

Drei dPG-Methoden niedriger Ordnung für Lineare Elastizität

Masterarbeit
Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät
Institut für Mathematik

eingereicht von: Friederike Hellwig

geboren am: 28.06.1989 in: Berlin

Betreuer: Prof. Dr. Carsten Carstensen

Gutachterin: Dr. Caroline Löbhard

Berlin, den 05.12.2014

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
2	Vorbereitungen	9
2.1	Triangulierung	9
2.2	Matrizen und Vektoren	11
2.3	Funktionenräume	12
2.4	Spurräume	14
2.5	Diskrete Räume	16
2.6	Modellierung	18
2.7	Verwendete Hilfsmittel und Resultate	23
3	Allgemeiner Rahmen der dPG-Methode	32
3.1	Annahmen	32
3.2	Idealisierte und praktische dPG-Methode	32
3.3	Betrachtungen für allgemeine direkte Zerlegungen von Y_h	36
3.4	Hilbertraum-Fall und Zusammenhang zur praktischen dPG-Methode	39
4	Analysis der ersten dPG-Methode	42
4.1	Vorbereitungen und Problemformulierung	42
4.2	Diskretisierung	48
4.3	Beweis der diskreten Inf-Sup-Bedingung	51
5	Analysis der zweiten dPG-Methode	58
5.1	Vorbereitungen und Problemformulierung	58
5.2	Diskretisierung und Beweis der diskreten Inf-Sup-Bedingung	61
6	Analysis der dritten dPG-Methode	64
6.1	Vorbereitungen und Problemformulierung	64
6.2	Diskretisierung und Beweis der diskreten Inf-Sup-Bedingung	67
7	Implementierung	75
7.1	Basis-Funktionen	75
7.2	Steifigkeitsmatrix	77
7.2.1	Block B	77
7.2.2	Block C	79
7.2.3	Block D	79
7.2.4	Block F	81
7.2.5	Block G	82
7.3	Normmatrix	83
7.3.1	Erste und Zweite Methode	84
7.3.2	Dritte Methode	88
7.4	Löser und Fehlerschätzer	89
7.5	Skalierung	92
7.5.1	Skalierung der Lamé-Parameter	93
7.5.2	Skalierung des Gebietes	93

8 Numerische Experimente	95
8.1 Einheitsquadrat mit exakter Lösung	95
8.2 Rotiertes L-Gebiet mit exakter Lösung	96
8.3 Cooks Membranproblem	101
8.4 L-Gebiet mit Locking	103
8.5 Kirsch-Problem	104
8.6 Circular Inclusion	108
9 Zusammenfassung	111
Literatur	112

1 Einleitung

Bei der mathematischen Modellierung vieler physikalischer Vorgänge ergeben sich partielle Differentialgleichungen. So werden etwa Strömungen von Newtonschen Flüssigkeiten durch die Navier-Stokes-Gleichungen beschrieben, Temperaturverteilungen in Medien genügen der Wärmeleitungsgleichung und im Elektromagnetismus existieren die berühmten Maxwell-Gleichungen.

Für verschiedenste Anwendungen, von der Fertigung von Flugzeugteilen bis zur Modellierung von Biomaterialien, sind Lösungen solcher Gleichungen interessant. Doch diese lassen sich nur in Spezialfällen auch theoretisch berechnen. Zur approximativen Lösung existieren verschiedene numerische Verfahren, unter ihnen die Finite-Elemente-Methoden (*FEM*). Sie wurden von Ingenieuren und Mathematikern in den 1950er Jahren gleichzeitig entwickelt [Ode91]. So wird häufig ein Paper von Courant [Cou43] als Grundstein ihrer theoretischen Betrachtung angesehen. Heutzutage besitzen die Finite-Elemente-Methoden gleichermaßen eine breite mathematische Theorie als auch Beliebtheit in der Anwendung bei Ingenieuren. Hierbei gibt es eine riesige Vielfalt von verschiedenen Methoden und Ansätzen, die je nach Anwendung interessant sind und jeweils ihre Vor- und Nachteile aufweisen. In der vorliegenden Masterarbeit wird eine spezielle Klasse von Finite-Elemente-Methoden, die Klasse der diskontinuierlichen Petrov-Galerkin-Finite-Elemente-Methoden (*dPG-FEM*), in Anwendung auf die Navier-Lamé-Gleichungen der linearisierten Elastizität untersucht.

Die *Navier-Lamé-Gleichungen* beschreiben hierbei, wie sich ein elastischer Körper, auf den bestimmte Volumen- und Oberflächenkräfte wirken, deformiert. Abbildung 1 zeigt eine elastische Deformation einer quadratischen Platte mit kreisrundem Loch, auf die an den Seiten Zugkräfte wirken, die mit der im Rahmen dieser Arbeit erstellten Software simuliert wurde. Bei gegebenen Kräften f und g und Randdaten u_D sind die Verschiebungen u und symmetrischen Spannungen σ im Körper die unbekannten Größen. Die hier betrachteten Gleichungen für die linearisierte Elastizität lauten

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \sigma &= f && \text{auf } \Omega, \\ \sigma &= \mathbb{C} \varepsilon(u) && \text{auf } \Omega, \\ u &= u_D && \text{auf } \Gamma_D, \\ \sigma \nu &= g && \text{on } \Gamma_N. \end{aligned}$$

Die linearisierte Elastizität geht dabei davon aus, dass sich Verzerrungen $\varepsilon(u)$ und Spannungen im Körper linear verhalten, in diesem Fall verbunden durch den linearen Elastizitätstensor \mathbb{C} , der von den zwei Material-Parametern μ und λ abhängt. Dies ist eine einschränkende Annahme, die nur für kleine Verzerrungen beziehungsweise Verschiebungen vertretbar ist, siehe Abbildung 2. Somit reihen sich die Navier-Lamé-Gleichungen als Teil der nichtlinearen Elastizitätstheorie ein. Ein kritischer Punkt für alle Diskretisierungen dieser Gleichungen ist ihr Verhalten für nahezu inkompressible Materialien, das im Grenzfall $\lambda \rightarrow \infty$ auftritt.

Für die Berechnung der approximativen Lösungen der Gleichungen der linearen Elastizität stehen bereits verschiedene Finite-Elemente-Methoden zur Verfügung, etwa die H^1 -konformen P_k -Elemente, Arnold-Winther-Elemente [AW02], das PEERS-Element [ABD84] oder die Kouhia-Stenberg-FEM [KS95]. Die einfachen konformen P_k -Elemente haben für $k = 1, 2, 3$ den großen

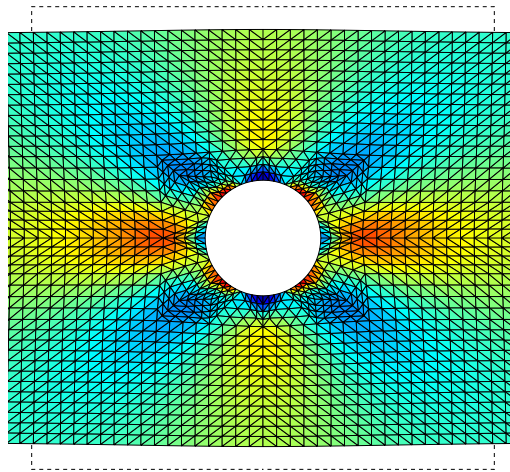


Abbildung 1: Beispiel einer elastischen Deformation. Auf eine quadratische Platte mit Loch wirken links und rechts gleich große entgegengesetzte Kräfte, die zu einer Deformation der Platte führen. Die Spannungen in der Platte sind farbig gekennzeichnet.

Nachteil des *Locking-Effektes*, einem großen vorasymptotischen Bereich für große λ . Erst für $k \geq 4$, also Polynome höherer Ordnung, zeigen die P_k -Elemente für quasi-uniforme Gitter kein Locking mehr [BS92]. Die Kouhia-Stenberg-FEM weisen zwar kein Locking auf, diese Diskretisierung ist allerdings vom Koordinatensystem abhängig. Beliebte gemischte Methoden wie das PEERS-Element erfüllen die Symmetrie-Bedingung an die Spannung nur in schwacher Form oder gar nicht. Erst mit den Arnold-Winther-Methoden [AW02; AAW08; AW03] gelang eine punktweise symmetrische Diskretisierung der Spannung in einer stabilen gemischten Methode, diese besitzen jedoch eine hohe Komplexität.

Die in dieser Arbeit vorgestellten dPG-Methoden verwenden eine punktweise symmetrische Diskretisierung der Spannungen. Die dritte Methode erweist sich außerdem als frei von Locking. Ein großer Vorteil der vorgestellten Methoden sind dabei die mögliche Verallgemeinerung auf höhere Dimensionen, höhere Polynomgrade und allgemeinere Gitter, etwa Hexaeder-Gitter. Die Methoden besitzen dabei weniger lokale Freiheitsgrade als die konformen Arnold-Winther-Methoden, im Zweidimensionalen zum Beispiel 17 für dPG und 24 für Arnold-Winther, im Dreidimensionalen 27 für dPG versus 162 für Arnold-Winther [AAW08]. Ein weiterer Vorteil der dPG-Methoden allgemein ist eine hohe Stabilität, die durch die Konstruktion großer Testräume garantiert werden kann. Wie unten gezeigt wird, besitzen die dPG-Methoden einen eingebauten Fehlerschätzer, der sogar bei inexaktem Lösen effizient und zuverlässig ist und adaptive Gitterverfeinerungsstrategien ermöglicht. Insgesamt sollen diese neuen dPG-Methoden für lineare Elastizität einfache und locking-freie Methoden mit punktweiser Symmetrie in der Spannung sein.

