Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät
Institut für Mathematik

Die Crouzeix-Raviart Finite-Elemente Methode für eine Minimierung im Raum der Funktionen von beschränkter Variation

Enrico Bergmann

Version: 30. Januar 2021

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung

todo todo todo, vielleicht auch eher for dem Inhaltsverzeichnis?

Konvergenz im Fließtext nicht mit overset sondern das n to infty dahinter im Fließtext

Konvergenz Index überprüfen, n sollte nicht benutzt werden, da das schon die Dimension ist. Das heißt n zu k ändern und k zu j oder vielleicht, da umkomplizierter, d für die Dimension nutzen. Das gilt insbesondere für das ‚kontinuierliche Problem' Kapitel

ff. nicht benutzen, falls das nötig sein sollte, lieber die Seitenspanne angeben

Zeidler Pro Tipp S. 637 sind die Abkürzungen (B Space etc) erklärt und alle Symbole

1. Einleitung

In der Bildverarbeitung kann ein gegebenes Signal häufig nur durch eine unstetige Funktion dargestellt werden. Sobolev-Funktionen, obwohl im Allgemeinen nicht unbedingt stetig, lassen die oftmals benötigten Sprünge über ein-kodimensionale Mengen nicht zu. Die Menge der Funktionen von beschränkter Variation ist eine echte Obermenge des Sobolev-Raums der einmal schwach differenzierbaren Funktionen und hat sich als geeignet für diese und weitere Anwendungen erwiesen (cf. [ABM14, S. 398; AK06, S. 42; Bar15b, S. 297; Bra98, S. 1 f.]).

Quelle für Beispiel für unstetige Funktionen sind nicht immer Sobolev?

Genauer sein, also schon Ω und alles definieren? soll man die Sachen zitieren, wenn die Formulierung davor von diesen Werken inspiriert ist? Sollen noch Kapitel angegeben werden?

Eine mögliche Problemstellung in der Bildverarbeitung ist die Rauschunterdrückung, das heißt der Versuch unerwünschtes Rauschen in einem Signal zu verringern. Das ROF-Modell ist ein Modell-Problem dafür und sucht eine Funtion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ die das Funktional

$$I(u) := |u|_{\mathrm{BV}(\Omega)} + \frac{\alpha}{2}\|u - g\|^2_{L^2(\Omega)}$$

minimiert, wobei $g \in L^2(\Omega)$ das gegebene verrauschte Bild beschreibt und $\alpha \in \mathbb{R}_+$ ein Parameter ist, mit dem gewichtet werden kann, wie stark Oszillationen minimiert werden sollen, beschrieben durch den Term $|u|_{\mathrm{BV}(\Omega)}$ (der aber Unstetigkeiten zulässt) und wie nahe die Lösung u an der Eingabe g liegen soll, beschrieben durch den Term $\|u - g\|^2_{L^2(\Omega)}$. (tradeoff between regularization and data fitting)

Die Wahl von einem zu kleinen α führt zu einer zu glatten, verwaschen aussehenden Lösung, zu sehen zum Beispiel in den Abbildungen 1.1c und 1.1d, während die Wahl von einem zu großen α das Rauschen kaum verringert, zu sehen zum Beispiel in den Abbildungen 1.1f und 1.1g. Für weitere Details und Referenzen zur Rauschunterdrückung und auch zu Möglichkeiten α gegebenfalls zu bestimmen, siehe [Get12].

Benannt ist das ROF-Modell nach Rudin, Osher und Fatemi, die dieses Problem 1992 in [ROF92] vorschlugen (cf. [Bar15a, S. 1217; CP10, S. 132; Get12, S. 74 f.]).

Vielleicht auch den Press Release zum Schwarzen Loch Bild erwähnen oder ist das zu random?

zitiere Courant Methode

In [Bar15b] das ROF MOdell mit Courant Elementen approximiert und den Algorithmus basierend auf (Quelle) anwendet. Wir betrachten folgende leicht andere Formuliereung des ROF Modell (Problem) und nutzen die CR FEM um die Lösung des nichtkonformen Problem (Problem) zu bestimmen.

Bemerkung 1.1. In [Bar15b, Kapitel 10.1.3] wird Problem 3.1 für ein gegebenes $g \in L^2(\Omega)$ formuliert mit dem Funktional

$$I(v) := |v|_{\mathrm{BV}(\Omega)} + \frac{\alpha}{2}\int_\Omega (v - g)^2 \,\mathrm{d}x$$

für $v \in \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$.

Nun wählen wir $f = \alpha g$. Dann gilt $I(v) = E(v) - \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} + \frac{\alpha}{2}\|g\|^2_{L^2(\Omega)}$ für alle $v \in \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$. Da der Term $\frac{\alpha}{2}\|g\|^2_{L^2(\Omega)}$ konstant ist, haben die Funktionale E und I somit die gleichen Minimierer in $\left\{v \in \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega) \mid \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} = 0\right\}$.

In dieser Arbeit werden in Kapitel 2 (todo refs machen für Kapitel und nutzen) zunächst die benötigten theoretischen Grundlangen zur Variationsrechnung und Optimierung in Banachräumen als auch die relevanten Eigenschaften des Raumes der Funktionen von beschränkter Variation (ggf. ergänzen, falls noch mehr passiert irgendwann.

In Kapitel 3 folgt die Formulierung des konitnuierlichen Problems und des Existenz- und Eindeutigkeitsbeweis für Minimiert des Problems. Außerdem wird die starke Konverxität des Energiefunktinals gezeigt für die später numerische Auswerung.

Die Diskretisierung der nichtkonformen (sic?) Formulierung des Problems und der Beweis der Existenz und Eindeutigkeit von Minimierern des diskreten Problems geschieht anschließend in Kapitel 4.

Kapitel 5 beschreibt den Algorithmus und beweist Konvergenz der Iterate.

Kapitel 6 Implementierung und erklärt, wie das Programm genutzt werden kann. Insbesondere wird auch erläutert, wie die Ergebnisse, die in Abbildung 1.1 zu sehen sind, reproduziert werden können.

Kapitel 7 nutzt das Programm für Experimente, die dort ausgewertet werden.

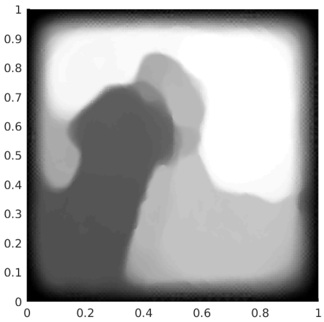
Experimente länger rechnen und vielleicht 9 Wahlen für alpha mit einem ernsthaften Versuch, ein gut aussehendes entrauschtes Bild zu bekommen

diese Triangulierungs Figure lieber in den Experimente und hier (und zwar ausschließlich hier) die verrauschungsbeispiele bringen

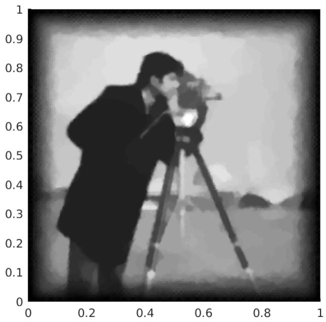
(a) `https://homepages.cae.wisc.edu/~ece533/images/cameraman.tif`

(b) SNR = 10

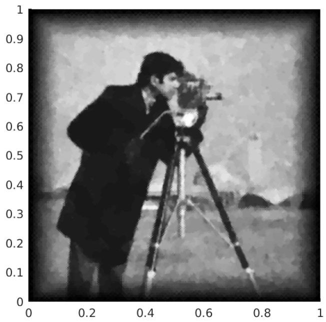
(c) $\alpha = 100$

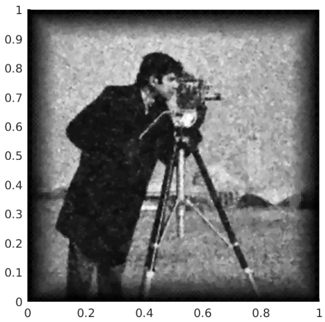


(d) $\alpha = 1000$

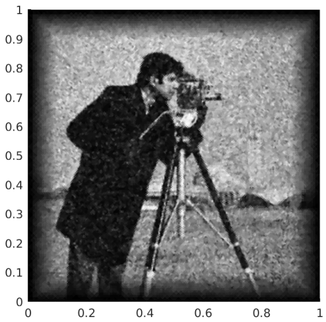


(e) $\alpha = 2500$





(f) $\alpha = 05000$



(g) $\alpha = 10000$

Abbildung 1.1.: Originalbild (a) und Originalbild mit additiven weißen gaußschen Rauschen (b) mit einem Signal-Rausch-Verhältnis (eng. signal-to-noise ratio, SNR) von 10, jeweils mit nachträglich hinzugefügten graduellen Übergang zu schwarzen Rand, was Nullranddaten entspricht und drei Ergebnisse (c)-(g) des adaptiven Algorithmus mit verschiedenen Werten von α

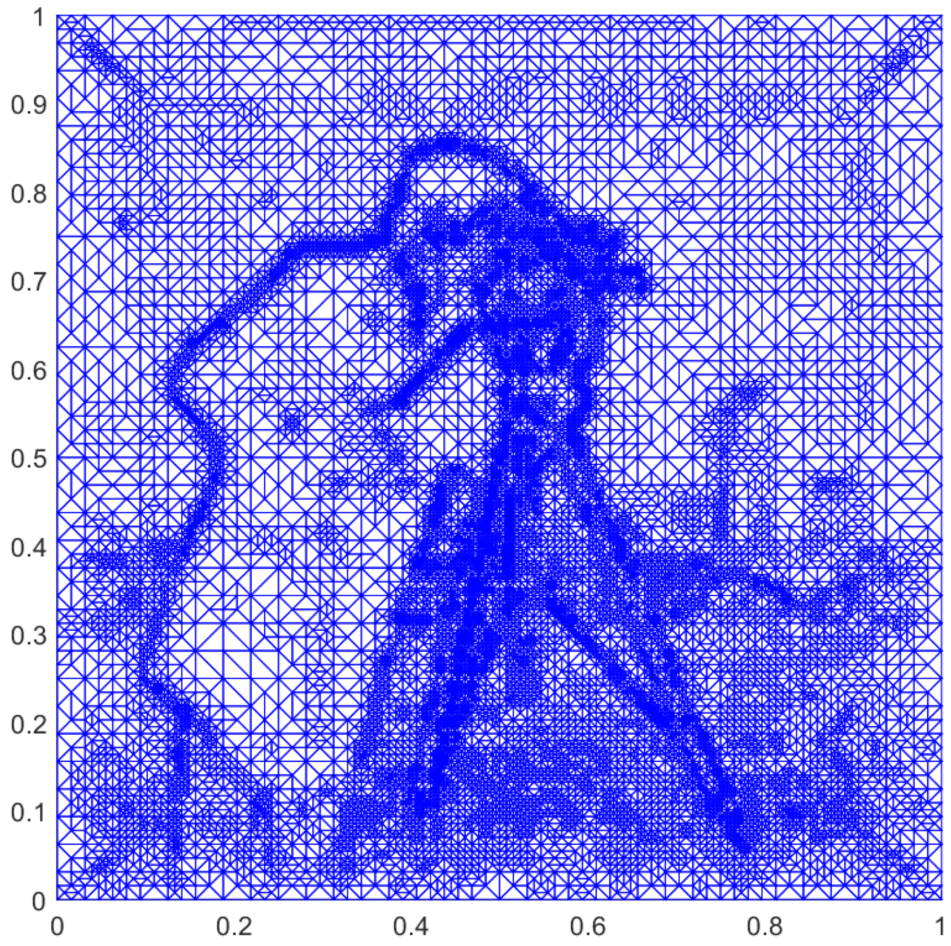


Abbildung 1.2.: Triangulierung mit 40300 Freiheitsgraden erzeugt vom adaptiven Algorithmus für rauschfreien Input

2. Theoretische Grundlagen

2.1. Notation

TODO usw alle Notationen einführen, die in der ganzen Arbeit gelten, vergleiche Bringmann 2.1 Einleitung. Da wir aber erst sehr allgemein sind bzw hier für Subdiffs und Variationsrechnung etc zwischen Räumen umhersprigen, dieses Kapitel doch lieber nicht machen sondern diese Themen (eben theoretische Grundlagen) abarbeiten und dann immer weiter einschränken Kapitel weise (continuous Problem schränkt Omega ein, dann discrete schränkt zu 2D ein und führt CR ein, usw.) Notation hier also mglw einstampfen und on the fly machen

FRAGE Dann zB CR Notation erst im entsprechenden Kapitel einführen oder auch das schon hier? Oder hier nur ABSOLUTE Grundlagen, extrem basic, und alles andere dann on the fly?

