Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät
Institut für Mathematik

# Die Crouzeix-Raviart Finite-Elemente Methode für eine Minimierung im Raum der Funktionen von beschränkter Variation

Enrico Bergmann

Version: 5. September 2020

# Inhaltsverzeichnis

# Todo list

# 1. Einleitung

[ABM] modelization of a large number of problems in physics, mechanics, or image processing requires the introducion of new functionals spaces permitting discontinuities of the solution. In phase transitions, image segmentation, plasticity theory, the study of crasks and fissures, the study of the wake in fluid dynamics , and so forth, the solution of the problem presents discontinuities along one-odimensionalmanifolds. - solution of these problems cannot be found in classical Sobolev spaces

[Braides] 1st page: image reconstruction might be our functional

Viele physikalischen Anwendungen können mit kontinuierlichen Funktionen nicht beschrieben werden [Bartels, Error Control and Adaptivity for a variational model problem defined on functions of bounded variation, und darin zitierte Quellen].

TODO schreibe Einleitung, zitiere Quellen, die Anwendungen beschreiben

# 2. Theoretische Grundlagen

TODO nur die Sachen rausschreiben/zusammentragen/zitieren (um später Theoreme und Gleichungen zitieren zu können statt Bücher) die auch wirklich gebraucht werden später in Beweisen

## 2.1. Maßtheoretische Grundlagen

TODO doch noch wenigstens eine einfach Def für Radon Maße (vor allem mit Zitat zu einer Quelle

TODO Maßtheorie für Vektormaße ist absolut nicht notwenig, da meine Anwendung ausschließlich von R2 nach R geht Möglicherweise kann ich also doch eine durchgehende Geschichte erzählen und insbesondere alles verstehen, im Quelltext sind noch auskommentierte Theorem zur Maßtheorie

## 2.2. Direkte Methode der Variationsrechnung

## 2.3. Subdifferential

## 2.4. Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen

## 2.5. Funktionen Beschränkter Variation

Dieser Abschnitt folgt Kapitel 10 von [Bar15]. Dabei sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes, polygonal berandetes Lipschitz-Gebiet.

TODO jede übernommene Definition übernehmen trotz Disclaimer oben? jede Notation erklären bzw. definieren? Falls ja; am Anfang oder Ende der Arbeit?

**Definition 2.1.** TODO vielleicht zu Grundlagen über Radonmäße verschieben

Die Vervollständigung des Raums $C_C^\infty(\Omega;\mathbb{R}^m)$ bezüglich der Norm $\|\bullet\|_{L^\infty(\Omega}$ ist ein separabler Banachraums und wird bezeichnet mit $C_0(\Omega;\mathbb{R}^m)$. Der Dualraum $\mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ von $C_0(\Omega;\mathbb{R}^m)$ wird durch den Riesz'schen Darstellungssatz identifiziert mit dem Raum aller (vektoriellen) Radon Maße. Dabei ist die Anwendung von $\mu \in \mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ auf $\phi \in C_0(\Omega;\mathbb{R}^m)$ definiert durch

TODO zitiere?

$$\langle \mu, \phi \rangle = \int_\Omega \phi \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega \phi(x) \, \mathrm{d}\mu(x).$$

**Definition 2.2** (Funktionen beschränkter Variation)**.** Eine Funktion $u \in L^1(\Omega)$ ist von beschränkter Variation, wenn ihre distributionelle Ableitung ein Radonmaß definiert, d.h. eine Konstante $c \geqslant 0$ existiert, sodass

$$\langle Du, \Phi \rangle = -\int_\Omega u \operatorname{div}(\phi)\,\mathrm{d}x \leqslant c\|\phi\|_{L^\infty(\Omega)} \tag{2.1}$$

für alle $\phi \in C_C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$.

Die minimale Konstante $c \geqslant 0$, die (2.1) erfüllt, heißt totale Variation von $Du$ und besitzt die Darstellung

$$|u|_{\mathrm{BV}(\Omega)} = \sup_{\substack{\phi \in C_C^1(\Omega;\mathbb{R}^n) \\ \|\phi\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant 1}} -\int_\Omega u \operatorname{div}(\phi)\,\mathrm{d}x.$$

Der Raum aller Funktionen beschränkter Variation $\mathrm{BV}(\Omega)$ ist ausgestattet mit der Norm

$$\|u\|_{\mathrm{BV}(\Omega)} := \|u\|_{L^1(\Omega)} + |u|_{\mathrm{BV}(\Omega)}$$

für $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$.

