

Humboldt-Universität zu Berlin  
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät  
Institut für Mathematik



# **Die Crouzeix-Raviart-Finite-Elemente-Methode für eine Minimierung im Raum der Funktionen von beschränkter Variation**

Enrico Bergmann

Version: 1. April 2021

# Inhaltsverzeichnis

<b>Todo list</b>	<b>4</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>5</b>
<b>2 Theoretische Grundlagen</b>	<b>8</b>
2.1 Vorausgesetztes Wissen . . . . .	8
2.2 Notation . . . . .	8
2.3 Crouzeix-Raviart-Finite-Elemente-Funktionen . . . . .	9
2.4 Variationsrechnung auf Banachräumen . . . . .	10
2.5 Subdifferentiale . . . . .	11
2.6 Funktionen beschränkter Variation . . . . .	12
<b>3 Das kontinuierliche Problem</b>	<b>14</b>
3.1 Formulierung . . . . .	14
3.2 Existenz eines eindeutigen Minimierers . . . . .	14
<b>4 Das diskrete Problem</b>	<b>18</b>
4.1 Formulierung . . . . .	18
4.2 Charakterisierung und Existenz eines eindeutigen Minimierers . . . . .	18
4.3 Kontrolle des Abstandes zwischen diskreter und kontinuierlicher Lösung . .	23
4.4 Verfeinerungsindikator und garantierte untere Energieschranke . . . . .	24
<b>5 Iterative Lösung</b>	<b>26</b>
5.1 Primale-duale Iteration . . . . .	26
5.2 Konvergenz der Iteration . . . . .	26
<b>6 Implementierung</b>	<b>30</b>
6.1 Seitennummerierungskonvention lokal . . . . .	30
6.2 Aufstellung des zu lösenden LGS . . . . .	30
6.3 Berechnung der Werte einer CR Funktion auf einem Element in den Knoten	30
6.4 Berechnung der L1 Norm der Sprünge . . . . .	30
6.5 Implementation der GLEB . . . . .	31
6.6 Implementation des Refinement Indicators . . . . .	31
6.7 Implementaiton der exakten Energie Berechnung . . . . .	31
<b>7 Nutzung des Programms</b>	<b>32</b>
7.1 Erstellen eines lauffähigen Benchmarks (Minimalbeispiel) . . . . .	32
7.2 Konstruktion eines Experiments mit exakter Lösung . . . . .	32
7.3 Bilder als Input und Rauschverminderung . . . . .	35
7.4 Alternative Kapitelstruktur: Anwendung am Beispiel der Benchmarks . . .	35
7.4.1 Experimente mit exakter Lösung: Benchmarks 'f01Bench' und 'f02'	
Bench . . . . .	35
7.4.2 Bilder als Input und Rauschverminderung: 'cameramanBench' und	
... . . . .	35
<b>8 Numerische Beispiele</b>	<b>36</b>

**9 Auswertung**

**37**

# Zusammenfassung

todo todo todo, vielleicht auch eher for dem Inhaltsverzeichnis?

Titelseite nach Vorgaben in Formalien-Lesezeichen-Ordner anpassen

Konvergenz im Fließtext nicht mit overset sondern das n to infity dahinter im Fließtext

# 1 Einleitung

In der Bildverarbeitung kann ein gegebenes Signal häufig nur durch eine unstetige Funktion dargestellt werden. Deshalb stellt sich zunächst die Frage, welcher Funktionenraum zum Beschreiben dieser Signale geeignet ist.

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stelle ein gegebenes Signal auf  $\Omega$  dar. Das Signal  $g$  könnte im Sobolev-Raum  $W^{1,1}(\Omega)$  vermutet werden, da Elemente dieses Raums im Allgemeinen nicht stetig sein müssen. Allerdings lassen Sobolev-Funktionen die oftmals benötigten Sprünge über Teilmengen niedrigerer Dimension von  $\Omega$  nicht zu [Bar15b, S. 297]. Dieses Problem kann gelöst werden, indem der Raum der Funktionen von beschränkter Variation  $BV(\Omega)$  betrachtet wird. Dieser ist eine echte Obermenge von  $W^{1,1}(\Omega)$  und hat sich als geeignet für die Modellierung von Signalen in der Bildverarbeitung und weitere Anwendungen erwiesen (cf. [ABM14, S. 393; AK06, S. 42; Bar15b, S. 297; Bra98, S. 1 f.]).

Quelle?

Quelle?

Eine mögliche Problemstellung in der Bildverarbeitung ist die Rauschunterdrückung, das heißt der Versuch unerwünschtes Rauschen in einem Signal zu verringern. In [ROF92] beschrieben Rudin, Osher und Fatemi 1992 das heute als ROF-Modell bekannte Minimierungsproblem dafür (cf. [Bar15a, S. 1217; CP10, S. 132; Get12, S. 74 f.]). Dabei ist für das gegebene Signal  $g \in L^2(\Omega)$  und eine Funktion  $v \in BV(\Omega) \cap L^2(\Omega)$  die Minimierung der Summe der zwei folgenden Terme relevant. Der erste Term ist die Seminorm

$$|v|_{BV(\Omega)} := \sup_{\substack{\phi \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}^2) \\ |\phi| \leq 1}} \int_{\Omega} v \operatorname{div}(\phi) \, dx < \infty.$$

von  $v$  auf  $BV(\Omega)$  [Bar12, S. 1162]. Diese entspricht der totalen Variation der distributionellen Ableitung  $Dv$  von  $v$  und ihre Minimierung verhindert Oszillationen in der Lösung, lässt aber Unstetigkeiten zu [Get12, S. 72]. Außerdem stimmt diese, falls  $v \in W^{1,1}(\Omega)$ , mit der Seminorm auf  $W^{1,1}(\Omega)$  überein. Der zweite Term  $\|v - g\|_{L^2(\Omega)}^2$  misst den Abstand von  $v$  und  $g$  in  $L^2(\Omega)$ . Die Minimierung dieses Terms bewirkt, dass die Lösung dem Eingangssignal ähnelt. Mit diesen Termen und mit einem positiven Parameter  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ , der das Verhältnis zwischen Rauschverminderung und Ähnlichkeit der Lösung zum Eingangssignal gewichtet, sucht das ROF-Modell eine Funktion  $u \in BV(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ , die das Funktional

Verweis auf später?

Quelle? Verweis auf später?

$$I(v) := |v|_{BV(\Omega)} + \frac{\alpha}{2} \|v - g\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (1.1)$$

unter allen  $v \in BV(\Omega) \cap L^2(\Omega)$  minimiert.

Wird hierbei  $\alpha$  zu klein gewählt, führt das zu einer zu stark geglätteten, verwaschen aussehenden Lösung, zu sehen zum Beispiel in den Abbildungen 1.1c und 1.1d. Wird andererseits  $\alpha$  zu groß gewählt, ist die Verminderung des Rauschens im Vergleich zum Eingangssignal  $g$  nur gering, zu sehen zum Beispiel in den Abbildungen 1.1f und 1.1g.

Für weitere Details und Referenzen zur Rauschunterdrückung und zur Wahl von  $\alpha$  siehe [Get12].

Zur numerischen Behandlung dieses Problems gibt es bereits einige Ansätze. Dazu gehören die Regularisierung der Seminorm  $|\cdot|_{BV(\Omega)}$ , indem die Betragsfunktion  $|\cdot|$  durch eine stetig differenzierbare Approximation  $|\cdot|_\varepsilon$  ersetzt wird, und die Nutzung von höheren Ableitungen in der Definition von  $|\cdot|_{BV(\Omega)}$ . Vor- und Nachteile dieser Ansätze und entsprechende Referenzen werden in [Bar12, S. 1165] zusammengefasst. Außerdem wird ebenda

auf Arbeiten verwiesen, in denen verschieden iterative Lösungsmethoden für das ROF-Modell-Problem diskutiert werden.

Professor Bartels selbst untersucht in [Bar15b, Kapitel 10.2] eine  $W^{1,1}$ -konforme Diskretisierung des ROF-Modells mit der Courant-Finite-Elemente-Methode. Zur numerischen Lösung dieser diskreten Formulierung nutzt er eine primale-duale Iteration, welche motiviert ist durch Betrachtung der primalen und der dualen Formulierung des Minimierungsproblems. Eine Regularisierung oder die Nutzung höherer Ableitungen für die BV-Seminorm werden dabei nicht benötigt.

In dieser Arbeit möchte wir die Anwendung dieser primalen-dualen Iteration auf eine nichtkonforme Formulierung des ROF-Modells und einer Diskretisierung mit der Crouzeix-Raviart-Finite-Elemente-Methode untersuchen. Dabei nutzen wir einen von Professor Carstensen zur Verfügung gestellten Verfeinerungsindikator, um die Iteration sukzessiv auf einer Folge von uniform oder adaptiv verfeinerten Netzen anzuwenden. Außerdem erlaubt uns die nichtkonforme Formulierung die Betrachtung einer garantierten unteren Energieschranke, welche ebenfalls von Professor Carstensen zur Verfügung gestellt wurde.

Die Implementation des adaptiven Algorithmus basiert auf dem Matlab-Softwarepaket [Car09a].

Abschließend sei angemerkt, dass wir folgende, leicht andere Formulierung des ROF-Modells betrachten. Wir minimieren das Funktional

$$E(v) := \frac{\alpha}{2} \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + |v|_{\text{BV}(\Omega)} + \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} - \int_{\Omega} f v \, dx$$


unter allen  $v \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ . Für  $f = \alpha g$  und alle  $v \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$  gilt dann  $I(v) = E(v) - \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} + \frac{\alpha}{2} \|g\|_{L^2(\Omega)}^2$ . Der Zusammenhang mit dem ROF-Modell ist, aufgrund der Konstanz des Terms  $\frac{\alpha}{2} \|g\|_{L^2(\Omega)}^2$ , folglich, dass die Funktionale  $E$  und  $I$  die gleichen Minimierer in  $\{v \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega) \mid \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} = 0\}$  besitzen.

Die Struktur dieser Arbeit ist wie folgt. Nachdem in Kapitel 2 zunächst die Notationen eingeführt und die theoretischen Grundlagen aus der Optimierung und zu den Funktionen beschränkter Variation zusammengetragen wurden, wird in Kapitel 3 bewiesen, dass für unsere Formulierung des ROF-Modells ein eindeutiger Minimierer existiert. Anschließend folgt in Kapitel 4 die nichtkonforme Formulierung und Diskretisierung des Minimierungsproblems. Mithilfe der Sattelpunktsformulierung des diskreten Problems werden äquivalente Charakterisierungen, Existenz und Eindeutigkeit für den diskreten Minimierer bewiesen. Außerdem werden die zu untersuchenden Konvergenzraten, der Verfeinerungsindikator und die garantierte untere Energieschranke aufgeführt. In Kapitel 5 wird die primale-duale Iteration formuliert und bewiesen, dass diese gegen den diskreten Minimierer konvergiert. Es folgen in Kapitel 6 Hinweise zur Benutzung des Programms und Details zur Implementation des Algorithmus und schließlich in Kapitel 8 die Darstellung der Experimente und deren Auswertung in Kapitel 9.

Experimente  
sollten  
möglichst  
genau  
rechen  
und  
vielleicht  
6  
bzw. so  
vielen  
wie  
möglich,  
so  
ass die  
Figure  
UND  
Fußnote  
auf eine  
Seite  
können  
und  
diese  
ausfüllen  
Wahlen  
für  
al-  
ha mit  
einem  
ernsthaften  
Ver-  
such,  
ein  
gut  
aussehendes  
entraus-  
tes  
Bild  
zu  
bekom-



Abbildung 1.1: Originalbild<sup>1</sup>(a) und Originalbild mit additiven weißen gaußschen Rauschen (b) mit einem Signal-Rausch-Verhältnis (eng. signal-to-noise ratio, SNR) von 10, jeweils mit nachträglich hinzugefügten graduellen Übergang zu schwarzen Rand, um Nullranddaten zu garantieren. Außerdem fünf Ergebnisse (c)-(g) des adaptiven Algorithmus mit verschiedenen Werten von  $\alpha$ .

<sup>1</sup>  <https://homepages.cae.wisc.edu/~ece533/images/cameraman.tif>

## 2 Theoretische Grundlagen

### 2.1 Vorausgesetztes Wissen

In dieser Arbeit werden Grundbegriffe in topologischen Räumen und Kenntnisse zu Banach- und Hilberträumen sowie zu Lebesgue- und Sobolev-Räumen vorausgesetzt. Dazu gehören insbesondere wichtige Ungleichungen (beispielsweise Cauchy-Schwarz, Hölder, Young), grundlegende Einbettungssätze, Dualraumtheorie, Aussagen zur schwachen Konvergenz sowie der Rieszsche Darstellungssatz und seine Implikationen. Außerdem sollte ein grundlegendes Verständnis von Konzepten in der Optimierung vorhanden sein.

Benötigte topologische Begriffe und grundlegende Aussagen zu Banach- und Hilberträumen können beispielsweise in [Zei86] nachgeschlagen werden. Grundlagen der Optimierung sind in [Zei85] nachlesbar und alles Weitere eben genannte in [Zei90a] und [Zei90b].

Dabei eignen sich die Register von [Zei90b] und [Zei85] hervorragend zum schnellen Auffinden von Begriffen in allen eben aufgeführten Referenzen.

Schließlich sollte ein Verständnis des AFEM-Softwarepakets [Car09a], von den darin verwendeten Datenstrukturen und von den mathematischen Konzepten hinter dessen Funktionen vorhanden sein. Dazu sei an dieser Stelle auf die Dokumentation [Car+10] dieses Softwarepakets verwiesen. Die in dieser Arbeit benötigten Begriffe und Notationen führen wir im nächsten Abschnitt nochmals ein, wobei wir den Definitionen und Aussagen zum Crouzeix-Raviart-Finite-Elemente-Raum einen separaten Abschnitt 2.3 widmen.

### 2.2 Notation

Wir wählen für die natürlichen Zahlen die Konvention  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  und  $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Die Menge der positiven reellen Zahlen notieren wir mit  $\mathbb{R}_+$ .

Um auszudrücken, dass eine Menge  $A$  Teilmenge einer Menge  $B$  ist, schreiben wir  $A \subseteq B$ . Falls wir hervorheben wollen, dass  $A$  sogar eine echte Teilmenge von  $B$  ist, so schreiben wir  $A \subset B$ .

Ist  $A$  Teilmenge eines topologischen Raumes, so notieren wir den Rand von  $A$  mit  $\partial A$ , das Innere von  $A$  mit  $\text{int}(A)$  und den Abschluss von  $A$  mit  $\bar{A}$ . Wir nennen weiterhin eine Teilmenge  $B \subseteq A$  Umgebung eines Punktes  $x \in A$ , wenn es eine offene Teilmenge von  $B$  gibt, die  $x$  enthält.

Für den Rest dieses Abschnitts seien  $d, m \in \mathbb{N}$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ ,  $p \in [1, \infty]$  und  $U$  eine nichtleere, offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^d$ .

Für das euklidische Skalarprodukt zweier Vektoren  $v, w \in \mathbb{R}^m$  schreiben wir  $v \cdot w$ .

Betrachten wir einen Funktionenraum mit Werten in  $\mathbb{R}$ , so verzichten wir auf  $\mathbb{R}$  beim Notieren des Funktionenraums. Zum Beispiel schreiben wir  $C(U) := C(U; \mathbb{R})$  für den Raum der stetigen Funktionen von  $U$  nach  $\mathbb{R}$ .

