

Humboldt-Universität zu Berlin  
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät  
Institut für Mathematik



# **Die Crouzeix-Raviart Finite-Elemente Methode für eine Minimierung im Raum der Funktionen von beschränkter Variation**

Enrico Bergmann

Version: 25. Juni 2020

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2. Theoretische Grundlagen</b>	<b>4</b>
2.1. Vorbereitung . . . . .	4
2.2. Direkte Methode der Variationsrechnung . . . . .	4
2.3. Subdifferential . . . . .	4
2.4. Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen . . . . .	4
2.5. Funktionen Beschränkter Variation . . . . .	4
<b>3. Das kontinuierliche Problem</b>	<b>6</b>
<b>4. Das diskrete Problem</b>	<b>8</b>
<b>5. Numerische Realisierung</b>	<b>10</b>
<b>6. Experimente</b>	<b>11</b>
6.1. Konstruktion eines Experiments mit exakter Lösung . . . . .	11
<b>A. Appendix</b>	<b>14</b>

# **1. Einleitung**

## 2. Theoretische Grundlagen

Dieser Abschnitt folgt Kapitel 10 von [bartels]. Dabei sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein offenes, polygonal berandetes Lipschitz-Gebiet.

### 2.1. Vorbereitung

**Definition 2.1** (braides). Eine Funktion  $\mu : \mathcal{B}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^N$  heißt (Vektor-) Maß auf  $\Omega$ , wenn sie abzählbar additiv ist, d.h. für alle  $(B_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}(\Omega)$  mit  $B_j \cap B_k = \emptyset$  für  $j \neq k$  gilt

$$\mu \left( \dot{\bigcup}_{j \in \mathbb{N}} B_j \right) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(B_j).$$

Die Menge aller dieser Maße sei  $\mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ .

Im Fall  $N = 1$  heißt  $\mu$  skalares Maß. Falls  $\mu$  zusätzlich nur Werte in  $[0, \infty)$  annimmt, heißt es positives Maß. Die Menge aller skalaren Maße sei  $\mathcal{M}(\Omega)$  und die Menge aller positiven Maße sei  $\mathcal{M}_+(\Omega)$ .

*Bemerkung 2.2.* Die übliche Anforderung  $\mu(\emptyset) = 0$  an ein Maß ist äquivalent zur Bedingung, dass  $A \in \mathcal{B}(\Omega)$  existiert, sodass  $\mu(A)$  in jeder Komponente endliche Werte annimmt.

Da in Definition 2.1 als Wertebereich  $\mathbb{R}^N$  gefordert wird, ist diese äquivalente Bedingung erfüllt.

**Definition 2.3.** Eine Funktion  $\mu : \mathcal{B}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^N$  heißt Radonmaß auf  $\Omega$ , wenn  $\mu|_{\mathcal{B}(\Omega')}$  ein Maß auf jeder Menge  $\Omega' \subset\subset \Omega$  (d.h.  $\text{cl}(\Omega') \subset \text{int}(\Omega)$ ) ist.

### 2.2. Direkte Methode der Variationsrechnung

### 2.3. Subdifferential

### 2.4. Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen

### 2.5. Funktionen Beschränkter Variation

**Definition 2.4** (Funktionen beschränkter Variation). Eine Funktion  $u \in L^1(\Omega)$  ist von beschränkter Variation, wenn ihre distributionelle Ableitung ein Radonmaß definiert, d.h. eine Konstante  $c \geq 0$  existiert, sodass

$$\langle Du, \Phi \rangle = - \int_{\Omega} u \operatorname{div}(\phi) \, dx \leq c \|\phi\|_{L^\infty(\Omega)} \quad (2.1)$$

für alle  $\phi \in C_C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ .

