Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät
Institut für Mathematik

# Die Crouzeix-Raviart Finite-Elemente Methode Für Eine Minimierung Im Raum Der Funktionen Von Beschränkter Variation

Enrico Bergmann

Version: 24. März 2019

# Inhaltsverzeichnis

# 1. Einleitung

# 2. Theoretische Grundlagen

Dieser Abschnitt folgt Kapitel 10 von [bartels]. Dabei sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes, polygonal berandetes Lipschitz-Gebiet.

## 2.1. Vorbereitung

**Definition 2.1** (braides)**.** Eine Funktion $\mu : \mathcal{B}(\Omega) \to \mathbb{R}^N$ heißt (Vektor-) Maß auf $\Omega$, wenn sie abzählbar additiv ist, d.h. für alle $(B_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}(\Omega)$ mit $B_j \cap B_k = \emptyset$ für $j \neq k$ gilt

$$\mu\left(\dot{\bigcup_{j\in\mathbb{N}}} B_j\right) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(B_j).$$

Die Menge aller dieser Maße sei $\mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^N)$.

Im Fall $N = 1$ heißt $\mu$ skalares Maß. Falls $\mu$ zusätzlich nur Werte in $[0,\infty)$ annimmt, heißt es positives Maß. Die Menge aller skalaren Maße sei $\mathcal{M}(\Omega)$ und die Menge aller positiven Maße sei $\mathcal{M}_+(\Omega)$.

*Bemerkung* 2.2. Die übliche Anforderung $\mu(\emptyset) = 0$ an ein Maß ist äquivalent zur Bedingung, dass $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ existiert, sodass $\mu(A)$ in jeder Komponente endliche Werte annimmt.

Da in Definition 2.1 als Wertebereich $\mathbb{R}^N$ gefordert wird, ist diese äquivalente Bedingung erfüllt.

**Definition 2.3.** Eine Funktion $\mu : \mathcal{B}(\Omega) \to \mathbb{R}^N$ heißt Radonmaß auf $\Omega$, wenn $\mu|_{\mathcal{B}(\Omega')}$ ein Maß auf jeder Menge $\Omega' \subset\subset \Omega$ (d.h. $\mathrm{cl}(\Omega') \subset \mathrm{int}(\Omega)$) ist.

## 2.2. Funktionen Beschränkter Variation

**Definition 2.4** (Funktionen beschränkter Variation)**.** Eine Funktion $u \in L^1(\Omega)$ ist von beschränkter Variation, wenn ihre distributionelle Ableitung ein Radonmaß definiert, d.h. eine Konstante $c \geq 0$ existiert, sodass

$$\langle Du, \Phi\rangle = -\int_\Omega u \operatorname{div}(\phi)\,\mathrm{d}x \leq c\|\phi\|_{L^\infty(\Omega)} \tag{2.1}$$

für alle $\phi \in C^1_C(\Omega;\mathbb{R}^n)$.

Die minimale Konstante $c \geq 0$, die (2.1) erfüllt, heißt totale Variation von $Du$ und besitzt die Darstellung

$$|u|_{\mathrm{BV}(\Omega)} = \sup_{\substack{\phi\in C^1_C(\Omega;\mathbb{R}^n)\\ \|\phi\|_{L^\infty(\Omega)}\leq 1}} -\int_\Omega u \operatorname{div}(\phi)\,\mathrm{d}x.$$

Der Raum aller Funktionen beschränkter Variation $\mathrm{BV}(\Omega)$ ist ausgestattet mit der Norm

$$\|u\|_{\mathrm{BV}(\Omega)} \coloneqq \|u\|_{L^1(\Omega)} + |u|_{\mathrm{BV}(\Omega)}.$$

**Definition 2.5.** Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{BV}(\Omega)$ und sei $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$ mit $u_n \to u$ in $L^1(\Omega)$ für $n \to \infty$.

(i) Die Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert strikt gegen $u$, wenn $|u_n|_{\mathrm{BV}(\Omega)} \to |u|_{\mathrm{BV}(\Omega)}$ für $n \to \infty$.