*Bemerkung* 2.3. Es gilt $W^{1,1}(\Omega) \subset \mathrm{BV}(\Omega)$ und $\|u\|_{\mathrm{BV}(\Omega)} = \|u\|_{W^{1,1}(\Omega)}$ für alle $u \in W^{1,1}(\Omega)$.

**Definition 2.4.** Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{BV}(\Omega)$ und sei $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$ mit $u_n \to u$ in $L^1(\Omega)$ für $n \to \infty$.

(i) Die Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert strikt gegen $u$, wenn $|u_n|_{\mathrm{BV}(\Omega)} \to |u|_{\mathrm{BV}(\Omega)}$ für $n \to \infty$.

(ii) Die Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert schwach gegen $u$, wenn $Du_n \rightharpoonup^* Du$ in $\mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ für $n \to \infty$, d.h. für alle $\phi \in C_0(\Omega; \mathbb{R}^n)$ gilt $\langle Du_n, \phi \rangle \to \langle Du, \phi \rangle$ für $n \to \infty$.

**Theorem 2.5** (Schwache Unterhalbstetigkeit)**.** *Seien* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{BV}(\Omega)$ *und* $u \in L^1(\Omega)$ *mit* $|u_n|_{\mathrm{BV}(\Omega)} \leqslant c$ *für ein* $c > 0$ *und alle* $n \in \mathbb{N}$ *und* $u_n \to u$ *in* $L^1(\Omega)$ *für* $n \to \infty$.

*Dann gilt* $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$ *und* $|u|_{\mathrm{BV}(\Omega)} \leqslant \liminf_{n\to\infty} |u_n|_{\mathrm{BV}(\Omega)}$. *Außerdem gilt* $u_n \rightharpoonup u$ *in* $\mathrm{BV}(\Omega)$ *für* $n \to \infty$.

**Theorem 2.6** (Appoximation mit glatten Funktionen)**.** *Die Räume* $C^\infty(\overline{\Omega})$ *und* $C^\infty(\Omega) \cap \mathrm{BV}(\Omega)$ *liegen dicht in* $\mathrm{BV}(\Omega)$ *bezüglich strikter Konvergenz.*

**Theorem 2.7.** *Sei* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{BV}(\Omega)$ *eine beschränkte Folge. Dann existiert eine Teilfolge* $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *und ein* $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$, *sodass* $u_{n_k} \rightharpoonup u$ *in* $\mathrm{BV}(\Omega)$ *für* $k \to \infty$.

# 3. Das kontinuierliche Problem

Betrachte für gegebenes $\alpha > 0$ und rechte Seite $f \in L^2(\Omega)$ das folgende Minimierungsproblem.

**Problem 3.1.** Finde $u \in \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$, sodass $u$ das Funktional

$$E(v) := \frac{\alpha}{2}\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + |v|_{\mathrm{BV}(\Omega)} + \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} - \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x \tag{3.1}$$

unter allen $v \in V := \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ minimiert.

**Theorem 3.2** (Existenz einer Lösung)**.** *Problem 3.1 besitzt eine Lösung* $u \in \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$.

*Beweis.* Das Funktional $E$ in (3.1) ist nach unten beschränkt, denn für alle $v \in \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ gilt mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und der Youngschen Ungleichung

TODO Ungleichungen erwähnen/zitieren in Kapitel 1

$$\begin{aligned}
E(v) &= \frac{\alpha}{2}\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + |v|_{\mathrm{BV}(\Omega)} + \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} - \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x \\
&\geqslant \frac{\alpha}{2}\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + |v|_{\mathrm{BV}(\Omega)} + \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} - \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\geqslant \frac{\alpha}{2}\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + |v|_{\mathrm{BV}(\Omega)} + \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} - \frac{1}{\alpha}\|f\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{\alpha}{4}\|v\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\geqslant \frac{\alpha}{4}\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + |v|_{\mathrm{BV}(\Omega)} + \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} - \frac{1}{\alpha}\|f\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\geqslant -\frac{1}{\alpha}\|f\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Somit existiert eine infimierende Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ von $E$, d.h. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllt $\lim_{n\to\infty} E(u_n) = \inf_{v\in\mathrm{BV}(\Omega)\cap L^2(\Omega)} E(v)$.

Gleichung (3.2) impliziert außerdem, dass $E(v) \to \infty$, falls $\|v\|_{\mathrm{BV}(\Omega)} \to \infty$. Die Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ muss also insbesondere beschränkt sein.

