

Humboldt-Universität zu Berlin  
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät  
Institut für Mathematik



# **Non-Conforming Methods for Functions of Bounded Variation**

## **Bachelor Thesis**

Enrico Bergmann

Version: 11. März 2019

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2. Theoretische Grundlagen</b>	<b>8</b>
2.1. Vorbereitung . . . . .	8
2.2. Funktionen beschränkter Variation . . . . .	8
<b>3. Functions of Bounded Variation</b>	<b>9</b>
<b>4. Chapter Number two</b>	<b>10</b>
<b>A. Appendix</b>	<b>11</b>

# 1. Einleitung

[ABM] modelization of a large number of problems in physics, mechanics, or image processing requires the introduction of new functionals spaces permitting discontinuities of the solution. In phase transitions, image segmentation, plasticity theory, the study of cracks and fissures, the study of the wake in fluid dynamics , and so forth, the solution of the problem presents discontinuities along one-odimensionalmanifolds. - solution of these problems cannot be found in classical Sobolev spaces

[Braided] 1st page: image reconstruction might be our functional

*Bemerkung 1.1.* Lorem ipsum dolor sit amet, vivamus morbi eros, odio sagittis cras ipsum suspendisse proin iaculis, venenatis nec massa justo integer integer diam, elementum turpis ridiculus, et et felis tortor velit morbi. Lacus tortor semper sollicitudin integer orci, scelerisque imperdiet at scelerisque neque montes id, sit vitae nec vulputate imperdiet, tempus habitant ac penatibus eu cras, sollicitudin phasellus non fringilla nulla. Amet est id nec. Ante ullamcorper per at et nisl. Augue in donec arcu aliquet iaculis, et convallis sit vivamus viverra purus, ultrices ut ut sed ut vitae risus, sed nulla fusce sit blandit praesent id. Donec lectus arcu. A sit. Placerat nisl habitasse, dui parturient dui ac dictum commodo, sit condimentum mattis cum fringilla adipiscing. Morbi lacinia diam, nonummy lorem curabitur quam sapien. Tincidunt congue ut dui hendrerit exercitationem eget, urna porttitor phasellus a vitae, suspendisse non potenti vivamus, quis nibh. Culpa eget tincidunt lectus arcu orci tellus, orci vehicula sed proin, erat sagittis fermentum volutpat ultricies erat. Eu tempor, velit eros, suscipit sit lectus aenean aliquam eget, enim rutrum, non nulla sodales.

Laoreet egestas pellentesque dictum porta at. Id sit nullam in, luctus volutpat sed ac, commodo tempus vulputate aliquam, potenti pulvinar amet eu ipsum, nec velit nisl augue turpis volutpat vestibulum. Sed id, quam etiam ipsum nunc, fringilla wisi do facilisis varius nec, eu aliquam fermentum quis nec sodales elit, curabitur ullamcorper tempus gravida donec ante sed. Lorem nulla ac mus vivamus congue, sit pulvinar hac magna arcu, metus quis odio, quisque posuere, nisl in metus eget sollicitudin in nibh. Odio eget ullamcorper integer suspendisse. Lectus fusce egestas lacus vel massa, auctor a accumsan eu faucibus consectetur morbi, non orci eros porttitor convallis. Velit faucibus nunc erat fusce, erat in mattis volutpat risus aliquam, lacus non diam non. Lectus massa molestie, nunc vulputate lobortis mauris, tempor tellus, sapien ut per, vestibulum orci massa ligula. Wisi fusce ut magna sit eiusmod sem, feugiat et non ac amet id sit, erat sed a neque vivamus nulla. Turpis mauris mi senectus ligula volutpat, ligula sit dictumst non, ipsum mauris ullamcorper lectus eget, consectetur in wisi sodales faucibus et molestie. Eleifend non ipsum, vestibulum tempor arcu dui. Velit porta imperdiet, a conubia, sociis quis autem metus luctus, nec lorem posuere sit tellus habitant vivamus. Lacinia sodales cursus vitae vestibulum vehicula est, diam dignissim porta non, nunc elementum risus. Viverra est id eget condimentum cursus, sed vitae luctus id per quis enim. Ipsum magna ea elit, lacinia natoque, condimentum dui dictumst volutpat erat aenean, magna mau-

