

Humboldt-Universität zu Berlin  
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät  
Institut für Mathematik



# **Die Crouzeix-Raviart-Finite-Elemente-Methode zur Lösung einer nichtkonformen Formulierung des ROF-Modell-Problems**

Enrico Bergmann

Version: 14. April 2021

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Theoretische Grundlagen</b>	<b>7</b>
2.1	Vorausgesetztes Wissen . . . . .	7
2.2	Notation . . . . .	7
2.3	Crouzeix-Raviart-Finite-Elemente-Funktionen . . . . .	8
2.4	Variationsrechnung auf Banachräumen . . . . .	9
2.5	Subdifferentiale . . . . .	10
2.6	Funktionen beschränkter Variation . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Das kontinuierliche Problem</b>	<b>13</b>
3.1	Formulierung . . . . .	13
3.2	Existenz eines eindeutigen Minimierers . . . . .	13
3.3	Konstruktion eines Experiments mit bekannter Lösung . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Das diskrete Problem</b>	<b>19</b>
4.1	Formulierung . . . . .	19
4.2	Charakterisierung und Existenz eines eindeutigen Minimierers . . . . .	19
4.3	Kontrolle des Abstandes zwischen diskreter und kontinuierlicher Lösung . .	24
4.4	Verfeinerungsindikator und garantierte untere Energieschranke . . . . .	25
<b>5</b>	<b>Iterative Lösung</b>	<b>27</b>
5.1	Primale-duale Iteration . . . . .	27
5.2	Konvergenz der Iteration . . . . .	28
<b>6</b>	<b>Implementierung</b>	<b>32</b>
6.1	Hinweise zur Benutzung des Programms . . . . .	32
6.2	Programmablauf . . . . .	33
6.3	Realisierung der primalen-dualen Iteration . . . . .	36
6.4	Erstellen einer Benchmark-Datei . . . . .	37
6.5	Mathematische Grundlagen ausgewählter Methoden . . . . .	37
6.5.1	Berechnung lokaler Knotenwerte einer Crouzeix-Raviart-Funktion . .	37
6.5.2	Berechnung von Sprungtermen . . . . .	38
6.5.3	Implementation der GLEB . . . . .	39
6.5.4	Implementation des Refinement Indicators . . . . .	39
6.5.5	Implementaiton der exakten Energie Berechnung . . . . .	39
<b>7</b>	<b>Numerische Beispiele</b>	<b>40</b>
7.1	Bilder als Input und Rauschverminderung . . . . .	40
7.2	Alternative Kapitelstruktur: Anwendung am Beispiel der Benchmarks . . .	40
7.2.1	Experimente mit exakter Lösung: Benchmarks 'f01Bench' und 'f02' Bench . . . . .	40
7.2.2	Bilder als Input und Rauschverminderung: 'cameramanBench' und ... . . . .	40
<b>8</b>	<b>Auswertung</b>	<b>45</b>

# Zusammenfassung

todo, vielleicht auch eher for dem Inhaltsverzeichnis

Titelseite nach Vorgaben in Formalien-Lesezeichen-Ordner anpassen

polyhedral herunderdrückes

# 1 Einleitung

In der Bildverarbeitung kann ein gegebenes Signal häufig nur durch eine unstetige Funktion dargestellt werden. Deshalb stellt sich zunächst die Frage, welcher Funktionenraum zum Beschreiben dieser Signale geeignet ist.

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stelle ein gegebenes Signal auf  $\Omega$  dar. Das Signal  $g$  könnte im Sobolev-Raum  $W^{1,1}(\Omega)$  vermutet werden, da Elemente dieses Raums im Allgemeinen nicht stetig sein müssen. Allerdings lassen Sobolev-Funktionen die oftmals benötigten Sprünge über Teilmengen niedrigerer Dimension von  $\Omega$  nicht zu [Bar15b, S. 297]. Dieses Problem kann gelöst werden, indem der Raum der Funktionen von beschränkter Variation  $BV(\Omega)$  betrachtet wird. Dieser ist eine echte Obermenge von  $W^{1,1}(\Omega)$  und hat sich als geeignet für die Modellierung von Signalen in der Bildverarbeitung und weitere Anwendungen erwiesen (cf. [ABM14, S. 393; AK06, S. 42; Bar15b, S. 297; Bra98, S. 1 f.]).

Eine mögliche Problemstellung in der Bildverarbeitung ist die Rauschunterdrückung, das heißt der Versuch unerwünschtes Rauschen in einem Signal zu verringern. In [ROF92] beschrieben Rudin, Osher und Fatemi 1992 das heute als ROF-Modell bekannte Minimierungsproblem dafür (cf. [Bar15a, S. 1217; CP10, S. 132; Get12, S. 74 f.]). Dabei ist für das gegebene Signal  $g \in L^2(\Omega)$  und eine Funktion  $v \in BV(\Omega) \cap L^2(\Omega)$  die Minimierung der Summe der zwei folgenden Terme relevant. Der erste Term ist die Seminorm

$$|v|_{BV(\Omega)} := \sup_{\substack{\phi \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}^2) \\ |\phi| \leq 1}} \int_{\Omega} v \operatorname{div}(\phi) \, dx < \infty.$$

von  $v$  auf  $BV(\Omega)$  [Bar12, S. 1162]. Diese entspricht der totalen Variation der distributionellen Ableitung  $Dv$  von  $v$  und ihre Minimierung verhindert Oszillationen in der Lösung, lässt aber Unstetigkeiten zu [Get12, S. 72]. Außerdem stimmt diese, falls  $v \in W^{1,1}(\Omega)$ , mit der Seminorm auf  $W^{1,1}(\Omega)$  überein. Der zweite Term  $\|v - g\|_{L^2(\Omega)}^2$  misst den Abstand von  $v$  und  $g$  in  $L^2(\Omega)$ . Die Minimierung dieses Terms bewirkt, dass die Lösung dem Eingangssignal ähnelt. Mit diesen Termen und mit einem positiven Parameter  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ , der das Verhältnis zwischen Rauschverminderung und Ähnlichkeit der Lösung zum Eingangssignal gewichtet, sucht das ROF-Modell eine Funktion  $u \in BV(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ , die das Funktional

$$I(v) := |v|_{BV(\Omega)} + \frac{\alpha}{2} \|v - g\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (1.1)$$

unter allen  $v \in BV(\Omega) \cap L^2(\Omega)$  minimiert.

Wird hierbei  $\alpha$  zu klein gewählt, führt das zu einer zu stark geglätteten, verwaschen aussehenden Lösung, zu sehen zum Beispiel in den Abbildungen 1.1c und 1.1d. Wird andererseits  $\alpha$  zu groß gewählt, ist die Verminderung des Rauschens im Vergleich zum Eingangssignal  $g$  nur gering, zu sehen zum Beispiel in den Abbildungen 1.1f und 1.1g.

Für weitere Details und Referenzen zur Rauschunterdrückung und zur Wahl von  $\alpha$  siehe [Get12].

Zur numerischen Behandlung dieses Problems gibt es bereits einige Ansätze. Dazu gehören die Regularisierung der Seminorm  $|\cdot|_{BV(\Omega)}$ , indem die Betragsfunktion  $|\cdot|$  durch eine stetig differenzierbare Approximation  $|\cdot|_\varepsilon$  ersetzt wird, und die Nutzung von höheren Ableitungen in der Definition von  $|\cdot|_{BV(\Omega)}$ . Vor- und Nachteile dieser Ansätze und entsprechende Referenzen werden in [Bar12, S. 1165] zusammengefasst. Außerdem wird ebenda

kein Abschn

in der Literatur

Abstract weg

auf Arbeiten verwiesen, in denen verschieden iterative Lösungsmethoden für das ROF-Modell-Problem diskutiert werden.

Professor Bartels ~~selbst~~ untersucht in [Bar15b, Kapitel 10.2] eine  $W^{1,1}$ -konforme Diskretisierung des ROF-Modells mit der Courant-Finite-Elemente-Methode. Zur numerischen Lösung dieser diskreten Formulierung nutzt er eine primale-duale Iteration, welche motiviert ist durch Betrachtung der primalen und der dualen Formulierung des Minimierungsproblems. Eine Regularisierung oder die Nutzung höherer Ableitungen für die BV-Seminorm werden dabei nicht benötigt.

In dieser Arbeit möchte wir die Anwendung dieser primalen-dualen Iteration auf eine nichtkonforme Formulierung des ROF-Modells und einer Diskretisierung mit der Crouzeix-Raviart-Finite-Elemente-Methode untersuchen. Dabei nutzen wir einen von Professor Carstensen zur Verfügung gestellten Verfeinerungsindikator, um die Iteration sukzessiv auf einer Folge von uniform oder adaptiv verfeinerten Netzen anzuwenden. Außerdem erlaubt uns die nichtkonforme Formulierung die Betrachtung einer garantierten unteren Energieschranke, welche ebenfalls von Professor Carstensen zur Verfügung gestellt wurde.

Die Implementation des adaptiven Algorithmus basiert auf dem Matlab-Softwarepaket [Car09a].

Abschließend sei angemerkt, dass wir folgende, leicht andere Formulierung des ROF-Modells betrachten. Wir minimieren das Funktional

$$E(v) := \frac{\alpha}{2} \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + |v|_{\text{BV}(\Omega)} + \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} - \int_{\Omega} f v \, dx$$

unter allen  $v \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ . Für  $f = \alpha g$  und alle  $v \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$  gilt dann  $I(v) = E(v) - \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} + \frac{\alpha}{2} \|g\|_{L^2(\Omega)}^2$ . Der Zusammenhang mit dem ROF-Modell ist, aufgrund der Konstanz des Terms  $\frac{\alpha}{2} \|g\|_{L^2(\Omega)}^2$ , folglich, dass die Funktionale  $E$  und  $I$  die gleichen Minimierer in  $\{v \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega) \mid \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} = 0\}$  besitzen.

Die Struktur dieser Arbeit ist wie folgt. Nachdem in Kapitel 2 zunächst die Notationen eingeführt und die theoretischen Grundlagen aus der Optimierung und zu den Funktionen beschränkter Variation zusammengetragen wurden, wird in Kapitel 3 bewiesen, dass für unsere Formulierung des ROF-Modells ein eindeutiger Minimierer existiert. Anschließend folgt in Kapitel 4 die nichtkonforme Formulierung und Diskretisierung des Minimierungsproblems. Mithilfe der Sattelpunktsformulierung des diskreten Problems werden äquivalente Charakterisierungen, Existenz und Eindeutigkeit für den diskreten Minimierer bewiesen. Außerdem werden die zu untersuchenden Konvergenzraten, der Verfeinerungsindikator und die garantierte untere Energieschranke aufgeführt. In Kapitel 5 wird die primale-duale Iteration formuliert und bewiesen, dass diese gegen den diskreten Minimierer konvergiert. Es folgen in Kapitel 6 Hinweise zur Benutzung des Programms und Details zur Implementation des Algorithmus und schließlich in Kapitel 7 die Darstellung der Experimente und deren Auswertung in Kapitel 8.

Das Problem (1) hat keine Randdaten. Hier erwähnen, dass die Minimierung des Terms  $\|v\|_{L^1(\partial\Omega)}$  homogene Randdaten modelliert


AFEM

## 1 Einleitung



Abbildung 1.1: Originalbild<sup>1</sup>(a) und Originalbild mit additiven weißen gaußschen Rauschen (b) mit einem Signal-Rausch-Verhältnis (eng. signal-to-noise ratio, SNR) von 10, jeweils mit nachträglich hinzugefügten graduellen Übergang zu schwarzen Rand, um Nullranddaten zu garantieren. Außerdem fünf Ergebnisse (c)-(g) des adaptiven Algorithmus mit verschiedenen Werten von  $\alpha$ .

*Liter. Verweis  
auf Kapitel...*

<sup>1</sup>  <https://homepages.cae.wisc.edu/~ece533/images/cameraman.tif>

## 2 Theoretische Grundlagen

### 2.1 Vorausgesetztes Wissen

In dieser Arbeit werden Grundbegriffe in topologischen Räumen und Kenntnisse zu Banach- und Hilberträumen sowie zu Lebesgue- und Sobolev-Räumen vorausgesetzt. Dazu gehören insbesondere wichtige Ungleichungen (beispielsweise Cauchy-Schwarz, Hölder, Young), grundlegende Einbettungssätze, Dualraumtheorie, Aussagen zur schwachen Konvergenz sowie der Rieszsche Darstellungssatz und seine Implikationen. ~~Außerdem sollte ein grundlegendes Verständnis von Konzepten in der Optimierung vorhanden sein.~~

Benötigte topologische Begriffe und grundlegende Aussagen zu Banach- und Hilberträumen können beispielsweise in [Zei86] nachgeschlagen werden. Grundlagen der Optimierung sind in [Zei85] nachlesbar und alles Weitere eben genannte in [Zei90a] und [Zei90b].

Dabei eignen sich die Register von [Zei90b] und [Zei85] hervorragend zum schnellen Auffinden von Begriffen in allen eben aufgeführten Referenzen.

Schließlich sollte ein Verständnis des AFEM-Softwarepakets [Car09a], von den darin verwendeten Datenstrukturen und von den mathematischen Konzepten hinter dessen Funktionen vorhanden sein. Dazu sei an dieser Stelle auf die Dokumentation [Car+10] dieses Softwarepakets verwiesen. Die in dieser Arbeit benötigten Begriffe und Notationen führen wir im nächsten Abschnitt nochmals ein, wobei wir den Definitionen und Aussagen zum Crouzeix-Raviart-Finite-Elemente-Raum einen separaten Abschnitt 2.3 widmen.

### 2.2 Notation

Wir wählen für die natürlichen Zahlen die Konvention  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  und  $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Die Menge der positiven reellen Zahlen notieren wir mit  $\mathbb{R}_+$ .

Um auszudrücken, dass eine Menge  $A$  Teilmenge einer Menge  $B$  ist, schreiben wir  $A \subseteq B$ . Falls wir hervorheben wollen, dass  $A$  sogar eine echte Teilmenge von  $B$  ist, so schreiben wir  $A \subset B$ .

Ist  $A$  Teilmenge eines topologischen Raumes, so notieren wir den Rand von  $A$  mit  $\partial A$ , das Innere von  $A$  mit  $\text{int}(A)$  und den Abschluss von  $A$  mit  $\bar{A}$ . Wir nennen weiterhin eine Teilmenge  $B \subseteq A$  Umgebung eines Punktes  $x \in A$ , wenn es eine offene Teilmenge von  $B$  gibt, die  $x$  enthält.

Für den Rest dieses Abschnitts seien  $d, m \in \mathbb{N}$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ ,  $p \in [1, \infty]$  und  $U$  eine nichtleere, offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^d$ .

Die Einheitsmatrix in  $\mathbb{R}^{m \times m}$  bezeichnen wir mit  $I_m$ .

Für das euklidische Skalarprodukt zweier Vektoren  $v, w \in \mathbb{R}^m$  schreiben wir  $v \cdot w$ .

Betrachten wir einen Funktionenraum mit Werten in  $\mathbb{R}$ , so verzichten wir auf  $\mathbb{R}$  beim Notieren des Funktionenraums. Zum Beispiel schreiben wir  $C(U) := C(U; \mathbb{R})$  für den Raum der stetigen Funktionen von  $U$  nach  $\mathbb{R}$ .

Mit der Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  bezeichnen wir stets ein polygonal berandetes Lipschitz-Gebiet. Falls  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , nutzen wir die Notation  $\mathcal{T}$  für eine reguläre Triangulierung von  $\Omega$  im Sinne von Philippe Ciarlet in eine Menge von abgeschlossenen Dreiecken (cf. [Car09b, S. 34; CGR12, S. 345; Car+10, S. 8]). Die Menge der stückweisen konstanten Funktionen auf der Triangulierung  $\mathcal{T}$  mit Werten in  $\mathbb{R}^m$  notieren wir dann mit  $P_0(\mathcal{T}, \mathbb{R}^m)$  und die Menge der

Hand-  
weg

ke-  
Abschr

da fehlen noch einige Eigenschaften



stückweisen affinen Funktionen auf  $\mathcal{T}$  mit Werten in  $\mathbb{R}^m$  mit  $P_1(\mathcal{T}, \mathbb{R}^m)$ . Weiterhin ist der Courant-Finite-Elemente-Raum (cf. [Car+10, S. 12]) definiert als

$$S^1(\mathcal{T}) := P_1(\mathcal{T}) \cap C(\bar{\Omega}).$$

Für ein Dreieck  $T \in \mathcal{T}$  sei die längste Seitenlänge  $h_T$ . Damit können wir die stückweise konstante Funktion  $h_{\mathcal{T}} \in P_0(\mathcal{T})$  für alle  $T \in \mathcal{T}$  durch  $h_{\mathcal{T}}|_T := h_T$  definieren und die längste Seitenlänge der Triangulierung  $h := \max_{T \in \mathcal{T}} h_T$ . Die Menge der Knoten der Triangulierung sei  $\mathcal{N}$ , wobei die Menge der inneren Knoten mit  $\mathcal{N}(\Omega)$ , die Menge der Randknoten mit  $\mathcal{N}(\partial\Omega)$  und die Menge der Knoten eines Dreiecks  $T \in \mathcal{T}$  mit  $\mathcal{N}(T)$  bezeichnet werde. Für die Kanten der Triangulierung seien die Mengen  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{E}(\Omega)$ ,  $\mathcal{E}(\partial\Omega)$  und  $\mathcal{E}(T)$  analog definiert. Den Mittelpunkt einer Kante  $E \in \mathcal{F}$  bezeichnen wir mit  $\text{mid}(E)$ . Der Normaleneinheitsvektor auf dem Rand eines Dreiecks  $T \in \mathcal{T}$  sei  $\nu_T$  und der Normaleneinheitsvektor auf einer Kante  $E \in \mathcal{E}$  sei  $\nu_E$ . Für eine Innenkante  $E \in \mathcal{E}(\Omega)$  bezeichnen wir dann die beiden Dreiecke, die  $E$  als gemeinsame Kanten haben, so mit  $T_+$  und  $T_-$ , dass  $\nu_{T_+}$  und  $\nu_E$  gleichorientiert sind, also  $\nu_{T_+} \cdot \nu_E = 1$ . Damit können wir den Sprung entlang einer Innenkante  $E \in \mathcal{E}(\Omega)$  definieren als  $[\cdot]_E := \cdot|_{T_+} - \cdot|_{T_-}$ . Für eine Randkante  $E \in \mathcal{E}(\partial\Omega)$  definieren wir  $[\cdot]_E := \cdot|_E$ .

Mit  $|\cdot|$  bezeichnen wir, je nach Argument, die euklidischen Norm eines Vektors  $v \in \mathbb{R}^m$ , den Inhalt eines Dreiecks  $T \in \mathcal{T}$ , die Länge einer Kante  $E \in \mathcal{E}$ , die Kardinalität einer endlichen Menge  $A$  oder  $|\Omega| = \int_{\Omega} 1 dx$ .