Nun garantiert Theorem 2.7 die Existenz einer schwach konvergenten Teilfolge $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit schwachem Grenzwert $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Aus Gleichung (3.2) folgt $E(v) \to \infty$ für $\|v\|_{L^2(\Omega)} \to \infty$. Somit muss $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch beschränkt sein bezüglich der Norm $\|\bullet\|_{L^2(\Omega)}$ und besitzt deshalb eine Teilfolge (ohne Beschränkung der Allgemeinheit weiterhin bezeichnet mit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$), die in $L^2(\Omega)$ schwach gegen $\tilde{u} \in L^2(\Omega)$ konvergiert. Da die Einbettung $L^2(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$ kompakt ist,

TODO besser zitieren, Rellich Kondrachov erwähnen oder sogar nachrechnen?

existiert eine Teilfolge (O.B.d.A $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$), die stark gegen $\tilde{u}$ konvergiert bezüglich der Norm $\|\bullet\|_{L^1(\Omega)}$.

Allerdings bedeutet die schwache Konvergenz $u_n \rightharpoonup u$ in $\mathrm{BV}(\Omega)$ insbesondere, dass $u_n \to u$ in $L^1(\Omega)$. Es gilt also $u = \tilde{u} \in L^2(\Omega)$, d.h. $u \in \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$.

Theorem 2.5 liefert die schwache Unterhalbstetigkeit der Seminorm $|\bullet|_{\mathrm{BV}(\Omega)}$ bezüglich schwacher Konvergenz in $\mathrm{BV}(\Omega)$.

todo: Randterm sufs? Die beiden verbleibenden Terme sind ufs, aber auch sufs?

Damit gilt insgesamt

$$\inf_{v\in\mathrm{BV}(\Omega)\cap L^2(\Omega)} E(v) \leqslant E(u) \leqslant \liminf_{n\to\infty} E(u_n) = \lim_{n\to\infty} E(u_n) = \inf_{v\in\mathrm{BV}(\Omega)\cap L^2(\Omega)} E(v),$$

d.h. $\min_{v\in\mathrm{BV}(\Omega)\cap L^2(\Omega)} E(v) = E(u)$. □

**Theorem 3.3** (Stabilität und Eindeutigkeit)**.** *Seien $u_1, u_2 \in \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ die Minimierer des Problems 3.1 mit $f_1, f_2 \in L^2(\Omega)$ anstelle von $f$.*

*Dann gilt*

$$\|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \|f_1 - f_2\|_{L^2(\Omega)}.$$

*Beweis.* Definiere die konvexen Funktionale $F : \mathrm{BV}(\Omega) \to \mathbb{R}$ und $G_\ell : L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$, $\ell = 1, 2$, durch

$$F(u) := |u|_{\mathrm{BV}(\Omega)} + \|u\|_{L^1(\partial\Omega)}, \qquad G_\ell(u) := \frac{\alpha}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega f_\ell u \,\mathrm{d}x.$$

Bezeichne $E_\ell := F + G_\ell$ und setze $F$ auf $L^2(\Omega)$ durch $\infty$ fort.

$G_\ell$ ist Fréchet-differenzierbar mit Fréchet-Ableitung

$$\delta G_\ell(u)[v] = \alpha(u, v)_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega f_\ell v \,\mathrm{d}x = (\alpha u - f_\ell, v)_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } v \in L^2(\Omega).$$

Das Funktional $F$ ist konvex, deshalb (TODO quote Rf) ist das Subdifferential $\partial F$ von $F$ monoton, d.h. für alle $\mu_\ell \in \partial F(u_\ell)$, $\ell = 1, 2$, gilt

$$(\mu_1 - \mu_2, u_1 - u_2)_{L^2(\Omega)} \geqslant 0. \tag{3.3}$$

Für $\ell = 1, 2$ wird $E_\ell$ von $u_\ell$ minimiert, deshalb gilt $0 \in \partial E_\ell(u_\ell) = \partial F(u_\ell) + \partial G_\ell(u_\ell) = \partial F(u_\ell) + \{\delta G_\ell(u_\ell)\}$ (TODO quote) und es folgt $-\delta G_\ell(u_\ell) \in \partial F(u_\ell)$. Daraus folgt zusammen mit (3.3)

$$\big( -(\alpha u_1 - f_1) + (\alpha u_2 - f_2), u_1 - u_2\big)_{L^2(\Omega)} \geqslant 0.$$

Umformen und Anwenden der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung impliziert

$$\begin{aligned} \alpha\|u_1 - u_2\|^2_{L^2(\Omega)} &\leqslant \big(f_1 - f_2, u_1 - u_2\big)_{L^2(\Omega)} \\ &\leqslant \|f_1 - f_2\|_{L^2(\Omega)}\|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

TODO wie verschwindet das $\alpha$ hier? Oder verpasst man der Abschätzung im Satz noch eine Konstante $1/\alpha$ vor der oberen Schranke?