## 1. Einleitung

ris. Turpis aliquam. Eu massa amet elit habitasse ac, facilisis lorem neque nisl lorem nam donec, ultrices auctor vitae elit, semper sit, rutrum eu duis luctus aenean metus accumsan. Suspendisse neque nunc, lobortis diam auctor nullam nisl. Quisque nam lectus elit, eu vel cras ac. Sed amet, vitae mollis mattis, pretium mauris pulvinar tincidunt velit. Ante magna ut, interdum ut varius id arcu tempor consequat, doloribus integer laoreet, ridiculus dignissim nunc nunc penatibus, donec pretium arcu aliquet nunc a pellentesque. Enim quam ac nullam accumsan interdum felis, et donec, amet tellus, neque libero varius voluptate quis consecetur. Suspendisse nisl a, risus netus morbi torquent nascetur ante, consequat sollicitudin ut maecenas nam erat sem, et vestibulum felis aliquam ante. Beatae ultrices quam, blandit vel aliquam donec dolor vestibulum. Pulvinar sed dui morbi nullam, sit felis, aliquam sit nulla, dolorum at. Cursus neque cras iaculis elit iaculis interdum, orci massa sollicitudin luctus volutpat id, mi lacinia consequat aptent orci mollis. Risus placerat turpis adipiscing ultricies, luctus velit arcu porttitor risus pellentesque, quam primis odio nulla placerat, ultrices nullam malesuada condimentum aliquam. Nisl ut nibh. Et consecetur vel enim, adipiscing ipsum eget quis amet suscipit, lectus tellus massa libero lacus ullamcorper, id ullamcorper tortor non, pede nulla ac urna nec consequatur in. Morbi quisque risus eros eu, cras suspendisse bibendum sem vel, proin ligula non magna pede nonummy diam, tincidunt neque orci fusce pellentesque. Consecetur aliquet elit, velit wisi molestie vel odio, id mauris imperdiet, ullamcorper ultrices egestas in nec scelerisque, scelerisque id. Faucibus lobortis, nunc orci leo sapien ac posuere tincidunt, magnis purus. Nam phasellus scelerisque sem vestibulum est, auctor ut a sit, at velit libero wisi neque libero, vitae amet molestie. Nulla orci erat sociis enim. Erat non sociis etiam, eleifend ut lectus vivamus, fringilla et est. Phasellus volutpat tristique, aliquam euismod nunc, faucibus libero arcu aliquam, ut posuere etiam praesent gravida. Fusce curabitur morbi, pellentesque sagittis ac cras, arcu placerat est nibh. Aliquam facilisis facilisis, non cras amet faucibus morbi. Mauris nulla nec neque lectus, in pede dolor voluptatem, tincidunt gravida nec vel lorem lorem. Vestibulum nibh wisi arcu, aliquam ut aliquam velit, ut posuere metus, ut etiam donec congue potenti. Donec elit non, provident faucibus sem mauris ac, adipiscing a ante felis scelerisque commodo est. Cras id in donec fringilla posuere, ornare vitae orci enim. Ipsam etiam felis gravida ultrices. Cras ut, vehicula suspendisse nullam aliquet donec vestibulum consequat. Nunc massa ultricies sit. Tempor libero in nulla ornare, neque eget vestibulum scelerisque consequat felis cursus, tortor tellus eleifend lacinia pede nullam donec. Cum pede proin, condimentum id suscipit eu sit eget. Lacinia imperdiet, convallis eu ac lacus tincidunt, nulla porta vitae quam dolor. Volutpat sit, ipsum quam est, metus convallis egestas mi erat massa. Quam sapien laoreet urna mattis dignissim, purus sit porta ante nascetur lorem. Fringilla venenatis, curabitur eros per elit curabitur ultrices odio, donec esse pellentesque fringilla, lorem sed duis malesuada. Augue nibh, nonummy rutrum viverra sed, diam sodales vitae eros a suspendisse. Pellentesque wisi maecenas feugiat. Et facilisis sodales pellentesque eget neque sit, nisl wisi. Lacus eu elit commodo, ipsum dolor condimentum magna, gravida sed quis pretium. Curae tempus tortor, eget sociosqu semper habitasse pellentesque integer, lacinia sed quis sit nulla vestibulum, pellentesque nunc purus quis euismod ultricies. Sed suspendisse pharetra tortor cupidatat, quis nec est neque diam vitae, facilisis fusce neque libero. Suspendisse vulputate fermentum wisi auctor quis metus, cras volutpat enim lorem pellentesque, molestie dictumst bibendum, vitae id curabitur neque non. Faucibus feugiat, mauris semper erat dic-