Die Signumfunktion auf dem  $\mathbb{R}^m$  definieren wir für einen Vektor  $v \in \mathbb{R}^m$  durch

$$\text{sign}(v) := \begin{cases} \left\{ \frac{v}{|v|} \right\}, & \text{falls } v \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}, \\ \{w \in \mathbb{R}^m \mid |w| \leq 1\}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist  $V$  ein normierter Vektorraum, so bezeichnen wir die entsprechende Norm auf  $V$  mit  $\|\cdot\|_V$ . Falls  $V$  sogar ein Prähilbertraum ist, bezeichnen wir das Skalarprodukt auf  $V$ , welches  $\|\cdot\|_V$  induziert, mit  $(\cdot, \cdot)_V$ .

Betrachten wir eine Eigenschaft, für die gegeben sein muss, bezüglich welcher Norm Folgen auf  $V$  konvergieren, so ist stets die Konvergenz in der Norm  $\|\cdot\|_V$  gewählt, sofern nicht anders angegeben. Beispielsweise meinen wir mit der Folgenstetigkeit eines Funktionals  $F : V \rightarrow \mathbb{R}$  im Detail die Folgenstetigkeit mit der Normkonvergenz bezüglich  $\|\cdot\|_V$  in  $V$  und der Konvergenz bezüglich  $|\cdot|$  in  $\mathbb{R}$ .

Für den Dualraum eines Banachraums  $X$  über  $\mathbb{R}$  schreiben wir  $X^*$ . Die Auswertung eines Funktionals  $F \in X^*$  an der Stelle  $u \in X$  notieren wir, vor eventueller Anwendung des Rieszschen Darstellungssatzes, mit  $\langle F, u \rangle$ . Identifizieren wir einen Raum  $Y$  mit dem Dualraum  $X^*$ , so schreiben wir  $Y \cong X^*$ .

Weiterhin benutzen wir die übliche Notation für Lebesgue-Räume  $L^p(U; \mathbb{R}^m)$  und die Sobolev-Räume  $W^{k,p}(U)$  sowie  $H^k(U) := W^{k,2}(U)$  und  $H_0^k(U)$ . Die Normen auf diesen Räumen definieren wir ebenfalls wie üblich. Außerdem schreiben wir kurz  $\|\cdot\| := \|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$  und  $(\cdot, \cdot) := (\cdot, \cdot)_{L^2(\Omega)}$ .

Mit  $H^1(\mathcal{T})$  bezeichnen wir den Raum der stückweisen  $H^1$ -Funktionen auf  $\mathcal{T}$ .

## 2.3 Crouzeix-Raviart-Finite-Elemente-Funktionen

In Abschnitt 4.1 wollen wir für die Diskretisierung einer nichtkonformen Formulierung des in Abschnitt 3.1 genannten Minimierungsproblems die Crouzeix-Raviart-Finite-Elemente-Methode nutzen. Die dafür benötigten Definitionen und Aussagen wollen wir in diesen Abschnitt aus [Car09b; CGR12; Car+10] zusammentragen.



Die Räume der Crouzeix-Raviart-Finite-Elemente-Funktionen sind definiert durch

$$\begin{aligned} \text{CR}^1(\mathcal{T}) &:= \{v_{\text{CR}} \in P_1(\mathcal{T}) \mid v_{\text{CR}} \text{ ist stetig in } \text{mid}(E) \text{ für alle } E \in \mathcal{E}\} \quad \text{und} \\ \text{CR}_0^1(\mathcal{T}) &:= \{v_{\text{CR}} \in \text{CR}^1(\mathcal{T}) \mid \forall E \in \mathcal{E}(\partial\Omega) \quad v_{\text{CR}}(\text{mid}(E)) = 0\}. \end{aligned}$$

✚ Wir wollen  $\text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  mit einem diskreten Skalarprodukt ausstatten. Dafür führen wir den stückweisen Gradienten  $\nabla_{\text{NC}} : H^1(\mathcal{T}) \rightarrow L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)$  ein. Dieser ist für alle  $v \in H^1(\mathcal{T})$  und alle  $T \in \mathcal{T}$  definiert durch  $(\nabla_{\text{NC}} v)|_T := \nabla v|_T$ .

Das ermöglicht uns die Definition der diskreten Bilinearform  $a_{\text{NC}}(\cdot, \cdot) : \text{CR}_0^1(\mathcal{T}) \times \text{CR}_0^1(\mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$a_{\text{NC}}(u_{\text{CR}}, v_{\text{CR}}) := \int_{\Omega} \nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}} \cdot \nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}} \, dx \quad \text{für alle } u_{\text{CR}}, v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T}).$$

Diese ist ein Skalarprodukt auf  $\text{CR}_0^1(\mathcal{T})$ .

✚ Die von  $a_{\text{NC}}$  induzierte Norm bezeichnen wir mit  $\|\cdot\|_{\text{NC}}$ .

Zum Abschluss definieren wir noch für jede Kante  $E \in \mathcal{E}$  eine Funktion  $\psi_E \in \text{CR}^1(\mathcal{T})$  durch ihre Werte

$$\psi_E(\text{mid}(E)) := 1 \quad \text{sowie} \quad \psi_E(\text{mid}(F)) := 0 \quad \text{für alle } F \in \mathcal{E}.$$

Die Menge  $\{\psi_E \mid E \in \mathcal{E}\}$  bildet dann eine Basis von  $\text{CR}^1(\mathcal{T})$  und die Menge  $\{\psi_E \mid E \in \mathcal{E}(\Omega)\}$  bildet eine Basis von  $\text{CR}_0^1(\mathcal{T})$ .

## 2.4 Variationsrechnung auf Banachräumen

Wie in Abschnitt 2.1 beschrieben, setzen wir in dieser Arbeit Kenntnisse über die Variationsrechnung voraus. Da wir aber einige Aussagen auch für Funktionale benötigen, die auf unendlichdimensionalen reellen Banachräumen definiert sind, führen wir in diesen Abschnitt die grundlegenden Notationen dafür ein und formulieren schließlich die notwendige Optimalitätsbedingung erster Ordnung.

Dabei folgen wir [Zei85, S. 189-194]. Dort werden die Aussagen auf einen reellen lokal konvexen Raum formuliert. Da nach [Zei86, S. 781, (43)] alle Banachräume lokal konvex sind und wir die Aussagen in dieser Arbeit nur auf Banachräumen benötigen, formulieren wir sie hier auf einen reellen Banachraum  $X$ . Außerdem betrachten wir eine Teilmenge  $V \subseteq X$ , einen inneren Punkt  $u$  von  $V$  und ein Funktional  $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ . Schließlich definieren wir noch für alle  $h \in X$  eine Funktion  $\varphi_h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die für alle  $t \in \mathbb{R}$  gegeben ist durch  $\varphi_h(t) := F(u + th)$ .

✚ Damit können wir die  $n$ -te Variation, das Gâteaux- und das Fréchet-Differential von  $F$  definieren.

**Definition 2.1** ( $n$ -te Variation). Die  $n$ -te Variation von  $F$  an der Stelle  $u$  in Richtung  $h \in X$  ist, falls die  $n$ -te Ableitung  $\varphi_h^{(n)}(0)$  von  $\varphi_h$  in 0 existiert, definiert durch

$$\delta^n F(u; h) := \varphi_h^{(n)}(0) = \left. \frac{d^n F(u + th)}{dt^n} \right|_{t=0}.$$

✚ Wir schreiben  $\delta$  für  $\delta^1$ .

**Definition 2.2** (Gâteaux- und Fréchet-Differential).  $F$  heißt Gâteaux-differenzierbar an der Stelle  $u$ , falls ein Funktional  $F'(u) \in X^*$  existiert, sodass

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(u + th) - F(u)}{t} = \langle F'(u), h \rangle \quad \text{für alle } h \in X.$$

$F'(u)$  heißt dann Gâteaux-Differential von  $F$  an der Stelle  $u$ .

$F$  heißt Fréchet-differenzierbar an der Stelle  $u$ , falls ein Funktional  $F'(u) \in X^*$  existiert, sodass

$$\lim_{\|h\|_X \rightarrow 0} \frac{|F(u+th) - F(u) - \langle F'(u), h \rangle|}{\|h\|_X} = 0.$$

$F'(u)$  heißt dann Fréchet-Differential von  $F$  an der Stelle  $u$ . Das Fréchet-Differential von  $F$  an der Stelle  $u$  in Richtung  $h \in X$  ist definiert durch  $dF(u; h) := \langle F'(u), h \rangle$ .

**Bemerkung 2.3.** Existiert das Fréchet-Differential  $F'(u)$  von  $F$  an der Stelle  $u$ , so ist  $F'(u)$  auch das Gâteaux-Differential von  $F$  an der Stelle  $u$  und es gilt

$$\delta F(u; h) = dF(u; h) = \langle F'(u), h \rangle \quad \text{für alle } h \in X.$$

Nachdem die relevante Notation eingeführt ist, können wir zum Abschluss die notwendige Bedingung erster Ordnung für einen lokalen Minimierer von  $F$  formulieren.

**Theorem 2.4** (Notwendige Optimalitätsbedingung erster Ordnung). *Sei  $u \in \text{int}(V)$  lokaler Minimierer von  $F$ , das heißt es existiere eine Umgebung  $U$  von  $u$ , sodass  $F(v) \geq F(u)$  für alle  $v \in U$ . Dann gilt für alle  $h \in X$ , dass  $\delta F(u; h) = 0$ , falls diese Variation für alle  $h \in X$  existiert, beziehungsweise  $F'(u) = 0$ , falls  $F'(u)$  als Gâteaux- oder Fréchet-Differential existiert.*

## 2.5 Subdifferentiale

Für diesen Abschnitt betrachten wir stets einen reellen Banachraum  $X$  und, falls nicht anders spezifiziert, ein Funktional  $F : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ .

Wir wollen die in dieser Arbeit benötigten Notationen und Eigenschaften des Subdifferentials von  $F$  zusammentragen.

Zuvor starten wir mit einer grundlegenden Definition.

**Definition 2.5** ([Zei85, S. 245, Definition 42.1]). Sei  $V$  ein Vektorraum,  $M \subseteq V$  und  $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ .

Dann heißt die Menge  $M$  konvex, wenn für alle  $u, v \in M$  und alle  $t \in [0, 1]$  gilt

$$(1-t)u + tv \in M.$$

Ist  $M$  konvex, so heißt  $F$  konvex, falls für alle  $u, v \in M$  und alle  $t \in [0, 1]$  gilt

$$F((1-t)u + tv) \leq (1-t)F(u) + tF(v). \quad (2.1)$$

Gilt Ungleichung (2.1) mit „<“, so heißt  $F$  strikt konvex. Falls  $-F$  konvex ist, so heißt  $F$  konkav.

Für den Rest dieses Abschnitts folgen wir [Zei85, S. 385-397]. Analog zur Begründung zum Beginn von Abschnitt 2.4, schränken wir auch hier die Definitionen und Aussagen, die in [Zei85] auf reellen lokal konvexen Räumen formuliert sind, auf den reellen Banachraum  $X$  ein.

Zunächst definieren wir das Subdifferential von  $F$  an einer Stelle  $u \in X$ .

**Definition 2.6** (Subdifferential). Für  $u \in X$  mit  $F(u) \neq \pm\infty$  heißt

$$\partial F(u) := \{u^* \in X^* \mid \forall v \in X \quad F(v) \geq F(u) + \langle u^*, v - u \rangle\} \quad (2.2)$$

Subdifferential von  $F$  an der Stelle  $u$ . Für  $F(u) = \pm\infty$  ist  $\partial F(u) := \emptyset$ .

Ein Element  $u^* \in \partial F(u)$  heißt Subgradient von  $F$  an der Stelle  $u$ .

Es folgen für Optimierungsprobleme wichtige Aussagen über das Subdifferential von  $F$ .

**Theorem 2.7.** Falls  $F : X \rightarrow (-\infty, \infty]$  mit  $F \not\equiv \infty$ , gilt  $F(u) = \inf_{v \in X} F(v)$  genau dann, wenn  $0 \in \partial F(u)$ .

**Theorem 2.8.** Falls  $F$  konvex ist und Gâteaux-differenzierbar an der Stelle  $u \in X$  mit Gâteaux-Differential  $F'(u)$  gilt  $\partial F(u) = \{F'(u)\}$ .

Das folgende Theorem folgt aus [Zei85, S. 389, Theorem 47.B] unter Beachtung der Tatsache, dass die Addition von Funktionalen  $F_1, F_2, \dots, F_n : X \rightarrow (-\infty, \infty]$  und die Addition von Menge in  $X^*$  kommutieren.

**Theorem 2.9.** Seien für  $n \geq 2$  die Funktionale  $F_1, F_2, \dots, F_n : X \rightarrow (-\infty, \infty]$  konvex und es existiere ein  $u_0 \in X$ , sodass  $F_k(u_0) < \infty$  für alle  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Außerdem seien mindestens  $n - 1$  der  $n$  Funktionale  $F_1, F_2, \dots, F_n$  stetig an der Stelle  $u_0$ .

Dann gilt

$$\partial(F_1 + F_2 + \dots + F_n)(u) = \partial F_1(u) + \partial F_2(u) + \dots + \partial F_n(u) \quad \text{für alle } u \in X.$$

Zum Abschluss formulieren wir noch die Monotonie des Subdifferentials.

**Theorem 2.10.** Sei  $F : X \rightarrow (-\infty, \infty]$  konvex und unterhalbstetig mit  $F \not\equiv \infty$ .

Dann ist  $\partial F(\cdot)$  monoton, das heißt

$$\langle u^* - v^*, u - v \rangle \geq 0 \quad \text{für alle } u, v \in X, u^* \in \partial F(u), v^* \in \partial F(v).$$

## 2.6 Funktionen beschränkter Variation

In diesen Abschnitt führen wir den Raum der Funktionen beschränkter Variation ein. Wir vermeiden dabei, soweit möglich, für den weiteren Verlauf dieser Arbeit nicht benötigte Notation und Theorie, indem wir die Definitionen und Aussagen entsprechend aus- und umformulieren. Für weit detailliertere Ausführungen und die maßtheoretischen Hintergründe siehe zum Beispiel [ABM14; EG92; Bra98].

Soweit nicht anders angegeben, folgen die Definitionen und Aussagen dieses Abschnitts aus [ABM14, S. 393-395]

Sei im Weiteren  $U$  eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^d$ .

Zunächst definieren wir den Raum der Funktionen beschränkter Variation.

**Definition 2.11** (Funktionen beschränkter Variation). Eine Funktion  $u \in L^1(U)$  ist von beschränkter Variation, wenn

$$|u|_{\text{BV}(U)} := \sup_{\substack{\phi \in C_c^1(U; \mathbb{R}^d) \\ \|\phi\|_{L^\infty(U)} \leq 1}} \int_U u \operatorname{div}(\phi) \, dx < \infty. \quad (2.3)$$

Die Menge aller Funktionen beschränkter Variation ist  $\text{BV}(U)$ .

**Bemerkung 2.12.** Durch  $|\cdot|_{\text{BV}(U)}$  ist eine Seminorm auf  $\text{BV}(U)$  gegeben.

Ausgestattet mit der Norm

$$\|\cdot\|_{\text{BV}(U)} := \|\cdot\|_{L^1(U)} + |\cdot|_{\text{BV}(U)}$$

ist  $\text{BV}(U)$  ein Banachraum.

Außerdem gilt  $W^{1,1}(U) \subset \text{BV}(U)$  und  $\|u\|_{\text{BV}(U)} = \|u\|_{W^{1,1}(U)}$  für alle  $u \in W^{1,1}(U)$ .

In der Anwendung ist Konvergenz in  $\text{BV}(U)$  bezüglich der Norm  $\|\cdot\|_{\text{BV}(U)}$  zu restriktiv (cf. [Bar15b, S. 300]). Deshalb führen wir einen schwächeren Konvergenzbegriff ein.

**Definition 2.13.** Sei  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{BV}(U)$  und sei  $u \in \text{BV}(U)$  mit  $u_n \rightarrow u$  in  $L^1(U)$  für  $n \rightarrow \infty$ . Dann konvergiert die Folge  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  schwach gegen  $u$  in  $\text{BV}(U)$ , wenn für alle  $\phi \in C_0(U; \mathbb{R}^d)$  gilt, dass  $\int_U u_n \operatorname{div}(\phi) \, dx \rightarrow \int_U u \operatorname{div}(\phi) \, dx$  für  $n \rightarrow \infty$ . Wir schreiben dann  $u_n \rightharpoonup u$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Damit können wir das folgende Theorem formulieren, welches unmittelbar die schwache Unterhalbstetigkeit der Seminorm  $|\cdot|_{\text{BV}(U)}$  auf  $\text{BV}(U)$  impliziert.

**Theorem 2.14.** Sei  $u \in L^1(U)$  und sei  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{BV}(U)$  mit  $\sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|_{\text{BV}(U)} < \infty$  und  $u_n \rightarrow u$  in  $L^1(U)$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Dann gilt  $u \in \text{BV}(U)$  und  $|u|_{\text{BV}(U)} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} |u_n|_{\text{BV}(U)}$ . Außerdem gilt dann  $u_n \rightharpoonup u$  in  $\text{BV}(U)$ .

Mit Blick auf die folgenden Kapitel betrachten wir nun das polygonal berandete Lipschitz-Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ . Unter dieser Voraussetzung können wir zeigen, dass jede in  $\text{BV}(\Omega)$  beschränkte Folge eine in  $\text{BV}(\Omega)$  schwach konvergente Teilfolge besitzt mit schwachen Grenzwert in  $\text{BV}(\Omega)$ . Für den Beweis dieser Aussage benötigen wir noch das folgende Theorem aus [EG92, S. 176, Theorem 4].

**Theorem 2.15.** Sei  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{BV}(\Omega)$  eine beschränkte Folge. Dann existiert eine Teilfolge  $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  von  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und ein  $u \in \text{BV}(\Omega)$ , sodass  $u_{n_k} \rightarrow u$  in  $L^1(\Omega)$  für  $k \rightarrow \infty$ .

Damit können wir nun das folgende Theorem beweisen.

**Theorem 2.16.** Sei  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{BV}(\Omega)$  eine beschränkte Folge. Dann existiert eine Teilfolge  $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  und ein  $u \in \text{BV}(\Omega)$ , sodass  $u_{n_k} \rightharpoonup u$  in  $\text{BV}(\Omega)$  für  $k \rightarrow \infty$ .

*Beweis.* Nach Theorem 2.15 besitzt  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Teilfolge  $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ , die in  $L^1(\Omega)$  gegen ein  $u \in \text{BV}(\Omega)$  konvergiert. Diese Teilfolge ist nach Voraussetzung ebenfalls beschränkt in  $\text{BV}(\Omega)$ , woraus nach Definition der Norm auf  $\text{BV}(\Omega)$  insbesondere folgt, dass  $\sup_{k \in \mathbb{N}} |u_{n_k}|_{\text{BV}(\Omega)} < \infty$ .

Somit ist Theorem 2.14 anwendbar und impliziert die schwache Konvergenz von  $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  in  $\text{BV}(\Omega)$  gegen  $u \in \text{BV}(\Omega)$ .  $\square$

## 3 Das kontinuierliche Problem

kurze Einbettung

### 3.1 Formulierung

Für einen Parameter  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  und eine Funktion  $f \in L^2(\Omega)$  betrachten wir das folgende Minimierungsproblem.