Die minimale Konstante  $c \geq 0$ , die (2.1) erfüllt, heißt totale Variation von  $Du$  und besitzt die Darstellung

$$|u|_{\text{BV}(\Omega)} = \sup_{\substack{\phi \in C_C^1(\Omega; \mathbb{R}^n) \\ \|\phi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1}} - \int_{\Omega} u \operatorname{div}(\phi) \, dx.$$

Der Raum aller Funktionen beschränkter Variation  $\text{BV}(\Omega)$  ist ausgestattet mit der Norm

$$\|u\|_{\text{BV}(\Omega)} := \|u\|_{L^1(\Omega)} + |u|_{\text{BV}(\Omega)}.$$

**Definition 2.5.** Sei  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{BV}(\Omega)$  und sei  $u \in \text{BV}(\Omega)$  mit  $u_n \rightarrow u$  in  $L^1(\Omega)$  für  $n \rightarrow \infty$ .

- (i) Die Folge  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert strikt gegen  $u$ , wenn  $|u_n|_{\text{BV}(\Omega)} \rightarrow |u|_{\text{BV}(\Omega)}$  für  $n \rightarrow \infty$ .
- (ii) Die Folge  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert schwach gegen  $u$ , wenn  $Du_n \rightharpoonup^* Du$  in  $\mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^n)$  für  $n \rightarrow \infty$ , d.h. für alle  $\phi \in C_0(\Omega; \mathbb{R}^n)$  gilt  $\langle Du_n, \phi \rangle \rightarrow \langle Du, \phi \rangle$  für  $n \rightarrow \infty$ .

**Theorem 2.6** (Schwache Unterhalbstetigkeit). *Seien  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{BV}(\Omega)$  und  $u \in L^1(\Omega)$  mit  $|u_n|_{\text{BV}(\Omega)} \leq c$  für ein  $c > 0$  und alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $u_n \rightarrow u$  in  $L^1(\Omega)$  für  $n \rightarrow \infty$ .*

*Dann gilt  $u \in \text{BV}(\Omega)$  und  $|u|_{\text{BV}(\Omega)} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} |u_n|_{\text{BV}(\Omega)}$ . Außerdem gilt  $u_n \rightharpoonup u$  in  $\text{BV}(\Omega)$  für  $n \rightarrow \infty$ .*

**Theorem 2.7** (Approximation mit glatten Funktionen). *Die Räume  $C^\infty(\overline{\Omega})$  und  $C^\infty(\Omega) \cap \text{BV}(\Omega)$  liegen dicht in  $\text{BV}(\Omega)$  bezüglich strikter Konvergenz.*

**Theorem 2.8.** *Sei  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{BV}(\Omega)$  eine beschränkte Folge. Dann existiert eine Teilfolge  $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  und ein  $u \in \text{BV}(\Omega)$ , sodass  $u_{n_k} \rightharpoonup u$  in  $\text{BV}(\Omega)$  für  $k \rightarrow \infty$ .*

### 3. Das kontinuierliche Problem

Betrachte für gegebenes  $\alpha > 0$  und rechte Seite  $f \in L^2(\Omega)$  das folgende Minimierungsproblem.

**Problem 3.1.** Finde  $u \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ , sodass  $u$  das Funktional

$$E(v) := \frac{\alpha}{2} \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + |v|_{\text{BV}(\Omega)} + \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} - \int_{\Omega} f v \, dx \quad (3.1)$$

unter allen  $v \in V := \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$  minimiert.

**Theorem 3.2** (Existenz einer Lösung). *Problem 3.1 besitzt eine Lösung  $u \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ .*

*Beweis.* Das Funktional  $E$  in (3.1) ist nach unten beschränkt, denn für alle  $v \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$  gilt mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und der Youngschen Ungleichung

$$\begin{aligned} E(v) &= \frac{\alpha}{2} \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + |v|_{\text{BV}(\Omega)} + \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} - \int_{\Omega} f v \, dx \\ &\geq \frac{\alpha}{2} \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + |v|_{\text{BV}(\Omega)} + \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} - \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\geq \frac{\alpha}{2} \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + |v|_{\text{BV}(\Omega)} + \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} - \frac{1}{\alpha} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{\alpha}{4} \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\geq \frac{\alpha}{4} \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + |v|_{\text{BV}(\Omega)} + \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} - \frac{1}{\alpha} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\geq -\frac{1}{\alpha} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Somit existiert eine infimierende Folge  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$  von  $E$ , d.h.  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  erfüllt  $\lim_{n \rightarrow \infty} E(u_n) = \inf_{v \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)} E(v)$ .

