centrípeta de las partículas que siguen las trayectorias de la figura 6 sería

$$a_{c(b)} > a_{c(e)} > a_{c(a)} = a_{c(c)} > a_{c(d)}$$

5. Una partícula rota en un círculo con aceleración centrípeta igual a 8 m/s2 . ¿Cómo cambia esta aceleración si:

(a) Se duplica el radio de la órbita sin cambiar la velocidad angular?

Solución

Considerando que

$$v = wr$$

Entonces la aceleración centrípeta inicial sería

$$\begin{aligned} a_{ci} =& \frac{v^2}{r} = \frac{(wr)^2}{r} \\ =& \frac{w^2r^2}{r} = w^2r = 8m/s^2 \end{aligned}$$

Duplicamos el radio de la órbita

$$a_{cf} = w^2(2r) = 2(w^2r) = 2 \cdot a_{ci} \tag{14}$$

Sustituyendo

$$a_{cf} = 2 \cdot 8m/s^2 = 16m/s^2 \tag{15}$$

Por lo tanto, si se duplica el radio de la órbita sin cambiar la velocidad angular, la aceleración centrípeta se duplica.

(b) Se duplica el radio sin cambiar la rapidez de la partícula?

Solución

Tomando en cuenta que la aceleración centrípeta inicial es

$$a_{ci} = \frac{v^2}{r} = 8m/s^2$$

Si duplicamos el radio sin cambiar la rapidez, entonces

$$a_c = \frac{v^2}{2r} = \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{r}$$

Por lo que, la aceleración final sería

$$a_{cf} = \frac{1}{2} \cdot a_{ci}$$

Sustituyendo, tenemos

$$a_{cf} = \frac{1}{2} \cdot 8m/s^2 = 4m/s^2$$

Por lo tanto, si se duplica el radio sin cambiar la rapidez de la partícula, la aceleración centrípeta disminuye a la mitad.

(c) Se duplica la velocidad angular sin cambiar el radio de la órbita?

Solución

Considerando la aceleración centrípeta inicial como

$$a_{ci} = w^2 r$$

Si duplicamos la velocidad angular, tenemos

$$\begin{aligned} a_{cf} =& (2w)^2 r \\ =& 4w^2 r \\ =& 4(w^2 r) \\ =& 4 \cdot a_{ci} \end{aligned}$$

Entonces

$$a_{cf} = 4 \cdot a_{ci}$$

Sustituyendo, tenemos

$$a_{cf} = 4 \cdot 8m/s^2 = 32m/s^2 \tag{16}$$

Por lo tanto, si se duplica la velocidad angular, sin cambiar el radio de la órbita, la aceleración centrípeta se cuadruplica.