**Problem 3.1.** Finde  $u \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ , sodass  $u$  das Funktional

$$E(v) := \frac{\alpha}{2} \|v\|^2 + |v|_{\text{BV}(\Omega)} + \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} - \int_{\Omega} f v \, dx \quad (3.1)$$

unter allen  $v \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$  minimiert.

Dabei ist der Term  $\|v\|_{L^1(\partial\Omega)}$  wohldefiniert, da nach [ABM14, S. 400, Theorem 10.2.1] eine lineare, stetige Abbildung  $T : \text{BV}(\Omega) \rightarrow L^1(\partial\Omega)$  existiert mit  $T(u) = u|_{\partial\Omega}$  für alle  $u \in \text{BV}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ .

*Bemerkung 3.2.* Nach [ABM14, S. 399, Theorem 10.1.3] ist die Einbettung  $\text{BV}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$  stetig für  $1 \leq p \leq d/(d-1)$ . Damit ist  $\text{BV}(\Omega)$  für  $d = 2$  Teilmenge von  $L^2(\Omega)$  und die Lösung von Problem 3.1 kann in  $\text{BV}(\Omega)$  gesucht werden. Für beliebige  $d \in \mathbb{N}$ , die wir in diesen Abschnitt betrachten, gilt dies im Allgemeinen nicht.

1-regular?

### 3.2 Existenz eines eindeutigen Minimierers

Zunächst zeigen wir, dass Problem 3.1 eine Lösung besitzt. Dafür benötigen wir die folgende Formulierung der Youngschen Ungleichung.

**Lemma 3.3** (Youngsche Ungleichung). Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$  beliebig. Dann gilt

$$ab \leq \frac{1}{\varepsilon} a^2 + \frac{\varepsilon}{4} b^2.$$

Außerdem wird im Beweis folgende Aussage benötigt, die direkt aus [EG92, S. 183, Theorem 1] folgt, da  $0 \in \text{BV}(\mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega})$ ,  $|0|_{\text{BV}(\mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega})} = 0$  und  $0|_{\partial\Omega} = 0$ .

**Lemma 3.4.** Sei  $v \in \text{BV}(\Omega)$ . Definiere, für alle  $x \in \mathbb{R}^d$ ,

$$\tilde{v}(x) := \begin{cases} v(x), & \text{falls } x \in \Omega, \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Dann gilt  $\tilde{v} \in \text{BV}(\mathbb{R}^d)$  und  $|\tilde{v}|_{\text{BV}(\mathbb{R}^d)} = |v|_{\text{BV}(\Omega)} + \|v\|_{L^1(\partial\Omega)}$ .

**Theorem 3.5** (Existenz einer Lösung). Problem 3.1 besitzt eine Lösung  $u \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ .

*Beweis.* Die Beweisidee ist die Anwendung der direkten Methode der Variationsrechnung (cf. z.B. [Dac89]) unter Nutzung der in Abschnitt 2.6 aufgeführten Eigenschaften der schwachen Konvergenz in  $\text{BV}(\Omega)$ .

Für alle  $v \in L^2(\Omega) \subseteq L^1(\Omega)$  gilt mit der Hölderschen Ungleichung für  $p = q = 2$ , dass

$$\|v\|_{L^1(\Omega)} = \|1 \cdot v\|_{L^1(\Omega)} \leq \|1\| \|v\| = \sqrt{|\Omega|} \|v\|. \quad (3.2)$$

### 3 Das kontinuierliche Problem

Dann folgt für das Funktional  $E$  in (3.1) für alle  $v \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$  durch die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung, die Youngsche Ungleichung aus Lemma 3.3 und Ungleichung (3.2), dass

$$\begin{aligned}
 E(v) &= \frac{\alpha}{2} \|v\|^2 + |v|_{\text{BV}(\Omega)} + \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} - \int_{\Omega} f v \, dx \\
 &\geq \frac{\alpha}{2} \|v\|^2 + |v|_{\text{BV}(\Omega)} + \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} - \|f\| \|v\| \\
 &\geq \frac{\alpha}{2} \|v\|^2 + |v|_{\text{BV}(\Omega)} + \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} - \frac{1}{\alpha} \|f\|^2 - \frac{\alpha}{4} \|v\|^2 \\
 &\geq \frac{\alpha}{4} \|v\|^2 + |v|_{\text{BV}(\Omega)} + \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} - \frac{1}{\alpha} \|f\|^2 \\
 &\geq \frac{\alpha}{4|\Omega|} \|v\|_{L^1(\Omega)}^2 + |v|_{\text{BV}(\Omega)} + \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} - \frac{1}{\alpha} \|f\|^2 \\
 &\geq -\frac{1}{\alpha} \|f\|^2.
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Somit ist  $E$  nach unten beschränkt, was die Existenz einer infimierenden Folge  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$  von  $E$  impliziert, das heißt  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  erfüllt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(u_n) = \inf_{v \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)} E(v).$$

Ungleichung (3.3) impliziert außerdem, dass  $E(u_n) \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ , falls  $|u_n|_{\text{BV}(\Omega)} \rightarrow \infty$  oder  $\|u_n\|_{L^1(\Omega)} \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ . Daraus folgt insbesondere, dass  $E(u_n) \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ , falls  $\|u_n\|_{\text{BV}(\Omega)} \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ . Deshalb muss die Folge  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt in  $\text{BV}(\Omega)$  sein.

Nun garantiert Theorem 2.16 die Existenz einer in  $\text{BV}(\Omega)$  schwach konvergenten Teilfolge  $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  von  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit schwachen Grenzwert  $u \in \text{BV}(\Omega)$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist  $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Aus der schwachen Konvergenz von  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\text{BV}(\Omega)$  gegen  $u$  folgt nach Definition, dass  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  stark, und damit insbesondere auch schwach, in  $L^1(\Omega)$  gegen  $u$  konvergiert.

Weiterhin folgt aus (3.3), dass  $E(v) \rightarrow \infty$  für  $\|v\| \rightarrow \infty$ . Somit muss  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auch beschränkt sein bezüglich der Norm  $\|\cdot\|$  und besitzt deshalb, wegen der Reflexivität von  $L^2(\Omega)$ , eine Teilfolge (ohne Beschränkung der Allgemeinheit weiterhin bezeichnet mit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ), die in  $L^2(\Omega)$  schwach gegen einen Grenzwert  $\bar{u} \in L^2(\Omega)$  konvergiert. Damit gilt für alle  $w \in L^2(\Omega) \cong L^2(\Omega)^*$  und, da  $L^\infty(\Omega) \subseteq L^2(\Omega)$ , insbesondere auch für alle  $w \in L^\infty(\Omega) \cong L^1(\Omega)^*$ , dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_n w \, dx = \int_{\Omega} \bar{u} w \, dx.$$

Das bedeutet, dass  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auch schwach in  $L^1(\Omega)$  gegen  $\bar{u} \in L^2(\Omega) \subseteq L^1(\Omega)$  konvergiert.

Da schwache Grenzwerte eindeutig bestimmt sind, gilt insgesamt  $u = \bar{u} \in L^2(\Omega)$ , das heißt  $u \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ .

Nun definieren wir für alle  $n \in \mathbb{N}$  und für alle  $x \in \mathbb{R}^d$

$$\tilde{u}_n(x) := \begin{cases} u_n(x), & \text{falls } x \in \Omega, \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R}^d \setminus \bar{\Omega} \end{cases} \quad \text{und} \quad \tilde{u}(x) := \begin{cases} u(x), & \text{falls } x \in \Omega, \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R}^d \setminus \bar{\Omega}. \end{cases}$$

Dann gilt nach Lemma 3.4 sowohl

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}_n &\in \text{BV}(\mathbb{R}^d) \quad \text{und} \quad |\tilde{u}_n|_{\text{BV}(\mathbb{R}^d)} = |u_n|_{\text{BV}(\Omega)} + \|u_n\|_{L^1(\partial\Omega)} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ als auch} \\
 \tilde{u} &\in \text{BV}(\mathbb{R}^d) \quad \text{und} \quad |\tilde{u}|_{\text{BV}(\mathbb{R}^d)} = |u|_{\text{BV}(\Omega)} + \|u\|_{L^1(\partial\Omega)}.
 \end{aligned}$$

normale Klammern



Da  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  infimierende Folge von  $E$  ist, muss die Folge

$$\left( |\tilde{u}_n|_{\text{BV}(\mathbb{R}^d)} \right)_{n \in \mathbb{N}} = \left( |u_n|_{\text{BV}(\Omega)} + \|u_n\|_{L^1(\partial\Omega)} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

beschränkt sein. Außerdem folgt aus den Definitionen von  $\tilde{u}$  und  $\tilde{u}_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und der bereits bekannten Eigenschaft  $u_n \rightarrow u$  in  $L^1(\Omega)$  für  $n \rightarrow \infty$ , dass

$$\|\tilde{u}_n - \tilde{u}\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} |\tilde{u}_n - \tilde{u}| \, dx = \int_{\Omega} |u_n - u| \, dx = \|u_n - u\|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty,$$

das heißt  $\tilde{u}_n \rightarrow \tilde{u}$  in  $L^1(\mathbb{R}^d)$  für  $n \rightarrow \infty$ .

✗ Insgesamt ist also  $(\tilde{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\text{BV}(\mathbb{R}^d)$ , die in  $L^1(\mathbb{R}^d)$  gegen  $\tilde{u} \in \text{BV}(\mathbb{R}^d) \subseteq L^1(\mathbb{R}^d)$  konvergiert und  $\sup_{n \in \mathbb{N}} |\tilde{u}_n|_{\text{BV}(\mathbb{R}^d)} < \infty$  erfüllt. Somit folgt mit Theorem 2.14

$$\begin{aligned} |u|_{\text{BV}(\Omega)} + \|u\|_{L^1(\partial\Omega)} &= |\tilde{u}|_{\text{BV}(\mathbb{R}^d)} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} |\tilde{u}_n|_{\text{BV}(\mathbb{R}^d)} \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} (|u_n|_{\text{BV}(\Omega)} + \|u_n\|_{L^1(\partial\Omega)}) . \end{aligned} \quad (3.4)$$

✗ Die Funktionen  $\|\cdot\|^2$  und  $-\int_{\Omega} f \cdot \, dx$  sind auf  $L^2(\Omega)$  stetig und konvex, was impliziert, dass sie schwach unterhalbstetig auf  $L^2(\Omega)$  sind. Da wir bereits wissen, dass  $u_n \rightarrow u$  in  $L^2(\Omega)$  für  $n \rightarrow \infty$ , folgt

$$\frac{\alpha}{2} \|u\|^2 - \int_{\Omega} f u \, dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\alpha}{2} \|u_n\|^2 - \int_{\Omega} f u_n \, dx \right).$$

✗ Damit und mit Ungleichung (3.4) gilt insgesamt

$$\inf_{v \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)} E(v) \leq E(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E(u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(u_n) = \inf_{v \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)} E(v),$$

das heißt  $\min_{v \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)} E(v) = E(u)$ . □

Nachdem wir gezeigt haben, dass für Problem 3.1 eine Lösung existiert, beweisen wir als nächstes ein Theorem, das direkt impliziert, dass diese Lösung eindeutig ist.

**Theorem 3.6** (Stabilität und Eindeutigkeit). *Seien  $u_1, u_2 \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$  die Minimierer des Problems 3.1 mit  $f_1, f_2 \in L^2(\Omega)$  anstelle von  $f$ , das heißt für  $\ell \in \{1, 2\}$  minimiere  $u_\ell$  das Funktional*

$$E_\ell := \frac{\alpha}{2} \|v\|^2 + |v|_{\text{BV}(\Omega)} + \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} - \int_{\Omega} f_\ell v \, dx$$

unter allen  $v \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ .

✗ Dann gilt

$$\|u_1 - u_2\| \leq \frac{1}{\alpha} \|f_1 - f_2\|.$$

*Beweis.* Wir folgen der Argumentation im Beweis von [Bar15b, S. 304, Theorem 10.6].

Zunächst definieren wir die Funktionale  $F : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  und  $G_\ell : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\ell \in \{1, 2\}$ , für alle  $u \in L^2(\Omega)$ , durch

$$\begin{aligned} F(u) &:= \begin{cases} |u|_{\text{BV}(\Omega)} + \|u\|_{L^1(\partial\Omega)}, & \text{falls } u \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega), \\ \infty, & \text{falls } u \in L^2(\Omega) \setminus \text{BV}(\Omega) \end{cases} \quad \text{und} \\ G_\ell(u) &:= \frac{\alpha}{2} \|u\|^2 - \int_{\Omega} f_\ell u \, dx. \end{aligned}$$

### 3 Das kontinuierliche Problem

Damit gilt für  $\ell \in \{1, 2\}$  und alle  $u \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ , dass  $E_\ell(u) = F(u) + G_\ell(u)$ .

Für  $\ell \in \{1, 2\}$  ist  $G_\ell$  Fréchet-differenzierbar und die Fréchet-Ableitung  $G'_\ell(u) : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  von  $G_\ell$  an der Stelle  $u \in L^2(\Omega)$  ist, für alle  $v \in L^2(\Omega)$ , gegeben durch

$$dG_\ell(u; v) = \alpha(u, v) - \int_{\Omega} f_\ell v \, dx = (\alpha u - f_\ell, v).$$

Das Funktional  $F$  ist konvex, unterhalbstetig und es gilt  $F \neq \infty$ . Deshalb ist nach Theorem 2.10 das Subdifferential  $\partial F$  von  $F$  monoton, das heißt für alle  $\mu_\ell \in \partial F(u_\ell)$ ,  $\ell \in \{1, 2\}$ , gilt

$$(\mu_1 - \mu_2, u_1 - u_2) \geq 0. \quad (3.5)$$

Für  $\ell \in \{1, 2\}$  gilt, dass  $E_\ell$  konvex ist und von  $u_\ell$  in  $\text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$  minimiert wird. Außerdem gilt  $E_\ell \neq \infty$  und  $G_\ell$  ist stetig. Somit gilt nach Theorem 2.7, Theorem 2.9 und Theorem 2.8, dass  $0 \in \partial E_\ell(u_\ell) = \partial F(u_\ell) + \partial G_\ell(u_\ell) = \partial F(u_\ell) + \{G'_\ell(u_\ell)\}$ . Daraus folgt  $-G'_\ell(u_\ell) \in \partial F(u_\ell)$ . Zusammen mit Ungleichung (3.5) impliziert das

$$(-(\alpha u_1 - f_1) - (-(\alpha u_2 - f_2)), u_1 - u_2) \geq 0.$$

Durch Umformen und Anwenden der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} \alpha \|u_1 - u_2\|^2 &\leq (f_1 - f_2, u_1 - u_2) \\ &\leq \|f_1 - f_2\| \|u_1 - u_2\|. \end{aligned}$$

Falls  $\|u_1 - u_2\| = 0$ , gilt die zu zeigende Aussage. Ansonsten führt Division durch  $\alpha \|u_1 - u_2\| \neq 0$  den Beweis zum Abschluss.  $\square$

### 3.3 Konstruktion eines Experiments mit bekannter Lösung

Für die numerische Untersuchung der primalen-dualen Iteration aus Kapitel 5 ist es sinnvoll Eingangssignale  $f$  für Problem 3.1 gegeben zu haben, für die der entsprechende gesuchte Minimierer bekannt ist. Als Grundlage für die Konstruktion solcher Signale nutzen wir die folgende Aussage von Professor Carstensen.

Sei  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben als Funktion in Polarkoordinaten. Dabei beschränken wir uns auf vom Polarwinkel unabhängige Funktionen, das heißt für alle  $x \in \Omega$  gelte  $u(x) := u_P(|x|)$  für  $u_P : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ . Weiterhin fordern wir  $u_P(r) = 0$  für  $r \geq 1$  und die Existenz der partiellen Ableitung  $\partial_r u_P$  fast überall in  $[0, \infty)$ . Außerdem existiere auch fast überall in  $[0, \infty)$  die partielle Ableitung des für  $r \in [0, \infty)$  definierten Ausdrucks

$$\text{sgn}(\partial_r u_P(r)) := \begin{cases} -1 & \text{für } \partial_r u_P(r) < 0, \\ x \in [0, 1] & \text{für } \partial_r u_P(r) = 0, \\ 1 & \text{für } \partial_r u_P(r) > 0. \end{cases}$$

Des Weiteren fordern wir  $\text{sgn}(\partial_r u_P(r))/r \rightarrow 0$  für  $r \rightarrow 0$ , damit  $f_P$  in der folgenden Definition stetig in 0 fortgesetzt werden kann.

Sei  $f_P : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$f_P(r) := \alpha u_P(r) - \partial_r (\text{sgn}(\partial_r u_P(r))) - \frac{\text{sgn}(\partial_r u_P(r))}{r} \quad \text{für alle } r \in [0, \infty). \quad (3.6)$$

Dann ist  $u$  Lösung von Problem 3.1, wenn das Eingangssignal auf  $\Omega \supseteq \{w \in \mathbb{R}^2 \mid |w| \leq 1\}$  für fast alle  $x \in \Omega$  gegeben ist durch  $f(x) := f_P(|x|)$ .

### 3.3 Konstruktion eines Experiments mit bekannter Lösung

In unseren Experimenten wird uns die garantierte untere Energieschranke aus Theorem 4.9 interessieren. Da dieses Theorem für das Eingangssignal voraussetzt, dass  $f \in H_0^1(\Omega)$ , müssen wir noch die folgenden Bedingungen an  $u_P$  formulieren. Hinreichend für  $f \in H_0^1(\Omega)$  ist nach Gleichung (3.6), dass  $u_P$ ,  $\partial_r(\operatorname{sgn}(\partial_r u_P))$  und  $\operatorname{sgn}(\partial_r u_P)$  stetig sind und

$$u_P(1) = \partial_r(\operatorname{sgn}(\partial_r u_P(1))) = \operatorname{sgn}(\partial_r u_P(1)) = 0.$$

Mit diesen Einschränkung gilt insbesondere  $u \in H_0^1(\Omega)$ , weshalb die exakte Energie  $E(u)$  nach Bemerkung 2.12 berechnet werden kann durch

$$E(u) = \frac{\alpha}{2} \|u\|^2 + \|u\|_{W^{1,1}(\Omega)} - \int f u \, dx.$$

Um also  $E(u)$  berechnen zu können, wird der schwache Gradient  $\nabla u$  von  $u$  benötigt und um die garantierte untere Energieschranke  $E_{\text{GLEB}}$  aus Gleichung (4.11) zu berechnen, wird der schwache Gradient  $\nabla f$  von  $f$  benötigt. Deshalb betrachten wir zum Abschluss an dieser Stelle noch kurz die benötigten Zusammenhänge zwischen den partiellen Ableitungen in kartesischen Koordinaten und in Polarkoordinaten für eine hinreichend glatte Funktion  $g_P$ . Sei

$$\operatorname{atan2}(x_2, x_1) := \begin{cases} \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right), & \text{wenn } x_1 > 0, \\ \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right) + \pi, & \text{wenn } x_1 < 0, x_2 \geq 0, \\ \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right) - \pi, & \text{wenn } x_1 < 0, x_2 < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{wenn } x_1 = 0, x_2 > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{wenn } x_1 = 0, x_2 < 0, \\ \text{undefiniert}, & \text{wenn } x_1 = x_2 = 0. \end{cases}$$

Ein Argument  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  von  $g_P$  kann dann in Polarkoordinaten charakterisiert werden durch die Länge  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$  und den Winkel  $\varphi = \operatorname{atan2}(x_2, x_1)$ . Mit dieser Notation gelten für die partiellen Ableitungen die Zusammenhänge

$$\begin{aligned} \partial_{x_1} &= \cos(\varphi) \partial_r - \frac{1}{r} \sin(\varphi) \partial_\varphi \quad \text{und} \\ \partial_{x_2} &= \sin(\varphi) \partial_r + \frac{1}{r} \cos(\varphi) \partial_\varphi. \end{aligned}$$

Ist nun  $g_P$  vom Winkel  $\varphi$  unabhängig, so erhalten wir

$$\begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \partial_{x_2} \end{pmatrix} g_P = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \partial_r g_P.$$

Unter Beachtung der trigonometrischen Zusammenhänge

$$\begin{aligned} \sin(\arctan(y)) &= \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}, \\ \cos(\arctan(y)) &= \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \end{aligned}$$

ergibt sich

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

### 3 Das kontinuierliche Problem

und somit

$$\nabla \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \partial_{x_2} \end{pmatrix} g_P = \frac{\partial_r g_P}{r} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Zum Bestimmen der partiellen Ableitungen in kartesischen Koordinaten einer in Polarkoordinaten gegebenen Funktion  $g_P$ , die vom Polarwinkel unabhängig ist, muss also lediglich die partielle Ableitung  $\partial_r g_P$  berechnet werden.

