Verschiedene Polynomgrade im Ansatz- und Testraum

Zwischenpräsentation

Enrico Bergmann, Leonard Richter-Matthies, Maximilian Schade

Humboldt-Universität zu Berlin

3. Januar 2021

Wir suchen $(u, t) \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) \times \mathrm{H}^{-1/2}(\partial\mathcal{T}) =: X$, sodass

$$b((u,t),v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla_{NC} v \,\mathrm{d}x - \sum_{T\in\mathcal{T}} \int_{\partial T} v \; t_T \,\mathrm{d}s = \int_\Omega f\, v \,\mathrm{d}x =: F(v)$$

für alle $v \in \mathrm{H}^1(\mathcal{T}) =: Y$ erfüllt ist.
Dafür betrachten wir für die Diskretisierung die Unterräume $S^{k_u}(\mathcal{T}) \subset \mathrm{H}^1(\mathcal{T})$, $P_{k_q}(\mathcal{E}) \subset \mathrm{H}^{-1/2}(\partial\mathcal{T})$ und $P_{k_v}(\mathcal{T}) \subset \mathrm{H}^1(\mathcal{T})$ auf einer regulären Triangulierung $\mathcal{T}$ von Ω in abgeschlossene Dreiecke. Speziell werden wir dafür die drei Fälle

	k_u	k_q	k_v
Fall 1	k	$k-1$	$k+1$
Fall 2	$k-1$	$k-1$	k
Fall 3	k	$k-1$	k

für $k_u, k_q, k_v = 1, 2, 3$ betrachten.

Checkliste

- ✓ P_1 implementieren.
- ✓ P_2 implementieren.

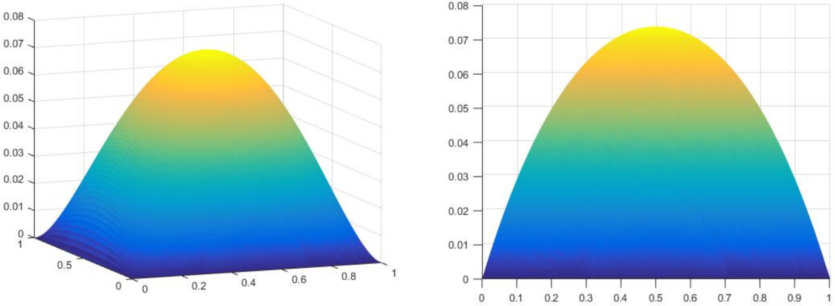
Checkliste

- ☑ P_1 implementieren.
- ☑ P_2 implementieren.
- ☐ P_3 implementieren.
- ☐ Implementation des eingebauten Fehlerschätzers.
- ☐ Nachstellen der Experimente aus dem Paper.

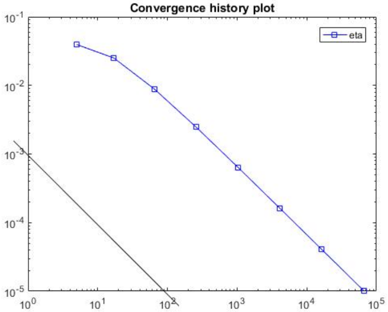
Checkliste

- ✓ P_1 implementieren.
- ✓ P_2 implementieren.
- ☐ P_3 implementieren.
- ☐ Implementation des eingebauten Fehlerschätzers.
- ☐ Nachstellen der Experimente aus dem Paper.
- ✗ Optimierung des Codes.
- ✗ Durchführung weiterer Experimente.
- ✗ Auswertung und Dokumentation.

Approximation von u für $-\Delta u = 1,\ u_{|\partial\Omega} = 0$

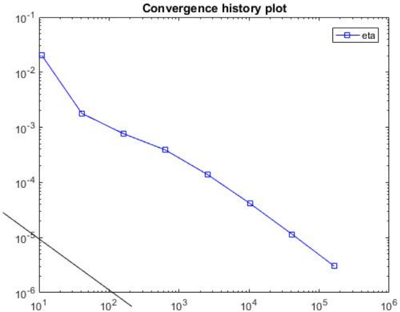


Fall 1: 1 0 2

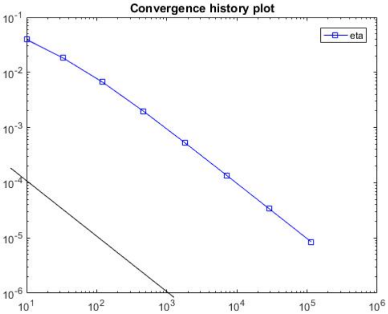


Convergence history plot
eta
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
10^{4}
10^{5}

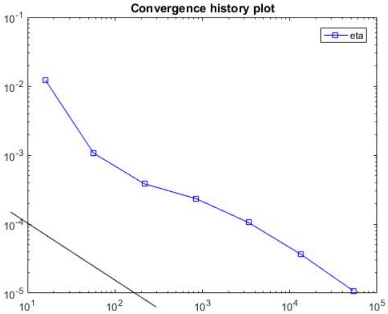
Fall 1: 2 1 3


Convergence history plot
eta
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
10^{-6}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
10^{4}
10^{5}
10^{6}

Fall 2: 1 1 2

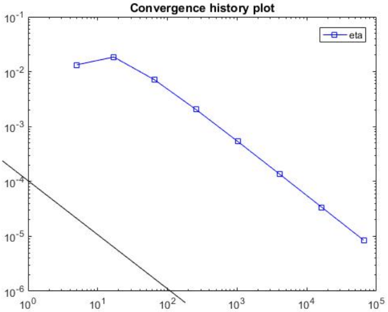

Convergence history plot
eta
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
10^{-6}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
10^{4}
10^{5}
10^{6}

