



# Die Crouzeix-Raviart-Finite-Elemente- Methode für eine nichtkonforme Formulierung des Rudin-Osher-Fatemi-Modellproblems

Bachelorarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades  
Bachelor of Science (B. Sc.)

eingereicht von: Enrico Bergmann  
geboren am: 13.10.1995  
geboren in: Berlin  
Gutachter/innen: Prof. Dr. Carsten Carstensen  
Dr. Philipp Bringmann

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Theoretische Grundlagen</b>	<b>6</b>
2.1	Notation . . . . .	6
2.2	Crouzeix-Raviart-Finite-Elemente-Funktionen . . . . .	7
2.3	Variationsrechnung auf Banachräumen . . . . .	8
2.4	Subdifferentiale . . . . .	9
2.5	Funktionen beschränkter Variation . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Das kontinuierliche Problem</b>	<b>12</b>
3.1	Existenz eines eindeutigen Minimierers . . . . .	12
3.2	Konstruktion eines Eingangssignals zu einer gegebenen Lösung . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Das diskrete Problem</b>	<b>18</b>
4.1	Formulierung . . . . .	18
4.2	Charakterisierung und Existenz eines eindeutigen Minimierers . . . . .	18
4.3	Verfeinerungsindikator und garantierte Energieschranken . . . . .	23
<b>5</b>	<b>Iterative Lösung</b>	<b>24</b>
5.1	Primale-duale Iteration . . . . .	24
5.2	Konvergenz der Iteration . . . . .	25
<b>6</b>	<b>Implementierung</b>	<b>28</b>
6.1	Hinweise zur Benutzung des Programms . . . . .	28
6.2	Programmablauf . . . . .	29
6.3	Realisierung der primalen-dualen Iteration . . . . .	34
6.4	Mathematische Grundlagen ausgewählter Methoden . . . . .	35
6.4.1	Berechnung lokaler Crouzeix-Raviart-Basisfunktionen . . . . .	35
6.4.2	Berechnung lokaler Knotenwerte einer Crouzeix-Raviart-Funktion . . . . .	35
6.4.3	Berechnung von Sprungtermen . . . . .	36
<b>7</b>	<b>Numerische Beispiele</b>	<b>38</b>
7.1	Betrachte Probleme . . . . .	38
7.2	Betrachtungen der Iteration . . . . .	38
7.3	Bilder als Input und Rauschverminderung . . . . .	39
7.4	Alternative Kapitelstruktur: Anwendung am Beispiel der Benchmarks . . . . .	39
7.4.1	Experimente mit exakter Lösung: Benchmarks 'f01Bench' und 'f02' Bench . . . . .	39
7.4.2	Bilder als Input und Rauschverminderung: 'cameramanBench' und . . . . .	39
<b>8</b>	<b>Auswertung</b>	<b>43</b>
	<b>Literatur</b>	<b>45</b>

# 1 Einleitung

In der Bildverarbeitung kann ein gegebenes Signal häufig nur durch eine unstetige Funktion dargestellt werden. Deshalb stellt sich zunächst die Frage, welcher Funktionenraum zum Beschreiben dieser Signale geeignet ist.

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  ein polygonal berandetes Lipschitz-Gebiet und  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stelle ein gegebenes Signal auf  $\Omega$  dar. Das Signal  $g$  könnte im Sobolev-Raum  $W^{1,1}(\Omega)$  vermutet werden, da Elemente dieses Raums im Allgemeinen nicht stetig sein müssen. Allerdings lassen Sobolev-Funktionen die oftmals benötigten Sprünge über Teilmengen niedrigerer Dimension von  $\Omega$  nicht zu. Dieses Problem kann gelöst werden, indem der Raum der Funktionen von beschränkter Variation  $BV(\Omega)$  betrachtet wird. Dieser ist eine echte Obermenge von  $W^{1,1}(\Omega)$  und hat sich als geeignet für die Modellierung von Signalen in der Bildverarbeitung und weitere Anwendungen erwiesen (cf. [ABM14, S. 393; AK06, S. 42; Bar15b, S. 297; Bra98, S. 1 f.]).

Eine mögliche Problemstellung in der Bildverarbeitung ist die Rauschunterdrückung, das heißt der Versuch unerwünschtes Rauschen in einem Signal zu verringern. In [ROF92] beschrieben Rudin, Osher und Fatemi 1992 das heute als ROF-Modell bekannte Minimierungsproblem dafür (cf. [Bar15a, S. 1217; CP10, S. 132; Get12, S. 74 f.]). Dabei ist für das gegebene Signal  $g \in L^2(\Omega)$  und eine Funktion  $v \in BV(\Omega) \cap L^2(\Omega)$  die Minimierung der Summe der zwei folgenden Terme relevant. Der erste Term ist die Seminorm

$$|v|_{BV(\Omega)} := \sup_{\substack{\phi \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}^2) \\ |\phi| \leq 1}} \int_{\Omega} v \operatorname{div}(\phi) \, dx < \infty.$$

von  $v$  auf  $BV(\Omega)$  [Bar12, S. 1162]. Diese entspricht der totalen Variation der distributionellen Ableitung  $Dv$  von  $v$  und ihre Minimierung vermindert Oszillationen in der Lösung, lässt aber Unstetigkeiten zu [Get12, S. 75]. Außerdem stimmt diese, falls  $v \in W^{1,1}(\Omega)$ , mit der Seminorm auf  $W^{1,1}(\Omega)$  überein. Der zweite Term ist die Normdifferenz von  $v$  und  $g$  in  $L^2(\Omega)$ . Die Minimierung dieses Terms bewirkt, dass die Lösung dem Eingangssignal ähnelt. Mit diesen Termen und mit einem positiven Parameter  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ , der das Verhältnis zwischen Rauschverminderung und Ähnlichkeit der Lösung zum Eingangssignal gewichtet, sucht das ROF-Modell eine Funktion  $u \in BV(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ , die das Funktional

$$I(v) := |v|_{BV(\Omega)} + \frac{\alpha}{2} \|v - g\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (1.1)$$

unter allen  $v \in BV(\Omega) \cap L^2(\Omega)$  minimiert. Wird hierbei  $\alpha$  zu klein gewählt, führt das zu einer zu stark geglätteten, verwaschen aussehenden Lösung, zu sehen zum Beispiel in den Abbildungen 1.1c und 1.1d. Wird andererseits  $\alpha$  zu groß gewählt, ist die Verminderung des Rauschens im Vergleich zum Eingangssignal  $g$  nur gering, zu sehen zum Beispiel in den Abbildungen 1.1f und 1.1g. Für weitere Details und Referenzen zur Rauschunterdrückung und zur Wahl von  $\alpha$  siehe [Get12].

Zur numerischen Behandlung dieses Problems gibt es bereits einige Ansätze in der Literatur. Dazu gehören die Regularisierung der Seminorm  $|\cdot|_{BV(\Omega)}$ , indem die Betragsfunktion  $|\cdot|$  durch eine stetig differenzierbare Approximation  $|\cdot|_\varepsilon$  ersetzt wird, und die Nutzung von höheren Ableitungen in der Definition von  $|\cdot|_{BV(\Omega)}$ . Vor- und Nachteile dieser Ansätze und entsprechende Referenzen werden in [Bar12, S. 1165] zusammengefasst. Außerdem wird ebenda auf Arbeiten verwiesen, in denen verschiedene iterative Lösungsmethoden

für das ROF-Modellproblem diskutiert werden. Professor Bartels untersucht in [Bar15b, Section 10.2] eine  $W^{1,1}$ -konforme Diskretisierung des ROF-Modells mit Courant-Finite-Elemente-Funktionen. Zur numerischen Lösung dieser diskreten Formulierung nutzt er eine primale-duale Iteration, welche durch Betrachtung der primalen und der dualen Formulierung des Minimierungsproblems motiviert ist. Eine Regularisierung oder die Nutzung höherer Ableitungen für die BV-Seminorm werden dabei nicht benötigt.

In dieser Arbeit möchten wir die Anwendung dieser primalen-dualen Iteration auf eine nichtkonforme, mit Crouzeix-Raviart-Finite-Elemente-Funktionen diskretisierten Formulierung des ROF-Modells untersuchen. Dabei nutzen wir einen, von Professor Carstensen zur Verfügung gestellten, Verfeinerungsindikator, um die Iteration im Solve-Schritt der AFEM-Routine aus Abbildung 6.1 nutzen zu können. Außerdem erlaubt uns die nichtkonforme Formulierung die Betrachtung einer garantierten unteren Energieschranke, welche ebenfalls von Professor Carstensen zur Verfügung gestellt wurde. Die Implementierung des adaptiven Algorithmus basiert auf dem Matlab-Softwarepaket AFEM [Car09a].

Abschließend sei angemerkt, dass wir folgende, leicht andere Formulierung des ROF-Modells betrachten. Wir minimieren das Funktional

$$E(v) := \frac{\alpha}{2} \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + |v|_{\text{BV}(\Omega)} + \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} - \int_{\Omega} f v \, dx$$

unter allen  $v \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ . Dabei ist der Term  $\|v\|_{L^1(\partial\Omega)}$  durch den Spursatz für BV-Funktionen [ABM14, S. 400, Theorem 10.2.1] wohldefiniert und seine Minimierung modelliert homogene Randdaten. Für  $f = \alpha g$  gilt dann


$$I(v) = E(v) - \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} + \frac{\alpha}{2} \|g\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \text{für alle } v \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega).$$

Aufgrund der Konstanz von  $\|g\|_{L^2(\Omega)}$  folgt damit, dass die Funktionale  $E$  und  $I$  die gleichen Minimierer in  $\{v \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega) \mid \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} = 0\}$  besitzen.

Die Struktur dieser Arbeit ist wie folgt. Nachdem in Kapitel 2 zunächst die Notation eingeführt und die theoretischen Grundlagen aus der Optimierung und zu den Funktionen beschränkter Variation zusammengetragen wurden, wird in Kapitel 3 bewiesen, dass für unsere Formulierung des ROF-Modells ein eindeutiger Minimierer existiert. Anschließend folgt in Kapitel 4 die nichtkonforme Formulierung und Diskretisierung des Minimierungsproblems. Mithilfe der Sattelpunktsformulierung des diskreten Problems werden äquivalente Charakterisierungen für den eindeutigen diskreten Minimierer bewiesen. Außerdem werden der Verfeinerungsindikator und garantierte Schranken für  $E$  aufgeführt. In Kapitel 5 wird die primale-duale Iteration formuliert und bewiesen, dass diese gegen den diskreten Minimierer konvergiert. Es folgen in Kapitel 6 Hinweise zur Benutzung des Programms und Details zur Implementierung des Algorithmus und schließlich in Kapitel 7 die Darstellung der Experimente und deren Auswertung in Kapitel 8.



Abbildung 1.1: Originalbild<sup>1</sup>(a) und Originalbild mit additiven weißen gaußschen Rauschen (b) mit einem Signal-Rausch-Verhältnis (eng. signal-to-noise ratio, SNR) von 10, jeweils mit einem nachträglich hinzugefügten graduellen Übergang zu schwarzem Rand, der bei Graufarbenbildern als Eingangssignal Nullranddaten entspricht. Außerdem fünf Ergebnisse (c)-(g) des in Kapitel 6 beschriebenen adaptiven Algorithmus mit verschiedenen Werten von  $\alpha$ .

<sup>1</sup>  <https://homepages.cae.wisc.edu/~ece533/images/cameraman.tif>

## 2 Theoretische Grundlagen

In dieser Arbeit werden Grundbegriffe in topologischen Räumen und Kenntnisse zu Banach- und Hilberträumen sowie zu Lebesgue- und Sobolev-Räumen vorausgesetzt. Dazu gehören insbesondere wichtige Ungleichungen (beispielsweise Cauchy-Schwarz, Hölder, Young), grundlegende Einbettungssätze, Dualraumtheorie, Aussagen zur schwachen Konvergenz sowie der Rieszsche Darstellungssatz und seine Implikationen. Benötigte topologische Begriffe und grundlegende Aussagen zu Banach- und Hilberträumen können beispielsweise in [Zei86] nachgeschlagen werden. Grundlagen der Optimierung sind in [Zei85] nachlesbar und alles Weitere eben genannte in [Zei90a] und [Zei90b]. Dabei eignen sich die Register von [Zei90b] und [Zei85] hervorragend zum schnellen Auffinden von Begriffen in allen eben aufgeführten Referenzen.

Schließlich sollte ein Verständnis des AFEM-Softwarepakets [Car09a], von den darin verwendeten Datenstrukturen und von den mathematischen Konzepten hinter dessen Funktionen vorhanden sein. Dazu sei an dieser Stelle auf die Dokumentation [Car+10] dieses Softwarepakets verwiesen. Die in dieser Arbeit benötigten Begriffe und Notationen führen wir im nächsten Abschnitt nochmals ein, wobei wir den Definitionen und Aussagen zum Crouzeix-Raviart-Finite-Elemente-Raum einen separaten Abschnitt 2.2 widmen.

### 2.1 Notation

Wir wählen für die natürlichen Zahlen die Konvention  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  und  $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Die Menge der positiven reellen Zahlen notieren wir mit  $\mathbb{R}_+$ . Um auszudrücken, dass eine Menge  $A$  Teilmenge einer Menge  $B$  ist, schreiben wir  $A \subseteq B$ . Falls wir hervorheben wollen, dass  $A$  sogar eine echte Teilmenge von  $B$  ist, so schreiben wir  $A \subset B$ . Ist  $A$  Teilmenge eines topologischen Raumes, so notieren wir den Rand von  $A$  mit  $\partial A$ , das Innere von  $A$  mit  $\text{int}(A)$  und den Abschluss von  $A$  mit  $\bar{A}$ . Wir nennen weiterhin eine Teilmenge  $B \subseteq A$  Umgebung eines Punktes  $x \in A$ , wenn es eine offene Teilmenge von  $B$  gibt, die  $x$  enthält. Ist eine Funktion  $F : X \rightarrow Y$  zwischen nichtleeren Mengen  $X$  und  $Y$  konstant, das heißt nimmt sie nur genau einen Wert  $y \in Y$  an, schreiben wir  $F \equiv y$ .

Für den Rest dieses Abschnitts seien  $d, m \in \mathbb{N}$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ ,  $p \in [1, \infty]$  und  $U$  eine nichtleere, offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^d$ . Die Einheitsmatrix in  $\mathbb{R}^{m \times m}$  bezeichnen wir mit  $I_m$ . Für das euklidische Skalarprodukt zweier Vektoren  $v, w \in \mathbb{R}^m$  schreiben wir  $v \cdot w$ . Betrachten wir einen Funktionenraum mit Werten in  $\mathbb{R}$ , so verzichten wir auf  $\mathbb{R}$  beim Notieren des Funktionenraums. Zum Beispiel schreiben wir  $C(U) := C(U; \mathbb{R})$  für den Raum der stetigen Funktionen von  $U$  nach  $\mathbb{R}$ .

Mit  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  bezeichnen wir stets ein polygonal berandetes Lipschitz-Gebiet. Eine reguläre Triangulierung  $\mathcal{T}$  von  $\Omega$  im Sinne von Ciarlet (cf. [Car09b, S. 34; CGR12, S. 345; Car+10, S. 8 f.]) ist eine endliche Menge von abgeschlossenen Dreiecken  $T$  mit positiven Flächeninhalt  $|T|$ , sodass

$$\bigcup_{T \in \mathcal{T}} T = \bar{\Omega}$$

und zwei Dreiecke  $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$  mit  $T_1 \neq T_2$  und  $T_1 \cap T_2 \neq \emptyset$  genau eine gemeinsame Ecke oder genau eine gemeinsame Kante haben. Die Menge der Knoten der Triangulierung sei  $\mathcal{N}$ , wobei die Menge der inneren Knoten mit  $\mathcal{N}(\Omega)$ , die Menge der Randknoten mit

$\mathcal{N}(\partial\Omega)$  und die Menge der Knoten eines Dreiecks  $T \in \mathcal{T}$  mit  $\mathcal{N}(T)$  bezeichnet werde. Für die Kanten der Triangulierung seien die Mengen  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{E}(\Omega)$ ,  $\mathcal{E}(\partial\Omega)$  und  $\mathcal{E}(T)$  analog definiert. Außerdem definieren wir für  $z \in \mathcal{N}$  die Menge  $\mathcal{T}(z) := \{T \in \mathcal{T} \mid z \in \mathcal{N}(T)\}$  und für  $E \in \mathcal{E}$  die Menge  $\mathcal{T}(E) := \{T \in \mathcal{T} \mid E \in \mathcal{E}(T)\}$ . Den Mittelpunkt einer Kante  $E \in \mathcal{E}$  bezeichnen wir mit  $\text{mid}(E)$ . Der Normaleneinheitsvektor auf dem Rand eines Dreiecks  $T \in \mathcal{T}$  sei  $\nu_T$  und der Normaleneinheitsvektor auf einer Kante  $E \in \mathcal{E}$  sei  $\nu_E$ . Für eine Innenkante  $E \in \mathcal{E}(\Omega)$  bezeichnen wir dann die beiden Dreiecke in  $\mathcal{T}(E)$  so mit  $T_+$  und  $T_-$ , dass  $\nu_{T_+}$  und  $\nu_E$  gleich orientiert sind, also  $\nu_{T_+} \cdot \nu_E = 1$ . Damit können wir den Sprung entlang einer Innenkante  $E \in \mathcal{E}(\Omega)$  definieren als  $[\cdot]_E := \cdot|_{T_+} - \cdot|_{T_-}$ . Für eine Randkante  $E \in \mathcal{E}(\partial\Omega)$  definieren wir  $[\cdot]_E := \cdot|_E$ . Die Menge der stückweise konstanten Funktionen auf der Triangulierung  $\mathcal{T}$  mit Werten in  $\mathbb{R}^m$  notieren wir dann mit  $P_0(\mathcal{T}, \mathbb{R}^m)$  und die Menge der stückweise affinen Funktionen auf  $\mathcal{T}$  mit Werten in  $\mathbb{R}^m$  mit  $P_1(\mathcal{T}, \mathbb{R}^m)$ . Weiterhin ist der Courant-Finite-Elemente-Raum (cf. [Car+10, S. 12]) definiert als

$$S^1(\mathcal{T}) := P_1(\mathcal{T}) \cap C(\overline{\Omega}).$$

Für ein Dreieck  $T \in \mathcal{T}$  sei die Länge der längsten Seite  $h_T$ . Damit können wir die stückweise konstante Funktion  $h_{\mathcal{T}} \in P_0(\mathcal{T})$  für alle  $T \in \mathcal{T}$  durch  $h_{\mathcal{T}}|_T := h_T$  und die Länge der längsten Seite der Triangulierung durch  $h := \max_{T \in \mathcal{T}} h_T$  definieren.

Mit  $|\cdot|$  bezeichnen wir, je nach Argument, die euklidischen Norm eines Vektors  $v \in \mathbb{R}^m$ , das Lebesgue-Maß einer Menge  $M \subset \mathbb{R}^2$ , die Länge einer Kante  $E \in \mathcal{E}$  oder die Kardinalität einer endlichen Menge  $A$ .

Ist  $V$  ein Vektorraum, so notieren wir die konvexe Hülle einer Teilmenge  $X \subseteq V$  mit  $\text{conv } X$ . Falls  $V$  ein normierter Vektorraum ist, dann bezeichnen wir die entsprechende Norm auf  $V$  mit  $\|\cdot\|_V$ . Die Einheitskugel auf  $V$  ist damit  $B_V := \{v \in V \mid \|v\|_V < 1\}$  und die abgeschlossene Einheitskugel auf  $V$  ist  $\overline{B_V} = \{v \in V \mid \|v\|_V \leq 1\}$ . Ist  $V$  sogar ein Prähilbertraum, so bezeichnen wir das Skalarprodukt auf  $V$ , welches  $\|\cdot\|_V$  induziert, mit  $(\cdot, \cdot)_V$ . Betrachten wir eine Eigenschaft, für die gegeben sein muss, bezüglich welcher Norm Folgen auf  $V$  konvergieren, so ist stets die Konvergenz in der Norm  $\|\cdot\|_V$  gewählt, sofern nicht anders angegeben. Beispielsweise meinen wir mit der Folgenstetigkeit eines Funktionals  $F : V \rightarrow \mathbb{R}$  im Detail die Folgenstetigkeit mit der Normkonvergenz bezüglich  $\|\cdot\|_V$  in  $V$  und der Konvergenz bezüglich  $|\cdot|$  in  $\mathbb{R}$ .

Die Signumfunktion auf dem  $\mathbb{R}^m$  definieren wir für einen Vektor  $v \in \mathbb{R}^m$  durch

$$\text{sign}(v) := \begin{cases} \left\{ \frac{v}{|v|} \right\}, & \text{falls } v \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}, \\ \overline{B_{\mathbb{R}^m}}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.1)$$

Für den Dualraum eines Banachraums  $X$  über  $\mathbb{R}$  schreiben wir  $X^*$ . Die Auswertung eines Funktionals  $F \in X^*$  an der Stelle  $u \in X$  notieren wir, vor eventueller Anwendung des Rieszschen Darstellungssatzes, mit  $\langle F, u \rangle$ . Identifizieren wir einen Raum  $Y$  mit dem Dualraum  $X^*$ , so schreiben wir  $Y \cong X^*$ .

Weiterhin benutzen wir die übliche Notation für Lebesgue-Räume  $L^p(U; \mathbb{R}^m)$  und die Sobolev-Räume  $W^{k,p}(U)$  sowie  $H^k(U) := W^{k,2}(U)$  und  $H_0^k(U)$ . Die Normen auf diesen Räumen definieren wir ebenfalls wie üblich. Außerdem schreiben wir kurz  $\|\cdot\| := \|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$  und  $(\cdot, \cdot) := (\cdot, \cdot)_{L^2(\Omega)}$ . Mit  $H^1(\mathcal{T})$  bezeichnen wir den Raum der stückweisen  $H^1$ -Funktionen auf  $\mathcal{T}$ .