tumst proin torquent, commodo nulla donec blandit ut mauris mauris, et sed nunc aliquet. Cras enim et scelerisque quis quia, amet vivamus ornare at. Cras orci sociosqu arcu, nostra posuere ut euismod phasellus. Cum a mauris, erat in, ultrices amet lorem, neque pede egestas curabitur vitae gravida bibendum. Fermentum lacus dolor, taciti metus magna interdum anim dui lacus, vel venenatis nunc aliquam cras eros, molestie in pharetra sed sollicitudin. Modi condimentum dui vel class, non viverra consectetur, sit sem lorem id ridiculus pede. Morbi odio donec vitae ipsum convallis phasellus, metus proin sed mattis. Imperdiet nascetur justo a nisl integer morbi, dapibus vitae, iaculis libero pellentesque vulputate rhoncus integer mauris, sed sem dui facilisi sed. Sit placerat. Adipiscing vel est dui elit tincidunt, lorem donec ornare, nec id, sit lorem risus aenean in ultricies vulputate, volutpat ligula ac vestibulum laoreet. Consequat id nam aliquam, ipsum est. Amet varius non non, sed morbi. Aliquam vestibulum arcu aliquam, iaculis voluptate, ipsum nisl laoreet. Beatae et, elit sem. Consequat amet mus blandit curabitur. Cras condimentum adipiscing sed molestie. Quisque posuere ornare non tellus, tempor condimentum et, amet lacinia sodales sollicitudin risus. Consectetur et rutrum lacus sociis aenean eros, nullam nam cum. Vitae id ante in aliquam, aptent eget id nullam cras ante dolor, commodo ut velit euismod porta vehicula. Arcu velit volutpat nec a sit morbi, in tempor varius, enim mauris, vestibulum vulputate nec tristique. Purus ipsum nulla purus, sit tellus, adipiscing magna ullamcorper suscipit ac faucibus arcu. Pretium ac nec aliquam scelerisque nulla. Egestas amet pretium nunc, nulla magna luctus aliquam, ut praesent sed pellentesque augue, enim dui aliquam, justo adipiscing tincidunt arcu id sodales. Tempor quam fusce et quis orci maecenas. Platea sapien ipsum ipsum, lorem vivamus non lacus dui purus, nisl enim laoreet. Proin arcu volutpat, praesent nulla dui quis iaculis elit, sit wisi posuere, at mauris vivamus velit aptent, habitant porttitor vestibulum nascetur lectus aliquam. Amet neque, pede diam rhoncus dignissim vehicula sed, dui phasellus a vivamus nec. Libero nullam tempor vehicula, nec vivamus nonummy neque, elit lorem purus nullam consequat. Nibh rhoncus sagittis, tempor aliquam mi ullamcorper nunc donec rhoncus, fusce tortor adipiscing vivamus tristique, nunc diam urna morbi odio arcu vestibulum, laoreet habitant suscipit tincidunt dignissim. Magna ut nonummy sapien amet mus nulla. Consequat ac sunt dui nonummy, mi sed amet placerat. Felis est. Vel metus integer. Leo dictumst commodi nonummy amet. Urna est fermentum lectus lectus, aptent ornare, lorem sapien nunc morbi lorem quis et, a a dictum rutrum lectus, massa etiam egestas elementum integer risus. Augue nec purus lectus in. Metus orci auctor, in sed dui volutpat nonummy, faucibus mollis turpis wisi pellentesque, sed lectus condimentum mollit euismod in ac, mauris ullamcorper velit. Lobortis nulla molestie felis, integer amet ultricies et porttitor vestibulum leo, eros amet, ornare nec malesuada. Litora nibh magna ligula in vivamus morbi. Elit justo aenean eu illum suspendisse sociis, vulputate sit nunc malesuada at amet, libero sed wisi in eget quas mus, lectus nec venenatis hendrerit ultricies scelerisque. Augue vulputate, diam imperdiet suscipit massa id vel, vestibulum eu dictumst aliquam habitasse massa pulvinar. Aliquam sit sit massa vel at, dui tellus massa aenean penatibus. Pede pharetra quam ullamcorper et habitasse, sollicitudin id rutrum augue ultrices, id massa mus nulla id. Voluptatibus pulvinar eget dui ultrices integer aliquet, velit porttitor egestas magna, vivamus ornare nunc dolore nunc nunc, dui tristique, phasellus sed hymenaeos volutpat amet arcu. Ac amet elit odio sunt mattis aliquam, parturient adipiscing odio etiam et velit, sed viverra curabitur amet, sed