Gleichung (3.2) impliziert außerdem, dass  $E(v) \rightarrow \infty$ , falls  $\|v\|_{\text{BV}(\Omega)} \rightarrow \infty$ . Die Folge  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  muss also insbesondere beschränkt sein.

Nun garantiert Theorem 2.8 die Existenz einer schwach konvergenten Teilfolge  $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  von  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit schwachem Grenzwert  $u \in \text{BV}(\Omega)$ . O.B.d.A. ist  $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Analog ist  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nach Gleichung (3.2) ebenfalls beschränkt bezüglich der Norm  $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ , besitzt also eine Teilfolge (O.B.d.A. weiterhin bezeichnet mit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ), die in  $L^2(\Omega)$  schwach gegen ein  $\tilde{u} \in L^2(\Omega)$  konvergiert. Da die Einbettung  $L^2(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$  kompakt ist, existiert eine Teilfolge (O.B.d.A.  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ), die stark gegen  $\tilde{u}$  konvergiert bezüglich der Norm  $\|\cdot\|_{L^1(\Omega)}$ .

Allerdings bedeutet die schwache Konvergenz  $u_n \rightharpoonup u$  in  $\text{BV}(\Omega)$  insbesondere, dass  $u_n \rightarrow u$  in  $L^1(\Omega)$ . Es gilt also  $u = \tilde{u} \in L^2(\Omega)$ , d.h.  $u \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ .

Theorem 2.6 liefert die schwache Unterhalbstetigkeit der Seminorm  $|\cdot|_{\text{BV}(\Omega)}$  bezüglich schwacher Konvergenz in  $\text{BV}(\Omega)$ .

todo: Randterm sufs? Die beiden verbleibenden Terme sind ufs, aber auch sufs?

Damit gilt insgesamt

$$\inf_{v \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)} E(v) \leq E(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E(u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(u_n) = \inf_{v \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)} E(v),$$

d.h.  $\min_{v \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)} E(v) = E(u)$ . □

**Theorem 3.3** (Stabilität und Eindeutigkeit). *Seien  $u_1, u_2 \in \text{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$  die Minimierer des Problems 3.1 mit  $f_1, f_2 \in L^2(\Omega)$  anstelle von  $f$ .*

*Dann gilt*

$$\|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f_1 - f_2\|_{L^2(\Omega)}.$$

*Beweis.* Definiere die konvexen Funktionale  $F : \text{BV}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  und  $G_\ell : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\ell = 1, 2$ , durch

$$F(u) := |u|_{\text{BV}(\Omega)} + \|u\|_{L^1(\partial\Omega)}, \quad G_\ell(u) := \frac{\alpha}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 - \int_{\Omega} f_\ell u \, dx.$$

Bezeichne  $E_\ell := F + G_\ell$  und setze  $F$  auf  $L^2(\Omega)$  durch  $\infty$  fort.

$G_\ell$  ist Fréchet-differenzierbar mit Fréchet-Ableitung

$$\delta G_\ell(u)[v] = \alpha(u, v)_{L^2(\Omega)} - \int_{\Omega} f_\ell v \, dx = (\alpha u - f_\ell, v)_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } v \in L^2(\Omega).$$

Das Funktional  $F$  ist konvex, deshalb (TODO quote Rf) ist das Subdifferential  $\partial F$  von  $F$  monoton, d.h. für alle  $\mu_\ell \in \partial F(u_\ell)$ ,  $\ell = 1, 2$ , gilt

$$(\mu_1 - \mu_2, u_1 - u_2)_{L^2(\Omega)} \geq 0. \quad (3.3)$$

Für  $\ell = 1, 2$  wird  $E_\ell$  von  $u_\ell$  minimiert, deshalb gilt  $0 \in \partial E_\ell(u_\ell) = \partial F(u_\ell) + \partial G_\ell(u_\ell) = \partial F(u_\ell) + \{\delta G_\ell(u_\ell)\}$  (TODO quote) und es folgt  $-\delta G_\ell(u_\ell) \in \partial F(u_\ell)$ . Daraus folgt zusammen mit (3.3)

$$(-(\alpha u_1 - f_1) + (\alpha u_2 - f_2), u_1 - u_2)_{L^2(\Omega)} \geq 0.$$

Umformen und Anwenden der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung impliziert

$$\begin{aligned} \alpha \|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq (f_1 - f_2, u_1 - u_2)_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|f_1 - f_2\|_{L^2(\Omega)} \|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

TODO wie verschwindet das  $\alpha$  hier? Oder verpasst man der Abschätzung im Satz noch eine Konstante  $1/\alpha$  vor der oberen Schranke?