## 2.2 Crouzeix-Raviart-Finite-Elemente-Funktionen

In Abschnitt 4.1 wollen wir für eine nichtkonforme Diskretisierung des Minimierungsproblems 3.1 den Crouzeix-Raviart-Finite-Elemente-Raum nutzen. Die dafür benötigten

Definitionen und Aussagen tragen wir in diesem Abschnitt aus [Car09b; CGR12; Car+10] zusammen.

Die Räume der Crouzeix-Raviart-Finite-Elemente-Funktionen sind definiert durch

$$\begin{aligned} \text{CR}^1(\mathcal{T}) &:= \{v_{\text{CR}} \in P_1(\mathcal{T}) \mid v_{\text{CR}} \text{ ist stetig in } \text{mid}(E) \text{ für alle } E \in \mathcal{E}\} \quad \text{und} \\ \text{CR}_0^1(\mathcal{T}) &:= \{v_{\text{CR}} \in \text{CR}^1(\mathcal{T}) \mid \forall E \in \mathcal{E}(\partial\Omega) \quad v_{\text{CR}}(\text{mid}(E)) = 0\}. \end{aligned}$$

Wir wollen  $\text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  mit einem diskreten Skalarprodukt ausstatten. Dafür führen wir den stückweisen Gradienten  $\nabla_{\text{NC}} : H^1(\mathcal{T}) \rightarrow L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)$  ein. Dieser ist für alle  $v \in H^1(\mathcal{T})$  und alle  $T \in \mathcal{T}$  definiert durch  $(\nabla_{\text{NC}} v)|_T := \nabla v|_T$ . Das ermöglicht uns die Definition der diskreten Bilinearform  $a_{\text{NC}}(\cdot, \cdot) : \text{CR}_0^1(\mathcal{T}) \times \text{CR}_0^1(\mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$a_{\text{NC}}(u_{\text{CR}}, v_{\text{CR}}) := \int_{\Omega} \nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}} \cdot \nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}} \, dx \quad \text{für alle } u_{\text{CR}}, v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T}).$$

Diese ist ein Skalarprodukt auf  $\text{CR}_0^1(\mathcal{T})$ . Die von  $a_{\text{NC}}$  induzierte Norm bezeichnen wir mit  $\|\cdot\|_{\text{NC}}$ .

Nun definieren wir für jede Kante  $E \in \mathcal{E}$  eine Funktion  $\psi_E \in \text{CR}^1(\mathcal{T})$  durch ihre Werte

$$\psi_E(\text{mid}(E)) := 1 \quad \text{sowie} \quad \psi_E(\text{mid}(F)) := 0 \quad \text{für alle } F \in \mathcal{E}.$$

Die Menge  $\{\psi_E \mid E \in \mathcal{E}\}$  bildet dann eine Basis von  $\text{CR}^1(\mathcal{T})$  und die Menge  $\{\psi_E \mid E \in \mathcal{E}(\Omega)\}$  bildet eine Basis von  $\text{CR}_0^1(\mathcal{T})$ . Für Kapitel 6 werden wir außerdem die folgenden Aussagen benötigen. Sei  $T \in \mathcal{T}$  mit  $T = \text{conv}\{P_1, P_2, P_3\}$ . Dann sind die baryzentrischen Koordinaten  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in P_1(T)$  für  $j, k \in \{1, 2, 3\}$  charakterisiert durch

$$\lambda_j(P_k) = \begin{cases} 1, & \text{falls } j = k, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Seien die Kanten von  $T$  nun so mit  $E_1, E_2$  und  $E_3$  bezeichnet, dass für  $j \in \{1, 2, 3\}$  die Kante  $E_j$  gegenüber von  $P_j$  liegt. Dann können wir die lokalen Crouzeix-Raviart-Basisfunktionen  $\psi_{E_j}|_T$ ,  $j \in \{1, 2, 3\}$ , für alle  $x \in T$  darstellen durch

$$\psi_{E_j}|_T(x) = 1 - 2\lambda_j(x). \quad (2.2)$$

Dadurch ist für alle  $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$  die Integrationsformel

$$\int_T \lambda_1^{k_1} \lambda_2^{k_2} \lambda_3^{k_3} \, dx = 2|T| \frac{k_1! k_2! k_3!}{(2 + k_1 + k_2 + k_3)!} \quad (2.3)$$

auch für die Berechnung von Integralen über Produkte der lokalen Crouzeix-Raviart-Basisfunktionen auf  $T$  nutzbar. Ein Beweis der Formel (2.3) ist in [EM73] zu finden.

## 2.3 Variationsrechnung auf Banachräumen

In dieser Arbeit setzen wir Kenntnisse über die Variationsrechnung voraus. Da wir aber auch Funktionale betrachten, die auf unendlichdimensionalen, reellen Banachräumen definiert sind, führen wir in diesem Abschnitt die grundlegenden Notationen dafür ein und formulieren schließlich die notwendige Optimalitätsbedingung erster Ordnung.

Dabei folgen wir [Zei85, S. 189-194]. Dort werden einige der Aussagen auf einem reellen, lokal konvexen Raum formuliert. Da nach [Zei86, S. 781, (43)] alle Banachräume lokal konvex sind und wir die Aussagen in dieser Arbeit nur auf Banachräumen benötigen, formulieren wir sie hier auf einem reellen Banachraum  $X$ . Außerdem betrachten wir eine Teilmenge  $V \subseteq X$ , einen inneren Punkt  $u$  von  $V$  und ein Funktional  $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ . Schließlich definieren wir noch für alle  $h \in X$  eine Funktion  $\varphi_h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die für alle  $t \in \mathbb{R}$  gegeben ist durch  $\varphi_h(t) := F(u + th)$ . Damit können wir die  $n$ -te Variation, das Gâteaux- und das Fréchet-Differential von  $F$  definieren.



**Definition 2.1** (*n*-te Variation). Die *n*-te Variation von  $F$  an der Stelle  $u$  in Richtung  $h \in X$  ist, falls die *n*-te Ableitung  $\varphi_h^{(n)}(0)$  von  $\varphi_h$  in 0 existiert, definiert durch

$$\delta^n F(u; h) := \varphi_h^{(n)}(0) = \left. \frac{d^n F(u + th)}{dt^n} \right|_{t=0}.$$

Wir schreiben  $\delta$  für  $\delta^1$ .

**Definition 2.2** (Gâteaux- und Fréchet-Differential).  $F$  heißt Gâteaux-differenzierbar an der Stelle  $u$ , falls ein Funktional  $F'(u) \in X^*$  existiert, sodass

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(u + th) - F(u)}{t} = \langle F'(u), h \rangle \quad \text{für alle } h \in X.$$

$F'(u)$  heißt dann Gâteaux-Differential von  $F$  an der Stelle  $u$ .  $F$  heißt Fréchet-differenzierbar an der Stelle  $u$ , falls ein Funktional  $F'(u) \in X^*$  existiert, sodass

$$\lim_{\|h\|_X \rightarrow 0} \frac{|F(u + th) - F(u) - \langle F'(u), h \rangle|}{\|h\|_X} = 0.$$

$F'(u)$  heißt dann Fréchet-Differential von  $F$  an der Stelle  $u$ . Das Fréchet-Differential von  $F$  an der Stelle  $u$  in Richtung  $h \in X$  ist definiert durch  $dF(u; h) := \langle F'(u), h \rangle$ .

*Bemerkung 2.3.* Existiert das Fréchet-Differential  $F'(u)$  von  $F$  an der Stelle  $u$ , so ist  $F'(u)$  auch das Gâteaux-Differential von  $F$  an der Stelle  $u$  und es gilt

$$\delta F(u; h) = dF(u; h) = \langle F'(u), h \rangle \quad \text{für alle } h \in X.$$

Nachdem nun die relevante Notation eingeführt ist, können wir zum Abschluss die notwendige Bedingung erster Ordnung für einen lokalen Minimierer von  $F$  formulieren.

**Theorem 2.4** (Notwendige Optimalitätsbedingung erster Ordnung). Sei  $u \in \text{int}(V)$  lokaler Minimierer von  $F$ , das heißt es existiere eine Umgebung  $U \subseteq V$  von  $u$ , sodass  $F(v) \geq F(u)$  für alle  $v \in U$ . Dann gilt für alle  $h \in X$ , dass  $\delta F(u; h) = 0$ , falls diese Variation für alle  $h \in X$  existiert, beziehungsweise  $F'(u) = 0$ , falls  $F'(u)$  als Gâteaux- oder Fréchet-Differential existiert.

*Beweis.* Die Aussage folgt direkt aus [Zei85, S. 193 f., Theorem 40.A, Theorem 40.B].  $\square$

## 2.4 Subdifferientiale

Für diesen Abschnitt betrachten wir stets einen reellen Banachraum  $X$  und, falls nicht anders spezifiziert, ein Funktional  $F : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ . Wir wollen die in dieser Arbeit benötigten Notationen und Eigenschaften des Subdifferentials von  $F$  zusammentragen. Zuvor starten wir mit einer grundlegenden Definition.

**Definition 2.5** ([Zei85, S. 245, Definition 42.1]). Sei  $V$  ein Vektorraum,  $M \subseteq V$  und  $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann heißt die Menge  $M$  konvex, wenn für alle  $u, v \in M$  und alle  $t \in [0, 1]$  gilt

$$(1 - t)u + tv \in M.$$

Ist  $M$  konvex, so heißt  $F$  konvex, falls für alle  $u, v \in M$  und alle  $t \in [0, 1]$  gilt

$$F((1 - t)u + tv) \leq (1 - t)F(u) + tF(v). \quad (2.4)$$

Gilt Ungleichung (2.4) für alle  $t \in (0, 1)$  mit „ $<$ “, so heißt  $F$  strikt konvex. Falls  $-F$  konvex ist, so heißt  $F$  konkav.

Für den Rest dieses Abschnitts folgen wir [Zei85, S. 385-397]. Analog zur Begründung zum Beginn von Abschnitt 2.3, schränken wir auch hier die Definitionen und Aussagen, die in [Zei85] auf reellen, lokal konvexen Räumen formuliert sind, auf den reellen Banachraum  $X$  ein. Zunächst definieren wir das Subdifferential von  $F$  an einer Stelle  $u \in X$ .

**Definition 2.6** (Subdifferential). Für  $u \in X$  mit  $F(u) \neq \pm\infty$  heißt

$$\partial F(u) := \{u^* \in X^* \mid \forall v \in X \quad F(v) \geq F(u) + \langle u^*, v - u \rangle\} \quad (2.5)$$

Subdifferential von  $F$  an der Stelle  $u$ . Für  $F(u) = \pm\infty$  ist  $\partial F(u) := \emptyset$ . Ein Element  $u^* \in \partial F(u)$  heißt Subgradient von  $F$  an der Stelle  $u$ .

Es folgen für Optimierungsprobleme wichtige Aussagen über das Subdifferential von  $F$ .

**Theorem 2.7** ([Zei85, S. 387, Proposition 47.12]). Falls  $F : X \rightarrow (-\infty, \infty]$  mit  $F \not\equiv \infty$ , gilt  $F(u) = \inf_{v \in X} F(v)$  genau dann, wenn  $0 \in \partial F(u)$ .

**Theorem 2.8** ([Zei85, S. 387, Proposition 47.13 (i)]). Falls  $F$  konvex und Gâteaux-differenzierbar an der Stelle  $u \in X$  mit Gâteaux-Differential  $F'(u)$  ist, gilt  $\partial F(u) = \{F'(u)\}$ .

Das folgende Theorem folgt aus [Zei85, S. 389, Theorem 47.B] unter Beachtung der Tatsache, dass die Addition von Funktionalen  $F_1, F_2, \dots, F_n : X \rightarrow (-\infty, \infty]$  und die Addition von Mengen in  $X^*$  kommutieren.

**Theorem 2.9.** Seien für  $n \geq 2$  die Funktionale  $F_1, F_2, \dots, F_n : X \rightarrow (-\infty, \infty]$  konvex und es existiere ein  $u_0 \in X$ , sodass  $F_k(u_0) < \infty$  für alle  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Außerdem seien mindestens  $n - 1$  der  $n$  Funktionale  $F_1, F_2, \dots, F_n$  stetig an der Stelle  $u_0$ . Dann gilt

$$\partial(F_1 + F_2 + \dots + F_n)(u) = \partial F_1(u) + \partial F_2(u) + \dots + \partial F_n(u) \quad \text{für alle } u \in X.$$

Zum Abschluss formulieren wir noch die Monotonie des Subdifferentials. Diese folgt aus [Zei85, S. 396 f., Definition 47.15, Theorem 47.F (1)].

**Theorem 2.10.** Sei  $F : X \rightarrow (-\infty, \infty]$  konvex und unterhalbstetig mit  $F \not\equiv \infty$ . Dann ist  $\partial F(\cdot)$  monoton, das heißt

$$\langle u^* - v^*, u - v \rangle \geq 0 \quad \text{für alle } u, v \in X, u^* \in \partial F(u), v^* \in \partial F(v).$$

## 2.5 Funktionen beschränkter Variation

In diesem Abschnitt führen wir den Raum der Funktionen beschränkter Variation ein. Wir vermeiden dabei für den weiteren Verlauf dieser Arbeit nicht benötigte Notation und Theorie, indem wir die Definitionen und Aussagen entsprechend aus- und umformulieren. Für detaillierte Ausführungen und die maßtheoretischen Hintergründe siehe zum Beispiel [ABM14; EG92; Bra98]. Soweit nicht anders angegeben, folgen die Definitionen und Aussagen dieses Abschnitts aus [ABM14, S. 393-395]. Sei im Weiteren  $U$  eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^d$ . Zunächst definieren wir den Raum der Funktionen beschränkter Variation.

**Definition 2.11** (Funktionen beschränkter Variation). Eine Funktion  $u \in L^1(U)$  ist von beschränkter Variation, wenn

$$|u|_{\text{BV}(U)} := \sup_{\substack{\phi \in C_c^1(U; \mathbb{R}^d) \\ \|\phi\|_{L^\infty(U)} \leq 1}} \int_U u \operatorname{div}(\phi) \, dx < \infty. \quad (2.6)$$

Die Menge aller Funktionen beschränkter Variation ist  $\text{BV}(U)$ .

*Bemerkung 2.12.* Durch  $|\cdot|_{\text{BV}(U)}$  ist eine Seminorm auf  $\text{BV}(U)$  gegeben. Ausgestattet mit der Norm

$$\|\cdot\|_{\text{BV}(U)} := \|\cdot\|_{L^1(U)} + |\cdot|_{\text{BV}(U)}$$

ist  $\text{BV}(U)$  ein Banachraum. Außerdem gilt  $W^{1,1}(U) \subset \text{BV}(U)$  und  $\|u\|_{\text{BV}(U)} = \|u\|_{W^{1,1}(U)}$  für alle  $u \in W^{1,1}(U)$ .

In der Anwendung ist Konvergenz in  $\text{BV}(U)$  bezüglich der Norm  $\|\cdot\|_{\text{BV}(U)}$  zu restriktiv (cf. [Bar15b, S. 300]). Deshalb führen wir einen schwächeren Konvergenzbegriff ein.

**Definition 2.13.** Sei  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{BV}(U)$  und sei  $u \in \text{BV}(U)$  mit  $u_n \rightarrow u$  in  $L^1(U)$  für  $n \rightarrow \infty$ . Dann konvergiert die Folge  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  schwach gegen  $u$  in  $\text{BV}(U)$ , wenn für alle  $\phi \in C_0(U; \mathbb{R}^d)$  gilt, dass

$$\int_U u_n \operatorname{div}(\phi) \, dx \rightarrow \int_U u \operatorname{div}(\phi) \, dx \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Wir schreiben dann  $u_n \rightharpoonup u$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Damit können wir das folgende Theorem formulieren, welches unmittelbar die schwache Unterhaltstetigkeit der Seminorm  $|\cdot|_{\text{BV}(U)}$  auf  $\text{BV}(U)$  impliziert.

**Theorem 2.14** ([ABM14, S. 394, Proposition 10.1.1]). Sei  $u \in L^1(U)$  und sei  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{BV}(U)$  mit  $\sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|_{\text{BV}(U)} < \infty$  und  $u_n \rightarrow u$  in  $L^1(U)$  für  $n \rightarrow \infty$ . Dann gilt  $u \in \text{BV}(U)$  und  $|u|_{\text{BV}(U)} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} |u_n|_{\text{BV}(U)}$ . Außerdem gilt dann  $u_n \rightharpoonup u$  in  $\text{BV}(U)$ .

Für den Rest dieses Abschnitts sei  $U$  ein beschränktes Lipschitz-Gebiet. Unter dieser Voraussetzung können wir zeigen, dass jede in  $\text{BV}(U)$  beschränkte Folge eine in  $\text{BV}(U)$  schwach konvergente Teilfolge besitzt mit schwachem Grenzwert in  $\text{BV}(U)$ . Für den Beweis dieser Aussage benötigen wir zunächst das folgende Theorem.

**Theorem 2.15** ([EG92, S. 176, Theorem 4]). Sei  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{BV}(U)$  eine beschränkte Folge. Dann existiert eine Teilfolge  $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  von  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und ein  $u \in \text{BV}(U)$ , sodass  $u_{n_k} \rightarrow u$  in  $L^1(U)$  für  $k \rightarrow \infty$ .

Damit können wir nun das folgende Theorem beweisen.

**Theorem 2.16.** Sei  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{BV}(U)$  eine beschränkte Folge. Dann existiert eine Teilfolge  $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  und ein  $u \in \text{BV}(U)$ , sodass  $u_{n_k} \rightharpoonup u$  in  $\text{BV}(U)$  für  $k \rightarrow \infty$ .

*Beweis.* Nach Theorem 2.15 besitzt  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Teilfolge  $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ , die in  $L^1(U)$  gegen ein  $u \in \text{BV}(U)$  konvergiert. Diese Teilfolge ist nach Voraussetzung beschränkt in  $\text{BV}(U)$ , woraus nach Definition der Norm  $\|\cdot\|_{\text{BV}(U)}$  insbesondere folgt, dass  $\sup_{k \in \mathbb{N}} |u_{n_k}|_{\text{BV}(U)} < \infty$ . Somit ist Theorem 2.14 anwendbar und impliziert die schwache Konvergenz von  $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  in  $\text{BV}(U)$  gegen  $u \in \text{BV}(U)$ .  $\square$

### 3 Das kontinuierliche Problem

In diesem Kapitel wollen wir für einen Parameter  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  und eine Funktion  $f \in L^2(\Omega)$  folgendes Minimierungsproblem untersuchen.

**Problem 3.1.** Finde  $u \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ , sodass  $u$  das Funktional

$$E(v) := \frac{\alpha}{2} \|v\|^2 + |v|_{\text{BV}(\Omega)} + \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} - \int_{\Omega} f v \, dx \quad (3.1)$$

unter allen  $v \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$  minimiert.

Dabei ist der Term  $\|v\|_{L^1(\partial\Omega)}$  wohldefiniert, da nach [ABM14, S. 400, Theorem 10.2.1] eine lineare, stetige Abbildung  $T : \text{BV}(\Omega) \rightarrow L^1(\partial\Omega)$  existiert mit  $T(v) = v|_{\partial\Omega}$  für alle  $v \in \text{BV}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ . Wie in Kapitel 1 beschrieben, hat Problem 3.1 für homogene Randdaten die gleichen Minimierer wie das ROF-Modellproblem mit Eingangssignal  $g \in L^2(\Omega)$ , falls  $f = \alpha g$ .

*Bemerkung 3.2.* Für  $d \in \{2, 3\}$  und ein beschränktes Lipschitz-Gebiet  $U \subset \mathbb{R}^d$  ist nach [Bar15b, S. 302, Remark 10.5 (i)] die Einbettung  $\text{BV}(U) \hookrightarrow L^p(U)$  stetig, wenn  $1 \leq p \leq d/(d-1)$ . Damit ist  $\text{BV}(\Omega)$  für das polygonal berandete Lipschitz-Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  Teilmenge von  $L^2(\Omega)$  und die Lösung von Problem 3.1 kann in  $\text{BV}(\Omega)$  gesucht werden. Wir vernachlässigen diese Vereinfachung und erreichen dadurch, dass alle Aussagen im nachfolgenden Abschnitt auch gelten, falls  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  mit  $d \in \mathbb{N}$  ein beschränktes Lipschitz-Gebiet ist.

In den folgenden Abschnitten zeigen wir, dass Problem 3.1 eine eindeutige Lösung  $u \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$  besitzt. Außerdem beschreiben wir, wie  $f$  für eine gegebene Lösung  $u$  konstruiert werden kann und welche Eigenschaften  $u$  dafür erfüllen muss.

#### 3.1 Existenz eines eindeutigen Minimierers

Nach Bemerkung 3.2 kann in diesem Abschnitt  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  für  $d \in \mathbb{N}$  ein beliebiges beschränktes Lipschitz-Gebiet sein. Zunächst zeigen wir, dass Problem 3.1 eine Lösung besitzt. Dafür benötigen wir die folgende Formulierung der Youngschen Ungleichung.

**Lemma 3.3** (Youngsche Ungleichung). *Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$  beliebig. Dann gilt*

$$ab \leq \frac{1}{\varepsilon} a^2 + \frac{\varepsilon}{4} b^2.$$

Außerdem wird die folgende Aussage benötigt, die direkt aus [EG92, S. 183, Theorem 1] folgt, da  $0 \in \text{BV}(\mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega})$  mit  $|0|_{\text{BV}(\mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega})} = 0$  und  $0|_{\partial\Omega} = 0$ .