Mit der Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  bezeichnen wir stets ein polygonal berandetes Lipschitz-Gebiet. Falls  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , nutzen wir die Notation  $\mathcal{T}$  für eine reguläre Triangulierung von  $\Omega$  im Sinne von Philippe Ciarlet in eine Menge von abgeschlossenen Dreiecken (cf. [Car09b, S. 34; CGR12, S. 345; Car+10, S. 8]). Die Menge der stückweisen konstanten Funktionen auf der Triangulierung  $\mathcal{T}$  mit Werten in  $\mathbb{R}^m$  notieren wir dann mit  $P_0(\mathcal{T}, \mathbb{R}^m)$  und die Menge der stückweisen affinen Funktionen auf  $\mathcal{T}$  mit Werten in  $\mathbb{R}^m$  mit  $P_1(\mathcal{T}, \mathbb{R}^m)$ . Weiterhin ist der



Courant-Finite-Elemente-Raum (cf. [Car+10, S. 12]) definiert als

$$S^1(\mathcal{T}) := P_1(\mathcal{T}) \cap C(\bar{\Omega}).$$

Für ein Dreieck  $T \in \mathcal{T}$  sei die längste Seitenlänge  $h_T$ . Damit können wir die stückweise konstante Funktion  $h_{\mathcal{T}} \in P_0(\mathcal{T})$  für alle  $T \in \mathcal{T}$  durch  $h_{\mathcal{T}}|_T := h_T$  definieren und die längste Seitenlänge der Triangulierung  $h := \max_{T \in \mathcal{T}} h_T$ . Die Menge der Knoten der Triangulierung sei  $\mathcal{N}$ , wobei die Menge der inneren Knoten mit  $\mathcal{N}(\Omega)$ , die Menge der Randknoten mit  $\mathcal{N}(\partial\Omega)$  und die Menge der Knoten eines Dreiecks  $T \in \mathcal{T}$  mit  $\mathcal{N}(T)$  bezeichnet werde. Für die Kanten der Triangulierung seien die Mengen  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{E}(\Omega)$ ,  $\mathcal{E}(\partial\Omega)$  und  $\mathcal{E}(T)$  analog definiert. Den Mittelpunkt einer Kante  $E \in \mathcal{F}$  bezeichnen wir mit  $\text{mid}(E)$ . Der Normaleneinheitsvektor auf dem Rand eines Dreiecks  $T \in \mathcal{T}$  sei  $\nu_T$  und der Normaleneinheitsvektor auf einer Kante  $E \in \mathcal{E}$  sei  $\nu_E$ . Für eine Innenkante  $E \in \mathcal{E}(\Omega)$  bezeichnen wir dann die beiden Dreiecke, die  $E$  als gemeinsame Kanten haben, so mit  $T_+$  und  $T_-$ , dass  $\nu_{T_+}$  und  $\nu_E$  gleichorientiert sind, also  $\nu_{T_+} \cdot \nu_E = 1$ . Damit können wir den Sprung entlang einer Innenkante  $E \in \mathcal{E}(\Omega)$  definieren als  $[\cdot]_E := \cdot|_{T_+} - \cdot|_{T_-}$ . Für eine Randkante  $E \in \mathcal{E}(\partial\Omega)$  definieren wir  $[\cdot]_E := \cdot|_E$ .

Mit  $|\cdot|$  bezeichnen wir, je nach Argument, die euklidischen Norm eines Vektors  $v \in \mathbb{R}^m$ , den Inhalt eines Dreiecks  $T \in \mathcal{T}$ , die Länge einer Kante  $E \in \mathcal{E}$ , die Kardinalität einer endlichen Menge  $A$  oder  $|\Omega| = \int_{\Omega} 1 \, dx$ .

Die Signumfunktion auf dem  $\mathbb{R}^m$  definieren wir für einen Vektor  $v \in \mathbb{R}^m$  durch

$$\text{sign}(v) := \begin{cases} \left\{ \frac{v}{|v|} \right\}, & \text{falls } v \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}, \\ \{w \in \mathbb{R}^m \mid |w| \leq 1\}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist  $V$  ein normierter Vektorraum, so bezeichnen wir die entsprechende Norm auf  $V$  mit  $\|\cdot\|_V$ . Falls  $V$  sogar ein Prähilbertraum ist, bezeichnen wir das Skalarprodukt auf  $V$ , welches  $\|\cdot\|_V$  induziert, mit  $(\cdot, \cdot)_V$ .

Betrachten wir eine Eigenschaft, für die gegeben sein muss, bezüglich welcher Norm Folgen auf  $V$  konvergieren, so ist stets die Konvergenz in der Norm  $\|\cdot\|_V$  gewählt, sofern nicht anders angegeben. Beispielsweise meinen wir mit der Folgenstetigkeit eines Funktionals  $F : V \rightarrow \mathbb{R}$  im Detail die Folgenstetigkeit mit der Normkonvergenz bezüglich  $\|\cdot\|_V$  in  $V$  und der Konvergenz bezüglich  $|\cdot|$  in  $\mathbb{R}$ .

Für den Dualraum eines Banachraums  $X$  über  $\mathbb{R}$  schreiben wir  $X^*$ . Die Auswertung eines Funktionals  $F \in X^*$  an der Stelle  $u \in X$  notieren wir, vor eventueller Anwendung des Rieszschen Darstellungssatzes, mit  $\langle F, u \rangle$ . Identifizieren wir einen Raum  $Y$  mit dem Dualraum  $X^*$ , so schreiben wir  $Y \cong X^*$ .

Weiterhin benutzen wir die übliche Notation für Lebesgue-Räume  $L^p(U; \mathbb{R}^m)$  und die Sobolev-Räume  $W^{k,p}(U)$  sowie  $H^k(U) := W^{k,2}(U)$  und  $H_0^k(U)$ . Die Normen auf diesen Räumen definieren wir ebenfalls wie üblich. Außerdem schreiben wir kurz  $\|\cdot\| := \|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$  und  $(\cdot, \cdot) := (\cdot, \cdot)_{L^2(\Omega)}$ .

Mit  $H^1(\mathcal{T})$  bezeichnen wir den Raum der stückweisen  $H^1$ -Funktionen auf  $\mathcal{T}$ .

## 2.3 Crouzeix-Raviart-Finite-Elemente-Funktionen

In Abschnitt 4.1 wollen wir für die Diskretisierung einer nichtkonformen Formulierung des in Abschnitt 3.1 genannten Minimierungsproblems die Crouzeix-Raviart-Finite-Elemente-Methode nutzen. Die dafür benötigten Definitionen und Aussagen wollen wir in diesen Abschnitt aus [Car09b; CGR12; Car+10] zusammentragen.

Die Räume der Crouzeix-Raviart-Finite-Elemente-Funktionen sind definiert durch

$$\begin{aligned} \text{CR}^1(\mathcal{T}) &:= \{v_{\text{CR}} \in P_1(\mathcal{T}) \mid v_{\text{CR}} \text{ ist stetig in } \text{mid}(E) \text{ für alle } E \in \mathcal{E}\} \quad \text{und} \\ \text{CR}_0^1(\mathcal{T}) &:= \{v_{\text{CR}} \in \text{CR}^1(\mathcal{T}) \mid \forall E \in \mathcal{E}(\partial\Omega) \quad v_{\text{CR}}(\text{mid}(E)) = 0\}. \end{aligned}$$

Wir wollen  $\text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  mit einem diskreten Skalarprodukt ausstatten. Dafür führen wir den stückweisen Gradienten  $\nabla_{\text{NC}} : H^1(\mathcal{T}) \rightarrow L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)$  ein. Dieser ist für alle  $v \in H^1(\mathcal{T})$  und alle  $T \in \mathcal{T}$  definiert durch  $(\nabla_{\text{NC}} v)|_T := \nabla v|_T$ .

Das ermöglicht uns die Definition der diskreten Bilinearform  $a_{\text{NC}}(\cdot, \cdot) : \text{CR}_0^1(\mathcal{T}) \times \text{CR}_0^1(\mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$a_{\text{NC}}(u_{\text{CR}}, v_{\text{CR}}) := \int_{\Omega} \nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}} \cdot \nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}} \, dx \quad \text{für alle } u_{\text{CR}}, v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T}).$$

Diese ist ein Skalarprodukt auf  $\text{CR}_0^1(\mathcal{T})$ .

Die von  $a_{\text{NC}}$  induzierte Norm bezeichnen wir mit  $\|\cdot\|_{\text{NC}}$ .

Zum Abschluss definieren wir noch für jede Kante  $E \in \mathcal{E}$  eine Funktion  $\psi_E \in \text{CR}^1(\mathcal{T})$  durch ihre Werte

$$\psi_E(\text{mid}(E)) := 1 \quad \text{sowie} \quad \psi_E(\text{mid}(F)) := 0 \quad \text{für alle } F \in \mathcal{E}.$$

Die Menge  $\{\psi_E \mid E \in \mathcal{E}(\Omega)\}$  bildet dann eine Basis von  $\text{CR}_0^1(\mathcal{T})$ .

## 2.4 Variationsrechnung auf Banachräumen

Wie in Abschnitt 2.1 beschrieben, setzen wir in dieser Arbeit Kenntnisse über die Variationsrechnung voraus. Da wir aber einige Aussagen auch für Funktionale benötigen, die auf unendlichdimensionalen reellen Banachräumen definiert sind, führen wir in diesen Abschnitt die grundlegenden Notationen dafür ein und formulieren schließlich die notwendige Optimalitätsbedingung erster Ordnung.

Dabei folgen wir [Zei85, S. 189-194]. Dort werden die Aussagen auf einen reellen lokal konvexen Raum formuliert. Da nach [Zei86, S. 781, (43)] alle Banachräume lokal konvex sind und wir die Aussagen in dieser Arbeit nur auf Banachräumen benötigen, formulieren wir sie hier auf einen reellen Banachraum  $X$ . Außerdem betrachten wir eine Teilmenge  $V \subseteq X$ , einen inneren Punkt  $u$  von  $V$  und ein Funktional  $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ . Schließlich definieren wir noch für alle  $h \in X$  eine Funktion  $\varphi_h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die für alle  $t \in \mathbb{R}$  gegeben ist durch  $\varphi_h(t) := F(u + th)$ .

Damit können wir die  $n$ -te Variation, das Gâteaux- und das Fréchet-Differential von  $F$  definieren.

**Definition 2.1** ( $n$ -te Variation). Die  $n$ -te Variation von  $F$  an der Stelle  $u$  in Richtung  $h \in X$  ist, falls die  $n$ -te Ableitung  $\varphi_h^{(n)}(0)$  von  $\varphi_h$  in 0 existiert, definiert durch

$$\delta^n F(u; h) := \varphi_h^{(n)}(0) = \left. \frac{d^n F(u + th)}{dt^n} \right|_{t=0}.$$

Wir schreiben  $\delta$  für  $\delta^1$ .

**Definition 2.2** (Gâteaux- und Fréchet-Differential).  $F$  heißt Gâteaux-differenzierbar an der Stelle  $u$ , falls ein Funktional  $F'(u) \in X^*$  existiert, sodass

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(u + th) - F(u)}{t} = \langle F'(u), h \rangle \quad \text{für alle } h \in X.$$

$F'(u)$  heißt dann Gâteaux-Differential von  $F$  an der Stelle  $u$ .

$F$  heißt Fréchet-differenzierbar an der Stelle  $u$ , falls ein Funktional  $F'(u) \in X^*$  existiert, sodass

$$\lim_{\|h\|_X \rightarrow 0} \frac{|F(u + th) - F(u) - \langle F'(u), h \rangle|}{\|h\|_X} = 0.$$

$F'(u)$  heißt dann Fréchet-Differential von  $F$  an der Stelle  $u$ . Das Fréchet-Differential von  $F$  an der Stelle  $u$  in Richtung  $h \in X$  ist definiert durch  $dF(u; h) := \langle F'(u), h \rangle$ .

noch sagen, dass  
eweise da zu  
nden sind oder  
st das mit dem  
atz schon klar?

**Bemerkung 2.3.** Existiert das Fréchet-Differential  $F'(u)$  von  $F$  an der Stelle  $u$ , so ist  $F'(u)$  auch das Gâteaux-Differential von  $F$  an der Stelle  $u$  und es gilt

$$\delta F(u; h) = dF(u; h) = \langle F'(u), h \rangle \quad \text{für alle } h \in X.$$

Nachdem die relevante Notation eingeführt ist, können wir zum Abschluss die notwendige Bedingung erster Ordnung für einen lokalen Minimierer von  $F$  formulieren.

**Theorem 2.4** (Notwendige Optimalitätsbedingung erster Ordnung). *Sei  $u \in \text{int}(V)$  lokaler Minimierer von  $F$ , das heißt es existiere eine Umgebung  $U$  von  $u$ , sodass  $F(v) \geq F(u)$  für alle  $v \in U$ . Dann gilt für alle  $h \in X$ , dass  $\delta F(u; h) = 0$ , falls diese Variation für alle  $h \in X$  existiert, beziehungsweise  $F'(u) = 0$ , falls  $F'(u)$  als Gâteaux- oder Fréchet-Differential existiert.*

## 2.5 Subdifferenziale

Für diesen Abschnitt betrachten wir stets einen reellen Banachraum  $X$  und, falls nicht anders spezifiziert, ein Funktional  $F : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ .

Wir wollen die in dieser Arbeit benötigten Notationen und Eigenschaften des Subdifferentials von  $F$  zusammentragen.

Zuvor starten wir mit einer grundlegenden Definition.

**Definition 2.5** ([Zei85, S. 245, Definition 42.1]). Sei  $V$  ein Vektorraum,  $M \subseteq V$  und  $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ .

Dann heißt die Menge  $M$  konvex, wenn für alle  $u, v \in M$  und alle  $t \in [0, 1]$  gilt

$$(1 - t)u + tv \in M.$$

Ist  $M$  konvex, so heißt  $F$  konvex, falls für alle  $u, v \in M$  und alle  $t \in [0, 1]$  gilt

$$F((1 - t)u + tv) \leq (1 - t)F(u) + tF(v). \quad (2.1)$$

Gilt Ungleichung (2.1) mit „<“, so heißt  $F$  strikt konvex. Falls  $-F$  konvex ist, so heißt  $F$  konkav.

Für den Rest dieses Abschnitts folgen wir [Zei85, S. 385-397]. Analog zur Begründung zum Beginn von Abschnitt 2.4, schränken wir auch hier die Definitionen und Aussagen, die in [Zei85] auf reellen lokal konvexen Räumen formuliert sind, auf den reellen Banachraum  $X$  ein.

Zunächst definieren wir das Subdifferential von  $F$  an einer Stelle  $u \in X$ .

**Definition 2.6** (Subdifferential). Für  $u \in X$  mit  $F(u) \neq \pm\infty$  heißt

$$\partial F(u) := \{u^* \in X^* \mid \forall v \in X \quad F(v) \geq F(u) + \langle u^*, v - u \rangle\} \quad (2.2)$$

Subdifferential von  $F$  an der Stelle  $u$ . Für  $F(u) = \pm\infty$  ist  $\partial F(u) := \emptyset$ .

Ein Element  $u^* \in \partial F(u)$  heißt Subgradient von  $F$  an der Stelle  $u$ .

Es folgen für Optimierungsprobleme wichtige Aussagen über das Subdifferential von  $F$ .

**Theorem 2.7.** *Falls  $F : X \rightarrow (-\infty, \infty]$  mit  $F \not\equiv \infty$ , gilt  $F(u) = \inf_{v \in X} F(v)$  genau dann, wenn  $0 \in \partial F(u)$ .*

**Theorem 2.8.** *Falls  $F$  konvex ist und Gâteaux-differenzierbar an der Stelle  $u \in X$  mit Gâteaux-Differential  $F'(u)$ , gilt  $\partial F(u) = \{F'(u)\}$ .*

noch sagen, dass Beweise da zu finden sind oder ist das mit dem Satz schon klar? Besser sowas sagen wie 'Die Aussagen stammen aus'?

Das folgende Theorem folgt aus [Zei85, S. 389, Theorem 47.B] unter Beachtung der Tatsache, dass die Addition von Funktionalen  $F_1, F_2, \dots, F_n : X \rightarrow (-\infty, \infty]$  und die Addition von Menge in  $X^*$  kommutieren.

**Theorem 2.9.** Seien für  $n \geq 2$  die Funktionale  $F_1, F_2, \dots, F_n : X \rightarrow (-\infty, \infty]$  konvex und es existiere ein  $u_0 \in X$ , sodass  $F_k(u_0) < \infty$  für alle  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Außerdem seien mindestens  $n - 1$  der  $n$  Funktionale  $F_1, F_2, \dots, F_n$  stetig an der Stelle  $u_0$ .