Falls  $\|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega)} = 0$ , gilt der Satz. Ansonsten führt Division durch  $\|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega)} \neq 0$  den Beweis zum Abschluss. □

## 4. Das diskrete Problem

Betrachte für gegebenes  $\alpha > 0$  und rechte Seite  $f \in L^2(\Omega)$  folgende Diskretisierung von Problem 3.1.

**Problem 4.1.** Finde  $u_{\text{CR}} \in V_{\text{NC}}(\mathcal{T}) := \text{CR}_0^1(\mathcal{T})$ , sodass  $u_{\text{CR}}$  das Funktional

$$E_{\text{NC}}(v_{\text{CR}}) := \frac{\alpha}{2} \|v_{\text{CR}}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}}\|_{L^1(\Omega)} - \int_{\Omega} f v_{\text{CR}} \, dx \quad (4.1)$$

unter allen  $v_{\text{CR}} \in V_{\text{NC}}(\mathcal{T})$  minimiert.

Für  $v_{\text{CR}} \in V_{\text{NC}}(\mathcal{T})$ ,  $\Lambda \in \mathbb{P}_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^n)$ ,

$$K_1(0) := \{\Lambda \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n) \mid |\Lambda(\cdot)| \leq 1 \text{ fast überall in } \Omega\},$$

$$I_{K_1(0)}(\Lambda) := \begin{cases} -\infty, & \text{falls } \Lambda \notin K_1(0) \text{ und} \\ 0, & \text{falls } \Lambda \in K_1(0), \end{cases}$$

ist das dazugehörige Lagrange-Funktional definiert als

$$\mathcal{L}_h(v_{\text{CR}}, \Lambda) := \int_{\Omega} \Lambda \cdot \nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}} \, dx + \frac{\alpha}{2} \|v_{\text{CR}}\|_{L^2(\Omega)}^2 - \int_{\Omega} f v_{\text{CR}} \, dx - I_{K_1(0)}(\Lambda) \quad (4.2)$$

und das Sattelpunktsproblem dem entsprechend wie folgt.

**Problem 4.2.** Löse

$$\inf_{v_{\text{CR}} \in V_{\text{NC}}(\mathcal{T})} \sup_{\Lambda \in \mathbb{P}_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^n)} \mathcal{L}_h(v_{\text{CR}}, \Lambda).$$

**Theorem 4.3** (Charakterisierung diskreter Lösungen). *Es existiert eine eindeutige Lösung  $u_{\text{CR}} \in V_{\text{NC}}(\mathcal{T})$  von Problem 4.1. Außerdem gelten folgende äquivalente Charakterisierungen von  $u_{\text{CR}}$ .*

(i) *Es existiert ein  $\Lambda \in \mathbb{P}_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^n)$  mit  $|\Lambda(\cdot)| \leq 1$  fast überall in  $\Omega$ , sodass*

$$\begin{aligned} \Lambda(\cdot) \cdot \nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}(\cdot) &= |\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}(\cdot)| \quad \text{fast überall in } \Omega \text{ und} \\ (\Lambda, \nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}})_{L^2(\Omega)} &= (f - \alpha u_{\text{CR}}, v_{\text{CR}})_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } v_{\text{CR}} \in V_{\text{NC}}(\mathcal{T}). \end{aligned}$$

(ii) *Für alle  $v_{\text{CR}} \in V_{\text{NC}}(\mathcal{T})$  gilt die Variationsungleichung*

$$(f - \alpha u_{\text{CR}}, v_{\text{CR}} - u_{\text{CR}})_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}}\|_{L^1(\Omega)} - \|\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}\|_{L^1(\Omega)}.$$