**Lemma 3.4.** *Sei  $v \in \text{BV}(\Omega)$ . Definiere die Fortsetzung  $\tilde{v}$  von  $v$  für alle  $x \in \mathbb{R}^d$  durch*

$$\tilde{v}(x) := \begin{cases} v(x), & \text{falls } x \in \Omega, \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}. \end{cases}$$

*Dann gilt  $\tilde{v} \in \text{BV}(\mathbb{R}^d)$  und  $|\tilde{v}|_{\text{BV}(\mathbb{R}^d)} = |v|_{\text{BV}(\Omega)} + \|v\|_{L^1(\partial\Omega)}$ .*

**Theorem 3.5** (Existenz einer Lösung). *Problem 3.1 besitzt eine Lösung  $u \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ .*

*Beweis.* Die Beweisidee ist die Anwendung der direkten Methode der Variationsrechnung (cf. [Dac89]) unter Nutzung der in Abschnitt 2.5 aufgeführten Eigenschaften der schwachen Konvergenz in  $\text{BV}(\Omega)$ .

Für alle  $v \in L^2(\Omega)$  gilt mit der Hölderschen Ungleichung und der Youngschen Ungleichung aus Lemma 3.3, dass

$$\int_{\Omega} f v \, dx \leq \|f\| \|v\| \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|^2 + \frac{\alpha}{4} \|v\|^2. \quad (3.2)$$

Die Höldersche Ungleichung impliziert außerdem für alle  $v \in L^2(\Omega) \subseteq L^1(\Omega)$ , dass

$$\|v\|_{L^1(\Omega)} = \|1 \cdot v\|_{L^1(\Omega)} \leq \|1\| \|v\| = \sqrt{|\Omega|} \|v\|. \quad (3.3)$$

Für das Funktional  $E$  aus (3.1) folgt dann mit den Ungleichungen (3.2) und (3.3) für alle  $v \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ , dass

$$\begin{aligned} E(v) &\geq \frac{\alpha}{4} \|v\|^2 + |v|_{\text{BV}(\Omega)} + \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} - \frac{1}{\alpha} \|f\|^2 \\ &\geq \frac{\alpha}{4|\Omega|} \|v\|_{L^1(\Omega)}^2 + |v|_{\text{BV}(\Omega)} + \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} - \frac{1}{\alpha} \|f\|^2 \geq -\frac{1}{\alpha} \|f\|^2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Somit ist  $E$  nach unten beschränkt, was die Existenz einer infimierenden Folge  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$  von  $E$  impliziert, das heißt  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  erfüllt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(u_n) = \inf_{v \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)} E(v).$$

Ungleichung (3.4) impliziert außerdem, dass  $E(u_n) \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ , falls  $|u_n|_{\text{BV}(\Omega)} \rightarrow \infty$  oder  $\|u_n\|_{L^1(\Omega)} \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ . Daraus folgt insbesondere, dass  $E(u_n) \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ , falls  $\|u_n\|_{\text{BV}(\Omega)} \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ . Deshalb muss die Folge  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt in  $\text{BV}(\Omega)$  sein. Nun garantiert Theorem 2.16 die Existenz einer in  $\text{BV}(\Omega)$  schwach konvergenten Teilfolge  $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  von  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit schwachem Grenzwert  $u \in \text{BV}(\Omega)$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Aus der schwachen Konvergenz von  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\text{BV}(\Omega)$  gegen  $u$  folgt nach Definition, dass  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  stark, und damit insbesondere auch schwach, in  $L^1(\Omega)$  gegen  $u$  konvergiert.

Weiterhin folgt aus (3.4), dass  $E(v) \rightarrow \infty$  für  $\|v\| \rightarrow \infty$ . Somit muss  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auch beschränkt sein bezüglich der Norm  $\|\cdot\|$  und besitzt deshalb, wegen der Reflexivität von  $L^2(\Omega)$ , eine Teilfolge (ohne Beschränkung der Allgemeinheit weiterhin bezeichnet mit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ), die in  $L^2(\Omega)$  schwach gegen einen Grenzwert  $\bar{u} \in L^2(\Omega)$  konvergiert. Damit gilt für alle  $w \in L^2(\Omega) \cong L^2(\Omega)^*$  und, da  $L^\infty(\Omega) \subseteq L^2(\Omega)$ , insbesondere auch für alle  $w \in L^\infty(\Omega) \cong L^1(\Omega)^*$ , dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_n w \, dx = \int_{\Omega} \bar{u} w \, dx.$$

Das bedeutet, dass  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auch schwach in  $L^1(\Omega)$  gegen  $\bar{u} \in L^2(\Omega) \subseteq L^1(\Omega)$  konvergiert. Da schwache Grenzwerte eindeutig bestimmt sind, gilt insgesamt  $u = \bar{u} \in L^2(\Omega)$ , das heißt  $u \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ . Nun definieren wir für alle  $n \in \mathbb{N}$  und für alle  $x \in \mathbb{R}^d$  die Fortsetzungen

$$\tilde{u}_n(x) := \begin{cases} u_n(x), & \text{falls } x \in \Omega, \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R}^d \setminus \bar{\Omega} \end{cases} \quad \text{und} \quad \tilde{u}(x) := \begin{cases} u(x), & \text{falls } x \in \Omega, \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R}^d \setminus \bar{\Omega}. \end{cases}$$

### 3 Das kontinuierliche Problem

Dann gilt nach Lemma 3.4 sowohl

$$\begin{aligned} \tilde{u}_n &\in \text{BV}(\mathbb{R}^d) \quad \text{und} \quad |\tilde{u}_n|_{\text{BV}(\mathbb{R}^d)} = |u_n|_{\text{BV}(\Omega)} + \|u_n\|_{L^1(\partial\Omega)} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ als auch} \\ \tilde{u} &\in \text{BV}(\mathbb{R}^d) \quad \text{und} \quad |\tilde{u}|_{\text{BV}(\mathbb{R}^d)} = |u|_{\text{BV}(\Omega)} + \|u\|_{L^1(\partial\Omega)}. \end{aligned}$$

Da  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  infimierende Folge von  $E$  ist, muss die Folge

$$\left(|\tilde{u}_n|_{\text{BV}(\mathbb{R}^d)}\right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(|u_n|_{\text{BV}(\Omega)} + \|u_n\|_{L^1(\partial\Omega)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$$

beschränkt sein. Außerdem folgt aus den Definitionen von  $\tilde{u}$  und  $\tilde{u}_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und der bereits bekannten Eigenschaft  $u_n \rightarrow u$  in  $L^1(\Omega)$  für  $n \rightarrow \infty$ , dass

$$\|\tilde{u}_n - \tilde{u}\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} |\tilde{u}_n - \tilde{u}| \, dx = \int_{\Omega} |u_n - u| \, dx = \|u_n - u\|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty,$$

das heißt  $\tilde{u}_n \rightarrow \tilde{u}$  in  $L^1(\mathbb{R}^d)$  für  $n \rightarrow \infty$ . Insgesamt ist also  $(\tilde{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\text{BV}(\mathbb{R}^d)$ , die in  $L^1(\mathbb{R}^d)$  gegen  $\tilde{u} \in \text{BV}(\mathbb{R}^d) \subseteq L^1(\mathbb{R}^d)$  konvergiert und  $\sup_{n \in \mathbb{N}} |\tilde{u}_n|_{\text{BV}(\mathbb{R}^d)} < \infty$  erfüllt. Somit folgt mit Theorem 2.14

$$\begin{aligned} |u|_{\text{BV}(\Omega)} + \|u\|_{L^1(\partial\Omega)} &= |\tilde{u}|_{\text{BV}(\mathbb{R}^d)} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} |\tilde{u}_n|_{\text{BV}(\mathbb{R}^d)} \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} (|u_n|_{\text{BV}(\Omega)} + \|u_n\|_{L^1(\partial\Omega)}). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Die Funktionen  $\|\cdot\|^2$  und  $-\int_{\Omega} f \cdot dx$  sind auf  $L^2(\Omega)$  stetig und konvex, was impliziert, dass sie schwach unterhalbstetig auf  $L^2(\Omega)$  sind. Da wir bereits wissen, dass  $u_n \rightarrow u$  in  $L^2(\Omega)$  für  $n \rightarrow \infty$ , folgt

$$\frac{\alpha}{2} \|u\|^2 - \int_{\Omega} f u \, dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\alpha}{2} \|u_n\|^2 - \int_{\Omega} f u_n \, dx \right).$$

Damit und mit Ungleichung (3.5) gilt insgesamt

$$\inf_{v \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)} E(v) \leq E(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E(u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(u_n) = \inf_{v \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)} E(v),$$

das heißt  $\min_{v \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)} E(v) = E(u)$ . □

Nachdem wir nun gezeigt haben, dass eine Lösung von Problem 3.1 existiert, können wir aus dem folgenden Theorem unmittelbar die Eindeutigkeit dieser Lösung folgern.

**Theorem 3.6** (Stabilität). *Seien  $u_1, u_2 \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$  die Lösungen von Problem 3.1 mit  $f_1, f_2 \in L^2(\Omega)$  anstelle von  $f$ , das heißt für  $\ell \in \{1, 2\}$  minimiere  $u_\ell$  das Funktional*

$$E_\ell(v) := \frac{\alpha}{2} \|v\|^2 + |v|_{\text{BV}(\Omega)} + \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} - \int_{\Omega} f_\ell v \, dx$$

*unter allen  $v \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ . Dann gilt*

$$\|u_1 - u_2\| \leq \frac{1}{\alpha} \|f_1 - f_2\|.$$

*Beweis.* Wir folgen der Argumentation im Beweis von [Bar15b, S. 304, Theorem 10.6].

Zunächst definieren wir die Funktionale  $F : L^2(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$  und  $G_\ell : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\ell \in \{1, 2\}$ , für alle  $v \in L^2(\Omega)$  durch

$$\begin{aligned} F(v) &:= \begin{cases} |v|_{\text{BV}(\Omega)} + \|v\|_{L^1(\partial\Omega)}, & \text{falls } v \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega), \\ \infty, & \text{falls } v \in L^2(\Omega) \setminus \text{BV}(\Omega) \end{cases} \quad \text{und} \\ G_\ell(v) &:= \frac{\alpha}{2} \|v\|^2 - \int_{\Omega} f_\ell v \, dx. \end{aligned}$$

Damit gilt für  $\ell \in \{1, 2\}$  und alle  $v \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ , dass  $E_\ell(v) = F(v) + G_\ell(v)$ . Für  $\ell \in \{1, 2\}$  ist  $G_\ell$  Fréchet-differenzierbar und die Fréchet-Ableitung  $G'_\ell(v) : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  von  $G_\ell$  an der Stelle  $v \in L^2(\Omega)$  ist für alle  $w \in L^2(\Omega)$  gegeben durch

$$dG_\ell(v; w) = \alpha(v, w) - \int_{\Omega} f_\ell w \, dx = (\alpha v - f_\ell, w).$$

Das Funktional  $F$  ist konvex, unterhalbstetig und es gilt  $F \neq \infty$ . Deshalb ist nach Theorem 2.10 das Subdifferential  $\partial F(\bullet)$  von  $F$  monoton. Damit gilt für alle  $\mu_\ell \in \partial F(u_\ell)$ ,  $\ell \in \{1, 2\}$ , dass

$$(\mu_1 - \mu_2, u_1 - u_2) \geq 0. \quad (3.6)$$

Für  $\ell \in \{1, 2\}$  gilt, dass  $E_\ell$  konvex ist und von  $u_\ell$  in  $\text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$  minimiert wird. Außerdem gilt  $E_\ell \neq \infty$  und  $G_\ell$  ist stetig. Somit gilt nach den Theoremen 2.7 – 2.9, dass

$$0 \in \partial E_\ell(u_\ell) = \partial F(u_\ell) + \partial G_\ell(u_\ell) = \partial F(u_\ell) + \{G'_\ell(u_\ell)\}.$$

Daraus folgt  $-G'_\ell(u_\ell) \in \partial F(u_\ell)$ . Zusammen mit Ungleichung (3.6) impliziert das

$$(-(\alpha u_1 - f_1) - (-(\alpha u_2 - f_2)), u_1 - u_2) \geq 0.$$

Durch Umformen und Anwenden der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung erhalten wir

$$\alpha \|u_1 - u_2\|^2 \leq (f_1 - f_2, u_1 - u_2) \leq \|f_1 - f_2\| \|u_1 - u_2\|.$$

Falls  $\|u_1 - u_2\| = 0$ , gilt die zu zeigende Aussage. Ansonsten führt die Division durch  $\alpha \|u_1 - u_2\| \neq 0$  den Beweis zum Abschluss.  $\square$

Zum Ende dieses Abschnitts beweisen wir, dass der Abstand einer Funktion zu einem Minimierer des Funktional  $E$  durch die Differenz der Werte des Funktional kontrolliert wird. Auch aus diesem Theorem folgt die Eindeutigkeit der nach Theorem 3.5 existierenden Lösung von Problem 3.1.

**Theorem 3.7.** *Sei  $u \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$  Lösung von Problem 3.1. Dann gilt*

$$\frac{\alpha}{2} \|u - v\|^2 \leq E(v) - E(u) \quad \text{für alle } v \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega).$$

*Beweis.* Wir folgen der Argumentation im Beweis von [Bar15b, S. 309, Lemma 10.2].

Wir betrachten die konvexen Funktionale  $F : L^2(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$  und  $G : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei  $F$  wie im Beweis von Theorem 3.6 definiert ist und  $G$  für alle  $v \in L^2(\Omega)$  gegeben ist durch

$$G(v) := \frac{\alpha}{2} \|v\|^2 - \int_{\Omega} f v \, dx.$$

Es gilt  $E(v) = F(v) + G(v)$  für alle  $v \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ . Die Fréchet-Ableitung  $G'(u) : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  von  $G$  an der Stelle  $u \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$  ist für alle  $v \in L^2(\Omega)$  gegeben durch

$$dG(u; v) = \alpha(u, v) - \int_{\Omega} f v \, dx = (\alpha u - f, v).$$

Das impliziert mit wenigen Rechenschritten

$$dG(u; v - u) + \frac{\alpha}{2} \|u - v\|^2 + G(u) = G(v) \quad \text{für alle } v \in L^2(\Omega). \quad (3.7)$$

Da  $u$  der Minimierer von  $E$  ist, erhalten wir mit den Theoremen 2.7 – 2.9 die Aussage

$$0 \in \partial E(u) = \partial F(u) + \{G'(u)\},$$

woraus folgt  $-G'(u) \in \partial F(u)$ . Das ist nach Definition 2.6 äquivalent zu

$$-dG(u; v - u) \leq F(v) - F(u) \quad \text{für alle } v \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega).$$

Für alle  $v \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$  folgt daraus, zusammen mit Gleichung (3.7), dass

$$\frac{\alpha}{2} \|u - v\|^2 + G(u) - G(v) + F(u) = -dG(u; v - u) + F(u) \leq F(v).$$

Da  $E = F + G$  auf  $\text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ , impliziert das die zu zeigende Aussage.  $\square$

### 3.2 Konstruktion eines Eingangssignals zu einer gegebenen Lösung

Für die numerische Untersuchung der primalen-dualen Iteration aus Kapitel 5 ist es sinnvoll, Eingangssignale  $f$  für Problem 3.1 gegeben zu haben, für die der entsprechende gesuchte Minimierer bekannt ist. Die folgende Konstruktion solcher Signale basiert auf einer Aussage von Professor Carstensen.

Sei  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben als Funktion in Polarkoordinaten. Dabei beschränken wir uns auf vom Polarwinkel unabhängige Funktionen, das heißt für alle  $x \in \Omega$  gelte  $u(x) := u_P(|x|)$  für  $u_P : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ . Weiterhin fordern wir  $u_P(r) = 0$  für  $r \geq 1$  und die Existenz der partiellen Ableitung  $\partial_r u_P$  fast überall in  $[0, \infty)$ . Außerdem existiere fast überall in  $[0, \infty)$  die partielle Ableitung des für  $r \in [0, \infty)$  mithilfe einer Funktion  $q : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  definierten Ausdrucks

$$\text{sgn}(\partial_r u_P(r)) := \begin{cases} -1 & \text{für } \partial_r u_P(r) < 0, \\ q(r) & \text{für } \partial_r u_P(r) = 0, \\ 1 & \text{für } \partial_r u_P(r) > 0. \end{cases}$$

Des Weiteren fordern wir  $\text{sgn}(\partial_r u_P(r))/r \rightarrow 0$  für  $r \rightarrow 0$ , damit  $f_P$  in der folgenden Definition stetig in 0 fortgesetzt werden kann. Sei  $f_P : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\alpha$  aus Problem 3.1 gegeben durch

$$f_P(r) := \alpha u_P(r) - \partial_r (\text{sgn}(\partial_r u_P(r))) - \frac{\text{sgn}(\partial_r u_P(r))}{r} \quad \text{für alle } r \in [0, \infty). \quad (3.8)$$

Dann ist  $u$  Lösung von Problem 3.1, wenn das Eingangssignal auf  $\Omega \supseteq \{w \in \mathbb{R}^2 \mid |w| \leq 1\}$  für fast alle  $x \in \Omega$  gegeben ist durch  $f(x) := f_P(|x|)$ .

Für die Experimente in Kapitel 7 wollen wir die garantierte untere Energieschranke aus Theorem 4.9 berechnen können. Da dieses Theorem für das Eingangssignal voraussetzt, dass  $f \in H_0^1(\Omega)$ , müssen wir noch die folgenden Bedingungen an  $u_P$  formulieren. Hinreichend für  $f \in H_0^1(\Omega)$  ist nach Gleichung (3.8), dass  $u_P$ ,  $\partial_r(\text{sgn}(\partial_r u_P))$  und  $\text{sgn}(\partial_r u_P)$  stetig sind und

$$u_P(1) = \partial_r (\text{sgn}(\partial_r u_P(1))) = \text{sgn}(\partial_r u_P(1)) = 0.$$

Mit diesen Einschränkung gilt insbesondere  $u \in H_0^1(\Omega)$ , weshalb die exakte Energie  $E(u)$  nach Bemerkung 2.12 berechnet werden kann durch

$$E(u) = \frac{\alpha}{2} \|u\|^2 + \|u\|_{W^{1,1}(\Omega)} - \int f u \, dx.$$



### 3.2 Konstruktion eines Eingangssignals zu einer gegebenen Lösung

Um also  $E(u)$  berechnen zu können, wird der schwache Gradient  $\nabla u$  von  $u$  benötigt und um die garantierte untere Energieschranke  $E_{\text{GLEB}}$  aus Gleichung (4.12) zu berechnen, wird der schwache Gradient  $\nabla f$  von  $f$  benötigt. Deshalb betrachten wir an dieser Stelle noch kurz die benötigten Zusammenhänge zwischen den partiellen Ableitungen in kartesischen Koordinaten und in Polarkoordinaten für eine hinreichend glatte Funktion  $g_P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Für  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  sei

$$\text{atan2}(x_2, x_1) := \begin{cases} \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right), & \text{wenn } x_1 > 0, \\ \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right) + \pi, & \text{wenn } x_1 < 0, x_2 \geq 0, \\ \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right) - \pi, & \text{wenn } x_1 < 0, x_2 < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{wenn } x_1 = 0, x_2 > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{wenn } x_1 = 0, x_2 < 0, \\ \text{undefiniert}, & \text{wenn } x_1 = x_2 = 0. \end{cases}$$

Ein Argument  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  von  $g_P$  kann dann in Polarkoordinaten charakterisiert werden durch die Länge  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$  und den Winkel  $\varphi = \text{atan2}(x_2, x_1)$ . Mit dieser Notation gelten für die partiellen Ableitungen die Zusammenhänge

$$\partial_{x_1} = \cos(\varphi) \partial_r - \frac{1}{r} \sin(\varphi) \partial_\varphi \quad \text{und} \quad \partial_{x_2} = \sin(\varphi) \partial_r + \frac{1}{r} \cos(\varphi) \partial_\varphi.$$

Ist nun  $g_P$  vom Winkel  $\varphi$  unabhängig, so erhalten wir

$$\nabla g_P = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \partial_r g_P. \quad (3.9)$$

Unter Beachtung der trigonometrischen Zusammenhänge

$$\sin(\arctan(y)) = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} \quad \text{und} \quad \cos(\arctan(y)) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

für alle  $y \in \mathbb{R}$  gilt

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Aus Gleichung (3.9) folgt damit

$$\nabla g_P = \frac{\partial_r g_P}{r} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Zum Bestimmen des Gradienten in kartesischen Koordinaten einer in Polarkoordinaten gegebenen Funktion  $g_P$ , die vom Polarwinkel unabhängig ist, muss also lediglich die partielle Ableitung  $\partial_r g_P$  berechnet werden. Konkrete Beispiele formulieren wir in Kapitel 7.

## 4 Das diskrete Problem

### 4.1 Formulierung

Bevor wir Problem 3.1 diskretisieren, merken wir an, dass  $\text{CR}^1(\mathcal{T}) \subset \text{BV}(\Omega)$ , da

$$|v_{\text{CR}}|_{\text{BV}(\Omega)} = \|\nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}}\|_{L^1(\Omega)} + \sum_{F \in \mathcal{E}(\Omega)} \|[v_{\text{CR}}]_F\|_{L^1(F)} \quad \text{für alle } v_{\text{CR}} \in \text{CR}^1(\mathcal{T}).$$

Dies wird für  $|\mathcal{T}| = 2$  zum Beispiel von [ABM14, S. 404, Example 10.2.1; Bar15b, S. 301, Proposition 10.1] impliziert und kann analog für beliebige reguläre Triangulierungen von  $\Omega$  bewiesen werden. Damit gilt für alle  $v_{\text{CR}} \in \text{CR}^1(\mathcal{T})$  insbesondere

$$|v_{\text{CR}}|_{\text{BV}(\Omega)} + \|v_{\text{CR}}\|_{L^1(\partial\Omega)} = \|\nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}}\|_{L^1(\Omega)} + \sum_{F \in \mathcal{E}} \|[v_{\text{CR}}]_F\|_{L^1(F)}.$$

Um eine nichtkonforme Formulierung von Problem 3.1 zu erhalten, ersetzen wir die Terme  $|\cdot|_{\text{BV}(\Omega)} + \|\cdot\|_{L^1(\partial\Omega)}$  des Funktional  $E$  durch  $\|\nabla_{\text{NC}} \cdot\|_{L^1(\Omega)}$ , das heißt wir vernachlässigen bei der nichtkonformen Formulierung die Terme  $\sum_{F \in \mathcal{E}} \|[v_{\text{CR}}]_F\|_{L^1(F)}$ . Somit erhalten wir das folgende Minimierungsproblem für den Parameter  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  und das Eingangssignal  $f \in L^2(\Omega)$ .