Dann gilt

$$\partial(F_1 + F_2 + \dots + F_n)(u) = \partial F_1(u) + \partial F_2(u) + \dots + \partial F_n(u) \quad \text{für alle } u \in X.$$

Zum Abschluss formulieren wir noch die Monotonie des Subdifferentials.

**Theorem 2.10.** Sei  $F : X \rightarrow (-\infty, \infty]$  konvex und unterhalbstetig mit  $F \not\equiv \infty$ .

Dann ist  $\partial F(\cdot)$  monoton, das heißt

$$\langle u^* - v^*, u - v \rangle \geq 0 \quad \text{für alle } u, v \in X, u^* \in \partial F(u), v^* \in \partial F(v).$$

## 2.6 Funktionen beschränkter Variation

In diesen Abschnitt führen wir den Raum der Funktionen beschränkter Variation ein. Wir vermeiden dabei, soweit möglich, für den weiteren Verlauf dieser Arbeit nicht benötigte Notation und Theorie, indem wir die Definitionen und Aussagen entsprechend aus- und umformulieren. Für weit detailliertere Ausführungen und die maßtheoretischen Hintergründe siehe zum Beispiel [ABM14; EG92; Bra98].

Soweit nicht anders angegeben, folgen die Definitionen und Aussagen dieses Abschnitts aus [ABM14, S. 393-395]

Sei im Weiteren  $U$  eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^d$ .

Zunächst definieren wir den Raum der Funktionen beschränkter Variation.

**Definition 2.11** (Funktionen beschränkter Variation). Eine Funktion  $u \in L^1(U)$  ist von beschränkter Variation, wenn

$$|u|_{\text{BV}(U)} := \sup_{\substack{\phi \in C_c^1(U; \mathbb{R}^d) \\ \|\phi\|_{L^\infty(U)} \leq 1}} \int_U u \operatorname{div}(\phi) \, dx < \infty. \quad (2.3)$$

Die Menge aller Funktionen beschränkter Variation ist  $\text{BV}(U)$ .

*Bemerkung 2.12.* Durch  $|\cdot|_{\text{BV}(U)}$  ist eine Seminorm auf  $\text{BV}(U)$  gegeben.

Ausgestattet mit der Norm

$$\|\cdot\|_{\text{BV}(U)} := \|\cdot\|_{L^1(U)} + |\cdot|_{\text{BV}(U)}$$

ist  $\text{BV}(U)$  ein Banachraum.

Außerdem gilt  $W^{1,1}(U) \subset \text{BV}(U)$  und  $\|u\|_{\text{BV}(U)} = \|u\|_{W^{1,1}(U)}$  für alle  $u \in W^{1,1}(U)$ .

In der Anwendung ist Konvergenz in  $\text{BV}(U)$  bezüglich der Norm  $\|\cdot\|_{\text{BV}(U)}$  zu restriktiv (cf. [Bar15b, S. 300]). Deshalb führen wir zwei schwächere Konvergenzbegriffe ein.

**Definition 2.13.** Sei  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{BV}(U)$  und sei  $u \in \text{BV}(U)$  mit  $u_n \rightarrow u$  in  $L^1(U)$  für  $n \rightarrow \infty$ .

(i) Die Folge  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert strikt gegen  $u$ , wenn  $|u_n|_{\text{BV}(U)} \rightarrow |u|_{\text{BV}(U)}$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Nochmal gucken, das wird glaube ich nirgends gebraucht. Falls das stimmt, rausnehmen. Wird für Dichte von  $C^\infty$  usw in  $BV$  gebraucht bzgl dieser Konvergenz. Gucken, ob das relevant wird. Falls es rausgenommen wird, Text vor und nach dieser Def noch anpassen

- (ii) Die Folge  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert schwach gegen  $u$ , wenn für alle  $\phi \in C_0(U; \mathbb{R}^d)$  gilt, dass  $\int_U u_n \operatorname{div}(\phi) \, dx \rightarrow \int_U u \operatorname{div}(\phi) \, dx$  für  $n \rightarrow \infty$ . Wir schreiben dann  $u_n \rightharpoonup u$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Damit können wir das folgende Theorem formulieren, welches unmittelbar die schwache Unterhalbstetigkeit der Seminorm  $|\cdot|_{\operatorname{BV}(U)}$  auf  $\operatorname{BV}(U)$  impliziert.

**Theorem 2.14.** *Sei  $u \in L^1(U)$  und sei  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \operatorname{BV}(U)$  mit  $\sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|_{\operatorname{BV}(U)} < \infty$  und  $u_n \rightarrow u$  in  $L^1(U)$  für  $n \rightarrow \infty$ .*

*Dann gilt  $u \in \operatorname{BV}(U)$  und  $|u|_{\operatorname{BV}(U)} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} |u_n|_{\operatorname{BV}(U)}$ . Außerdem gilt dann  $u_n \rightarrow u$  in  $\operatorname{BV}(U)$ .*

Mit Blick auf die folgenden Kapitel betrachten wir nun das polygonal berandete Lipschitz-Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ . Unter dieser Voraussetzung können wir zeigen, dass jede in  $\operatorname{BV}(\Omega)$  beschränkte Folge eine in  $\operatorname{BV}(\Omega)$  schwach konvergente Teilfolge besitzt mit schwachen Grenzwert in  $\operatorname{BV}(\Omega)$ . Für den Beweis dieser Aussage benötigen wir noch das folgende Theorem aus [EG92, S. 176, Theorem 4].

Nochmal nachfragen: das heißt tatsächlich offen, beschränkt mit Lipschitz Rand, korrekt?

Nochmal nachfragen:  $\sup u_k < \infty \Leftrightarrow u_k$  bounded, korrekt? Ich übersehe da nichts, oder? Falls doch, alle Theoreme nochmal nachschlagen und sichergehen, dass sie richtig zitiert sind.

**Theorem 2.15.** *Sei  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \operatorname{BV}(\Omega)$  eine beschränkte Folge. Dann existiert eine Teilfolge  $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  von  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und ein  $u \in \operatorname{BV}(\Omega)$ , sodass  $u_{n_k} \rightarrow u$  in  $L^1(\Omega)$  für  $k \rightarrow \infty$ .*

Damit können wir nun das folgende Theorem beweisen.

**Theorem 2.16.** *Sei  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \operatorname{BV}(\Omega)$  eine beschränkte Folge. Dann existiert eine Teilfolge  $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  und ein  $u \in \operatorname{BV}(\Omega)$ , sodass  $u_{n_k} \rightarrow u$  in  $\operatorname{BV}(\Omega)$  für  $k \rightarrow \infty$ .*

*Beweis.* Nach Theorem 2.15 besitzt  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Teilfolge  $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ , die in  $L^1(\Omega)$  gegen ein  $u \in \operatorname{BV}(\Omega)$  konvergiert. Diese Teilfolge ist nach Voraussetzung ebenfalls beschränkt in  $\operatorname{BV}(\Omega)$ , woraus nach Definition der Norm auf  $\operatorname{BV}(\Omega)$  insbesondere folgt, dass  $\sup_{k \in \mathbb{N}} |u_{n_k}|_{\operatorname{BV}(\Omega)} < \infty$ .

Somit ist Theorem 2.14 anwendbar und impliziert die schwache Konvergenz von  $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  in  $\operatorname{BV}(\Omega)$  gegen  $u \in \operatorname{BV}(\Omega)$ .  $\square$

# 3 Das kontinuierliche Problem

## 3.1 Formulierung

Für einen Parameter  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  und eine Funktion  $f \in L^2(\Omega)$  betrachten wir das folgende Minimierungsproblem.

**Problem 3.1.** Finde  $u \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ , sodass  $u$  das Funktional

$$E(v) := \frac{\alpha}{2} \|v\|^2 + |v|_{\text{BV}(\Omega)} + \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} - \int_{\Omega} f v \, dx \quad (3.1)$$

unter allen  $v \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$  minimiert.

Dabei ist der Term  $\|v\|_{L^1(\partial\Omega)}$  wohldefiniert, da nach [ABM14, S. 400, Theorem 10.2.1] eine lineare, stetige Abbildung  $T : \text{BV}(\Omega) \rightarrow L^1(\partial\Omega)$  existiert mit  $T(u) = u|_{\partial\Omega}$  für alle  $u \in \text{BV}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ .

*Bemerkung 3.2.* Nach [ABM14, S. 399, Theorem 10.1.3] ist

noch fragen, was 1-regular nochmal heißt und ob das hier glatt geht (tut es sehr wahrscheinlich)

die Einbettung  $\text{BV}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$  stetig für  $1 \leq p \leq d/(d-1)$ . Damit ist  $\text{BV}(\Omega)$  für  $d = 2$  Teilmenge von  $L^2(\Omega)$  und die Lösung von Problem 3.1 kann in  $\text{BV}(\Omega)$  gesucht werden. Für beliebige  $d \in \mathbb{N}$ , die wir in diesen Abschnitt betrachten, gilt dies im Allgemeinen nicht.

## 3.2 Existenz eines eindeutigen Minimierers

Zunächst zeigen wir, dass Problem 3.1 eine Lösung besitzt. Dafür benötigen wir die folgende Formulierung der Youngschen Ungleichung.

**Lemma 3.3** (Youngsche Ungleichung). *Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$  beliebig. Dann gilt*

$$ab \leq \frac{1}{\varepsilon} a^2 + \frac{\varepsilon}{4} b^2.$$

Außerdem wird im Beweis folgende Aussage benötigt, die direkt aus [EG92, S. 183, Theorem 1] folgt, da  $0 \in \text{BV}(\mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega})$ ,  $|0|_{\text{BV}(\mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega})} = 0$  und  $0|_{\partial\Omega} = 0$ .

**Lemma 3.4.** *Sei  $v \in \text{BV}(\Omega)$ . Definiere, für alle  $x \in \mathbb{R}^d$ ,*

$$\tilde{v}(x) := \begin{cases} v(x), & \text{falls } x \in \Omega, \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}. \end{cases}$$

*Dann gilt  $\tilde{v} \in \text{BV}(\mathbb{R}^d)$  und  $|\tilde{v}|_{\text{BV}(\mathbb{R}^d)} = |v|_{\text{BV}(\Omega)} + \|v\|_{L^1(\partial\Omega)}$ .*

**Theorem 3.5** (Existenz einer Lösung). *Problem 3.1 besitzt eine Lösung  $u \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ .*

*Beweis.* Die Beweisidee ist die Anwendung der direkten Methode der Variationsrechnung (cf. z.B. [Dac89]) unter Nutzung der in Abschnitt 2.6 aufgeführten Eigenschaften der schwachen Konvergenz in  $BV(\Omega)$ .

Für alle  $v \in L^2(\Omega) \subseteq L^1(\Omega)$  gilt mit der Hölderschen Ungleichung für  $p = q = 2$ , dass

$$\|v\|_{L^1(\Omega)} = \|1 \cdot v\|_{L^1(\Omega)} \leq \|1\| \|v\| = \sqrt{|\Omega|} \|v\|. \quad (3.2)$$

Dann folgt für das Funktional  $E$  in (3.1) für alle  $v \in BV(\Omega) \cap L^2(\Omega)$  durch die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung, die Youngsche Ungleichung aus Lemma 3.3 und Ungleichung (3.2), dass

$$\begin{aligned} E(v) &= \frac{\alpha}{2} \|v\|^2 + |v|_{BV(\Omega)} + \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} - \int_{\Omega} f v \, dx \\ &\geq \frac{\alpha}{2} \|v\|^2 + |v|_{BV(\Omega)} + \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} - \|f\| \|v\| \\ &\geq \frac{\alpha}{2} \|v\|^2 + |v|_{BV(\Omega)} + \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} - \frac{1}{\alpha} \|f\|^2 - \frac{\alpha}{4} \|v\|^2 \\ &\geq \frac{\alpha}{4} \|v\|^2 + |v|_{BV(\Omega)} + \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} - \frac{1}{\alpha} \|f\|^2 \\ &\geq \frac{\alpha}{4|\Omega|} \|v\|_{L^1(\Omega)}^2 + |v|_{BV(\Omega)} + \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} - \frac{1}{\alpha} \|f\|^2 \\ &\geq -\frac{1}{\alpha} \|f\|^2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Somit ist  $E$  nach unten beschränkt, was die Existenz einer infimierenden Folge  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset BV(\Omega) \cap L^2(\Omega)$  von  $E$  impliziert, das heißt  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  erfüllt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(u_n) = \inf_{v \in BV(\Omega) \cap L^2(\Omega)} E(v).$$

Ungleichung (3.3) impliziert außerdem, dass  $E(u_n) \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ , falls  $|u_n|_{BV(\Omega)} \rightarrow \infty$  oder  $\|u_n\|_{L^1(\Omega)} \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ . Daraus folgt insbesondere, dass  $E(u_n) \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ , falls  $\|u_n\|_{BV(\Omega)} \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ . Deshalb muss die Folge  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt in  $BV(\Omega)$  sein.

Nun garantiert Theorem 2.16 die Existenz einer in  $BV(\Omega)$  schwach konvergenten Teilfolge  $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  von  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit schwachen Grenzwert  $u \in BV(\Omega)$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist  $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Aus der schwachen Konvergenz von  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $BV(\Omega)$  gegen  $u$  folgt nach Definition, dass  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  stark, und damit insbesondere auch schwach, in  $L^1(\Omega)$  gegen  $u$  konvergiert.

Weiterhin folgt aus (3.3), dass  $E(v) \rightarrow \infty$  für  $\|v\| \rightarrow \infty$ . Somit muss  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auch beschränkt sein bezüglich der Norm  $\|\cdot\|$  und besitzt deshalb, wegen der Reflexivität von  $L^2(\Omega)$ , eine Teilfolge (ohne Beschränkung der Allgemeinheit weiterhin bezeichnet mit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ), die in  $L^2(\Omega)$  schwach gegen einen Grenzwert  $\bar{u} \in L^2(\Omega)$  konvergiert. Damit gilt für alle  $w \in L^2(\Omega) \cong L^2(\Omega)^*$  und, da  $L^\infty(\Omega) \subseteq L^2(\Omega)$ , insbesondere auch für alle  $w \in L^\infty(\Omega) \cong L^1(\Omega)^*$ , dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_n w \, dx = \int_{\Omega} \bar{u} w \, dx.$$

Das bedeutet, dass  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auch schwach in  $L^1(\Omega)$  gegen  $\bar{u} \in L^2(\Omega) \subseteq L^1(\Omega)$  konvergiert.

Da schwache Grenzwerte eindeutig bestimmt sind, gilt insgesamt  $u = \bar{u} \in L^2(\Omega)$ , das heißt  $u \in BV(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ .

Nun definieren wir für alle  $n \in \mathbb{N}$  und für alle  $x \in \mathbb{R}^d$

$$\tilde{u}_n(x) := \begin{cases} u_n(x), & \text{falls } x \in \Omega, \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R}^d \setminus \bar{\Omega} \end{cases} \quad \text{und} \quad \tilde{u}(x) := \begin{cases} u(x), & \text{falls } x \in \Omega, \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R}^d \setminus \bar{\Omega}. \end{cases}$$

### 3 Das kontinuierliche Problem

Dann gilt nach Lemma 3.4 sowohl

$$\begin{aligned} \tilde{u}_n \in \text{BV}(\mathbb{R}^d) \quad \text{und} \quad |\tilde{u}_n|_{\text{BV}(\mathbb{R}^d)} &= |u_n|_{\text{BV}(\Omega)} + \|u_n\|_{L^1(\partial\Omega)} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ als auch} \\ \tilde{u} \in \text{BV}(\mathbb{R}^d) \quad \text{und} \quad |\tilde{u}|_{\text{BV}(\mathbb{R}^d)} &= |u|_{\text{BV}(\Omega)} + \|u\|_{L^1(\partial\Omega)}. \end{aligned}$$

Da  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  infimierende Folge von  $E$  ist, muss die Folge

$$\left(|\tilde{u}_n|_{\text{BV}(\mathbb{R}^d)}\right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(|u_n|_{\text{BV}(\Omega)} + \|u_n\|_{L^1(\partial\Omega)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$$

beschränkt sein. Außerdem folgt aus den Definitionen von  $\tilde{u}$  und  $\tilde{u}_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und der bereits bekannten Eigenschaft  $u_n \rightarrow u$  in  $L^1(\Omega)$  für  $n \rightarrow \infty$ , dass

$$\|\tilde{u}_n - \tilde{u}\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} |\tilde{u}_n - \tilde{u}| \, dx = \int_{\Omega} |u_n - u| \, dx = \|u_n - u\|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty,$$

das heißt  $\tilde{u}_n \rightarrow \tilde{u}$  in  $L^1(\mathbb{R}^d)$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Insgesamt ist also  $(\tilde{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\text{BV}(\mathbb{R}^d)$ , die in  $L^1(\mathbb{R}^d)$  gegen  $\tilde{u} \in \text{BV}(\mathbb{R}^d) \subseteq L^1(\mathbb{R}^d)$  konvergiert und  $\sup_{n \in \mathbb{N}} |\tilde{u}_n|_{\text{BV}(\mathbb{R}^d)} < \infty$  erfüllt. Somit folgt mit Theorem 2.14

$$\begin{aligned} |u|_{\text{BV}(\Omega)} + \|u\|_{L^1(\partial\Omega)} &= |\tilde{u}|_{\text{BV}(\mathbb{R}^d)} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} |\tilde{u}_n|_{\text{BV}(\mathbb{R}^d)} \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} (|u_n|_{\text{BV}(\Omega)} + \|u_n\|_{L^1(\partial\Omega)}). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Die Funktionen  $\|\cdot\|^2$  und  $-\int_{\Omega} f \cdot \, dx$  sind auf  $L^2(\Omega)$  stetig und konvex, was impliziert, dass sie schwach unterhalbstetig auf  $L^2(\Omega)$  sind. Da wir bereits wissen, dass  $u_n \rightarrow u$  in  $L^2(\Omega)$  für  $n \rightarrow \infty$ , folgt

$$\frac{\alpha}{2} \|u\|^2 - \int_{\Omega} f u \, dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\alpha}{2} \|u_n\|^2 - \int_{\Omega} f u_n \, dx \right).$$

Damit und mit Ungleichung (3.4) gilt insgesamt

$$\inf_{v \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)} E(v) \leq E(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E(u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(u_n) = \inf_{v \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)} E(v),$$

das heißt  $\min_{v \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)} E(v) = E(u)$ . □

Nachdem wir gezeigt haben, dass für Problem 3.1 eine Lösung existiert, beweisen wir als nächstes ein Theorem, das direkt impliziert, dass diese Lösung eindeutig ist.

**Theorem 3.6** (Stabilität und Eindeutigkeit). *Seien  $u_1, u_2 \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$  die Minimierer des Problems 3.1 mit  $f_1, f_2 \in L^2(\Omega)$  anstelle von  $f$ , das heißt für  $\ell \in \{1, 2\}$  minimiere  $u_\ell$  das Funktional*

$$E_\ell := \frac{\alpha}{2} \|v\|^2 + |v|_{\text{BV}(\Omega)} + \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} - \int_{\Omega} f_\ell v \, dx$$

unter allen  $v \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ .

Dann gilt

$$\|u_1 - u_2\| \leq \frac{1}{\alpha} \|f_1 - f_2\|.$$



*Beweis.* Wir folgen der Argumentation im Beweis von [Bar15b, S. 304, Theorem 10.6].

Zunächst definieren wir die Funktionale  $F : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  und  $G_\ell : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\ell \in \{1, 2\}$ , für alle  $u \in L^2(\Omega)$  durch

$$F(u) := \begin{cases} |u|_{\text{BV}(\Omega)} + \|u\|_{L^1(\partial\Omega)}, & \text{falls } u \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega), \\ \infty, & \text{falls } u \in L^2(\Omega) \setminus \text{BV}(\Omega) \end{cases} \quad \text{und}$$

$$G_\ell(u) := \frac{\alpha}{2} \|u\|^2 - \int_{\Omega} f_\ell u \, dx.$$

Damit gilt für  $\ell \in \{1, 2\}$  und alle  $u \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ , dass  $E_\ell(u) = F(u) + G_\ell(u)$ .

Für  $\ell \in \{1, 2\}$  ist  $G_\ell$  Fréchet-differenzierbar und die Fréchet-Ableitung  $G'_\ell(u) : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  von  $G_\ell$  an der Stelle  $u \in L^2(\Omega)$  ist für alle  $v \in L^2(\Omega)$  gegeben durch

$$dG_\ell(u; v) = \alpha(u, v) - \int_{\Omega} f_\ell v \, dx = (\alpha u - f_\ell, v).$$

Das Funktional  $F$  ist konvex, unterhalbstetig und es gilt  $F \not\equiv \infty$ . Deshalb ist nach Theorem 2.10 das Subdifferential  $\partial F$  von  $F$  monoton, das heißt für alle  $\mu_\ell \in \partial F(u_\ell)$ ,  $\ell \in \{1, 2\}$ , gilt

$$(\mu_1 - \mu_2, u_1 - u_2) \geq 0. \quad (3.5)$$

Für  $\ell \in \{1, 2\}$  gilt, dass  $E_\ell$  konvex ist und von  $u_\ell$  in  $\text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$  minimiert wird. Außerdem gilt  $E_\ell \not\equiv \infty$  und  $G_\ell$  ist stetig. Somit gilt nach Theorem 2.7, Theorem 2.9 und Theorem 2.8, dass  $0 \in \partial E_\ell(u_\ell) = \partial F(u_\ell) + \partial G_\ell(u_\ell) = \partial F(u_\ell) + \{G'_\ell(u_\ell)\}$ . Daraus folgt  $-G'_\ell(u_\ell) \in \partial F(u_\ell)$ . Zusammen mit Ungleichung (3.5) impliziert das

$$(-(\alpha u_1 - f_1) - (-(\alpha u_2 - f_2)), u_1 - u_2) \geq 0.$$

Durch Umformen und Anwenden der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} \alpha \|u_1 - u_2\|^2 &\leq (f_1 - f_2, u_1 - u_2) \\ &\leq \|f_1 - f_2\| \|u_1 - u_2\|. \end{aligned}$$

Falls  $\|u_1 - u_2\| = 0$ , gilt die zu zeigende Aussage. Ansonsten führt Division durch  $\alpha \|u_1 - u_2\| \neq 0$  den Beweis zum Abschluss.  $\square$

## 4 Das diskrete Problem

### 4.1 Formulierung

Für den Rest dieser Arbeit sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ .

Bevor wir Problem 3.1 diskretisieren, merken wir an, dass  $\text{CR}^1(\mathcal{T}) \subset \text{BV}(\Omega)$ , da

$$|v_{\text{CR}}|_{\text{BV}(\Omega)} = \|\nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}}\|_{L^1(\Omega)} + \sum_{F \in \mathcal{E}(\Omega)} \|[v_{\text{CR}}]_F\|_{L^1(F)} \quad \text{für alle } v_{\text{CR}} \in \text{CR}^1(\mathcal{T}).$$

Dies wird für  $|\mathcal{T}| = 2$  zum Beispiel von [ABM14, S. 404, Example 10.2.1; Bar15b, S. 301, Proposition 10.1] impliziert und kann analog für beliebige reguläre Triangulierungen von  $\Omega$  bewiesen werden. Damit gilt dann insbesondere

$$|v_{\text{CR}}|_{\text{BV}(\Omega)} + \|v_{\text{CR}}\|_{L^1(\partial\Omega)} = \|\nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}}\|_{L^1(\Omega)} + \sum_{F \in \mathcal{E}} \|[v_{\text{CR}}]_F\|_{L^1(F)}.$$

Um eine nichtkonforme Formulierung von Problem 3.1 zu erhalten, ersetzen wir die Terme  $|\cdot|_{\text{BV}(\Omega)} + \|\cdot\|_{L^1(\partial\Omega)}$  des Funktional  $E$  durch  $\|\nabla_{\text{NC}} \cdot\|_{L^1(\Omega)}$ , das heißt wir vernachlässigen bei der nichtkonformen Formulierung die Terme  $\sum_{F \in \mathcal{E}} \|[v_{\text{CR}}]_F\|_{L^1(F)}$ .

Somit erhalten wir das folgende Minimierungsproblem für den Parameter  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  und die rechte Seite  $f \in L^2(\Omega)$ .

**Problem 4.1.** Finde  $u_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$ , sodass  $u_{\text{CR}}$  das Funktional

$$E_{\text{NC}}(v_{\text{CR}}) := \frac{\alpha}{2} \|v_{\text{CR}}\|^2 + \|\nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}}\|_{L^1(\Omega)} - \int_{\Omega} f v_{\text{CR}} \, dx \quad (4.1)$$

unter allen  $v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  minimiert.

### 4.2 Charakterisierung und Existenz eines eindeutigen Minimierers

In diesen Abschnitt führen wir die Argumente in [Bar15b, S. 313], angepasst für unsere Formulierung in Problem 4.1, detailliert aus.

Bevor wir die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung von Problem 4.1 sowie äquivalente Charakterisierungen für diese beweisen können, leiten wir ein zu Problem 4.1 äquivalentes Sattelpunktsproblem her.

Dafür definieren wir zunächst die konvexe Menge

$$K := \{\Lambda \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^2) \mid |\Lambda(\cdot)| \leq 1 \text{ fast überall in } \Omega\}$$

und das dazugehörige Indikatorfunktional  $I_K : L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , das für  $\Lambda \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^2)$  gegeben ist durch

$$I_K(\Lambda) := \begin{cases} \infty, & \text{falls } \Lambda \notin K, \\ 0, & \text{falls } \Lambda \in K \end{cases}$$

und aufgrund der Konvexität von  $K$  konvex ist. Für  $v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  und  $\Lambda \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2) \subset L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^2)$  können wir damit das Funktional  $L : \text{CR}_0^1(\mathcal{T}) \times P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2) \rightarrow [-\infty, \infty]$  definieren durch

$$L(v_{\text{CR}}, \Lambda) := \int_{\Omega} \Lambda \cdot \nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}} \, dx + \frac{\alpha}{2} \|v_{\text{CR}}\|^2 - \int_{\Omega} f v_{\text{CR}} \, dx - I_K(\Lambda). \quad (4.2)$$

Dabei gilt  $L(v_{\text{CR}}, \Lambda) > -\infty$  genau dann, wenn  $\Lambda \in K$ . Außerdem gilt mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung für beliebige  $\Lambda \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2) \cap K$ , dass

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Lambda \cdot \nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}} \, dx &\leq \int_{\Omega} |\Lambda \cdot \nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}}| \, dx \leq \int_{\Omega} |\Lambda| |\nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}}| \, dx \\ &\leq \int_{\Omega} 1 |\nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}}| \, dx = \|\nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}}\|_{L^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt

$$\sup_{\Lambda \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)} L(v_{\text{CR}}, \Lambda) = \sup_{\Lambda \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2) \cap K} L(v_{\text{CR}}, \Lambda) \leq E_{\text{NC}}(v_{\text{CR}}).$$

Weiterhin gilt für alle  $v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$ , wenn wir  $\Lambda \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2) \cap K$  elementweise auf allen  $T \in \mathcal{T}$  definieren durch  $\Lambda(x) \in \text{sign}(\nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}}(x))$  für alle  $x \in \text{int}(T)$ , dass  $L(v_{\text{CR}}, \Lambda) = E_{\text{NC}}(v_{\text{CR}})$  und deshalb auch  $E_{\text{NC}}(v_{\text{CR}}) \leq \sup_{\Lambda \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)} L(v_{\text{CR}}, \Lambda)$ .

Insgesamt können wir festhalten, dass für alle  $v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  gilt

$$E_{\text{NC}}(v_{\text{CR}}) = \sup_{\Lambda \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2) \cap K} L(v_{\text{CR}}, \Lambda) = \sup_{\Lambda \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)} L(v_{\text{CR}}, \Lambda). \quad (4.3)$$

Insbesondere ist damit die Funktion  $u_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  aus der Lösung  $(u_{\text{CR}}, \Lambda) \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T}) \times P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)$  des folgenden Sattelpunktsproblems Lösung von Problem 4.1.

**Problem 4.2.** Finde  $(u_{\text{CR}}, \Lambda) \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T}) \times P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)$ , sodass

$$L(u_{\text{CR}}, \Lambda) = \inf_{v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})} \sup_{\Lambda \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)} L(v_{\text{CR}}, \Lambda).$$

Nachdem diese Vorbereitungen abgeschlossen sind, können wir nun beweisen, dass Problem 4.1 eine eindeutige Lösung besitzt und äquivalente Charakterisierungen für diese zeigen. Der Inhalt des folgenden Theorems wurde von Professor Carstensen formuliert.

**Theorem 4.3.** *Es existiert eine eindeutige Lösung  $u_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  von Problem 4.1.*

*Außerdem sind die folgenden drei Aussagen für eine Funktion  $u_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  äquivalent.*

(i) *Problem 4.1 wird von  $u_{\text{CR}}$  gelöst.*

(ii) *Es existiert ein  $\bar{\Lambda} \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)$  mit  $|\bar{\Lambda}(\cdot)| \leq 1$  fast überall in  $\Omega$ , sodass*

$$\bar{\Lambda}(\cdot) \cdot \nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}(\cdot) = |\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}(\cdot)| \quad \text{fast überall in } \Omega \quad (4.4)$$

und

$$(\bar{\Lambda}, \nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}}) = (f - \alpha u_{\text{CR}}, v_{\text{CR}}) \quad \text{für alle } v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T}). \quad (4.5)$$

(iii) *Für alle  $v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  gilt*

$$(f - \alpha u_{\text{CR}}, v_{\text{CR}} - u_{\text{CR}}) \leq \|\nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}}\|_{L^1(\Omega)} - \|\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}\|_{L^1(\Omega)}. \quad (4.6)$$

*Beweis.* Mit analogen Abschätzungen wie in Ungleichung (3.3) erhalten wir für das Funktional  $E_{\text{NC}}$  aus Problem 4.1 für alle  $v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T}) \subset L^2(\Omega)$  die Abschätzung

$$E_{\text{NC}}(v_{\text{CR}}) \geq -\frac{1}{\alpha} \|f\|^2.$$

Somit ist  $E_{\text{NC}}$  nach unten beschränkt und es existiert eine infimierende Folge  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  von  $E_{\text{NC}}$ . Aufgrund der Form von  $E_{\text{NC}}$  ist diese Folge beschränkt bezüglich der Norm  $\|\cdot\|$ .

Der endlichdimensionale Raum  $\text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  ist, ausgestattet mit der Norm  $\|\cdot\|$ , ein Banachraum und damit reflexiv. Demnach existiert eine in  $\text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  schwach konvergente Teilfolge von  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Da  $\text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  endlichdimensional ist, konvergiert diese sogar stark in  $L^2(\Omega)$ . Weil  $\text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  ein Banachraum und damit abgeschlossen bezüglich der Konvergenz in  $\|\cdot\|$  ist, gilt für den Grenzwert  $u_{\text{CR}}$  dieser Teilfolge, dass  $u_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$ .

Außerdem ist  $E_{\text{NC}}$  stetig bezüglich der Konvergenz in  $L^2(\Omega)$ , was impliziert, dass  $u_{\text{CR}}$  Minimierer von  $E_{\text{NC}}$  in  $\text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  sein muss.

Die Lösung  $u_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  ist eindeutig, da  $E_{\text{NC}}$  strikt konvex ist.

Nachdem wir die Existenz eines eindeutigen Minimierers von Problem 4.1 bewiesen haben, zeigen wir nun die äquivalenten Charakterisierung für diesen.

Für den Rest dieses Beweises sei  $u_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$ , falls nicht anderes angegeben, eine beliebige Funktion in  $\text{CR}_0^1(\mathcal{T})$ , das heißt insbesondere nicht unbedingt Lösung von Problem 4.1.

(i)  $\Rightarrow$  (ii). Sei  $u_{\text{CR}}$  Lösung von Problem 4.1.