## 1. Einleitung

volutpat egestas mollis, arcu scelerisque nunc pellentesque commodo. Nec posuere facilisis, iaculis suspendisse dolor nam quis sed eget, enim suscipit ipsum ultrices, dignissim lacinia wisi fusce convallis. Dolor in suscipit in, sed ut quis. Potenti non, auctor mi, risus tellus metus vivamus nullam torquent felis, sit vivamus bibendum placerat. Porta amet urna debitis pede rem vivamus, purus eleifend donec ut. Ac tortor posuere aliquam molestie mauris potenti, parturient tempor orci tellus. Dictum vitae sodales eu dolor nam, semper orci per eros dui, aenean pretium erat, ut etiam vehicula mattis nunc mi tincidunt. Curabitur nonummy sapien luctus vulputate et, placerat nec id orci urna donec rutrum, integer at, odio sed duis mauris in sodales. Vel maecenas mauris turpis, orci elit in placerat sit fermentum, purus nunc, ut sit et. Pharetra nulla in wisi, platea sapien. Massa risus, maecenas pellentesque, wisi orci, auctor quam sed praesent elementum id magna. In pellentesque morbi, a libero in urna ligula praesent, rutrum sagittis cum. Occaecati curae elementum lectus pellentesque aliquam fringilla, sapien vivamus pede vel interdum lorem, arcu enim. Nulla erat leo, sed justo mauris blandit mauris eleifend suspendisse, taciti non ante nonummy. Nibh lacus lectus turpis integer luctus, nam molestie eget nunc leo eros, volutpat ac aliquam. Vestibulum iaculis fermentum dolor ornare neque, non mi metus et, justo lectus nulla quis, erat vestibulum wisi est sed, elit leo est curabitur. Eu id dictumst leo at. Vulputate luctus rerum mi sociis nulla donec. Velit et egestas, id in. Accumsan sit per vestibulum molestie posuere, leo phasellus risus magnis, vivamus venenatis suspendisse, hendrerit egestas quam amet. Orci adipiscing integer suspendisse sodales interdum lacus, montes vitae cum pede duis, felis risus pellentesque est fermentum elit neque, orci leo arcu nam. Amet amet fermentum eros, metus accumsan id, mollis tortor sit sit, iaculis egestas suspendisse, aliquet arcu volutpat aliquet neque quis tempus. Ac nibh non mus, massa lectus, elementum morbi sit mauris rhoncus risus odio, arcu molestie sagittis sed. Lacinia dolor. Adipiscing ad fusce. Tincidunt lacinia elementum, ultrices quis id fermentum, urna a. Proin amet turpis, quis parturient nibh laoreet quisque at nonummy, donec malesuada accumsan tempus arcu elit litora, mi turpis, amet pede dolor fusce blandit. Urna vestibulum eu, lorem morbi tempor, id eu. Id sit dolor semper odio nunc, varius vel turpis dictum sit. Amet convallis, in nam, ipsum viverra et pharetra mollis. Mi ipsum, sapien mi at vel in donec sapien, duis ea vulputate quisque vestibulum sunt, rhoncus non. Curabitur integer id consetetuer at turpis nunc. At nec nonummy arcu suspendisse lectus. In per tellus commodo metus proin. Sed ultricies et vitae ultricies quam nibh, massa pede lectus ligula suscipit omnis vestibulum, eget non accumsan, duis molestie egestas ipsum eu, sit at quam arcu phasellus. Et maecenas feugiat vel id vel amet. Habitasse fermentum eros a nullam mattis tristique. Diam tellus, odio aliquam dignissim etiam enim pellentesque risus, wisi odio sodales eu urna, fames nam nam amet amet. Mauris aliquam tortor id lacinia purus sit. Aut sed platea proin, mollis libero in natoque aliquam. Sit nisl phasellus sodales mauris ante luctus, felis sapien augue nec proin commodo, habitant augue ligula ligula praesent tortor, at arcu a id. Vitae pede in adipiscing feugiat eu, posuere eros posuere et mauris. Cras mollis neque. Donec non tristique suscipit mattis amet elementum, sem elit vestibulum vestibulum urna volutpat, varius varius praesent pellentesque, semper condimentum in donec. Magna sed ante augue amet praesent, egestas metus diam odio et blandit ipsum, facilisi dictum id feugiat gravida. Etiam id mattis duis, nulla velit ut rutrum lectus, ultrices et ut pede ut. In tempor enim ultrices, wisi fusce sagittis et aliquet, augue amet ut maecenas odio sed vitae, nunc ac. Urna