**Problem 4.1.** Finde  $u_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$ , sodass  $u_{\text{CR}}$  das Funktional

$$E_{\text{NC}}(v_{\text{CR}}) := \frac{\alpha}{2} \|v_{\text{CR}}\|^2 + \|\nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}}\|_{L^1(\Omega)} - \int_{\Omega} f v_{\text{CR}} \, dx \quad (4.1)$$

unter allen  $v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  minimiert.

### 4.2 Charakterisierung und Existenz eines eindeutigen Minimierers

In diesem Abschnitt führen wir die Argumente in [Bar15b, S. 313], angepasst für unsere Formulierung in Problem 4.1, detailliert aus. Zunächst zeigen wir, dass Problem 4.1 eine eindeutige Lösung besitzt. Dafür benötigen wir folgendes Lemma.

**Lemma 4.2.** *Das Funktional  $E_{\text{NC}}$  aus Gleichung (4.1) ist stetig bezüglich der Konvergenz in  $L^2(\Omega)$ .*

*Beweis.* Die Folge  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  konvergiere gegen  $v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  bezüglich der Norm  $\|\cdot\|$ . Damit ist  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  insbesondere beschränkt in  $L^2(\Omega)$  und es gilt mit einer binomischen Formel und der umgekehrten Dreiecksungleichung, dass

$$\begin{aligned} \left| \|v_{\text{CR}}\|^2 - \|v_n\|^2 \right| &= \left| \|v_{\text{CR}}\| - \|v_n\| \right| \left( \|v_{\text{CR}}\| + \|v_n\| \right) \\ &\leq \|v_{\text{CR}} - v_n\| \left( \|v_{\text{CR}}\| + \|v_n\| \right) \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Außerdem gilt mit der Hölderschen Ungleichung

$$\left| \int_{\Omega} f(v_{\text{CR}} - v_n) \, dx \right| \leq \|f\| \|v_{\text{CR}} - v_n\| \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Schließlich gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$  und alle  $T \in \mathcal{T}$  mit der inversen Ungleichung (cf. [Bar15b, S. 53, Lemma 3.5]) mit Konstante  $c_T \in \mathbb{R}_+$  und der Hölderschen Ungleichung, dass

$$\|\nabla_{\text{NC}}(v_{\text{CR}} - v_n)\|_{L^1(T)} \leq c_T h_T^{-1} \|v_{\text{CR}} - v_n\|_{L^1(T)} \leq c_T h_T^{-1} \sqrt{|T|} \|v_{\text{CR}} - v_n\|_{L^2(T)}.$$

Damit folgt zusammen mit der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} \left| \|\nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}}\|_{L^1(\Omega)} - \|\nabla_{\text{NC}} v_n\|_{L^1(\Omega)} \right| &\leq \|\nabla_{\text{NC}}(v_{\text{CR}} - v_n)\|_{L^1(\Omega)} \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}} \|\nabla_{\text{NC}}(v_{\text{CR}} - v_n)\|_{L^1(T)} \\ &\leq \max_{T \in \mathcal{T}} \left( c_T h_T^{-1} \sqrt{|T|} \right) \sum_{T \in \mathcal{T}} \|v_{\text{CR}} - v_n\|_{L^2(T)} \\ &= \max_{T \in \mathcal{T}} \left( c_T h_T^{-1} \sqrt{|T|} \right) \|v_{\text{CR}} - v_n\| \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Somit ist  $E_{\text{NC}}$  Summe von drei Termen, die bezüglich der Norm  $\|\cdot\|$  folgenstetig sind, und deshalb stetig bezüglich der Konvergenz in  $L^2(\Omega)$ .  $\square$

**Theorem 4.3.** *Es existiert eine eindeutige Lösung  $u_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  von Problem 4.1.*

*Beweis.* Mit analogen Abschätzungen wie in (3.4) erhalten wir für das Funktional  $E_{\text{NC}}$  aus Problem 4.1 für alle  $v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T}) \subset L^2(\Omega)$  die Ungleichung

$$E_{\text{NC}}(v_{\text{CR}}) \geq \frac{\alpha}{4} \|v_{\text{CR}}\|^2 + \|\nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}}\|_{L^1(\Omega)} - \frac{1}{\alpha} \|f\|^2 \geq -\frac{1}{\alpha} \|f\|^2. \quad (4.2)$$

Somit ist  $E_{\text{NC}}$  nach unten beschränkt und es existiert eine infimierende Folge  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  von  $E_{\text{NC}}$ . Ungleichung (4.2) impliziert weiterhin, dass diese Folge beschränkt bezüglich der Norm  $\|\cdot\|$  sein muss. Der endlichdimensionale Raum  $\text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  ist, ausgestattet mit der Norm  $\|\cdot\|$ , ein Banachraum und damit reflexiv. Demnach existiert eine in  $\text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  schwach konvergente Teilfolge von  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Da  $\text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  endlichdimensional ist, konvergiert diese sogar stark in  $L^2(\Omega)$ . Weil  $\text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  ein Banachraum und damit abgeschlossen bezüglich der Konvergenz in  $\|\cdot\|$  ist, gilt für den Grenzwert  $u_{\text{CR}}$  dieser Teilfolge, dass  $u_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$ . Nach Lemma 4.2 ist  $E_{\text{NC}}$  stetig bezüglich der Konvergenz in  $L^2(\Omega)$ , was impliziert, dass  $u_{\text{CR}}$  Minimierer von  $E_{\text{NC}}$  in  $\text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  sein muss. Dieser Minimierer  $u_{\text{CR}}$  ist eindeutig, da  $E_{\text{NC}}$  strikt konvex ist.  $\square$

Als Nächstes wollen wir äquivalente Charakterisierungen der eindeutigen Lösung von Problem 4.1 beweisen, die von Professor Carstensen formuliert wurden. Dazu leiten wir zunächst ein zu Problem 4.1 äquivalentes Minimaxproblem nach [Roc70, Section 36] her. Wir betrachten die konvexe Menge

$$K := \{\Lambda \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^2) \mid |\Lambda(\cdot)| \leq 1 \text{ fast überall in } \Omega\}$$

und das dazugehörige Indikatorfunktional  $I_K : L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , das für  $\Lambda \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^2)$  gegeben ist durch

$$I_K(\Lambda) := \begin{cases} \infty, & \text{falls } \Lambda \notin K, \\ 0, & \text{falls } \Lambda \in K. \end{cases}$$

Aufgrund der Konvexität von  $K$  ist  $I_K$  konvex. Für  $v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  und  $\Lambda_0 \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2) \subset L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^2)$  können wir damit die Sattelfunktion  $L : \text{CR}_0^1(\mathcal{T}) \times P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2) \rightarrow [-\infty, \infty]$  nach [Roc70, Section 33] definieren durch

$$L(v_{\text{CR}}, \Lambda_0) := \int_{\Omega} \Lambda_0 \cdot \nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}} \, dx + \frac{\alpha}{2} \|v_{\text{CR}}\|^2 - \int_{\Omega} f v_{\text{CR}} \, dx - I_K(\Lambda_0). \quad (4.3)$$

#### 4 Das diskrete Problem

Nun wählen wir  $v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  beliebig. Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung gilt für alle  $\Lambda_0 \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2) \cap K$ , dass

$$\int_{\Omega} \Lambda_0 \cdot \nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}} \, dx \leq \int_{\Omega} |\Lambda_0| |\nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}}| \, dx \leq \|\nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}}\|_{L^1(\Omega)}.$$

Daraus folgt

$$\sup_{\Lambda_0 \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2) \cap K} L(v_{\text{CR}}, \Lambda_0) \leq E_{\text{NC}}(v_{\text{CR}}). \quad (4.4)$$

Weiterhin gilt, wenn wir  $\Lambda_0 \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2) \cap K$  mit der Signumfunktion aus Gleichung (2.1) elementweise auf allen  $T \in \mathcal{T}$  definieren durch  $\Lambda_0(x) \in \text{sign}(\nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}}(x))$  für alle  $x \in \text{int}(T)$ , dass  $L(v_{\text{CR}}, \Lambda_0) = E_{\text{NC}}(v_{\text{CR}})$  und deshalb auch

$$E_{\text{NC}}(v_{\text{CR}}) \leq \sup_{\Lambda_0 \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2) \cap K} L(v_{\text{CR}}, \Lambda_0). \quad (4.5)$$

Außerdem ist  $L(v_{\text{CR}}, \Lambda_0) > -\infty$  genau dann, wenn  $\Lambda_0 \in K$ . Damit folgt aus den Ungleichungen (4.4) und (4.5) insgesamt

$$E_{\text{NC}}(v_{\text{CR}}) = \sup_{\Lambda_0 \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2) \cap K} L(v_{\text{CR}}, \Lambda_0) = \sup_{\Lambda_0 \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)} L(v_{\text{CR}}, \Lambda_0).$$

Wenn also das folgende Minimaxproblem 4.4 eine Lösung  $(\tilde{u}_{\text{CR}}, \bar{\Lambda}_0) \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T}) \times P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)$  hat, dann löst die Funktion  $\tilde{u}_{\text{CR}}$  Problem 4.1.

**Problem 4.4.** Finde  $(\tilde{u}_{\text{CR}}, \bar{\Lambda}_0) \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T}) \times P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)$ , sodass

$$L(\tilde{u}_{\text{CR}}, \bar{\Lambda}_0) = \inf_{v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})} \sup_{\Lambda_0 \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)} L(v_{\text{CR}}, \Lambda_0).$$

**Lemma 4.5.** *Es existiert eine Lösung  $(\tilde{u}_{\text{CR}}, \bar{\Lambda}_0) \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T}) \times (P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2) \cap K)$  von Problem 4.4.*

*Beweis.* Die Sattelfunktion  $L$  aus Gleichung (4.3) ist, wenn ihre zweite Komponente in  $P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2) \cap K$  fixiert ist, in ihrer ersten Komponente eine konvexe, unterhalbstetige, auf  $\text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  reellwertige Funktion und in ihrer zweiten Komponente eine konkave, oberhalbstetige, auf  $P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2) \cap K$  reellwertige Funktion. Somit ist  $L$  in beiden Komponenten abgeschlossen nach [Roc70, S. 52, 308]. Insgesamt ist  $L$  damit eine konvex-konkave, propere und abgeschlossene Funktion nach [Roc70, S. 349, 362 f.], deren effektiver Definitionsbereich nach [Roc70, S. 362] die Menge  $\text{CR}_0^1(\mathcal{T}) \times (P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2) \cap K)$  ist. Unter Beachtung der Isomorphie von  $\text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  zu  $\mathbb{R}^{|\mathcal{E}(\Omega)|}$  und der Isomorphie von  $P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)$  zu  $\mathbb{R}^{2|\mathcal{T}|}$ , folgt aus [Roc70, S. 397, Theorem 37.6] die Existenz eines Sattelpunkts  $(\tilde{u}_{\text{CR}}, \bar{\Lambda}_0) \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T}) \times (P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2) \cap K)$  von  $L$  nach [Roc70, S. 380]. Für diesen impliziert [Roc70, S. 380, Lemma 36.2], dass

$$\sup_{\Lambda_0 \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)} \inf_{v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})} L(v_{\text{CR}}, \Lambda_0) = L(\tilde{u}_{\text{CR}}, \bar{\Lambda}_0) = \inf_{v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})} \sup_{\Lambda_0 \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)} L(v_{\text{CR}}, \Lambda_0).$$

Somit löst  $(\tilde{u}_{\text{CR}}, \bar{\Lambda}_0) \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T}) \times (P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2) \cap K)$  Problem 4.4.  $\square$

Nachdem diese Vorbereitungen abgeschlossen sind, können wir nun folgendes Theorem beweisen.

**Theorem 4.6.** *Für eine Funktion  $\tilde{u}_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  sind die folgenden drei Aussagen äquivalent.*

(i) Problem 4.1 wird von  $\tilde{u}_{\text{CR}}$  gelöst.

(ii) Es existiert ein  $\bar{\Lambda}_0 \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)$  mit  $|\bar{\Lambda}_0(\cdot)| \leq 1$  fast überall in  $\Omega$ , sodass

$$\bar{\Lambda}_0(\cdot) \cdot \nabla_{\text{NC}} \tilde{u}_{\text{CR}}(\cdot) = |\nabla_{\text{NC}} \tilde{u}_{\text{CR}}(\cdot)| \quad \text{fast überall in } \Omega \quad (4.6)$$

und

$$(\bar{\Lambda}_0, \nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}}) = (f - \alpha \tilde{u}_{\text{CR}}, v_{\text{CR}}) \quad \text{für alle } v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T}). \quad (4.7)$$

(iii) Für alle  $v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  gilt

$$(f - \alpha \tilde{u}_{\text{CR}}, v_{\text{CR}} - \tilde{u}_{\text{CR}}) \leq \|\nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}}\|_{L^1(\Omega)} - \|\nabla_{\text{NC}} \tilde{u}_{\text{CR}}\|_{L^1(\Omega)}. \quad (4.8)$$

*Beweis.* Sei  $\tilde{u}_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$ .

(i)  $\Rightarrow$  (ii). Sei  $\tilde{u}_{\text{CR}}$  Lösung von Problem 4.1. Nach Lemma 4.5 existiert eine Lösung  $(\hat{u}_{\text{CR}}, \bar{\Lambda}_0) \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T}) \times (P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2) \cap K)$  von Problem 4.4. Außerdem wissen wir, dass damit  $\hat{u}_{\text{CR}}$  Lösung von Problem 4.1 ist. Daraus folgt, da nach Theorem 4.3 die Lösung von Problem 4.1 eindeutig ist, dass  $\hat{u}_{\text{CR}} = \tilde{u}_{\text{CR}}$  in  $\text{CR}_0^1(\mathcal{T})$ . Weiterhin wissen wir aus dem Beweis von Lemma 4.5, dass  $(\tilde{u}_{\text{CR}}, \bar{\Lambda}_0)$  Sattelpunkt der Funktion  $L$  aus Gleichung (4.3) ist. Das bedeutet nach [Roc70, S. 380] insbesondere, dass  $\tilde{u}_{\text{CR}}$  Minimierer von  $L(\cdot, \bar{\Lambda}_0)$  in  $\text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  und  $\bar{\Lambda}_0$  Maximierer von  $L(\tilde{u}_{\text{CR}}, \cdot)$  in  $P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)$  ist. Mit dieser Erkenntnis können wir nun die entsprechenden Optimalitätsbedingungen diskutieren. Zunächst gilt, da  $L(\tilde{u}_{\text{CR}}, \cdot) : P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2) \rightarrow [-\infty, \infty)$  konkav und  $\bar{\Lambda}_0$  Maximierer von  $L(\tilde{u}_{\text{CR}}, \cdot)$  in  $P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)$  ist, dass das konvexe Funktional  $-L(\tilde{u}_{\text{CR}}, \cdot) : P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2) \rightarrow (-\infty, \infty]$  von  $\bar{\Lambda}_0$  in  $P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)$  minimiert wird. Nach den Theoremen 2.7 – 2.9 gilt somit

$$0 \in \partial(-L(\tilde{u}_{\text{CR}}, \cdot))(\bar{\Lambda}_0) = \{-(\nabla_{\text{NC}} \tilde{u}_{\text{CR}}, \cdot)\} + \partial I_K(\bar{\Lambda}_0).$$

Äquivalent zu dieser Aussage ist, dass  $(\nabla_{\text{NC}} \tilde{u}_{\text{CR}}, \cdot) \in \partial I_K(\bar{\Lambda}_0)$ . Da  $\bar{\Lambda}_0 \in K$ , folgt mit Definition 2.6, dass für alle  $\Lambda_0 \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)$  gilt

$$(\nabla_{\text{NC}} \tilde{u}_{\text{CR}}, \Lambda_0 - \bar{\Lambda}_0) \leq I_K(\Lambda_0) - I_K(\bar{\Lambda}_0) = I_K(\Lambda_0).$$

Falls  $\Lambda_0 \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2) \cap K$ , folgt insbesondere

$$\begin{aligned} (\nabla_{\text{NC}} \tilde{u}_{\text{CR}}, \Lambda_0 - \bar{\Lambda}_0) &\leq 0, \quad \text{also} \\ (\nabla_{\text{NC}} \tilde{u}_{\text{CR}}, \Lambda_0) &\leq (\nabla_{\text{NC}} \tilde{u}_{\text{CR}}, \bar{\Lambda}_0). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Sei nun  $\Lambda_0 \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2) \cap K$  elementweise auf allen  $T \in \mathcal{T}$  durch  $\Lambda_0(x) \in \text{sign}(\nabla_{\text{NC}} \tilde{u}_{\text{CR}}(x))$  definiert für alle  $x \in \text{int}(T)$ . Mit dieser Wahl von  $\Lambda_0$ , Ungleichung (4.9), der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und  $\bar{\Lambda}_0 \in K$  erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla_{\text{NC}} \tilde{u}_{\text{CR}}| \, dx &= \int_{\Omega} \nabla_{\text{NC}} \tilde{u}_{\text{CR}} \cdot \Lambda_0 \, dx \leq \int_{\Omega} \nabla_{\text{NC}} \tilde{u}_{\text{CR}} \cdot \bar{\Lambda}_0 \, dx \\ &\leq \int_{\Omega} |\nabla_{\text{NC}} \tilde{u}_{\text{CR}}| |\bar{\Lambda}_0| \, dx \leq \int_{\Omega} |\nabla_{\text{NC}} \tilde{u}_{\text{CR}}| \, dx, \quad \text{das heißt} \\ \int_{\Omega} |\nabla_{\text{NC}} \tilde{u}_{\text{CR}}| \, dx &= \int_{\Omega} \nabla_{\text{NC}} \tilde{u}_{\text{CR}} \cdot \bar{\Lambda}_0 \, dx \quad \text{beziehungsweise} \\ \sum_{T \in \mathcal{T}} |T| |(\nabla_{\text{NC}} \tilde{u}_{\text{CR}})_T| &= \sum_{T \in \mathcal{T}} |T| (\nabla_{\text{NC}} \tilde{u}_{\text{CR}} \cdot \bar{\Lambda}_0)_T. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Außerdem gilt für alle  $T \in \mathcal{T}$  mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und  $\bar{\Lambda}_0 \in K$ , dass

$$(\nabla_{\text{NC}} \tilde{u}_{\text{CR}} \cdot \bar{\Lambda}_0)_T \leq |(\nabla_{\text{NC}} \tilde{u}_{\text{CR}})_T| |\bar{\Lambda}_0|_T \leq |(\nabla_{\text{NC}} \tilde{u}_{\text{CR}})_T|.$$

#### 4 Das diskrete Problem

Mit Gleichung (4.10) folgt daraus für alle  $T \in \mathcal{T}$ , dass  $(\nabla_{\text{NC}} \tilde{u}_{\text{CR}} \cdot \bar{\Lambda}_0)|_T = |(\nabla_{\text{NC}} \tilde{u}_{\text{CR}})|_T|$ , das heißt fast überall in  $\Omega$  gilt  $\bar{\Lambda}_0(\cdot) \cdot \nabla_{\text{NC}} \tilde{u}_{\text{CR}}(\cdot) = |\nabla_{\text{NC}} \tilde{u}_{\text{CR}}(\cdot)|$ . Damit ist Gleichung (4.6) gezeigt. Als Nächstes betrachten wir das reellwertige Funktional  $L(\cdot, \bar{\Lambda}_0) : \text{CR}_0^1(\mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}$ . Es ist Fréchet-differenzierbar mit

$$dL(\cdot, \bar{\Lambda}_0)(\tilde{u}_{\text{CR}}; v_{\text{CR}}) = \int_{\Omega} \bar{\Lambda}_0 \cdot \nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}} \, dx + \alpha(\tilde{u}_{\text{CR}}, v_{\text{CR}}) - \int_{\Omega} f v_{\text{CR}} \, dx$$

für alle  $v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$ . Da  $\tilde{u}_{\text{CR}}$  Minimierer von  $L(\cdot, \bar{\Lambda}_0)$  in  $\text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  ist, gilt nach Theorem 2.4, dass  $0 = dL(\cdot, \bar{\Lambda}_0)(\tilde{u}_{\text{CR}}; v_{\text{CR}})$  für alle  $v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$ . Diese Bedingung ist für alle  $v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  äquivalent zu  $(\bar{\Lambda}_0, \nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}}) = (f - \alpha \tilde{u}_{\text{CR}}, v_{\text{CR}})$ . Somit ist auch Gleichung (4.7) gezeigt.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii). Die Funktion  $\bar{\Lambda}_0 \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)$  erfülle  $|\bar{\Lambda}_0(\cdot)| \leq 1$  fast überall in  $\Omega$  sowie die Gleichungen (4.6) und (4.7). Sei  $v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$ . Mit den Gleichungen (4.7) und (4.6) gilt

$$\begin{aligned} (f - \alpha \tilde{u}_{\text{CR}}, v_{\text{CR}} - \tilde{u}_{\text{CR}}) &= (\bar{\Lambda}_0, \nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}}) - (\bar{\Lambda}_0, \nabla_{\text{NC}} \tilde{u}_{\text{CR}}) \\ &= \int_{\Omega} \bar{\Lambda}_0 \cdot \nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}} \, dx - \int_{\Omega} |\nabla_{\text{NC}} \tilde{u}_{\text{CR}}| \, dx. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Weiterhin gilt mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und  $|\bar{\Lambda}_0(\cdot)| \leq 1$  fast überall in  $\Omega$ , dass

$$\int_{\Omega} \bar{\Lambda}_0 \cdot \nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}} \, dx \leq \int_{\Omega} |\bar{\Lambda}_0| |\nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}}| \, dx \leq \int_{\Omega} |\nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}}| \, dx.$$

Zusammen mit Gleichung (4.11) folgt daraus Ungleichung (4.8).