Durch Gleichung (4.3) wissen wir bereits, dass  $E_{\text{NC}}(v_{\text{CR}}) = \sup_{\Lambda \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)} L(v_{\text{CR}}, \Lambda)$  für alle  $v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$ . Somit existiert für  $u_{\text{CR}}$  ein  $\bar{\Lambda} \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2) \cap K$  mit  $E_{\text{NC}}(u_{\text{CR}}) = L(u_{\text{CR}}, \bar{\Lambda})$ . Da außerdem  $u_{\text{CR}}$  Problem 4.1 löst, folgt insgesamt

$$L(u_{\text{CR}}, \bar{\Lambda}) = E_{\text{NC}}(u_{\text{CR}}) = \inf_{v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})} E_{\text{NC}}(v_{\text{CR}}) = \inf_{v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})} \sup_{\Lambda \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)} L(v_{\text{CR}}, \Lambda). \quad (4.7)$$

Weiterhin gilt nach [Roc70, S. 379, Lemma 36.1], dass

$$\inf_{v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})} \sup_{\Lambda \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)} L(v_{\text{CR}}, \Lambda) \geq \sup_{\Lambda \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)} \inf_{v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})} L(v_{\text{CR}}, \Lambda).$$

Zusammen mit Gleichung (4.7) impliziert das

$$\inf_{v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})} \sup_{\Lambda \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)} L(v_{\text{CR}}, \Lambda) = L(u_{\text{CR}}, \bar{\Lambda}) = \sup_{\Lambda \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)} \inf_{v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})} L(v_{\text{CR}}, \Lambda).$$

Somit ist  $(u_{\text{CR}}, \bar{\Lambda}) \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T}) \times (P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2) \cap K)$  nach [Roc70, S. 380, Lemma 36.2] Sattelpunkt von  $L$  bezüglich der Maximierung über  $P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)$  und der Minimierung über  $\text{CR}_0^1(\mathcal{T})$ . Das bedeutet nach [Roc70, S. 380] insbesondere, dass  $u_{\text{CR}}$  Minimierer von  $L(\cdot, \bar{\Lambda})$  in  $\text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  ist und  $\bar{\Lambda}$  Maximierer von  $L(u_{\text{CR}}, \cdot)$  über  $P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)$ . Mit dieser Erkenntnis können wir nun die entsprechenden Optimalitätsbedingungen diskutieren.

Zunächst bemerken wir, dass  $L(u_{\text{CR}}, \cdot) : P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2) \rightarrow [-\infty, \infty)$  konkav ist. Da  $\bar{\Lambda}$  Maximierer von  $L(u_{\text{CR}}, \cdot)$  in  $P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)$  ist, wird das konvexe Funktional  $-L(u_{\text{CR}}, \cdot) : P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2) \rightarrow (-\infty, \infty]$  von  $\bar{\Lambda}$  in  $P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)$  minimiert. Nach den Theoremen 2.7, 2.9 und 2.8 gilt somit

$$0 \in \partial(-L(u_{\text{CR}}, \cdot))(\bar{\Lambda}) = \{-(\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}, \cdot)\} + \partial I_K(\bar{\Lambda}).$$

Äquivalent zu dieser Aussage ist, dass  $(\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}, \cdot) \in \partial I_K(\bar{\Lambda})$ . Da  $\bar{\Lambda} \in K$ , folgt mit Definition 2.6, dass für alle  $\Lambda \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)$  gilt

$$(\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}, \Lambda - \bar{\Lambda}) \leq I_K(\Lambda) - I_K(\bar{\Lambda}) = I_K(\Lambda).$$

och erklären,  
warum stetig  
der reicht das  
o? S. 17 im  
Ausdruck

Falls  $\Lambda \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2) \cap K$ , folgt insbesondere

$$\begin{aligned} (\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}, \Lambda - \bar{\Lambda}) &\leq 0, \quad \text{also} \\ (\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}, \Lambda) &\leq (\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}, \bar{\Lambda}). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Sei nun  $\Lambda \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2) \cap K$  elementweise auf allen  $T \in \mathcal{T}$  durch  $\Lambda(x) \in \text{sign}(\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}(x))$  definiert für alle  $x \in \text{int}(T)$ . Mit dieser Wahl von  $\Lambda$ , Ungleichung (4.8), der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und  $\bar{\Lambda} \in K$  erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}| \, dx &= \int_{\Omega} \nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}} \cdot \Lambda \, dx = (\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}, \Lambda) \\ &\leq (\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}, \bar{\Lambda}) = \int_{\Omega} \nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}} \cdot \bar{\Lambda} \, dx \\ &\leq \int_{\Omega} |\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}| |\bar{\Lambda}| \, dx \leq \int_{\Omega} |\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}| \, dx, \quad \text{das heißt} \\ \int_{\Omega} |\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}| \, dx &= \int_{\Omega} \nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}} \cdot \bar{\Lambda} \, dx \quad \text{beziehungsweise} \\ \sum_{T \in \mathcal{T}} |T| |(\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}})_T| &= \sum_{T \in \mathcal{T}} |T| (\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}} \cdot \bar{\Lambda})_T. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Außerdem gilt für alle  $T \in \mathcal{T}$  mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und  $\bar{\Lambda} \in K$ , dass

$$(\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}} \cdot \bar{\Lambda})_T \leq |(\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}})_T| |\bar{\Lambda}_T| \leq |(\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}})_T|.$$

Mit Gleichung (4.9) folgt daraus für alle  $T \in \mathcal{T}$ , dass  $(\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}} \cdot \bar{\Lambda})_T = |(\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}})_T|$ , das heißt fast überall in  $\Omega$  gilt  $\bar{\Lambda}(\cdot) \cdot \nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}(\cdot) = |\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}(\cdot)|$ . Damit ist Gleichung (4.4) gezeigt.

Als Nächstes betrachten wir das reellwertige Funktional  $L(\cdot, \bar{\Lambda}) : \text{CR}_0^1(\mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}$ . Es ist Fréchet-differenzierbar mit

$$dL(\cdot, \bar{\Lambda})(u_{\text{CR}}; v_{\text{CR}}) = \int_{\Omega} \bar{\Lambda} \cdot \nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}} \, dx + \alpha(u_{\text{CR}}, v_{\text{CR}}) - \int_{\Omega} f v_{\text{CR}} \, dx$$

für alle  $v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$ . Da  $u_{\text{CR}}$  Minimierer von  $L(\cdot, \bar{\Lambda})$  in  $\text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  ist, gilt nach Theorem 2.4, dass  $0 = dL(\cdot, \bar{\Lambda})(u_{\text{CR}}; v_{\text{CR}})$  für alle  $v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$ . Diese Bedingung ist für alle  $v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  äquivalent zu  $(\bar{\Lambda}, \nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}}) = (f - \alpha u_{\text{CR}}, v_{\text{CR}})$ . Somit ist Gleichung (4.5) gezeigt.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii). Die Funktion  $\bar{\Lambda} \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)$  erfülle  $|\bar{\Lambda}(\cdot)| \leq 1$  fast überall in  $\Omega$  sowie die Gleichungen (4.4) und (4.5).

Dann gilt für alle  $v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  mit Gleichung (4.5), Gleichung (4.4), der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und  $|\bar{\Lambda}(\cdot)| \leq 1$  fast überall in  $\Omega$ , dass

$$\begin{aligned} (f - \alpha u_{\text{CR}}, v_{\text{CR}} - u_{\text{CR}}) &= (f - \alpha u_{\text{CR}}, v_{\text{CR}}) - (f - \alpha u_{\text{CR}}, u_{\text{CR}}) \\ &= (\bar{\Lambda}, \nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}}) - (\bar{\Lambda}, \nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}) \\ &= \int_{\Omega} \bar{\Lambda} \cdot \nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}} \, dx - \int_{\Omega} \bar{\Lambda} \cdot \nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}} \, dx \\ &= \int_{\Omega} \bar{\Lambda} \cdot \nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}} \, dx - \int_{\Omega} |\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}| \, dx \\ &\leq \int_{\Omega} |\bar{\Lambda}| |\nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}}| \, dx - \int_{\Omega} |\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}| \, dx \\ &\leq \int_{\Omega} |\nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}}| \, dx - \int_{\Omega} |\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}| \, dx \\ &= \|\nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}}\|_{L^1(\Omega)} - \|\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}\|_{L^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

#### 4 Das diskrete Problem

Somit ist Ungleichung (4.6) gezeigt.

(iii)  $\Rightarrow$  (i). Es gelte Ungleichung (4.6) für alle  $v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$ , also

$$(f - \alpha u_{\text{CR}}, v_{\text{CR}} - u_{\text{CR}}) \leq \|\nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}}\|_{L^1(\Omega)} - \|\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}\|_{L^1(\Omega)}.$$

Wir haben in diesen Beweis bereits gezeigt, dass stets eine eindeutige Lösung  $\tilde{u}_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  von Problem 4.1 existiert und außerdem, dass für diese für alle  $v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  gilt

$$(f - \alpha \tilde{u}_{\text{CR}}, v_{\text{CR}} - \tilde{u}_{\text{CR}}) \leq \|\nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}}\|_{L^1(\Omega)} - \|\nabla_{\text{NC}} \tilde{u}_{\text{CR}}\|_{L^1(\Omega)}.$$

Um zu beweisen, dass  $u_{\text{CR}}$  Problem 4.1 löst, genügt es aufgrund der Eindeutigkeit der Lösung  $\tilde{u}_{\text{CR}}$  von Problem 4.1 zu zeigen, dass  $u_{\text{CR}} = \tilde{u}_{\text{CR}}$  in  $\text{CR}_0^1(\mathcal{T})$ .

Es gilt

$$\begin{aligned} (f - \alpha u_{\text{CR}}, \tilde{u}_{\text{CR}} - u_{\text{CR}}) &\leq \|\nabla_{\text{NC}} \tilde{u}_{\text{CR}}\|_{L^1(\Omega)} - \|\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}\|_{L^1(\Omega)} \quad \text{und} \\ (f - \alpha \tilde{u}_{\text{CR}}, u_{\text{CR}} - \tilde{u}_{\text{CR}}) &\leq \|\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}\|_{L^1(\Omega)} - \|\nabla_{\text{NC}} \tilde{u}_{\text{CR}}\|_{L^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Die Addition dieser Ungleichungen liefert die Ungleichung

$$(-\alpha u_{\text{CR}}, \tilde{u}_{\text{CR}} - u_{\text{CR}}) + (-\alpha \tilde{u}_{\text{CR}}, u_{\text{CR}} - \tilde{u}_{\text{CR}}) \leq 0,$$

welche äquivalent ist zu

$$\alpha \|\tilde{u}_{\text{CR}} - u_{\text{CR}}\|^2 \leq 0.$$

Da  $\alpha > 0$ , impliziert das  $\|\tilde{u}_{\text{CR}} - u_{\text{CR}}\|^2 = 0$ , also  $\tilde{u}_{\text{CR}} = u_{\text{CR}}$  in  $\text{CR}_0^1(\mathcal{T})$ .  $\square$

Zum Schluss dieses Abschnitts wollen wir noch zwei Bemerkungen von Professor Carstensen erwähnen und kurz deren Gültigkeit begründen.

Die erste ist in eine äquivalente Charakterisierung der dualen Variable  $\bar{\Lambda} \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)$  aus Theorem 4.3 zur diskreten Lösung  $u_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  von Problem 4.1.

*Bemerkung 4.4.* Das  $\bar{\Lambda} \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)$  fast überall in  $\Omega$  Gleichung (4.4) und  $|\bar{\Lambda}(\cdot)| \leq 1$  erfüllt, ist äquivalent zu der Bedingung  $\bar{\Lambda}(x) \in \text{sign}(\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}(x))$  für alle  $x \in \text{int}(T)$  für alle  $T \in \mathcal{T}$ .

*Beweis.* Dass die genannte Bedingung hinreichend ist, folgt direkt aus der Definition der Signumfunktion.

Ihre Notwendigkeit folgt aus der folgenden Beobachtung. Da  $|\bar{\Lambda}(\cdot)| \leq 1$  fast überall in  $\Omega$ , ist Gleichung (4.4) eine Cauchy-Schwarzsche Ungleichung, bei der sogar Gleichheit gilt. Dies ist genau dann der Fall, wenn  $\bar{\Lambda}(\cdot)$  und  $\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}(\cdot)$  fast überall in  $\Omega$  linear abhängig sind.  $\square$

Daraus können wir folgern, unter welchen Umständen die duale Variable  $\bar{\Lambda}$  auf einem Dreieck  $T \in \mathcal{T}$  eindeutig bestimmt ist.

*Bemerkung 4.5.* Falls  $\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}} \neq 0$  auf  $T \in \mathcal{T}$ , gilt nach Definition der Signumfunktion, dass  $\bar{\Lambda} = \nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}} / |\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}|$  eindeutig bestimmt ist auf  $T$ .

Im Allgemeinen ist  $\bar{\Lambda}$  nicht eindeutig bestimmbar. Betrachten wir zum Beispiel  $f \equiv 0$  in Problem 4.1 mit eindeutiger Lösung  $u_{\text{CR}} \equiv 0$  fast überall in  $\Omega$ . Dann erfüllt nach der diskreten Helmholtz Zerlegung [Car09b, S. 193, Theorem 3.32] die Wahl  $\bar{\Lambda} := \text{Curl}(v_{\text{C}})$  für ein beliebiges  $v_{\text{C}} \in S^1(\mathcal{T})$  mit  $|\text{Curl}(v_{\text{C}})| \leq 1$  die Charakterisierung (ii) aus Theorem 4.3.

### 4.3 Kontrolle des Abstandes zwischen diskreter und kontinuierlicher Lösung

Wir möchten in diesen Abschnitt zwei Abschätzungen aufführen, mit denen möglicherweise der  $L^2$ -Abstand zwischen der Lösung des diskreten Problems 4.1 und der Lösung des kontinuierlichen Problems 3.1 kontrolliert werden kann.

Die Gültigkeit dieser Abschätzungen werden wir in Kapitel 8 untersuchen.

Zunächst betrachten wir [Bar15b, S. 309, Theorem 10.7]. Diese Abschätzung kontrolliert den  $L^2$ -Fehler zwischen den Minimierern  $u_C \in S^1(\mathcal{T})$  und  $u \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$  des Funktional  $I$  aus Gleichung (1.1) in den entsprechenden Räumen. Obwohl wir eine andere Formulierung des ROF-Modells betrachten und sich insbesondere das Funktional  $E_{\text{NC}}$  aus unserer diskreten, nichtkonformen Formulierung von  $I$  unterscheidet, ähneln sich die Probleme möglicherweise genug, um die folgende Rate für unsere Formulierungen experimentell feststellen zu können.

**Theorem 4.6.** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  sternförmig und  $g \in L^\infty(\Omega)$ . Seien weiterhin  $u \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$  und  $u_C \in S^1(\mathcal{T})$  die Minimierer des Funktional  $I$  aus Gleichung (1.1) in den entsprechenden Räumen.*

*Dann existiert eine Konstante  $c \in \mathbb{R}_+$ , sodass*

$$\frac{\alpha}{2} \|u - u_C\|^2 \leq ch^{1/2}.$$

Als Nächstes möchten wir beweisen, dass der  $L^2$ -Abstand zwischen der Lösung  $u$  von Problem 3.1 und einer beliebigen Funktion  $v \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$  beschränkt werden kann durch die Differenz der Werte des Funktional  $E$  an den Stellen  $u$  und  $v$ . Daraus wollen wir anschließend die zweite Möglichkeit folgern, wie der Abstand in  $L^2(\Omega)$  zwischen den Lösungen des kontinuierlichen und des diskreten Problems kontrolliert werden kann.

**Theorem 4.7.** *Sei  $u \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$  Lösung von Problem 3.1.*

*Dann gilt*

$$\frac{\alpha}{2} \|u - v\|^2 \leq E(v) - E(u) \quad \text{für alle } v \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega).$$

*Beweis.* Wir folgen der Argumentation im Beweis von [Bar15b, S. 309, Lemma 10.2]. Da viele der Schritte ähnlich zum Beweis von Theorem 3.6 sind, präsentieren wir die entsprechenden Argumente verkürzt.

Wir definieren die konvexen Funktionale  $F : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  und  $G : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei  $F$  wie im Beweis von Theorem 3.6 definiert ist und  $G$  für alle  $v \in L^2(\Omega)$  gegeben ist durch

$$G(v) := \frac{\alpha}{2} \|v\|^2 - \int_{\Omega} f v \, dx.$$

Es gilt  $E = F + G$ .

