Mecánica Vectorial

Natalia Estephania Granados Díaz

29 de junio de 2022

Una masa m atada a un resorte de constante de restitución k oscila con un periodo $T = 2s$.

(a) ¿Cómo cambia el periodo si duplicamos la masa? Explica.

Solución

Condciones iniciales
$T = 2s$

El periodo de un resorte está dado por la ecuación

$$T_m = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Si duplicaos la masa, el periodo cambiará de la siguiente manera

$$\begin{aligned} T_{2m} = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}} &= 2\pi \cdot \sqrt{2}\sqrt{\frac{m}{k}} \\ &= \sqrt{2} \cdot 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \\ &= \sqrt{2} \cdot T_m \end{aligned}$$

Esto implica, que si duplicamos la masa, el periodo aumenta $\sqrt{2}$.

(b) ¿Cuál será ahora el periodo si k se cuadruplica?

Solución

Como vimos en el inciso anterior, el periodo está dado por la siguiente ecuación

$$T_k = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Si cuadruplicamos k, el periodo cambiará de la siguiente manera

$$\begin{aligned} T_{4k} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{4k}} &= 2\pi\sqrt{\frac{1}{4}\cdot\frac{m}{k}} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt{\frac{m}{k}} \\ &= 2\pi\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}}\cdot\sqrt{\frac{m}{k}} \\ &= 2\pi\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{m}{k}} \\ &= \frac{1}{2}\cdot 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \\ &= \frac{1}{2}\cdot T_k \end{aligned}$$

Esto implica que si cuadruplipamos k, el periodo disminuye a la mitad.

(c) ¿Cuál es el periodo si la amplitud de oscilación se duplica mientras que m y k se mantienen en sus valores originales? (No necesitas conocer los valores de m y k. El análisis solo requiere que pienses en las razones).

Solución

De acuerdo con la ecuación

$$T_m = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Si se mantienen m y k en sus valores originales, el periodo permanece constante, porque el periodo no depende de la amplitud, depende de k y m.

2. Cuando se cuelga una masa de $4kg$ del techo utilizando un resorte, este último se estira $16cm$ a partir de su longitud original. Se quita esa masa y del mismo resorte se cuelga otra de $0.5kg$. Si entonces se estira el resorte y después se le suelta, ¿Cuál es su periodo de oscilación?

Solución

Condiciones iniciales
$m_1 = 4kg$
$x = 16cm = 0.16m$
$m_2 = 0.5kg$

Primero obtenemos k con m_1 y x

$$\begin{aligned} k = \frac{F}{x} = \frac{mg}{x} &= \frac{(4kg)(9.81m/s^2)}{0.16m} \\ &= \frac{39.24N}{0.16m} \\ &= 245.25N/m \end{aligned}$$

Ahora calculamos su periodo de oscilación

$$
\begin{aligned}
T &= 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \\
&= 2\pi\sqrt{\frac{0.5kg}{245.25N/m}} \\
&= 0.28s
\end{aligned}
$$

3. Un resorte con una constante de restitución k= 1000 N/m se coloca en posición vertical sobre una mesa. Por otro lado, un bloque de masa m=1.6 kg se sostiene a 1 m por encima del extremo superior del resorte. Si ahora, dejamos caer verticalmente el bloque sobre el resorte, ¿qué distancia se comprimirá el resorte?

Solución

Condiciones iniciales
$k = 1000N/m$
$m = 1.6kg$
$h = 1m$
$g = 9.81m/s^2$

Considerando que la única energía inicial del sistema $resorte - masa$ es la energía potencial de la masa, la cual se encuentra suspendida de la mesa a una distancia de $1m + L$ (un metro más la longitud del resorte), la energía inicial total sería

$$E_i = mg(L + 1m)$$

Cuando se deja caer verticalmente el bloque sobre el resorte, la energía final sería la energía potencial que tiene el bloque más la energía potencial del resorte, si el resorte se comprime una distancia x entonces la energía potencial del bloque es $mg(L - h)$ y la del resorte sería $1/2kx^2$, por lo tanto la energía final sería

$$E_f = mg(L - h) + 1/2kx^2$$

Igualando la energía inicial con la energía final, se tiene

$$mg(L + 1m) = mg(L - h) + 1/2kx^2$$

Resolvemos para x con la finalidad de encontrar la distancia a la que se comprimirá el resorte

$$
\begin{gathered}
2(1/2kx^2 - mgh - mg) \\
kx^2 - 2(mgh) - 2(mg)
\end{gathered}
$$