(iii)  $\Rightarrow$  (i). Es gelte Ungleichung (4.8) für alle  $v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$ , also

$$(f - \alpha \tilde{u}_{\text{CR}}, v_{\text{CR}} - \tilde{u}_{\text{CR}}) \leq \|\nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}}\|_{L^1(\Omega)} - \|\nabla_{\text{NC}} \tilde{u}_{\text{CR}}\|_{L^1(\Omega)}.$$

Nach Theorem 4.3 existiert eine eindeutige Lösung  $u_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  von Problem 4.1. Wir haben bereits gezeigt, dass somit für alle  $v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  gilt

$$(f - \alpha u_{\text{CR}}, v_{\text{CR}} - u_{\text{CR}}) \leq \|\nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}}\|_{L^1(\Omega)} - \|\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}\|_{L^1(\Omega)}.$$

Um nun zu beweisen, dass  $\tilde{u}_{\text{CR}}$  Problem 4.1 löst, genügt es  $\tilde{u}_{\text{CR}} = u_{\text{CR}}$  in  $\text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  zu zeigen. Es gilt

$$\begin{aligned} (f - \alpha u_{\text{CR}}, \tilde{u}_{\text{CR}} - u_{\text{CR}}) &\leq \|\nabla_{\text{NC}} \tilde{u}_{\text{CR}}\|_{L^1(\Omega)} - \|\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}\|_{L^1(\Omega)} \quad \text{und} \\ (f - \alpha \tilde{u}_{\text{CR}}, u_{\text{CR}} - \tilde{u}_{\text{CR}}) &\leq \|\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}\|_{L^1(\Omega)} - \|\nabla_{\text{NC}} \tilde{u}_{\text{CR}}\|_{L^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Die Addition dieser Ungleichungen impliziert

$$\alpha \|\tilde{u}_{\text{CR}} - u_{\text{CR}}\|^2 = (-\alpha u_{\text{CR}}, \tilde{u}_{\text{CR}} - u_{\text{CR}}) + (-\alpha \tilde{u}_{\text{CR}}, u_{\text{CR}} - \tilde{u}_{\text{CR}}) \leq 0.$$

Da  $\alpha > 0$ , folgt daraus  $\|\tilde{u}_{\text{CR}} - u_{\text{CR}}\|^2 = 0$ , also  $\tilde{u}_{\text{CR}} = u_{\text{CR}}$  in  $\text{CR}_0^1(\mathcal{T})$ .  $\square$

Zum Schluss dieses Abschnitts wollen wir noch zwei Bemerkungen von Professor Carstensen erwähnen und kurz deren Gültigkeit begründen. Die erste Bemerkung ist eine äquivalente Charakterisierung der dualen Variable  $\bar{\Lambda}_0 \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)$  aus Theorem 4.6 zur diskreten Lösung  $u_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  von Problem 4.1.

*Bemerkung 4.7.* Dass  $\bar{\Lambda}_0 \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)$  fast überall in  $\Omega$  Gleichung (4.6) und  $|\bar{\Lambda}_0(\cdot)| \leq 1$  erfüllt, ist äquivalent zu der Bedingung  $\bar{\Lambda}_0(x) \in \text{sign}(\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}(x))$  für alle  $x \in \text{int}(T)$  für alle  $T \in \mathcal{T}$ .

*Beweis.* Dass die genannte Bedingung hinreichend ist, folgt direkt aus der Definition der Signumfunktion. Ihre Notwendigkeit folgt aus der folgenden Beobachtung. Da  $|\bar{\Lambda}_0(\cdot)| \leq 1$  fast überall in  $\Omega$ , ist Gleichung (4.6) eine Cauchy-Schwarzsche Ungleichung, bei der sogar Gleichheit gilt. Dies ist genau dann der Fall, wenn  $\bar{\Lambda}_0(\cdot)$  und  $\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}(\cdot)$  fast überall in  $\Omega$  linear abhängig sind.  $\square$

Daraus können wir folgern, unter welchen Umständen die duale Variable  $\bar{\Lambda}_0$  auf einem Dreieck  $T \in \mathcal{T}$  eindeutig bestimmt ist.

*Bemerkung 4.8.* Falls  $\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}} \neq 0$  auf  $T \in \mathcal{T}$ , gilt nach Definition der Signumfunktion, dass  $\bar{\Lambda}_0 = \nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}} / |\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}|$  eindeutig bestimmt ist auf  $T$ . Im Allgemeinen ist  $\bar{\Lambda}_0$  allerdings nicht eindeutig bestimmbar. Betrachten wir zum Beispiel  $f \equiv 0$  in Problem 4.1 mit eindeutiger Lösung  $u_{\text{CR}} \equiv 0$  fast überall in  $\Omega$ . Dann erfüllt nach der diskreten Helmholtz Zerlegung [Car09b, S. 193, Theorem 3.32] die Wahl  $\bar{\Lambda}_0 := \text{Curl } v_{\text{C}}$  für ein beliebiges  $v_{\text{C}} \in S^1(\mathcal{T})$  mit  $|\text{Curl } v_{\text{C}}| \leq 1$  die Charakterisierung (ii) aus Theorem 4.6.

### 4.3 Verfeinerungsindikator und garantierte Energieschranken

Professor Carstensen stellte für die numerischen Untersuchungen eine Aussage über eine garantierte untere Energieschranke und einen Verfeinerungsindikator zur adaptiven Netzverfeinerung zur Verfügung, die wir in diesem Abschnitt aufführen wollen.

**Theorem 4.9** (Garantierte untere Energieschranke). *Sei  $\Omega$  konvex,  $f \in H_0^1(\Omega)$  das Eingangssignal für Problem 3.1 mit Lösung  $u \in H_0^1(\Omega)$  sowie für Problem 4.1 mit Lösung  $u_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\Omega)$ . Dann gilt*

$$E_{\text{NC}}(u_{\text{CR}}) + \frac{\alpha}{2} \|u - u_{\text{CR}}\|^2 - \frac{\kappa_{\text{CR}}}{\alpha} \|h_{\mathcal{T}}(f - \alpha u_{\text{CR}})\| \|\nabla f\| \leq E(u).$$

Dabei ist die Konstante  $\kappa_{\text{CR}} := \sqrt{1/48 + 1/j_{1,1}^2}$  mit der kleinsten positiven Nullstelle  $j_{1,1}$  der Bessel-Funktion erster Art. Insbesondere gilt dann für

$$E_{\text{GLEB}} := E_{\text{NC}}(u_{\text{CR}}) - \frac{\kappa_{\text{CR}}}{\alpha} \|h_{\mathcal{T}}(f - \alpha u_{\text{CR}})\| \|\nabla f\|, \quad (4.12)$$

dass  $E_{\text{NC}}(u_{\text{CR}}) \geq E_{\text{GLEB}}$  und  $E(u) \geq E_{\text{GLEB}}$ .

**Definition 4.10** (Verfeinerungsindikator). Für  $d \in \mathbb{N}$  (in dieser Arbeit stets  $d = 2$ ) und  $0 < \gamma \leq 1$  definieren wir für alle  $T \in \mathcal{T}$  und  $u_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  die Funktionen

$$\begin{aligned} \eta_{\text{V}}(T) &:= |T|^{2/d} \|f - \alpha u_{\text{CR}}\|_{L^2(T)}^2 \quad \text{und} \\ \eta_{\text{J}}(T) &:= |T|^{\gamma/d} \sum_{F \in \mathcal{E}(T)} \| [u_{\text{CR}}]_F \|_{L^1(F)}. \end{aligned}$$

Damit definieren wir den Verfeinerungsindikator  $\eta := \sum_{T \in \mathcal{T}} \eta(T)$ , wobei

$$\eta(T) := \eta_{\text{V}}(T) + \eta_{\text{J}}(T) \quad \text{für alle } T \in \mathcal{T}. \quad (4.13)$$

Darüber hinaus können wir eine garantierte obere Energieschranke formulieren. Dabei nutzen wir den Operator  $J_1 : \text{CR}_0^1(\mathcal{T}) \rightarrow P_1(\mathcal{T}) \cap C_0(\Omega)$  aus [CH18, Section 4], wobei  $J_1 v_{\text{CR}}$  für eine Funktion  $v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  in allen Innenknoten  $z \in \mathcal{N}(\Omega)$  definiert ist durch

$$J_1 v_{\text{CR}}(z) := |\mathcal{T}(z)|^{-1} \sum_{T \in \mathcal{T}(z)} v_{\text{CR}}|_T(z). \quad (4.14)$$

Da für die Lösung  $u$  von Problem 3.1 und die Lösung  $u_{\text{CR}}$  von Problem 4.1 gilt

$$E(u) \leq E(J_1 u_{\text{CR}}) = E_{\text{NC}}(J_1 u_{\text{CR}}), \quad (4.15)$$

wählen wir  $E_{\text{NC}}(J_1 u_{\text{CR}})$  als garantierte obere Energieschranke.

# 5 Iterative Lösung

## 5.1 Primale-duale Iteration

In diesen Abschnitt präsentieren wir ein iteratives Verfahren, mit dem wir Problem 4.1 numerisch lösen möchten. Wir nutzen die primale-duale Iteration [Bar15b, S. 314, Algorithm 10.1] unter Beachtung von [Bar15b, S. 314, Remark 10.11]. Details dazu und weitere Referenzen finden sich in [Bar12; Bar15b, S. 118-121]. Angepasst an unser Problem und die Notation dieser Arbeit lautet der Algorithmus wie folgt.

**Algorithmus 5.1** (Primale-duale Iteration).

**Input:**  $(u_0, \Lambda_0) \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T}) \times P_0(\mathcal{T}; \overline{B_{\mathbb{R}^2}})$ ,  $\tau > 0$

Initialisiere  $v_0 := 0$  in  $\text{CR}_0^1(\mathcal{T})$ .

**for**  $j = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned}\tilde{u}_j &:= u_{j-1} + \tau v_{j-1}, \\ \Lambda_j &:= \frac{\Lambda_{j-1} + \tau \nabla_{\text{NC}} \tilde{u}_j}{\max\{1, |\Lambda_{j-1} + \tau \nabla_{\text{NC}} \tilde{u}_j|\}},\end{aligned}\tag{5.1}$$

bestimme  $u_j \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  als Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tau} a_{\text{NC}}(u_j, \cdot) + \alpha(u_j, \cdot) &= \frac{1}{\tau} a_{\text{NC}}(u_{j-1}, \cdot) + (f, \cdot) - (\Lambda_j, \nabla_{\text{NC}} \cdot) \text{ in } \text{CR}_0^1(\mathcal{T}), \\ v_j &:= \frac{u_j - u_{j-1}}{\tau}.\end{aligned}\tag{5.2}$$

**Output:** Folge  $(u_j, \Lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$  in  $\text{CR}_0^1(\mathcal{T}) \times P_0(\mathcal{T}; \overline{B_{\mathbb{R}^2}})$

*Bemerkung 5.2.* Mit den kantenorientierten Crouzeix-Raviart-Basisfunktionen  $\{\psi_E \mid E \in \mathcal{E}\}$  aus Abschnitt 2.2 können wir die Steifigkeitsmatrix  $A \in \mathbb{R}^{|\mathcal{E}| \times |\mathcal{E}|}$  und die Massesmatrix  $M \in \mathbb{R}^{|\mathcal{E}| \times |\mathcal{E}|}$  für alle  $k, \ell \in \{1, 2, \dots, |\mathcal{E}|\}$  definieren durch

$$A_{k\ell} := a_{\text{NC}}(\psi_{E_k}, \psi_{E_\ell}) \quad \text{und} \quad M_{k\ell} := (\psi_{E_k}, \psi_{E_\ell}).$$

Außerdem definieren wir mit  $u_{j-1}$  und  $\Lambda_j$  aus Algorithmus 5.1 den Vektor  $b \in \mathbb{R}^{|\mathcal{E}|}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  durch

$$b_k := \left( \frac{1}{\tau} \nabla_{\text{NC}} u_{j-1} - \Lambda_j, \nabla_{\text{NC}} \psi_{E_k} \right) + (f, \psi_{E_k}).$$

Sei nun  $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \dots, E_{|\mathcal{E}|}\}$  und sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $\mathcal{E}(\Omega) := \{E_1, E_2, \dots, E_{|\mathcal{E}(\Omega)|}\}$ . Dann ist  $J := \{|\mathcal{E}(\Omega)| + 1, |\mathcal{E}(\Omega)| + 2, \dots, |\mathcal{E}|\}$  die Menge der Indizes der Randkanten in  $\mathcal{E}$ . Damit definieren wir die Matrix  $\bar{A} \in \mathbb{R}^{|\mathcal{E}(\Omega)| \times |\mathcal{E}(\Omega)|}$ , die durch Streichen der Zeilen und Spalten von  $A$  mit den Indizes aus  $J$  entsteht, die Matrix  $\bar{M} \in \mathbb{R}^{|\mathcal{E}(\Omega)| \times |\mathcal{E}(\Omega)|}$ , die ebenso aus  $M$  hervorgeht und den Vektor  $\bar{b} \in \mathbb{R}^{|\mathcal{E}(\Omega)|}$ , der durch Streichen der Komponenten von  $b$  mit Indizes in  $J$  entsteht. Weiterhin sei  $x \in \mathbb{R}^{|\mathcal{E}(\Omega)|}$ , wobei  $x_k$  für alle  $k \in \{1, 2, \dots, |\mathcal{E}(\Omega)|\}$  der Koeffizient der Lösung  $u_j \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  des Gleichungssystems (5.2) zur  $k$ -ten Basisfunktion von  $\text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  sei, das heißt es gelte

$$u_j = \sum_{k=1}^{|\mathcal{E}(\Omega)|} x_k \psi_{E_k}.$$



Da wir das Gleichungssystem (5.2) in  $\text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  lösen, lässt sich somit  $u_j$  durch Lösen einer Matrixgleichung nach  $x$  bestimmen. Diese lautet

$$\left(\frac{1}{\tau}\bar{A} + \alpha\bar{M}\right)x = \bar{b}. \quad (5.3)$$

## 5.2 Konvergenz der Iteration

In diesen Abschnitt beweisen wir die Konvergenz der Iterate von Algorithmus 5.1 gegen die Lösung von Problem 4.1. Dabei bedienen wir uns unter anderem der äquivalenten Charakterisierungen aus Theorem 4.6.

**Theorem 5.3.** *Sei  $u_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  Lösung von Problem 4.1 und  $\bar{\Lambda}_0 \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)$  erfülle  $|\bar{\Lambda}_0(\cdot)| \leq 1$  fast überall in  $\Omega$  sowie Gleichung (4.6) und Gleichung (4.7) aus Theorem 4.6 mit  $\tilde{u}_{\text{CR}} = u_{\text{CR}}$ . Falls  $\tau \in (0, 1]$ , dann konvergieren die Iterate  $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$  von Algorithmus 5.1 in  $L^2(\Omega)$  gegen  $u_{\text{CR}}$ .*

*Beweis.* Der Beweis folgt einer Skizze von Professor Carstensen.

Sei  $j \in \mathbb{N}$ . Seien weiterhin  $u_0$ ,  $\Lambda_0$  und  $v_0$  sowie  $\tilde{u}_j$ ,  $\Lambda_j$ ,  $u_j$  und  $v_j$  definiert wie in Algorithmus 5.1. Außerdem definieren wir  $\mu_j := \max\{1, |\Lambda_{j-1} + \tau \nabla_{\text{NC}} \tilde{u}_j|\}$  und für alle  $k \in \mathbb{N}_0$  die Abkürzungen  $e_k := u_{\text{CR}} - u_k$ ,  $E_k := \bar{\Lambda}_0 - \Lambda_k$ . Dabei nutzen wir die Konvention  $e_{-1} := e_0$ . Wir testen zunächst (5.2) mit  $e_j$  und formen das Resultat um. Damit erhalten wir

$$a_{\text{NC}}(v_j, e_j) + \alpha(u_j, e_j) + (\Lambda_j, \nabla_{\text{NC}} e_j) = (f, e_j).$$

Zusammen mit Gleichung (4.7) folgt daraus

$$a_{\text{NC}}(v_j, e_j) = \alpha(u_{\text{CR}} - u_j, e_j) + (\bar{\Lambda}_0 - \Lambda_j, \nabla_{\text{NC}} e_j) = \alpha \|e_j\|^2 + (E_j, \nabla_{\text{NC}} e_j). \quad (5.4)$$

Als Nächstes betrachten wir Gleichung (5.1). Es gilt

$$\Lambda_{j-1} - \Lambda_j + \tau \nabla_{\text{NC}} \tilde{u}_j = (\mu_j - 1)\Lambda_j \quad \text{fast überall in } \Omega. \quad (5.5)$$

Außerdem folgt aus Gleichung (5.1) und einer Fallunterscheidung zwischen  $1 \geq |\Lambda_{j-1} + \tau \nabla_{\text{NC}} \tilde{u}_j|$  und  $1 < |\Lambda_{j-1} + \tau \nabla_{\text{NC}} \tilde{u}_j|$ , dass

$$(1 - |\Lambda_j|)(\mu_j - 1) = 0 \quad \text{fast überall in } \Omega. \quad (5.6)$$

Testen wir nun Gleichung (5.5) in  $L^2(\Omega)$  mit  $E_j$ , erhalten wir unter Nutzung von  $\mu_j \geq 1$ , der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung,  $|\bar{\Lambda}_0(\cdot)| \leq 1$  fast überall in  $\Omega$  und Gleichung (5.6), dass

$$\begin{aligned} (\Lambda_{j-1} - \Lambda_j + \tau \nabla_{\text{NC}} \tilde{u}_j, E_j) &= ((\mu_j - 1)\Lambda_j, \bar{\Lambda}_0 - \Lambda_j) \\ &\leq \int_{\Omega} (\mu_j - 1) (|\Lambda_j| - |\Lambda_j|^2) \, dx \\ &= \int_{\Omega} |\Lambda_j| (1 - |\Lambda_j|) (\mu_j - 1) \, dx = 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt mit  $\Lambda_{j-1} - \Lambda_j = E_j - E_{j-1}$  und  $\tilde{u}_j = u_{j-1} - (e_{j-1} - e_{j-2})$ , dass nach Division durch  $\tau$  gilt

$$\left(\frac{E_j - E_{j-1}}{\tau} + \nabla_{\text{NC}} u_{j-1} - \nabla_{\text{NC}}(e_{j-1} - e_{j-2}), E_j\right) \leq 0. \quad (5.7)$$

## 5 Iterative Lösung

Aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung, Gleichung (4.6) und  $|\Lambda_j(\cdot)| \leq 1$  fast überall in  $\Omega$  folgt, dass

$$\begin{aligned}\nabla_{\text{NC}u_{\text{CR}}} \cdot E_j &= \nabla_{\text{NC}u_{\text{CR}}} \cdot \bar{\Lambda}_0 - \nabla_{\text{NC}u_{\text{CR}}} \cdot \Lambda_j \\ &\geq \nabla_{\text{NC}u_{\text{CR}}} \cdot \bar{\Lambda}_0 - |\nabla_{\text{NC}u_{\text{CR}}}| |\Lambda_j| \\ &= |\nabla_{\text{NC}u_{\text{CR}}}| (1 - |\Lambda_j|) \geq 0 \quad \text{fast überall in } \Omega.\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$(\nabla_{\text{NC}u_{\text{CR}}}, E_j) = \int_{\Omega} \nabla_{\text{NC}u_{\text{CR}}} \cdot E_j \, dx \geq 0. \quad (5.8)$$

Aus den Ungleichungen (5.7) und (5.8) folgt insgesamt

$$\left( \frac{E_j - E_{j-1}}{\tau} + \nabla_{\text{NC}u_{j-1}} - \nabla_{\text{NC}}(e_{j-1} - e_{j-2}), E_j \right) \leq (\nabla_{\text{NC}u_{\text{CR}}}, E_j).$$

Das ist äquivalent zu

$$\left( \frac{E_j - E_{j-1}}{\tau} - \nabla_{\text{NC}}(2e_{j-1} - e_{j-2}), E_j \right) \leq 0. \quad (5.9)$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}\|e_j\|_{\text{NC}}^2 - \|e_{j-1}\|_{\text{NC}}^2 + \|E_j\|^2 - \|E_{j-1}\|^2 + \|e_j - e_{j-1}\|_{\text{NC}}^2 + \|E_j - E_{j-1}\|^2 \\ = 2a_{\text{NC}}(e_j, e_j - e_{j-1}) + 2(E_j, E_j - E_{j-1}).\end{aligned} \quad (5.10)$$

Unter Nutzung von  $e_j - e_{j-1} = -\tau v_j$  und Gleichung (5.4) gilt außerdem

$$\begin{aligned}2a_{\text{NC}}(e_j, e_j - e_{j-1}) + 2(E_j, E_j - E_{j-1}) &= -2\tau a_{\text{NC}}(e_j, v_j) + 2(E_j, E_j - E_{j-1}) \\ &= -2\tau\alpha\|e_j\|^2 + 2\tau \left( E_j, -\nabla_{\text{NC}}e_j + \frac{E_j - E_{j-1}}{\tau} \right)\end{aligned}$$

Daraus folgt durch Ungleichung (5.9) zusammen mit  $\tau > 0$ , dass

$$\begin{aligned}2a_{\text{NC}}(e_j, e_j - e_{j-1}) + 2(E_j, E_j - E_{j-1}) \\ \leq -2\tau\alpha\|e_j\|^2 + 2\tau \left( E_j, -\nabla_{\text{NC}}e_j + \frac{E_j - E_{j-1}}{\tau} \right) \\ - 2\tau \left( \frac{E_j - E_{j-1}}{\tau} - \nabla_{\text{NC}}(2e_{j-1} - e_{j-2}), E_j \right) \\ = -2\tau\alpha\|e_j\|^2 - 2\tau(E_j, \nabla_{\text{NC}}(e_j - 2e_{j-1} + e_{j-2})).\end{aligned}$$