Die dPG-Methode im Allgemeinen wurde erfunden von Leszek Demkowicz und Jay Gopalakrishnan [DG10; DG11a; DG11b; DGN12], zunächst angewendet auf Wellentransportprobleme und Konvektions-Diffusions-Gleichungen. Der Begriff der dPG-Methode wurde schon vorher, etwa in [BMS02] benutzt, neu war bei Demkowicz und Gopalakrishnan allerdings die Idee der Berechnung optimaler Testfunktionen, die die Methode ursprünglich motivierte. Die dPG-Methode kann dabei entweder als gemischte Formulierung oder als Least-Squares-Formulierung in einer

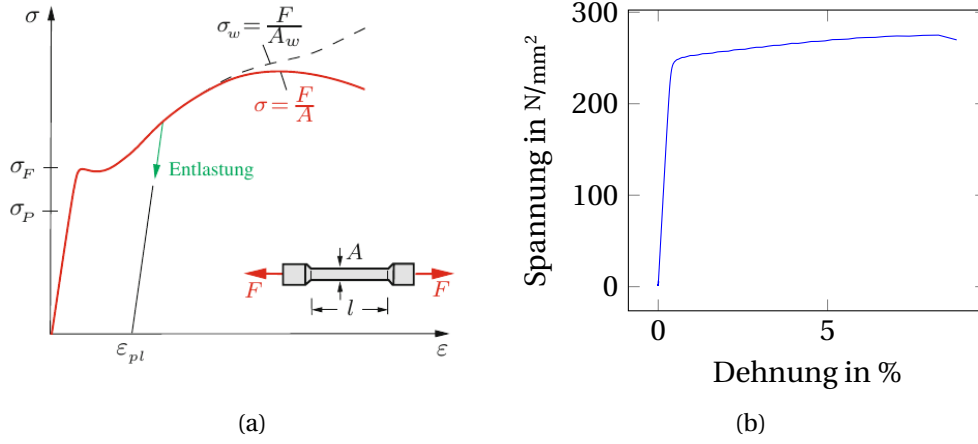


Abbildung 2: Spannungs-Dehnungs-Diagramme mit gut erkennbarem linearen Bereich, (a) idealisiert aus [GHSW14], (b) reale Kurve für Aluminium

Nichtstandard-Norm gesehen werden. In dieser Arbeit wird der allgemeine Rahmen dieser dPG-Methode, kommend von der Least-Squares-Sicht, insbesondere die *ultraschwache Formulierung* des Problems, das Konzept der *gebrochenen Testfunktionen* und die Methode der *Minimierung des Residuums in der Dualnorm*, zur Konzeption neuer Finite-Elemente-Methoden benutzt.

Grundlage aller Betrachtungen ist im allgemeinen Kontext immer eine wohlgestellte Variationsformulierung einer partiellen Differentialgleichung. Diese sucht für Banachräume X und Y und eine stetige Bilinearform $b: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ ein $x \in X$, sodass

$$b(x, y) = F(y) \quad \text{für jedes } y \in Y.$$

Sind konforme Diskretisierungen $X_h \subseteq X$, $Y_h \subseteq Y$ gegeben, besteht die praktische dPG-Methode aus der Minimierung

$$x_h \in \arg \min_{\xi_h \in X_h} \|F - b(\xi_h, \bullet)\|_{Y_h^*}.$$

Um a-priori- und a-posteriori-Abschätzungen zu gewährleisten, genügt im Hilbertraum-Fall für Diskretisierungen X_h , dass eine diskrete Inf-Sup-Bedingung

$$0 < \beta_h := \inf_{x_h \in S(X_h)} \sup_{y_h \in S(Y_h)} b(x_h, y_h)$$

auf den Sphären $S(X_h)$ und $S(Y_h)$ unabhängig von dem Parameter h und eine kontinuierliche Inf-Sup-Bedingung

$$0 < \beta := \inf_{x \in S(X)} \sup_{y \in S(Y)} b(x, y)$$

gilt. Umso größer Y_h bzw. Y ist, desto besser ist natürlich die Möglichkeit, die Inf-Sup-Bedingungen zu erfüllen, die überschüssigen Freiheitsgrade können vom Computer wieder aufgelöst werden. Im Falle der später vorgestellten Methode gilt $X_h \neq Y_h$, weshalb die Methode auch als *Petrov-Galerkin-Methode* bezeichnet wird im Gegensatz zur *Galerkin-Methode*, für die $X_h = Y_h$ gilt.

Sind also solche Inf-Sup-Bedingungen erfüllt, gilt eine a-priori-Abschätzung der Form

$$\|x - x_h\|_X \leq (1 + \|b\|/\beta_h) \text{dist}_X(x, X_h).$$

Die a-posteriori-Abschätzung

$$\beta \|x - \xi_h\|_X \leq \|F - b(\xi_h, \bullet)\|_{Y_h^*} + \|F \circ (1 - \Pi)\|_{Y^*} \leq 2\|b\| \|x - \xi_h\|_X.$$

gilt hier sogar für beliebige Approximationen $\xi_h \in X_h$. Dies liefert einen allgemeinen Kontext für dPG-Methoden.

Die *ultraschwache Formulierung*, die für die vorgestellten dPG-Methoden für lineare Elastizität benutzt wird, entsteht aus einer stückweise partiellen Integration *aller* Gleichungen des Systems partieller Differentialgleichungen erster Ordnung. Die Terme der Unbekannten auf den Elementträndern werden hierbei als neue zusätzliche Unbekannte in gewissen Spurräumen betrachtet. Die diskreten Räume haben dadurch die Produktstruktur

$$\begin{aligned} X_h &:= P_0(\mathcal{T}; \mathbb{S}) \times P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2) \times P_0(\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}(N); \mathbb{R}^2) \times S_D^1(\mathcal{E}; \mathbb{R}^2), \\ Y_h &:= \text{sym } RT_0^{NC}(\mathcal{T}; \mathbb{R}^{n \times n}) \times P_1(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2), \end{aligned}$$

in die je nach Methode noch eine Nebenbedingung einfließt. Dabei ist die punktweise Symmetrie im zweiten Faktor ein entscheidendes Merkmal. Die bereits existierenden dPG-Methoden für lineare Elastizität [BDGQ12] verwenden nur eine schwache Symmetrie für die Diskretisierungen der Spannungen.

Für die Stabilität der vorgestellten Methoden sind dann wie gezeigt jeweils die Beweise der Inf-Sup-Bedingungen von entscheidender Bedeutung. Für die kontinuierliche Inf-Sup-Bedingung wird ein Splitting-Lemma und die Wohlgestelltheit der dualen gemischten Formulierung zu Hilfe genommen. In den Beweisen der diskreten Inf-Sup-Bedingung wird dann jedem $x_h = (\sigma_0, u_0, t_0, s_1) \in X_h \setminus \{0\}$ ein $y_h = (\tau_1, v_1) \in Y_h \setminus \{0\}$ zugeordnet, für das $\|x_h\|_X \|y_h\|_Y \leq Cb(x_h, y_h)$ gezeigt wird für eine von x_h, y_h und h unabhängige Konstante C . So ergibt sich dann die diskrete Inf-Sup-Bedingung für $\beta_h \geq 1/C$. Für die hier betrachtete lineare Elastizität ist es in Bezug auf Locking von besonderer Wichtigkeit, dass alle Konstanten, insbesondere die Inf-Sup-Konstante β_h , auch nicht vom Lamé-Parameter λ abhängen.

Innerhalb des Beweises von $\|x_h\|_X \|y_h\|_Y \leq Cb(x_h, y_h)$ erweisen sich die Skelett-Terme der Bilinearform als schwer behandelbar. Eine Lösung besteht darin, diese durch eine Erweiterung der diskreten Spurterme auf die benachbarten Dreiecke und eine partielle Integration in Volumenterme umzuformen. Dazu wird die Variable $s_1 \in S_D^1(\mathcal{E}; \mathbb{R}^2)$ mit der Variable $w_C \in S_D^1(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)$ sowie $t_0 \in P_0(\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}(N); \mathbb{R}^2)$ mit $q_{RT} \in RT_0(\mathcal{T}, \Gamma_N; \mathbb{R}^{2 \times 2})$ identifiziert.

Ein kritischer Punkt in den drei Beweisen ist dann für die erste und zweite Methode die Abschätzung $\|w_C\| \leq Cb(x_h, y_h)$ und für die dritte Methode $\|w_C\|_{H^1(\Omega)} \leq Cb(x_h, y_h)$. Diese Schwierigkeit wird mithilfe einer Helmholtz-Zerlegung [CD98] überwunden.

Die drei vorgestellten Methoden unterscheiden sich dahingehend, dass verschiedene Normen für die Räume X und Y verwendet werden und Nebenbedingungen der Form $\int_{\Omega} \text{tr}(\sigma_0) \, dx = 0$ in die Räume eingehen oder nicht. Die eine der beiden möglichen Normen für X , die \mathbb{C} und dadurch den Lamé-Parameter λ explizit enthält, wird gewählt für die erste und zweite Methode,

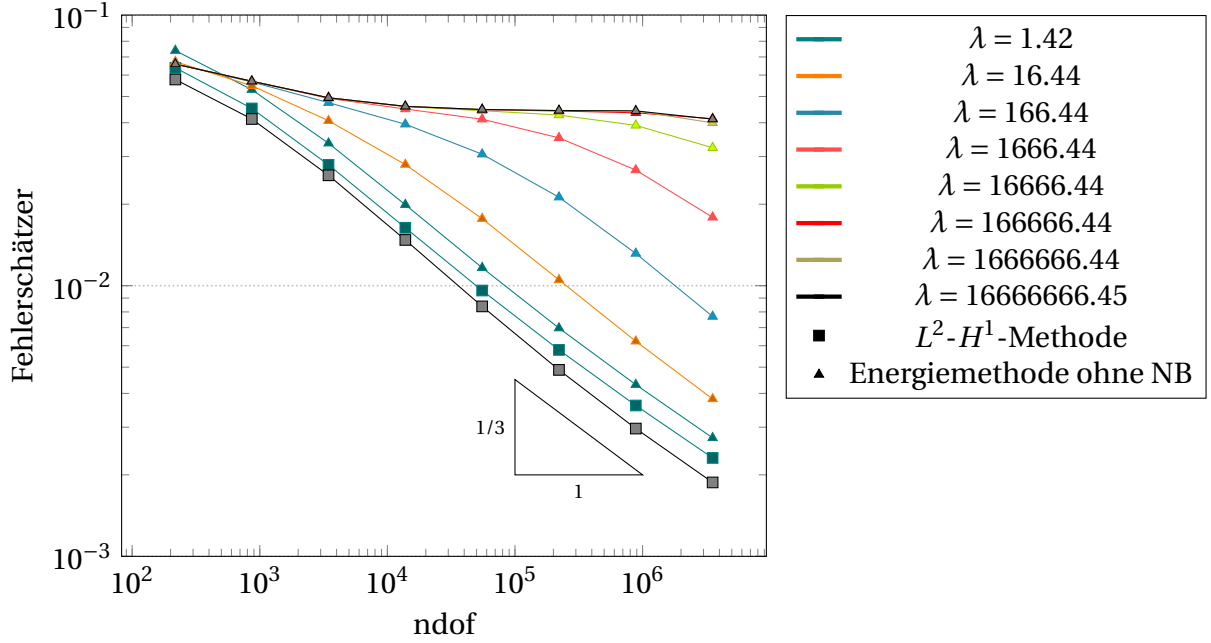


Abbildung 3: Locking-Effekt für ein L-Gebiet. Die L^2 - H^1 -Methode zeigt unabhängig vom Parameter λ sehr schnell asymptotisches Verhalten. Die Energiemethode braucht für größere Parameter λ eine immer größere Anzahl Freiheitsgrade, um in den asymptotischen Bereich zu gelangen.