Fall 2: 2 2 3

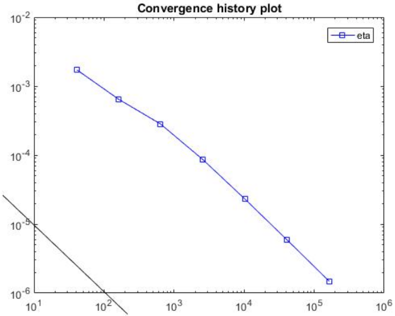


Convergence history plot
eta
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
10^{4}
10^{5}

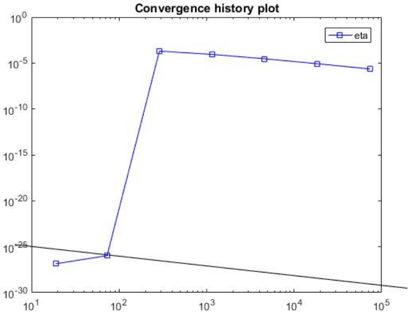
Fall 3: 1 0 1


Convergence history plot
eta
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
10^{-6}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
10^{4}
10^{5}

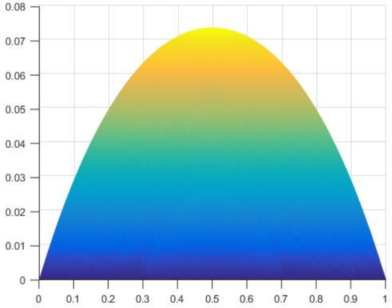
Fall 3: 2 1 2

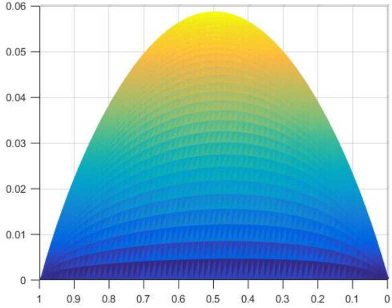

Convergence history plot
eta
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
10^{-6}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
10^{4}
10^{5}
10^{6}

Fall 3: 3 2 3


Convergence history plot
eta
10^{0}
10^{-5}
10^{-10}
10^{-15}
10^{-20}
10^{-25}
10^{-30}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
10^{4}
10^{5}

Vergleich 1 0 1 und 3 2 3 - „Höhenuntererschied"





Problem aus dem Paper

Die Funktion f für das Poisson-Problem

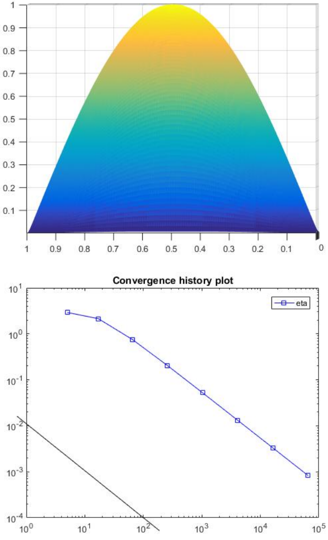
$$-\Delta u = f$$

wird so gewählt, dass die exakte Lösung

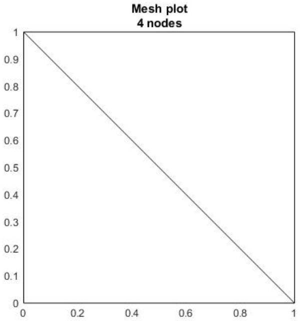
$u = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$ ist,

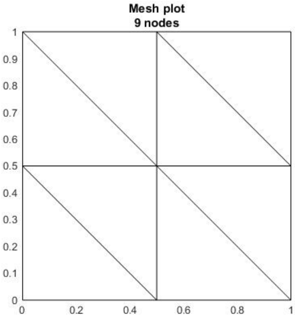
also gilt $f = 2\pi^2 \sin(\pi x)\sin(\pi y)$ und $u_{|\partial\Omega} = 0$

Vergleich 1 0 1 und 3 2 3 für $f = 2\pi^2 \sin(\pi x)\sin(\pi y)$



Triangulierung kein- und einmal rotverfeinert.





H_1-Konvergenzrate

$$\log_2\left(\frac{\left\|u-u_h\right\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)}}{\left\|u-u_{h/2}\right\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)}}\right)$$

Checkliste

- ☑ P_1 implementieren.
- ☑ P_2 implementieren.

Checkliste

- ✓ P_1 implementieren.
- ✓ P_2 implementieren.
- ✓ P_3 implementieren.
- ✓ Implementation des eingebauten Fehlerschätzers.

Checkliste

- ☑ P_1 implementieren.
- ☑ P_2 implementieren.
- ☑ P_3 implementieren.
- ☑ Implementation des eingebauten Fehlerschätzers.
- ☐ Nachstellen der Experimente aus dem Paper.

Checkliste

- ☑ P_1 implementieren.
- ☑ P_2 implementieren.
- ☑ P_3 implementieren.
- ☑ Implementation des eingebauten Fehlerschätzers.
- ☐ Nachstellen der Experimente aus dem Paper.
- ☒ Optimierung des Codes.
- ☒ Durchführung weiterer Experimente.
- ☒ Auswertung und Dokumentation.