Damit und mit Gleichung (5.10) erhalten wir insgesamt

$$\begin{aligned}\|e_j\|_{\text{NC}}^2 - \|e_{j-1}\|_{\text{NC}}^2 + \|E_j\|^2 - \|E_{j-1}\|^2 + \|e_j - e_{j-1}\|_{\text{NC}}^2 + \|E_j - E_{j-1}\|^2 \\ \leq -2\tau\alpha\|e_j\|^2 - 2\tau(E_j, \nabla_{\text{NC}}(e_j - 2e_{j-1} + e_{j-2})).\end{aligned}$$

Für jedes  $J \in \mathbb{N}$  führt die Summation dieser Ungleichung über  $j = 1, \dots, J$  und eine Äquivalenzumformung zu

$$\begin{aligned}\|e_J\|_{\text{NC}}^2 + \|E_J\|^2 + \sum_{j=1}^J (\|e_j - e_{j-1}\|_{\text{NC}}^2 + \|E_j - E_{j-1}\|^2) \\ \leq \|e_0\|_{\text{NC}}^2 + \|E_0\|^2 - 2\tau\alpha \sum_{j=1}^J \|e_j\|^2 - 2\tau \sum_{j=1}^J (E_j, \nabla_{\text{NC}}(e_j - 2e_{j-1} + e_{j-2})).\end{aligned} \quad (5.11)$$

Für die letzte Summe auf der rechten Seite dieser Ungleichung gilt, unter Beachtung von  $e_{-1} = e_0$ , dass

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^J (E_j, \nabla_{\text{NC}}(e_j - 2e_{j-1} + e_{j-2})) \\
 &= \sum_{j=1}^J (E_j, \nabla_{\text{NC}}(e_j - e_{j-1})) - \sum_{j=0}^{J-1} (E_{j+1}, \nabla_{\text{NC}}(e_j - e_{j-1})) \\
 &= \sum_{j=1}^{J-1} (E_j - E_{j+1}, \nabla_{\text{NC}}(e_j - e_{j-1})) + (E_J, \nabla_{\text{NC}}(e_J - e_{J-1})) - (E_1, \nabla_{\text{NC}}(e_0 - e_{-1})) \\
 &= \sum_{j=1}^{J-1} (E_j - E_{j+1}, \nabla_{\text{NC}}(e_j - e_{j-1})) + (E_J, \nabla_{\text{NC}}(e_J - e_{J-1})).
 \end{aligned}$$

Mit dieser Umformung erhalten wir aus Ungleichung (5.11) für jedes  $\tau \in (0, 1]$ , das heißt  $\tau^{-1} \geq 1$ , dass

$$\begin{aligned}
 & \|e_J\|_{\text{NC}}^2 + \|E_J\|^2 + \sum_{j=1}^J (\|e_j - e_{j-1}\|_{\text{NC}}^2 + \|E_j - E_{j-1}\|^2) \\
 & \leq \tau^{-1} (\|e_0\|_{\text{NC}}^2 + \|E_0\|^2) - 2\alpha \sum_{j=1}^J \|e_j\|^2 \\
 & \quad - 2 \sum_{j=1}^{J-1} (E_j - E_{j+1}, \nabla_{\text{NC}}(e_j - e_{j-1})) - 2(E_J, \nabla_{\text{NC}}(e_J - e_{J-1})).
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
 2\alpha \sum_{j=1}^J \|e_j\|^2 & \leq 2\alpha \sum_{j=1}^J \|e_j\|^2 + \|E_J + \nabla_{\text{NC}}(e_J - e_{J-1})\|^2 + \|e_J\|_{\text{NC}}^2 + \|E_1 - E_0\|^2 \\
 & \quad + \sum_{j=1}^{J-1} \|\nabla_{\text{NC}}(e_j - e_{j-1}) - (E_{j+1} - E_j)\|^2 \\
 & = 2\alpha \sum_{j=1}^J \|e_j\|^2 + \|e_J\|_{\text{NC}}^2 + \|E_J\|^2 + \sum_{j=1}^J (\|e_j - e_{j-1}\|_{\text{NC}}^2 + \|E_j - E_{j-1}\|^2) \\
 & \quad + 2 \sum_{j=1}^{J-1} (E_j - E_{j+1}, \nabla_{\text{NC}}(e_j - e_{j-1})) + 2(E_J, \nabla_{\text{NC}}(e_J - e_{J-1})).
 \end{aligned}$$

Zusammen mit Ungleichung (5.12) folgt daraus

$$2\alpha \sum_{j=1}^J \|e_j\|^2 \leq \tau^{-1} (\|e_0\|_{\text{NC}}^2 + \|E_0\|^2).$$

Somit gilt, dass  $\sum_{j=1}^{\infty} \|e_j\|^2$  beschränkt ist, was impliziert  $\|u_{\text{CR}} - u_j\| = \|e_j\| \rightarrow 0$  für  $j \rightarrow \infty$ .  $\square$

## 6 Implementierung

### 6.1 Hinweise zur Benutzung des Programms

Ziel der für diese Arbeit implementierten Methoden ist die Realisierung von Algorithmus 5.1 im Solve-Schritt des AFEM-Algorithmus aus Abbildung 6.1. Wir gehen davon aus, dass dieser und die im AFEM-Softwarepaket realisierten Methoden sowie deren Datenstrukturen bekannt sind und verweisen für weitere Details auf [Car+10]. Im Refine-Schritt nutzen wir anstelle eines Fehlerschätzers den Verfeinerungsindikator aus Definition 4.10. Die zur korrekten Funktionsweise dieses Programms nötigen Methoden und Dateien des

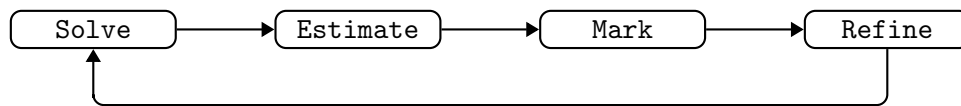


Abbildung 6.1: AFEM-Schleife

AFEM-Softwarepakets sind enthalten in den Ordnern

`./utils/afemPackage/` sowie `./utils/geometries/`.

Alle Ein- und Ausgabeparameter der im Rahmen dieser Arbeit implementierten Methoden sind in den entsprechenden Dateien detailliert dokumentiert. Ausgenommen davon sind die Standard-Datenstrukturen aus dem AFEM-Softwarepaket, die dort lediglich namentlich genannt werden. Die mathematischen Grundlagen für die Realisierung einiger Methoden diskutieren wir in Abschnitt 6.4.

Das Hauptprogramm, das heißt die ausführbare Methode, welche den AFEM-Algorithmus realisiert, ist

`./nonconforming/startAlgorithmCR.m`.

Als optionaler Eingabeparameter ist dabei ein String **benchmark** möglich. Wird die Methode ohne Übergabe eines solchen Parameters ausgeführt, nutzt sie als Standardwert `benchmark = 'editable'`. Nach Ausführen von `startAlgorithmCR(benchmark)` werden die nötigen Parameter und Einstellungen für das jeweilige Experiment aus der Datei

`./nonconforming/benchmarks/benchmark.m`

geladen und als Felder eines Structure Arrays übergeben. Für jedes in dieser Arbeit dokumentierte Experiment verweisen wir in Kapitel 7 an entsprechender Stelle auf das dafür benutzte Benchmark, welches in `./nonconforming/benchmarks/` zu finden ist und somit die Reproduzierbarkeit des Experiments garantiert. Als Muster für eine Benchmark-Datei dient

`./nonconforming/benchmarks/editable.m`.

Eine Übersicht über die in einer Benchmark-Datei wählbaren Parameter ist zu finden in den Tabellen 6.1 – 6.5 sowie über die definierbaren Funktion in Tabelle 6.6. Details zu den Datentypen sind in `editable.m` aufgeführt. Dass die zahlreichen Parameter, die während des Programmablaufs über- oder ausgegeben werden müssen, als Felder von Structure

Arrays gespeichert werden, dient der Modifizierbarkeit des Programms. So haben Korrekturen und Ergänzungen am Programm häufig nur zur Folge, dass einige `structs` um Felder ergänzt werden müssen während Methodenköpfe unverändert bleiben können. Das Eingangssignal  $f$  und eventuell weitere Funktionen, wie etwa die exakte Lösung  $u$  von Problem 3.1 und ihre schwache Ableitung  $\nabla u$ , müssen in der Benchmark-Datei angegeben werden, um sie dem Programm zu übergeben. Die für die Experimente in Kapitel 7 genutzten Funktionen sind zu finden in

```
./utils/functions/.
```

Ist eine Lösung  $u$  von *Problem 3.1* bekannt, so kann die exakte Energie  $E(u)$  approximiert werden mit der Methode

```
./nonconforming/computeExactEnergyBV.m.
```

Die so berechneten Energien werden gespeichert im Ordner

```
./nonconforming/knownExactEnergies/
```

und können anschließend manuell in ein Benchmark aufgenommen werden. Soll als Eingangssignal kein `function_handle` sondern ein Graufarbenbild gegeben werden, so muss es gespeichert sein in

```
./utils/functions/images/.
```

Um Dirichlet-Nullranddaten des Bildes zu garantieren, was einem schwarzen Rand entspricht, kann die Methode

```
./utils/functions/images/addBoundary2image.m
```

genutzt werden. Diese fügt einen graduellen Übergang zu schwarzen Rand auf den äußeren 25 Pixeln des Bildes hinzu. Um additives weißes gaußsches Rauschen zu einem Bild hinzuzufügen, kann die Methode

```
./utils/functions/images/addNoise2image.m
```

genutzt werden.

## 6.2 Programmablauf

In diesem Abschnitt betrachten wir eine beispielhafte Ausführung des Programms, bei der alle relevanten Methoden genutzt werden. In der Benchmark-Datei für den Programmaufruf müssen dafür, neben dem Eingangssignal  $f \in H_0^1(\Omega)$ , die Lösung  $u \in H_0^1(\Omega)$ , die exakte Energie  $E(u)$  und der schwache Gradient von  $f$  gegeben sein. Damit diese Informationen tatsächlich genutzt werden, müssen zusätzlich einige Parameter passend gewählt werden. Diese Wahlen sind

- `useImage = false,`
- `rhsGradientKnown = true,`
- `exactSolutionKnown = true,`
- `useExactEnergy = true.`

Parametername	Beschreibung
<code>showPlots</code>	<b>true</b> , wenn während des Programmablaufs Plots angezeigt werden sollen, sonst <b>false</b>
<code>plotModeGrayscale</code>	<b>true</b> , wenn während des Programmablaufs Plots von Funktionen als Graufarbenbilder angezeigt werden sollen, sonst <b>false</b> (Wahl irrelevant, wenn <code>showPlots == false</code> )
<code>showProgress</code>	<b>true</b> , wenn während der primalen-dualen Iteration Information über den aktuellen Iterationsschritt angezeigt werden sollen, sonst <b>false</b>
<code>degree4Integrate</code>	algebraischer Exaktheitsgrad für Aufrufe der Methode <code>integrate</code> [Car+10, Abschnitt 1.8.2] des AFEM-Softwarepakets
<code>plotGivenFunctions</code>	<b>true</b> , wenn Plots des Eingangssignals $f$ und, falls angegeben, der Lösung $u$ von Problem 3.1 erstellt und gespeichert werden sollen, sonst <b>false</b>
<code>refinementLevel4Plots</code>	Anzahl der Rotverfeinerungen der geladenen Geometrie um Plots des Eingangssignals $f$ und, falls angegeben, der Lösung $u$ von Problem 3.1 zu erstellen (Wahl irrelevant, falls <code>plotGivenFunctions == false</code> )
<code>debugIfError</code>	<b>true</b> , wenn Matlab beim Auftreten eines Fehlers den Debug-Modus starten soll, sonst <b>false</b>

Tabelle 6.1: Diverse Parameter zur Kontrolle des Programmablaufs

Parametername	Beschreibung
<code>geometry</code>	Name der Geometrie auf deren Triangulierung der AFEM-Algorithmus angewendet werden soll (cf. <code>loadGeometry</code> in [Car+10, Abschnitt 1.9.1])
<code>initialRefinementLevel</code>	Anzahl der Rotverfeinerungen die auf die Triangulierung der Geometrie <code>geometry</code> angewendet werden sollen vor Start des AFEM-Algorithmus (cf. <code>loadGeometry</code> in [Car+10, Abschnitt 1.9.1])
<code>parTheta</code>	Bulk-Parameter $\theta$ für den Mark-Schritt des AFEM-Algorithmus ( $\theta \in (0, 1)$ für adaptive und $\theta = 1$ für uniforme Netzverfeinerung)
<code>minNrDof</code>	Anzahl der Freiheitsgrade der Triangulierung eines Levels, die mindestens erreicht werden soll, bevor der AFEM-Algorithmus abbricht
<code>useProlongation</code>	<b>true</b> , wenn eine Prolongation der Lösung der primalen-dualen Iteration als Startwert für die Iteration des nächsten Levels genutzt werden soll, sonst <b>false</b>
<code>beta4Estimate</code>	Parameter $\gamma$ aus Definition 4.10
<code>n4Estimate</code>	Parameter $d$ aus Definition 4.10 (muss für diese Implementierung stets 2 sein)

Tabelle 6.2: Parameter für den AFEM-Algorithmus

Parametername	Beschreibung
<code>u0Mode</code>	Startwert $u_0$ für Algorithmus 5.1 auf dem ersten Level und, falls <code>useProlongation == false</code> , für die Iteration auf allen Leveln der AFEM-Routine ( <code>'zeroes'</code> für $u_0 = 0$ und <code>'interpolationRhs'</code> , falls für $u_0$ die nichtkonforme Interpolation des Eingangssignals $f$ genutzt werden soll)
<code>initialEpsStop</code>	Parameter $\varepsilon_{\text{stop}}$ für das Abbruchkriterium aus Kapitel 7
<code>parTau</code>	Parameter $\tau$ aus Algorithmus 5.1

Tabelle 6.3: Parameter für die Einstellungen der Iteration

Parametername	Beschreibung
<code>useImage</code>	<code>true</code> , wenn für das Eingangssignal $f$ ein Graufarbenbild statt eines <code>function_handle</code> genutzt werden soll, sonst <code>false</code>
<code>imageName</code>	Name (mit Dateiendung) des Graufarbenbildes im Ordner <code>./utils/functions/images/</code> , das als Eingangssignal $f$ genutzt werden soll (Wahl irrelevant, falls <code>useImage == false</code> )
<code>parAlpha</code>	Parameter $\alpha$ aus Problem 3.1 und Problem 4.1
<code>parBeta</code>	Parameter $\beta$ einiger Experimente aus Kapitel 7
<code>rhsGradientKnown</code>	<code>true</code> , wenn ein <code>function_handle</code> des schwachen Gradienten $\nabla f$ eines Eingangssignals $f \in H_0^1(\Omega)$ gegeben ist und zur Berechnung von $E_{\text{GLEB}}$ aus Theorem 4.9 genutzt werden soll, sonst <code>false</code>
<code>exactSolutionKnown</code>	<code>true</code> , wenn die Lösung $u$ von Problem 3.1 bekannt ist und zur Berechnung von exakten Fehlern zu Iteraten von Algorithmus 5.1 genutzt werden soll, sonst <code>false</code>
<code>useExactEnergy</code>	<code>true</code> , wenn die Energie $E(u)$ der Lösung $u$ von Problem 3.1 bekannt ist und in Auswertungen der Ergebnisse genutzt werden soll, sonst <code>false</code> (wird <code>false</code> gesetzt, falls <code>exactSolutionKnown == false</code> )
<code>exactEnergy</code>	Wert $E(u)$ für die Lösung $u$ von Problem 3.1 (Wahl irrelevant, falls <code>useExactEnergy == false</code> )

Tabelle 6.4: Parameter des Experiments

Parametername	Beschreibung
<code>expName</code>	Name des Ordners der im Ordner <code>../results/nonconforming/</code> erstellt werden soll zum Speichern der Ergebnisse des Programms
<code>dirInfoName</code>	Name des Ordners der im Ordner <code>../results/nonconforming/expName/</code> erstellt werden soll zum Speichern der Ergebnisse eines Levels

Tabelle 6.5: Parameter zum Speichern der Ergebnisse

Parametername	Beschreibung
<code>rightHandSide</code>	<code>function_handle</code> des Eingangssignals $f$ (Wahl irrelevant, falls <code>useImage == true</code> )
<code>gradientRightHandSide</code>	<code>function_handle</code> des schwachen Gradienten $\nabla f$ des Eingangssignals $f$ (Wahl irrelevant, falls <code>rhsGradientKnown == false</code> oder <code>useImage == true</code> )
<code>exactSolution</code>	<code>function_handle</code> der Lösung $u$ von Problem 3.1 (Wahl irrelevant, falls <code>exactSolutionKnown == false</code> oder <code>useImage == true</code> )

Tabelle 6.6: Definierbare `function_handles`

Noch in der Benchmark-Datei werden mit den gewählten Einstellungen die benötigten geometrischen Datenstrukturen für die Triangulierung  $\mathcal{T}$  initialisiert. Diese werden mit allen weiteren gegebenen Informationen als Felder eines Structure Arrays gespeichert und an das Hauptprogramm übergeben. Dort werden zunächst Structure Arrays mit Feldern für die benötigten Daten während der AFEM-Routine sowie deren Ergebnisse erstellt. Insbesondere wird der Startwert  $u_0$  für die primale-duale Iteration auf dem ersten Level des AFEM-Algorithmus initialisiert. Dieser hängt von der Wahl des Parameters `u0Mode` aus Tabelle 6.3 ab. Falls dabei die nichtkonforme Interpolation des Eingangssignals  $f$  bezüglich  $\mathcal{T}$  genutzt werden soll, wird diese in

```
./nonconforming/common/interpolationCR.m
```

ermittelt. Nach dem Berechnen einiger weiterer Informationen beginnt die AFEM-Schleife.

Zu Beginn der Schleife werden die für das aktuelle Level benötigten Daten ermittelt, zum Beispiel die Flächeninhalte der Dreiecke und die Freiheitsgrade der aktuellen Triangulierung  $\mathcal{T}$ . Insbesondere werden die auf dem Level mehrmals benötigten Gradienten der lokalen Crouzeix-Raviart-Basisfunktionen auf allen Dreiecken berechnet (cf. [Car+10, Abschnitt 1.4.2]) in

```
./nonconforming/common/computeGradsCR4e.m.
```

Mit diesen wird der stückweise Gradient des Startwerts  $u_0$  aus Algorithmus 5.1 berechnet in

```
./nonconforming/common/gradientCR.m.
```

Mit  $\nabla_{\text{NC}} u_0$  wird anschließend  $\Lambda_0$  aus Algorithmus 5.1 auf allen  $T \in \mathcal{T}$  initialisiert als

$$\Lambda_0|_T := \begin{cases} \frac{\nabla u_0|_T}{|\nabla u_0|_T|}, & \text{falls } \nabla u_0|_T \neq 0, \\ 0, & \text{falls } \nabla u_0|_T = 0. \end{cases}$$

Außerdem werden die Steifigkeits- und Massematrix aus Bemerkung 5.2 aufgestellt in

```
./nonconforming/common/computeFeMatricesCR.m.
```

Dabei benutzen wir für jedes  $T \in \mathcal{T}$ , dass die lokale Massematrix auf  $T$  mithilfe der Gleichungen (2.2) und (2.3) berechnet werden kann durch

$$M_T = \frac{|T|}{3} I_3. \quad (6.1)$$

Die Aufstellung der lokalen Steifigkeitsmatrizen sowie die Berechnung der globalen Steifigkeits- und Massematrix aus ihren lokalen Versionen geschieht analog zu [Car+10, Abschnitt 1.4.2]). Danach werden in



`./nonconforming/common/integralsWithF4e.m`

mit den Crouzeix-Raviart-Basisfunktionen  $\psi_F$ ,  $F \in \mathcal{E}$ , für jedes Dreieck  $T \in \mathcal{T}$  mit Kanten  $\mathcal{E}(T) = \{E_1, E_2, E_3\}$  die Integrale  $\int_T f \psi_{E_k}|_T dx$ ,  $k \in \{1, 2, 3\}$ , berechnet. Dies geschieht mithilfe der `integrate` Methode [Car+10, Abschnitt 1.8.2] des AFEM-Softwarepakets. Die Berechnung der dafür benötigten lokalen Crouzeix-Raviart-Basisfunktionen  $\psi_{E_k}|_T$ ,  $k \in \{1, 2, 3\}$  diskutieren wir in Abschnitt 6.4.1. Anschließend kann für alle  $F \in \mathcal{E}$  auch das Integral

$$\int_{\Omega} f \psi_F dx = \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T f \psi_F|_T dx = \sum_{T \in \mathcal{T}(F)} \int_T f \psi_F|_T dx$$

bestimmt werden. Damit sind alle notwendigen Daten ermittelt, um die primale-duale Iteration zur Lösung auf dem Level zu starten. Genutzt wird dafür die Methode

`./nonconforming/main/solvePrimalDualFormulation.m`.