die Energiemethoden genannt werden. In den Beweisen zu diesen beiden Methoden wird die Nebenbedingung nicht explizit benutzt, sodass für diese Norm also beide Methoden, mit und ohne Nebenbedingungen, stabil sind. Die λ -Abhängigkeit der Normen führt jedoch zum Locking, siehe Abbildung 3. Für die dritte Methode, die L^2 - H^1 -Methode, werden deshalb L^2 -Normen anstelle der C - und C^{-1} -Normen gewählt. Im Inf-Sup-Beweis dieser Methode, der sogenannten L^2 - H^1 -Methode, wird dann jedoch die Nebenbedingung explizit verwendet, weshalb eine dPG-Methode mit dieser Norm und ohne Nebenbedingung nicht infrage kommt.

Der Aufbau dieser Arbeit gestaltet sich wie folgt. Zunächst werden in Kapitel 2 Notationen und verwendete Hilfsmittel aufgeführt, außerdem wird eine Herleitung des Modells der linearen Elastizität gegeben. Im Kapitel 3 wird dann eine allgemeine dPG-Methode und einige für ein beliebiges Problem zu überprüfende Annahmen vorgestellt und a-priori- und a-posteriori-Resultate in diesem Fall bewiesen. Anschließend werden in Kapiteln 4 bis 6 die drei verschiedenen Methoden vorgestellt und jeweils die Annahmen aus Kapitel 3 bewiesen. Im Teil 7 wird die Implementierung der drei Methoden erläutert. Abschließend werden im Kapitel 8 numerische Experimente vorgestellt und ausgewertet.

2 Vorbereitungen

In diesem Kapitel werden die grundlegenden Notationen eingeführt. Außerdem werden die theoretischen Grundlagen zu den benutzten Räumen erklärt und einige Hilfsmittel wiederholt, die im Rest der Arbeit nützlich sein werden.

2.1 Triangulierung

Es sei in dieser Arbeit durchgehend $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes, polygonal berandetes Lipschitz-Gebiet. Es sei weiterhin der *Dirichlet-Rand* Γ_D kompakt in $\partial\Omega$ mit positivem Oberflächenmaß $|\Gamma_D| > 0$ und der *Neumann-Rand* $\Gamma_N := \partial\Omega \setminus \Gamma_D$ sein Komplement.

Definition 2.1 (Reguläre Triangulierung) Eine *reguläre Triangulierung* \mathcal{T} des Gebietes Ω ist eine endliche Menge $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_K\}$ aus abgeschlossenen n -Simplexen, wobei

- (i) $\text{int}(T) \neq \emptyset$ für alle $T \in \mathcal{T}$,
- (ii) $\overline{\Omega} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}} T$,
- (iii) $\text{int}(T_j) \cap \text{int}(T_k) = \emptyset$ für jedes $j, k = 1, \dots, K$ mit $j \neq k$, und
- (iv) $T_j \cap T_k = \{z\}$ oder $T_j \cap T_k = E$ oder $T_j \cap T_k = \emptyset$ für jedes $j, k = 1, \dots, K$ mit $j \neq k$, wobei $E = \text{conv}\{z_1, \dots, z_n\}$, $z, z_1, \dots, z_n \in \mathbb{R}^n$ Eckpunkte von T_j und T_k .

Außerdem ist $\mathcal{N} = \{z \in \mathbb{R}^n \mid \exists T \in \mathcal{T} \text{ mit } z \text{ ist Eckpunkt von } T\}$ die Menge der Knoten der Triangulierung, $\mathcal{N}(\Omega)$ bzw. $\mathcal{N}(\partial\Omega)$ die inneren Knoten bzw. Randknoten und $\mathcal{N}(T) := \mathcal{N} \cap T$ die Menge der Knoten eines n -Simplexes $T \in \mathcal{T}$. Es bezeichne weiterhin $\mathcal{E} = \{\text{conv}\{z_1, \dots, z_n\} \mid z_1 \neq \dots \neq z_n \exists T \in \mathcal{T} : \{z_1, \dots, z_n\} \subseteq \mathcal{N}(T)\}$ die Menge der Seiten der Triangulierung. Mit $\mathcal{E}(\Omega)$ bzw. $\mathcal{E}(\partial\Omega)$ werden die inneren Seiten bzw. Randseiten bezeichnet und $\mathcal{E}(T) := \{E \in \mathcal{E} \mid E \subseteq T\}$ seien die Seiten des n -Simplexes $T \in \mathcal{T}$.

Es wird weiterhin angenommen, dass die Seiten \mathcal{E} konsistent mit den Rändern Γ_D und Γ_N sind im Sinne von $\mathcal{E}(\partial\Omega) = \mathcal{E}(D) \cup \mathcal{E}(N)$ für $\mathcal{E}(D) = \{E \in \mathcal{E}(\partial\Omega) \mid E \subseteq \Gamma_D\}$ und $\mathcal{E}(N) = \{E \in \mathcal{E}(\partial\Omega) \mid E \subseteq \overline{\Gamma_N}\}$.

Definition 2.2 (Skelett) Das *Skelett* $\partial\mathcal{T}$ einer Triangulierung \mathcal{T} wird definiert durch

$$\partial\mathcal{T} := \bigcup_{T \in \mathcal{T}} \bigcup_{E \in \mathcal{E}(T)} E.$$

Definition 2.3 (Normalen, Sprünge) Es sei ν_T der äußere Einheitsnormalenvektor entlang des Randes ∂T eines n -Simplex T . Für eine innere Seite $E = \partial T_+ \cap \partial T_- \in \mathcal{E}(\Omega)$ wie in Abbildung 4a wird eine der beiden möglichen Richtungen als Einheitsnormalenvektor ν_E der Seite fixiert. Für eine Randkante $E \in \mathcal{E}(\partial\Omega)$ zeige dieser nach außen. Dies legt die Benennung der Nachbarelemente T_+ und T_- einer Kante E fest durch $\nu_{T_+}|_E = \nu_E$.

Für jedes $T \in \mathcal{T}$ und $E \in \mathcal{E}(T)$ wird dann das Vorzeichen $\varrho_{T,E} \in \{\pm 1\}$ definiert durch

$$\nu_E = \varrho_{T,E} \nu_T|_E.$$

Insbesondere gilt dann $1 = \varrho_{T_+,E} = -\varrho_{T_-,E}$.

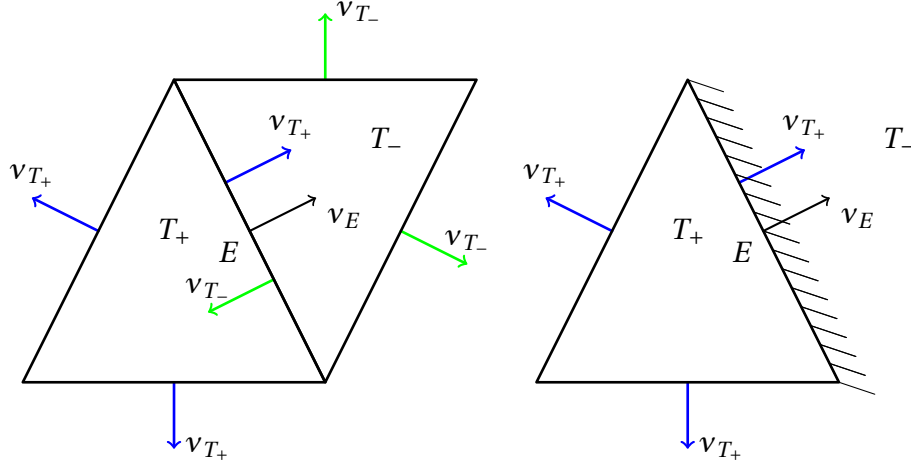


Abbildung 4: Kantenpatch einer Kante E für eine innere und eine Randkante.

Definition 2.4 Für beliebige Mengen $U \subseteq \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ oder $U \subseteq \mathbb{R}^{m \times n}$, bezeichne $L^2(\Omega; U)$ (bzw. $L^\infty(\Omega; U)$) die L^2 -Funktionen (bzw. L^∞ -Funktionen) auf Ω mit Werten in U [Wer11, S. 13ff.]. Die stückweise Polynome vom Grad k sind

$$\begin{aligned} P_k(T) &:= \{v_k \in L^\infty(T) \mid v_k \text{ ist algebraisches Polynom auf } T \text{ vom totalen Grad } \leq k\}, \\ P_k(\mathcal{T}) &:= \{v_k \in L^\infty(\Omega) \mid \forall T \in \mathcal{T}, v_k|_T \in P_k(T)\}, \\ P_k(T; U) &:= \{q_k \in L^\infty(T; U) \mid \text{jede Komponente von } q_k \text{ ist in } P_k(T)\}, \\ P_k(\mathcal{T}; U) &:= \{q_k \in L^\infty(\Omega; U) \mid \forall T \in \mathcal{T}, v_k|_T \in P_k(T; U)\}. \end{aligned}$$

Definition 2.5 (Sprünge) Für eine gegebene Funktion $v \in H^1(\mathcal{T}; U)$ (siehe Definition 2.16), definiert man den Sprung von v entlang einer inneren Seite $E \in \mathcal{E}(\Omega)$ durch $[v]_E := v|_{T_+} - v|_{T_-} \in L^2(E; U)$ und den Sprung entlang einer Randseite $E \in \mathcal{E}(\partial\Omega)$ durch $[v]_E := v \in L^2(E; U)$.