Die Fréchet-Ableitung  $G'(u) : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  von  $G$  an der Stelle  $u \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$  ist für alle  $v \in L^2(\Omega)$  gegeben durch

$$dG(u; v) = \alpha(u, v) - \int_{\Omega} f v \, dx = (\alpha u - f, v).$$

Das impliziert mit wenigen Rechenschritten

$$dG(u; v - u) + \frac{\alpha}{2} \|u - v\|^2 + G(u) = G(v) \quad \text{für alle } v \in L^2(\Omega). \quad (4.10)$$

Da  $u$  Minimierer von  $E$  ist, erhalten wir mit Theorem 2.7, Theorem 2.9 und Theorem 2.8 die Aussage

$$0 \in \partial E(u) = \partial F(u) + \{G'(u)\},$$

woraus folgt

$$-G'(u) \in \partial F(u).$$

Das ist nach Definition 2.6 äquivalent zu

$$-dG(u; v - u) \leq F(v) - F(u) \quad \text{für alle } v \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega).$$

Daraus folgt zusammen mit Gleichung (4.10) für alle  $v \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ , dass

$$\frac{\alpha}{2} \|u - v\|^2 + G(u) - G(v) + F(u) = -dG(u; v - u) + F(u) \leq F(v).$$

Da  $E = F + G$ , folgt daraus die zu zeigende Aussage.  $\square$

Zusammen mit den Betrachtungen in Abschnitt 4.1 erhalten wir damit folgendes Korollar.

**Korollar 4.8.** *Sei  $u \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$  Lösung von Problem 3.1 und  $u_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  Lösung von Problem 4.1.*

*Dann gilt*

$$\frac{\alpha}{2} \|u - u_{\text{CR}}\|^2 \leq E(u_{\text{CR}}) - E(u) = E_{\text{NC}}(u_{\text{CR}}) + \sum_{F \in \mathcal{E}} \|[u_{\text{CR}}]_F\|_{L^1(F)} - E(u).$$

*Insbesondere gilt auch*

$$\frac{\alpha}{2} \|u - u_{\text{CR}}\|^2 \leq |E_{\text{NC}}(u_{\text{CR}}) - E(u)| + \left| \sum_{F \in \mathcal{E}} \|[u_{\text{CR}}]_F\|_{L^1(F)} \right|.$$

## 4.4 Verfeinerungsindikator und garantierte untere Energieschranke

Professor Carstensen stellte für die numerischen Untersuchungen den folgenden Verfeinerungsindikator zur adaptiven Netzverfeinerung und eine garantierte untere Energieschranke zur Verfügung.

**Definition 4.9** (Verfeinerungsindikator). Für  $d \in \mathbb{N}$  (in dieser Arbeit stets  $d = 2$ ) und  $0 < \gamma \leq 1$  definieren wir für alle  $T \in \mathcal{T}$  die Funktionen

$$\begin{aligned} \eta_V(T) &:= |T|^{2/n} \|f - \alpha u_{\text{CR}}\|_{L^2(T)}^2 \quad \text{und} \\ \eta_J(T) &:= |T|^{\gamma/n} \sum_{F \in \mathcal{E}(T)} \|[u_{\text{CR}}]_F\|_{L^1(F)}. \end{aligned}$$

Damit definieren wir den Verfeinerungsindikator  $\eta := \sum_{T \in \mathcal{T}} \eta(T)$ , wobei

$$\eta(T) := \eta_V(T) + \eta_J(T) \quad \text{für alle } T \in \mathcal{T}. \quad (4.11)$$



**Theorem 4.10.** *Sei  $f \in H_0^1(\Omega)$  in Problem 3.1 mit Lösung  $u \in H_0^1(\Omega)$  und minimaler Energie  $E(u)$  sowie in Problem 4.1 mit Lösung  $u_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\Omega)$  und minimaler Energie  $E_{\text{NC}}(u_{\text{CR}})$ .*

*Dann gilt*

$$E_{\text{NC}}(u_{\text{CR}}) + \frac{\alpha}{2} \|u - u_{\text{CR}}\|^2 - \frac{\kappa_{\text{CR}}}{\alpha} \|h_{\mathcal{T}}(f - \alpha u_{\text{CR}})\| \|\nabla f\| \leq E(u).$$

*Dabei ist mit der kleinsten positiven Nullstelle  $j_{1,1}$  der Bessel-Funktion erster Art die Konstante  $\kappa_{\text{CR}} := \sqrt{1/48 + 1/j_{1,1}^2}$ .*

*Insbesondere gilt dann für*

$$E_{\text{GLEB}} := E_{\text{NC}}(u_{\text{CR}}) - \frac{\kappa_{\text{CR}}}{\alpha} \|h_{\mathcal{T}}(f - \alpha u_{\text{CR}})\| \|\nabla f\|, \quad (4.12)$$

*dass  $E_{\text{NC}}(u_{\text{CR}}) \geq E_{\text{GLEB}}$  und  $E(u) \geq E_{\text{GLEB}}$ .*

# 5 Iterative Lösung

## 5.1 Primale-duale Iteration

In diesen Abschnitt präsentieren wir ein iteratives Verfahren mit dem wir Problem 4.1 numerisch lösen möchten. Wir nutzen die primale-duale Iteration [Bar15b, S. 314, Algorithm 10.1] unter Beachtung von [Bar15b, S. 314, Remark 10.11]. Diese realisiert Gradientenverfahren zum Finden eines Sattelpunkts, dessen Komponenten die primale und die duale Formulierung des Minimierungsproblems lösen. Details dazu und weitere Referenzen finden sich in [Bar12; Bar15b, S. 118-121].

Angepasst an unser Problem und die Notation dieser Arbeit lautet der Algorithmus wie folgt.

**Algorithmus 5.1** (Primale-duale Iteration).

**Input:**  $(u_0, \Lambda_0) \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T}) \times P_0(\mathcal{T}; \{w \in \mathbb{R}^2 \mid |w| \leq 1\})$ ,  $\tau > 0$

Initialisiere  $v_0 := 0$  in  $\text{CR}_0^1(\mathcal{T})$ .

**for**  $j = 1, 2, \dots$

$$\tilde{u}_j := u_{j-1} + \tau v_{j-1}, \quad (5.1)$$

$$\Lambda_j := \frac{\Lambda_{j-1} + \tau \nabla_{\text{NC}} \tilde{u}_j}{\max\{1, |\Lambda_{j-1} + \tau \nabla_{\text{NC}} \tilde{u}_j|\}}, \quad (5.2)$$

bestimme  $u_j \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  als Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\frac{1}{\tau} a_{\text{NC}}(u_j, \cdot) + \alpha(u_j, \cdot) = \frac{1}{\tau} a_{\text{NC}}(u_{j-1}, \cdot) + (f, \cdot) - (\Lambda_j, \nabla_{\text{NC}} \cdot) \quad \text{in } \text{CR}_0^1(\mathcal{T}), \quad (5.3)$$

$$v_j := \frac{u_j - u_{j-1}}{\tau}.$$

**Output:** Folge  $(u_j, \Lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$  in  $\text{CR}_0^1(\mathcal{T}) \times P_0(\mathcal{T}; \{w \in \mathbb{R}^2 \mid |w| \leq 1\})$

## 5.2 Konvergenz der Iteration

In diesen Abschnitt beweisen wir die Konvergenz der Iterate von Algorithmus 5.1 gegen die Lösung von Problem 4.1. Dabei bedienen wir uns unter anderem der äquivalenten Charakterisierungen aus Theorem 4.3.

**Theorem 5.2.** Sei  $u_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  Lösung von Problem 4.1 und  $\bar{\Lambda} \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)$  erfülle  $|\bar{\Lambda}(\cdot)| \leq 1$  fast überall in  $\Omega$ , Gleichung (4.4) und Gleichung (4.5).

Falls  $0 < \tau \leq 1$ , dann konvergieren die Iterate  $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$  von Algorithmus 5.1 in  $L^2(\Omega)$  gegen  $u_{\text{CR}}$ .

*Beweis.* Der Beweis folgt einer Skizze von Professor Carstensen.

Sei  $j \in \mathbb{N}$ . Seien weiterhin  $\tilde{u}_j$ ,  $v_j$  und  $\Lambda_j$  definiert wie in Algorithmus 5.1. Außerdem definieren wir die Abkürzungen  $e_j := u_{\text{CR}} - u_j$ ,  $E_j := \bar{\Lambda} - \Lambda_j$  und  $\mu_j := \max\{1, |\Lambda_{j-1} + \tau \nabla_{\text{NC}} \tilde{u}_j|\}$ . Dabei nutzen wir die Konvention  $e_{-1} := e_0$ .

Wir testen zunächst (5.3) mit  $e_j$  und formen das Resultat um. Damit erhalten wir

$$a_{\text{NC}}(v_j, e_j) + \alpha(u_j, e_j) + (\Lambda_j, \nabla_{\text{NC}} e_j) = (f, e_j).$$

Zusammen mit Gleichung (4.5) folgt daraus

$$\begin{aligned} a_{\text{NC}}(v_j, e_j) &= \alpha(u_{\text{CR}} - u_j, e_j) + (\bar{\Lambda} - \Lambda_j, \nabla_{\text{NC}} e_j) \\ &= \alpha \|e_j\|^2 + (E_j, \nabla_{\text{NC}} e_j). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Als Nächstes betrachten wir Gleichung (5.2). Es gilt

$$\Lambda_{j-1} - \Lambda_j + \tau \nabla_{\text{NC}} \tilde{u}_j = (\mu_j - 1) \Lambda_j \quad \text{fast überall in } \Omega. \quad (5.5)$$

Außerdem folgt aus Gleichung (5.2) und einer einfachen Fallunterscheidung zwischen  $1 \geq |\Lambda_{j-1} + \tau \nabla_{\text{NC}} \tilde{u}_j|$  und  $1 < |\Lambda_{j-1} + \tau \nabla_{\text{NC}} \tilde{u}_j|$ , dass

$$(1 - |\Lambda_j|)(\mu_j - 1) = 0 \quad \text{fast überall in } \Omega. \quad (5.6)$$

Testen wir nun Gleichung (5.5) in  $L^2(\Omega)$  mit  $E_j$ , erhalten wir unter Nutzung von  $\mu_j \geq 1$ , der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung,  $|\bar{\Lambda}(\cdot)| \leq 1$  fast überall in  $\Omega$  und Gleichung (5.6), dass

$$\begin{aligned} (\Lambda_{j-1} - \Lambda_j + \tau \nabla_{\text{NC}} \tilde{u}_j, E_j) &= ((\mu_j - 1) \Lambda_j, \bar{\Lambda} - \Lambda_j) \\ &= \int_{\Omega} (\mu_j - 1)(\Lambda_j \cdot \bar{\Lambda} - \Lambda_j \cdot \Lambda_j) \, dx \\ &\leq \int_{\Omega} (\mu_j - 1)(|\Lambda_j| - |\Lambda_j|^2) \, dx \\ &= \int_{\Omega} |\Lambda_j|(1 - |\Lambda_j|)(\mu_j - 1) \, dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt mit  $\Lambda_{j-1} - \Lambda_j = E_j - E_{j-1}$  und  $\tilde{u}_j = u_{j-1} - (e_{j-1} - e_{j-2})$ , dass nach Division durch  $\tau$  gilt

$$\left( \frac{E_j - E_{j-1}}{\tau} + \nabla_{\text{NC}} u_{j-1} - \nabla_{\text{NC}}(e_{j-1} - e_{j-2}), E_j \right) \leq 0. \quad (5.7)$$

Aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung,  $\bar{\Lambda}(x) \in \text{sign}(\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}(x))$  für alle  $x \in \text{int}(T)$  für alle  $T \in \mathcal{T}$  und  $|\Lambda_j(\cdot)| \leq 1$  fast überall in  $\Omega$  folgt, dass

$$\begin{aligned} \nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}} \cdot E_j &= \nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}} \cdot \bar{\Lambda} - \nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}} \cdot \Lambda_j \\ &\geq \nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}} \cdot \bar{\Lambda} - |\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}| |\Lambda_j| \\ &= |\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}| (1 - |\Lambda_j|) \\ &\geq 0 \quad \text{fast überall in } \Omega. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$(\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}, E_j) = \int_{\Omega} \nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}} \cdot E_j \, dx \geq 0. \quad (5.8)$$

Aus den Ungleichungen (5.7) und (5.8) folgt insgesamt

$$\left( \frac{E_j - E_{j-1}}{\tau} + \nabla_{\text{NC}} u_{j-1} - \nabla_{\text{NC}}(e_{j-1} - e_{j-2}), E_j \right) \leq (\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}, E_j).$$

Das ist äquivalent zu

$$\left( \frac{E_j - E_{j-1}}{\tau} - \nabla_{\text{NC}}(2e_{j-1} - e_{j-2}), E_j \right) \leq 0. \quad (5.9)$$

## 5 Iterative Lösung

Unter Nutzung von  $-\tau v_j = e_j - e_{j-1}$ , Gleichung (5.4) und Ungleichung (5.9) zusammen mit  $\tau > 0$  erhalten wir

$$\begin{aligned}
& \|e_j\|_{\text{NC}}^2 - \|e_{j-1}\|_{\text{NC}}^2 + \|E_j\|^2 - \|E_{j-1}\|^2 + \|e_j - e_{j-1}\|_{\text{NC}}^2 + \|E_j - E_{j-1}\|^2 \\
&= 2a_{\text{NC}}(e_j, e_j - e_{j-1}) + 2(E_j, E_j - E_{j-1}) \\
&= -2\tau a_{\text{NC}}(e_j, v_j) + 2(E_j, E_j - E_{j-1}) \\
&= -2\tau\alpha\|e_j\|^2 + 2\tau\left(E_j, -\nabla_{\text{NC}}e_j + \frac{E_j - E_{j-1}}{\tau}\right) \\
&\leq -2\tau\alpha\|e_j\|^2 + 2\tau\left(E_j, -\nabla_{\text{NC}}e_j + \frac{E_j - E_{j-1}}{\tau}\right) \\
&\quad - 2\tau\left(\frac{E_j - E_{j-1}}{\tau} - \nabla_{\text{NC}}(2e_{j-1} - e_{j-2}), E_j\right) \\
&= -2\tau\alpha\|e_j\|^2 - 2\tau(E_j, \nabla_{\text{NC}}(e_j - 2e_{j-1} + e_{j-2})).
\end{aligned}$$

Für jedes  $J \in \mathbb{N}$  führt die Summation dieser Ungleichung über  $j = 1, \dots, J$  und eine Äquivalenzumformung zu

$$\begin{aligned}
& \|e_J\|_{\text{NC}}^2 + \|E_J\|^2 + \sum_{j=1}^J (\|e_j - e_{j-1}\|_{\text{NC}}^2 + \|E_j - E_{j-1}\|^2) \\
&\leq \|e_0\|_{\text{NC}}^2 + \|E_0\|^2 - 2\tau\alpha \sum_{j=1}^J \|e_j\|^2 - 2\tau \sum_{j=1}^J (E_j, \nabla_{\text{NC}}(e_j - 2e_{j-1} + e_{j-2})).
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Die letzte Summe auf der rechten Seite dieser Ungleichung können wir, unter Beachtung von  $e_{-1} = e_0$ , umformen durch

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^J (E_j, \nabla_{\text{NC}}(e_j - 2e_{j-1} + e_{j-2})) \\
&= \sum_{j=1}^J (E_j, \nabla_{\text{NC}}(e_j - e_{j-1})) - \sum_{j=0}^{J-1} (E_{j+1}, \nabla_{\text{NC}}(e_j - e_{j-1})) \\
&= \sum_{j=1}^{J-1} (E_j - E_{j+1}, \nabla_{\text{NC}}(e_j - e_{j-1})) + (E_J, \nabla_{\text{NC}}(e_J - e_{J-1})) - (E_1, \nabla_{\text{NC}}(e_0 - e_{-1})) \\
&= \sum_{j=1}^{J-1} (E_j - E_{j+1}, \nabla_{\text{NC}}(e_j - e_{j-1})) + (E_J, \nabla_{\text{NC}}(e_J - e_{J-1})).
\end{aligned}$$