TODO nur die Sachen rausschreiben/zusammentragen/zitieren (um später Theoreme und Gleichungen zitieren zu können statt Bücher) die auch wirklich gebraucht werden später in Beweisen. Insbesondere am Ende nochmal durchgucken, was wirklich gebraucht wurde und ungebrauchtes und/oder uninteressanter und/oder unwichtiges rauswerfen

2.2. Benötigte Begriffe der Variationsrechnung in Banachräumen

im Zeidler lokal konvex Raum. Das irgendwie noch ausdrücken und die Aussage, dass B-spaces lokal konvex sind, einmal rechtzeitig erwähnen.

Die folgenden Aussagen basieren auf [Zei85, S. 189-192]. Wir betrachten einen Banachraum X, eine Teilmenge $V \subseteq X$ und ein Funktional $F : V \to \mathbb{R}$. Sei u ein innerer Punkt von V. Außerdem definieren wir für $h \in X$ die Funktion $\varphi_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $\varphi_h(t) := F(u + th)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Definition 2.1 (n-te Variation)**.** Die n-te Variation von F an der Stelle u in Richtung $h \in X$ ist

$$\delta^n F(u; h) := \varphi_h^{(n)}(0) = \left.\frac{d^n F(u + th)}{dt^n}\right|_{t=0},$$

falls $\varphi_h^{(n)}(0)$ existiert. Wir schreiben δ für δ^1.

Definition 2.2 (Gâteaux- und Fréchet-Differential)**.** F heißt Gâteaux-differenzierbar [redacted] an der Stelle u, falls ein Funktional $F'(u) \in X^*$ existiert mit

$$\lim_{t \to 0} \frac{F(u + th) - F(u)}{t} = \langle F'(u), h \rangle \quad \text{für alle } h \in X.$$

$F'(u)$ heißt dann Gâteaux-Differential von F an der Stelle u.

F heißt Fréchet-differenzierbar an der Stelle u, falls ein Funktional $F'(u) \in X^*$ existiert, sodass

$$\lim_{\|h\|_X \to 0} \frac{|F(u+th) - F(u) - \langle F'(u), h\rangle|}{\|h\|_X} = 0.$$

$F'(u)$ heißt dann Fréchet-Differential von F an der Stelle u. Das Fréchet-Differential von F an der Stelle u in Richtung $h \in X$ ist definiert durch $dF(u;h) := \langle F'(u), h\rangle$.

Die wichtigsten Eigenschaften sind noch einmal in folgender Bemerkung zusammengefasst.

Bemerkung 2.3.

- Existiert das Fréchet-Differential $F'(u)$ von F an der Stelle u, so ist $F'(u)$ auch das Gâteaux-Differential von F an der Stelle u und es gilt

$$\delta F(u;h) = dF(u;h) = \langle F'(u), h\rangle \quad \text{für alle } h \in X.$$

Damit können wir eine wichtige Aussage der Variationsrechnung formulieren, basierend auf [Zei85, S. 193ff., Theorem 40.A, Theorem 40.B].

Theorem 2.4 (Notwendige Optimalitätsbedingung erster Ordnung)**.** *Sei $u \in \mathrm{int}(V)$ lokaler Minimierer von F, das heißt es existiere eine Umgebung*

Definiere Umgebung so wie in Zeilder 'neigborhood', [Zei86, S. 751, (5)] (also es gibt eine offene Menge in der Umgebung, die den Punkt enthällt

U von u, so dass $F(v) \geqslant F(u)$ für alle $v \in U$. Dann gilt für alle $h \in X$, dass $\delta F(u;h) = 0$, falls diese Variation für alle $h \in X$ existiert, beziehungsweise $F'(u) = 0$, falls $F'(u)$ als Gâteaux- oder Fréchet-Differential existiert.

2.3. Subdifferential

In diesem Abschnitt trage ich die in dieser Arbeit benötigten Eigenschaften des Subdifferentials eines Funktionals $F : X \to [-\infty, \infty]$ auf einem Banachraum $(X, \|\cdot\|_X)$ und die dafür benötigten Begriffe zusammen.

Zunächst eine grundlegende Definition.

Definition 2.5 ([Zei85, S. 245, Definition 42.1])**.** Sei X ein Vektorraum, $M \subseteq X$ und $F : M \to \mathbb{R}$.

Dann heißt die Menge M konvex, wenn für alle $u, v \in M$ und alle $t \in [0,1]$ gilt $(1-t)u + tv \in M$.

Ist M konvex, so heißt F konvex, falls für alle $u, v \in M$ und alle $t \in [0,1]$ gilt $F\big((1-t)u + tv\big) \leqslant (1-t)F(u) + tF(v)$.

In [Zei85] werden einige der folgenden Aussagen auf reellen lokal konvexen Räumen X formuliert. Da nach [Zei86, S. 781, (43)] alle Banachräume (in [Zei86] und [Zei85] genannt „B-spaces“, [Zei86, S. 786]) lokal konvex sind und in dieser Arbeit die Aussagen nur auf Banachräumen benötigt werden, beschränke ich die folgenden Aussagen, falls nicht anders spezifiziert, wie folgt. Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein reeller Banachraum und $F : X \to [-\infty, \infty]$ ein Funktional auf X.

Definition 2.6 (Subdifferential, [Zei85, S. 385, Definition 47.8])**.** Für $u \in X$ mit $F(u) \neq \pm\infty$ heißt

$$\partial F(u) \coloneqq \{u^* \in X^* \mid \forall v \in X \quad F(v) \geqslant F(u) + \langle u^*, v - u\rangle\} \tag{2.1}$$

Subdifferential von F an der Stelle u. Für $F(u) = \pm\infty$ definiere $\partial F(u) \coloneqq \emptyset$.
Ein Element $u^* \in \partial F(u)$ heißt Subgradient von F an der Stelle u.

Theorem 2.7 ([Zei85, S. 387, Proposition 47.12])**.** *Falls $F : X \to (-\infty, \infty]$ mit $F \not\equiv \infty$, gilt $F(u) = \inf_{v \in X} F(v)$ genau dann, wenn $0 \in \partial F(u)$.*

Theorem 2.8 ([Zei85, S. 387, Proposition 47.13])**.** *Falls F konvex ist und Gâteaux-differenzierbar (in [Zei86] und [Zei85] genannt „G-differentiable“, [Zei86, S. 135f.]) an der Stelle $u \in X$ mit Gâteaux-Differential $F'(u)$, gilt $\partial F(u) = \{F'(u)\}$.*

TODO checke Notation und Definition mit der Gateaux/Frechet-differenzierbarkeit, für die ich mich entschieden habe (d.h. meint Zeidler das gleiche
Bemerke, die Prop liefert noch wann das umgekehrte gilt, aber nur aufschreiben, wenn das mal benötigt wird in dieser Arbeit
nutze vielleicht Zeidler I als Quelle für die Differentiale und vielleicht auch Notation?

Das folgende Theorem folgt aus [Zei85, S. 389, Theorem 47.B] unter Beachtung der Tatsache, dass die Addition von Funktionalen $F_1, F_2, \ldots, F_n : X \to (-\infty, \infty]$ und die Addition von Menge in X^* kommutieren.

Theorem 2.9. *Seien für $n \geqslant 2$ die Funktionale $F_1, F_2, \ldots, F_n : X \to (-\infty, \infty]$ konvex und es existiere ein $u_0 \in X$ und ein $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ mit $F_k(u_0) < \infty$ für alle $k \in \{1, 2 \ldots, n\}$, sodass für alle $k \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{j\}$ das Funktional F_k stetig an der Stelle u_0 ist.*
Dann gilt

$$\partial(F_1 + F_2 + \ldots + F_n)(u) = \partial F_1(u) + \partial F_2(u) + \ldots + \partial F_n(u) \quad \text{für alle } u \in X.$$

Theorem 2.10 ([Zei85, S. 396f., Definition 47.15, Theorem 47.F])**.** *Sei $F : X \to (-\infty, \infty]$ konvex und unterhalbstetig mit $F \not\equiv \infty$.*
Dann ist $\partial F(\,\bullet\,)$ monoton, das heißt

$$\langle u^* - v^*, u - v\rangle \geqslant 0 \quad \text{für alle } u, v \in X, u^* \in \partial F(u), v^* \in \partial F(v).$$

2.4. Funktionen Beschränkter Variation

Dieser Abschnitt präsentiert die für diese Arbeite benötigten Aussagen über Funktionen beschrankter Variation und basiert auf Kapitel 10 in [ABM14].

Schreibe vlt noch sowas wie ‚Für weitere Aussagen und Details zu BV Funktionen und den maßtheoretischen Grundlagen dafür siehe [EG92, Braides, ABM14]'

Dabei sei Ω eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Der Raum aller $\mathbb{R}^n$-wertigen Borelmaße wird bezeichnet mit $M(\Omega; \mathbb{R}^n)$ und ist nach Riesz identifizierbar mit dem Dualraum von $C_0(\Omega; \mathbb{R}^n)$ ausgestattet mit der Norm $\|\phi\|_\infty \coloneqq (\sum_{j=1}^n \sup_{x \in \Omega} |\phi_j(x)|^2)^{1/2}$ für $\phi \in C_0(\Omega; \mathbb{R}^n)$.

Die folgende Definition basiert auf [ABM14, S. 393 f.].

Wenn einmal gesagt wurde worauf diese Section basiert, sind dann noch Zitate wie dieses notwendig? Ich würde einfach nur noch zitieren, wenn eine Aussage mal aus einer anderen Quelle kommt.

Definition 2.11 (Funktionen beschränkter Variation)**.** Eine Funktion $u \in L^1(\Omega)$ ist von beschränkter Variation, wenn ihre distributionelle Ableitung Du ein Element in $M(\Omega; \mathbb{R}^n)$ definiert. Das ist äquivalent zu der Bedingung

$$|u|_{\mathrm{BV}(\Omega)} := \sup_{\substack{\phi \in C_C^1(\Omega;\mathbb{R}^n) \\ \|\phi\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant 1}} \int_\Omega u \operatorname{div}(\phi) \, \mathrm{d}x < \infty. \tag{2.2}$$

Durch $|\bullet|_{\mathrm{BV}(\Omega)}$ ist eine Seminorm auf $\mathrm{BV}(\Omega)$ gegeben.

Der Raum aller Funktionen beschränkter Variation $\mathrm{BV}(\Omega)$ ist ausgestattet mit der Norm

$$\|u\|_{\mathrm{BV}(\Omega)} := \|u\|_{L^1(\Omega)} + |u|_{\mathrm{BV}(\Omega)}$$

für $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$.

Nach [ABM14, S. 395, Theorem 10.1.1.] ist $(\mathrm{BV}(\Omega), \|\bullet\|_{\mathrm{BV}(\Omega)})$ ein Banachraum.

Bemerkung 2.12. Es gilt $W^{1,1}(\Omega) \subset \mathrm{BV}(\Omega)$ und $\|u\|_{\mathrm{BV}(\Omega)} = \|u\|_{W^{1,1}(\Omega)}$ für alle $u \in W^{1,1}(\Omega)$. ([ABM14, S. 394])

Definition 2.13. Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{BV}(\Omega)$ und sei $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$ mit $u_n \to u$ in $L^1(\Omega)$ für $n \to \infty$.

(i) Die Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert strikt gegen u, wenn $|u_n|_{\mathrm{BV}(\Omega)} \to |u|_{\mathrm{BV}(\Omega)}$ für $n \to \infty$ (unter Beachtung von [ABM14, Remark 10.1.1]).

(ii) Die Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert schwach gegen u, wenn Du_n in $M(\Omega; \mathbb{R}^n)$ schwach gegen Du konvergiert.

Theorem 2.14 (Schwache Unterhalbstetigkeit, Prop. 10.1.1)**.** *Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathrm{BV}(\Omega)$ mit $\sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|_{\mathrm{BV}(\Omega)} < \infty$ und $u \in L^1(\Omega)$ mit $u_n \to u$ in $L^1(\Omega)$ für $n \to \infty$.*

Dann gilt $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$ und $|u|_{\mathrm{BV}(\Omega)} \leqslant \liminf_{n\to\infty} |u_n|_{\mathrm{BV}(\Omega)}$. Außerdem konvergiert u_n schwach gegen u in $\mathrm{BV}(\Omega)$.