Definition 2.6 (Mittelpunkt, Durchmesser, L^2 -Projektion) Für jedes $T \in \mathcal{T}$ ist der Mittel- oder Schwerpunkt des n -Simplexes T definiert durch $\text{mid}(T) := 1/(n+1) \sum_{z \in \mathcal{N}(T)} z$. Die stückweise konstante Funktion $\text{mid}(\mathcal{T}) \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^n)$ ist definiert durch $\text{mid}(\mathcal{T})|_T := \text{mid}(T)$ für jedes $T \in \mathcal{T}$.

Außerdem bezeichnet $h_T := \text{diam}(T) := \max_{x, y \in T} |x - y|$ den Durchmesser des Simplexes T , $h_{\max} := \max_{T \in \mathcal{T}} h_T$ die maximale Netzweite der Triangulierung und $h_{\mathcal{T}} \in P_0(\mathcal{T})$ die Funktion $h_{\mathcal{T}}|_T := h_T$ für jedes $T \in \mathcal{T}$.

Die L^2 -Projektion $\Pi_0 : L^2(\Omega) \rightarrow P_0(\mathcal{T})$ ist definiert durch

$$\Pi_0 v|_T := \oint_T v \, dx := |T|^{-1} \int_T v \, dx$$

für jedes $v \in L^2(\mathcal{T})$ und $T \in \mathcal{T}$ vom Lebesgue-Maß $|T|$.

Bemerkung 2.7 Es gilt auch (vgl. Lemma 2.42), dass

$$\text{mid}(T) = \frac{1}{|T|} \int_T x \, dx.$$

2.2 Matrizen und Vektoren

Definition 2.8 Es bezeichne „ \cdot “ das euklidische Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n und „ \bullet “ das Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^{n \times n}$ definiert durch $A : B := \sum_{k,\ell=1,\dots,n} A_{k\ell} B_{k\ell}$ für alle $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Es steht \bullet jeweils für die Identitätsabbildung. Es bezeichne $|\bullet|$ je nach Kontext die durch \cdot oder $:$ induzierte Norm auf \mathbb{R}^n oder $\mathbb{R}^{n \times n}$, das n - oder $(n-1)$ -dimensionale Lebesgue-Maß einer Teilmenge von \mathbb{R}^n oder die Kardinalität einer endlichen Menge. Für einen Index $j \in \{1, \dots, n\}$ und einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ bezeichne v_j oder $v(j)$ den j -ten Eintrag von v . Für Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$ definiere das Tensorprodukt $v \otimes w = (v_k w_\ell)_{k\ell} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sei ihre Spur bezeichnet durch $\text{tr}(A) := \sum_{k=1}^n A_{kk}$ und ihr deviatorischer (spurfreier) Anteil durch $\text{dev}(A) := A - \text{tr}(A)/n I_{n \times n}$ für die Einheitsmatrix $I_{n \times n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Es gilt dann $\text{tr}(\text{dev } A) = \text{tr}(A) - \text{tr}(A)/n \text{tr}(I_{n \times n}) = 0$.

Der symmetrische Anteil einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist definiert durch $\text{sym}(A) := (A + A^\top)/2$ und ihr asymmetrischer Anteil durch $\text{asym}(A) := A - \text{sym}(A) = (A - A^\top)/2$. Die symmetrischen Matrizen seien bezeichnet durch $\mathbb{S} := \text{sym}(\mathbb{R}^{n \times n})$.

Für die Herleitung der Navier-Lamé-Gleichungen in Abschnitt 2.6 werden die Matrixgruppen $\text{GL}^+(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det(A) > 0\}$ und $\text{SO}(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^\top A = AA^\top = I_{n \times n}, \det(A) = 1\}$ benötigt.

Lemma 2.9 (Eigenschaften von sym) Für jedes $A \in \mathbb{S}$ und $B \in \text{asym}(\mathbb{R}^{n \times n})$ gilt

$$A : B = 0.$$

Außerdem gilt für jedes $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dass $|\text{sym } A| \leq |A|$ und $|\text{asym } A| \leq |A|$.

Beweis: Da $B \in \text{asym}(\mathbb{R}^{n \times n})$, existiert $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$, sodass $B = (C - C^\top)/2$. Aufgrund der Definition des Skalarproduktes auf $\mathbb{R}^{n \times n}$ gilt $A : C = A^\top : C^\top$. Andererseits folgt wegen $A \in \mathbb{S}$, dass $A^\top = A$. Insgesamt

$$A : B = \frac{1}{2}(A : C - A : C^\top) = \frac{1}{2}(A : C - A^\top : C^\top) = \frac{1}{2}(A : C - A : C) = 0.$$

Die Abschätzung für sym folgt wegen der Cauchy-Schwarz-Ungleichung in $\mathbb{R}^{n \times n}$ und der obigen Orthogonalität mit

$$|\text{sym } A|^2 = \text{sym } A : \text{sym } A = \text{sym } A : (A - \text{asym } A) = \text{sym } A : A \leq |\text{sym } A| |A|.$$

Die Abschätzung für asym folgt analog. ■

Die folgende Abbildung tritt für die Navier-Lamé-Gleichungen auf in einem Materialgesetz, wie in Abschnitt 2.6 näher erläutert wird.

Definition 2.10 (Elastizitätstensor) Definiere die Abbildung $\mathbb{C} : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ durch

$$\mathbb{C}A := 2\mu A + \lambda \text{tr}(A) I_{n \times n}, \quad \text{für alle } A \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

2.3 Funktionenräume

In diesem Abschnitt werden die Notationen und Definitionen zu Sobolevräumen und Differentialoperatoren wiederholt. Für $u, v \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ bezeichnet

$$(u, v)_\Omega := \int_\Omega u \cdot v \, dx$$

das L^2 -Skalarprodukt mit L^2 -Norm $\|\bullet\|_{L^2(\Omega)}$. Für matrixwertige Funktionen $u, v \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^{n \times n})$ können unter Verwendung der Abbildung \mathbb{C} aus Definition 2.10 drei Skalarprodukte

$$\begin{aligned} (u, v)_\Omega &:= \int_\Omega u : v \, dx, \\ (u, v)_\mathbb{C} &:= \int_\Omega u : \mathbb{C} v \, dx, \\ (u, v)_{\mathbb{C}^{-1}} &:= \int_\Omega u : \mathbb{C}^{-1} v \, dx \end{aligned}$$

mit induzierten Normen $\|\bullet\|_{L^2(\Omega)}$, $\|\bullet\|_\mathbb{C}$ und $\|\bullet\|_{\mathbb{C}^{-1}}$ definiert werden.

Es bezeichne für $k \in \mathbb{N}$ der Raum $C^k(\Omega)$ die k -fach stetig differenzierbaren Funktionen auf Ω , es sei $C^\infty(\Omega) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(\Omega)$ und $C_C^\infty(\Omega) := \{f \in C^\infty(\Omega) \mid \text{supp}(f) \subseteq \Omega \text{ kompakt}\}$ der Raum der Testfunktionen.

Definition 2.11 (Differentialoperatoren) Für $u \in C^1(\Omega)$ bzw. $u \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ sei ∇u bzw. $D u$ der Gradient bzw. die Jacobi-Matrix. Für $u \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ bezeichne $\text{div } u = \sum_{j=1}^n \partial u_j / \partial x_j = \text{tr}(D u)$ die Divergenz. Für $u \in C^1(\Omega)$ bezeichnet $\text{Curl } u := (\partial u / \partial x_2, -\partial u / \partial x_1)^\top$ und für $u \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$ bezeichnet $\text{Curl } u := (\partial u_1 / \partial x_2 - \partial u_2 / \partial x_1, \partial u_2 / \partial x_2 - \partial u_1 / \partial x_1)^\top$ jeweils den Curl-Operator. Die Kurznotation ∂_k , $k = 1, \dots, n$, steht für $\partial / \partial x_k$.

Zunächst wird der Sobolevraum $H^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ definiert. Dazu wird der Begriff der schwachen Ableitung benötigt [Wer11, S. 210]. Die j -te schwache Ableitung einer Funktion $u \in L^2(\Omega)$, $j = 1, \dots, n$, ist eine Funktion $\tilde{u} \in L^2(\Omega)$, sodass für jede Testfunktion $\varphi \in C_C^\infty(\Omega)$ die Gleichheit $(u, \partial_j \varphi)_\Omega = -(\tilde{u}, \varphi)_\Omega$ erfüllt ist. Die Funktion \tilde{u} wird dann auch mit $\partial_j u$ bezeichnet. Mehrdimensionale Funktionen $u \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ heißen dementsprechend schwach differenzierbar mit Ableitung $D u := (\partial_j u_k)_{kj}$, wenn für jedes $j, k = 1, \dots, n$ die j -te schwache Ableitung der k -ten Komponente u_k von u existiert. Dies ist durch Summation über die Indizes äquivalent dazu, dass alle Testfunktionen $\varphi \in C_C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{n \times n})$ die Formel $(u, \text{div } \varphi)_\Omega = -(D u, \varphi)_\Omega$ erfüllen.

Definition 2.12 Es sei

$$H^1(\Omega; \mathbb{R}^n) := \{u \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n) \mid D u \text{ existiert im schwachen Sinne und } D u \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^{n \times n})\}.$$

Für jedes $u \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ definiert man die H^1 -Norm

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 := \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|D u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

und für $\varepsilon(u) := \text{sym}(D u)$ die \mathbb{C} -abhängige Energienorm

$$\|u\| := \|\varepsilon(u)\|_\mathbb{C}.$$

Um die Dirichlet-Randdaten einbringen zu können, definiert man den Raum

$$H_D^1(\Omega; \mathbb{R}^n) := \{u \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^n) \mid \gamma_0(u) = 0 \text{ fast überall auf } \Gamma_D\}.$$

Dabei ist $\gamma_0 : H^1(\Omega; \mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\partial\Omega; \mathbb{R}^n)$ der Spuoperator, siehe Abschnitt 2.4.