✓ Konkrete Beispiele formulieren wir in Kapitel 7.

## 4 Das diskrete Problem

### 4.1 Formulierung

Für den Rest dieser Arbeit sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ .

Bevor wir Problem 3.1 diskretisieren, merken wir an, dass  $\text{CR}^1(\mathcal{T}) \subset \text{BV}(\Omega)$ , da

$$|v_{\text{CR}}|_{\text{BV}(\Omega)} = \|\nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}}\|_{L^1(\Omega)} + \sum_{F \in \mathcal{E}(\Omega)} \|[v_{\text{CR}}]_F\|_{L^1(F)} \quad \text{für alle } v_{\text{CR}} \in \text{CR}^1(\mathcal{T}).$$

Dies wird für  $|\mathcal{T}| = 2$  zum Beispiel von [ABM14, S. 404, Example 10.2.1; Bar15b, S. 301, Proposition 10.1] impliziert und kann analog für beliebige reguläre Triangulierungen von  $\Omega$  bewiesen werden. Damit gilt dann insbesondere

$$|v_{\text{CR}}|_{\text{BV}(\Omega)} + \|v_{\text{CR}}\|_{L^1(\partial\Omega)} = \|\nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}}\|_{L^1(\Omega)} + \sum_{F \in \mathcal{E}} \|[v_{\text{CR}}]_F\|_{L^1(F)}.$$

Um eine nichtkonforme Formulierung von Problem 3.1 zu erhalten, ersetzen wir die Terme  $|\cdot|_{\text{BV}(\Omega)} + \|\cdot\|_{L^1(\partial\Omega)}$  des Funktional  $E$  durch  $\|\nabla_{\text{NC}} \cdot\|_{L^1(\Omega)}$ , das heißt wir vernachlässigen bei der nichtkonformen Formulierung die Terme  $\sum_{F \in \mathcal{E}} \|[ \cdot ]_F \|_{L^1(F)}$ .

Somit erhalten wir das folgende Minimierungsproblem für den Parameter  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  und die rechte Seite  $f \in L^2(\Omega)$ .

**Problem 4.1.** Finde  $u_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$ , sodass  $u_{\text{CR}}$  das Funktional

$$E_{\text{NC}}(v_{\text{CR}}) := \frac{\alpha}{2} \|v_{\text{CR}}\|^2 + \|\nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}}\|_{L^1(\Omega)} - \int_{\Omega} f v_{\text{CR}} \, dx \quad (4.1)$$

unter allen  $v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  minimiert.

### 4.2 Charakterisierung und Existenz eines eindeutigen Minimierers

In diesen Abschnitt führen wir die Argumente in [Bar15b, S. 313], angepasst für unsere Formulierung in Problem 4.1, detailliert aus.

Bevor wir die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung von Problem 4.1 sowie äquivalente Charakterisierungen für diese beweisen können, leiten wir ein zu Problem 4.1 äquivalentes Sattelpunktsproblem her.

Dafür definieren wir zunächst die konvexe Menge

$$K := \{\Lambda \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^2) \mid |\Lambda(\cdot)| \leq 1 \text{ fast überall in } \Omega\}$$

und das dazugehörige Indikatorfunktional  $I_K : L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , das für  $\Lambda \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^2)$  gegeben ist durch

$$I_K(\Lambda) := \begin{cases} \infty, & \text{falls } \Lambda \notin K, \\ 0, & \text{falls } \Lambda \in K \end{cases}$$

#### 4 Das diskrete Problem

und aufgrund der Konvexität von  $K$  konvex ist. Für  $v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  und  $\Lambda \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2) \subset L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^2)$  können wir damit das Funktional  $L : \text{CR}_0^1(\mathcal{T}) \times P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2) \rightarrow [-\infty, \infty]$  definieren durch

$$L(v_{\text{CR}}, \Lambda) := \int_{\Omega} \Lambda \cdot \nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}} \, dx + \frac{\alpha}{2} \|v_{\text{CR}}\|^2 - \int_{\Omega} f v_{\text{CR}} \, dx - I_K(\Lambda). \quad (4.2)$$

Dabei gilt  $L(v_{\text{CR}}, \Lambda) > -\infty$  genau dann, wenn  $\Lambda \in K$ . Außerdem gilt mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung für beliebige  $\Lambda \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2) \cap K$ , dass

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Lambda \cdot \nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}} \, dx &\leq \int_{\Omega} |\Lambda \cdot \nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}}| \, dx \leq \int_{\Omega} |\Lambda| |\nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}}| \, dx \\ &\leq \int_{\Omega} 1 |\nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}}| \, dx = \|\nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}}\|_{L^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt

$$\sup_{\Lambda \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)} L(v_{\text{CR}}, \Lambda) = \sup_{\Lambda \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2) \cap K} L(v_{\text{CR}}, \Lambda) \leq E_{\text{NC}}(v_{\text{CR}}).$$

Weiterhin gilt für alle  $v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$ , wenn wir  $\Lambda \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2) \cap K$  elementweise auf allen  $T \in \mathcal{T}$  definieren durch  $\Lambda(x) \in \text{sign}(\nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}}(x))$  für alle  $x \in \text{int}(T)$ , dass  $L(v_{\text{CR}}, \Lambda) = E_{\text{NC}}(v_{\text{CR}})$  und deshalb auch  $E_{\text{NC}}(v_{\text{CR}}) \leq \sup_{\Lambda \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)} L(v_{\text{CR}}, \Lambda)$ .

Insgesamt können wir festhalten, dass für alle  $v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  gilt

$$E_{\text{NC}}(v_{\text{CR}}) = \sup_{\Lambda \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2) \cap K} L(v_{\text{CR}}, \Lambda) = \sup_{\Lambda \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)} L(v_{\text{CR}}, \Lambda). \quad (4.3)$$

Insbesondere ist damit die Funktion  $u_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  aus der Lösung  $(u_{\text{CR}}, \Lambda) \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T}) \times P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)$  des folgenden Sattelpunktsproblems Lösung von Problem 4.1.

**Problem 4.2.** Finde  $(u_{\text{CR}}, \Lambda) \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T}) \times P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)$ , sodass

$$L(u_{\text{CR}}, \Lambda) = \inf_{v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})} \sup_{\Lambda \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)} L(v_{\text{CR}}, \Lambda).$$

Nachdem diese Vorbereitungen abgeschlossen sind, können wir nun beweisen, dass Problem 4.1 eine eindeutige Lösung besitzt und äquivalente Charakterisierungen für diese zeigen. Der Inhalt des folgenden Theorems wurde von Professor Carstensen formuliert.

**Theorem 4.3.** *Es existiert eine eindeutige Lösung  $u_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  von Problem 4.1.*

*Außerdem sind die folgenden drei Aussagen für eine Funktion  $u_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  äquivalent.*

(i) *Problem 4.1 wird von  $u_{\text{CR}}$  gelöst.*

(ii) *Es existiert ein  $\bar{\Lambda} \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)$  mit  $|\bar{\Lambda}(\cdot)| \leq 1$  fast überall in  $\Omega$ , sodass*

$$\bar{\Lambda}(\cdot) \cdot \nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}(\cdot) = |\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}(\cdot)| \quad \text{fast überall in } \Omega \quad (4.4)$$

*und*

$$(\bar{\Lambda}, \nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}}) = (f - \alpha u_{\text{CR}}, v_{\text{CR}}) \quad \text{für alle } v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T}). \quad (4.5)$$

(iii) *Für alle  $v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  gilt*

$$(f - \alpha u_{\text{CR}}, v_{\text{CR}} - u_{\text{CR}}) \leq \|\nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}}\|_{L^1(\Omega)} - \|\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}\|_{L^1(\Omega)}. \quad (4.6)$$



*Beweis.* Mit analogen Abschätzungen wie in Ungleichung (3.3) erhalten wir für das Funktional  $E_{\text{NC}}$  aus Problem 4.1 für alle  $v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T}) \subset L^2(\Omega)$  die Abschätzung

$$E_{\text{NC}}(v_{\text{CR}}) \geq -\frac{1}{\alpha} \|f\|^2.$$

Somit ist  $E_{\text{NC}}$  nach unten beschränkt und es existiert eine infimierende Folge  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  von  $E_{\text{NC}}$ . Aufgrund der Form von  $E_{\text{NC}}$  ist diese Folge beschränkt bezüglich der Norm  $\|\cdot\|$ .

Der endlichdimensionale Raum  $\text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  ist, ausgestattet mit der Norm  $\|\cdot\|$ , ein Banachraum und damit reflexiv. Demnach existiert eine in  $\text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  schwach konvergente Teilfolge von  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Da  $\text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  endlichdimensional ist, konvergiert diese sogar stark in  $L^2(\Omega)$ . Weil  $\text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  ein Banachraum und damit abgeschlossen bezüglich der Konvergenz in  $\|\cdot\|$  ist, gilt für den Grenzwert  $u_{\text{CR}}$  dieser Teilfolge, dass  $u_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$ .

Außerdem ist  $E_{\text{NC}}$  stetig bezüglich der Konvergenz in  $L^2(\Omega)$ , was impliziert, dass  $u_{\text{CR}}$  Minimierer von  $E_{\text{NC}}$  in  $\text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  sein muss.

Die Lösung  $u_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  ist eindeutig, da  $E_{\text{NC}}$  strikt konvex ist.

Nachdem wir die Existenz eines eindeutigen Minimierers von Problem 4.1 bewiesen haben, zeigen wir nun die äquivalenten Charakterisierung für diesen.

Für den Rest dieses Beweises sei  $u_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$ , falls nicht anderes angegeben, eine beliebige Funktion in  $\text{CR}_0^1(\mathcal{T})$ , das heißt insbesondere nicht unbedingt Lösung von Problem 4.1.

(i)  $\Rightarrow$  (ii). Sei  $u_{\text{CR}}$  Lösung von Problem 4.1.

Durch Gleichung (4.3) wissen wir bereits, dass  $E_{\text{NC}}(v_{\text{CR}}) = \sup_{\Lambda \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)} L(v_{\text{CR}}, \Lambda)$  für alle  $v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$ . Somit existiert für  $u_{\text{CR}}$  ein  $\bar{\Lambda} \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2) \cap K$  mit  $E_{\text{NC}}(u_{\text{CR}}) = L(u_{\text{CR}}, \bar{\Lambda})$ . Da außerdem  $u_{\text{CR}}$  Problem 4.1 löst, folgt insgesamt

$$L(u_{\text{CR}}, \bar{\Lambda}) = E_{\text{NC}}(u_{\text{CR}}) = \inf_{v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})} E_{\text{NC}}(v_{\text{CR}}) = \inf_{v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})} \sup_{\Lambda \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)} L(v_{\text{CR}}, \Lambda). \quad (4.7)$$

Weiterhin gilt nach [Roc70, S. 379, Lemma 36.1], dass

$$\inf_{v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})} \sup_{\Lambda \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)} L(v_{\text{CR}}, \Lambda) \geq \sup_{\Lambda \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)} \inf_{v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})} L(v_{\text{CR}}, \Lambda).$$

Zusammen mit Gleichung (4.7) impliziert das

$$\inf_{v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})} \sup_{\Lambda \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)} L(v_{\text{CR}}, \Lambda) = L(u_{\text{CR}}, \bar{\Lambda}) = \sup_{\Lambda \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)} \inf_{v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})} L(v_{\text{CR}}, \Lambda).$$

Somit ist  $(u_{\text{CR}}, \bar{\Lambda}) \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T}) \times (P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2) \cap K)$  nach [Roc70, S. 380, Lemma 36.2] Sattelpunkt von  $L$  bezüglich der Maximierung über  $P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)$  und der Minimierung über  $\text{CR}_0^1(\mathcal{T})$ . Das bedeutet nach [Roc70, S. 380] insbesondere, dass  $u_{\text{CR}}$  Minimierer von  $L(\cdot, \bar{\Lambda})$  in  $\text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  ist und  $\bar{\Lambda}$  Maximierer von  $L(u_{\text{CR}}, \cdot)$  über  $P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)$ . Mit dieser Erkenntnis können wir nun die entsprechenden Optimalitätsbedingungen diskutieren.

Zunächst bemerken wir, dass  $L(u_{\text{CR}}, \cdot) : P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2) \rightarrow [-\infty, \infty)$  konkav ist. Da  $\bar{\Lambda}$  Maximierer von  $L(u_{\text{CR}}, \cdot)$  in  $P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)$  ist, wird das konvexe Funktional  $-L(u_{\text{CR}}, \cdot) : P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2) \rightarrow (-\infty, \infty]$  von  $\bar{\Lambda}$  in  $P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)$  minimiert. Nach den Theoremen 2.7, 2.9 und 2.8 gilt somit

$$0 \in \partial(-L(u_{\text{CR}}, \cdot))(\bar{\Lambda}) = \{-(\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}, \cdot)\} + \partial I_K(\bar{\Lambda}).$$

Äquivalent zu dieser Aussage ist, dass  $(\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}, \cdot) \in \partial I_K(\bar{\Lambda})$ . Da  $\bar{\Lambda} \in K$ , folgt mit Definition 2.6, dass für alle  $\Lambda \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)$  gilt

$$(\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}, \Lambda - \bar{\Lambda}) \leq I_K(\Lambda) - I_K(\bar{\Lambda}) = I_K(\Lambda).$$

Stetigkeit von  $\|\nabla_{\text{NC}} \cdot\|_{L^1(\Omega)}$  bzgl  $L^2$  Konvergenz, S. 17 im Ausdruck

#### 4 Das diskrete Problem

Falls  $\Lambda \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2) \cap K$ , folgt insbesondere

$$\begin{aligned} (\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}, \Lambda - \bar{\Lambda}) &\leq 0, \quad \text{also} \\ (\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}, \Lambda) &\leq (\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}, \bar{\Lambda}). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Sei nun  $\Lambda \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2) \cap K$  elementweise auf allen  $T \in \mathcal{T}$  durch  $\Lambda(x) \in \text{sign}(\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}(x))$  definiert für alle  $x \in \text{int}(T)$ . Mit dieser Wahl von  $\Lambda$ , Ungleichung (4.8), der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und  $\bar{\Lambda} \in K$  erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}| \, dx &= \int_{\Omega} \nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}} \cdot \Lambda \, dx = (\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}, \Lambda) \\ &\leq (\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}, \bar{\Lambda}) = \int_{\Omega} \nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}} \cdot \bar{\Lambda} \, dx \\ &\leq \int_{\Omega} |\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}| |\bar{\Lambda}| \, dx \leq \int_{\Omega} |\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}| \, dx, \quad \text{das heißt} \\ \int_{\Omega} |\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}| \, dx &= \int_{\Omega} \nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}} \cdot \bar{\Lambda} \, dx \quad \text{beziehungsweise} \\ \sum_{T \in \mathcal{T}} |T| |(\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}})|_T &= \sum_{T \in \mathcal{T}} |T| (\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}} \cdot \bar{\Lambda})|_T. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Außerdem gilt für alle  $T \in \mathcal{T}$  mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und  $\bar{\Lambda} \in K$ , dass

$$(\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}} \cdot \bar{\Lambda})|_T \leq |(\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}})|_T |\bar{\Lambda}|_T \leq |(\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}})|_T.$$

Mit Gleichung (4.9) folgt daraus für alle  $T \in \mathcal{T}$ , dass  $(\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}} \cdot \bar{\Lambda})|_T = |(\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}})|_T$ , das heißt fast überall in  $\Omega$  gilt  $\bar{\Lambda}(\cdot) \cdot \nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}(\cdot) = |\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}(\cdot)|$ . Damit ist Gleichung (4.4) gezeigt.

Als Nächstes betrachten wir das reellwertige Funktional  $L(\cdot, \bar{\Lambda}) : \text{CR}_0^1(\mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}$ . Es ist Fréchet-differenzierbar mit

$$dL(\cdot, \bar{\Lambda})(u_{\text{CR}}; v_{\text{CR}}) = \int_{\Omega} \bar{\Lambda} \cdot \nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}} \, dx + \alpha(u_{\text{CR}}, v_{\text{CR}}) - \int_{\Omega} f v_{\text{CR}} \, dx$$

für alle  $v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$ . Da  $u_{\text{CR}}$  Minimierer von  $L(\cdot, \bar{\Lambda})$  in  $\text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  ist, gilt nach Theorem 2.4, dass  $0 = dL(\cdot, \bar{\Lambda})(u_{\text{CR}}; v_{\text{CR}})$  für alle  $v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$ . Diese Bedingung ist für alle  $v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  äquivalent zu  $(\bar{\Lambda}, \nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}}) = (f - \alpha u_{\text{CR}}, v_{\text{CR}})$ . Somit ist Gleichung (4.5) gezeigt.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii). Die Funktion  $\bar{\Lambda} \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)$  erfülle  $|\bar{\Lambda}(\cdot)| \leq 1$  fast überall in  $\Omega$  sowie die Gleichungen (4.4) und (4.5).

Dann gilt für alle  $v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  mit Gleichung (4.5), Gleichung (4.4), der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und  $|\bar{\Lambda}(\cdot)| \leq 1$  fast überall in  $\Omega$ , dass

$$\begin{aligned} (f - \alpha u_{\text{CR}}, v_{\text{CR}} - u_{\text{CR}}) &= (f - \alpha u_{\text{CR}}, v_{\text{CR}}) - (f - \alpha u_{\text{CR}}, u_{\text{CR}}) \\ &= (\bar{\Lambda}, \nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}}) - (\bar{\Lambda}, \nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}) \\ &= \int_{\Omega} \bar{\Lambda} \cdot \nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}} \, dx - \int_{\Omega} \bar{\Lambda} \cdot \nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}} \, dx \\ &= \int_{\Omega} \bar{\Lambda} \cdot \nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}} \, dx - \int_{\Omega} |\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}| \, dx \\ &\leq \int_{\Omega} |\bar{\Lambda}| |\nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}}| \, dx - \int_{\Omega} |\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}| \, dx \\ &\leq \int_{\Omega} |\nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}}| \, dx - \int_{\Omega} |\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}| \, dx \\ &= \|\nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}}\|_{L^1(\Omega)} - \|\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}\|_{L^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Somit ist Ungleichung (4.6) gezeigt.