Mit Blick auf die folgenden Kapitel, sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nun ein polygonal berandetes Lipschitz-Gebiet.

Nochmal nachfragen: das heißt tatsächlich offen, beschränkt mit Lipschitz Rand, korrekt?

Nochmal nachfragen: $\sup u_k < \infty \Leftrightarrow u_k$ bounded, korrekt? Ich übersehe da nichts, oder? Falls doch, alle Theoreme nochmal nachschlagen und sichergehen, dass sie richtig zitiert sind.

Die BV Aussagen aus den nächsten Kapitel wieder hierher holen, soweit sinnvoll. Vielleicht auch nur die Spuroperator Aussage. Kann kopiert werden aus delTexts.tex.

Theorem 2.15 ([EG92, S. 176, Theorem 4])**.** *Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{BV}(\Omega)$ eine beschränkte Folge. Dann existiert eine Teilfolge $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und ein $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$, sodass $u_{n_k} \to u$ in $L^1(\Omega)$ für $k \to \infty$.*

Das kann vielleciht auch noch im kontinuierlichen Existenzbeweis eingebracht werden und den etwas vereinfachen/verkürzen. Prüf das Zukunfts-Ich

Theorem 2.16. *Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{BV}(\Omega)$ eine beschränkte Folge. Dann existiert eine Teilfolge $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und ein $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$, sodass $u_{n_k} \rightharpoonup u$ in $\mathrm{BV}(\Omega)$ für $k \to \infty$.*

Beweis. Nach Theorem 2.15 besitzt $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die in $L^1(\Omega)$ gegen ein $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$ konvergiert. Diese Folge ist nach Voraussetzung ebenfalls beschränkt in $\mathrm{BV}(\Omega)$, woraus nach Definition der Norm auf $\mathrm{BV}(\Omega)$ insbesondere folgt, dass $\sup_{k\in\mathbb{N}} |u_{n_k}|_{\mathrm{BV}(\Omega)} < \infty$.

Insgesamt liefert Theorem 2.14 dann die schwache Konvergenz von $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{BV}(\Omega)$ gegen $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$. $\square$

3. Das kontinuierliche Problem

3.1. Formulierung

Sei nun $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes, polygonal berandetes Lipschitz-Gebiet. Wir betrachten für ein gegebenes $\alpha \in \mathbb{R}^+$ und eine Funktion $f \in L^2(\Omega)$ das folgende Minimierungsproblem.

Problem 3.1. Finde $u \in \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$, sodass u das Funktional

$$E(v) := \frac{\alpha}{2}\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + |v|_{\mathrm{BV}(\Omega)} + \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} - \int_\Omega fv \,\mathrm{d}x \tag{3.1}$$

unter allen $v \in \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ minimiert.

Nach [ABM14, S. 400, Theorem 10.2.1] existiert ein linearer Operator $T : \mathrm{BV}(\Omega) \to L^1(\partial\Omega)$ mit $T(u) = u|_{\partial\Omega}$ für alle $u \in \mathrm{BV}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Somit ist der Term $\|v\|_{L^1(\partial\Omega)}$ wohldefiniert.

Bemerkung 3.2. Nach [ABM14, S. 399, Theorem 10.1.3] ist

noch fragen, was 1-regular nochmal heißt und ob das hier glatt geht (tut es sehr wahrscheinlich)

die Einbettung $\mathrm{BV}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ stetig für $1 \leqslant p \leqslant n/(n-1)$. Damit ist $\mathrm{BV}(\Omega)$ für $n = 2$ Teilmenge von $L^2(\Omega)$ und die Lösung von Problem 3.1 kann in $\mathrm{BV}(\Omega)$ gesucht werden. Für beliebige $n \in \mathbb{N}$, die wir in diesem Abschnitt betrachten, ist dies im Allgemeinen nicht gültig.

3.2. Existenz und Eindeutigkeit von Minimierern

Zunächst zeigen wir, dass Problem 3.1 eine Lösung besitzt. Dafür benötigen wir die folgenden Ungleichungen.

Lemma 3.3 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)**.** *Sei V ein reeller oder komplexer Vektorraum mit Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)_V$. Dann gilt für alle $x, y \in V$*

$$|(x,y)_V|^2 \leqslant (x,x)_V(y,y)_V.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn x und y linear unabhängig sind.

Lemma 3.4 (Youngsche Ungleichung)**.** *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gilt*

$$ab \leqslant \frac{1}{\varepsilon}a^2 + \frac{\varepsilon}{4}b^2.$$

Lemma 3.5 (Höldersche Ungleichung)**.** *Seien $p, q \in [1,\infty]$ mit $1/p + 1/q = 1$, $f \in L^p(\Omega)$ und $g \in L^q(\Omega)$. Dann gilt $fg \in L^1(\Omega)$ mit*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leqslant \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Q alle drei zitieren mit irgendeiner Quelle mit der passenden Formulierung oder ist das zu basic

In Grundlagen einmal darüber reden, wie für fast alle hier zu verstehen ist? Es gibt verschiedene Konventionen und hier ist natürlich gemeint für alle x bis auf die aus Nullmengen

Außerdem wird im Beweis folgende Aussage benötigt, die direkt aus [EG92, S. 183, Theorem 1] folgt, da $0 \in \mathrm{BV}(\mathbb{R}^n \backslash \Omega)$, $|0|_{\mathrm{BV}(\mathbb{R}^n\backslash\Omega)} = 0$ und $0|_{\partial\Omega} = 0$.

Q vielleicht den Trace Operator T immer mitnehmen?

Lemma 3.6. *Sei $v \in \mathrm{BV}(\Omega)$. Definiere, für alle $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$\tilde{v}(x) := \begin{cases} v(x), & \text{falls } x \in \Omega, \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega. \end{cases}$$

Dann gilt $\tilde{v} \in \mathrm{BV}(\mathbb{R}^n)$ und $|\tilde{v}|_{\mathrm{BV}(\mathbb{R}^n)} = |v|_{\mathrm{BV}(\Omega)} + \|v\|_{L^1(\partial\Omega)}$.

Theorem 3.7 (Existenz einer Lösung)**.** *Problem 3.1 besitzt eine Lösung $u \in \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$.*

Beweis. Für diesen Beweis folgen wir der direkte Methode der Variationsrechnung (cf. cite Dracoragna). Für alle $v \in L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ gilt mit der Hölderschen Ungleichung

Q wo und wie einmal erwähnen, dass die Lp Räume geschachtelt sind da Omega bdd ist? In Grundlagenkapitel 'Da bdd gilt hier immer die Inklusion ..' vielleicht einmal allgemein, dann noch mit Zitierung.

(Lemma 3.5) für $p = q = 2$, dass

$$\|v\|_{L^1} = \|1 \cdot v\|_{L^1(\Omega)} \leqslant \|1\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{|\Omega|}\|v\|_{L^2(\Omega)}. \tag{3.2}$$

Dann folgt für das Funktional E in (3.1) für alle $v \in \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ durch die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung (Lemma 3.3), die Youngsche Ungleichung (3.4) und Gleichung (3.2), dass

$$\begin{aligned} E(v) &= \frac{\alpha}{2}\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + |v|_{\mathrm{BV}(\Omega)} + \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} - \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x \\ &\geqslant \frac{\alpha}{2}\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + |v|_{\mathrm{BV}(\Omega)} + \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} - \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\geqslant \frac{\alpha}{2}\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + |v|_{\mathrm{BV}(\Omega)} + \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} - \frac{1}{\alpha}\|f\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{\alpha}{4}\|v\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\geqslant \frac{\alpha}{4}\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + |v|_{\mathrm{BV}(\Omega)} + \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} - \frac{1}{\alpha}\|f\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\geqslant \frac{\alpha}{4|\Omega|}\|v\|^2_{L^1(\Omega)} + |v|_{\mathrm{BV}(\Omega)} + \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} - \frac{1}{\alpha}\|f\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\geqslant -\frac{1}{\alpha}\|f\|^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Somit ist E nach unten beschränkt, was die Existenz einer infimierenden Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ von E impliziert, d.h. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllt $\lim_{n\to\infty} E(u_n) = \inf_{v\in\mathrm{BV}(\Omega)\cap L^2(\Omega)} E(v)$.

Ungleichung (3.3) impliziert außerdem, dass $E(u_n) \overset{n\to\infty}{\to} \infty$, falls $|u_n|_{\mathrm{BV}(\Omega)} \overset{n\to\infty}{\to} \infty$ oder $\|u_n\|_{L^1(\Omega)} \overset{n\to\infty}{\to} \infty$, also insgesamt, falls $\|u_n\|_{\mathrm{BV}(\Omega)} \overset{n\to\infty}{\to} \infty$.

Deshalb muss die Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt in $\mathrm{BV}(\Omega)$ sein.

Nun garantiert Theorem 2.16 die Existenz einer schwach konvergenten Teilfolge $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit schwachem Grenzwert $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Schwache Konvergenz von $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{BV}(\Omega)$ gegen u bedeutet nach Definition insbesondere, dass $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stark und damit auch schwach in $L^1(\Omega)$ gegen u konvergiert.

Weiterhin folgt aus (3.3), dass $E(v) \to \infty$ für $\|v\|_{L^2(\Omega)} \to \infty$. Somit muss $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch beschränkt sein bezüglich der Norm $\|\bullet\|_{L^2(\Omega)}$ und besitzt deshalb, wegen der Reflexivität von $L^2(\Omega)$, eine Teilfolge (ohne Beschränkung der Allgemeinheit weiterhin bezeichnet mit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$), die in $L^2(\Omega)$ schwach gegen einen Grenzwert $\tilde{u} \in L^2(\Omega)$ konvergiert. Somit gilt für alle $w \in L^2(\Omega) \cong L^2(\Omega)^*$ und, da $L^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, insbesondere auch für alle $w \in L^\infty(\Omega) \cong L^1(\Omega)^*$, dass $\int_\Omega u_n w \,\mathrm{d}x \overset{n\to\infty}{\to} \int_\Omega \tilde{u} w \,\mathrm{d}x$. Damit konvergiert $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ also auch schwach in $L^1(\Omega)$ gegen $\tilde{u} \in L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$.

Da schwache Grenzwerte eindeutig bestimmt sind, gilt insgesamt $u = \tilde{u} \in L^2(\Omega)$, das heißt $u \in \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$.

Nun definieren wir, für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\tilde{u}_n(x) := \begin{cases} u_n(x), & \text{falls } x \in \Omega, \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega \end{cases}$$

und

$$\tilde{u}(x) := \begin{cases} u(x), & \text{falls } x \in \Omega, \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega. \end{cases}$$

Dann gilt nach Lemma 3.6 sowohl $\tilde{u} \in \mathrm{BV}(\mathbb{R}^n)$ und $|\tilde{u}|_{\mathrm{BV}(\mathbb{R}^n)} = |u|_{\mathrm{BV}(\Omega)} + \|u\|_{L^1(\partial\Omega)}$ als auch $\tilde{u}_n \in \mathrm{BV}(\mathbb{R}^n)$ und $|\tilde{u}_n|_{\mathrm{BV}(\mathbb{R}^n)} = |u_n|_{\mathrm{BV}(\Omega)} + \|u_n\|_{L^1(\partial\Omega)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ infimierende Folge von E ist, muss aufgrund der Form von E die Folge $(|\tilde{u}_n|_{\mathrm{BV}(\mathbb{R}^n)})_{n\in\mathbb{N}} = (|u_n|_{\mathrm{BV}(\Omega)} + \|u_n\|_{L^1(\partial\Omega)})_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt sein. Außerdem gilt $\tilde{u}_n \overset{n\to\infty}{\to} \tilde{u}$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$, da aus der Definition von $\tilde{u}$ und $\tilde{u}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und der bereits bekannten Eigenschaft $u_n \overset{n\to\infty}{\to} u$ folgt

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_n - \tilde{u}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{u}_n - \tilde{u}| \,\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega |u_n - u| \,\mathrm{d}x \\ &= \|u_n - u\|_{L^1(\Omega)} \overset{n\to\infty}{\to} 0. \end{aligned}$$