*Beweis.* (i). Es existiert eine eindeutige Lösung  $u_{\text{CR}} \in V_{\text{NC}}(\mathcal{T})$  von Problem 4.1, deshalb besitzt das Sattelpunktsproblem 4.2 eine Lösung  $(u_{\text{CR}}, \Lambda) \in V_{\text{NC}}(\mathcal{T}) \times$



$(\mathbb{P}_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^n) \cap K_1(0))$ . In der ersten Komponente ist das Lagrange-Funktional Fréchet-differenzierbar mit

$$\delta_{u_{\text{CR}}} \mathcal{L}_h(u_{\text{CR}}, \Lambda)[v_{\text{CR}}] = \int_{\Omega} \Lambda \cdot \nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}} \, dx + \alpha(u_{\text{CR}}, v_{\text{CR}})_{L^2(\Omega)} - \int_{\Omega} f v_{\text{CR}} \, dx.$$

Die Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen für eine Lösung  $(u_{\text{CR}}, \Lambda) \in V_{\text{NC}} \times (\mathbb{P}_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^n) \cap K_1(0))$  des Sattelpunktsproblems 4.2 lauten damit

$$\begin{aligned} 0 &= \delta_{u_{\text{CR}}} \mathcal{L}_h(u_{\text{CR}}, \Lambda)[v_{\text{CR}}] \\ &= \int_{\Omega} \Lambda \cdot \nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}} \, dx + \alpha(u_{\text{CR}}, v_{\text{CR}})_{L^2(\Omega)} - \int_{\Omega} f v_{\text{CR}} \, dx \quad \text{für alle } v_{\text{CR}} \in V_{\text{NC}} \quad \text{und} \\ 0 &\in \partial_{\Lambda} \mathcal{L}_h(u_{\text{CR}}, \Lambda) = \{(\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}, \cdot)_{L^2(\Omega)}\} - \partial I_{K_1(0)}(\Lambda). \end{aligned}$$

Die erste Bedingung ist für alle  $v_{\text{CR}} \in V_{\text{NC}}(\mathcal{T})$  äquivalent zu

$$(\Lambda, \nabla_{\text{NC}} v_{\text{CR}})_{L^2(\Omega)} = (f - \alpha u_{\text{CR}}, v_{\text{CR}})_{L^2(\Omega)}.$$

Die zweite Bedingung bedeutet, dass  $(\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}, \cdot)_{L^2(\Omega)} \in -\partial I_{K_1(0)}(\Lambda)$ , d.h. für alle  $q_0 \in \mathbb{P}_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^n)$  gilt

$$(\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}, q_0 - \Lambda)_{L^2(\Omega)} \leq I_{K_1(0)}(q_0) - I_{K_1(0)}(\Lambda) = I_{K_1(0)}(q_0).$$

Für  $q_0 \in \mathbb{P}_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^n) \cap K_1(0)$  folgt insbesondere

$$\begin{aligned} (\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}, q_0 - \Lambda)_{L^2(\Omega)} &\leq 0, \quad \text{also} \\ (\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}, q_0)_{L^2(\Omega)} &\leq (\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}, \Lambda)_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Mit der Wahl  $q_0 := \text{sign } \nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}$ , der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und  $\Lambda \in K_1(0)$  impliziert das

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}| \, dx &\leq (\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}, \Lambda)_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \int_{\Omega} |\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}| |\Lambda| \, dx \leq \int_{\Omega} |\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}| \, dx \quad \text{bzw.} \\ \sum_{T \in \mathcal{T}} |T| |(\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}})_{|T}| &= \sum_{T \in \mathcal{T}} |T| (\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}} \cdot \Lambda)_{|T} \end{aligned}$$

Außerdem gilt mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung auf allen  $T \in \mathcal{T}$ , dass  $(\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}} \cdot \Lambda)_{|T} \leq (\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}})_{|T}$ . Dementsprechend muss sogar für alle  $T \in \mathcal{T}$  gelten, dass  $(\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}} \cdot \Lambda)_{|T} = (\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}})_{|T}$ , d.h. fast überall in  $\Omega$  gilt  $\Lambda(\cdot) \cdot \nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}(\cdot) = |\nabla_{\text{NC}} u_{\text{CR}}(\cdot)|$ .  $\square$