Falls $\|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega)} = 0$, gilt der Satz. Ansonsten führt Division durch $\|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega)} \neq 0$ den Beweis zum Abschluss. □

# 4. Das diskrete Problem

Betrachte für gegebenes $\alpha > 0$ und rechte Seite $f \in L^2(\Omega)$ folgende Diskretisierung von Problem 3.1.

**Problem 4.1.** Finde $u_{\mathrm{CR}} \in V_{\mathrm{NC}}(\mathcal{T}) := \mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$, sodass $u_{\mathrm{CR}}$ das Funktional

$$E_{\mathrm{NC}}(v_{\mathrm{CR}}) := \frac{\alpha}{2}\|v_{\mathrm{CR}}\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla_{\mathrm{NC}} v_{\mathrm{CR}}\|_{L^1(\Omega)} - \int_\Omega f v_{\mathrm{CR}} \,\mathrm{d}x \tag{4.1}$$

unter allen $v_{\mathrm{CR}} \in V_{\mathrm{NC}}(\mathcal{T})$ minimiert.

Für $v_{\mathrm{CR}} \in V_{\mathrm{NC}}(\mathcal{T})$, $\Lambda \in \mathbb{P}_0(\mathcal{T};\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned} K_1(0) &:= \{\Lambda \in L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^n) \mid |\Lambda(\bullet)| \leqslant 1 \text{ fast überall in } \Omega\}, \\ I_{K_1(0)}(\Lambda) &:= \begin{cases} -\infty, & \text{falls } \Lambda \notin K_1(0) \text{ und} \\ 0, & \text{falls } \Lambda \in K_1(0), \end{cases} \end{aligned}$$

ist das dazugehörige Lagrange-Funktional definert als

$$\mathcal{L}_h(v_{\mathrm{CR}},\Lambda) := \int_\Omega \Lambda \cdot \nabla_{\mathrm{NC}} v_{\mathrm{CR}} \,\mathrm{d}x + \frac{\alpha}{2}\|v_{\mathrm{CR}}\|^2_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega f v_{\mathrm{CR}} \,\mathrm{d}x - I_{K_1(0)}(\Lambda) \tag{4.2}$$

und das Sattelpunktsproblem dem entsprechend wie folgt.

**Problem 4.2.** Löse

$$\inf_{v_{\mathrm{CR}} \in V_{\mathrm{NC}}(\mathcal{T})} \sup_{\Lambda \in \mathbb{P}_0(\mathcal{T};\mathbb{R}^n)} \mathcal{L}_h(v_{\mathrm{CR}},\Lambda).$$

**Theorem 4.3** (Charakterisierung diskreter Lösungen)**.** *Es existiert eine eindeutiges Lösung $u_{\mathrm{CR}} \in V_{\mathrm{NC}}(\mathcal{T})$ von Problem 4.1. Außerdem gelten folgende äquivalente Charakterisierungen von $u_{\mathrm{CR}}$.*

*(i) Es existiert ein $\Lambda \in \mathbb{P}_0(\mathcal{T};\mathbb{R}^n)$ mit $|\Lambda(\bullet)| \leqslant 1$ fast überall in $\Omega$, sodass*

$$\begin{aligned} \Lambda(\bullet) \cdot \nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}(\bullet) &= |\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}(\bullet)| \quad \text{fast überall in } \Omega \text{ und} \\ (\Lambda, \nabla_{\mathrm{NC}} v_{\mathrm{CR}})_{L^2(\Omega)} &= (f - \alpha u_{\mathrm{CR}}, v_{\mathrm{CR}})_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } v_{\mathrm{CR}} \in V_{\mathrm{NC}}(\mathcal{T}). \end{aligned}$$

*(ii) Für alle $v_{\mathrm{CR}} \in V_{\mathrm{NC}}(\mathcal{T})$ gilt die Variationsungleichung*

$$(f - \alpha u_{\mathrm{CR}}, v_{\mathrm{CR}} - u_{\mathrm{CR}})_{L^2(\Omega)} \leqslant \|\nabla_{\mathrm{NC}} v_{\mathrm{CR}}\|_{L^1(\Omega)} - \|\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}\|_{L^1(\Omega)}.$$