Insgesamt ist also $(\tilde{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathrm{BV}(\mathbb{R}^n)$, die in $L^1(\mathbb{R}^n)$ gegen $\tilde{u} \in \mathrm{BV}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ konvergiert und erfüllt, dass $(|\tilde{u}_n|_{\mathrm{BV}(\mathbb{R}^n)})_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist. Somit folgt mit Theorem 2.14

$$\begin{aligned} |u|_{\mathrm{BV}(\Omega)} + \|u\|_{L^1(\partial\Omega)} = |\tilde{u}|_{\mathrm{BV}(\mathbb{R}^n)} &\leqslant \liminf_{n\to\infty} |\tilde{u}_n|_{\mathrm{BV}(\mathbb{R}^n)} \\ &= \liminf_{n\to\infty} (|u_n|_{\mathrm{BV}(\Omega)} + \|u_n\|_{L^1(\partial\Omega)}). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Die Funktionen $\|\bullet\|^2_{L^2(\Omega)}$ und $-\int_\Omega f \bullet \,\mathrm{d}x$ sind auf $L^2(\Omega)$ stetig und konvex, was impliziert, dass sie schwach unterhalbstetig auf $L^2(\Omega)$ sind. Da wir bereits wissen, dass $u_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} u$ in $L^2(\Omega)$, folgt daraus

$$\frac{\alpha}{2}\|u\|_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega f u \,\mathrm{d}x \leqslant \liminf_{n\to\infty} \left(\frac{\alpha}{2}\|u_n\|_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega f u_n \,\mathrm{d}x \right).$$

Damit und mit Gleichung (3.4) gilt insgesamt

$$\inf_{v\in \mathrm{BV}(\Omega)\cap L^2(\Omega)} E(v) \leqslant E(u) \leqslant \liminf_{n\to\infty} E(u_n) = \lim_{n\to\infty} E(u_n) = \inf_{v\in \mathrm{BV}(\Omega)\cap L^2(\Omega)} E(v),$$

d.h. $\min_{v\in \mathrm{BV}(\Omega)\cap L^2(\Omega)} E(v) = E(u)$. □

Theorem 3.8 (Stabilität und Eindeutigkeit)**.** *Seien $u_1, u_2 \in \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ die Minimierer des Problems 3.1 mit $f_1, f_2 \in L^2(\Omega)$ anstelle von f.*

Dann gilt

$$\|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \frac{1}{\alpha}\|f_1 - f_2\|_{L^2(\Omega)}.$$

Beweis. Definiere die konvexen Funktionale $F : \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ und G_ℓ : $\mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$, $\ell = 1, 2$, durch

$$F(u) := |u|_{\mathrm{BV}(\Omega)} + \|u\|_{L^1(\partial\Omega)}, \qquad G_\ell(u) := \frac{\alpha}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega f_\ell u \,dx.$$

Bezeichne $E_\ell := F + G_\ell$.

G_ℓ ist Fréchet-differenzierbar

TODO nachrechnen, Gateaux ist klar, aber auch Frechet? EDIT: nachgerechnet, es funktioniert nach WIKI Def.
Außerdem: Im Grundlagen Kapitel noch einführen, was hier in dieser Arbeit mit Gateaux, Frechet etc gemeint ist? (ist ja von Autor zu Autor anders (cf Wiki)) und insbesondere irgendwo einmal alle Notationen einführen, was ist welche Ableitung

und die Fréchet-Ableitung $G'_\ell(u) : L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ von G_ℓ an der Stelle $u \in \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ ist für alle $v \in L^2(\Omega)$ gegeben durch

$$dG_\ell(u; v) = \alpha(u, v)_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega f_\ell v \,dx = (\alpha u - f_\ell, v)_{L^2(\Omega)}.$$

Das Funktional F ist konvex und stetig, also insbesondere unterhalbstetig, deshalb ist nach Theorem 2.10 das Subdifferential ∂F von F monoton, das heißt für alle $\mu_\ell \in \partial F(u_\ell)$, $\ell = 1, 2$, gilt

$$(\mu_1 - \mu_2, u_1 - u_2)_{L^2(\Omega)} \geqslant 0. \tag{3.5}$$

TODO eigentlich auch mal über Dualraumtheorie reden, insbesondere für Lp Räume und wie die Sachen identifiziert werden können nach Riesz?

Für $\ell = 1, 2$ wird E_ℓ von u_ℓ minimiert und G_ℓ ist stetig. Nach Theorem 2.7 und Theorem 2.9 gilt deshalb $0 \in \partial E_\ell(u_\ell) = \partial F(u_\ell) + \partial G_\ell(u_\ell) = \partial F(u_\ell) + \{G'_\ell(u_\ell)\}$ und es folgt $-G'_\ell(u_\ell) \in \partial F(u_\ell)$. Daraus folgt zusammen mit (3.5)

$$\big(-(\alpha u_1 - f_1) + (\alpha u_2 - f_2), u_1 - u_2\big)_{L^2(\Omega)} \geqslant 0.$$

Umformen und Anwenden der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung impliziert

$$\begin{aligned}\alpha\|u_1 - u_2\|^2_{L^2(\Omega)} &\leqslant \big(f_1 - f_2, u_1 - u_2\big)_{L^2(\Omega)} \\ &\leqslant \|f_1 - f_2\|_{L^2(\Omega)}\|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Falls $\|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega)} = 0$, gilt der Satz. Ansonsten führt Division durch $\alpha\|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega)} \neq 0$ den Beweis zum Abschluss. □

Theorem 3.9. *Sei $u \in \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ Lösung von Problem 3.1.*
Dann gilt

$$\frac{\alpha}{2}\|u - v\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant E(v) - E(u) \quad \textit{für alle } v \in \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega).$$

Beweis. Definiere die konvexen Funktionale $F : \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ und $G : \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ durch

$$F(u) := |u|_{\mathrm{BV}(\Omega)} + \|u\|_{L^1(\partial\Omega)}, \qquad G(u) := \frac{\alpha}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega f u \,\mathrm{d}x.$$

Es gilt $E = F + G$.

G ist Fréchet-differenzierbar und die Fréchet-Ableitung $G'(u) : L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ von G an der Stelle $u \in \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ ist für alle $v \in L^2(\Omega)$ gegeben durch

$$dG(u; v) = \alpha(u, v)_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x = (\alpha u - f, v)_{L^2(\Omega)}.$$

Das impliziert mit wenigen Rechenschritten

$$dG(u; v - u) + \frac{\alpha}{2}\|u - v\|^2_{L^2(\Omega)} + G(u) = G(v) \tag{3.6}$$

für alle $u, v \in \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$.

Da u Minimierer von E ist, gilt mit Theorem 2.7, Theorem 2.9 und Theorem 2.8, dass

$$0 \in \partial E(u) = \partial F(u) + \{G'(u)\},$$

woraus folgt

$$-G'(u) \in \partial F(u),$$

was nach Definition 2.6 äquivalent ist zu

$$-dG(u; v - u) \leqslant F(v) - F(u) \quad \text{für alle } v \in \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega).$$

Daraus folgt zusammen mit Gleichung (3.6), dass

$$\frac{\alpha}{2}\|u - v\|^2_{L^2(\Omega)} + G(u) - G(v) + F(u) = -dG(u; v - u) + F(u) \leqslant F(v)$$

für alle $v \in \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$.

Da $E = F + G$, folgt daraus die Aussage. □

4. Das diskrete Problem

4.1. Formulierung

Quote all CR and discretisation stuff right here somewhere (mglw in einer subsection)

bevor wir das diskrete problem von (cref probcont) formulieren, bemerken wir, dass jede CR Funtkion in BV ist, was induktiv aus [ABM14, S. 404, Example 10.2.1] folgt unter Nutzung (noch irgendwas Dichte Argument mäßiges für die totale Variation)

$$|v_{\mathrm{CR}}|_{\mathrm{BV}(\Omega)} = \|\nabla_{\mathrm{NC}} v_{\mathrm{CR}}\|_{L^1(\Omega)} + \sum_{F \in \mathcal{F}(\Omega)} \int_F |[v_{\mathrm{CR}}]_F| \,\mathrm{d}s,$$

woraus folgt

$$|v_{\mathrm{CR}}|_{\mathrm{BV}(\Omega)} + \|v_{\mathrm{CR}}\|_{L^1(\partial\Omega)} = \|\nabla_{\mathrm{NC}} v_{\mathrm{CR}}\|_{L^1(\Omega)} + \sum_{F \in \mathcal{F}} \int_F |[v_{\mathrm{CR}}]_F| \,\mathrm{d}s,$$

Wir betrachten eine nichtkonforme Diskretisierung, da wir die Sprungterme weglassen, wenn wir $|v_{\mathrm{CR}}|_{\mathrm{BV}(\Omega)} + \|v_{\mathrm{CR}}\|_{L^1(\partial\Omega)}$ durch $\|\nabla_{\mathrm{NC}} v_{\mathrm{CR}}\|_{L^1(\Omega)}$ ersetzen. Somit erhalten wir:

Above was just WIP, write that properly and cite stuff

Betrachte für gegebenes $\alpha > 0$ und rechte Seite $f \in L^2(\Omega)$ folgende Diskretisierung von Problem 3.1.

Problem 4.1. Finde $u_{\mathrm{CR}} \in \mathrm{CR}^1_0(\mathcal{T})$, sodass u_{CR} das Funktional

$$E_{\mathrm{NC}}(v_{\mathrm{CR}}) := \frac{\alpha}{2}\|v_{\mathrm{CR}}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla_{\mathrm{NC}} v_{\mathrm{CR}}\|_{L^1(\Omega)} - \int_\Omega f v_{\mathrm{CR}} \,\mathrm{d}x \tag{4.1}$$

unter allen $v_{\mathrm{CR}} \in \mathrm{CR}^1_0(\mathcal{T})$ minimiert.

Auf die Schranke die durch die starke Konvexität von E existiert verweisen und als Lemma hier formulieren und das 'Courant Lösungen konvergieren für Netzweite gegen 0 gegen die kontinuieliche Lösung' von Bartels zitieren und sagen, dass wir so eine Aussage hier schuldig bleiben, aber mit dieser aussage und der entsprechenden Rate in den Experimenten vergleichen können. Auch nochmal angucken, was Bartels noch zu der Rate sagt (er sagt in einer Bemerkung irgendwas von suboptimal oder so, nachgucken)

4.2. Existenz und eindeutige Lösbarkeit

timmt das?

Definiere für $v_{\mathrm{CR}} \in \mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$, $\Lambda \in \mathbb{P}_0(\mathcal{T};\mathbb{R}^n) \subset L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^n)$,

$$K_1(0) := \{\Lambda \in L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^n) \mid |\Lambda(\bullet)| \leqslant 1 \text{ fast überall in } \Omega\},$$
$$I_{K_1(0)}(\Lambda) := \begin{cases} \infty, & \text{falls } \Lambda \notin K_1(0), \\ 0, & \text{falls } \Lambda \in K_1(0) \end{cases}$$

und das Funktional $\mathcal{L}_h : \mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T}) \times \mathbb{P}_0(\mathcal{T};\mathbb{R}^n) \to [-\infty,\infty)$ durch

$$\mathcal{L}_h(v_{\mathrm{CR}},\Lambda) := \int_\Omega \Lambda \cdot \nabla_{\mathrm{NC}} v_{\mathrm{CR}} \,\mathrm{d}x + \frac{\alpha}{2}\|v_{\mathrm{CR}}\|^2_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega f v_{\mathrm{CR}} \,\mathrm{d}x - I_{K_1(0)}(\Lambda). \tag{4.2}$$

Falls $\Lambda \notin K_1(0)$, gilt $\mathcal{L}(v_{\mathrm{CR}},\Lambda) = -\infty$. Da außerdem für beliebige $\Lambda \in \mathbb{P}_0(\mathcal{T};\mathbb{R}^n) \cap K_1(0)$ (d.h. $|\Lambda| \leqslant 1$ fast überall in Ω und außerdem $I_{K_1(0)}(\Lambda) = 0$) mit der CSU gilt, dass

stimmt das so

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Lambda \cdot \nabla_{\mathrm{NC}} v_{\mathrm{CR}} \,\mathrm{d}x \leqslant \int_\Omega |\Lambda \cdot \nabla_{\mathrm{NC}} v_{\mathrm{CR}}| \,\mathrm{d}x &\leqslant \int_\Omega |\Lambda||\nabla_{\mathrm{NC}} v_{\mathrm{CR}}| \,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_\Omega 1|\nabla_{\mathrm{NC}} v_{\mathrm{CR}}| \,\mathrm{d}x = \|\nabla_{\mathrm{NC}} v_{\mathrm{CR}}\|_{L^1(\Omega)},\end{aligned}$$

folgt zunächst

$$\sup_{\Lambda \in \mathbb{P}_0(\mathcal{T};\mathbb{R}^n)} \mathcal{L}(v_{\mathrm{CR}},\Lambda) = \sup_{\Lambda \in \mathbb{P}_0(\mathcal{T};\mathbb{R}^n) \cap K_1(0)} \mathcal{L}(v_{\mathrm{CR}},\Lambda) \leqslant E_{\mathrm{NC}}(v_{\mathrm{CR}}).$$

Weiterhin gilt für $\Lambda \in \mathrm{sign}(\nabla_{\mathrm{NC}} v_{\mathrm{CR}}) \subset \mathbb{P}_0(\mathcal{T};\mathbb{R}^n) \cap K_1(0)$, dass $E_{\mathrm{NC}}(v_{\mathrm{CR}}) = \mathcal{L}(v_{\mathrm{CR}},\Lambda)$ und deshalb $E_{\mathrm{NC}}(v_{\mathrm{CR}}) \leqslant \sup_{\Lambda \in \mathbb{P}_0(\mathcal{T};\mathbb{R}^n)} \mathcal{L}(v_{\mathrm{CR}},\Lambda)$
Somit ist das folgende Sattelpunktsproblem äquivalent zu Problem 4.1.