(iii)  $\Rightarrow$  (i). Es gelte Ungleichung (4.6) für alle  $v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$ , also

$$(f - \alpha u_{\text{CR}}, v_{\text{CR}} - u_{\text{CR}}) \leq \|\nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}}\|_{L^1(\Omega)} - \|\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}\|_{L^1(\Omega)}.$$

Wir haben in diesen Beweis bereits gezeigt, dass stets eine eindeutige Lösung  $\tilde{u}_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  von Problem 4.1 existiert und außerdem, dass für diese für alle  $v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  gilt

$$(f - \alpha \tilde{u}_{\text{CR}}, v_{\text{CR}} - \tilde{u}_{\text{CR}}) \leq \|\nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}}\|_{L^1(\Omega)} - \|\nabla_{\text{NC}} \tilde{u}_{\text{CR}}\|_{L^1(\Omega)}.$$

Um zu beweisen, dass  $u_{\text{CR}}$  Problem 4.1 löst, genügt es aufgrund der Eindeutigkeit der Lösung  $\tilde{u}_{\text{CR}}$  von Problem 4.1 zu zeigen, dass  $u_{\text{CR}} = \tilde{u}_{\text{CR}}$  in  $\text{CR}_0^1(\mathcal{T})$ .

Es gilt

$$\begin{aligned} (f - \alpha u_{\text{CR}}, \tilde{u}_{\text{CR}} - u_{\text{CR}}) &\leq \|\nabla_{\text{NC}} \tilde{u}_{\text{CR}}\|_{L^1(\Omega)} - \|\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}\|_{L^1(\Omega)} \quad \text{und} \\ (f - \alpha \tilde{u}_{\text{CR}}, u_{\text{CR}} - \tilde{u}_{\text{CR}}) &\leq \|\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}\|_{L^1(\Omega)} - \|\nabla_{\text{NC}} \tilde{u}_{\text{CR}}\|_{L^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Die Addition dieser Ungleichungen liefert die Ungleichung

$$(-\alpha u_{\text{CR}}, \tilde{u}_{\text{CR}} - u_{\text{CR}}) + (-\alpha \tilde{u}_{\text{CR}}, u_{\text{CR}} - \tilde{u}_{\text{CR}}) \leq 0,$$

welche äquivalent ist zu

$$\alpha \|\tilde{u}_{\text{CR}} - u_{\text{CR}}\|^2 \leq 0.$$

Da  $\alpha > 0$ , impliziert das  $\|\tilde{u}_{\text{CR}} - u_{\text{CR}}\|^2 = 0$ , also  $\tilde{u}_{\text{CR}} = u_{\text{CR}}$  in  $\text{CR}_0^1(\mathcal{T})$ .  $\square$

Zum Schluss dieses Abschnitts wollen wir noch zwei Bemerkungen von Professor Carstensen erwähnen und kurz deren Gültigkeit begründen.

Die erste ist in eine äquivalente Charakterisierung der dualen Variable  $\bar{\Lambda} \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)$  aus Theorem 4.3 zur diskreten Lösung  $u_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  von Problem 4.1.

*Bemerkung 4.4.* Das  $\bar{\Lambda} \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)$  fast überall in  $\Omega$  Gleichung (4.4) und  $|\bar{\Lambda}(\cdot)| \leq 1$  erfüllt, ist äquivalent zu der Bedingung  $\bar{\Lambda}(x) \in \text{sign}(\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}(x))$  für alle  $x \in \text{int}(T)$  für alle  $T \in \mathcal{T}$ .

*Beweis.* Dass die genannte Bedingung hinreichend ist, folgt direkt aus der Definition der Signumfunktion.

Ihre Notwendigkeit folgt aus der folgenden Beobachtung. Da  $|\bar{\Lambda}(\cdot)| \leq 1$  fast überall in  $\Omega$ , ist Gleichung (4.4) eine Cauchy-Schwarzsche Ungleichung, bei der sogar Gleichheit gilt. Dies ist genau dann der Fall, wenn  $\bar{\Lambda}(\cdot)$  und  $\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}(\cdot)$  fast überall in  $\Omega$  linear abhängig sind.  $\square$

Daraus können wir folgern, unter welchen Umständen die duale Variable  $\bar{\Lambda}$  auf einem Dreieck  $T \in \mathcal{T}$  eindeutig bestimmt ist.

*Bemerkung 4.5.* Falls  $\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}} \neq 0$  auf  $T \in \mathcal{T}$ , gilt nach Definition der Signumfunktion, dass  $\bar{\Lambda} = \nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}} / |\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}|$  eindeutig bestimmt ist auf  $T$ .

Im Allgemeinen ist  $\bar{\Lambda}$  nicht eindeutig bestimmbar. Betrachten wir zum Beispiel  $f \equiv 0$  in Problem 4.1 mit eindeutiger Lösung  $u_{\text{CR}} \equiv 0$  fast überall in  $\Omega$ . Dann erfüllt nach der diskreten Helmholtz Zerlegung [Car09b, S. 193, Theorem 3.32] die Wahl  $\bar{\Lambda} := \text{Curl}(v_C)$  für ein beliebiges  $v_C \in S^1(\mathcal{T})$  mit  $|\text{Curl}(v_C)| \leq 1$  die Charakterisierung (ii) aus Theorem 4.3.

### 4.3 Kontrolle des Abstandes zwischen diskreter und kontinuierlicher Lösung

Wir möchten in diesen Abschnitt zwei Abschätzungen aufführen, mit denen möglicherweise der  $L^2$ -Abstand zwischen der Lösung des diskreten Problems 4.1 und der Lösung des kontinuierlichen Problems 3.1 kontrolliert werden kann.

Die Gültigkeit dieser Abschätzungen werden wir in Kapitel 7 untersuchen.

Zunächst betrachten wir [Bar15b, S. 309, Theorem 10.7]. Diese Abschätzung kontrolliert den  $L^2$ -Fehler zwischen den Minimierern  $u_C \in S^1(\mathcal{T})$  und  $u \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$  des Funktional  $I$  aus Gleichung (1.1) in den entsprechenden Räumen. Obwohl wir eine andere Formulierung des ROF-Modells betrachten und sich insbesondere das Funktional  $E_{\text{NC}}$  aus unserer diskreten, nichtkonformen Formulierung von  $I$  unterscheidet, ähneln sich die Probleme möglicherweise genug, um die folgende Rate für unsere Formulierungen experimentell feststellen zu können.

**Theorem 4.6.** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  sternförmig und  $g \in L^\infty(\Omega)$ . Seien weiterhin  $u \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$  und  $u_C \in S^1(\mathcal{T})$  die Minimierer des Funktional  $I$  aus Gleichung (1.1) in den entsprechenden Räumen.*

*Dann existiert eine Konstante  $c \in \mathbb{R}_+$ , sodass*

$$\frac{\alpha}{2} \|u - u_C\|^2 \leq ch^{1/2}.$$

Als Nächstes möchten wir beweisen, dass der  $L^2$ -Abstand zwischen der Lösung  $u$  von Problem 3.1 und einer beliebigen Funktion  $v \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$  beschränkt werden kann durch die Differenz der Werte des Funktional  $E$  an den Stellen  $u$  und  $v$ . Daraus wollen wir anschließend die zweite Möglichkeit folgern, wie der Abstand in  $L^2(\Omega)$  zwischen den Lösungen des kontinuierlichen und des diskreten Problems kontrolliert werden kann.

**Theorem 4.7.** *Sei  $u \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$  Lösung von Problem 3.1.*

*Dann gilt*

$$\frac{\alpha}{2} \|u - v\|^2 \leq E(v) - E(u) \quad \text{für alle } v \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega).$$

*Beweis.* Wir folgen der Argumentation im Beweis von [Bar15b, S. 309, Lemma 10.2]. Da viele der Schritte ähnlich zum Beweis von Theorem 3.6 sind, präsentieren wir die entsprechenden Argumente verkürzt.

Wir definieren die konvexen Funktionale  $F : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  und  $G : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei  $F$  wie im Beweis von Theorem 3.6 definiert ist und  $G$  für alle  $v \in L^2(\Omega)$  gegeben ist durch

$$G(v) := \frac{\alpha}{2} \|v\|^2 - \int_{\Omega} f v \, dx.$$

Es gilt  $E = F + G$ .

Die Fréchet-Ableitung  $G'(u) : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  von  $G$  an der Stelle  $u \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$  ist für alle  $v \in L^2(\Omega)$  gegeben durch

$$dG(u; v) = \alpha(u, v) - \int_{\Omega} f v \, dx = (\alpha u - f, v).$$

Das impliziert mit wenigen Rechenschritten

$$dG(u; v - u) + \frac{\alpha}{2} \|u - v\|^2 + G(u) = G(v) \quad \text{für alle } v \in L^2(\Omega). \quad (4.10)$$

Da  $u$  Minimierer von  $E$  ist, erhalten wir mit Theorem 2.7, Theorem 2.9 und Theorem 2.8 die Aussage

$$0 \in \partial E(u) = \partial F(u) + \{G'(u)\},$$

woraus folgt

$$-G'(u) \in \partial F(u).$$

Das ist nach Definition 2.6 äquivalent zu

$$-dG(u; v - u) \leq F(v) - F(u) \quad \text{für alle } v \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega).$$

Daraus folgt zusammen mit Gleichung (4.10) für alle  $v \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ , dass

$$\frac{\alpha}{2} \|u - v\|^2 + G(u) - G(v) + F(u) = -dG(u; v - u) + F(u) \leq F(v).$$

Da  $E = F + G$ , folgt daraus die zu zeigende Aussage.  $\square$

Zusammen mit den Betrachtungen in Abschnitt 4.1 erhalten wir damit folgendes Korollar.

**Korollar 4.8.** *Sei  $u \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$  Lösung von Problem 3.1 und  $u_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  Lösung von Problem 4.1.*

*Dann gilt*

$$\frac{\alpha}{2} \|u - u_{\text{CR}}\|^2 \leq E(u_{\text{CR}}) - E(u) = E_{\text{NC}}(u_{\text{CR}}) + \sum_{F \in \mathcal{E}} \|[u_{\text{CR}}]_F\|_{L^1(F)} - E(u).$$

*Insbesondere gilt auch*

$$\frac{\alpha}{2} \|u - u_{\text{CR}}\|^2 \leq |E_{\text{NC}}(u_{\text{CR}}) - E(u)| + \left| \sum_{F \in \mathcal{E}} \|[u_{\text{CR}}]_F\|_{L^1(F)} \right|.$$

## 4.4 Verfeinerungsindikator und garantierte untere Energieschranke

Professor Carstensen stellte für die numerischen Untersuchungen einen Verfeinerungsindikator zur adaptiven Netzverfeinerung und eine Aussage über eine garantierte untere Energieschranke zur Verfügung.

**Theorem 4.9.** *Sei  $\Omega$  konvex,  $f \in H_0^1(\Omega)$  das Eingangssignal für Problem 3.1 mit Lösung  $u \in H_0^1(\Omega)$  und minimaler Energie  $E(u)$  sowie für Problem 4.1 mit Lösung  $u_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\Omega)$  und minimaler Energie  $E_{\text{NC}}(u_{\text{CR}})$ .*

*Dann gilt*

$$E_{\text{NC}}(u_{\text{CR}}) + \frac{\alpha}{2} \|u - u_{\text{CR}}\|^2 - \frac{\kappa_{\text{CR}}}{\alpha} \|h_{\mathcal{T}}(f - \alpha u_{\text{CR}})\| \|\nabla f\| \leq E(u).$$

*Dabei ist mit der kleinsten positiven Nullstelle  $j_{1,1}$  der Bessel-Funktion erster Art die Konstante  $\kappa_{\text{CR}} := \sqrt{1/48 + 1/j_{1,1}^2}$ .*

*Insbesondere gilt dann für*

$$E_{\text{GLEB}} := E_{\text{NC}}(u_{\text{CR}}) - \frac{\kappa_{\text{CR}}}{\alpha} \|h_{\mathcal{T}}(f - \alpha u_{\text{CR}})\| \|\nabla f\|, \quad (4.11)$$

*dass  $E_{\text{NC}}(u_{\text{CR}}) \geq E_{\text{GLEB}}$  und  $E(u) \geq E_{\text{GLEB}}$ .*

**Definition 4.10** (Verfeinerungsindikator). Für  $d \in \mathbb{N}$  (in dieser Arbeit stets  $d = 2$ ) und  $0 < \gamma \leq 1$  definieren wir für alle  $T \in \mathcal{T}$  und  $u_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  die Funktionen

$$\begin{aligned}\eta_V(T) &:= |T|^{2/d} \|f - \alpha u_{\text{CR}}\|_{L^2(T)}^2 \quad \text{und} \\ \eta_J(T) &:= |T|^{\gamma/d} \sum_{F \in \mathcal{E}(T)} \|[u_{\text{CR}}]_F\|_{L^1(F)}.\end{aligned}$$

Damit definieren wir den Verfeinerungsindikator  $\eta := \sum_{T \in \mathcal{T}} \eta(T)$ , wobei

$$\eta(T) := \eta_V(T) + \eta_J(T) \quad \text{für alle } T \in \mathcal{T}. \quad (4.12)$$



# 5 Iterative Lösung

## 5.1 Primale-duale Iteration

In diesen Abschnitt präsentieren wir ein iteratives Verfahren mit dem wir Problem 4.1 numerisch lösen möchten. Wir nutzen die primale-duale Iteration [Bar15b, S. 314, Algorithm 10.1] unter Beachtung von [Bar15b, S. 314, Remark 10.11]. Diese realisiert Gradientenverfahren zum Finden eines Sattelpunkts, dessen Komponenten die primale und die duale Formulierung des Minimierungsproblems lösen. Details dazu und weitere Referenzen finden sich in [Bar12; Bar15b, S. 118-121].

Angepasst an unser Problem und die Notation dieser Arbeit lautet der Algorithmus wie folgt.

**Algorithmus 5.1** (Primale-duale Iteration).

**Input:**  $(u_0, \Lambda_0) \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T}) \times P_0(\mathcal{T}; \{w \in \mathbb{R}^2 \mid |w| \leq 1\})$ ,  $\tau > 0$

Initialisiere  $v_0 := 0$  in  $\text{CR}_0^1(\mathcal{T})$ .

**for**  $j = 1, 2, \dots$

$$\tilde{u}_j := u_{j-1} + \tau v_{j-1}, \quad (5.1)$$

$$\Lambda_j := \frac{\Lambda_{j-1} + \tau \nabla_{\text{NC}} \tilde{u}_j}{\max \{1, |\Lambda_{j-1} + \tau \nabla_{\text{NC}} \tilde{u}_j|\}}, \quad (5.2)$$

bestimme  $u_j \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  als Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\frac{1}{\tau} a_{\text{NC}}(u_j, \bullet) + \alpha(u_j, \bullet) = \frac{1}{\tau} a_{\text{NC}}(u_{j-1}, \bullet) + (f, \bullet) - (\Lambda_j, \nabla_{\text{NC}} \bullet) \quad \text{in } \text{CR}_0^1(\mathcal{T}), \quad (5.3)$$

$$v_j := \frac{u_j - u_{j-1}}{\tau}.$$

**Output:** Folge  $(u_j, \Lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$  in  $\text{CR}_0^1(\mathcal{T}) \times P_0(\mathcal{T}; \{w \in \mathbb{R}^2 \mid |w| \leq 1\})$

**Bemerkung 5.2.** Mit den kantenorientierten Crouzeix-Raviart-Basisfunktionen  $\{\psi_E \mid E \in \mathcal{E}\}$  aus Abschnitt 2.3 können wir die Steifigkeitsmatrix  $A \in \mathbb{R}^{|\mathcal{E}| \times |\mathcal{E}|}$  und die Massematrix  $M \in \mathbb{R}^{|\mathcal{E}| \times |\mathcal{E}|}$  für alle  $k, \ell \in \{1, 2, \dots, |\mathcal{E}|\}$  definieren durch

$$A_{k\ell} := a_{\text{NC}}(\psi_{E_k}, \psi_{E_\ell}) \quad \text{und} \quad M_{k\ell} := (\psi_{E_k}, \psi_{E_\ell}).$$

Außerdem definieren wir mit  $u_{j-1}$  und  $\Lambda_j$  aus Algorithmus 5.1 den Vektor  $b \in \mathbb{R}^{|\mathcal{E}|}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  durch

$$b_k := \left( \frac{1}{\tau} \nabla_{\text{NC}} u_{j-1} - \Lambda_j, \nabla_{\text{NC}} \psi_{E_k} \right) + (f, \psi_{E_k}).$$

Sei nun  $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \dots, E_{|\mathcal{E}|}\}$  und sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $\mathcal{E}(\Omega) := \{E_1, E_2, \dots, E_{|\mathcal{E}(\Omega)|}\}$ . Dann ist  $J := \{|\mathcal{E}(\Omega)| + 1, |\mathcal{E}(\Omega)| + 2, \dots, |\mathcal{E}|\}$  die Menge der Indizes der Randkanten in  $\mathcal{E}$ .

Damit definieren wir die Matrix  $\bar{A} \in \mathbb{R}^{|\mathcal{E}(\Omega)| \times |\mathcal{E}(\Omega)|}$ , die durch Streichen der Zeilen und Spalten von  $A$  mit den Indizes aus  $J$  entsteht, die Matrix  $\bar{M} \in \mathbb{R}^{|\mathcal{E}(\Omega)| \times |\mathcal{E}(\Omega)|}$ , die ebenso

ascent and descent flow, gradient flow heißt doch, dass Gradientenverfahren angewendet wurde, richtig? Stopping criteria sind in Punkt 6.2

## 5 Iterative Lösung

aus  $M$  hervorgeht und den Vektor  $\bar{b} \in \mathbb{R}^{|\mathcal{E}(\Omega)|}$ , der durch Streichen der Komponenten von  $b$  mit Indizes in  $J$  entsteht.

Weiterhin sei  $x \in \mathbb{R}^{|\mathcal{E}(\Omega)|}$ , wobei  $x_k$  für alle  $k \in \{1, 2, \dots, |\mathcal{E}(\Omega)|\}$  der Koeffizient der Lösung  $u_j \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  des Gleichungssystems (5.3) zur  $k$ -ten Basisfunktion von  $\text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  sei, das heißt es gelte

$$u_j = \sum_{k=1}^{|\mathcal{E}(\Omega)|} x_k \psi_{E_k}.$$

Da wir das Gleichungssystem (5.3) in  $\text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  lösen, lässt sich somit  $u_j$  durch Lösen einer Matrixgleichung nach  $x$  bestimmen. Diese lautet

$$\left( \frac{1}{\tau} \bar{A} + \alpha \bar{M} \right) x = \bar{b}. \quad (5.4)$$

## 5.2 Konvergenz der Iteration

In diesen Abschnitt beweisen wir die Konvergenz der Iterate von Algorithmus 5.1 gegen die Lösung von Problem 4.1. Dabei bedienen wir uns unter anderem der äquivalenten Charakterisierungen aus Theorem 4.3.