Bemerkung 2.13 Es ist wohlbekannt, dass $H_D^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$, ausgestattet mit $\|\bullet\|_{H^1(\Omega)}$, ein Banachraum ist [Alt06, S. 68]. Aufgrund der Friedrichs- und der Kornungleichung aus Abschnitt 2.7 ist $H_D^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ auch mit $\|\bullet\|$ ein Banachraum.

Neben den schwach differenzierbaren Funktionen werden noch solche mit schwacher Divergenz benötigt. Für $u \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ heißt $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ schwache Divergenz, bezeichnet mit $\operatorname{div} u$, falls für alle Testfunktionen $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ die Gleichung $(\varphi, v)_\Omega = -(\nabla \varphi, u)_\Omega$ gilt.

Definition 2.14 Definiere

$$\begin{aligned} H(\operatorname{div}, \Omega) &:= \{u \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n) \mid \operatorname{div} u \text{ existiert im schwachen Sinne und } \operatorname{div} u \in L^2(\Omega)\}, \\ H(\operatorname{div}, \Omega; \mathbb{R}^{n \times n}) &:= \{u \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^{n \times n}) \mid u_j \in H(\operatorname{div}, \Omega) \text{ für alle } j = 1, \dots, n\}, \end{aligned}$$

wobei $u_j \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ die j -te Zeile der Matrix $u \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^{n \times n})$ ist. Dementsprechend bezeichnet div bei matrixwertigen Abbildungen die zeilenweise Anwendung des Divergenz-Operators. Für $u \in H(\operatorname{div}, \Omega; \mathbb{R}^{n \times n})$ seien zwei Normen gegeben durch

$$\begin{aligned} \|u\|_{H(\operatorname{div})}^2 &:= \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\operatorname{div} u\|_{L^2(\Omega)}^2, \\ \|u\|_{H(\operatorname{div}, \mathbb{C}^{-1})}^2 &:= \|u\|_{\mathbb{C}^{-1}}^2 + \|\operatorname{div} u\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Für die Neumann-Daten definiert man den Raum

$$H_N(\operatorname{div}, \Omega; \mathbb{R}^{n \times n}) = \{u \in H(\operatorname{div}, \Omega; \mathbb{R}^{n \times n}) \mid \gamma_\nu u = 0 \text{ fast überall auf } \Gamma_N\},$$

mit dem Spuoperator γ_ν aus Abschnitt 2.4.

Bemerkung 2.15 Es ist $H(\operatorname{div}, \Omega; \mathbb{R}^{n \times n})$ mit der Norm $\|\bullet\|_{H(\operatorname{div})}$ [Bra13, S. 139] und dadurch auch mit $\|\bullet\|_{H(\operatorname{div}, \mathbb{C}^{-1})}$ ein Banachraum.

Definition 2.16 Es werden die stückweisen H^1 - und $H(\operatorname{div})$ -Funktionen definiert durch

$$\begin{aligned} H^1(\mathcal{T}; \mathbb{R}^n) &:= \{v \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n) \mid \forall T \in \mathcal{T}, v|_T \in H^1(T; \mathbb{R}^n)\}, \\ H(\operatorname{div}, \mathcal{T}; \mathbb{R}^{n \times n}) &:= \{q \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^{n \times n}) \mid \forall T \in \mathcal{T}, q|_T \in H(\operatorname{div}, T; \mathbb{R}^{n \times n})\} \end{aligned}$$

mit stückweise schwachen Ableitungen D_{NC} und ε_{NC} und stückweise schwacher Divergenz div_{NC} , definiert für $v \in H^1(\mathcal{T}; \mathbb{R}^n)$ und $w \in H(\operatorname{div}, \mathcal{T}; \mathbb{R}^{n \times n})$ durch

$$\begin{aligned} (D_{NC} v)|_T &:= D(v|_T), & \text{für alle } T \in \mathcal{T}, \\ (\varepsilon_{NC}(v))|_T &:= \varepsilon(v|_T), & \text{für alle } T \in \mathcal{T}, \\ (\operatorname{div}_{NC} v)|_T &:= \operatorname{div}(v|_T), & \text{für alle } T \in \mathcal{T}. \end{aligned}$$

Für einen Banachraum $(X, \|\bullet\|_X)$ im Allgemeinen bezeichne $\mathcal{S}(X) := \{x \in X \mid \|x\|_X = 1\}$ die Einheitskugel. Es bezeichne im Speziellen $S_{n-1} := \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

2.4 Spurräume

Beweise der folgenden beiden Spursätze lassen sich in [Alt06, S. 279] und [Tem77, S. 9] finden.

Satz 2.17 *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offenes und beschränktes Lipschitz-Gebiet. Dann existiert genau eine stetige, lineare Abbildung $\gamma_0 : H^1(U) \rightarrow L^2(\partial U)$, sodass*

$$\gamma_0 w = w|_{\partial U} \quad \text{für alle } w \in H^1(U) \cap C^0(\overline{U}).$$

Definition 2.18 Es wird durch $H^{1/2}(\partial U) := \gamma_0(H^1(U))$ das Bild des obigen Spuroperators bezeichnet und durch $H^{-1/2}(\partial U) = (H^{1/2}(\partial U))^*$ sein Dualraum.

Satz 2.19 *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offenes und beschränktes Lipschitz-Gebiet. Dann existiert eine stetige, lineare Abbildung $\gamma_\nu : H(\text{div}, U) \rightarrow H^{-1/2}(\partial U)$, sodass*

$$\gamma_\nu q = q|_{\partial U} \cdot \nu \quad \text{für alle } q \in C^\infty(\overline{U}).$$

Für jedes $q \in H(\text{div}, U)$ und $w \in H^1(U)$ und mit der Dualitätspaarung $\langle \bullet, \bullet \rangle_{\partial U}$ in $H^{-1/2}(\partial U) \times H^{1/2}(\partial U)$ gilt die Formel

$$\langle \gamma_\nu q, \gamma_0 w \rangle_{\partial U} = (q, \nabla w)_U + (\text{div } q, w)_U. \quad (2.1)$$

Für $w \in H^1(U; \mathbb{R}^n)$ und $q \in H(\text{div}, U; \mathbb{R}^{n \times n})$ definiert die komponentenweise Anwendung dieser Abbildungen die mehrdimensionalen Spuroperatoren $\gamma_0 : H^1(U; \mathbb{R}^n) \rightarrow H^{1/2}(\partial U; \mathbb{R}^n)$ und $\gamma_\nu : H(\text{div}, U; \mathbb{R}^{n \times n}) \rightarrow H^{-1/2}(\partial U; \mathbb{R}^n)$. Die Betrachtung dieser Spuren auf den Elementen der Triangulierung ermöglicht die Definition der folgenden Spurabbildungen auf dem Skelett einer Triangulierung.

Definition 2.20 Für eine feste Triangulierung \mathcal{T} des Gebietes Ω sind die Spurabbildungen $\gamma_0^\mathcal{T} : H^1(\mathcal{T}; \mathbb{R}^n) \rightarrow \prod_{T \in \mathcal{T}} H^{1/2}(\partial T; \mathbb{R}^n)$ und $\gamma_\nu^\mathcal{T} : H(\text{div}, \mathcal{T}; \mathbb{R}^{n \times n}) \rightarrow \prod_{T \in \mathcal{T}} H^{-1/2}(\partial T; \mathbb{R}^n)$ vermöge der beiden vorangehenden Sätze für $w \in H^1(\mathcal{T}; \mathbb{R}^n)$ und $q \in H(\text{div}, \mathcal{T}; \mathbb{R}^{n \times n})$ definiert durch

$$\begin{aligned} \gamma_0^\mathcal{T} w &:= (s_T)_{T \in \mathcal{T}}, \quad \text{mit } s_T := \gamma_0(w|_T) \quad \text{für alle } T \in \mathcal{T}, \\ \gamma_\nu^\mathcal{T} q &:= (t_T)_{T \in \mathcal{T}}, \quad \text{mit } t_T := \gamma_\nu(q|_T) \quad \text{für alle } T \in \mathcal{T}. \end{aligned}$$

Definition 2.21 Die Spurräume

$$\begin{aligned} H_D^{1/2}(\partial \mathcal{T}; \mathbb{R}^n) &:= \gamma_0^\mathcal{T}(H_D^1(\Omega; \mathbb{R}^n)), \\ H_N^{-1/2}(\partial \mathcal{T}; \mathbb{R}^n) &:= \gamma_\nu^\mathcal{T}(H_N(\text{div}, \Omega; \mathbb{R}^{n \times n})), \end{aligned}$$

können für $s \in H_D^{1/2}(\partial \mathcal{T}; \mathbb{R}^n)$ und $t \in H_N^{-1/2}(\partial \mathcal{T}; \mathbb{R}^n)$ ausgestattet werden mit den Normen

$$\begin{aligned} \|s\|_{H_D^{1/2}(\partial \mathcal{T}, \mathbb{C})} &:= \min \{ \|w\| \mid w \in H_D^1(\Omega; \mathbb{R}^n), \gamma_0^\mathcal{T} w = s \}, \\ \|s\|_{H_D^{1/2}(\partial \mathcal{T})} &:= \min \{ \|w\|_{H^1(\Omega)} \mid w \in H_D^1(\Omega; \mathbb{R}^n), \gamma_0^\mathcal{T} w = s \}, \\ \|t\|_{H_N^{-1/2}(\partial \mathcal{T}, \mathbb{C}^{-1})} &:= \min \{ \|q\|_{H(\text{div}, \mathbb{C}^{-1})} \mid q \in H_N(\text{div}, \Omega; \mathbb{R}^{n \times n}), \gamma_\nu^\mathcal{T} q = t \}, \\ \|t\|_{H_N^{-1/2}(\partial \mathcal{T})} &:= \min \{ \|q\|_{H(\text{div})} \mid q \in H_N(\text{div}, \Omega; \mathbb{R}^{n \times n}), \gamma_\nu^\mathcal{T} q = t \}. \end{aligned}$$