Mit dieser Umformung folgt für jedes  $0 < \tau \leq 1$  aus Ungleichung (5.10), dass

$$\begin{aligned}
& \tau \left( \|e_J\|_{\text{NC}}^2 + \|E_J\|^2 + \sum_{j=1}^J (\|e_j - e_{j-1}\|_{\text{NC}}^2 + \|E_j - E_{j-1}\|^2) \right) \\
&\leq \|e_0\|_{\text{NC}}^2 + \|E_0\|^2 - 2\tau\alpha \sum_{j=1}^J \|e_j\|^2 \\
&\quad - 2\tau \left( \sum_{j=1}^{J-1} (E_j - E_{j+1}, \nabla_{\text{NC}}(e_j - e_{j-1})) + (E_J, \nabla_{\text{NC}}(e_J - e_{J-1})) \right).
\end{aligned}$$

Division durch  $\tau$  ergibt

$$\begin{aligned}
 & \|e_J\|_{\text{NC}}^2 + \|E_J\|^2 + \sum_{j=1}^J (\|e_j - e_{j-1}\|_{\text{NC}}^2 + \|E_j - E_{j-1}\|^2) \\
 & \leq \tau^{-1} (\|e_0\|_{\text{NC}}^2 + \|E_0\|^2) - 2\alpha \sum_{j=1}^J \|e_j\|^2 \\
 & \quad - 2 \sum_{j=1}^{J-1} (E_j - E_{j+1}, \nabla_{\text{NC}}(e_j - e_{j-1})) - 2(E_J, \nabla_{\text{NC}}(e_J - e_{J-1})).
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

Schließlich ergibt eine Abschätzung unter Nutzung von Ungleichung (5.11), dass

$$\begin{aligned}
 & 2\alpha \sum_{j=1}^J \|e_j\|^2 \\
 & \leq 2\alpha \sum_{j=1}^J \|e_j\|^2 + \|E_J + \nabla_{\text{NC}}(e_J - e_{J-1})\|^2 + \|e_J\|_{\text{NC}}^2 + \|E_1 - E_0\|^2 \\
 & \quad + \sum_{j=1}^{J-1} \|\nabla_{\text{NC}}(e_j - e_{j-1}) - (E_{j+1} - E_j)\|^2 \\
 & = 2\alpha \sum_{j=1}^J \|e_j\|^2 + \|e_J\|_{\text{NC}}^2 + \|E_J\|^2 + \sum_{j=1}^J (\|e_j - e_{j-1}\|_{\text{NC}}^2 + \|E_j - E_{j-1}\|^2) \\
 & \quad + 2 \sum_{j=1}^{J-1} (E_j - E_{j+1}, \nabla_{\text{NC}}(e_j - e_{j-1})) + 2(E_J, \nabla_{\text{NC}}(e_J - e_{J-1})) \\
 & \leq \tau^{-1} (\|e_0\|_{\text{NC}}^2 + \|E_0\|^2).
 \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass  $\sum_{j=1}^{\infty} \|e_j\|^2$  nach oben beschränkt ist, was impliziert  $\|u_{\text{CR}} - u_j\| = \|e_j\| \rightarrow 0$  für  $j \rightarrow \infty$ .  $\square$

## 6 Implementierung

### 6.1 Seitennummerierungskonvention lokal

welche Funktionen haben welche, an welche Stellen wird also unnummeriert

### 6.2 Aufstellung des zu lösenden LGS

Aufstellung der Gradienten etc.

### 6.3 Berechnung der Werte einer CR Funktion auf einem Element in den Knoten

Sei  $T \in \mathcal{T}$  mit  $T = \text{conv}\{P_1, P_2, P_3\}$ . Die Seiten von  $T$  seien  $F_1 = \text{conv}\{P_1, P_2\}$ ,  $F_2 = \text{conv}\{P_2, P_3\}$  und  $F_3 = \text{conv}\{P_3, P_1\}$ . Die Funktion  $u_{\text{CR}} \in \text{CR}^1(\mathcal{T})$  habe in den Mittelpunkte der Seiten die Werte  $u_j = u_{\text{CR}}(\text{mid}(F_j))$  für alle  $j = 1, 2, 3$ . Gesucht sind die Werte in den Knoten  $u_{\text{CR}}(P_1)$ ,  $u_{\text{CR}}(P_2)$  und  $u_{\text{CR}}(P_3)$ .

Da  $u_{\text{CR}} \in \text{CR}^1(\mathcal{T})$  affin-linear ist, gilt für eine Kante  $F = \text{conv}\{P, Q\}$ , dass der Wert  $u_{\text{CR}}(\text{mid}(F))$  von  $u_{\text{CR}}$  im Mittelpunkt der Kante gegeben ist durch den Mittelwert der Werte von  $u_{\text{CR}}$  in  $P$  und  $Q$ .

Somit erhalten wir die drei Gleichungen

$$u_1 = \frac{u_{\text{CR}}(P_1) + u_{\text{CR}}(P_2)}{2}, \quad u_2 = \frac{u_{\text{CR}}(P_2) + u_{\text{CR}}(P_3)}{2}, \quad u_3 = \frac{u_{\text{CR}}(P_3) + u_{\text{CR}}(P_1)}{2}.$$

Sind  $u_1$ ,  $u_2$  und  $u_3$  bekannt, können wir dieses Gleichungssystem nach  $u_{\text{CR}}(P_1)$ ,  $u_{\text{CR}}(P_2)$  und  $u_{\text{CR}}(P_3)$  lösen und erhalten

$$u_{\text{CR}}(P_1) = u_1 + u_3 - u_2, \quad u_{\text{CR}}(P_2) = u_1 + u_2 - u_3, \quad u_{\text{CR}}(P_3) = u_2 + u_3 - u_1.$$

Dies wird realisiert in der Methode `computeNodeValuesCR4e`.

### 6.4 Berechnung der L1 Norm der Sprünge

Für die Berechnung des Verfeinerungsindikators [verweis auf entsprechende section] und zur Auswertung der kontinuierlichen Energie  $E(v_{\text{CR}})$  einer Crouzeix-Raviart Funktion  $v_{\text{CR}}$ , deren diskrete Energie  $E_{\text{NC}}(v_{\text{CR}})$  bereits bekannt ist, werden die  $L^1$  Normen der Kantensprünge  $[v_{\text{CR}}]_F$  für alle Kanten  $F \in \mathcal{F}$  der Triangulierung benötigt, wobei für eine Innenkante  $F \in \mathcal{F}(\Omega)$ , die gemeinsame Kante der Dreiecke  $T_+$  und  $T_-$  ist, gilt  $[v_{\text{CR}}]_F := (v_{\text{CR}}|_{T_+})|_F - (v_{\text{CR}}|_{T_-})|_F$  und  $[v_{\text{CR}}]_F := v_{\text{CR}}|_F$  für eine Randkante  $F \in \mathcal{F}(\partial\Omega)$ . Die Konvention der Wahl von  $T_+$  und  $T_-$  ist hier irrelevant, da wir zur Berechnung von  $\|[v_{\text{CR}}]_F\|_{L^1(\Omega)}$  ausschließlich den Betrag  $|[v_{\text{CR}}]_F|$  benötigen.

Da  $v_{\text{CR}} \in \text{CR}^1(\mathcal{T})$ , ist  $[v_{\text{CR}}]_F$  affin linear und es gilt  $[v_{\text{CR}}]_F(\text{mid}(F)) = 0$  für alle Innenkanten  $F \in \mathcal{F}(\Omega)$  und, falls  $v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$ , auch für alle Randkanten  $F \in \mathcal{F}(\partial\Omega)$ .

Die folgenden Aussagen gelten also für Innenkanten beliebiger Crouzeix-Raviart Funktionen, wir beschränken uns aber von nun an auf Funktionen  $v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$ .

Betrachten wir also eine beliebige Kante  $F \in \mathcal{F}$  mit  $F = \text{conv}\{P_1, P_2\}$ . Wir definieren eine Parametrisierung  $\gamma : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$  von  $F$  durch  $\gamma(t) := \frac{t}{2}(P_2 - P_1) + P_1$ . Es gilt  $|\gamma'| \equiv \frac{1}{2}|P_2 - P_1| = \frac{1}{2}|F|$ .

Sei außerdem  $p(t) := [v_{\text{CR}}]_F(\gamma(t))$ . Dann gilt nach [cite Wegintegrale]

$$\begin{aligned} \|[v_{\text{CR}}]_F\|_{L^1(F)} &= \int_F |[v_{\text{CR}}]_F| \, ds = \int_0^2 |p(t)| |\gamma'(t)| \, dt = \frac{|F|}{2} \int_0^2 |p(t)| \, dt \\ &= \frac{|F|}{2} \left( \int_0^1 |p(t)| \, dt + \int_1^2 |p(t)| \, dt \right). \end{aligned}$$

Da  $v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$ , ist  $|p|$  auf  $[0, 1]$  und  $[1, 2]$  jeweils ein Polynom vom Grad 1 mit  $p(1) = [v_{\text{CR}}]_F(\text{mid}(F)) = 0$ , womit sich  $|p|$  jeweils explizit ausdrücken lässt durch  $|p|(t) = (1 - t)|p|(0)$  für alle  $t \in [0, 1]$  und  $|p|(t) = (t - 1)|p|(2)$  für alle  $t \in [1, 2]$ . Die Mittelpunktsregel  $\int_a^b f(x) \, dx \approx (b - a)f((a + b)/2)$  [cite] ist exakt für Polynome vom Grad 1 und somit gilt

$$\begin{aligned} \int_0^1 |p(t)| \, dt &= (1 - 0)|p|\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{|p|(0)}{2} \quad \text{und} \\ \int_1^2 |p(t)| \, dt &= (2 - 1)|p|\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{|p|(2)}{2}. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir insgesamt

$$\begin{aligned} \|[v_{\text{CR}}]_F\|_{L^1(F)} &= \frac{|F|}{2} \left( \frac{|p|(0)}{2} + \frac{|p|(2)}{2} \right) = \frac{|F|}{4} (|p|(0) + |p|(2)) \\ &= \frac{|F|}{4} ([v_{\text{CR}}]_F(P_1) + [v_{\text{CR}}]_F(P_2)), \end{aligned}$$

beziehungsweise  $\|[v_{\text{CR}}]_F\|_{L^1(F)} = \frac{|F|}{4} (|v_{\text{CR}}|(P_1) + |v_{\text{CR}}|(P_2))$  für eine Randkanten  $F \in \mathcal{F}(\partial\Omega)$ .

Diese Berechnung ist realisiert durch die Funktionen `computeBlaJumps`, die die absoluten Sprünge in den Endpunkte einer Kante berechnet, `computeAbsJumps`, die ..., und `computeL1NormOfJumps`, die schließlich die  $L^1$  Norm aller Kantensprünge berechnet....

## 6.5 Implementation der GLEB

## 6.6 Implementation des Refinement Indicators

## 6.7 Implementaition der exakten Energie Berechnung

## 7 Nutzung des Programms

### 7.1 Erstellen eines lauffähigen Benchmarks (Minimalbeispiel)

Beschreibung der wichtigsten Parameter und Idee hinter structs

Ordner, in denen die Funktionen für rechte Seite, Gradient, exakte Lösung etc liegen müssen

Wahrscheinlich flag für flag durchgehen, erklären, welche automatisch gesetzt werden u.U., und wann immer nötig sagen, was man vorher machen muss, wo man Funktionen erstellen muss etc.

für exakte Lösungen Beispiel usw. Berechnung der exakten Energie, also alles was nur mehr Möglichkeiten bietet, Verweis auf die nächste Section (in der dann sagen, welche Flags gesetzt werden können)

### 7.2 Konstruktion eines Experiments mit exakter Lösung

Um eine rechte Seite zu finden, zu der die exakte Lösung bekannt ist, wähle eine Funktion des Radius  $u \in H_0^1([0, 1])$  mit Träger im zweidimensionalen Einheitskreis. Insbesondere muss damit gelten  $u(1) = 0$  und  $u$  stetig. Die rechte Seite als Funktion des Radius  $f \in L^2([0, 1])$  ist dann gegeben durch

$$f := \alpha u - \partial_r(\text{sign}(\partial_r u)) - \frac{\text{sign}(\partial_r u)}{r},$$

wobei für  $F \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  gilt  $\text{sign}(F) := \left\{ \frac{F}{|F|} \right\}$  und  $\text{sign}(0) \in B_1(0)$ . Damit außerdem gilt  $f \in H_0^1([0, 1])$ , was z.B. für GLEB relevant ist, muss also noch Stetigkeit von  $\text{sign}(\partial_r u)$  und  $\partial_r(\text{sign}(\partial_r u))$  verlangt werden und  $\partial_r(\text{sign}(\partial_r u(1))) = \text{sign}(\partial_r u(1)) = 0$ . Damit  $f$  in 0 definierbar ist, muss auch gelten  $\text{sign}(\partial_r u) \in o(r)$  für  $r \rightarrow 0$ .

Damit erhält man für die Funktion

$$u_1(r) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } 0 \leq r \leq \frac{1}{6}, \\ 1 + (6r - 1)^\beta, & \text{wenn } \frac{1}{6} \leq r \leq \frac{1}{3}, \\ 2, & \text{wenn } \frac{1}{3} \leq r \leq \frac{1}{2}, \\ 2(\frac{5}{2} - 3r)^\beta, & \text{wenn } \frac{1}{2} \leq r \leq \frac{5}{6}, \\ 0, & \text{wenn } \frac{5}{6} \leq r, \end{cases}$$

wobei  $\beta \geq 1/2$ , mit der Wahl

$$\text{sign}(\partial_r u_1(r)) = \begin{cases} 12r - 36r^2, & \text{wenn } 0 \leq r \leq \frac{1}{6}, \\ 1, & \text{wenn } \frac{1}{6} \leq r \leq \frac{1}{3}, \\ \cos(\pi(6r - 2)), & \text{wenn } \frac{1}{3} \leq r \leq \frac{1}{2}, \\ -1, & \text{wenn } \frac{1}{2} \leq r \leq \frac{5}{6}, \\ -\frac{1 + \cos(\pi(6r - 5))}{2}, & \text{wenn } \frac{5}{6} \leq r \leq 1, \end{cases}$$



die rechte Seite

$$f_1(r) := \begin{cases} \alpha - 12(2 - 9r), & \text{wenn } 0 \leq r \leq \frac{1}{6}, \\ \alpha(1 + (6r - 1)^\beta) - \frac{1}{r}, & \text{wenn } \frac{1}{6} \leq r \leq \frac{1}{3}, \\ 2\alpha + 6\pi \sin(\pi(6r - 2)) - \frac{1}{r} \cos(\pi(6r - 2)), & \text{wenn } \frac{1}{3} \leq r \leq \frac{1}{2}, \\ 2\alpha(\frac{5}{2} - 3r)^\beta + \frac{1}{r}, & \text{wenn } \frac{1}{2} \leq r \leq \frac{5}{6}, \\ -3\pi \sin(\pi(6r - 5)) + \frac{1 + \cos(\pi(6r - 5))}{2r}, & \text{wenn } \frac{5}{6} \leq r \leq 1. \end{cases}$$

Für die Funktion

$$u_2(r) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } 0 \leq r \leq \frac{1-\beta}{2}, \\ -\frac{1}{\beta}r + \frac{1+\beta}{2\beta}, & \text{wenn } \frac{1-\beta}{2} \leq r \leq \frac{1+\beta}{2}, \\ 0, & \text{wenn } \frac{1+\beta}{2} \leq r, \end{cases}$$

erhält man mit der Wahl

$$\begin{aligned} & \text{sign}(\partial_r u_2(r)) \\ &:= \begin{cases} \frac{4}{1-\beta}r \left( \frac{1}{1-\beta}r - 1 \right), & \text{wenn } 0 \leq r \leq \frac{1-\beta}{2}, \\ -1, & \text{wenn } \frac{1-\beta}{2} \leq r \leq \frac{1+\beta}{2}, \\ \frac{4}{(\beta-1)^3} (4r^3 - 3(\beta+3)r^2 + 6(\beta+1)r - 3\beta - 1), & \text{wenn } \frac{1+\beta}{2} \leq r \leq 1, \end{cases} \end{aligned}$$

die rechte Seite

$$f_2(r) := \begin{cases} \alpha - \frac{4}{1-\beta} \left( \frac{3}{1-\beta}r - 2 \right), & \text{wenn } 0 \leq r \leq \frac{1-\beta}{2}, \\ -\frac{\alpha}{\beta} \left( r - \frac{1+\beta}{2} \right) + \frac{1}{r}, & \text{wenn } \frac{1-\beta}{2} \leq r \leq \frac{1+\beta}{2}, \\ \frac{-4}{(\beta-1)^3} \left( 16r^2 - 9(\beta+3)r + 12(\beta+1) - \frac{3\beta+1}{r} \right), & \text{wenn } \frac{1+\beta}{2} \leq r \leq 1. \end{cases}$$