**Theorem 5.3.** *Sei  $u_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  Lösung von Problem 4.1 und  $\bar{\Lambda} \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)$  erfülle  $|\bar{\Lambda}(\cdot)| \leq 1$  fast überall in  $\Omega$ , Gleichung (4.4) und Gleichung (4.5).*

*Falls  $0 < \tau \leq 1$ , dann konvergieren die Iterate  $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$  von Algorithmus 5.1 in  $L^2(\Omega)$  gegen  $u_{\text{CR}}$ .*

*Beweis.* Der Beweis folgt einer Skizze von Professor Carstensen.

Sei  $j \in \mathbb{N}$ . Seien weiterhin  $\tilde{u}_j$ ,  $v_j$  und  $\Lambda_j$  definiert wie in Algorithmus 5.1. Außerdem definieren wir die Abkürzungen  $e_j := u_{\text{CR}} - u_j$ ,  $E_j := \bar{\Lambda} - \Lambda_j$  und  $\mu_j := \max\{1, |\Lambda_{j-1} + \tau \nabla_{\text{NC}} \tilde{u}_j|\}$ . Dabei nutzen wir die Konvention  $e_{-1} := e_0$ .

Wir testen zunächst (5.3) mit  $e_j$  und formen das Resultat um. Damit erhalten wir

$$a_{\text{NC}}(v_j, e_j) + \alpha(u_j, e_j) + (\Lambda_j, \nabla_{\text{NC}} e_j) = (f, e_j).$$

Zusammen mit Gleichung (4.5) folgt daraus

$$\begin{aligned} a_{\text{NC}}(v_j, e_j) &= \alpha(u_{\text{CR}} - u_j, e_j) + (\bar{\Lambda} - \Lambda_j, \nabla_{\text{NC}} e_j) \\ &= \alpha \|e_j\|^2 + (E_j, \nabla_{\text{NC}} e_j). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Als Nächstes betrachten wir Gleichung (5.2). Es gilt

$$\Lambda_{j-1} - \Lambda_j + \tau \nabla_{\text{NC}} \tilde{u}_j = (\mu_j - 1) \Lambda_j \quad \text{fast überall in } \Omega. \quad (5.6)$$

Außerdem folgt aus Gleichung (5.2) und einer einfachen Fallunterscheidung zwischen  $1 \geq |\Lambda_{j-1} + \tau \nabla_{\text{NC}} \tilde{u}_j|$  und  $1 < |\Lambda_{j-1} + \tau \nabla_{\text{NC}} \tilde{u}_j|$ , dass

$$(1 - |\Lambda_j|)(\mu_j - 1) = 0 \quad \text{fast überall in } \Omega. \quad (5.7)$$

Testen wir nun Gleichung (5.6) in  $L^2(\Omega)$  mit  $E_j$ , erhalten wir unter Nutzung von  $\mu_j \geq 1$ , der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung,  $|\bar{\Lambda}(\cdot)| \leq 1$  fast überall in  $\Omega$  und Gleichung (5.7),

dass

$$\begin{aligned}
 (\Lambda_{j-1} - \Lambda_j + \tau \nabla_{\text{NC}} \tilde{u}_j, E_j) &= ((\mu_j - 1)\Lambda_j, \bar{\Lambda} - \Lambda_j) \\
 &= \int_{\Omega} (\mu_j - 1)(\Lambda_j \cdot \bar{\Lambda} - \Lambda_j \cdot \Lambda_j) \, dx \\
 &\leq \int_{\Omega} (\mu_j - 1)(|\Lambda_j| - |\Lambda_j|^2) \, dx \\
 &= \int_{\Omega} |\Lambda_j|(1 - |\Lambda_j|)(\mu_j - 1) \, dx \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Daraus folgt mit  $\Lambda_{j-1} - \Lambda_j = E_j - E_{j-1}$  und  $\tilde{u}_j = u_{j-1} - (e_{j-1} - e_{j-2})$ , dass nach Division durch  $\tau$  gilt

$$\left( \frac{E_j - E_{j-1}}{\tau} + \nabla_{\text{NC}} u_{j-1} - \nabla_{\text{NC}}(e_{j-1} - e_{j-2}), E_j \right) \leq 0. \quad (5.8)$$

Aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung,  $\bar{\Lambda}(x) \in \text{sign}(\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}(x))$  für alle  $x \in \text{int}(T)$  für alle  $T \in \mathcal{T}$  und  $|\Lambda_j(\cdot)| \leq 1$  fast überall in  $\Omega$  folgt, dass

$$\begin{aligned}
 \nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}} \cdot E_j &= \nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}} \cdot \bar{\Lambda} - \nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}} \cdot \Lambda_j \\
 &\geq \nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}} \cdot \bar{\Lambda} - |\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}| |\Lambda_j| \\
 &= |\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}| (1 - |\Lambda_j|) \\
 &\geq 0 \quad \text{fast überall in } \Omega.
 \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$(\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}, E_j) = \int_{\Omega} \nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}} \cdot E_j \, dx \geq 0. \quad (5.9)$$

Aus den Ungleichungen (5.8) und (5.9) folgt insgesamt

$$\left( \frac{E_j - E_{j-1}}{\tau} + \nabla_{\text{NC}} u_{j-1} - \nabla_{\text{NC}}(e_{j-1} - e_{j-2}), E_j \right) \leq (\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}, E_j).$$

Das ist äquivalent zu

$$\left( \frac{E_j - E_{j-1}}{\tau} - \nabla_{\text{NC}}(2e_{j-1} - e_{j-2}), E_j \right) \leq 0. \quad (5.10)$$

Unter Nutzung von  $-\tau v_j = e_j - e_{j-1}$ , Gleichung (5.5) und Ungleichung (5.10) zusammen mit  $\tau > 0$  erhalten wir

$$\begin{aligned}
 &\|e_j\|_{\text{NC}}^2 - \|e_{j-1}\|_{\text{NC}}^2 + \|E_j\|^2 - \|E_{j-1}\|^2 + \|e_j - e_{j-1}\|_{\text{NC}}^2 + \|E_j - E_{j-1}\|^2 \\
 &= 2a_{\text{NC}}(e_j, e_j - e_{j-1}) + 2(E_j, E_j - E_{j-1}) \\
 &= -2\tau a_{\text{NC}}(e_j, v_j) + 2(E_j, E_j - E_{j-1}) \\
 &= -2\tau \alpha \|e_j\|^2 + 2\tau \left( E_j, -\nabla_{\text{NC}} e_j + \frac{E_j - E_{j-1}}{\tau} \right) \\
 &\leq -2\tau \alpha \|e_j\|^2 + 2\tau \left( E_j, -\nabla_{\text{NC}} e_j + \frac{E_j - E_{j-1}}{\tau} \right) \\
 &\quad - 2\tau \left( \frac{E_j - E_{j-1}}{\tau} - \nabla_{\text{NC}}(2e_{j-1} - e_{j-2}), E_j \right) \\
 &= -2\tau \alpha \|e_j\|^2 - 2\tau (E_j, \nabla_{\text{NC}}(e_j - 2e_{j-1} + e_{j-2})).
 \end{aligned}$$

## 5 Iterative Lösung

Für jedes  $J \in \mathbb{N}$  führt die Summation dieser Ungleichung über  $j = 1, \dots, J$  und eine Äquivalenzumformung zu

$$\begin{aligned} & \|e_J\|_{\text{NC}}^2 + \|E_J\|^2 + \sum_{j=1}^J (\|e_j - e_{j-1}\|_{\text{NC}}^2 + \|E_j - E_{j-1}\|^2) \\ & \leq \|e_0\|_{\text{NC}}^2 + \|E_0\|^2 - 2\tau\alpha \sum_{j=1}^J \|e_j\|^2 - 2\tau \sum_{j=1}^J (E_j, \nabla_{\text{NC}}(e_j - 2e_{j-1} + e_{j-2})). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Die letzte Summe auf der rechten Seite dieser Ungleichung können wir, unter Beachtung von  $e_{-1} = e_0$ , umformen durch

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^J (E_j, \nabla_{\text{NC}}(e_j - 2e_{j-1} + e_{j-2})) \\ &= \sum_{j=1}^J (E_j, \nabla_{\text{NC}}(e_j - e_{j-1})) - \sum_{j=0}^{J-1} (E_{j+1}, \nabla_{\text{NC}}(e_j - e_{j-1})) \\ &= \sum_{j=1}^{J-1} (E_j - E_{j+1}, \nabla_{\text{NC}}(e_j - e_{j-1})) + (E_J, \nabla_{\text{NC}}(e_J - e_{J-1})) - (E_1, \nabla_{\text{NC}}(e_0 - e_{-1})) \\ &= \sum_{j=1}^{J-1} (E_j - E_{j+1}, \nabla_{\text{NC}}(e_j - e_{j-1})) + (E_J, \nabla_{\text{NC}}(e_J - e_{J-1})). \end{aligned}$$

Mit dieser Umformung erhalten wir aus Ungleichung (5.11) für jedes  $\tau \in (0, 1]$ , das heißt  $\tau^{-1} \geq 1$ , dass

$$\begin{aligned} & \|e_J\|_{\text{NC}}^2 + \|E_J\|^2 + \sum_{j=1}^J (\|e_j - e_{j-1}\|_{\text{NC}}^2 + \|E_j - E_{j-1}\|^2) \\ & \leq \tau^{-1} (\|e_0\|_{\text{NC}}^2 + \|E_0\|^2) - 2\alpha \sum_{j=1}^J \|e_j\|^2 \\ & \quad - 2 \sum_{j=1}^{J-1} (E_j - E_{j+1}, \nabla_{\text{NC}}(e_j - e_{j-1})) - 2(E_J, \nabla_{\text{NC}}(e_J - e_{J-1})). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Schließlich ergibt eine Abschätzung unter Nutzung von Ungleichung (5.12), dass

$$\begin{aligned} & 2\alpha \sum_{j=1}^J \|e_j\|^2 \\ & \leq 2\alpha \sum_{j=1}^J \|e_j\|^2 + \|E_J + \nabla_{\text{NC}}(e_J - e_{J-1})\|^2 + \|e_J\|_{\text{NC}}^2 + \|E_1 - E_0\|^2 \\ & \quad + \sum_{j=1}^{J-1} \|\nabla_{\text{NC}}(e_j - e_{j-1}) - (E_{j+1} - E_j)\|^2 \\ & = 2\alpha \sum_{j=1}^J \|e_j\|^2 + \|e_J\|_{\text{NC}}^2 + \|E_J\|^2 + \sum_{j=1}^J (\|e_j - e_{j-1}\|_{\text{NC}}^2 + \|E_j - E_{j-1}\|^2) \\ & \quad + 2 \sum_{j=1}^{J-1} (E_j - E_{j+1}, \nabla_{\text{NC}}(e_j - e_{j-1})) + 2(E_J, \nabla_{\text{NC}}(e_J - e_{J-1})) \\ & \leq \tau^{-1} (\|e_0\|_{\text{NC}}^2 + \|E_0\|^2). \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass  $\sum_{j=1}^{\infty} \|e_j\|^2$  beschränkt ist, was impliziert  $\|u_{\text{CR}} - u_j\| = \|e_j\| \rightarrow 0$  für  $j \rightarrow \infty$ .  $\square$

# 6 Implementierung

## 6.1 Hinweise zur Benutzung des Programms

Ziel der für diese Arbeit implementierten Methoden ist die Realisierung von Algorithmus 5.1 im Solve-Schritt des AFEM-Algorithmus aus Abbildung 6.1. Wir gehen davon aus, dass dieser und die im AFEM-Softwarepaket realisierten Methoden sowie deren Datenstrukturen bekannt sind und verweisen für weitere Details auf [Car+10]. Im Refine-Schritt nutzen wir anstelle eines Fehlerschätzers den Verfeinerungsindikator aus Definition 4.10.

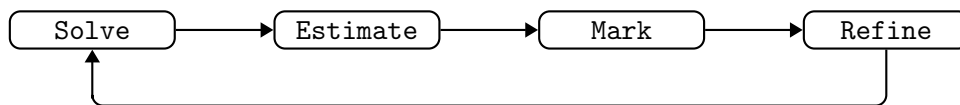


Abbildung 6.1: AFEM-Schleife

Die zur korrekten Funktionsweise dieses Programms nötigen Methoden und Dateien des AFEM-Softwarepakets sind enthalten im Ordner `./utils/afemPackage/` sowie `./utils/geometries/`.

Alle Ein- und Ausgabeparameter der im Rahmen dieser Arbeit implementierten Methoden sind in den entsprechenden Dateien detailliert dokumentiert. Ausgenommen davon sind die Standard-Datenstrukturen aus dem AFEM-Softwarepaket, die dort lediglich namentlich genannt werden. Die mathematischen Grundlagen für die Realisierung einiger Methoden diskutieren wir in Abschnitt 6.5.

Die ausführbare Methode, welche den AFEM-Algorithmus realisiert, ist

```
./nonconforming/startAlgorithmCR.m.
```

Als optionaler Eingabeparameter ist dabei ein String `benchmark` möglich. Wird die Methode ohne Übergabe eines solchen Parameters ausgeführt, nutzt sie als Standardwert `benchmark = 'editable'`. Nach Ausführen von `startAlgorithmCR(benchmark)` werden die nötigen Parameter und Einstellungen für das jeweilige Experiment aus der Datei

```
./nonconforming/benchmarks/benchmark.m
```

geladen und als Felder des Structure Arrays `params` übergeben. Für jedes in dieser Arbeit dokumentierte Experiment verweisen wir in Kapitel 7 an entsprechender Stelle auf das dafür benutzte Benchmark, welches in `./nonconforming/benchmarks/` zu finden ist und somit die Reproduzierbarkeit des Experiments garantiert. Als Muster für eine Benchmark-Datei dient

```
./nonconforming/benchmarks/editable.m.
```

Eine Übersicht über die in einer Benchmark-Datei wählbaren Parameter ist zu finden in den Tabellen 6.1, 6.2, 6.3, 6.4 und 6.5 sowie über die definierbaren Funktion in Tabelle 6.6. Weitere Details zu den Datentypen sind in `editable.m` zu finden.

Dass die zahlreichen Parameter, die während des Programmablaufs über- oder ausgegeben werden müssen, als Felder von Structure Arrays gespeichert werden, dient der Modifizierbarkeit des Programms. So haben Korrekturen und Ergänzungen am Programm



Parametername	Beschreibung
<code>showPlots</code>	
<code>plotModeGrayscale</code>	
<code>showProgress</code>	
<code>degree4Integrate</code>	
<code>plotGivenFunctions</code>	
<code>refinementLevel4Plots</code>	
<code>debugIfError</code>	

Tabelle 6.1: Diverse Parameter zur Kontrolle des Programmablaufs

häufig nur zur Folge, dass einige `structs` um Felder ergänzt werden müssen während die Methodenköpfe unverändert bleiben können.

Das Eingangssignal  $f$  und eventuell weitere Funktionen, wie etwa die exakte Lösung  $u$  von Problem 3.1 und ihre schwache Ableitung  $\nabla u$ , müssen in der Benchmark-Datei angegeben werden, um sie dem Programm zu übergeben. Die für die Experimente in Kapitel 7 genutzten Funktionen sind zu finden in

`./utils/functions/.`

Ist eine Lösung  $u$  von Problem 3.1 bekannt, so kann die exakte Energie  $E(u)$  approximiert werden mit der Methode

`./nonconforming/computeExactEnergyBV.m.`

Die so berechneten Energien werden gespeichert im Ordner

`./nonconforming/knownExactEnergies/`

und können anschließend manuell in ein Benchmark aufgenommen werden.

Soll als Eingangssignal kein `function_handle` sondern ein Graufarbenbild gegeben werden, so muss es gespeichert sein in

`./utils/functions/images/.`

Um Dirichlet-Nullranddaten des Bildes zu garantieren, was einem schwarzen Rand entspricht, kann die Methode

`./utils/functions/images/addBoundary2image.m`

genutzt werden. Diese fügt einen graduellen Übergang zu schwarzen Rand auf den äußeren 25 Pixeln des Bildes hinzu.

Um additives weißes gaußsches Rauschen zu einem Bild hinzuzufügen, kann die Methode

`./utils/functions/images/addNoise2image.m`

genutzt werden.

## 6.2 Programmablauf

In diesem Abschnitt betrachten wir eine beispielhafte Ausführung des Programms, bei der alle relevanten Methoden genutzt werden.

In der Benchmark-Datei für den Programmaufruf müssen, neben dem Eingangssignal  $f \in H_0^1(\Omega)$ , die Lösung  $u \in H_0^1(\Omega)$ , die exakte Energie  $E(u)$  und der schwache Gradient von  $f$  gegeben sein. Damit diese Informationen tatsächlich genutzt werden, müssen zusätzlich einige Parameter wie folgt gewählt werden.

Parametername	Beschreibung
<b>geometry</b>	Name der Geometrie auf deren Triangulierung der AFEM-Algorithmus angewendet werden soll (cf. <code>loadGeometry</code> in [Car+10])
<b>initialRefinementLevel</b>	Anzahl der Rotverfeinerungen die auf die Triangulierung der Geometrie <b>geometry</b> angewendet werden sollen vor Start des AFEM-Algorithmus (cf. <code>loadGeometry</code> in [Car+10, Abschnitt 1.9.1])
<b>parTheta</b>	Bulk-Parameter $\theta$ für den Mark-Schritt des AFEM-Algorithmus ( $\theta \in (0,1)$ für adaptive und $\theta = 1$ für uniforme Netzverfeinerung)
<b>minNrDof</b>	Anzahl der Freiheitsgrade der Triangulierung eines Levels, die mindestens erreicht werden soll, bevor der AFEM-Algorithmus abbricht
<b>useProlongation</b>	<b>true</b> , wenn eine Prolongation der Lösung der primalen-dualen Iteration als Startwert für die Iteration des nächsten Levels genutzt werden soll, sonst <b>false</b>
<b>beta4Estimate</b>	Parameter $\gamma$ aus Definition 4.10
<b>n4Estimate</b>	Parameter $d$ aus Definition 4.10

Tabelle 6.2: Parameter für den AFEM-Algorithmus

Parametername	Beschreibung
<b>u0Mode</b>	
<b>initialEpsStop</b>	
<b>parTau</b>	

Tabelle 6.3: Parameter für die Einstellungen der Iteration

Parametername	Beschreibung
<b>useImage</b>	
<b>imageName</b>	
<b>parAlpha</b>	
<b>parBeta</b>	
<b>rhsGradientKnown</b>	
<b>exactSolutionKnown</b>	
<b>useExactEnergy</b>	
<b>exactEnergy</b>	

Tabelle 6.4: Parameter des Experiments

Parametername	Beschreibung
<b>expName</b>	
<b>dirInfoName</b>	

Tabelle 6.5: Parameter zum Speichern der Ergebnisse

Parametername	Beschreibung
<b>rightHandSide</b>	
<b>gradientRightHandSide</b>	
<b>exactSolution</b>	

Tabelle 6.6: Definierbare `function_handles`

- `useExactEnergy = true`
- `useImage = false`
- `rhsGradientKnown = true`
- `exactSolutionKnown = true`
- `useExactEnergy = true`

Noch in der Benchmark-Datei werden mit den gewählten Einstellungen die benötigten geometrischen Datenstrukturen initialisiert. Diese werden mit allen weiteren Informationen als Felder eines Structure Arrays gespeichert und an `startAlgorithmCR` übergeben.