Problem 4.2. Löse

$$\inf_{v_{\mathrm{CR}} \in \mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})} \sup_{\Lambda \in \mathbb{P}_0(\mathcal{T};\mathbb{R}^n)} \mathcal{L}_h(v_{\mathrm{CR}},\Lambda).$$

Theorem 4.3 (Charakterisierung diskreter Lösungen)**.** *Es existiert eine eindeutige Lösung $u_{\mathrm{CR}} \in \mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$ von Problem 4.1.*

Außerdem sind die folgenden drei Aussagen für eine Funktion $u_{\mathrm{CR}} \in \mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$ äquivalent.

(i) Problem 4.1 wird von u_{CR} gelöst.

(ii) Es existiert ein $\bar{\Lambda} \in \mathbb{P}_0(\mathcal{T};\mathbb{R}^n)$ mit $|\bar{\Lambda}(\bullet)| \leqslant 1$ fast überall in Ω, sodass

$$\bar{\Lambda}(\bullet) \cdot \nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}(\bullet) = |\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}(\bullet)| \quad \textit{fast überall in } \Omega \tag{4.3}$$

und

$$\left(\bar{\Lambda}, \nabla_{\mathrm{NC}} v_{\mathrm{CR}}\right)_{L^2(\Omega)} = (f - \alpha u_{\mathrm{CR}}, v_{\mathrm{CR}})_{L^2(\Omega)} \quad \textit{für alle } v_{\mathrm{CR}} \in \mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T}). \tag{4.4}$$

(iii) Für alle $v_{\mathrm{CR}} \in \mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$ gilt

$$(f - \alpha u_{\mathrm{CR}}, v_{\mathrm{CR}} - u_{\mathrm{CR}})_{L^2(\Omega)} \leqslant \|\nabla_{\mathrm{NC}} v_{\mathrm{CR}}\|_{L^1(\Omega)} - \|\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}\|_{L^1(\Omega)}. \tag{4.5}$$

Beweis. Mit analogen Abschätzungen wie in Ungleichung (3.3) erhalten wir für das Funktional E_{NC} aus Problem 4.1 für alle $v_{\mathrm{CR}} \in \mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T}) \subset L^2(\Omega)$ die Abschätzung

$$E_{\mathrm{NC}}(v_{\mathrm{CR}}) \geqslant -\frac{1}{\alpha}\|f\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Somit ist E_{NC} nach unten beschränkt und es existiert eine infimierende Folge $(v_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$ von E_{NC}. Aufgrund der Form von E_{NC} ist diese Folge beschränkt bezüglich der Norm $\|\bullet\|_{L^2(\Omega)}$ und wegen der Reflexivität des abgeschlossenen Unterraums $\mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$ des reflexiven Raums $L^2(\Omega)$ besitzt diese Folge eine schwach konvergente Teilfolge in $\mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$ bezüglich der Norm $L^2(\Omega)$, welche auch stark konvergent ist, da $\mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$ endlichdimensional ist. Der Grenzwert dieser Folge liegt aufgrund der Abgeschlossenheit von $\mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$ in $\mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$ und minimiert E_{NC}, da E_{NC} stetig ist bezüglich der Konvergenz in $L^2(\Omega)$.

Absatz above: Sachen noch näher begründen? All die benutzten grundlegenden Aussagen noch zusammen suchen und zitieren irgendwo?

Die Lösung $u_{\mathrm{CR}} \in \mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$ ist eindeutig, da das Funktional E_{NC} aus Problem 4.1 strikt konvex ist der erste Term ist quadratisch, also strikt konvex, der zweite ist konvex und der dritte linear, also ist deren Summe strikt konvex.

grundlegende Aussagen der Optimierung wie diese noch zitieren? Beweis ist einfach bei dieser, schneller Widerspruchsbeweis

Nachdem wir die Existenz eines eindeutigen Minimierers $u_{\mathrm{CR}} \in \mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$ von Problem 4.1 bewiesen haben, zeigen wir nun die äquivalenten Charakterisierung von u_{CR}.

(i) ⇒ (ii). Zunächst sei erwähnt, dass aus der Existenz des Minimierers u_{CR} von Problem 4.1 und der Äquivalenz des Minimierungsproblems 4.1 und des Sattelpunktsproblems 4.2, wobei wir insbesondere bereits gezeigt haben, dass $E_{\mathrm{NC}}(v_{\mathrm{CR}}) = \sup_{\Lambda\in\mathbb{P}_0(\mathcal{T};\mathbb{R}^n)} \mathcal{L}_h(v_{\mathrm{CR}}, \Lambda)$ für alle $v_{\mathrm{CR}} \in \mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$, folgt, dass $\bar{\Lambda} \in \mathbb{P}_0(\mathcal{T};\mathbb{R}^n) \cap K_1(0)$ (denn sonst ist das innere sup nicht erfüllt, da sonst $-I_{K_1(0)}(\bar{\Lambda}) = -\infty$) existiert mit

$$\mathcal{L}_h\left(u_{\mathrm{CR}}, \bar{\Lambda}\right) = \inf_{v_{\mathrm{CR}}\in\mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})} \sup_{\Lambda\in\mathbb{P}_0(\mathcal{T};\mathbb{R}^n)} \mathcal{L}_h(v_{\mathrm{CR}}, \Lambda).$$

Da nach [Roc70, S. 379, Lemma 36.1] gilt, dass

$$\inf_{v_{\mathrm{CR}}\in\mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})} \sup_{\Lambda\in\mathbb{P}_0(\mathcal{T};\mathbb{R}^n)} \mathcal{L}_h(v_{\mathrm{CR}}, \Lambda) \geqslant \sup_{\Lambda\in\mathbb{P}_0(\mathcal{T};\mathbb{R}^n)} \inf_{v_{\mathrm{CR}}\in\mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})} \mathcal{L}_h(v_{\mathrm{CR}}, \Lambda),$$

folgt insgesamt

$$\inf_{v_{\mathrm{CR}}\in\mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})} \sup_{\Lambda\in\mathbb{P}_0(\mathcal{T};\mathbb{R}^n)} \mathcal{L}_h(v_{\mathrm{CR}}, \Lambda) = \mathcal{L}_h\left(u_{\mathrm{CR}}, \bar{\Lambda}\right) = \sup_{\Lambda\in\mathbb{P}_0(\mathcal{T};\mathbb{R}^n)} \inf_{v_{\mathrm{CR}}\in\mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})} \mathcal{L}_h(v_{\mathrm{CR}}, \Lambda).$$

Somit ist $\left(u_{\mathrm{CR}}, \bar{\Lambda}\right) \in \mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T}) \times (\mathbb{P}_0(\mathcal{T};\mathbb{R}^n) \cap K_1(0))$ nach [Roc70, S. 380, Lemma 36.2] Sattelpunkt von $\mathcal{L}_h$ bezüglich der Maximierung über $\mathbb{P}_0(\mathcal{T};\mathbb{R}^n)$ und der Minimierung über $\mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$. Das bedeutet nach [Roc70, S. 380] insbesondere, dass u_{CR} Minimierer von $\mathcal{L}_h(\bullet, \bar{\Lambda})$ in $\mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$ ist und $\bar{\Lambda}$ Maximierer von $\mathcal{L}_h(u_{\mathrm{CR}}, \bullet)$ über $\mathbb{P}_0(\mathcal{T};\mathbb{R}^n)$.

In der zweiten Komponente ist $\mathcal{L}_h$ konkav ($K_1(0)$ ist konvex, somit ist $I_{K_1(0)}$ konvex, also $-I_{K_1(0)}$ konkav. Die restlichen Terme sind konstant oder linear in Λ)

diese grundlegende Aussage über Indikatorfunktionen irgendwo (vielleicht sogar in Grundlagen) einmal zitieren

. Da wir bereits wissen, dass $\mathcal{L}_h(u_{\mathrm{CR}}, \bullet)$ von $\bar{\Lambda}$ in $\mathbb{P}_0(\mathcal{T};\mathbb{R}^n)$ maximiert wird, wird das konvexe Funktional $-\mathcal{L}_h(u_{\mathrm{CR}}, \bullet)$

zitieren, was konkav ist und das -konvex=konkav

von $\bar{\Lambda}$ in $\mathbb{P}_0(\mathcal{T};\mathbb{R}^n)$ minimiert

auch diese basic optimierungsaussage noch zitieren

. Nach den Theoremen 2.7, 2.9 und 2.8 gilt somit

$$0 \in \partial\left(-\mathcal{L}_h(u_{\mathrm{CR}}, \bullet)\right)(\bar{\Lambda}) = \left\{-(\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}, \bullet)_{L^2(\Omega)}\right\} + \partial I_{K_1(0)}(\bar{\Lambda}).$$

Äquivalent zu dieser Aussage ist, dass $(\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}, \bullet)_{L^2(\Omega)} \in \partial I_{K_1(0)}(\bar{\Lambda})$, das heißt nach Definition 2.6 gilt für alle $\Lambda \in \mathbb{P}_0(\mathcal{T};\mathbb{R}^n)$

$$(\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}, \Lambda - \bar{\Lambda})_{L^2(\Omega)} \leqslant I_{K_1(0)}(\Lambda) - I_{K_1(0)}(\bar{\Lambda}) = I_{K_1(0)}(\Lambda),$$

da $\bar{\Lambda} \in K_1(0)$. Für $\Lambda \in \mathbb{P}_0(\mathcal{T};\mathbb{R}^n) \cap K_1(0)$ folgt insbesondere

$$\begin{aligned}(\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}, \Lambda - \bar{\Lambda})_{L^2(\Omega)} &\leqslant 0, \quad \text{also}\\ (\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}, \Lambda)_{L^2(\Omega)} &\leqslant (\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}, \bar{\Lambda})_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Damit und der Wahl $\Lambda \in \operatorname{sign}(\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}) \subset \mathbb{P}_0(\mathcal{T};\mathbb{R}^n) \cap K_1(0)$ impliziert die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung, dass

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}| \,\mathrm{d}x &= (\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}, \Lambda)_{L^2(\Omega)} \leqslant (\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}, \bar{\Lambda})_{L^2(\Omega)}\\ &\leqslant \int_\Omega |\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}|\,|\bar{\Lambda}| \,\mathrm{d}x \leqslant \int_\Omega |\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}| \,\mathrm{d}x, \quad \text{also}\\ \int_\Omega |\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}| \,\mathrm{d}x &= (\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}, \bar{\Lambda})_{L^2(\Omega)} \quad \text{beziehungsweise}\\ \sum_{T \in \mathcal{T}} |T| \left|(\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}})|_T\right| &= \sum_{T \in \mathcal{T}} |T| \,(\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}} \cdot \bar{\Lambda})|_T.\end{aligned}$$

Außerdem gilt mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung auf allen $T \in \mathcal{T}$, dass $(\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}} \cdot \bar{\Lambda})|_T \leqslant \left|(\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}})|_T\right|$, da $\bar{\Lambda} \in K_1(0)$. Dementsprechend muss (da somit alle Summanden der rechten Summe kleiner-gleich den entsprechenden Summanden (d.h. zum gleichen T) der linken Summe sind und Gleichheit der Summen somit nur noch möglich ist, wenn die entsprechenden Summanden tatsächlich gleich sind) für alle $T \in \mathcal{T}$ gelten, dass $(\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}} \cdot \bar{\Lambda})|_T = \left|(\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}})|_T\right|$, das heißt fast überall in Ω gilt $\bar{\Lambda}(\bullet) \cdot \nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}(\bullet) = |\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}(\bullet)|$.