Die allgemeineren Räume ohne Nullrandbedingungen lauten

$$\begin{aligned} H^{1/2}(\partial \mathcal{T}; \mathbb{R}^n) &:= \gamma_0^\mathcal{T}(H^1(\Omega; \mathbb{R}^n)), \\ H^{-1/2}(\partial \mathcal{T}; \mathbb{R}^n) &:= \gamma_\nu^\mathcal{T}(H(\text{div}, \Omega; \mathbb{R}^{n \times n})). \end{aligned}$$

Bemerkung 2.22 Es bildet $H_D^{1/2}(\partial\mathcal{T};\mathbb{R}^n)$ jeweils mit den Normen $\|\bullet\|_{H_D^{1/2}(\partial\mathcal{T},\mathbb{C})}$ und $\|\bullet\|_{H_D^{1/2}(\partial\mathcal{T})}$, sowie $H_N^{-1/2}(\partial\mathcal{T};\mathbb{R}^n)$ mit $\|\bullet\|_{H_N^{-1/2}(\partial\mathcal{T},\mathbb{C}^{-1})}$ und $\|\bullet\|_{H_N^{-1/2}(\partial\mathcal{T})}$ einen Banachraum. Dies wird von der Vollständigkeit der zugrundeliegenden Räume $H_D^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$ und $H_N(\operatorname{div},\Omega;\mathbb{R}^{n\times n})$ vererbt, da dasjenige Element, dass die Normen jeweils minimiert, eine lineare Differentialgleichung schwach erfüllt, vgl. die Beweise zu den Lemmas 2.38 und 2.39.

Definition 2.23 Für jedes $t \in \prod_{T \in \mathcal{T}} H^{-1/2}(\partial T;\mathbb{R}^n)$, $t = (t_T)_{T \in \mathcal{T}}$ und $s \in \prod_{T \in \mathcal{T}} H^{1/2}(\partial T;\mathbb{R}^n)$, $s = (s_T)_{T \in \mathcal{T}}$ definiere die Dualitätsklammer auf dem Skelett durch

$$\langle t, s \rangle_{\partial\mathcal{T}} := \sum_{T \in \mathcal{T}} \langle t_T, s_T \rangle_{\partial T}.$$

Bemerkung 2.24 Ist $v \in H^1(\mathcal{T};\mathbb{R}^n)$ mit $\gamma_0^\mathcal{T} v \in H^{1/2}(\partial\mathcal{T};\mathbb{R}^n)$, so gilt sogar $v \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$ mit $Dv = D_{NC} v$. Dies erkennt man durch die Wahl eines $w \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$ mit $\gamma_0^\mathcal{T} w = \gamma_0^\mathcal{T} v$ und einer beliebigen Testfunktion $\varphi \in C_C^\infty(\Omega;\mathbb{R}^{n\times n})$ und unter Nutzung der Formel (2.1) sowie der Definition der schwachen Ableitung durch

$$\begin{aligned} (D_{NC} v, \varphi)_\Omega &= \langle \gamma_v^\mathcal{T} \varphi, \gamma_0^\mathcal{T} v \rangle_{\partial\mathcal{T}} - (v, \operatorname{div} \varphi)_\Omega \\ &= \langle \gamma_v^\mathcal{T} \varphi, \gamma_0^\mathcal{T} w \rangle_{\partial\mathcal{T}} - (v, \operatorname{div} \varphi)_\Omega \\ &= (Dw, \varphi)_\Omega + (w, \operatorname{div} \varphi)_\Omega - (v, \operatorname{div} \varphi)_\Omega \\ &= -(v, \operatorname{div} \varphi)_\Omega. \end{aligned}$$

Analog folgt für $\tau \in H(\operatorname{div}, \mathcal{T}; \mathbb{R}^{n\times n})$ mit $\gamma_v^\mathcal{T} \tau \in H^{-1/2}(\partial\mathcal{T};\mathbb{R}^n)$, dass $\tau \in H(\operatorname{div}, \Omega; \mathbb{R}^{n\times n})$ sowie $\operatorname{div} \tau = \operatorname{div}_{NC} \tau$ gilt.

Nach dieser Definition der Spurräume können nun die später in der ultraschwachen Formulierung der Navier-Lamé-Gleichungen benutzten Produkträume X und Y eingeführt werden. Der Raum X , in dem die Lösung der Differentialgleichung gesucht wird, heißt *Ansatzraum*, der Raum Y , mit dessen Elementen in der Variationsformulierung die Bilinearform ausgewertet wird, heißt *Testraum*. Die drei Möglichkeiten (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) und (X_3, Y_3) für diese Räume mit zugehörigen Normen ergeben dann die später betrachteten drei verschiedenen dPG-Methoden. Man beachte, dass die erste und zweite Methode sich nur durch eine Nebenbedingung in der ersten Komponente der Produkträume unterscheiden, aber dieselben Normen benutzen. Die zweite und dritte Methode hingegen besitzen dieselben Räume (mit Nebenbedingung), aber sind jeweils mit anderen Normen ausgestattet.

Definition 2.25 Zu einer gegebenen regulären Triangulierung \mathcal{T} definiert man

$$\begin{aligned}
X_1 &:= L^2(\Omega; \mathbb{S}) \times L^2(\Omega; \mathbb{R}^n) \times H_N^{-1/2}(\partial\mathcal{T}; \mathbb{R}^n) \times H_D^{1/2}(\partial\mathcal{T}; \mathbb{R}^n), \\
X_2 &:= \Sigma \times L^2(\Omega; \mathbb{R}^n) \times H_N^{-1/2}(\partial\mathcal{T}; \mathbb{R}^n) \times H_D^{1/2}(\partial\mathcal{T}; \mathbb{R}^n), \\
X_3 &:= \Sigma \times L^2(\Omega; \mathbb{R}^n) \times H_N^{-1/2}(\partial\mathcal{T}; \mathbb{R}^n) \times H_D^{1/2}(\partial\mathcal{T}; \mathbb{R}^n), \\
Y_1 &:= H(\operatorname{div}, \mathcal{T}; \mathbb{S}) \times H^1(\mathcal{T}; \mathbb{R}^n), \\
Y_2 &:= \Sigma(\mathcal{T}) \times H^1(\mathcal{T}; \mathbb{R}^n), \\
Y_3 &:= \Sigma(\mathcal{T}) \times H^1(\mathcal{T}; \mathbb{R}^n) \text{ mit} \\
\Sigma &:= \begin{cases} \{\sigma \in L^2(\Omega; \mathbb{S}) \mid \int_{\Omega} \operatorname{tr}(\sigma) \, dx = 0\} & \text{falls } \Gamma_N = \emptyset, \\ L^2(\Omega; \mathbb{S}) & \text{falls } \Gamma_N \neq \emptyset, \end{cases} \\
\Sigma(\mathcal{T}) &:= \begin{cases} \{\tau \in H(\operatorname{div}, \mathcal{T}; \mathbb{S}) \mid \int_{\Omega} \operatorname{tr}(\tau) \, dx = 0\} & \text{falls } \Gamma_N = \emptyset, \\ H(\operatorname{div}, \mathcal{T}; \mathbb{S}) & \text{falls } \Gamma_N \neq \emptyset. \end{cases}
\end{aligned}$$

Die entsprechenden Normen lauten

$$\begin{aligned}
\|(\sigma, u, t, s)\|_{X_1}^2 &:= \|\sigma\|_{\mathbb{C}^{-1}}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|t\|_{H_N^{-1/2}(\partial\mathcal{T}, \mathbb{C}^{-1})}^2 + \|s\|_{H_D^{1/2}(\partial\mathcal{T}, \mathbb{C})}^2, \\
\|(\sigma, u, t, s)\|_{X_2}^2 &:= \|\sigma\|_{\mathbb{C}^{-1}}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|t\|_{H_N^{-1/2}(\partial\mathcal{T}, \mathbb{C}^{-1})}^2 + \|s\|_{H_D^{1/2}(\partial\mathcal{T}, \mathbb{C})}^2, \\
\|(\sigma, u, t, s)\|_{X_3}^2 &:= \|\sigma\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|t\|_{H_N^{-1/2}(\partial\mathcal{T})}^2 + \|s\|_{H_D^{1/2}(\partial\mathcal{T})}^2, \\
\|(\tau, v)\|_{Y_1}^2 &:= \|\tau\|_{H(\operatorname{div}, \mathbb{C}^{-1}), NC}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\llbracket v \rrbracket\|_{NC}^2, \\
\|(\tau, v)\|_{Y_2}^2 &:= \|\tau\|_{H(\operatorname{div}, \mathbb{C}^{-1}), NC}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\llbracket v \rrbracket\|_{NC}^2, \\
\|(\tau, v)\|_{Y_3}^2 &:= \|\tau\|_{H(\operatorname{div}), NC}^2 + \|v\|_{H^1(\Omega), NC}^2,
\end{aligned}$$

für $(\sigma, u, t, s) \in X_1, X_2, X_3$ und $(\tau, v) \in Y_1, Y_2, Y_3$ mit

$$\begin{aligned}
\|\tau\|_{H(\operatorname{div}, \mathbb{C}^{-1}), NC}^2 &:= \|\tau\|_{\mathbb{C}^{-1}}^2 + \|\operatorname{div}_{NC} \tau\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \text{und} \quad \|\tau\|_{H(\operatorname{div}), NC}^2 := \|\tau\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\operatorname{div}_{NC} \tau\|_{L^2(\Omega)}^2, \\
\|\llbracket v \rrbracket\|_{NC}^2 &:= \|\operatorname{D}_{NC} v\|_{\mathbb{C}}^2 \quad \text{und} \quad \|v\|_{H^1(\Omega), NC}^2 := \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\operatorname{D}_{NC} v\|_{L^2(\Omega)}^2.
\end{aligned}$$

Bemerkung 2.26 Man beachte, dass den Räumen X und Y hier auch schon auf kontinuierlichem Level eine Triangulierung zugrunde liegt.