Dort werden zunächst Structure Arrays mit Feldern für die benötigten Daten während der AFEM-Routine sowie deren Ergebnisse erstellt. Nach dem Berechnen einiger weiterer Informationen beginnt die AFEM-Schleife.

Zu Beginn der Schleife werden die für das aktuelle Level benötigten Daten ermittelt, zum Beispiel die Flächeninhalte der Dreiecke und die Freiheitsgrade der aktuellen Triangulierung. Insbesondere werden die auf dem Level mehrmals benötigten Gradienten der lokalen Crouzeix-Raviart-Basisfunktionen auf allen Dreiecken berechnet (cf. [Car+10, Abschnitt 1.4.2]) in

`./nonconforming/common/computeGradsCR4e.m.`

Mit diesen wird der stückweise Gradient des Startwerts  $u_0$  aus Algorithmus 5.1 berechnet in

`./nonconforming/common/gradientCR.m.`

Mit  $\nabla_{\text{NC}} u_0$  wird anschließend  $\Lambda_0$  aus Algorithmus 5.1 auf allen  $T \in \mathcal{T}$  initialisiert als

$$\Lambda_0|_T := \begin{cases} \frac{\nabla u_0|_T}{|\nabla u_0|_T|}, & \text{falls } \nabla u_0|_T \neq 0, \\ 0, & \text{falls } \nabla u_0|_T = 0. \end{cases}$$

Außerdem werden die Steifigkeits- und Massesmatrix aus Bemerkung 5.2 aufgestellt in

`./nonconforming/common/computeFeMatricesCR.m.`

Dabei benutzen wir für jedes  $T \in \mathcal{T}$ , dass die lokale Massesmatrix auf  $T$  berechnet werden kann durch

$$A_T = \frac{|T|}{3} I_3.$$

Die Aufstellung der lokalen Steifigkeitsmatrizen sowie die Berechnung der globalen Steifigkeits- und Massesmatrix aus ihren lokalen Versionen geschieht analog zu [Car+10, Abschnitt 1.4.2]).

Danach werden für jedes Dreieck  $T \in \mathcal{T}$  mit den lokalen Crouzeix-Raviart-Basisfunktionen  $\psi_{T,k}$ ,  $k \in \{1, 2, 3\}$ , die Integrale  $\int_T f \psi_{T,k} dx$  berechnet. Mit diesen wird außerdem für alle Crouzeix-Raviart-Basisfunktionen  $\psi_F$ ,  $F \in \mathcal{E}$ , das Integral  $\int_\Omega f \psi_F dx$  berechnet. Dies alles geschieht mithilfe der `integrate` Methode [Car+10, Abschnitt 1.8.2] des AFEM-Softwarepakets in

`./nonconforming/common/integralsWithF4e.m.`

Damit sind alle notwendigen Daten ermittelt um die primale-duale Iteration zur Lösung auf dem Level zu starten. Genutzt wird dafür die Methode

Extra Section mit Details (insb wie die CR Funktionen dort implementiert sind)?

```
./nonconforming/main/solvePrimalDualFormulation.m.
```

Details dazu diskutieren wir in Abschnitt 6.3.

output des level etc werden belegt

```
./nonconforming/common/computeNormDiffRhsSolCrSquared4e.m
```

GLEB

```
./nonconforming/common/computeGleb.m
```

Verfeinerungsindikator, dafür zunächst (mit Verweis auf die section dafür)

```
./nonconforming/common/computeL1NormOfJump4s.m
```

und dann

```
./nonconforming/estimate/estimateErrorCR4e.m
```

error nutzt `error4eCRL2` mit cite des Abschnitts in [Car+10].

gebe information über das Level auf der Konsole aus und speichere die Resulate

checke termination crit

mark (mit verweis auf genutzte Methode aus AFEM)

refine (mit verweis auf genutzte Methode aus AFEM)

prolongation (mit kurzer Erläuterung, mit welcher Idee die passiert)  
auch darauf eingehen, wie `u0` gewählt wird wenn keine Prolongation?

polygonmesh ignorieren?

## 6.3 Realisierung der primalen-dualen Iteration

In diesen Abschnitt beschreiben wir die Methode

```
./nonconforming/main/solvePrimalDualFormulation.m.
```

Dabei benutzen wir die Bezeichnungen aus Algorithmus 5.1, der in dieser Methode realisiert wird.

Wie in Abschnitt 6.2 beschrieben, sind vor Aufruf von `solvePrimalDualFormulation` bereits alle benötigten Informationen über die aktuelle Triangulierung  $\mathcal{T}$  bekannt sowie die Steifigkeits- und Massematrix aus Bemerkung 5.2 und die Integrale  $\int_{\Omega} f \psi_F dx$  für alle Crouzeix-Raviart-Basisfunktionen  $\psi_F$ ,  $F \in \mathcal{E}$ .

Mit der Steifigkeits- und Massematrix ist direkt ersichtlich, wie die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems (5.4) implementiert werden kann. Für die Implementation der rechten Seite dieses Systems nutzten wir die folgende Beobachtung. Sei für alle  $F \in \mathcal{E}$  die Menge

der Dreiecke in  $\mathcal{T}$ , die  $F$  als Kante haben, gegeben durch  $\mathcal{T}(F)$ . Für alle  $k \in \{1, 2, \dots, |\mathcal{E}|\}$  gilt damit, da  $\nabla_{\text{NC}} u_{j-1}$ ,  $\Lambda_j$  und  $\nabla_{\text{NC}} \psi_{E_k}$  stückweise konstant sind,

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{\tau} \nabla_{\text{NC}} u_{j-1} - \Lambda_j, \nabla_{\text{NC}} \psi_{E_k} \right) &= \sum_{T \in \mathcal{T}} \left( \frac{1}{\tau} \nabla_{\text{NC}} u_{j-1} - \Lambda_j, \nabla_{\text{NC}} \psi_{E_k} \right)_{L^2(T)} \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}(F)} |T| \frac{1}{\tau} (\nabla_{\text{NC}} u_{j-1} - \Lambda_j)|_T \cdot \nabla \psi_{E_k}|_T. \end{aligned}$$

Da die Terme

$$(f, \psi_{E_k}) = \int_{\Omega} f \psi_{E_k} \, dx$$

bereits berechnet wurden, können wir somit die rechte Seite  $\bar{b}$  implementieren.

Es ist direkt ersichtlich wie der verbleibende Teil von Algorithmus 5.1 implementiert werden kann. Sonstige Informationen über die Iteration, wie etwa das Abbruchkriterium, diskutieren wir in Kapitel 7.

Es bleibt anzumerken, dass in `solvePrimalDualFormulation`, neben Algorithmus 5.1, der Ausgabe des Fortschritts sowie der Übergabe von Ergebnissen der Iteration, auch die Berechnung der nichtkonformen Energie  $E_{\text{NC}}(u_j)$  der Iterate realisiert wird. Dies geschieht in der Methode

`./nonconforming/common/computeDiscreteEnergyCR.m.`

Dabei werden die Massematrix  $M$  und die Integrale  $\int_{\Omega} f \psi_F \, dx$ ,  $F \in \mathcal{E}$ , wie folgt genutzt. Sei  $v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  und  $v \in \mathbb{R}^{|\mathcal{E}|}$  enthalte die Koordinaten von  $v_{\text{CR}}$  bezüglich der Basis  $\{\psi_{E_1}, \psi_{E_2}, \dots, \psi_{E_{|\mathcal{E}|}}\}$ , das heißt  $v_{\text{CR}} = \sum_{k=1}^{|\mathcal{E}|} v_k \psi_{E_k}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} E_{\text{NC}}(v_{\text{CR}}) &= \frac{\alpha}{2} \|v_{\text{CR}}\|^2 + \|\nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}}\|_{L^1(\Omega)} - \int_{\Omega} f v_{\text{CR}} \, dx \\ &= \frac{\alpha}{2} \sum_{k=1}^{|\mathcal{E}|} \sum_{\ell=1}^{|\mathcal{E}|} v_k (\psi_{E_k}, \psi_{E_{\ell}}) v_{\ell} + \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T |\nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}}| \, dx - \sum_{k=1}^{|\mathcal{E}|} v_k \int_{\Omega} f \psi_{E_k} \, dx \\ &= \frac{\alpha}{2} v \cdot M v + \sum_{T \in \mathcal{T}} |T| |\nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}}| - \sum_{k=1}^{|\mathcal{E}|} v_k \int_{\Omega} f \psi_{E_k} \, dx. \end{aligned}$$

## 6.4 Erstellen einer Benchmark-Datei

Vielleicht (das heißt wahrscheinlich) in der 'Hinweise' Section in einer Tabelle ala PB Realisierungstabelle. Tabellen vlt trennen nach Art der paramter (AFEM Params, Exp Params, Funktionen, misc usw.) Beispielhaft für eine der Parameter Arten machen um Tien fragen zu können

Datentypen weglassen mit Verweis auf Details in editable?

Parameter weglassen die nicht garantiert geändert werden sollen/können ohne Anpassungen des Programms?

## 6.5 Mathematische Grundlagen ausgewählter Methoden

### 6.5.1 Berechnung lokaler Knotenwerte einer Crouzeix-Raviart-Funktion

Sei  $u_{\text{CR}} \in \text{CR}^1(\mathcal{T})$ .

Für die in dieser Arbeit implementierte Prolongation von  $u_{\text{CR}}$  auf eine Verfeinerung der Triangulierung  $\mathcal{T}$  oder für die Berechnung der  $L^1$ -Norm der Kantensprünge von  $u_{\text{CR}}$  benötigen wir für jedes Dreieck  $T \in \mathcal{T}$  die Werte von  $u_{\text{CR}}$  in den Knoten von  $T$ .

Dazu sei  $T = \text{conv}\{P_1, P_2, P_3\}$  mit den Kanten  $E_1 = \text{conv}\{P_1, P_2\}$ ,  $E_2 = \text{conv}\{P_2, P_3\}$  und  $E_3 = \text{conv}\{P_3, P_1\}$ . Die Funktion  $u := u_{\text{CR}}|_T$  habe in den Mittelpunkten der Kanten die Werte  $u_j := u(\text{mid}(E_j))$  für alle  $j \in \{1, 2, 3\}$ . Gesucht sind damit die Werte  $u(P_1)$ ,  $u(P_2)$  und  $u(P_3)$ .

Da  $u_{\text{CR}} \in \text{CR}^1(\mathcal{T})$ , ist  $u$  affin. Damit gilt für eine Kante  $E = \text{conv}\{P, Q\} \in \{E_1, E_2, E_3\}$ , dass  $u(\text{mid}(E))$  gegeben ist durch den Mittelwert von  $u(P)$  und  $u(Q)$ .

Somit erhalten wir die drei Gleichungen

$$u_1 = \frac{u(P_1) + u(P_2)}{2}, \quad u_2 = \frac{u(P_2) + u(P_3)}{2}, \quad u_3 = \frac{u(P_3) + u(P_1)}{2}.$$

Sind  $u_1$ ,  $u_2$  und  $u_3$  bekannt, können wir dieses Gleichungssystem nach  $u(P_1)$ ,  $u(P_2)$  und  $u(P_3)$  lösen und erhalten die gesuchten Werte

$$u(P_1) = u_1 + u_3 - u_2, \quad u(P_2) = u_1 + u_2 - u_3, \quad u(P_3) = u_2 + u_3 - u_1.$$

Wir realisieren dies mit der Methode

`./nonconforming/common/computeNodeValuesCR4e.m.`

### 6.5.2 Berechnung von Sprungtermen

Insbesondere für die Berechnung des Verfeinerungsindikators aus Definition 4.10 benötigen wir eine Methode, die für eine Crouzeix-Raviart-Funktion  $v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  für alle Kanten  $F \in \mathcal{E}$  die Terme  $\|[v_{\text{CR}}]_F\|_{L^1(F)}$  bestimmt.

Da  $v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$ , ist  $[v_{\text{CR}}]_F$  affin und es gilt  $[v_{\text{CR}}]_F(\text{mid}(F)) = 0$  für alle Kanten  $F \in \mathcal{E}$ .

Betrachten wir nun eine beliebige Kante  $F \in \mathcal{E}$  mit  $F = \text{conv}\{P_1, P_2\}$ . Wir definieren eine Parametrisierung  $\xi : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$  von  $F$  durch  $\xi(t) := \frac{t}{2}(P_2 - P_1) + P_1$ . Es gilt  $|\xi'| \equiv \frac{1}{2}|P_2 - P_1| = \frac{1}{2}|F|$ .

Sei außerdem  $p(t) := [v_{\text{CR}}]_F(\xi(t))$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \|[v_{\text{CR}}]_F\|_{L^1(F)} &= \int_F |[v_{\text{CR}}]_F| \, ds = \int_0^2 |p(t)| |\xi'(t)| \, dt = \frac{|F|}{2} \int_0^2 |p(t)| \, dt \\ &= \frac{|F|}{2} \left( \int_0^1 |p(t)| \, dt + \int_1^2 |p(t)| \, dt \right). \end{aligned}$$

Da  $v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$ , ist  $|p(\cdot)|$  auf  $[0, 1]$  und  $[1, 2]$  jeweils ein Polynom von Grad 1 mit  $|p(1)| = |[v_{\text{CR}}]_F(\text{mid}(F))| = 0$ . Somit können wir  $|p|$  explizit ausdrücken durch

$$\begin{aligned} |p(t)| &= (1-t)|p(0)| \quad \text{für alle } t \in [0, 1] \quad \text{und} \\ |p(t)| &= (t-1)|p(2)| \quad \text{für alle } t \in [1, 2]. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir, aufgrund der Exaktheit der Mittelpunktsregel für Polynome von Grad 1, dass

$$\begin{aligned} \int_0^1 |p(t)| \, dt &= (1-0) \left| p\left(\frac{1}{2}\right) \right| = \frac{|p(0)|}{2} \quad \text{und} \\ \int_1^2 |p(t)| \, dt &= (2-1) \left| p\left(\frac{3}{2}\right) \right| = \frac{|p(2)|}{2}. \end{aligned}$$

Insgesamt gilt also

$$\begin{aligned}\|[v_{\text{CR}}]_F\|_{L^1(F)} &= \frac{|F|}{2} \left( \frac{|p(0)|}{2} + \frac{|p(2)|}{2} \right) = \frac{|F|}{4} (|p(0)| + |p(2)|) \\ &= \frac{|F|}{4} (|[v_{\text{CR}}]_F(P_1)| + |[v_{\text{CR}}]_F(P_2)|),\end{aligned}$$

beziehungsweise  $\|[v_{\text{CR}}]_F\|_{L^1(F)} = \frac{|F|}{4} (|v_{\text{CR}}(P_1)| + |v_{\text{CR}}(P_2)|)$  für eine Randkante  $F \in \mathcal{E}(\partial\Omega)$ .

Realisiert wird dies in der Methode

`./nonconforming/common/computeL1NormOfJump4s.m.`

Dabei werden für  $v_{\text{CR}} \in \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$  für jede Kante  $F \in \mathcal{E}$  mit  $F = \text{conv}\{P_1, P_2\}$  die Terme  $|[v_{\text{CR}}]_F(P_1)|$  und  $|[v_{\text{CR}}]_F(P_2)|$  berechnet in

`./nonconforming/common/computeAbsNodeJumps4s.m.`

### 6.5.3 Implementation der GLEB

`./nonconforming/common/computeGleb.m.`

### 6.5.4 Implementation des Refinement Indicators

### 6.5.5 Implementaition der exakten Energie Berechnung

## 7 Numerische Beispiele

Mache alle mögliche Sachen, prüfe Dinge die gelten sollen. Für ein Beispiel (z.B. CCs) fange mit basics an, also mal an einem Iterationsplot aufzeigen, dass die Energie tatsächlich von oben gegen was konvergiert und gehe dann weiter zu anderen Themen wie den Raten, GLEB etc.

Programm gibt Sprungtermsumme aus, z.B. stagnierend bei 11 auf allen Leveln, darauf vielleicht noch kurz in der Auswertung eingehen ‚man sieht, dass die Sprünge tatsächlich im nonkonformen Problem nicht minimiert werden oder so‘

Als erste Experimente für CCs Benchmark alle möglichen Parameter untersuchen (z.B. die Parameter im refinement indicator, GLEB, Abbruchkriterien etc) und danach begründen, warum für alle Experimente diese gewählt werden mit den Beobachtungen

Bei Beschreibung wie die Bilder der Einleitung zur Rauschunterdrückung entstanden sind auch erwähnen, dass  $f = \alpha g$  eine Rolle spiele usw.

Alle Experimentparameter die stets gleich gesetzt sind Eingangs einmal erwähnen, insbesondere degree4Integrate, was immer als 10 gesetzt wird, mit ähnlichem Kommentar wie PB auf S 30

### 7.1 Bilder als Input und Rauschverminderung

### 7.2 Alternative Kapitelstruktur: Anwendung am Beispiel der Benchmarks

#### 7.2.1 Experimente mit exakter Lösung: Benchmarks 'f01Bench' und 'f02' Bench

#### 7.2.2 Bilder als Input und Rauschverminderung: 'cameramanBench' und ...

Beschreibe hier nur das allgemeine Vorgehen und die mathematischen Hintergründe und schreibe die genutzten Beispiele an entsprechender Stelle in Numerische Beispiele oder so. Die ungenutzten Beispiele die trotzdem im Ordner liegen können in einem extra Abschnitt aufgezählt werden

Schema ist dann: Nach section Konstruktion einer exakten Lösung erhalten wir für die Wahl  $u$  mit  $\text{sgn } \text{bla}$  die rechte Seite  $f$ . Die Details bei bestimmten Konstruktionen, etwa „um  $H_2$  zu erhalten fordern wir noch“ ergänzen beim Vorstellen des entsprechenden Experimentes, hier nur das allgemeinste, das, was CC wirklich geschrieben hat. Wir wollen damit Experimente konstruieren um Aussagen in ... oder ... zu prüfen, entsprechend müssen wir noch fordern Da in den Kapiteln GLEB und  $\text{bla } u$  in  $H_{10}$  relevant wird, fordern wir weiterhin ... Professor Carstensen stellte folgende Konstruktion ... Um eine rechte Seite zu finden, zu der die exakte Lösung bekannt ist, wähle eine Funktion des Radius  $u \in H_0^1([0, 1])$  mit Träger im zweidimensionalen Einheitskreis. Insbesondere muss damit gelten  $u(1) = 0$  und  $u$  stetig. Die rechte Seite als Funktion des Radius  $f \in L^2([0, 1])$  ist



dann gegeben durch

$$f := \alpha u - \partial_r(\operatorname{sgn}(\partial_r u)) - \frac{\operatorname{sgn}(\partial_r u)}{r},$$

wobei für  $F \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  gilt  $\operatorname{sgn}(F) := \left\{ \frac{F}{|F|} \right\}$  und  $\operatorname{sgn}(0) \in B_1(0)$ . Damit außerdem gilt  $f \in H_0^1([0, 1])$ , was z.B. für GLEB relevant ist, muss also noch Stetigkeit von  $\operatorname{sgn}(\partial_r u)$  und  $\partial_r(\operatorname{sgn}(\partial_r u))$  verlangt werden und  $\partial_r(\operatorname{sgn}(\partial_r u(1))) = \operatorname{sgn}(\partial_r u(1)) = 0$ . Damit  $f$  in 0 definierbar ist, muss auch gelten  $\operatorname{sgn}(\partial_r u) \in o(r)$  für  $r \rightarrow 0$ .