*Beweis. (i).* Es existiert eine eindeutige Lösung $u_{\mathrm{CR}} \in V_{\mathrm{NC}}(\mathcal{T})$ von Problem 4.1, deshalb besitzt das Sattelpunktsproblem 4.2 eine Lösung $(u_{\mathrm{CR}},\Lambda) \in V_{\mathrm{NC}}(\mathcal{T}) \times$

$(\mathbb{P}_0(\mathcal{T};\mathbb{R}^n)\cap K_1(0)$. In der ersten Komponente ist das Lagrange-Funktional Fréchet-differenzierbar mit

$$\delta_{u_{\mathrm{CR}}}\mathcal{L}_h(u_{\mathrm{CR}},\Lambda)[v_{\mathrm{CR}}]=\int_\Omega \Lambda\cdot\nabla_{\mathrm{NC}}v_{\mathrm{CR}}\,\mathrm{d}x+\alpha(u_{\mathrm{CR}},v_{\mathrm{CR}})_{L^2(\Omega)}-\int_\Omega f v_{\mathrm{CR}}\,\mathrm{d}x.$$

Die Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen für eine Lösung $(u_{\mathrm{CR}},\Lambda)\in V_{\mathrm{NC}}\times(\mathbb{P}_0(\mathcal{T};\mathbb{R}^n)\cap K_1(0))$ des Sattelpunktsproblems 4.2 lauten damit

$$\begin{aligned}0&=\delta_{u_{\mathrm{CR}}}\mathcal{L}_h(u_{\mathrm{CR}},\Lambda)[v_{\mathrm{CR}}]\\&=\int_\Omega \Lambda\cdot\nabla_{\mathrm{NC}}v_{\mathrm{CR}}\,\mathrm{d}x+\alpha(u_{\mathrm{CR}},v_{\mathrm{CR}})_{L^2(\Omega)}-\int_\Omega f v_{\mathrm{CR}}\,\mathrm{d}x\quad\text{für alle } v_{\mathrm{CR}}\in V_{\mathrm{NC}}\quad\text{und}\\0&\in\partial_\Lambda\mathcal{L}_h(u_{\mathrm{CR}},\Lambda)=\{(\nabla_{\mathrm{NC}}u_{\mathrm{CR}},\,\bullet\,)_{L^2(\Omega)}\}-\partial I_{K_1(0)}(\Lambda).\end{aligned}$$

Die erste Bedingung ist für alle $v_{\mathrm{CR}}\in V_{\mathrm{NC}}(\mathcal{T})$ äquivalent zu

$$(\Lambda,\nabla_{\mathrm{NC}}v_{\mathrm{CR}})_{L^2(\Omega)}=(f-\alpha u_{\mathrm{CR}},v_{\mathrm{CR}})_{L^2(\Omega)}.$$

Die zweite Bedingung bedeutet, dass $(\nabla_{\mathrm{NC}}u_{\mathrm{CR}},\,\bullet\,)_{L^2(\Omega)}\in-\partial I_{K_1(0)}(\Lambda)$, d.h. für alle $q_0\in\mathbb{P}_0(\mathcal{T};\mathbb{R}^n)$ gilt

$$(\nabla_{\mathrm{NC}}u_{\mathrm{CR}},q_0-\Lambda)_{L^2(\Omega)}\leqslant I_{K_1(0)}(q_0)-I_{K_1(0)}(\Lambda)=I_{K_1(0)}(q_0).$$

Für $q_0\in\mathbb{P}_0(\mathcal{T};\mathbb{R}^n)\cap K_1(0)$ folgt insbesondere

$$\begin{aligned}(\nabla_{\mathrm{NC}}u_{\mathrm{CR}},q_0-\Lambda)_{L^2(\Omega)}&\leqslant 0,\quad\text{also}\\(\nabla_{\mathrm{NC}}u_{\mathrm{CR}},q_0)_{L^2(\Omega)}&\leqslant(\nabla_{\mathrm{NC}}u_{\mathrm{CR}},\Lambda)_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Mit der Wahl $q_0:=\operatorname{sign}\nabla_{\mathrm{NC}}u_{\mathrm{CR}}$, der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und $\Lambda\in K_1(0)$ impliziert das

$$\begin{aligned}\int_\Omega|\nabla_{\mathrm{NC}}u_{\mathrm{CR}}|\,\mathrm{d}x&\leqslant(\nabla_{\mathrm{NC}}u_{\mathrm{CR}},\Lambda)_{L^2(\Omega)}\\&\leqslant\int_\Omega|\nabla_{\mathrm{NC}}u_{\mathrm{CR}}|\,|\Lambda|\,\mathrm{d}x\leqslant\int_\Omega|\nabla_{\mathrm{NC}}u_{\mathrm{CR}}|\,\mathrm{d}x\quad\text{bzw.}\\\sum_{T\in\mathcal{T}}|T|\,\left|(\nabla_{\mathrm{NC}}u_{\mathrm{CR}})_{|T}\right|&=\sum_{T\in\mathcal{T}}|T|\,(\nabla_{\mathrm{NC}}u_{\mathrm{CR}}\cdot\Lambda)_{|T}\end{aligned}$$