Details dazu diskutieren wir in Abschnitt 6.3. Mit den letzten Iterat  $u_J \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  als Approximation der Lösung von Problem 4.1 auf dem Level berechnen wir anschließend  $|E(u) - E_{\text{NC}}(u_J)|$  und, mithilfe der Methode `error4eCRL2` [Car+10, Abschnitt 1.8.3] des AFEM-Softwarepakets, den Fehler  $\|u - u_J\|$ . Außerdem werden Informationen über die Iteration und ihre Ergebnisse gespeichert und gegebenenfalls ausgegeben. Weiterhin wird zur Berechnung der garantierten unteren Energieschranke  $E_{\text{GLEB}}$  aus Theorem 4.9 und des Verfeinerungsindikators aus Definition 4.10 für alle  $T \in \mathcal{T}$  der Term  $\|f - \alpha u_J\|_{L^2(T)}^2$  benötigt. Zur Berechnung dieser Terme nutzen wir die Methode

`./nonconforming/common/computeNormDiffRhsSolCrSquared4e.m`

wie folgt. Sei  $T \in \mathcal{T}$  mit  $\mathcal{E}(T) = \{E_1, E_2, E_3\}$  und  $u_J|_T$  habe mit  $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}$  die Darstellung  $u_J|_T = \sum_{k=1}^3 v_k \psi_{E_k}|_T$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \|f - \alpha u_J\|_{L^2(T)}^2 &= \|f\|_{L^2(T)}^2 - 2\alpha (f, u_J)_{L^2(T)} + \alpha^2 \|u_J\|_{L^2(T)}^2 \\ &= \|f\|_{L^2(T)}^2 - 2\alpha \sum_{k=1}^3 v_k \int_T f \psi_{E_k}|_T dx + \alpha^2 \sum_{k=1}^3 \sum_{\ell=1}^3 v_k (\psi_{E_k}|_T, \psi_{E_\ell}|_T)_{L^2(T)} v_\ell. \end{aligned}$$

Zur Berechnung des ersten Terms nutzen wir die `integrate` Methode des AFEM-Softwarepakets und für die Berechnung des zweiten Terms merken wir an, dass die Integrale  $\int_T f \psi_{E_k}|_T dx$ ,  $k \in \{1, 2, 3\}$ , bereits ermittelt wurden. Der letzte Term vereinfacht sich durch Nutzung der expliziten Darstellung (6.1) der lokalen Massematrix  $M_T$  zu

$$\alpha^2 \sum_{k=1}^3 \sum_{\ell=1}^3 v_k (\psi_{E_k}|_T, \psi_{E_\ell}|_T)_{L^2(T)} v_\ell = \alpha^2 \sum_{k=1}^3 \sum_{\ell=1}^3 v_k M_T v_\ell = \alpha^2 \frac{|T|}{3} \sum_{k=1}^3 v_k^2$$

und es wird damit direkt ersichtlich, wie dieser implementiert werden kann. Unter erneuter Zuhilfenahme der `integrate` Methode wird anschließend in

`./nonconforming/common/computeGleb.m`

die garantierte untere Energieschranke  $E_{\text{GLEB}}$  berechnet. Zur Berechnung des Verfeinerungsindikators benötigen wir noch für alle  $F \in \mathcal{E}$  den Term  $\|[u_J]_F\|_{L^1(F)}$ . Diese ermitteln wir in der Methode

`./nonconforming/common/computeL1NormOfJump4s.m`.

Details dazu diskutieren wir in Abschnitt 6.4.3. Danach werden der Verfeinerungsindikator und seine Anteile  $\eta_V$  und  $\eta_J$  berechnet in der Methode

`./nonconforming/estimate/estimateErrorCR4e.m.`

Es folgt die Ausgabe einiger relevanter Informationen über das Level und das Abspeichern dieser und weiterer Ergebnisse in den durch die Parameter in Tabelle 6.5 gewählten Ordnern. Endet nun der AFEM-Algorithmus nach Überprüfung des Abbruchkriteriums nicht, das heißt ist die Anzahl der Freiheitsgrade der Triangulierung des aktuellen Levels geringer als die Zahl `minNrDof` aus Tabelle 6.2, so werden mithilfe des Verfeinerungsindikators  $\eta$  die Dreiecke markiert, die verfeinert werden sollen. Dafür nutzen wir die folgenden, in [Car+10, Abschnitt 1.6] beschriebenen, Methoden des AFEM-Softwarepakets. Gilt für den Bulk-Parameter  $\theta$ , gewählt durch `parTheta` aus Tabelle 6.2, dass  $\theta = 1$ , so nutzen wir die Methode `markUniform`. Gilt  $\theta \in (0, 1)$ , so nutzen wir die Methode `markBulk`. Zum Verfeinern der Triangulierung wird anschließend die Methode `refineRGB` [Car+10, S. 1.7.2] des AFEM-Softwarepakets verwendet.

Zum Abschluss werden bereits Informationen für das nächste Level vorbereitet. Dazu gehören die Datenstrukturen, welche die verfeinerte Triangulierung  $\hat{\mathcal{T}}$  beschreiben sowie einige weitere Eigenschaften von  $\hat{\mathcal{T}}$ , zum Beispiel die Anzahl und Längen der Seiten der Triangulierung. Soll als Startwert für das nächste Level eine Prolongation  $\hat{u}_J \in \text{CR}_0^1(\hat{\mathcal{T}})$  von  $u_J$  auf  $\hat{\mathcal{T}}$  genutzt werden, festgelegt durch den Parameter `useProlongation` aus Tabelle 6.2, wird dies durch die Methode

`./nonconforming/common/prolongationJ1.m`

realisiert. Dabei wird der Operator  $J_1 : \text{CR}_0^1(\mathcal{T}) \rightarrow P_1(\mathcal{T}) \cap C_0(\Omega)$  aus [CGS15, S. 1065] genutzt, wobei  $J_1 v_{\text{CR}}$  für eine Funktion  $v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  in allen Innenknoten  $z \in \mathcal{N}(\Omega)$  definiert ist durch

$$J_1 v_{\text{CR}}(z) := |\mathcal{T}(z)|^{-1} \sum_{T \in \mathcal{T}(z)} v_{\text{CR}}|_T(z).$$

Als Prolongation wird  $\hat{u}_J := J_1 u_J \in P_1(\mathcal{T}) \cap C_0(\Omega) \subseteq P_1(\hat{\mathcal{T}}) \cap C_0(\Omega) \subseteq \text{CR}_0^1(\hat{\mathcal{T}})$  gewählt. Die Berechnung der dabei benötigten lokalen Knotenwerte von  $u_J$  geschieht wie in Abschnitt 6.4.2 beschrieben.

### 6.3 Realisierung der primalen-dualen Iteration

In diesen Abschnitt beschreiben wir die Methode

`./nonconforming/main/solvePrimalDualFormulation.m.`

Dabei benutzen wir die Bezeichnungen aus Algorithmus 5.1, der in dieser Methode realisiert wird. Wie in Abschnitt 6.2 beschrieben, sind vor Aufruf der Methode bereits alle benötigten Informationen über die aktuelle Triangulierung  $\mathcal{T}$  sowie die Steifigkeits- und Massematix aus Bemerkung 5.2 und die Integrale  $\int_{\Omega} f \psi_F dx$  für alle Crouzeix-Raviart-Basisfunktionen  $\psi_F$ ,  $F \in \mathcal{E}$  bekannt. Mit der Steifigkeits- und Massematix ist direkt ersichtlich, wie die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems (5.3) implementiert werden kann. Für die Implementierung der rechten Seite dieses Systems nutzten wir die folgende Beobachtung. Für alle  $k \in \{1, 2, \dots, |\mathcal{E}|\}$  gilt, da  $\nabla_{\text{NC}} u_{j-1}$ ,  $\Lambda_j$  und  $\nabla_{\text{NC}} \psi_{E_k}$  stückweise konstant sind, dass

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{\tau} \nabla_{\text{NC}} u_{j-1} - \Lambda_j, \nabla_{\text{NC}} \psi_{E_k} \right) &= \sum_{T \in \mathcal{T}} \left( \frac{1}{\tau} \nabla_{\text{NC}} u_{j-1} - \Lambda_j, \nabla_{\text{NC}} \psi_{E_k} \right)_{L^2(T)} \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}(E_k)} \frac{|T|}{\tau} (\nabla_{\text{NC}} u_{j-1} - \Lambda_j)|_T \cdot \nabla \psi_{E_k}|_T. \end{aligned}$$

Da die Terme  $(f, \psi_{E_k}) = \int_{\Omega} f \psi_{E_k} \, dx$  bereits berechnet wurden, können wir somit die rechte Seite  $\bar{b}$  implementieren. Es ist direkt ersichtlich wie der verbleibende Teil von Algorithmus 5.1 implementiert werden kann. Sonstige Informationen über die Iteration, wie etwa das Abbruchkriterium, diskutieren wir in Kapitel 7.

Es bleibt anzumerken, dass in `solvePrimalDualFormulation`, neben Algorithmus 5.1, der Ausgabe des Fortschritts sowie der Übergabe von Ergebnissen der Iteration, auch die nichtkonformen Energien  $E_{\text{NC}}(u_j)$  der Iterate berechnet werden. Diese Berechnung ist realisiert in

`./nonconforming/common/computeDiscreteEnergyCR.m`.

Dabei werden die Massematrix  $M$  und die Integrale  $\int_{\Omega} f \psi_F \, dx$ ,  $F \in \mathcal{E}$ , wie folgt genutzt. Sei  $v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  und  $v \in \mathbb{R}^{|\mathcal{E}|}$  enthalte die Koordinaten von  $v_{\text{CR}}$  bezüglich der Basis  $\{\psi_{E_1}, \psi_{E_2}, \dots, \psi_{E_{|\mathcal{E}|}}\}$  von  $\text{CR}^1(\mathcal{T})$ , das heißt  $v_{\text{CR}} = \sum_{k=1}^{|\mathcal{E}|} v_k \psi_{E_k}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} E_{\text{NC}}(v_{\text{CR}}) &= \frac{\alpha}{2} \|v_{\text{CR}}\|^2 + \|\nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}}\|_{L^1(\Omega)} - \int_{\Omega} f v_{\text{CR}} \, dx \\ &= \frac{\alpha}{2} \sum_{k=1}^{|\mathcal{E}|} \sum_{\ell=1}^{|\mathcal{E}|} v_k (\psi_{E_k}, \psi_{E_{\ell}}) v_{\ell} + \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T |\nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}}| \, dx - \sum_{k=1}^{|\mathcal{E}|} v_k \int_{\Omega} f \psi_{E_k} \, dx \\ &= \frac{\alpha}{2} v \cdot M v + \sum_{T \in \mathcal{T}} |T| |(\nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}})|_T - \sum_{k=1}^{|\mathcal{E}|} v_k \int_{\Omega} f \psi_{E_k} \, dx. \end{aligned}$$

## 6.4 Mathematische Grundlagen ausgewählter Methoden

### 6.4.1 Berechnung lokaler Crouzeix-Raviart-Basisfunktionen

In der Methode

`./nonconforming/common/integralsWithF4e.m`

werden auf allen Dreiecken der Triangulierung die lokalen Crouzeix-Raviart-Basisfunktionen benötigt. Sei  $T \in \mathcal{T}$  mit  $T = \text{conv}(\{P_1, P_2, P_3\})$ . Da nach Gleichung (2.2) die lokalen Crouzeix-Raviart-Basisfunktionen  $\psi_F|_T$ ,  $F \in \mathcal{E}(T)$ , darstellbar sind durch die baryzentrischen Koordinaten  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in P_1(T)$  aus Abschnitt 2.2, genügt es hier deren Berechnung zu diskutieren. Dafür betrachten wir das Referenzdreieck, das definiert ist durch

$$T_{\text{ref}} := \text{conv} \left( \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right),$$

und, mit der Matrix  $B := (P_1 - P_3, P_2 - P_3)$ , die affine Transformation  $p : T_{\text{ref}} \rightarrow T$ ,  $x \mapsto Bx + P_3$ . Mithilfe der Umkehrabbildung von  $p$ , die gegeben ist durch  $p^{-1} : T \rightarrow T_{\text{ref}}$ ,  $x \mapsto B^{-1}(x - P_3)$ , können die baryzentrischen Koordinaten für alle  $x \in T$  berechnet werden durch

$$\begin{pmatrix} \lambda_1(x) \\ \lambda_2(x) \end{pmatrix} = p^{-1}(x) \quad \text{und} \quad \lambda_3(x) = 1 - \lambda_1(x) - \lambda_2(x).$$

### 6.4.2 Berechnung lokaler Knotenwerte einer Crouzeix-Raviart-Funktion

Sei  $v_{\text{CR}} \in \text{CR}^1(\mathcal{T})$ . Für die in dieser Arbeit implementierte Prolongation von  $v_{\text{CR}}$  auf eine Verfeinerung der Triangulierung  $\mathcal{T}$  und für die Berechnung der  $L^1$ -Norm der Kantsprünge von  $v_{\text{CR}}$  benötigen wir für jedes Dreieck  $T \in \mathcal{T}$  die Werte von  $v_{\text{CR}}$  in den Knoten von  $T$ . Dazu sei  $T = \text{conv}\{P_1, P_2, P_3\}$  mit den Kanten  $E_1 = \text{conv}\{P_1, P_2\}$ ,

$E_2 = \text{conv}\{P_2, P_3\}$  und  $E_3 = \text{conv}\{P_3, P_1\}$ . Die Funktion  $v := v_{\text{CR}}|_T$  habe in den Mittelpunkten der Kanten die Werte  $v_j := v(\text{mid}(E_j))$  für alle  $j \in \{1, 2, 3\}$ . Gesucht sind damit die Werte  $v(P_1)$ ,  $v(P_2)$  und  $v(P_3)$ .

Da  $v_{\text{CR}} \in \text{CR}^1(\mathcal{T})$ , ist  $v$  affin. Damit gilt für eine Kante  $E = \text{conv}\{P, Q\} \in \{E_1, E_2, E_3\}$ , dass  $v(\text{mid}(E))$  gegeben ist durch den Mittelwert von  $v(P)$  und  $v(Q)$ . Somit erhalten wir die drei Gleichungen

$$v_1 = \frac{v(P_1) + v(P_2)}{2}, \quad v_2 = \frac{v(P_2) + v(P_3)}{2}, \quad v_3 = \frac{v(P_3) + v(P_1)}{2}.$$

Sind  $v_1$ ,  $v_2$  und  $v_3$  bekannt, können wir dieses Gleichungssystem nach  $v(P_1)$ ,  $v(P_2)$  und  $v(P_3)$  lösen und erhalten die gesuchten Werte

$$v(P_1) = v_1 + v_3 - v_2, \quad v(P_2) = v_1 + v_2 - v_3, \quad v(P_3) = v_2 + v_3 - v_1.$$

Wir realisieren dies mit der Methode

`./nonconforming/common/computeNodeValuesCR4e.m.`

### 6.4.3 Berechnung von Sprungtermen

Insbesondere für die Berechnung des Verfeinerungsindikators aus Definition 4.10 benötigen wir eine Methode, die für eine Crouzeix-Raviart-Funktion  $v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  für alle Kanten  $F \in \mathcal{E}$  die Terme  $\|[v_{\text{CR}}]_F\|_{L^1(F)}$  bestimmt.

Da  $v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$ , ist  $[v_{\text{CR}}]_F$  affin und es gilt  $[v_{\text{CR}}]_F(\text{mid}(F)) = 0$  für alle Kanten  $F \in \mathcal{E}$ . Betrachten wir nun eine beliebige Kante  $F \in \mathcal{E}$  mit  $F = \text{conv}\{P_1, P_2\}$ . Wir definieren eine Parametrisierung  $\xi : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$  von  $F$  durch  $\xi(t) := \frac{t}{2}(P_2 - P_1) + P_1$ . Es gilt  $|\xi'| \equiv \frac{1}{2}|P_2 - P_1| = \frac{1}{2}|F|$ . Sei außerdem  $p(t) := [v_{\text{CR}}]_F(\xi(t))$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \|[v_{\text{CR}}]_F\|_{L^1(F)} &= \int_F |[v_{\text{CR}}]_F| \, ds = \int_0^2 |p(t)| |\xi'(t)| \, dt = \frac{|F|}{2} \int_0^2 |p(t)| \, dt \\ &= \frac{|F|}{2} \left( \int_0^1 |p(t)| \, dt + \int_1^2 |p(t)| \, dt \right). \end{aligned}$$

Da  $v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$ , ist  $|p(\cdot)|$  auf  $[0, 1]$  und  $[1, 2]$  jeweils ein Polynom von Grad 1 mit  $|p(1)| = |[v_{\text{CR}}]_F(\text{mid}(F))| = 0$ . Somit können wir  $|p|$  explizit ausdrücken durch

$$\begin{aligned} |p(t)| &= (1-t)|p(0)| \quad \text{für alle } t \in [0, 1] \quad \text{und} \\ |p(t)| &= (t-1)|p(2)| \quad \text{für alle } t \in [1, 2]. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir, aufgrund der Exaktheit der Mittelpunktsregel für Polynome von Grad 1, dass

$$\begin{aligned} \int_0^1 |p(t)| \, dt &= (1-0) \left| p\left(\frac{1}{2}\right) \right| = \frac{|p(0)|}{2} \quad \text{und} \\ \int_1^2 |p(t)| \, dt &= (2-1) \left| p\left(\frac{3}{2}\right) \right| = \frac{|p(2)|}{2}. \end{aligned}$$

Insgesamt gilt also

$$\begin{aligned} \|[v_{\text{CR}}]_F\|_{L^1(F)} &= \frac{|F|}{2} \left( \frac{|p(0)|}{2} + \frac{|p(2)|}{2} \right) = \frac{|F|}{4} (|p(0)| + |p(2)|) \\ &= \frac{|F|}{4} (|[v_{\text{CR}}]_F(P_1)| + |[v_{\text{CR}}]_F(P_2)|), \end{aligned}$$

beziehungsweise  $\|[v_{\text{CR}}]_F\|_{L^1(F)} = \frac{|F|}{4} (|v_{\text{CR}}(P_1)| + |v_{\text{CR}}(P_2)|)$  für eine Randkanten  $F \in \mathcal{E}(\partial\Omega)$ . Realisiert wird dies in der Methode

`./nonconforming/common/computeL1NormOfJump4s.m.`

Dabei werden für  $v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  für jede Kante  $F \in \mathcal{E}$  mit  $F = \text{conv}\{P_1, P_2\}$  die Terme  $|[v_{\text{CR}}]_F(P_1)|$  und  $|[v_{\text{CR}}]_F(P_2)|$  berechnet in

`./nonconforming/common/computeAbsNodeJumps4s.m.`

## 7 Numerische Beispiele

Mache alle mögliche Sachen, prüfe Dinge die gelten sollen. Für ein Beispiel (z.B. CCs) fange mit basics an, also mal an einem Iterationsplot aufzeigen, dass die Energie tatsächlich von oben gegen was konvergiert und gehe dann weiter zu anderen Themen wie den Raten, GLEB etc.

Probiere auch `thm:convexity` irgendwie informell zu erwähnen „wir sehen, dass sogar ohne die Sprünge das stimmt...“ oder so

in chap 6 cf.s auf integrate etc nicht ständig sonder einmal gesammelt am Anfang oder drauf achten, dass das nur beim ersten Erwähnen zitiert wird

Programm gibt Sprungtermsumme aus, z.B. stagnierend bei 11 auf allen Leveln, darauf vielleicht noch kurz in der Auswertung eingehen „man sieht, dass die Sprünge tatsächlich im nonkonformen Problem nicht minimiert werden oder so“

Als erste Experimente für CCs Benchmark alle möglichen Parameter untersuchen (z.B. die Parameter im refinement indicator, GLEB, Abbruchkriterien etc) und danach begründen, warum für alle Experimente diese gewählt werden mit den Beobachtungen

ascent and descent flow, gradient flow heißt doch, dass Gradientenverfahren angewendet wurde, richtig? Stopping criteria sind in Punkt 6.2 von Bar12

Immer nur Beobachtungen aufschreiben, die Raten sagen, Sachverhalte einbringen. Auswertungen dann eben, wie schon der Name sagt, in Auswertungen

Ab hier Content

Zuerst allgemeines, alle Informationen, die ggf bei allen Experimten in den folgenden Abschnitten immer gleich sind und möglicherweise kurze Kommentare, warum diese entsprechend gewählt sind.

Alle Experimentparameter die stets gleich gesetzt sind Eingangs einmal erwähnen, insbesondere `degree4Integrate`, was immer als 10 gesetzt wird, mit ähnlichem Kommentar wie PB auf S 30

### 7.1 Betrachte Probleme

Einzelne Experimente in eigenen Subsections

Hier auch alle möglichen rechten Seiten beschreiben. Alle möglichen rechten Seiten hier auflisten, insbesondere die rechte Seite mit exakten Lösungen mit verweise auf Kapitel 3. Die Funktionen entsprechend bezeichnen

Vielleicht auch hier dann

### 7.2 Betrachtungen der Iteration

Hier alles was man so über die Iteration sagen kann. Alles am Beispiel, dass

## 7.3 Bilder als Input und Rauschverminderung

Bei Beschreibung wie die Bilder der Einleitung zur Rauschunterdrückung entstanden sind auch erwähnen, dass  $f = \alpha g$  eine Rolle spiele usw.

## 7.4 Alternative Kapitelstruktur: Anwendung am Beispiel der Benchmarks

### 7.4.1 Experimente mit exakter Lösung: Benchmarks 'f01Bench' und 'f02' Bench

### 7.4.2 Bilder als Input und Rauschverminderung: 'cameramanBench' und ...

Beschreibe hier nur das allgemeine Vorgehen und die mathematischen Hintergründe und schreibe die genutzten Beispiele an entsprechender Stelle in Numerische Beispiele oder so. Die ungenutzten Beispiele die trotzdem im Ordner liegen können in einem extra Abschnitt aufgezählt werden

Schema ist dann: Nach section Konstruktion einer exakten Lösung erhalten wir für die Wahl  $u$  mit  $\text{sgn}$  bla die rechte Seite  $f$ . Die Details bei bestimmten Konstruktionen, etwa „um H2 zu erhalten fordern wir noch“ ergänzen beim Vorstellen des entsprechenden Experimentes, hier nur das allgemeinste, das, was CC wirklich geschrieben hat. Wir wollen damit Experimente konstruieren um Aussagen in ...oder ...zu prüfen, entsprechend müssen wir noch fordern Da in den Kapiteln GLEB und bla  $u$  in H10 relevant wird, fordern wir weiterhin ...Professor Carstensen stellte folgende KOnsturkution ...Um eine rechte Seite zu finden, zu der die exakte Lösung bekannt ist, wähle eine Funktion des Radius  $u \in H_0^1([0,1])$  mit Träger im zweidimensionalen Einheitskreis. Insbesondere muss damit gelten  $u(1) = 0$  und  $u$  stetig. Die rechte Seite als Funktion des Radius  $f \in L^2([0,1])$  ist dann gegeben durch

$$f := \alpha u - \partial_r(\text{sgn}(\partial_r u)) - \frac{\text{sgn}(\partial_r u)}{r},$$

wobei für  $F \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  gilt  $\text{sgn}(F) := \left\{ \frac{F}{|F|} \right\}$  und  $\text{sgn}(0) \in B_1(0)$ . Damit außerdem gilt  $f \in H_0^1([0,1])$ , was z.B. für GLEB relevant ist, muss also noch Stetigkeit von  $\text{sgn}(\partial_r u)$  und  $\partial_r(\text{sgn}(\partial_r u))$  verlangt werden und  $\partial_r(\text{sgn}(\partial_r u(1))) = \text{sgn}(\partial_r u(1)) = 0$ . Damit  $f$  in 0 definierbar ist, muss auch gelten  $\text{sgn}(\partial_r u) \in o(r)$  für  $r \rightarrow 0$ .