Damit ist Gleichung (4.3) gezeigt.

In der ersten Komponente ist das Lagrange-Funktional Fréchet-differenzierbar (und für $\bar{\Lambda}$ ist das Funktional reellwertig und nimmt nicht $-\infty$ an, also ist Zeidler anwendbar) mit

'Lagrange' weglassen, falls nicht doch noch benötigt? Keine Quelle nannte das bisher so

$$d\mathcal{L}_h(\bullet, \bar{\Lambda})(u_{\mathrm{CR}}; v_{\mathrm{CR}}) = \int_\Omega \bar{\Lambda} \cdot \nabla_{\mathrm{NC}} v_{\mathrm{CR}} \,\mathrm{d}x + \alpha(u_{\mathrm{CR}}, v_{\mathrm{CR}})_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega f v_{\mathrm{CR}} \,\mathrm{d}x$$

für alle $v_{\mathrm{CR}} \in \mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$. Da u_{CR} Minimierer von $\mathcal{L}_h(\bullet, \bar{\Lambda})$ (reellwertig!!!) in $\mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$ ist, gilt nach Theorem 2.4, dass $0 = d\mathcal{L}_h(\bullet, \bar{\Lambda})(u_{\mathrm{CR}}; v_{\mathrm{CR}})$.

Diese Bedingung ist für alle $v_{\mathrm{CR}} \in \mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$ äquivalent zu

$$(\bar{\Lambda}, \nabla_{\mathrm{NC}} v_{\mathrm{CR}})_{L^2(\Omega)} = (f - \alpha u_{\mathrm{CR}}, v_{\mathrm{CR}})_{L^2(\Omega)}.$$

Somit ist Gleichung (4.4) gezeigt.

(ii) $\Rightarrow$ *(iii)*. Für alle $v_{\mathrm{CR}} \in \mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$ gilt mit Gleichung (4.4), der CSU, Gleichung (4.3) und $|\bar{\Lambda}(\bullet)| \leqslant 1$ fast überall in Ω , dass

$$\begin{aligned}
(f - \alpha u_{\mathrm{CR}}, v_{\mathrm{CR}} - u_{\mathrm{CR}})_{L^2(\Omega)} &= (f - \alpha u_{\mathrm{CR}}, v_{\mathrm{CR}})_{L^2(\Omega)} - (f - \alpha u_{\mathrm{CR}}, u_{\mathrm{CR}})_{L^2(\Omega)} \\
&= \left(\bar{\Lambda}, \nabla_{\mathrm{NC}} v_{\mathrm{CR}}\right)_{L^2(\Omega)} - \left(\bar{\Lambda}, \nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}\right)_{L^2(\Omega)} \\
&= \int_\Omega \bar{\Lambda} \cdot \nabla_{\mathrm{NC}} v_{\mathrm{CR}} \,\mathrm{d}x - \int_\Omega \bar{\Lambda} \cdot \nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}} \,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_\Omega |\bar{\Lambda}| \, |\nabla_{\mathrm{NC}} v_{\mathrm{CR}}| \,\mathrm{d}x - \int_\Omega |\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}| \,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_\Omega |\nabla_{\mathrm{NC}} v_{\mathrm{CR}}| \,\mathrm{d}x - \int_\Omega |\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}| \,\mathrm{d}x \\
&= \|\nabla_{\mathrm{NC}} v_{\mathrm{CR}}\|_{L^1(\Omega)} - \|\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}\|_{L^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Damit löst u_{CR} Ungleichung (4.5) für alle $v_{\mathrm{CR}} \in \mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$ in $\mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$.

(iii) $\Rightarrow$ *(i)*. Sei $u_{\mathrm{CR}} \in \mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$ Lösung von Problem 4.1. Wir haben bereits gezeigt, dass u_{CR} stets existiert und außerdem, dass u_{CR} insbesondere für alle $v_{\mathrm{CR}} \in \mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$ eine Lösung von Ungleichung (4.5) in $\mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$ ist.

Zu zeigen ist somit nur noch, dass eine beliebige Funktion $\tilde{u}_{\mathrm{CR}} \in \mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$, die Ungleichung (4.5) in $\mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$ für alle $v_{\mathrm{CR}} \in \mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$ löst, auch eine Lösung von Problem 4.1 ist, das heißt zu zeigen ist $\tilde{u}_{\mathrm{CR}} = u_{\mathrm{CR}}$.

Für ein solches $\tilde{u}_{\mathrm{CR}}$ gilt

$$\begin{aligned}
&(f - \alpha u_{\mathrm{CR}}, \tilde{u}_{\mathrm{CR}} - u_{\mathrm{CR}})_{L^2(\Omega)} \leqslant \|\nabla_{\mathrm{NC}} \tilde{u}_{\mathrm{CR}}\|_{L^1(\Omega)} - \|\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}\|_{L^1(\Omega)} \quad \text{und} \\
&(f - \alpha \tilde{u}_{\mathrm{CR}}, u_{\mathrm{CR}} - \tilde{u}_{\mathrm{CR}})_{L^2(\Omega)} \leqslant \|\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}\|_{L^1(\Omega)} - \|\nabla_{\mathrm{NC}} \tilde{u}_{\mathrm{CR}}\|_{L^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Addition dieser Ungleichungen liefert die Ungleichung

$$(-\alpha u_{\mathrm{CR}}, \tilde{u}_{\mathrm{CR}} - u_{\mathrm{CR}})_{L^2(\Omega)} + (-\alpha \tilde{u}_{\mathrm{CR}}, u_{\mathrm{CR}} - \tilde{u}_{\mathrm{CR}})_{L^2(\Omega)} \leqslant 0,$$

welche äquivalent ist zu

$$\alpha \, \|\tilde{u}_{\mathrm{CR}} - u_{\mathrm{CR}}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leqslant 0.$$

Da $\alpha > 0$, impliziert das $\|\tilde{u}_{\mathrm{CR}} - u_{\mathrm{CR}}\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0$, also $\tilde{u}_{\mathrm{CR}} = u_{\mathrm{CR}}$ in $\mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$. □

Als letztes noch eine von Prof. Carstensen angemerkte äquivalente Charakterisierung der dualen Variable $\bar{\Lambda}$ aus Theorem 4.3 zur diskreten Lösung u_{CR}.

Bemerkung 4.4. Das $\bar{\Lambda}$ fast überall in Ω Gleichung (4.3) und $|\bar{\Lambda}(\bullet)| \leqslant 1$ erfüllt, ist äquivalent zu $\bar{\Lambda} \in \operatorname{sign}(\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}})$. Falls $\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}} \neq 0$ auf $T \in \mathcal{T}$, ist $\bar{\Lambda} = \nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}} / |\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}|$ eindeutig auf T.

Im Allgemeinen ist $\bar{\Lambda}$ nicht eindeutig. So erfüllt zum Beispiel für $f \equiv 0$ in Problem 4.1 mit eindeutiger Lösung $u_{\mathrm{CR}} \equiv 0$ die Wahl $\bar{\Lambda} := \mathrm{Curl}(v_{\mathrm{C}})$ für ein beliebiges $v_{\mathrm{C}} \in S^1(\mathcal{T})$ mit $|\,\mathrm{Curl}(v_{\mathrm{C}})| \leqslant 1$ die Eigenschaft *(ii)* aus Theorem 4.3.

4.3. Refinement Indicator und garantierte untere Energieschranke

5. Implementierung

5.1. Algorithmus

Irgendwo, wahrscheinlich bei „alles zu CR_0" muss noch $a_{\mathrm{NC}}(u,v) := \int_\Omega \nabla_{\mathrm{NC}} u \cdot \nabla_{\mathrm{NC}} v \,\mathrm{d}x$ erwähnt werden (und warum das ein SP ist muss angerissen werden, Stichwort Friedrichs Ungleichung)

Für unsere Formulierung Problem 4.1 nutzen wir [Bar15b, S. 314, Algorithm 10.1] unter Beachtung von [Bar15b, S. 314, Remark 10.11] als Algorithmus als iterativen Löser und benutzen als inneres Produkt a_{NC} (definiert in Kapitel ... hier in dieser Arbeit). Weitere Details dazu finden sich in [Bar15b, S. 118-121].

Beim Zitieren z.B. 'Remark' lassen, weil es in Bartels so heißt, oder das lieber übersetzen? Außerdem natürlich, passt das so als Einleitung für den Alg?

Algorithmus 5.1 (Primale-Duale Iteration).
Input: $u_0 \in \mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$, $\Lambda_0 \in \mathbb{P}_0(\mathcal{T}; \overline{B(0,1)}), \tau > 0$

Initialisiere $v_0 := 0$ *in* $\mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$.

for $j = 1, 2, \dots$

$$\tilde{u}_j := u_{j-1} + \tau v_{j-1}, \tag{5.1}$$

$$\Lambda_j := (\Lambda_{j-1} + \tau \nabla_{\mathrm{NC}} \tilde{u}_j)/(\max\{1, |\Lambda_{j-1} + \tau \nabla_{\mathrm{NC}} \tilde{u}_j|\}), \tag{5.2}$$

bestimme $u_j \in \mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$ *als Lösung des linearen Gleichungssystems*

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\tau} a_{\mathrm{NC}}(u_j, \bullet) + \alpha(u_j, \bullet)_{L^2(\Omega)} \\ &\quad = \frac{1}{\tau} a_{\mathrm{NC}}(u_{j-1}, \bullet) + (f, \bullet)_{L^2(\Omega)} - (\Lambda_j, \nabla_{\mathrm{NC}} \bullet)_{L^2(\Omega)} \end{aligned} \tag{5.3}$$

in $\mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$,

$$v_j := (u_j - u_{j-1})/\tau.$$

Output: *Folge* $(u_j, \Lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T}) \times \mathbb{P}_0(\mathcal{T}; \overline{B(0,1)})$

Theorem 5.2. *Sei* $u_{\mathrm{CR}} \in \mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$ *Lösung von Problem 4.1 und* $\bar{\Lambda} \in \operatorname{sign}(\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}})$.

Wir brauchen CCs Bemerkung, dass die Eigenschaften für $\bar{\Lambda}$ *aus dem Theorem äquivalent sind zu* $\bar{\Lambda} \in \operatorname{sign}(\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}})$

Falls $0 < \tau \leqslant 1$, *dann konvergieren die Iterate* $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *des Algorithmus 5.1 gegen* u_{CR}.

Beweis. Definiere $e_j := u_{\mathrm{CR}} - u_j$ und $E_j := \Lambda - \Lambda_j$.
Testen wir nun (5.3) mit e_j erhalten wir

$$a_{\mathrm{NC}}(v_j, e_j) + \alpha(u_j, e_j)_{L^2(\Omega)} + (\Lambda_j, \nabla_{\mathrm{NC}} e_j)_{L^2(\Omega)} = (f, e_j)_{L^2(\Omega)}.$$

Äquivalent dazu ist, da u_{CR} Gleichung (4.4) löst,

$$\begin{aligned} a_{\mathrm{NC}}(v_j, e_j) &= \alpha(u_{\mathrm{CR}} - u_j, e_j)_{L^2(\Omega)} + (\Lambda - \Lambda_j, \nabla_{\mathrm{NC}} e_j)_{L^2(\Omega)} \\ &= \alpha \|e_j\|^2_{L^2(\Omega)} + (E_j, \nabla_{\mathrm{NC}} e_j)_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Abbreviate $\mu_j := \max\{1, |\Lambda_{j-1} + \tau \nabla_{\mathrm{NC}} \tilde{u}_j|\}$. Utilize (**??**) to compute

$$\Lambda_{j-1} - \Lambda_j + \tau \nabla_{\mathrm{NC}} \tilde{u}_j = (\mu_j - 1)\Lambda_j \quad \text{a.e. in } \Omega. \tag{5.5}$$

For all $x \in \Omega$ the Cauchy-Schwarz inequality yields $\Lambda_j(x) \cdot \Lambda(x) \leqslant |\Lambda_j(x)|$ and by definition of Λ_j a simple case distinction leads to $(1 - |\Lambda_j(x)|)(\mu_j(x) - 1) = 0$. Test (5.5) with E_j to compute

$$\begin{aligned} ((\Lambda_{j-1} - \Lambda_j)/\tau + \nabla_{\mathrm{NC}} \tilde{u}_j, E_j)_{L^2(\Omega)} &= 1/\tau((\mu_j - 1)\Lambda_j, \Lambda - \Lambda_j)_{L^2(\Omega)} \\ &\leqslant 1/\tau \int_\Omega (\mu_j - 1)(|\Lambda_j| - |\Lambda_j|^2)\,\mathrm{d}x \\ &= 1/\tau \int_\Omega |\Lambda_j| \underbrace{(1 - |\Lambda_j|)(\mu_j - 1)}_{=0}\,\mathrm{d}x = 0. \end{aligned}$$