Bemerkung 2.27 Enthalten die Normen in einer Weise den Elastizitätstensor \mathbb{C} , so werden sie als Energienormen bezeichnet. So bekommen die erste, zweite und dritte Methode die Namen *Energiemethode ohne Nebenbedingung*, *Energiemethode mit Nebenbedingung* und *L^2 - H^1 -Methode*. Im Beweis der diskreten Inf-Sup-Bedingung der L^2 - H^1 -Methode wird die Nebenbedingung (im Gegensatz zur Energiemethode) explizit benutzt, weshalb darauf nicht verzichtet werden kann.

2.5 Diskrete Räume

Neben den in Definition 2.4 eingeführten endlich-dimensionalen Räumen $P_k(\mathcal{T})$ werden im Folgenden weitere diskrete Räume definiert. Zunächst seien die stückweise Polynome auf Kanten

$E \in \mathcal{E}$ definiert durch

$$\begin{aligned} P_k(E; \mathbb{R}^n) &:= \{v_k \in L^\infty(E; \mathbb{R}^n) \mid v_k \text{ ist in jeder Komponente algebraisches Polynom} \\ &\quad \text{auf } E \text{ vom totalen Grad } \leq k\}, \\ P_k(\mathcal{E}; \mathbb{R}^n) &:= \{v_k \in L^\infty(\mathcal{E}; \mathbb{R}^n) \mid \forall E \in \mathcal{E}, v_k|_E \in P_k(E; \mathbb{R}^n)\}, \\ P_k(\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}(N); \mathbb{R}^n) &:= \{v_k \in P_k(\mathcal{E}; \mathbb{R}^n) \mid \forall E \in \mathcal{E}(N), v_k|_E = 0\}. \end{aligned}$$

Die zusätzliche Bedingung der Stetigkeit an die stückweise affinen Funktionen auf Elementen und Seiten führt zu

$$\begin{aligned} S_D^1(\mathcal{T}; \mathbb{R}^n) &:= P_1(\mathcal{T}; \mathbb{R}^n) \cap C_D(\Omega; \mathbb{R}^n), \\ S_D^1(\mathcal{E}; \mathbb{R}^n) &:= P_1(\mathcal{E}; \mathbb{R}^n) \cap C_D(\cup \mathcal{E}; \mathbb{R}^n), \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} C_D(\Omega; \mathbb{R}^n) &:= \{w \in C(\Omega; \mathbb{R}^n) \mid w = 0 \text{ auf } \Gamma_D\}, \\ C_D(\cup \mathcal{E}; \mathbb{R}^n) &:= \{s \in C(\cup \mathcal{E}; \mathbb{R}^n) \mid s = 0 \text{ auf } \Gamma_D\}. \end{aligned}$$

Die (stückweisen) Raviart-Thomas-Funktionen niedrigster Ordnung lauten

$$\begin{aligned} RT_0^{NC}(\mathcal{T}; \mathbb{R}^{n \times n}) &:= \{q_1 \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n \times n}) \mid \exists A \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^{n \times n}), \\ &\quad \exists b \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^n), q_1 = A + b \otimes (\bullet - \text{mid}(\mathcal{T}))\}, \\ RT_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^{n \times n}) &:= RT_0^{NC}(\mathcal{T}; \mathbb{R}^{n \times n}) \cap H(\text{div}, \Omega; \mathbb{R}^{n \times n}), \\ RT_0(\mathcal{T}, \Gamma_N; \mathbb{R}^{n \times n}) &= \{q_{RT} \in RT_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^{n \times n}) \mid q_{RT} \nu = 0 \text{ auf } \Gamma_N\}. \end{aligned}$$

Bemerkung 2.28 Für jedes $q_{RT} \in RT_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^{n \times n})$ und für alle $E \in \mathcal{E}$ gilt nach [Car09b, Lemma 3.22], dass $q_{RT}|_{E^\vee E} \in P_0(E; \mathbb{R}^n)$. Andersherum existiert zu jedem $t_0 \in P_0(\mathcal{E}; \mathbb{R}^n)$ genau ein $q_{RT} \in RT_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^{n \times n})$, sodass für alle $E \in \mathcal{E}$ gilt, dass $q_{RT}|_{E^\vee E} = t_0|_E$.

Dank dieser Bemerkung kann nun der Raum $P_0(\mathcal{E}; \mathbb{R}^n)$ als Unterraum von $H^{-1/2}(\partial \mathcal{T}; \mathbb{R}^n)$ aufgefasst werden vermöge der Einbettung

$$P_0(\mathcal{E}; \mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{-1/2}(\partial \mathcal{T}; \mathbb{R}^n), t_0 \mapsto \gamma_\nu^\mathcal{T} q_{RT}.$$

Dabei ist $q_{RT} \in RT_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^{n \times n})$ die laut Bemerkung 2.28 existierende eindeutige Funktion mit $q_{RT}|_{E^\vee E} = t_0|_E$ auf allen Seiten $E \in \mathcal{E}$. Es ist dann offensichtlich für jedes $T \in \mathcal{T}$, $E \in \mathcal{E}(T)$ die Gleichheit $(q_{RT} \nu_T)|_E = \varrho_{T,E} t_0$ gültig.

Aufgrund diese Einbettung schreibt man $P_0(\mathcal{E}; \mathbb{R}^n) \subseteq H^{-1/2}(\partial \mathcal{T}; \mathbb{R}^n)$. Analog gilt auch $P_0(\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}(N); \mathbb{R}^n) \subseteq H_N^{-1/2}(\partial \mathcal{T}; \mathbb{R}^n)$.

2.6 Modellierung

Im Folgenden werden die Navier-Lamé-Gleichungen und ihr Hintergrund kurz erläutert. Die Darstellung folgt im Wesentlichen [Cia88] und [Bra13]. Betrachtet wird ein Körper im dreidimensionalen Raum, der zunächst in einer abgeschlossenen Referenzkonfiguration $\bar{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^3$ gegeben ist, $\Gamma_N \subseteq \partial\Omega$ wie in Abschnitt 2.1 sei der Teil der Oberfläche, in dem Oberflächenkräfte auf den Körper wirken. Die *deformierte Konfiguration* $\bar{\Omega}^\varphi = \varphi(\bar{\Omega})$ ist durch die *Deformation* $\varphi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben, $\Gamma_N^\varphi = \varphi(\Gamma_N)$. Die *Verschiebung* $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist durch $u := \varphi - \text{id}$ definiert. Die in der deformierten Konfiguration wirkenden Kräfte sind durch die Volumenkraftdichte $f^\varphi : \Omega^\varphi \rightarrow \mathbb{R}^3$ und durch die Oberflächenkraftdichte $g^\varphi : \Gamma_N^\varphi \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben. Das Spannungsprinzip von Euler und Cauchy fasst die Axiome des statischen Gleichgewichts im deformierten Körper zusammen. Es stellt einen integralen Zusammenhang zwischen den Kraftdichten und dem *Cauchy-Spannungsvektor* $t^\varphi : \bar{\Omega}^\varphi \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ her und lautet für den äußeren Einheitsnormalenvektor v^φ und das Kreuzprodukt \times im \mathbb{R}^3 ,

$$\begin{aligned} \int_A f^\varphi(x^\varphi) \, dx^\varphi + \int_{\partial A} t^\varphi(x^\varphi, v^\varphi) \, ds^\varphi &= 0 & \text{für alle } A \subseteq \bar{\Omega}^\varphi, \\ \int_A x^\varphi \times f^\varphi(x^\varphi) \, dx^\varphi + \int_{\partial A} x^\varphi \times t^\varphi(x^\varphi, v^\varphi) \, ds^\varphi &= 0 & \text{für alle } A \subseteq \bar{\Omega}^\varphi, \\ t^\varphi(x^\varphi, v^\varphi) &= g^\varphi(x^\varphi) & \text{für alle } x^\varphi \in \Gamma_N^\varphi. \end{aligned}$$

Der Satz von Cauchy besagt nun, dass unter gewissen Regularitätsannahmen an Volumenkraftdichte f^φ und Cauchy-Spannungsvektor t^φ und wenn das obengenannte Spannungsprinzip gilt, der Spannungsvektor linear von v^φ abhängt. Das heißt, es existiert ein stetig differenzierbares Tensorfeld $T^\varphi : \bar{\Omega}^\varphi \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$, sodass

$$t^\varphi(x^\varphi, v) = T^\varphi(x^\varphi)v \quad \text{für jedes } x^\varphi \in \bar{\Omega}^\varphi, v \in S_2.$$

Dieses Tensorfeld wird *Cauchyscher Spannungstensor* genannt. Aus den Gleichgewichtsbedingungen folgt außerdem mit partieller Integration und dem Fundamentallemma der Variationsrechnung [Alt06, S. 121], dass

$$\begin{aligned} -\text{div}^\varphi T^\varphi(x^\varphi) &= f^\varphi(x^\varphi) & \text{für jedes } x^\varphi \in \bar{\Omega}^\varphi, \\ T^\varphi(x^\varphi) &\in \mathbb{S} & \text{für jedes } x^\varphi \in \bar{\Omega}^\varphi, \\ T^\varphi(x^\varphi)v^\varphi &= g^\varphi(x^\varphi) & \text{für jedes } x^\varphi \in \Gamma_N^\varphi. \end{aligned}$$