Außerdem gilt mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung auf allen $T\in\mathcal{T}$, dass $(\nabla_{\mathrm{NC}}u_{\mathrm{CR}}\cdot\Lambda)_{|T}\leqslant(\nabla_{\mathrm{NC}}u_{\mathrm{CR}})_{|T}$. Dementsprechend muss sogar für alle $T\in\mathcal{T}$ gelten, dass $(\nabla_{\mathrm{NC}}u_{\mathrm{CR}}\cdot\Lambda)_{|T}=(\nabla_{\mathrm{NC}}u_{\mathrm{CR}})_{|T}$, d.h. fast überall in $\Omega$ gilt $\Lambda(\,\bullet\,)\cdot\nabla_{\mathrm{NC}}u_{\mathrm{CR}}(\,\bullet\,)=|\nabla_{\mathrm{NC}}u_{\mathrm{CR}}(\,\bullet\,)|$. □

# 5. Numerische Realisierung

# 6. Experimente

## 6.1. Konstruktion eines Experiments mit exakter Lösung

Um eine rechte Seite zu finden, zu der die exakte Lösung bekannt ist, wähle eine Funktion des Radius $u \in H_0^1([0,1])$ mit Träger im zweidimensionalen Einheitskreis. Insbesondere muss damit gelten $u(1) = 0$ und $u$ stetig. Die rechte Seite als Funktion des Radius $f \in L^2([0,1])$ ist dann gegeben durch

$$f := \alpha u - \partial_r(\operatorname{sign}(\partial_r u)) - \frac{\operatorname{sign}(\partial_r u)}{r},$$

wobei für $F \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ gilt $\operatorname{sign}(F) := \left\{\frac{F}{|F|}\right\}$ und $\operatorname{sign}(0) \in B_1(0)$. Damit außerdem gilt $f \in H_0^1([0,1])$, was z.B. für GLEB relevant ist, muss also noch Stetigkeit von $\operatorname{sign}(\partial_r u)$ und $\partial_r(\operatorname{sign}(\partial_r u))$ verlangt werden und $\partial_r(\operatorname{sign}(\partial_r u(1)) = \operatorname{sign}(\partial_r u(1)) = 0$. Damit $f$ in 0 definierbar ist, muss auch gelten $\operatorname{sign}(\partial_r u) \in o(r)$ für $r \to 0$.

Damit erhält man für die Funktion

$$u_1(r) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } 0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{6}, \\ 1 + (6r-1)^\beta, & \text{wenn } \frac{1}{6} \leqslant r \leqslant \frac{1}{3}, \\ 2, & \text{wenn } \frac{1}{3} \leqslant r \leqslant \frac{1}{2}, \\ 2(\frac{5}{2} - 3r)^\beta, & \text{wenn } \frac{1}{2} \leqslant r \leqslant \frac{5}{6}, \\ 0, & \text{wenn } \frac{5}{6} \leqslant r, \end{cases}$$

wobei $\beta \geqslant 1/2$, mit der Wahl

$$\operatorname{sign}(\partial_r u_1(r)) = \begin{cases} 12r - 36r^2, & \text{wenn } 0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{6}, \\ 1, & \text{wenn } \frac{1}{6} \leqslant r \leqslant \frac{1}{3}, \\ \cos(\pi(6r-2)), & \text{wenn } \frac{1}{3} \leqslant r \leqslant \frac{1}{2}, \\ -1, & \text{wenn } \frac{1}{2} \leqslant r \leqslant \frac{5}{6}, \\ -\frac{1+\cos(\pi(6r-5))}{2}, & \text{wenn } \frac{5}{6} \leqslant r \leqslant 1, \end{cases}$$

die rechte Seite

$$f_1(r) := \begin{cases} \alpha - 12(2-9r), & \text{wenn } 0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{6}, \\ \alpha(1 + (6r-1)^\beta) - \frac{1}{r}, & \text{wenn } \frac{1}{6} \leqslant r \leqslant \frac{1}{3}, \\ 2\alpha + 6\pi \sin(\pi(6r-2)) - \frac{1}{r}\cos(\pi(6r-2)), & \text{wenn } \frac{1}{3} \leqslant r \leqslant \frac{1}{2}, \\ 2\alpha(\frac{5}{2} - 3r)^\beta + \frac{1}{r}, & \text{wenn } \frac{1}{2} \leqslant r \leqslant \frac{5}{6}, \\ -3\pi \sin(\pi(6r-5)) + \frac{1+\cos(\pi(6r-5))}{2r}, & \text{wenn } \frac{5}{6} \leqslant r \leqslant 1. \end{cases}$$