Resolvemos

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde
a= $k = 1000N$
b= $2(mgh) = 2(1.6kg \cdot 9.81m/s^2 \cdot 1m) = -31.392m^2/s^2 \cdot kg$
c= $2(mg) = 2(1.6kg \cdot 9.81m/s^2) = -31.392kg \cdot m/s^2$

Sustituimos

$$x = \frac{(31.392) \pm \sqrt{(-31.392)^2 - 4(1000)(-31.392)}}{2(1000)}$$

Resolvemos para + porque necesitamos la distancia a la que se comprime el resorte.

$$\begin{aligned} x &= \frac{(31.392) + \sqrt{(-31.392)^2 - 4(1000)(-31.392)}}{2(1000)} \\ &= \frac{(31.392) + \sqrt{(985.45) - (-125568)}}{2000} \\ &= \frac{(31.392) + \sqrt{126553.45)}}{2000} \\ &= \frac{31.392 + 355.74}{2000} \\ &= \frac{387.132}{2000} \\ &= 0.19m \end{aligned}$$

4. Esboza como sería la trayectoria de una partícula que se mueve en el plano $x - y$ de acuerdo con las ecuaciones $x = Acos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$, $y = 2Acos(\omega t)$, donde x y y está en metros y t en segundos.

Solución

$$x = Acos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = Asen(\omega t)$$

por lo que

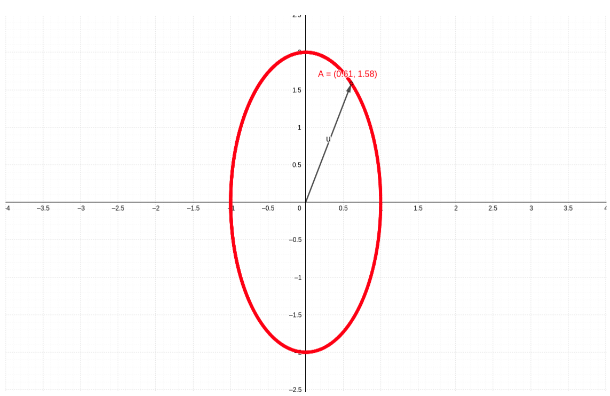
$$x = Asen(\omega t)$$

y además

$$y = 2Acos(\omega t)$$

Lo cual representa la parametrización de una elipse

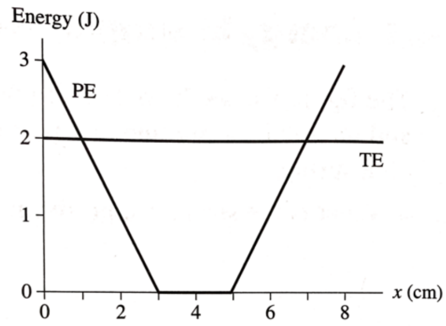
$$\left.\begin{aligned} x &= Asen(\omega t) \\ y &= 2Acos(\omega t) \end{aligned}\right\} \quad \text{Parametrización de la elipse}$$



https://www.geogebra.org/classic/cpvkwh3s

En la gráfica anterior se considera $\omega = 1$ y $A = 1$, para facilitar la visualización de la trayectoria de la partícula en el plano (x, y).

5. La figura muestra la gráfica que describe el comportamiento de la energía potencial de una partícula (PE) y de su energía total (TE) en función de la posición.



(a) ¿El movimiento de la partícula es un movimiento armónico simple? Si es así, ¿por qué?

No, porque existe un intervalo en donde la energía potencial es cero y la energía cinética es máxima, y en el movimiento armónico simple no es un intervalo, si no un punto.

(b) ¿Cuál es la amplitud del movimiento?

La amplitud se puede observar en el intervalo donde la energía potencial es máxima hasta donde tiene un valor de cero, de acuerdo con nuestra gráfica, el intervalo sería del (1,0) al (3,0), por lo que la amplitud tendría un valor de dos $a = 2cm$.

(c) Dibuja la gráfica de la energía cinética de la partícula como función de la posición.