Es folgen zwei Beispiele mit exakter Lösung  $u_3 = u_4 \in H_0^2((0, 1)^2)$ , gegeben durch

$$u_3(r) = u_4(r) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } 0 \leq r \leq \frac{1}{3}, \\ 54r^3 - 81r^2 + 36r - 4, & \text{wenn } \frac{1}{3} \leq r \leq \frac{2}{3}, \\ 0, & \text{wenn } \frac{2}{3} \leq r. \end{cases}$$

Mit der Wahl

$$\begin{aligned} & \text{sign}(\partial_r u_3(r)) \\ &:= \begin{cases} 54r^3 - 27r^2, & \text{wenn } 0 \leq r \leq \frac{1}{3}, \\ -1, & \text{wenn } \frac{1}{3} \leq r \leq \frac{2}{3}, \\ -54r^3 + 135r^2 - 108r + 27, & \text{wenn } \frac{2}{3} \leq r \leq 1, \end{cases} \end{aligned}$$

erhalten wir die rechte Seite

$$f_3(r) := \begin{cases} \alpha - 216r^2 + 81r, & \text{wenn } 0 \leq r \leq \frac{1}{3}, \\ \alpha (54r^3 - 81r^2 + 36r - 4) + \frac{1}{r}, & \text{wenn } \frac{1}{3} \leq r \leq \frac{2}{3}, \\ 216r^2 - 405r + 216 - \frac{27}{r}, & \text{wenn } \frac{2}{3} \leq r \leq 1, \end{cases}$$

für die gilt  $f_3 \in H_0^1$  und mit der Wahl

$$\begin{aligned} & \text{sign}(\partial_r u_4(r)) \\ &:= \begin{cases} -1458r^5 + 1215r^4 - 270r^3, & \text{wenn } 0 \leq r \leq \frac{1}{3}, \\ -1, & \text{wenn } \frac{1}{3} \leq r \leq \frac{2}{3}, \\ -243r^4 + 756r^3 - 864r^2 + 432r - 81, & \text{wenn } \frac{2}{3} \leq r \leq 1, \end{cases} \end{aligned}$$

erhalten wir die rechte Seite

$$f_4(r) := \begin{cases} \alpha + 8748r^4 - 6075r^3 + 1080r^2, & \text{wenn } 0 \leq r \leq \frac{1}{3}, \\ \alpha(54r^3 - 81r^2 + 36r - 4) + \frac{1}{r}, & \text{wenn } \frac{1}{3} \leq r \leq \frac{2}{3}, \\ 1215r^3 - 3024r^2 + 2592r - 864 + \frac{81}{r}, & \text{wenn } \frac{2}{3} \leq r \leq 1, \end{cases}$$

für die gilt  $f_4 \in H_0^2$ .

Damit können Experimente durchgeführt werden bei denen `exactSolutionKnown = true` gesetzt werden kann und entsprechend auch der  $L^2$ -Fehler berechnet wird.

Soll nun auch die Differenz der exakten Energie mit der garantierten unteren Energie Schranke (GLEB) berechnet werden, dann werden die stückweisen Gradienten der exakten Lösung und der rechten Seite benötigt.

Dabei gelten folgende Ableitungsregeln für die Ableitungen einer Funktion  $g$ , wenn man ihr Argument  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  in Polarkoordinaten mit Länge  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$  und Winkel  $\varphi = \text{atan2}(x_2, x_1)$ , wobei

$$\text{atan2}(x_2, x_1) := \begin{cases} \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right), & \text{wenn } x_1 > 0, \\ \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right) + \pi, & \text{wenn } x_1 < 0, x_2 \geq 0, \\ \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right) - \pi, & \text{wenn } x_1 < 0, x_2 < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{wenn } x_1 = 0, x_2 > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{wenn } x_1 = 0, x_2 < 0, \\ \text{undefiniert}, & \text{wenn } x_1 = x_2 = 0, \end{cases}$$

auffasst,

$$\begin{aligned} \partial_{x_1} &= \cos(\varphi) \partial_r - \frac{1}{r} \sin(\varphi) \partial_\varphi, \\ \partial_{x_2} &= \sin(\varphi) \partial_r + \frac{1}{r} \cos(\varphi) \partial_\varphi. \end{aligned}$$

Ist  $g$  vom Winkel  $\varphi$  unabhängig, so ergibt sich

$$\nabla_{(x_1, x_2)} g = (\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \partial_r g.$$

Unter Beachtung der trigonometrischen Zusammenhänge

$$\begin{aligned} \sin(\arctan(y)) &= \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}, \\ \cos(\arctan(y)) &= \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \end{aligned}$$

ergibt sich

$$(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) = (x_1, x_2) \frac{1}{r}$$

und damit

$$\nabla_{(x_1, x_2)} g = (x_1, x_2) \frac{\partial_r g}{r},$$

es muss also nur  $\partial_r g$  bestimmt werden.

Die entsprechenden Ableitungen lauten

$$\begin{aligned}
\partial_r f_1(r) &= \begin{cases} 108, & \text{wenn } 0 \leq r \leq \frac{1}{6}, \\ 6\alpha\beta(6r-1)^{\beta-1} + \frac{1}{r^2}, & \text{wenn } \frac{1}{6} \leq r \leq \frac{1}{3}, \\ (36\pi^2 + \frac{1}{r^2}) \cos(\pi(6r-2)) + \frac{6\pi}{r} \sin(\pi(6r-2)), & \text{wenn } \frac{1}{3} \leq r \leq \frac{1}{2}, \\ -\left(6\alpha\beta\left(\frac{5}{2}-3r\right)^{\beta-1} + \frac{1}{r^2}\right), & \text{wenn } \frac{1}{2} \leq r \leq \frac{5}{6}, \\ -\left((18\pi^2 + \frac{1}{2r^2}) \cos(\pi(6r-5)) + \frac{1}{2r^2} + \frac{3\pi}{r} \sin(\pi(6r-5))\right), & \text{wenn } \frac{5}{6} \leq r \leq 1, \end{cases} \\
\partial_r u_1(r) &= \begin{cases} 0, & \text{wenn } 0 \leq r \leq \frac{1}{6}, \\ 6\beta(6r-1)^{\beta-1}, & \text{wenn } \frac{1}{6} \leq r \leq \frac{1}{3}, \\ 0, & \text{wenn } \frac{1}{3} \leq r \leq \frac{1}{2}, \\ -6\beta\left(\frac{5}{2}-3r\right)^{\beta-1}, & \text{wenn } \frac{1}{2} \leq r \leq \frac{5}{6}, \\ 0, & \text{wenn } \frac{5}{6} \leq r, \end{cases} \\
\partial_r f_2(r) &= \begin{cases} -\frac{12}{(1-\beta)^2}, & \text{wenn } 0 \leq r \leq \frac{1-\beta}{2}, \\ -\frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{r^2}, & \text{wenn } \frac{1-\beta}{2} \leq r \leq \frac{1+\beta}{2}, \\ -\frac{4}{(1-\beta)^3} \left(32r - 9(\beta+3) + \frac{3\beta+1}{r^2}\right), & \text{wenn } \frac{1+\beta}{2} \leq r \leq 1, \end{cases} \\
\partial_r u_2(r) &= \begin{cases} 0, & \text{wenn } 0 \leq r \leq \frac{1-\beta}{2}, \\ -\frac{1}{\beta}, & \text{wenn } \frac{1-\beta}{2} \leq r \leq \frac{1+\beta}{2}, \\ 0, & \text{wenn } \frac{1+\beta}{2} \leq r, \end{cases} \\
\partial_r f_3(r) &= \begin{cases} -432r + 81, & \text{wenn } 0 \leq r \leq \frac{1}{3}, \\ \alpha(162r^2 - 162r + 36) - \frac{1}{r^2}, & \text{wenn } \frac{1}{3} \leq r \leq \frac{2}{3}, \\ 432r - 405 + \frac{27}{r^2}, & \text{wenn } \frac{2}{3} \leq r \leq 1, \end{cases} \\
\partial_r f_4(r) &= \begin{cases} 34992r^3 - 18225r^2 + 2160r, & \text{wenn } 0 \leq r \leq \frac{1}{3}, \\ \alpha(162r^2 - 162r + 36) - \frac{1}{r^2}, & \text{wenn } \frac{1}{3} \leq r \leq \frac{2}{3}, \\ 3645r^2 - 6048r + 2592 - 864 - \frac{81}{r^2}, & \text{wenn } \frac{2}{3} \leq r \leq 1, \end{cases} \\
\partial_r u_{3,4}(r) &= \begin{cases} 0, & \text{wenn } 0 \leq r \leq \frac{1}{3}, \\ 162r^2 - 162r + 36, & \text{wenn } \frac{1}{3} \leq r \leq \frac{2}{3}, \\ 0, & \text{wenn } \frac{2}{3} \leq r \leq 1, \end{cases}
\end{aligned}$$

Mit diesen Informationen kann mit `computeExactEnergyBV.m` die exakte Energie berechnet werden und somit durch eintragen der exakten Energie in die Variable `exactEnergy` im Benchmark und setzen der Flag `useExactEnergy=true` das Experiment durch anschließendes Ausführen von `startAlgorithmCR.m` gestartet werden.

## 7.3 Bilder als Input und Rauschverminderung

## 7.4 Alternative Kapitelstruktur: Anwendung am Beispiel der Benchmarks

### 7.4.1 Experimente mit exakter Lösung: Benchmarks 'f01Bench' und 'f02' Bench

### 7.4.2 Bilder als Input und Rauschverminderung: 'cameramanBench' und ...

## 8 Numerische Beispiele

Mache alle mögliche Sachen, prüfe Dinge die gelten sollen. Für ein Beispiel (z.B. CCs) fange mit basics an, also mal an einem Iterationsplot aufzeigen, dass die Energie tatsächlich von oben gegen was konvergiert und gehe dann weiter zu anderen Themen wie den Raten, GLEB etc.

Programm gibt Sprungtermssumme aus, z.B. stagnierend bei 11 auf allen Leveln, darauf vielleicht noch kurz in der Auswertung eingehen ,man sieht, dass die Sprünge tatsächlch im nonkonformen Problem nicht minimiert werden oder so'

## **9 Auswertung**

# Literatur

- [ABM14] Hedy Attouch, Giuseppe Buttazzo und Gérard Michaille. *Variational Analysis in Sobolev and BV Spaces. Applications to PDEs and Optimization*. Second Edition. Bd. 17. MOS-SIAM Series on Optimization. Philadelphia: Society for Industrial und Applied Mathematics, Mathematical Optimization Society, 2014. ISBN: 978-1-611973-47-1.
- [AK06] Gilles Aubert und Pierre Kornprobst. *Mathematical Problems in Image Processing. Partial Differential Equations and the Calculus of Variations*. Second Edition. Bd. 147. Applied Mathematical Sciences. New York: Springer, 2006. ISBN: 0-387-32200-0.
- [Bar12] Sören Bartels. „Total variation minimization with finite elements: convergence and iterative solution“. In: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 50.3 (2012), S. 1162–1180. URL: <https://doi.org/10.1137/11083277X>.
- [Bar15a] Sören Bartels. „Error control and adaptivity for a variational model problem defined on functions of bounded variation“. In: *Mathematics of Computation* 84.293 (2015), S. 1217–1240. URL: <https://doi.org/10.1090/S0025-5718-2014-02893-7>.
- [Bar15b] Sören Bartels. *Numerical Methods for Nonlinear Partial Differential Equations*. Bd. 47. Springer Series in Computational Mathematics. Springer International Publishing, 2015. ISBN: 978-3-319-13796-4. DOI: 10.1007/978-3-319-13797-1.
- [Bra98] Andrea Braides. *Approximation of free-discontinuity problems*. Bd. 1694. Lecture Notes in Mathematics. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1998. ISBN: 3-540-64771-6. URL: <https://doi.org/10.1007/BFb0097344>.
- [Car+10] Carsten Carstensen u. a. „AFEM-Dokumentation“. lokal verfügbar, 2010.
- [Car09a] Carsten Carstensen. *AFEM-Softwarepaket der Arbeitsgruppe Numerische Analysis*. Institut für Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin, 2009.
- [Car09b] Carsten Carstensen. „Yonsei Lectures at the WCU Department Computational Science and Engineering on Finite Element Method“. lokal verfügbar, 2009.
- [CGR12] Carsten Carstensen, Joscha Gedicke und Donsub Rim. „Explicit error estimates for Courant, Crouzeix-Raviart and Raviart-Thomas finite element methods“. In: *Journal of Computational Mathematics* 30.4 (2012), S. 337–353. ISSN: 0254-9409. DOI: 10.4208/jcm.1108-m3677. URL: <https://doi.org/10.4208/jcm.1108-m3677>.
- [CP10] Antonin Chambolle und Thomas Pock. „A First-Order Primal-Dual Algorithm for Convex Problems with Applications to Imaging“. In: *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 40 (2010), S. 120–145. ISSN: 0924-9907. DOI: 10.1007/s10851-010-0251-1. URL: <https://doi.org/10.1007/s10851-010-0251-1>.
- [Dac89] Bernard Dacorogna. *Direct Methods in the Calculus of Variations*. Bd. 78. Applied Mathematical Sciences. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1989. ISBN: 978-3-642-51442-5.

- [EG92] Lawrence C. Evans und Ronald F. Gariepy. *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. CRC Press, 1992. ISBN: 0-8493-7157-0.
- [Get12] Pascal Getreuer. „Rudin-Osher-Fatemi Total Variation Denoising using Split Bregman“. In: *Image Processing On Line* 2 (2012), S. 74–95. URL: <https://doi.org/10.5201/ipol.2012.g-tvd>.
- [Roc70] R. Tyrrell Rockafellar. *Convex Analysis*. New Jersey: Princeton University Press, 1970. ISBN: 0-691-08069-0.
- [ROF92] Leonid I. Rudin, Stanley Osher und Emad Fatemi. „Nonlinear total variation based noise removal algorithms“. In: Bd. 60. 1-4. 1992, S. 259–268. DOI: 10.1016/0167-2789(92)90242-F. URL: [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(92\)90242-F](https://doi.org/10.1016/0167-2789(92)90242-F).
- [Ze85] Eberhard Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications. III: Variational Methods and Optimization*. New York: Springer Science+Business Media, LLC, 1985. ISBN: 978-1-4612-9529-7.
- [Ze86] Eberhard Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications. I: Fixed-Point Theorems*. New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo: Springer-Verlag, 1986. ISBN: 0-387-90914-1.
- [Ze90a] Eberhard Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications. II/A: Linear Monotone Operators*. New York: Springer Science+Business Media, LLC, 1990. ISBN: 978-1-4612-6971-7.
- [Ze90b] Eberhard Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications. II/B: Nonlinear Monotone Operators*. New York: Springer Science+Business Media, LLC, 1990. ISBN: 978-1-4612-6969-4.

# Selbständigkeitserklärung

Ich erkläre, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und noch nicht für andere Prüfungen eingereicht habe. Sämtliche Quellen, einschließlich Internetquellen, die unverändert oder abgewandelt wiedergegeben werden, insbesondere Quellen für Texte, Grafiken, Tabellen und Bilder, sind als solche kenntlich gemacht. Mir ist bekannt, dass bei Verstößen gegen diese Grundsätze ein Verfahren wegen Täuschungsversuchs bzw. Täuschung eingeleitet wird.

Berlin, den 1. April 2021,