Für die Funktion

$$u_2(r) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } 0 \leqslant r \leqslant \frac{1-\beta}{2}, \\ -\frac{1}{\beta}r + \frac{1+\beta}{2\beta}, & \text{wenn } \frac{1-\beta}{2} \leqslant r \leqslant \frac{1+\beta}{2}, \\ 0, & \text{wenn } \frac{1+\beta}{2} \leqslant r, \end{cases}$$

erhält man mit der Wahl

$$\begin{aligned} &\operatorname{sign}(\partial_r u_2(r)) \\ &\quad := \begin{cases} \frac{4}{1-\beta} r \left( \frac{1}{1-\beta} r - 1 \right), & \text{wenn } 0 \leqslant r \leqslant \frac{1-\beta}{2}, \\ -1, & \text{wenn } \frac{1-\beta}{2} \leqslant r \leqslant \frac{1+\beta}{2}, \\ \frac{4}{(\beta-1)^3} \left(4r^3 - 3(\beta+3)r^2 + 6(\beta+1)r - 3\beta - 1\right), & \text{wenn } \frac{1+\beta}{2} \leqslant r \leqslant 1, \end{cases} \end{aligned}$$

die rechte Seite

$$f_2(r) := \begin{cases} \alpha - \frac{4}{1-\beta} \left( \frac{3}{1-\beta} r - 2 \right), & \text{wenn } 0 \leqslant r \leqslant \frac{1-\beta}{2}, \\ -\frac{\alpha}{\beta} \left( r - \frac{1+\beta}{2} \right) + \frac{1}{r}, & \text{wenn } \frac{1-\beta}{2} \leqslant r \leqslant \frac{1+\beta}{2}, \\ \frac{-4}{(\beta-1)^3} \left( 16r^2 - 9(\beta+3)r + 12(\beta+1) - \frac{3\beta+1}{r} \right), & \text{wenn } \frac{1+\beta}{2} \leqslant r \leqslant 1. \end{cases}$$

Damit können Experimente durchgeführt werden bei denen `exactSolutionKnown = true` gesetzt werden kann und entsprechend auch der $L^2$-Fehler berechnet wird.

Soll nun auch die Differenz der exakten Energie mit der garantierten unteren Energie Schranke (GLEB) berechnet werden, dann werden die stückweisen Gradienten der exakten Lösung und der rechten Seite benötigt.

Dabei gelten folgende Ableitungsregeln für die Ableitungen einer Funktion $g$, wenn man ihr Argument $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ in Polarkoordinaten mit Länge $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ und Winkel $\varphi = \operatorname{atan2}(x_2, x_1)$, wobei

$$\operatorname{atan2}(x_2, x_1) := \begin{cases} \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right), & \text{wenn } x_1 > 0, \\ \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right) + \pi, & \text{wenn } x_1 < 0, x_2 \geqslant 0, \\ \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right) - \pi, & \text{wenn } x_1 < 0, x_2 < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{wenn } x_1 = 0, x_2 > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{wenn } x_1 = 0, x_2 < 0, \\ \text{undefiniert}, & \text{wenn } x_1 = x_2 = 0, \end{cases}$$

auffasst,

$$\begin{aligned} \partial_{x_1} &= \cos(\varphi)\partial_r - \frac{1}{r}\sin(\varphi)\partial_\varphi, \\ \partial_{x_2} &= \sin(\varphi)\partial_r - \frac{1}{r}\cos(\varphi)\partial_\varphi. \end{aligned}$$

Ist $g$ vom Winkel $\varphi$ unabhängig, so ergibt sich

$$\nabla_{(x_1,x_2)} g = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))\partial_r g.$$

Unter Beachtung der trigonometrischen Zusammenhänge

$$\sin(\arctan(y)) = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}},$$
$$\cos(\arctan(y)) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

ergibt sich

$$(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) = (x_1, x_2)\frac{1}{r}$$

und damit

$$\nabla_{(x_1,x_2)} g = (x_1, x_2)\frac{\partial_r g}{r},$$

es muss also nur $\partial_r g$ bestimmt werden.