## **5. Numerische Realisierung**

## 6. Experimente

### 6.1. Konstruktion eines Experiments mit exakter Lösung

Um eine rechte Seite zu finden, zu der die exakte Lösung bekannt ist, wähle eine Funktion des Radius  $u \in H_0^1([0, 1])$  mit Träger im zweidimensionalen Einheitskreis. Insbesondere muss damit gelten  $u(1) = 0$  und  $u$  stetig. Die rechte Seite als Funktion des Radius  $f \in L^2([0, 1])$  ist dann gegeben durch

$$f := \alpha u - \partial_r(\text{sign}(\partial_r u)) - \frac{\text{sign}(\partial_r u)}{r},$$

wobei für  $F \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  gilt  $\text{sign}(F) := \left\{ \frac{F}{|F|} \right\}$  und  $\text{sign}(0) \in B_1(0)$ . Damit außerdem gilt  $f \in H_0^1([0, 1])$ , was z.B. für GLEB relevant ist, muss also noch Stetigkeit von  $\text{sign}(\partial_r u)$  und  $\partial_r(\text{sign}(\partial_r u))$  verlangt werden und  $\partial_r(\text{sign}(\partial_r u(1))) = \text{sign}(\partial_r u(1)) = 0$ . Damit  $f$  in 0 definierbar ist, muss auch gelten  $\text{sign}(\partial_r u) \in o(r)$  für  $r \rightarrow 0$ .

Damit erhält man für die Funktion

$$u_1(r) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } 0 \leq r \leq \frac{1}{6}, \\ 1 + (6r - 1)^\beta, & \text{wenn } \frac{1}{6} \leq r \leq \frac{1}{3}, \\ 2, & \text{wenn } \frac{1}{3} \leq r \leq \frac{1}{2}, \\ 2(\frac{5}{2} - 3r)^\beta, & \text{wenn } \frac{1}{2} \leq r \leq \frac{5}{6}, \\ 0, & \text{wenn } \frac{5}{6} \leq r, \end{cases}$$

wobei  $\beta \geq 1/2$ , mit der Wahl

$$\text{sign}(\partial_r u_1(r)) = \begin{cases} 12r - 36r^2, & \text{wenn } 0 \leq r \leq \frac{1}{6}, \\ 1, & \text{wenn } \frac{1}{6} \leq r \leq \frac{1}{3}, \\ \cos(\pi(6r - 2)), & \text{wenn } \frac{1}{3} \leq r \leq \frac{1}{2}, \\ -1, & \text{wenn } \frac{1}{2} \leq r \leq \frac{5}{6}, \\ -\frac{1 + \cos(\pi(6r - 5))}{2}, & \text{wenn } \frac{5}{6} \leq r \leq 1, \end{cases}$$

die rechte Seite

$$f_1(r) := \begin{cases} \alpha - 12(2 - 9r), & \text{wenn } 0 \leq r \leq \frac{1}{6}, \\ \alpha(1 + (6r - 1)^\beta) - \frac{1}{r}, & \text{wenn } \frac{1}{6} \leq r \leq \frac{1}{3}, \\ 2\alpha + 6\pi \sin(\pi(6r - 2)) - \frac{1}{r} \cos(\pi(6r - 2)), & \text{wenn } \frac{1}{3} \leq r \leq \frac{1}{2}, \\ 2\alpha(\frac{5}{2} - 3r)^\beta + \frac{1}{r}, & \text{wenn } \frac{1}{2} \leq r \leq \frac{5}{6}, \\ -3\pi \sin(\pi(6r - 5)) + \frac{1 + \cos(\pi(6r - 5))}{2r}, & \text{wenn } \frac{5}{6} \leq r \leq 1. \end{cases}$$