With $\Lambda_{j-1} - \Lambda_j = E_j - E_{j-1}$, $\tilde{u}_j = u_{j-1} + \tau v_{j-1} = u_{j-1} - (-u_{j-1} + u_{j-2}) = u_{j-1} - (e_{j-1} - e_{j-2})$ for $j \geqslant 2$ (and for $j = 1$ the convention $e_{-1} := e_0$) this leads for all $j \in \mathbb{N}$ to

$$\big((E_j - E_{j-1})/\tau - \nabla_{\mathrm{NC}}(e_{j-1} - e_{j-2}) + \nabla_{\mathrm{NC}} u_{j-1}, E_j\big)_{L^2(\Omega)} \leqslant 0. \tag{5.6}$$

For $|\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}| \neq 0$ it holds

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}} \cdot E_j &= \nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}} \cdot \Lambda - \nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}} \cdot \Lambda_j \\ &\geqslant \nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}} \cdot \Lambda - |\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}||\Lambda_j| && \text{(Cauchy-Schwarz inequality)} \\ &= |\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}|^2/|\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}| - |\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}||\Lambda_j| && (\Lambda \in \operatorname{sign} \nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}) \\ &= |\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}|(1 - |\Lambda_j|) \\ &\geqslant 0, && (|\Lambda_j| \leqslant 1) \end{aligned}$$

while for $|\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}| = 0$ the inequality is trivial. Hence,

$$(\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}, E_j)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}} \cdot E_j \geqslant 0. \tag{5.7}$$

With (5.6) and (5.7) it follows for all $j \in \mathbb{N}$

$$((E_j - E_{j-1})/\tau - \nabla_{\mathrm{NC}}(e_{j-1} - e_{j-2}) + \nabla_{\mathrm{NC}} u_{j-1}, E_j)_{L^2(\Omega)} \leqslant (\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}, E_j)_{L^2(\Omega)}$$

which, by definiton of e_{j-1}, is equivalent to

$$\big((E_j - E_{j-1})/\tau - \nabla_{\mathrm{NC}}(2e_{j-1} - e_{j-2}), E_j\big)_{L^2(\Omega)} \leqslant 0. \tag{5.8}$$

Elementary algebra and $-v_j = (e_j - e_{j-1})/\tau$ result in

$$
\begin{aligned}
&(\|\!|e_j|\!\|_{\mathrm{NC}}^2 - \|\!|e_{j-1}|\!\|_{\mathrm{NC}}^2 + \|E_j\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|E_{j-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\!|e_j - e_{j-1}|\!\|_{\mathrm{NC}}^2 + \|E_j - E_{j-1}\|_{L^2(\Omega)}^2)/(2\tau)\\
&\quad = \tau^{-1} a_{\mathrm{NC}}(e_j, e_j - e_{j-1}) + \tau^{-1}(E_j, E_j - E_{j-1})_{L^2(\Omega)}\\
&\quad = -a_{\mathrm{NC}}(e_j, v_j) + \tau^{-1}(E_j, E_j - E_{j-1})_{L^2(\Omega)}\\
&\quad = -\alpha\|e_j\|_{L^2(\Omega)}^2 + (E_j, -\nabla_{\mathrm{NC}} e_j + (E_j - E_{j-1})/\tau)_{L^2(\Omega)} && \text{(use (5.4))}\\
&\quad \leqslant -\alpha\|e_j\|_{L^2(\Omega)}^2 + (E_j, -\nabla_{\mathrm{NC}} e_j + (E_j - E_{j-1})/\tau)_{L^2(\Omega)}\\
&\qquad - ((E_j - E_{j-1})/\tau - \nabla_{\mathrm{NC}}(2e_{j-1} - e_{j-2}), E_j)_{L^2(\Omega)} && \text{(use (5.8))}\\
&\quad = -\alpha\|e_j\|_{L^2(\Omega)}^2 - (E_j, \nabla_{\mathrm{NC}}(e_j - 2e_{j-1} + e_{j-2}))_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}
$$

The sum over $j = 1, \dots, J$ reads

$$
\begin{aligned}
&\|\!|e_J|\!\|_{\mathrm{NC}}^2 + \|E_J\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{j=1}^{J}(\|\!|e_j - e_{j-1}|\!\|_{\mathrm{NC}}^2 + \|E_j - E_{j-1}\|_{L^2(\Omega)}^2)\\
&\quad \leqslant \|\!|e_0|\!\|_{\mathrm{NC}}^2 + \|E_0\|_{L^2(\Omega)}^2 - 2\tau\alpha\sum_{j=1}^{J}\|e_j\|_{L^2(\Omega)}^2\\
&\qquad - 2\tau\sum_{j=1}^{J}(E_j, \nabla_{\mathrm{NC}}(e_j - 2e_{j-1} + e_{j-2}))_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{5.9}
$$

The last sum is equal to

$$
\begin{aligned}
&2\tau\sum_{j=1}^{J}(E_j, \nabla_{\mathrm{NC}}(-e_j + e_{j-1}))_{L^2(\Omega)} + 2\tau\sum_{j=0}^{J-1}(E_{j+1}, \nabla_{\mathrm{NC}}(e_j - e_{j-1}))_{L^2(\Omega)}\\
&\quad = 2\tau\left(\sum_{j=1}^{J-1}(E_{j+1} - E_j, \nabla_{\mathrm{NC}}(e_j - e_{j-1}))_{L^2(\Omega)} - (E_J, \nabla_{\mathrm{NC}}(e_J - e_{J-1}))\right)\\
&\qquad + \underbrace{2\tau(E_1, \nabla_{\mathrm{NC}}(e_0 - e_{-1}))_{L^2(\Omega)}}_{=0 \text{ (since } e_{-1} := e_0)}
\end{aligned}
$$

and since the left-hand side of (5.9) is non-negative it holds for $0 < \tau \leqslant 1$

$$
\begin{aligned}
&\tau\left(\|\!|e_J|\!\|_{\mathrm{NC}}^2 + \|E_J\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{j=1}^{J}(\|\!|e_j - e_{j-1}|\!\|_{\mathrm{NC}}^2 + \|E_j - E_{j-1}\|_{L^2(\Omega)}^2)\right)\\
&\quad \leqslant \|\!|e_0|\!\|_{\mathrm{NC}}^2 + \|E_0\|_{L^2(\Omega)}^2 - 2\tau\alpha\sum_{j=1}^{J}\|e_j\|_{L^2(\Omega)}^2\\
&\qquad 2\tau\left(\sum_{j=1}^{J-1}(E_{j+1} - E_j, \nabla_{\mathrm{NC}}(e_j - e_{j-1}))_{L^2(\Omega)} - (E_J, \nabla_{\mathrm{NC}}(e_J - e_{J-1}))_{L^2(\Omega)}\right)
\end{aligned}
$$

Division by τ yields

$$\begin{aligned}
&|||e_J|||^2_{\mathrm{NC}} + \|E_J\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{j=1}^{J}(|||e_j - e_{j-1}|||^2_{\mathrm{NC}} + \|E_j - E_{j-1}\|^2_{L^2(\Omega)}) \\
&\quad \leqslant \tau^{-1}(|||e_0|||^2_{\mathrm{NC}} + \|E_0\|^2_{L^2(\Omega)}) - 2\alpha \sum_{j=1}^{J} \|e_j\|^2_{L^2(\Omega)} \qquad (5.10) \\
&\quad\ 2\sum_{j=1}^{J-1}(E_{j+1} - E_j, \nabla_{\mathrm{NC}}(e_j - e_{j-1}))_{L^2(\Omega)} - 2(E_J, \nabla_{\mathrm{NC}}(e_J - e_{J-1}))_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

which implies

$$\begin{aligned}
&2\alpha \sum_{j=1}^{J} \|e_j\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\quad \leqslant \|E_J + \nabla_{\mathrm{NC}}(e_J - e_{J-1})\|^2_{L^2(\Omega)} + |||e_J|||^2_{\mathrm{NC}} + \|E_1 - E_0\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\qquad + \sum_{j=1}^{J-1} \|\nabla_{\mathrm{NC}}(e_j - e_{j-1}) - (E_{j+1} - E_j)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\alpha \sum_{j=1}^{J} \|e_j\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\quad = |||e_J|||^2_{\mathrm{NC}} + \|E_J\|^2_{L^2(\Omega)} + 2(E_J, \nabla_{\mathrm{NC}}(e_J - e_{J-1}))_{L^2(\Omega)} \\
&\qquad + \sum_{j=1}^{J}(|||e_j - e_{j-1}|||^2_{\mathrm{NC}} + \|E_j - E_{j-1}\|^2_{L^2(\Omega)}) + 2\alpha \sum_{j=1}^{J} \|e_j\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\qquad - 2\sum_{j=1}^{J-1}(E_{j+1} - E_j, \nabla_{\mathrm{NC}}(e_j - e_{j-1}))_{L^2(\Omega)} \\
&\quad \leqslant \tau^{-1}(|||e_0|||^2_{\mathrm{NC}} + \|E_0\|^2_{L^2(\Omega)}). \qquad \text{(by (5.10))}
\end{aligned}$$

This proves that $\sum_{j=1}^{\infty} \|e_j\|^2_{L^2(\Omega)}$ is bounded proving convergence $\|e_j\|_{L^2(\Omega)} \to 0$ as $j \to \infty$. □

5.2. Seitennummerierungskonvention lokal

welche Funktionen haben welche, an welche Stellen wird also umnummeriert

5.3. Aufstellung des zu lösenden LGS

Aufstellung der Gradienten etc.

5.4. Implementation der GLEB

5.5. Implementation des Refinement Indicators

5.6. Implementaition der exakten Energie Berechnung

6. Nutzung des Programms

6.1. Erstellen eines lauffähigen Benchmarks (Minimalbeispeil)

Beschreibung der wichtigsten Parameter und Idee hinter structs

Ordner, in denen die Funktionen für rechte Seite, Gradient, exakte Lösung etc liegen müsssen

Wahrscheinlich flag für flag durchgehen, erklären, welche automatisch gesetzt werden u.U., und wann immer nötig sagen, was man vorher machen muss, wo man Funktionen erstellen muss etc.

fur exakte Lösungs Beispiel usw. Berechnung der exakten Energie, also alles was nur mehr Möglichkeiten bietet, Verweis auf die nächste Section (in der dann sagen, welche Flags gesetzt werden können)

6.2. Konstruktion eines Experiments mit exakter Lösung

Um eine rechte Seite zu finden, zu der die exakte Lösung bekannt ist, wähle eine Funktion des Radius $u \in H_0^1([0,1])$ mit Träger im zweidimensionalen Einheitskreis. Insbesondere muss damit gelten $u(1) = 0$ und u stetig. Die rechte Seite als Funktion des Radius $f \in L^2([0,1])$ ist dann gegeben durch

$$f := \alpha u - \partial_r(\operatorname{sign}(\partial_r u)) - \frac{\operatorname{sign}(\partial_r u)}{r},$$

wobei für $F \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ gilt $\operatorname{sign}(F) := \left\{\frac{F}{|F|}\right\}$ und $\operatorname{sign}(0) \in B_1(0)$. Damit außerdem gilt $f \in H_0^1([0,1])$, was z.B. für GLEB relevant ist, muss also noch Stetigkeit von $\operatorname{sign}(\partial_r u)$ und $\partial_r(\operatorname{sign}(\partial_r u))$ verlangt werden und $\partial_r(\operatorname{sign}(\partial_r u(1)) = \operatorname{sign}(\partial_r u(1)) = 0$. Damit f in 0 definierbar ist, muss auch gelten $\operatorname{sign}(\partial_r u) \in o(r)$ für $r \to 0$.