donec tortor nulla vel vel, lectus vestibulum, vel ullamcorper sed non neque nisl, nisl massa penatibus enim. Pede sodales sit, metus aliquam. Placerat orci ac accumsan egestas curabitur aliquam, sed fermentum, arcu sed. Rutrum vulputate habitant sodales donec vel, tempor a scelerisque lacus at fusce esse, tristique morbi bibendum orci et, lacinia potenti sunt penatibus erat. Id ac dui leo, magna vitae quam. Arcu semper sit integer mi id, mi quisque egestas velit phasellus sed, fermentum vel, eros phasellus luctus. Felis sit nibh id risus urna, eget faucibus ligula rhoncus non nisl in. Iaculis ac ut diam gravida leo. Pede nisl aliquam urna. Arcu eu euismod vestibulum fringilla mi, fringilla ultrices urna metus nunc orci eget, dui vitae erat, risus pretium suspendisse nulla sapien ipsum. Suspendisse nibh officiis, arcu donec suscipit tempor turpis, tincidunt augue. In tellus nec es

## 2. Theoretische Grundlagen

Dieser Abschnitt folgt dem einführenden Kapitel von [braidesApprox] und für genauere Informationen sei an dieser Stelle darauf verwiesen.

### 2.1. Vorbereitung

**Definition 2.1.** Sei  $\mathcal{B}(\Omega)$  die Familie aller Borelmengen in  $\Omega$  und  $\mathcal{B}_C(\Omega)$  die Menge aller Borelmengen mit kompaktem Abschluss in  $\Omega$ .

Eine Funktion  $\mu : \mathcal{B}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^N$  heißt (Vektor-) Maß auf  $\Omega$ , wenn sie abzählbar additiv ist, d.h. für  $B \in \mathcal{B}(\Omega)$  und  $(B_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}(\Omega)$  mit  $B_j \cap B_k = \emptyset$  für  $j \neq k$  gilt

$$B = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j \Rightarrow \mu(B) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(B_j).$$

Die Menge aller dieser Maße sei  $\mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ .

Im Fall  $N = 1$  heißt  $\mu$  skalares Maß. Falls  $\mu$  zusätzlich nur Werte in  $[0, \infty)$  annimmt, heißt es positives Maß. Die Menge aller skalaren Maße sei  $\mathcal{M}(\Omega)$  und die Menge aller positiven Maße sei  $\mathcal{M}_+(\Omega)$ .

Eine Funktion  $\mu : \mathcal{B}_C(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^N$  heißt Radonmaß auf  $\Omega$ , wenn  $\mu|_{\mathcal{B}(\Omega')}$  ein Maß auf jeder Menge  $\Omega' \subset\subset \Omega$  (d.h.  $\text{cl}(\Omega') \subset \text{int}(\Omega)$ ) ist.

### 2.2. Funktionen beschränkter Variation

test



### 3. Functions of Bounded Variation

**Definition 3.1** (Functions of bounded variation.).  $f$  is said to be of bounded variation if

$$f = 2$$

## 4. Chapter Number two

**Theorem 4.1** (first thm in chaoter 2). *dat it is*

*Beweis.* trivial

□

# A. Appendix

bla

# Selbständigkeitserklärung

Ich erkläre, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und noch nicht für andere Prüfungen eingereicht habe. Sämtliche Quellen, einschließlich Internetquellen, die unverändert oder abgewandelt wiedergegeben werden, insbesondere Quellen für Texte, Grafiken, Tabellen und Bilder, sind als solche kenntlich gemacht. Mir ist bekannt, dass bei Verstößen gegen diese Grundsätze ein Verfahren wegen Täuschungsversuchs bzw. Täuschung eingeleitet wird.

Berlin, den 11. März 2019,