Damit erhält man für die Funktion

$$u_1(r) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } 0 \leq r \leq \frac{1}{6}, \\ 1 + (6r - 1)^\beta, & \text{wenn } \frac{1}{6} \leq r \leq \frac{1}{3}, \\ 2, & \text{wenn } \frac{1}{3} \leq r \leq \frac{1}{2}, \\ 2(\frac{5}{2} - 3r)^\beta, & \text{wenn } \frac{1}{2} \leq r \leq \frac{5}{6}, \\ 0, & \text{wenn } \frac{5}{6} \leq r, \end{cases}$$

wobei  $\beta \geq 1/2$ , mit der Wahl

$$\text{sgn}(\partial_r u_1(r)) = \begin{cases} 12r - 36r^2, & \text{wenn } 0 \leq r \leq \frac{1}{6}, \\ 1, & \text{wenn } \frac{1}{6} \leq r \leq \frac{1}{3}, \\ \cos(\pi(6r - 2)), & \text{wenn } \frac{1}{3} \leq r \leq \frac{1}{2}, \\ -1, & \text{wenn } \frac{1}{2} \leq r \leq \frac{5}{6}, \\ -\frac{1 + \cos(\pi(6r - 5))}{2}, & \text{wenn } \frac{5}{6} \leq r \leq 1, \end{cases}$$

## 7 Numerische Beispiele

die rechte Seite

$$f_1(r) := \begin{cases} \alpha - 12(2 - 9r), & \text{wenn } 0 \leq r \leq \frac{1}{6}, \\ \alpha(1 + (6r - 1)^\beta) - \frac{1}{r}, & \text{wenn } \frac{1}{6} \leq r \leq \frac{1}{3}, \\ 2\alpha + 6\pi \sin(\pi(6r - 2)) - \frac{1}{r} \cos(\pi(6r - 2)), & \text{wenn } \frac{1}{3} \leq r \leq \frac{1}{2}, \\ 2\alpha(\frac{5}{2} - 3r)^\beta + \frac{1}{r}, & \text{wenn } \frac{1}{2} \leq r \leq \frac{5}{6}, \\ -3\pi \sin(\pi(6r - 5)) + \frac{1 + \cos(\pi(6r - 5))}{2r}, & \text{wenn } \frac{5}{6} \leq r \leq 1. \end{cases}$$

Für die Funktion

$$u_2(r) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } 0 \leq r \leq \frac{1-\beta}{2}, \\ -\frac{1}{\beta}r + \frac{1+\beta}{2\beta}, & \text{wenn } \frac{1-\beta}{2} \leq r \leq \frac{1+\beta}{2}, \\ 0, & \text{wenn } \frac{1+\beta}{2} \leq r, \end{cases}$$

erhält man mit der Wahl

$$\begin{aligned} & \text{sgn}(\partial_r u_2(r)) \\ &:= \begin{cases} \frac{4}{1-\beta}r \left( \frac{1}{1-\beta}r - 1 \right), & \text{wenn } 0 \leq r \leq \frac{1-\beta}{2}, \\ -1, & \text{wenn } \frac{1-\beta}{2} \leq r \leq \frac{1+\beta}{2}, \\ \frac{4}{(\beta-1)^3} (4r^3 - 3(\beta+3)r^2 + 6(\beta+1)r - 3\beta - 1), & \text{wenn } \frac{1+\beta}{2} \leq r \leq 1, \end{cases} \end{aligned}$$

die rechte Seite

$$f_2(r) := \begin{cases} \alpha - \frac{4}{1-\beta} \left( \frac{3}{1-\beta}r - 2 \right), & \text{wenn } 0 \leq r \leq \frac{1-\beta}{2}, \\ -\frac{\alpha}{\beta} \left( r - \frac{1+\beta}{2} \right) + \frac{1}{r}, & \text{wenn } \frac{1-\beta}{2} \leq r \leq \frac{1+\beta}{2}, \\ \frac{-4}{(\beta-1)^3} \left( 16r^2 - 9(\beta+3)r + 12(\beta+1) - \frac{3\beta+1}{r} \right), & \text{wenn } \frac{1+\beta}{2} \leq r \leq 1. \end{cases}$$

Es folgen zwei Beispiele mit exakter Lösung  $u_3 = u_4 \in H_0^2((0, 1)^2)$ , gegeben durch

$$u_3(r) = u_4(r) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } 0 \leq r \leq \frac{1}{3}, \\ 54r^3 - 81r^2 + 36r - 4, & \text{wenn } \frac{1}{3} \leq r \leq \frac{2}{3}, \\ 0, & \text{wenn } \frac{2}{3} \leq r. \end{cases}$$

Mit der Wahl

$$\begin{aligned} & \text{sgn}(\partial_r u_3(r)) \\ &:= \begin{cases} 54r^3 - 27r^2, & \text{wenn } 0 \leq r \leq \frac{1}{3}, \\ -1, & \text{wenn } \frac{1}{3} \leq r \leq \frac{2}{3}, \\ -54r^3 + 135r^2 - 108r + 27, & \text{wenn } \frac{2}{3} \leq r \leq 1, \end{cases} \end{aligned}$$

erhalten wir die rechte Seite

$$f_3(r) := \begin{cases} \alpha - 216r^2 + 81r, & \text{wenn } 0 \leq r \leq \frac{1}{3}, \\ \alpha(54r^3 - 81r^2 + 36r - 4) + \frac{1}{r}, & \text{wenn } \frac{1}{3} \leq r \leq \frac{2}{3}, \\ 216r^2 - 405r + 216 - \frac{27}{r}, & \text{wenn } \frac{2}{3} \leq r \leq 1, \end{cases}$$

für die gilt  $f_3 \in H_0^1$  und mit der Wahl

$$\begin{aligned} & \text{sgn}(\partial_r u_4(r)) \\ &:= \begin{cases} -1458r^5 + 1215r^4 - 270r^3, & \text{wenn } 0 \leq r \leq \frac{1}{3}, \\ -1, & \text{wenn } \frac{1}{3} \leq r \leq \frac{2}{3}, \\ -243r^4 + 756r^3 - 864r^2 + 432r - 81, & \text{wenn } \frac{2}{3} \leq r \leq 1, \end{cases} \end{aligned}$$



erhalten wir die rechte Seite

$$f_4(r) := \begin{cases} \alpha + 8748r^4 - 6075r^3 + 1080r^2, & \text{wenn } 0 \leq r \leq \frac{1}{3}, \\ \alpha (54r^3 - 81r^2 + 36r - 4) + \frac{1}{r}, & \text{wenn } \frac{1}{3} \leq r \leq \frac{2}{3}, \\ 1215r^3 - 3024r^2 + 2592r - 864 + \frac{81}{r}, & \text{wenn } \frac{2}{3} \leq r \leq 1, \end{cases}$$

für die gilt  $f_4 \in H_0^2$ .

Damit können Experimente durchgeführt werden bei denen `exactSolutionKnown = true` gesetzt werden kann und entsprechend auch der  $L^2$ -Fehler berechnet wird.

Soll nun auch die Differenz der exakten Energie mit der garantierten unteren Energie Schranke (GLEB) berechnet werden, dann werden die stückweisen Gradienten der exakten Lösung und der rechten Seite benötigt.

Dabei gelten folgende Ableitungsregeln für die Ableitungen einer Funktion  $g$ , wenn man ihr Argument  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  in Polarkoordinaten mit Länge  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$  und Winkel  $\varphi = \text{atan2}(x_2, x_1)$ , wobei

$$\text{atan2}(x_2, x_1) := \begin{cases} \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right), & \text{wenn } x_1 > 0, \\ \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right) + \pi, & \text{wenn } x_1 < 0, x_2 \geq 0, \\ \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right) - \pi, & \text{wenn } x_1 < 0, x_2 < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{wenn } x_1 = 0, x_2 > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{wenn } x_1 = 0, x_2 < 0, \\ \text{undefiniert}, & \text{wenn } x_1 = x_2 = 0, \end{cases}$$

auffasst,

$$\begin{aligned} \partial_{x_1} &= \cos(\varphi) \partial_r - \frac{1}{r} \sin(\varphi) \partial_\varphi, \\ \partial_{x_2} &= \sin(\varphi) \partial_r + \frac{1}{r} \cos(\varphi) \partial_\varphi. \end{aligned}$$

Ist  $g$  vom Winkel  $\varphi$  unabhängig, so ergibt sich

$$\nabla_{(x_1, x_2)} g = (\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \partial_r g.$$

Unter Beachtung der trigonometrischen Zusammenhänge

$$\begin{aligned} \sin(\arctan(y)) &= \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}, \\ \cos(\arctan(y)) &= \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \end{aligned}$$

ergibt sich

$$(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) = (x_1, x_2) \frac{1}{r}$$

und damit

$$\nabla_{(x_1, x_2)} g = (x_1, x_2) \frac{\partial_r g}{r},$$

es muss also nur  $\partial_r g$  bestimmt werden.

Die entsprechenden Ableitungen lauten

$$\begin{aligned}
\partial_r f_1(r) &= \begin{cases} 108, & \text{für } r \in [0, \frac{1}{6}], \\ 6\alpha\beta(6r-1)^{\beta-1} + \frac{1}{r^2}, & \text{für } r \in [\frac{1}{6}, \frac{1}{3}], \\ (36\pi^2 + \frac{1}{r^2}) \cos(\pi(6r-2)) + \frac{6\pi}{r} \sin(\pi(6r-2)), & \text{für } r \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}], \\ -\left(6\alpha\beta\left(\frac{5}{2}-3r\right)^{\beta-1} + \frac{1}{r^2}\right), & \text{für } r \in [\frac{1}{2}, \frac{5}{6}], \\ -\left((18\pi^2 + \frac{1}{2r^2}) \cos(\pi(6r-5)) + \frac{1}{2r^2} + \frac{3\pi}{r} \sin(\pi(6r-5))\right), & \text{für } r \in [\frac{5}{6}, 1], \end{cases} \\
\partial_r u_1(r) &= \begin{cases} 0, & \text{wenn } 0 \leq r \leq \frac{1}{6}, \\ 6\beta(6r-1)^{\beta-1}, & \text{wenn } \frac{1}{6} \leq r \leq \frac{1}{3}, \\ 0, & \text{wenn } \frac{1}{3} \leq r \leq \frac{1}{2}, \\ -6\beta\left(\frac{5}{2}-3r\right)^{\beta-1}, & \text{wenn } \frac{1}{2} \leq r \leq \frac{5}{6}, \\ 0, & \text{wenn } \frac{5}{6} \leq r, \end{cases} \\
\partial_r f_2(r) &= \begin{cases} -\frac{12}{(1-\beta)^2}, & \text{wenn } 0 \leq r \leq \frac{1-\beta}{2}, \\ -\frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{r^2}, & \text{wenn } \frac{1-\beta}{2} \leq r \leq \frac{1+\beta}{2}, \\ -\frac{4}{(1-\beta)^3} \left(32r - 9(\beta+3) + \frac{3\beta+1}{r^2}\right), & \text{wenn } \frac{1+\beta}{2} \leq r \leq 1, \end{cases} \\
\partial_r u_2(r) &= \begin{cases} 0, & \text{wenn } 0 \leq r \leq \frac{1-\beta}{2}, \\ -\frac{1}{\beta}, & \text{wenn } \frac{1-\beta}{2} \leq r \leq \frac{1+\beta}{2}, \\ 0, & \text{wenn } \frac{1+\beta}{2} \leq r, \end{cases} \\
\partial_r f_3(r) &= \begin{cases} -432r + 81, & \text{wenn } 0 \leq r \leq \frac{1}{3}, \\ \alpha(162r^2 - 162r + 36) - \frac{1}{r^2}, & \text{wenn } \frac{1}{3} \leq r \leq \frac{2}{3}, \\ 432r - 405 + \frac{27}{r^2}, & \text{wenn } \frac{2}{3} \leq r \leq 1, \end{cases} \\
\partial_r f_4(r) &= \begin{cases} 34992r^3 - 18225r^2 + 2160r, & \text{wenn } 0 \leq r \leq \frac{1}{3}, \\ \alpha(162r^2 - 162r + 36) - \frac{1}{r^2}, & \text{wenn } \frac{1}{3} \leq r \leq \frac{2}{3}, \\ 3645r^2 - 6048r + 2592 - 864 - \frac{81}{r^2}, & \text{wenn } \frac{2}{3} \leq r \leq 1, \end{cases} \\
\partial_r u_{3,4}(r) &= \begin{cases} 0, & \text{wenn } 0 \leq r \leq \frac{1}{3}, \\ 162r^2 - 162r + 36, & \text{wenn } \frac{1}{3} \leq r \leq \frac{2}{3}, \\ 0, & \text{wenn } \frac{2}{3} \leq r \leq 1, \end{cases}
\end{aligned}$$

Mit diesen Informationen kann mit `computeExactEnergyBV.m` die exakte Energie berechnet werden und somit durch eintragen der exakten Energie in die Variable `exactEnergy` im Benchmark und setzen der Flag `useExactEnergy=true` das Experiment durch anschließendes Ausführen von `startAlgorithmCR.m` gestartet werden.

## 8 Auswertung

In diesem Abschnitt werden wir die in Kapitel 7 erhaltenen Ergebnisse aus-

folgendes weniger ausführlich einbringen, wohl auch eher im Auswertungskapitel „in Bartels wird in citeEntsprechendesLemma die garantierte Rate für ... bewiesen. In unseren Experimenten ...

Zunächst betrachten wir [Bar15b, S. 309, Theorem 10.7]. Diese Abschätzung kontrolliert den  $L^2$ -Fehler zwischen den Minimierern  $u_C \in S^1(\mathcal{T})$  und  $u \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$  des Funktionals  $I$  aus Gleichung (1.1) in den entsprechenden Räumen. Obwohl wir eine andere Formulierung des ROF-Modells betrachten und sich insbesondere das Funktional  $E_{\text{NC}}$  aus unserer diskreten, nichtkonformen Formulierung von  $I$  unterscheidet, ähneln sich die Probleme möglicherweise genug, um die folgende Rate für unsere Formulierungen experimentell feststellen zu können.

**Theorem 8.1.** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  sternförmig und  $g \in L^\infty(\Omega)$ . Seien weiterhin  $u \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$  und  $u_C \in S^1(\mathcal{T})$  die Minimierer des Funktionals  $I$  aus Gleichung (1.1) in den entsprechenden Räumen.*

*Dann existiert eine Konstante  $c \in \mathbb{R}_+$ , sodass*

$$\frac{\alpha}{2} \|u - u_C\|^2 \leq ch^{1/2}.$$

# Literatur

- [ABM14] Hedy Attouch, Giuseppe Buttazzo und Gérard Michaille. *Variational Analysis in Sobolev and BV Spaces. Applications to PDEs and Optimization*. Second Edition. Bd. 17. MOS-SIAM Series on Optimization. Philadelphia: Society for Industrial und Applied Mathematics, Mathematical Optimization Society, 2014. ISBN: 978-1-611973-47-1.
- [AK06] Gilles Aubert und Pierre Kornprobst. *Mathematical Problems in Image Processing. Partial Differential Equations and the Calculus of Variations*. Second Edition. Bd. 147. Applied Mathematical Sciences. New York: Springer, 2006. ISBN: 0-387-32200-0.
- [Bar12] Sören Bartels. „Total variation minimization with finite elements: convergence and iterative solution“. In: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 50.3 (2012), S. 1162–1180. URL: <https://doi.org/10.1137/11083277X>.
- [Bar15a] Sören Bartels. „Error control and adaptivity for a variational model problem defined on functions of bounded variation“. In: *Mathematics of Computation* 84.293 (2015), S. 1217–1240. URL: <https://doi.org/10.1090/S0025-5718-2014-02893-7>.
- [Bar15b] Sören Bartels. *Numerical Methods for Nonlinear Partial Differential Equations*. Bd. 47. Springer Series in Computational Mathematics. Springer International Publishing, 2015. ISBN: 978-3-319-13796-4. DOI: 10.1007/978-3-319-13797-1.
- [Bra98] Andrea Braides. *Approximation of free-discontinuity problems*. Bd. 1694. Lecture Notes in Mathematics. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1998. ISBN: 3-540-64771-6. URL: <https://doi.org/10.1007/BFb0097344>.
- [Car+10] Carsten Carstensen u. a. „AFEM-Dokumentation“. lokal verfügbar, 2010.
- [Car09a] Carsten Carstensen. *AFEM-Softwarepaket der Arbeitsgruppe Numerische Analysis*. Institut für Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin, 2009.
- [Car09b] Carsten Carstensen. „Yonsei Lectures at the WCU Department Computational Science and Engineering on Finite Element Method“. lokal verfügbar, 2009.
- [CGR12] Carsten Carstensen, Joscha Gedicke und Donsub Rim. „Explicit error estimates for Courant, Crouzeix-Raviart and Raviart-Thomas finite element methods“. In: *Journal of Computational Mathematics* 30.4 (2012), S. 337–353. ISSN: 0254-9409. DOI: 10.4208/jcm.1108-m3677. URL: <https://doi.org/10.4208/jcm.1108-m3677>.
- [CGS15] Carsten Carstensen, Dietmar Gallistl und Mira Schedensack. „Adaptive non-conforming Crouzeix-Raviart FEM for eigenvalue problems“. In: *Mathematics of Computation* 84.293 (2015), S. 1061–1087. ISSN: 0025-5718. DOI: 10.1090/S0025-5718-2014-02894-9. URL: <https://doi.org/10.1090/S0025-5718-2014-02894-9>.

- [CH18] Carsten Carstensen und Friederike Hellwig. „Constants in Discrete Poincaré and Friedrichs Inequalities and Discrete Quasi-interpolation“. In: *Computational Methods in Applied Mathematics* 18.3 (2018), S. 433–450. ISSN: 1609-4840. DOI: 10.1515/cmam-2017-0044. URL: <https://doi.org/10.1515/cmam-2017-0044>.
- [CP10] Antonin Chambolle und Thomas Pock. „A First-Order Primal-Dual Algorithm for Convex Problems with Applications to Imaging“. In: *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 40 (2010), S. 120–145. ISSN: 0924-9907. DOI: 10.1007/s10851-010-0251-1. URL: <https://doi.org/10.1007/s10851-010-0251-1>.
- [Dac89] Bernard Dacorogna. *Direct Methods in the Calculus of Variations*. Bd. 78. Applied Mathematical Sciences. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1989. ISBN: 978-3-642-51442-5.
- [EG92] Lawrence C. Evans und Ronald F. Gariepy. *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. CRC Press, 1992. ISBN: 0-8493-7157-0.
- [EM73] Martin A. Eisenberg und Lawrence E. Malvern. „On finite element integration in natural co-ordinates“. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 7 (4 1973), S. 574–575. URL: <https://doi.org/10.1002/nme.1620070421>.
- [Get12] Pascal Getreuer. „Rudin-Osher-Fatemi Total Variation Denoising using Split Bregman“. In: *Image Processing On Line* 2 (2012), S. 74–95. URL: <https://doi.org/10.5201/ipol.2012.g-tvd>.
- [Roc70] R. Tyrrell Rockafellar. *Convex Analysis*. New Jersey: Princeton University Press, 1970. ISBN: 0-691-08069-0.
- [ROF92] Leonid I. Rudin, Stanley Osher und Emad Fatemi. „Nonlinear total variation based noise removal algorithms“. In: *Physica D: Nonlinear Phenomena*. Bd. 60. 1-4. 1992, S. 259–268. DOI: 10.1016/0167-2789(92)90242-F. URL: [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(92\)90242-F](https://doi.org/10.1016/0167-2789(92)90242-F).
- [Zei85] Eberhard Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications. III: Variational Methods and Optimization*. New York: Springer Science+Business Media, LLC, 1985. ISBN: 978-1-4612-9529-7.
- [Zei86] Eberhard Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications. I: Fixed-Point Theorems*. New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo: Springer-Verlag, 1986. ISBN: 0-387-90914-1.
- [Zei90a] Eberhard Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications. II/A: Linear Monotone Operators*. New York: Springer Science+Business Media, LLC, 1990. ISBN: 978-1-4612-6971-7.
- [Zei90b] Eberhard Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications. II/B: Nonlinear Monotone Operators*. New York: Springer Science+Business Media, LLC, 1990. ISBN: 978-1-4612-6969-4.

# Selbständigkeitserklärung

Ich erkläre, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und noch nicht für andere Prüfungen eingereicht habe. Sämtliche Quellen, einschließlich Internetquellen, die unverändert oder abgewandelt wiedergegeben werden, insbesondere Quellen für Texte, Grafiken, Tabellen und Bilder, sind als solche kenntlich gemacht. Mir ist bekannt, dass bei Verstößen gegen diese Grundsätze ein Verfahren wegen Täuschungsversuchs bzw. Täuschung eingeleitet wird.

Berlin, den 14. Juli 2021,