Die entsprechenden Ableitung lauten

$$\partial_r f_1(r) = \begin{cases} 108, & \text{wenn } 0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{6}, \\ 6\alpha\beta(6r-1)^{\beta-1} + \frac{1}{r^2}, & \text{wenn } \frac{1}{6} \leqslant r \leqslant \frac{1}{3}, \\ (36\pi^2 + \frac{1}{r^2})\cos(\pi(6r-2)) + \frac{6\pi}{r}\sin(\pi(6r-2)), & \text{wenn } \frac{1}{3} \leqslant r \leqslant \frac{1}{2}, \\ -\left(6\alpha\beta\left(\frac{5}{2}-3r\right)^{\beta-1} + \frac{1}{r^2}\right), & \text{wenn } \frac{1}{2} \leqslant r \leqslant \frac{5}{6}, \\ -\left(\left(18\pi^2 + \frac{1}{2r^2}\right)\cos(\pi(6r-5)) + \frac{1}{2r^2} + \frac{3\pi}{r}\sin(\pi(6r-5))\right), & \text{wenn } \frac{5}{6} \leqslant r \leqslant 1, \end{cases}$$

$$\partial_r u_1(r) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } 0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{6}, \\ 6\beta(6r-1)^{\beta-1}, & \text{wenn } \frac{1}{6} \leqslant r \leqslant \frac{1}{3}, \\ 0, & \text{wenn } \frac{1}{3} \leqslant r \leqslant \frac{1}{2}, \\ -6\beta\left(\frac{5}{2}-3r\right)^{\beta-1}, & \text{wenn } \frac{1}{2} \leqslant r \leqslant \frac{5}{6}, \\ 0, & \text{wenn } \frac{5}{6} \leqslant r, \end{cases}$$

$$\partial_r f_2(r) = \begin{cases} -\frac{12}{(1-\beta)^2}, & \text{wenn } 0 \leqslant r \leqslant \frac{1-\beta}{2}, \\ -\frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{r^2}, & \text{wenn } \frac{1-\beta}{2} \leqslant r \leqslant \frac{1+\beta}{2}, \\ -\frac{4}{(1-\beta)^3}\left(32r - 9(\beta+3) + \frac{3\beta+1}{r^2}\right), & \text{wenn } \frac{1+\beta}{2} \leqslant r \leqslant 1, \end{cases}$$

$$\partial_r u_2(r) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } 0 \leqslant r \leqslant \frac{1-\beta}{2}, \\ -\frac{1}{\beta}, & \text{wenn } \frac{1-\beta}{2} \leqslant r \leqslant \frac{1+\beta}{2}, \\ 0, & \text{wenn } \frac{1+\beta}{2} \leqslant r. \end{cases}$$

Mit diesen Informationen kann mit `computeExactEnergyBV.m` die exakte Energie berechnet werden und somit durch eintragen der exakten Energie in die Variable `exactEnergy` im Benchmark und setzen der Flag `useExactEnergy=true` das Experiment durch anschließendes Ausführen von `startAlgorithmCR.m` gestartet werden.

# A. Appendix

Die erste Quelle (und wichtigste) ist [Bar15] und dann gibt es bisher noch [Roc70, S. 200]. Um zu testen zitiert man am besten [TPT99].

NOTE Bsp wie zitieren funktioniert und um Bib zu testen

# Literatur


[Bar15] Sören Bartels. *Numerical Methods for Nonlinear Partial Differential Equations*. Bd. 47. Springer Series in Computational Mathematics. Springer International Publishing, 2015. ISBN: 978-3-319-13796-4. DOI: `10.1007/978-3-319-13797-1`.

[Roc70] R. Tyrrell Rockafellar. *Convex Analysis*. Princeton University Press, 1970. ISBN: 0-691-08069-0. DOI: `10.1007/978-3-319-13797-1`.

[TPT99] Test, Probe und Böse Tierversuch. *Test*. Versuch, 1999.

# Selbständigkeitserklärung

Ich erkläre, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und noch nicht für andere Prüfungen eingereicht habe. Sämtliche Quellen, einschließlich Internetquellen, die unverändert oder abgewandelt wiedergegeben werden, insbesondere Quellen für Texte, Grafiken, Tabellen und Bilder, sind als solche kenntlich gemacht. Mir ist bekannt, dass bei Verstößen gegen diese Grundsätze ein Verfahren wegen Täuschungsversuchs bzw. Täuschung eingeleitet wird.

Berlin, den 5. September 2020,