Damit erhält man für die Funktion

$$u_1(r) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } 0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{6}, \\ 1 + (6r-1)^\beta, & \text{wenn } \frac{1}{6} \leqslant r \leqslant \frac{1}{3}, \\ 2, & \text{wenn } \frac{1}{3} \leqslant r \leqslant \frac{1}{2}, \\ 2(\frac{5}{2} - 3r)^\beta, & \text{wenn } \frac{1}{2} \leqslant r \leqslant \frac{5}{6}, \\ 0, & \text{wenn } \frac{5}{6} \leqslant r, \end{cases}$$

wobei $\beta \geqslant 1/2$, mit der Wahl

$$\operatorname{sign}(\partial_r u_1(r)) = \begin{cases} 12r - 36r^2, & \text{wenn } 0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{6}, \\ 1, & \text{wenn } \frac{1}{6} \leqslant r \leqslant \frac{1}{3}, \\ \cos(\pi(6r-2)), & \text{wenn } \frac{1}{3} \leqslant r \leqslant \frac{1}{2}, \\ -1, & \text{wenn } \frac{1}{2} \leqslant r \leqslant \frac{5}{6}, \\ -\frac{1+\cos(\pi(6r-5))}{2}, & \text{wenn } \frac{5}{6} \leqslant r \leqslant 1, \end{cases}$$

die rechte Seite

$$f_1(r) := \begin{cases} \alpha - 12(2-9r), & \text{wenn } 0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{6}, \\ \alpha(1+(6r-1)^\beta) - \frac{1}{r}, & \text{wenn } \frac{1}{6} \leqslant r \leqslant \frac{1}{3}, \\ 2\alpha + 6\pi \sin(\pi(6r-2)) - \frac{1}{r}\cos(\pi(6r-2)), & \text{wenn } \frac{1}{3} \leqslant r \leqslant \frac{1}{2}, \\ 2\alpha(\frac{5}{2} - 3r)^\beta + \frac{1}{r}, & \text{wenn } \frac{1}{2} \leqslant r \leqslant \frac{5}{6}, \\ -3\pi \sin(\pi(6r-5)) + \frac{1+\cos(\pi(6r-5))}{2r}, & \text{wenn } \frac{5}{6} \leqslant r \leqslant 1. \end{cases}$$

Für die Funktion

$$u_2(r) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } 0 \leqslant r \leqslant \frac{1-\beta}{2}, \\ -\frac{1}{\beta}r + \frac{1+\beta}{2\beta}, & \text{wenn } \frac{1-\beta}{2} \leqslant r \leqslant \frac{1+\beta}{2}, \\ 0, & \text{wenn } \frac{1+\beta}{2} \leqslant r, \end{cases}$$

erhält man mit der Wahl

$$\begin{aligned} &\operatorname{sign}(\partial_r u_2(r)) \\ &\quad := \begin{cases} \frac{4}{1-\beta}r\left(\frac{1}{1-\beta}r - 1\right), & \text{wenn } 0 \leqslant r \leqslant \frac{1-\beta}{2}, \\ -1, & \text{wenn } \frac{1-\beta}{2} \leqslant r \leqslant \frac{1+\beta}{2}, \\ \frac{4}{(\beta-1)^3}\left(4r^3 - 3(\beta+3)r^2 + 6(\beta+1)r - 3\beta - 1\right), & \text{wenn } \frac{1+\beta}{2} \leqslant r \leqslant 1, \end{cases} \end{aligned}$$

die rechte Seite

$$f_2(r) := \begin{cases} \alpha - \frac{4}{1-\beta}\left(\frac{3}{1-\beta}r - 2\right), & \text{wenn } 0 \leqslant r \leqslant \frac{1-\beta}{2}, \\ -\frac{\alpha}{\beta}\left(r - \frac{1+\beta}{2}\right) + \frac{1}{r}, & \text{wenn } \frac{1-\beta}{2} \leqslant r \leqslant \frac{1+\beta}{2}, \\ \frac{-4}{(\beta-1)^3}\left(16r^2 - 9(\beta+3)r + 12(\beta+1) - \frac{3\beta+1}{r}\right), & \text{wenn } \frac{1+\beta}{2} \leqslant r \leqslant 1. \end{cases}$$

Damit können Experimente durchgeführt werden bei denen `exactSolutionKnown = true` gesetzt werden kann und entsprechend auch der L^2-Fehler berechnet wird.

Soll nun auch die Differenz der exakten Energie mit der garantierten unteren Energie Schranke (GLEB) berechnet werden, dann werden die stückweisen Gradienten der exakten Lösung und der rechten Seite benötigt.

Dabei gelten folgende Ableitungsregeln für die Ableitungen einer Funktion g, wenn man ihr Argument $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ in Polarkoordinaten mit Länge $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

und Winkel $\varphi = \operatorname{atan2}(x_2, x_1)$, wobei

$$\operatorname{atan2}(x_2, x_1) := \begin{cases} \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right), & \text{wenn } x_1 > 0, \\ \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right) + \pi, & \text{wenn } x_1 < 0, x_2 \geqslant 0, \\ \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right) - \pi, & \text{wenn } x_1 < 0, x_2 < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{wenn } x_1 = 0, x_2 > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{wenn } x_1 = 0, x_2 < 0, \\ \text{undefiniert}, & \text{wenn } x_1 = x_2 = 0, \end{cases}$$

auffasst,

$$\begin{aligned} \partial_{x_1} &= \cos(\varphi)\partial_r - \frac{1}{r}\sin(\varphi)\partial_\varphi, \\ \partial_{x_2} &= \sin(\varphi)\partial_r - \frac{1}{r}\cos(\varphi)\partial_\varphi. \end{aligned}$$

Ist g vom Winkel φ unabhängig, so ergibt sich

$$\nabla_{(x_1,x_2)} g = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))\partial_r g.$$

Unter Beachtung der trigonometrischen Zusammenhänge

$$\begin{aligned} \sin(\arctan(y)) &= \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}, \\ \cos(\arctan(y)) &= \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \end{aligned}$$

ergibt sich

$$(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) = (x_1, x_2)\frac{1}{r}$$

und damit

$$\nabla_{(x_1,x_2)} g = (x_1, x_2)\frac{\partial_r g}{r},$$

es muss also nur $\partial_r g$ bestimmt werden.

Die entsprechenden Ableitung lauten

$$\partial_r f_1(r) = \begin{cases} 108, & \text{wenn } 0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{6}, \\ 6\alpha\beta(6r-1)^{\beta-1} + \frac{1}{r^2}, & \text{wenn } \frac{1}{6} \leqslant r \leqslant \frac{1}{3}, \\ (36\pi^2 + \frac{1}{r^2})\cos(\pi(6r-2)) + \frac{6\pi}{r}\sin(\pi(6r-2)), & \text{wenn } \frac{1}{3} \leqslant r \leqslant \frac{1}{2}, \\ -\left(6\alpha\beta\left(\frac{5}{2}-3r\right)^{\beta-1} + \frac{1}{r^2}\right), & \text{wenn } \frac{1}{2} \leqslant r \leqslant \frac{5}{6}, \\ -\left(\left(18\pi^2 + \frac{1}{2r^2}\right)\cos(\pi(6r-5)) + \frac{1}{2r^2} + \frac{3\pi}{r}\sin(\pi(6r-5))\right), & \text{wenn } \frac{5}{6} \leqslant r \leqslant 1, \end{cases}$$

$$\partial_r u_1(r) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } 0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{6}, \\ 6\beta(6r-1)^{\beta-1}, & \text{wenn } \frac{1}{6} \leqslant r \leqslant \frac{1}{3}, \\ 0, & \text{wenn } \frac{1}{3} \leqslant r \leqslant \frac{1}{2}, \\ -6\beta\left(\frac{5}{2}-3r\right)^{\beta-1}, & \text{wenn } \frac{1}{2} \leqslant r \leqslant \frac{5}{6}, \\ 0, & \text{wenn } \frac{5}{6} \leqslant r, \end{cases}$$

$$\partial_r f_2(r) = \begin{cases} -\frac{12}{(1-\beta)^2}, & \text{wenn } 0 \leqslant r \leqslant \frac{1-\beta}{2}, \\ -\frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{r^2}, & \text{wenn } \frac{1-\beta}{2} \leqslant r \leqslant \frac{1+\beta}{2}, \\ -\frac{4}{(1-\beta)^3}\left(32r - 9(\beta+3) + \frac{3\beta+1}{r^2}\right), & \text{wenn } \frac{1+\beta}{2} \leqslant r \leqslant 1, \end{cases}$$

$$\partial_r u_2(r) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } 0 \leqslant r \leqslant \frac{1-\beta}{2}, \\ -\frac{1}{\beta}, & \text{wenn } \frac{1-\beta}{2} \leqslant r \leqslant \frac{1+\beta}{2}, \\ 0, & \text{wenn } \frac{1+\beta}{2} \leqslant r. \end{cases}$$

Mit diesen Informationen kann mit `computeExactEnergyBV.m` die exakte Energie berechnet werden und somit durch eintragen der exakten Energie in die Variable `exactEnergy` im Benchmark und setzen der Flag `useExactEnergy=true` das Experiment durch anschließendes Ausführen von `startAlgorithmCR.m` gestartet werden.

6.3. Bilder als Input und Rauschverminderung

7. Experimente

A. Appendix

Literatur

[ABM14] Hedy Attouch, Giuseppe Buttazzo und Gérard Michaille. *Variational Analysis in Sobolev and BV Spaces. Applications to PDEs and Optimization.* Second Edition. Bd. 17. MOS-SIAM Series on Optimization. Philadelphia: Society for Industrial und Applied Mathematics, Mathematical Optimization Society, 2014. ISBN: 978-1-611973-47-1.

[AK06] Gilles Aubert und Pierre Kornprobst. *Mathematical Problems in Image Processing. Partial Differential Equations and the Calculus of Variations.* Second Edition. Bd. 147. Applied Mathematical Sciences. New York: Springer, 2006. ISBN: 0-387-32200-0.

[Bar15a] Sören Bartels. „Error control and adaptivity for a variational model problem defined on functions of bounded variation“. In: *Mathematics of Computation* 84.293 (2015), S. 1217–1240. URL: `https://doi.org/10.1090/S0025-5718-2014-02893-7`.

[Bar15b] Sören Bartels. *Numerical Methods for Nonlinear Partial Differential Equations.* Bd. 47. Springer Series in Computational Mathematics. Springer International Publishing, 2015. ISBN: 978-3-319-13796-4. DOI: `10.1007/978-3-319-13797-1`.

[Bra98] Andrea Braides. *Approximation of free-discontinuity problems.* Bd. 1694. Lecture Notes in Mathematics. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1998. ISBN: 3-540-64771-6. URL: `https://doi.org/10.1007/BFb0097344`.

[CP10] Antonin Chambolle und Thomas Pock. „A First-Order Primal-Dual Algorithm for Convex Problems with Applications to Imaging“. In: *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 40 (2010), S. 120–145. ISSN: 0924-9907. DOI: `10.1007/s10851-010-0251-1`. URL: `https://doi.org/10.1007/s10851-010-0251-1`.

[EG92] Lawrence C. Evans und Ronald F. Gariepy. *Measure Theory and Fine Properties of Functions.* CRC Press, 1992. ISBN: 0-8493-7157-0.

[Get12] Pascal Getreuer. „Rudin-Osher-Fatemi Total Variation Denoising using Split Bregman“. In: *Image Processing On Line* 2 (2012), S. 74–95. URL: `https://doi.org/10.5201/ipol.2012.g-tvd`.

[Roc70] R. Tyrrell Rockafellar. *Convex Analysis.* New Jersey: Princeton University Press, 1970. ISBN: 0-691-08069-0.

[ROF92] Leonid I. Rudin, Stanley Osher und Emad Fatemi. „Nonlinear total variation based noise removal algorithms“. In: Bd. 60. 1-4. 1992, S. 259–268. DOI: `10.1016/0167-2789(92)90242-F`. URL: `https://doi.org/10.1016/0167-2789(92)90242-F`.

[Zei85] Eberhard Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications. III: Variational Methods and Optimization.* New York: Springer Science+Business Media, LLC, 1985. ISBN: 978-1-4612-9529-7.

[Zei86] Eberhard Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications. I: Fixed-Point Theorems.* New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo: Springer-Verlag, 1986. ISBN: 0-387-90914-1.

Selbständigkeitserklärung

Ich erkläre, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und noch nicht für andere Prüfungen eingereicht habe. Sämtliche Quellen, einschließlich Internetquellen, die unverändert oder abgewandelt wiedergegeben werden, insbesondere Quellen für Texte, Grafiken, Tabellen und Bilder, sind als solche kenntlich gemacht. Mir ist bekannt, dass bei Verstößen gegen diese Grundsätze ein Verfahren wegen Täuschungsversuchs bzw. Täuschung eingeleitet wird.

Berlin, den 30. Januar 2021,