(ii) Die Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert schwach gegen $u$, wenn $Du_n \rightharpoonup^* Du$ in $\mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ für $n \to \infty$, d.h. für alle $\phi \in C_0(\Omega;\mathbb{R}^n)$ gilt $\langle Du_n, \phi\rangle \to \langle Du, \phi\rangle$ für $n \to \infty$.

**Theorem 2.6** (Schwache Unterhalbstetigkeit)**.** *Seien $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{BV}(\Omega)$ und $u \in L^1(\Omega)$ mit $|u_n|_{\mathrm{BV}(\Omega)} \leq c$ für ein $c > 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$ und $u_n \to u$ in $L^1(\Omega)$ für $n \to \infty$.*

*Dann gilt $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$ und $|u|_{\mathrm{BV}(\Omega)} \leq \liminf_{n\to\infty} |u_n|_{\mathrm{BV}(\Omega)}$. Außerdem gilt $u_n \rightharpoonup u$ in $\mathrm{BV}(\Omega)$ für $n \to \infty$.*

**Theorem 2.7** (Appoximation mit glatten Funktionen)**.** *Die Räume $C^\infty(\overline{\Omega})$ und $C^\infty(\Omega) \cap \mathrm{BV}(\Omega)$ liegen dicht in $\mathrm{BV}(\Omega)$ bezüglich strikter Konvergenz.*

**Theorem 2.8.** *Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{BV}(\Omega)$ eine beschränkte Folge. Dann existiert eine Teilfolge $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und ein $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$, sodass $u_{n_k} \rightharpoonup u$ in $\mathrm{BV}(\Omega)$ für $k \to \infty$.*

# 3. Das Kontinuierliche Problem

Betrachte für gegebenes $\alpha > 0$ und rechte Seite $f \in L^2(\Omega)$ das folgende Minimierungsproblem.

**Problem 3.1.** Finde $u \in \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$, sodass $u$ das Funktional

$$E(v) \coloneqq \frac{\alpha}{2}\|v\|_{L^2(\Omega)} + |v|_{\mathrm{BV}(\Omega)} + \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} - \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x \tag{3.1}$$

unter allen $v \in V \coloneqq \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ minimiert.

**Theorem 3.2** (Existenz einer Lösung)**.** *Problem 3.1 besitzt eine Lösung* $u \in \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$*.*

*Beweis.* Das Funktional $E$ in (3.1) ist nach unten beschränkt, denn für alle $v \in \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ gilt mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und der Youngschen Ungleichung

$$\begin{aligned} E(v) &= \frac{\alpha}{2}\|v\|_{L^2(\Omega)} + |v|_{\mathrm{BV}(\Omega)} + \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} - \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x \\ &\geq \frac{\alpha}{4}\|v\|_{L^2(\Omega)} + |v|_{\mathrm{BV}(\Omega)} + \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} - \frac{1}{\alpha}\|f\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\geq -\|f\|^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Somit existiert eine infimierende Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{BV}(\Omega)\cap L^2(\Omega)$ von $E$, d.h. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllt $\lim_{n\to\infty} E(u_n) = \inf_{v\in\mathrm{BV}(\Omega)\cap L^2(\Omega)} E(v)$.

Gleichung (3.2) impliziert außerdem, dass $E(v) \to \infty$, falls $\|v\|_{\mathrm{BV}(\Omega)} \to \infty$. Die Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ muss also insbesondere beschränkt sein.

Nun garantiert Theorem 2.8 die Existenz einer schwach konvergenten Teilfolge $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit schwachem Grenzwert $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$. O.B.d.A. ist $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Analog ist $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Gleichung (3.2) ebenfalls beschränkt bezüglich der Norm $\|\bullet\|_{L^2(\Omega)}$, besitzt also eine Teilfolge (O.B.d.A. weiterhin bezeichnet mit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$), die in $L^2(\Omega)$ schwach gegen ein $\tilde{u} \in L^2(\Omega)$ konvergiert. Da die Einbettung $L^2(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$ kompakt ist, existiert eine Teilfolge (O.B.d.A $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$), die stark gegen $\tilde{u}$ konvergiert bezüglich der Norm $\|\bullet\|_{L^1(\Omega)}$.