Damit erhält man für die Funktion

$$u_1(r) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } 0 \leq r \leq \frac{1}{6}, \\ 1 + (6r - 1)^\beta, & \text{wenn } \frac{1}{6} \leq r \leq \frac{1}{3}, \\ 2, & \text{wenn } \frac{1}{3} \leq r \leq \frac{1}{2}, \\ 2\left(\frac{5}{2} - 3r\right)^\beta, & \text{wenn } \frac{1}{2} \leq r \leq \frac{5}{6}, \\ 0, & \text{wenn } \frac{5}{6} \leq r, \end{cases}$$

wobei  $\beta \geq 1/2$ , mit der Wahl

$$\operatorname{sgn}(\partial_r u_1(r)) = \begin{cases} 12r - 36r^2, & \text{wenn } 0 \leq r \leq \frac{1}{6}, \\ 1, & \text{wenn } \frac{1}{6} \leq r \leq \frac{1}{3}, \\ \cos(\pi(6r - 2)), & \text{wenn } \frac{1}{3} \leq r \leq \frac{1}{2}, \\ -1, & \text{wenn } \frac{1}{2} \leq r \leq \frac{5}{6}, \\ -\frac{1 + \cos(\pi(6r - 5))}{2}, & \text{wenn } \frac{5}{6} \leq r \leq 1, \end{cases}$$

die rechte Seite

$$f_1(r) := \begin{cases} \alpha - 12(2 - 9r), & \text{wenn } 0 \leq r \leq \frac{1}{6}, \\ \alpha(1 + (6r - 1)^\beta) - \frac{1}{r}, & \text{wenn } \frac{1}{6} \leq r \leq \frac{1}{3}, \\ 2\alpha + 6\pi \sin(\pi(6r - 2)) - \frac{1}{r} \cos(\pi(6r - 2)), & \text{wenn } \frac{1}{3} \leq r \leq \frac{1}{2}, \\ 2\alpha\left(\frac{5}{2} - 3r\right)^\beta + \frac{1}{r}, & \text{wenn } \frac{1}{2} \leq r \leq \frac{5}{6}, \\ -3\pi \sin(\pi(6r - 5)) + \frac{1 + \cos(\pi(6r - 5))}{2r}, & \text{wenn } \frac{5}{6} \leq r \leq 1. \end{cases}$$

Für die Funktion

$$u_2(r) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } 0 \leq r \leq \frac{1-\beta}{2}, \\ -\frac{1}{\beta}r + \frac{1+\beta}{2\beta}, & \text{wenn } \frac{1-\beta}{2} \leq r \leq \frac{1+\beta}{2}, \\ 0, & \text{wenn } \frac{1+\beta}{2} \leq r, \end{cases}$$

erhält man mit der Wahl

$$\operatorname{sgn}(\partial_r u_2(r)) := \begin{cases} \frac{4}{1-\beta}r \left( \frac{1}{1-\beta}r - 1 \right), & \text{wenn } 0 \leq r \leq \frac{1-\beta}{2}, \\ -1, & \text{wenn } \frac{1-\beta}{2} \leq r \leq \frac{1+\beta}{2}, \\ \frac{4}{(\beta-1)^3} (4r^3 - 3(\beta+3)r^2 + 6(\beta+1)r - 3\beta - 1), & \text{wenn } \frac{1+\beta}{2} \leq r \leq 1, \end{cases}$$

die rechte Seite

$$f_2(r) := \begin{cases} \alpha - \frac{4}{1-\beta} \left( \frac{3}{1-\beta}r - 2 \right), & \text{wenn } 0 \leq r \leq \frac{1-\beta}{2}, \\ -\frac{\alpha}{\beta} \left( r - \frac{1+\beta}{2} \right) + \frac{1}{r}, & \text{wenn } \frac{1-\beta}{2} \leq r \leq \frac{1+\beta}{2}, \\ \frac{-4}{(\beta-1)^3} \left( 16r^2 - 9(\beta+3)r + 12(\beta+1) - \frac{3\beta+1}{r} \right), & \text{wenn } \frac{1+\beta}{2} \leq r \leq 1. \end{cases}$$

## 7 Numerische Beispiele

Es folgen zwei Beispiele mit exakter Lösung  $u_3 = u_4 \in H_0^2((0, 1)^2)$ , gegeben durch

$$u_3(r) = u_4(r) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } 0 \leq r \leq \frac{1}{3}, \\ 54r^3 - 81r^2 + 36r - 4, & \text{wenn } \frac{1}{3} \leq r \leq \frac{2}{3}, \\ 0, & \text{wenn } \frac{2}{3} \leq r \leq 1. \end{cases}$$

Mit der Wahl

$$\begin{aligned} & \text{sgn}(\partial_r u_3(r)) \\ &:= \begin{cases} 54r^3 - 27r^2, & \text{wenn } 0 \leq r \leq \frac{1}{3}, \\ -1, & \text{wenn } \frac{1}{3} \leq r \leq \frac{2}{3}, \\ -54r^3 + 135r^2 - 108r + 27, & \text{wenn } \frac{2}{3} \leq r \leq 1, \end{cases} \end{aligned}$$

erhalten wir die rechte Seite

$$f_3(r) := \begin{cases} \alpha - 216r^2 + 81r, & \text{wenn } 0 \leq r \leq \frac{1}{3}, \\ \alpha(54r^3 - 81r^2 + 36r - 4) + \frac{1}{r}, & \text{wenn } \frac{1}{3} \leq r \leq \frac{2}{3}, \\ 216r^2 - 405r + 216 - \frac{27}{r}, & \text{wenn } \frac{2}{3} \leq r \leq 1, \end{cases}$$

für die gilt  $f_3 \in H_0^1$  und mit der Wahl

$$\begin{aligned} & \text{sgn}(\partial_r u_4(r)) \\ &:= \begin{cases} -1458r^5 + 1215r^4 - 270r^3, & \text{wenn } 0 \leq r \leq \frac{1}{3}, \\ -1, & \text{wenn } \frac{1}{3} \leq r \leq \frac{2}{3}, \\ -243r^4 + 756r^3 - 864r^2 + 432r - 81, & \text{wenn } \frac{2}{3} \leq r \leq 1, \end{cases} \end{aligned}$$

erhalten wir die rechte Seite

$$f_4(r) := \begin{cases} \alpha + 8748r^4 - 6075r^3 + 1080r^2, & \text{wenn } 0 \leq r \leq \frac{1}{3}, \\ \alpha(54r^3 - 81r^2 + 36r - 4) + \frac{1}{r}, & \text{wenn } \frac{1}{3} \leq r \leq \frac{2}{3}, \\ 1215r^3 - 3024r^2 + 2592r - 864 + \frac{81}{r}, & \text{wenn } \frac{2}{3} \leq r \leq 1, \end{cases}$$

für die gilt  $f_4 \in H_0^2$ .

Damit können Experimente durchgeführt werden bei denen `exactSolutionKnown = true` gesetzt werden kann und entsprechend auch der  $L^2$ -Fehler berechnet wird.

Soll nun auch die Differenz der exakten Energie mit der garantierten unteren Energie Schranke (GLEB) berechnet werden, dann werden die stückweisen Gradienten der exakten Lösung und der rechten Seite benötigt.

Dabei gelten folgende Ableitungsregeln für die Ableitungen einer Funktion  $g$ , wenn man ihr Argument  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  in Polarkoordinaten mit Länge  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$  und Winkel  $\varphi = \text{atan2}(x_2, x_1)$ , wobei

$$\text{atan2}(x_2, x_1) := \begin{cases} \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right), & \text{wenn } x_1 > 0, \\ \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right) + \pi, & \text{wenn } x_1 < 0, x_2 \geq 0, \\ \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right) - \pi, & \text{wenn } x_1 < 0, x_2 < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{wenn } x_1 = 0, x_2 > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{wenn } x_1 = 0, x_2 < 0, \\ \text{undefiniert}, & \text{wenn } x_1 = x_2 = 0, \end{cases}$$

auffasst,

$$\begin{aligned}\partial_{x_1} &= \cos(\varphi)\partial_r - \frac{1}{r}\sin(\varphi)\partial_\varphi, \\ \partial_{x_2} &= \sin(\varphi)\partial_r - \frac{1}{r}\cos(\varphi)\partial_\varphi.\end{aligned}$$

Ist  $g$  vom Winkel  $\varphi$  unabhängig, so ergibt sich

$$\nabla_{(x_1, x_2)}g = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))\partial_r g.$$

Unter Beachtung der trigonometrischen Zusammenhänge

$$\begin{aligned}\sin(\arctan(y)) &= \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}, \\ \cos(\arctan(y)) &= \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\end{aligned}$$

ergibt sich

$$(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) = (x_1, x_2)\frac{1}{r}$$

und damit

$$\nabla_{(x_1, x_2)}g = (x_1, x_2)\frac{\partial_r g}{r},$$

es muss also nur  $\partial_r g$  bestimmt werden.

Die entsprechenden Ableitungen lauten

$$\begin{aligned}
\partial_r f_1(r) &= \begin{cases} 108, & \text{für } r \in [0, \frac{1}{6}], \\ 6\alpha\beta(6r-1)^{\beta-1} + \frac{1}{r^2}, & \text{für } r \in [\frac{1}{6}, \frac{1}{3}], \\ (36\pi^2 + \frac{1}{r^2}) \cos(\pi(6r-2)) + \frac{6\pi}{r} \sin(\pi(6r-2)), & \text{für } r \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}], \\ -\left(6\alpha\beta\left(\frac{5}{2}-3r\right)^{\beta-1} + \frac{1}{r^2}\right), & \text{für } r \in [\frac{1}{2}, \frac{5}{6}], \\ -\left((18\pi^2 + \frac{1}{2r^2}) \cos(\pi(6r-5)) + \frac{1}{2r^2} + \frac{3\pi}{r} \sin(\pi(6r-5))\right), & \text{für } r \in [\frac{5}{6}, 1], \end{cases} \\
\partial_r u_1(r) &= \begin{cases} 0, & \text{wenn } 0 \leq r \leq \frac{1}{6}, \\ 6\beta(6r-1)^{\beta-1}, & \text{wenn } \frac{1}{6} \leq r \leq \frac{1}{3}, \\ 0, & \text{wenn } \frac{1}{3} \leq r \leq \frac{1}{2}, \\ -6\beta\left(\frac{5}{2}-3r\right)^{\beta-1}, & \text{wenn } \frac{1}{2} \leq r \leq \frac{5}{6}, \\ 0, & \text{wenn } \frac{5}{6} \leq r, \end{cases} \\
\partial_r f_2(r) &= \begin{cases} -\frac{12}{(1-\beta)^2}, & \text{wenn } 0 \leq r \leq \frac{1-\beta}{2}, \\ -\frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{r^2}, & \text{wenn } \frac{1-\beta}{2} \leq r \leq \frac{1+\beta}{2}, \\ -\frac{4}{(1-\beta)^3} \left(32r - 9(\beta+3) + \frac{3\beta+1}{r^2}\right), & \text{wenn } \frac{1+\beta}{2} \leq r \leq 1, \end{cases} \\
\partial_r u_2(r) &= \begin{cases} 0, & \text{wenn } 0 \leq r \leq \frac{1-\beta}{2}, \\ -\frac{1}{\beta}, & \text{wenn } \frac{1-\beta}{2} \leq r \leq \frac{1+\beta}{2}, \\ 0, & \text{wenn } \frac{1+\beta}{2} \leq r, \end{cases} \\
\partial_r f_3(r) &= \begin{cases} -432r + 81, & \text{wenn } 0 \leq r \leq \frac{1}{3}, \\ \alpha(162r^2 - 162r + 36) - \frac{1}{r^2}, & \text{wenn } \frac{1}{3} \leq r \leq \frac{2}{3}, \\ 432r - 405 + \frac{27}{r^2}, & \text{wenn } \frac{2}{3} \leq r \leq 1, \end{cases} \\
\partial_r f_4(r) &= \begin{cases} 34992r^3 - 18225r^2 + 2160r, & \text{wenn } 0 \leq r \leq \frac{1}{3}, \\ \alpha(162r^2 - 162r + 36) - \frac{1}{r^2}, & \text{wenn } \frac{1}{3} \leq r \leq \frac{2}{3}, \\ 3645r^2 - 6048r + 2592 - 864 - \frac{81}{r^2}, & \text{wenn } \frac{2}{3} \leq r \leq 1, \end{cases} \\
\partial_r u_{3,4}(r) &= \begin{cases} 0, & \text{wenn } 0 \leq r \leq \frac{1}{3}, \\ 162r^2 - 162r + 36, & \text{wenn } \frac{1}{3} \leq r \leq \frac{2}{3}, \\ 0, & \text{wenn } \frac{2}{3} \leq r \leq 1, \end{cases}
\end{aligned}$$

Mit diesen Informationen kann mit `computeExactEnergyBV.m` die exakte Energie berechnet werden und somit durch eintragen der exakten Energie in die Variable `exactEnergy` im Benchmark und setzen der Flag `useExactEnergy=true` das Experiment durch anschließendes Ausführen von `startAlgorithmCR.m` gestartet werden.

## 8 Auswertung

In diesen Abschnitt werten wir die in Kapitel 7 erhaltenen Ergebnisse aus.

# Literatur

- [ABM14] Hedy Attouch, Giuseppe Buttazzo und Gérard Michaille. *Variational Analysis in Sobolev and BV Spaces. Applications to PDEs and Optimization*. Second Edition. Bd. 17. MOS-SIAM Series on Optimization. Philadelphia: Society for Industrial und Applied Mathematics, Mathematical Optimization Society, 2014. ISBN: 978-1-611973-47-1.
- [AK06] Gilles Aubert und Pierre Kornprobst. *Mathematical Problems in Image Processing. Partial Differential Equations and the Calculus of Variations*. Second Edition. Bd. 147. Applied Mathematical Sciences. New York: Springer, 2006. ISBN: 0-387-32200-0.
- [Bar12] Sören Bartels. „Total variation minimization with finite elements: convergence and iterative solution“. In: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 50.3 (2012), S. 1162–1180. URL: <https://doi.org/10.1137/11083277X>.
- [Bar15a] Sören Bartels. „Error control and adaptivity for a variational model problem defined on functions of bounded variation“. In: *Mathematics of Computation* 84.293 (2015), S. 1217–1240. URL: <https://doi.org/10.1090/S0025-5718-2014-02893-7>.
- [Bar15b] Sören Bartels. *Numerical Methods for Nonlinear Partial Differential Equations*. Bd. 47. Springer Series in Computational Mathematics. Springer International Publishing, 2015. ISBN: 978-3-319-13796-4. DOI: 10.1007/978-3-319-13797-1.
- [Bra98] Andrea Braides. *Approximation of free-discontinuity problems*. Bd. 1694. Lecture Notes in Mathematics. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1998. ISBN: 3-540-64771-6. URL: <https://doi.org/10.1007/BFb0097344>.
- [Car+10] Carsten Carstensen u. a. „AFEM-Dokumentation“. lokal verfügbar, 2010.
- [Car09a] Carsten Carstensen. *AFEM-Softwarepaket der Arbeitsgruppe Numerische Analysis*. Institut für Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin, 2009.
- [Car09b] Carsten Carstensen. „Yonsei Lectures at the WCU Department Computational Science and Engineering on Finite Element Method“. lokal verfügbar, 2009.
- [CGR12] Carsten Carstensen, Joscha Gedicke und Donsub Rim. „Explicit error estimates for Courant, Crouzeix-Raviart and Raviart-Thomas finite element methods“. In: *Journal of Computational Mathematics* 30.4 (2012), S. 337–353. ISSN: 0254-9409. DOI: 10.4208/jcm.1108-m3677. URL: <https://doi.org/10.4208/jcm.1108-m3677>.
- [CP10] Antonin Chambolle und Thomas Pock. „A First-Order Primal-Dual Algorithm for Convex Problems with Applications to Imaging“. In: *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 40 (2010), S. 120–145. ISSN: 0924-9907. DOI: 10.1007/s10851-010-0251-1. URL: <https://doi.org/10.1007/s10851-010-0251-1>.
- [Dac89] Bernard Dacorogna. *Direct Methods in the Calculus of Variations*. Bd. 78. Applied Mathematical Sciences. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1989. ISBN: 978-3-642-51442-5.

- [EG92] Lawrence C. Evans und Ronald F. Gariepy. *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. CRC Press, 1992. ISBN: 0-8493-7157-0.
- [Get12] Pascal Getreuer. „Rudin-Osher-Fatemi Total Variation Denoising using Split Bregman“. In: *Image Processing On Line* 2 (2012), S. 74–95. URL: <https://doi.org/10.5201/ipol.2012.g-tvd>.
- [Roc70] R. Tyrrell Rockafellar. *Convex Analysis*. New Jersey: Princeton University Press, 1970. ISBN: 0-691-08069-0.
- [ROF92] Leonid I. Rudin, Stanley Osher und Emad Fatemi. „Nonlinear total variation based noise removal algorithms“. In: Bd. 60. 1-4. 1992, S. 259–268. DOI: 10.1016/0167-2789(92)90242-F. URL: [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(92\)90242-F](https://doi.org/10.1016/0167-2789(92)90242-F).
- [Zei85] Eberhard Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications. III: Variational Methods and Optimization*. New York: Springer Science+Business Media, LLC, 1985. ISBN: 978-1-4612-9529-7.
- [Zei86] Eberhard Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications. I: Fixed-Point Theorems*. New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo: Springer-Verlag, 1986. ISBN: 0-387-90914-1.
- [Zei90a] Eberhard Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications. II/A: Linear Monotone Operators*. New York: Springer Science+Business Media, LLC, 1990. ISBN: 978-1-4612-6971-7.
- [Zei90b] Eberhard Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications. II/B: Nonlinear Monotone Operators*. New York: Springer Science+Business Media, LLC, 1990. ISBN: 978-1-4612-6969-4.

# Selbständigkeitserklärung

Ich erkläre, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und noch nicht für andere Prüfungen eingereicht habe. Sämtliche Quellen, einschließlich Internetquellen, die unverändert oder abgewandelt wiedergegeben werden, insbesondere Quellen für Texte, Grafiken, Tabellen und Bilder, sind als solche kenntlich gemacht. Mir ist bekannt, dass bei Verstößen gegen diese Grundsätze ein Verfahren wegen Täuschungsversuchs bzw. Täuschung eingeleitet wird.

Berlin, den 14. April 2021,