## 6. Experimente

Für die Funktion

$$u_2(r) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } 0 \leq r \leq \frac{1-\beta}{2}, \\ -\frac{1}{\beta}r + \frac{1+\beta}{2\beta}, & \text{wenn } \frac{1-\beta}{2} \leq r \leq \frac{1+\beta}{2}, \\ 0, & \text{wenn } \frac{1+\beta}{2} \leq r, \end{cases}$$

mit der Wahl

$$\text{sign}(\partial_r u_2(r)) := \begin{cases} \frac{4}{1-\beta}r \left( \frac{1}{1-\beta}r - 1 \right), & \text{wenn } 0 \leq r \leq \frac{1-\beta}{2}, \\ -1, & \text{wenn } \frac{1-\beta}{2} \leq r \leq \frac{1+\beta}{2}, \\ \frac{4}{(\beta-1)^3} (4r^3 - 3(\beta+3)r^2 + 6(\beta+1)r - 3\beta - 1), & \text{wenn } \frac{1+\beta}{2} \leq r \leq 1, \end{cases}$$

die rechte Seite

$$f_2(r) := \begin{cases} \alpha - \frac{4}{1-\beta} \left( \frac{3}{1-\beta}r - 2 \right), & \text{wenn } 0 \leq r \leq \frac{1-\beta}{2}, \\ -\frac{\alpha}{\beta} \left( r - \frac{1+\beta}{2} \right) + \frac{1}{r}, & \text{wenn } \frac{1-\beta}{2} \leq r \leq \frac{1+\beta}{2}, \\ \frac{-4}{(\beta-1)^3} (16r^2 - 9(\beta+3)r + 12(\beta+1) - \frac{3\beta+1}{r}), & \text{wenn } \frac{1+\beta}{2} \leq r \leq 1. \end{cases}$$

Damit können Experimente durchgeführt werden bei denen `exactSolutionKnown = true` gesetzt werden kann und entsprechend auch der  $L^2$ -Fehler berechnet wird.

Soll nun auch die Differenz der exakten Energie mit der garantierten unteren Energie Schranke (GLEB) berechnet werden, dann werden die stückweisen Gradienten der exakten Lösung und der rechten Seite benötigt.

Dabei gelten folgende Ableitungsregeln für die Ableitungen einer Funktion  $g$ , wenn man ihr Argument  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  in Polarkoordinaten mit Länge  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$  und Winkel  $\varphi = \text{atan2}(x_2, x_1)$ , wobei

$$\text{atan2}(x_2, x_1) := \begin{cases} \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right), & \text{wenn } x_1 > 0, \\ \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right) + \pi, & \text{wenn } x_1 < 0, x_2 \geq 0, \\ \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right) - \pi, & \text{wenn } x_1 < 0, x_2 < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{wenn } x_1 = 0, x_2 > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{wenn } x_1 = 0, x_2 < 0, \\ \text{undefiniert}, & \text{wenn } x_1 = x_2 = 0, \end{cases}$$

auffasst,

$$\begin{aligned} \partial_{x_1} &= \cos(\varphi) \partial_r - \frac{1}{r} \sin(\varphi) \partial_\varphi, \\ \partial_{x_2} &= \sin(\varphi) \partial_r + \frac{1}{r} \cos(\varphi) \partial_\varphi. \end{aligned}$$

Ist  $g$  vom Winkel  $\varphi$  unabhängig, so ergibt sich

$$\nabla_{(x_1, x_2)} g = (\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \partial_r g.$$

Unter Beachtung der trigonometrischen Zusammenhänge

$$\begin{aligned} \sin(\arctan(y)) &= \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}, \\ \cos(\arctan(y)) &= \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \end{aligned}$$

ergibt sich

$$(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) = (x_1, x_2) \frac{1}{r}$$

und damit

$$\nabla_{(x_1, x_2)} g = (x_1, x_2) \frac{\partial_r g}{r},$$

es muss also nur  $\partial_r g$  bestimmt werden.