Allerdings bedeutet die schwache Konvergenz $u_n \rightharpoonup u$ in $\mathrm{BV}(\Omega)$ insbesondere, dass $u_n \to u$ in $L^1(\Omega)$. Es gilt also $u = \tilde{u} \in L^2(\Omega)$, d.h. $u \in \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$.

Theorem 2.6 liefert die schwache Unterhalbstetigkeit der Seminorm $|\bullet|_{\mathrm{BV}(\Omega)}$ bezüglich schwacher Konvergenz in $\mathrm{BV}(\Omega)$.

todo: Randterm sufs? Die beiden verbleibenden Terme sind ufs, aber auch sufs?

Damit gilt insgesamt

$$\inf_{v\in \mathrm{BV}(\Omega)\cap L^2(\Omega)} E(v) \le E(u) \le \liminf_{n\to\infty} E(u_n) = \lim_{n\to\infty} E(u_n) = \inf_{v\in \mathrm{BV}(\Omega)\cap L^2(\Omega)} E(v),$$

d.h. $\min_{v\in \mathrm{BV}(\Omega)\cap L^2(\Omega)} E(v) = E(u)$. □

**Theorem 3.3** (Stabilität und Eindeutigkeit)**.** *Seien* $u_1, u_2 \in \mathrm{BV}(\Omega)\cap L^2(\Omega)$ *die Minimierer des Problems 3.1 mit* $f_1, f_2 \in L^2(\Omega)$ *anstelle von* $f$*.*

*Dann gilt*

$$\|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega)} \le \|f_1 - f_2\|_{L^2(\Omega)}.$$

*Beweis.* Definiere die konvexen Funktionale $F : \mathrm{BV}(\Omega) \to \mathbb{R}$ und $G_\ell : L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$, $\ell = 1, 2$, durch

$$F(u) \coloneqq |u|_{\mathrm{BV}(\Omega)} + \|u\|_{L^1(\partial\Omega)}, \qquad G_\ell(u) \coloneqq \frac{\alpha}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega f u \,\mathrm{d}x.$$

Bezeichne $E_\ell \coloneqq F + E_\ell$ und setze $F$ auf $L^2(\Omega)$ durch $\infty$ fort.

$G_\ell$ ist Fréchet-differenzierbar mit Fréchet-Ableitung

$$\delta G_\ell(u)[v] = \alpha(u, v)_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x = (\alpha u - f, v)_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } v \in L^2(\Omega).$$

Das Funktional $F$ ist konvex, deshalb (TODO quote Rf) ist das Subdifferential $\partial F$ von $F$ monoton, d.h. für alle $\mu_\ell \in \partial F(u_\ell)$, $\ell = 1, 2$, gilt

$$(\mu_1 - \mu_2, u_1 - u_2)_{L^2(\Omega)} \ge 0.$$

Für $\ell = 1, 2$ wird $E_\ell$ von $u_\ell$ minimiert, deshalb gilt $0 \in \partial E_\ell(u_\ell) = \partial F(u_\ell) + \partial G_\ell(u_\ell) = \partial F(u_\ell) + \{\delta G_\ell(u_\ell)\}$ (TODO quote) und somit folgt $-\delta G_\ell(u_\ell) \in \partial F(u_\ell)$. Daraus folgt □

# 4. Das Diskrete Problem

# 5. Numerische Realisierung

# A. Appendix

# Selbständigkeitserklärung

Ich erkläre, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und noch nicht für andere Prüfungen eingereicht habe. Sämtliche Quellen, einschließlich Internetquellen, die unverändert oder abgewandelt wiedergegeben werden, insbesondere Quellen für Texte, Grafiken, Tabellen und Bilder, sind als solche kenntlich gemacht. Mir ist bekannt, dass bei Verstößen gegen diese Grundsätze ein Verfahren wegen Täuschungsversuchs bzw. Täuschung eingeleitet wird.

Berlin, den 24. März 2019,