Die entsprechenden Ableitung lauten

$$\begin{aligned} \partial_r f_1(r) &= \begin{cases} 108, & \text{wenn } 0 \leq r \leq \frac{1}{6}, \\ 6\alpha\beta(6r-1)^{\beta-1} + \frac{1}{r^2}, & \text{wenn } \frac{1}{6} \leq r \leq \frac{1}{3}, \\ (36\pi^2 + \frac{1}{r^2}) \cos(\pi(6r-2)) + \frac{6\pi}{r} \sin(\pi(6r-2)), & \text{wenn } \frac{1}{3} \leq r \leq \frac{1}{2}, \\ -\left(6\alpha\beta\left(\frac{5}{2} - 3r\right)^{\beta-1} + \frac{1}{r^2}\right), & \text{wenn } \frac{1}{2} \leq r \leq \frac{5}{6}, \\ -\left((18\pi^2 + \frac{1}{2r^2}) \cos(\pi(6r-5)) + \frac{1}{2r^2} + \frac{3\pi}{r} \sin(\pi(6r-5))\right), & \text{wenn } \frac{5}{6} \leq r \leq 1, \end{cases} \\ \partial_r u_1(r) &= \begin{cases} 0, & \text{wenn } 0 \leq r \leq \frac{1}{6}, \\ 6\beta(6r-1)^{\beta-1}, & \text{wenn } \frac{1}{6} \leq r \leq \frac{1}{3}, \\ 0, & \text{wenn } \frac{1}{3} \leq r \leq \frac{1}{2}, \\ -6\beta\left(\frac{5}{2} - 3r\right)^{\beta-1}, & \text{wenn } \frac{1}{2} \leq r \leq \frac{5}{6}, \\ 0, & \text{wenn } \frac{5}{6} \leq r, \end{cases} \\ \partial_r f_2(r) &= \begin{cases} -\frac{12}{(1-\beta)^2}, & \text{wenn } 0 \leq r \leq \frac{1-\beta}{2}, \\ -\frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{r^2}, & \text{wenn } \frac{1-\beta}{2} \leq r \leq \frac{1+\beta}{2}, \\ -\frac{4}{(1-\beta)^3} \left(32r - 9(\beta+3) + \frac{3\beta+1}{r^2}\right), & \text{wenn } \frac{1+\beta}{2} \leq r \leq 1, \end{cases} \\ \partial_r u_2(r) &= \begin{cases} 0, & \text{wenn } 0 \leq r \leq \frac{1-\beta}{2}, \\ -\frac{1}{\beta}, & \text{wenn } \frac{1-\beta}{2} \leq r \leq \frac{1+\beta}{2}, \\ 0, & \text{wenn } \frac{1+\beta}{2} \leq r. \end{cases} \end{aligned}$$

Mit diesen Informationen kann mit `computeExactEnergyBV.m` die exakte Energie berechnet werden und somit durch eintragen der exakten Energie in die Variable `exactEnergy` im Benchmark und setzen der Flag `useExactEnergy=true` das Experiment durch anschließendes Ausführen von `startAlgorithmCR.m` gestartet werden.

# A. Appendix

Die erste Quelle (und wichtigste) ist [Bar15] und dann gibt es bisher noch [Roc70, S. 200]. Um zu testen zitiert man am besten [TPT99].

# Literatur

- [Bar15] Sören Bartels. *Numerical Methods for Nonlinear Partial Differential Equations*. Bd. 47. Springer Series in Computational Mathematics. Springer International Publishing, 2015. ISBN: 978-3-319-13796-4; 978-3-319-13797-1. DOI: 10.1007/978-3-319-13797-1.
- [Roc70] R. Tyrrell Rockafellar. *Convex Analysis*. Princeton University Press, 1970. ISBN: 0-691-08069-0. DOI: 10.1007/978-3-319-13797-1.
- [TPT99] Test, Probe und Böse Tierversuch. *Test*. Versuch, 1999.

# Selbständigkeitserklärung

Ich erkläre, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und noch nicht für andere Prüfungen eingereicht habe. Sämtliche Quellen, einschließlich Internetquellen, die unverändert oder abgewandelt wiedergegeben werden, insbesondere Quellen für Texte, Grafiken, Tabellen und Bilder, sind als solche kenntlich gemacht. Mir ist bekannt, dass bei Verstößen gegen diese Grundsätze ein Verfahren wegen Täuschungsversuchs bzw. Täuschung eingeleitet wird.

Berlin, den 25. Juni 2020,