Diese in den unbekannten *Euler-Variablen* x^φ gegebenen Gleichungen der deformierten Konfiguration werden nun mittels Piola-Transformation auf die *Lagrange-Variablen* x der Referenzkonfiguration umgeschrieben. So erhält man für den sogenannten zweiten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor $\Sigma : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} -\text{div}(D\varphi(x)\Sigma(x)) &= f(x) & \text{für jedes } x \in \bar{\Omega}, \\ \Sigma(x) &\in \mathbb{S} & \text{für jedes } x \in \bar{\Omega}, \\ D\varphi(x)\Sigma(x)v &= g(x) & \text{für jedes } x \in \Gamma_N. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Die bis hierhin betrachteten Gleichungen sind unabhängig vom Material gültig. Die neun Unbekannten des Systems (6 Komponenten von Σ und 3 von φ) sind jedoch nicht unabhängig

voneinander. Beziehungen zwischen diesen unbekannten Funktionen können durch Materialgesetze beschrieben werden. Ein *elastisches* Material besitzt eine sogenannte *Antwortfunktion* $\hat{\Sigma} : \bar{\Omega} \times \text{GL}^+(3) \rightarrow \mathbb{S}$ mit $\Sigma(x) = \hat{\Sigma}(x, D\varphi(x))$. Durch mehrere Annahmen kann die Struktur dieser Antwortfunktion noch vereinfacht werden. Zunächst geht man vom Axiom der Koordinatennunabhängigkeit aus, das besagt, dass der Spannungszustand eines Körpers nicht von der Lage des Koordinatensystems abhängt. Mit anderen Worten, dreht man den Körper, so werden auch die Spannungen mitgedreht. Dies führt zu einer Antwortfunktion der Form $\hat{\Sigma}(x, F) = \tilde{\Sigma}(x, F^\top F)$ für jedes $F \in \text{GL}^+(3)$ [Cia88, Theorem 3.3-1]. Zwei Annahmen an das Material sind die *Homogenität* und die *Isotropie*. Homogenität ist die Unabhängigkeit der Antwortfunktion von der Stelle im Körper, also $\hat{\Sigma}(x, F) = \hat{\Sigma}(F)$ für jedes $x \in \bar{\Omega}, F \in \text{GL}^+(3)$. Isotropie bedeutet, dass die Antwort des Materials “in jede Richtung gleich” ist, genauer $\hat{\Sigma}(x, FQ) = Q^\top \hat{\Sigma}(x, F)Q$ für alle $x \in \bar{\Omega}, F \in \text{GL}^+(3), Q \in \text{SO}(3)$. Dies lässt sich zusammenfassen zu [Cia88, Theorem 3.8-1], also der Existenz von Konstanten $\lambda, \mu > 0$, sodass

$$\hat{\Sigma}(F) = 2\mu E + \lambda \text{tr}(E) + o(E) \quad \text{mit } E = \frac{F^\top F - I_{3 \times 3}}{2}. \quad (2.3)$$

Für $F = D\varphi = I_{3 \times 3} + Du$ ist $E = (Du + Du^\top)/2 + (DuDu)^\top/2 = \varepsilon(u) + DuDu^\top/2$. Insgesamt ergibt sich das Anfangswertproblem der Elastizität als reiner Verschiebungsansatz aus (2.2), (2.3), $\varphi = \text{id} + u$ und einer Randbedingung $\varphi_D : \Gamma_D \rightarrow \mathbb{R}^3$ durch

$$\begin{aligned} -\text{div}(D\varphi(x)\Sigma(x)) &= f(x) && \text{für jedes } x \in \bar{\Omega}, \\ \Sigma(x) &= 2\mu E(u) + \lambda \text{tr}(E(u)) + o(E(u)) && \text{für jedes } x \in \bar{\Omega}, \\ \Sigma(x) &\in \mathbb{S} && \text{für jedes } x \in \bar{\Omega}, \\ D\varphi(x)\Sigma(x)\nu &= g(x) && \text{für jedes } x \in \Gamma_N \\ \varphi(x) &= \varphi_D(x) && \text{für jedes } x \in \Gamma_D. \end{aligned}$$

Die Konstanten λ und μ werden Lamé-Parameter genannt. Der Parameter μ heißt auch Schubmodul. Die Lamé-Parameter lassen sich alternativ auch über das Elastizitätsmodul $E > 0$ und die Poissonzahl $0 < \nu < 1/2$ ausdrücken durch $\lambda = E\nu/((1+\nu)(1-2\nu))$ und $\mu = E/(2(1+\nu))$.

In [Cia88, Theorem 6.2-1] wird nun gezeigt, wie sich dieser Operator der nichtlinearen Elastizität durch Ableitung im Punkt $u = 0$ linearisieren lässt. Das linearisierte Problem lautet

$$\begin{aligned} -\text{div} \sigma &= f && \text{in } \Omega, \\ \sigma &= \mathbb{C}\varepsilon(u) && \text{in } \Omega, \\ \sigma \nu &= g && \text{auf } \Gamma_N, \\ u &= u_D && \text{auf } \Gamma_D. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Dabei ist ε im Vergleich zu $E = \varepsilon(u) + o(\|u\|)$ der linearisierte Verzerrungstensor. Der lineare Elastizitätstensor $\mathbb{C} : \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$, gegeben durch

$$\mathbb{C}A = 2\mu A + \lambda \text{tr}(A)I_{3 \times 3},$$

ist eine linearisierte Form von $\hat{\Sigma}$. Die durch $\sigma = \mathbb{C}\varepsilon(u)$ definierte symmetrische Größe $\sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{S}$ wird auch Spannung genannt, der Zusammenhang $\sigma = \mathbb{C}\varepsilon(u)$ Hookesches Gesetz.

Während die Linearisierung in [Cia88, Theorem 6.2-1] auch dazu genutzt wird, mittels des Satzes über implizite Funktionen die Lösbarkeit des nichtlinearen Problems für kleine Verschiebungen zu lösen, kann man in Spannungs-Dehnungs-Diagrammen [GHSW14, S. 15, Abb. 1.7] ablesen, dass Spannung σ und Verzerrung ε für kleine Spannungen und Verzerrungen tatsächlich einen linearen Zusammenhang haben. Dies rechtfertigt die alleinige Betrachtung des linearisierten Problems in dieser Arbeit zumindest für kleine Verschiebungen.

Ist im 3-dimensionalen Körper Ω eine Dimension gegenüber den anderen beiden vernachlässigbar klein, so kann man [Bra13, S. 314] unter Benutzung von ebenem Verzerrungs- oder Spannungszustand ein System der linearen Elastizität in zwei Dimensionen herleiten, dass ebenfalls die Form (2.4) mit $\mathbb{C}A = 2\tilde{\mu}A + \tilde{\lambda} \operatorname{tr}(A)I_{2 \times 2}$ hat. Für den ebenen Spannungszustand, d.h. falls eine Bewegung der Platte in die zu vernachlässigende Dimension möglich ist, gilt $\tilde{\mu} = E/(2(1+\nu))$ und $\tilde{\lambda} = E\nu/((1+\nu)(1-\nu))$. Für einen ebenen Verzerrungszustand hingegen, falls die Deformation in eine Richtung verschwinden, berechnen sich die Parameter wie für den 3-dimensionalen Fall durch $\tilde{\mu} = E/(2(1+\nu))$ und $\tilde{\lambda} = E\nu/((1+\nu)(1-2\nu))$. Zusammengefasst lautet daher das in dieser Arbeit allgemein für Dimension n und allgemein für Parameter μ, λ betrachtete Problem wie folgt.

Problem (Navier-Lamé-Gleichungen als System 1. Ordnung)

Zu gegebenem $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, gegebenen Randdaten g und u_D und gegebenen Lamé-Parametern $\mu, \lambda > 0$ finde $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{S}$ mit

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \sigma &= f && \text{auf } \Omega, \\ \sigma &= \mathbb{C}\varepsilon(u) && \text{auf } \Omega, \\ u &= u_D && \text{auf } \Gamma_D, \\ \sigma \nu &= g && \text{on } \Gamma_N, \end{aligned}$$

wobei

$$\mathbb{C}A = 2\mu A + \lambda \operatorname{tr}(A)I_{n \times n} \quad \text{für alle } A \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Die *schwache Formulierung* dieser Gleichungen, deren eindeutige Lösbarkeit in den Beweisen dieser Arbeit teilweise verwendet wird, ergibt sich durch Multiplikation der Gleichung

$$-\operatorname{div} \mathbb{C}\varepsilon(u) = f \quad \text{auf } \Omega,$$

die als Differentialgleichung 2. Ordnung durch Kombination der ersten beiden Gleichungen des Systems entsteht, einer Testfunktion $v \in H_D^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$, Integration über das Gebiet und anschließende partielle Integration [Bra13, S. 291]. Die Randdaten werden in die rechte Seite eingebracht.

Problem (Schwache Formulierung der Navier-Lamé-Gleichungen)

Zu gegebenem $f \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$, gegebenen Randdaten $g \in L^2(\partial\Omega; \mathbb{R}^n)$ und $\tilde{u} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ mit $\tilde{u} = u_D$ auf Γ_D sucht die schwache Formulierung der linearen Elastizität $u \in H_D^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ mit

$$\int_{\Omega} \varepsilon(u) : \mathbb{C} \varepsilon(v) \, dx = F(v) \quad \text{für jedes } v \in H_D^1(\Omega; \mathbb{R}^n).$$

Dabei ist die lineare rechte Seite $F \in H_D^1(\Omega; \mathbb{R}^n)^*$ definiert durch

$$F(v) := \int_{\Omega} f \cdot v \, dx + \int_{\Omega} \varepsilon(\tilde{u}) : \mathbb{C} \varepsilon(v) \, dx + \int_{\Gamma_N} g \cdot v \, ds.$$

Die eindeutige Lösbarkeit dieses Problems ist eine Folgerung aus dem Lemma von Lax-Milgram, siehe [Bra13, Sätze 2.2 und 2.5], da die Bilinearform $\int_{\Omega} \varepsilon(\bullet) : \mathbb{C} \varepsilon(\bullet) \, dx$ für die Norm $\|\bullet\|_{H^1(\Omega)}$ auf $H_D^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ elliptisch ist. Die Elliptizität folgt aus der Friedrichs- und Kornungleichung, siehe Sätze 2.33 und 2.34, und Korollar 2.31.

Eine weitere Formulierung, die später als Hilfsmittel von Interesse sein wird, ist die *duale gemischte Formulierung* [Bra13; CGS14]. Dazu wird die zweite Gleichung des Systemes 1. Ordnung mit einer Testfunktion $\mathbb{C}^{-1}\tau$, $\tau \in H_N(\text{div}, \Omega; \mathbb{S})$ und die erste mit $v \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ multipliziert und beide Gleichungen integriert. Eine partielle Integration in der zweiten Gleichung und Addition beider ergibt schließlich die Formulierung.

Problem (Duale gemischte Formulierung der Navier-Lamé-Gleichungen)

Zu gegebenem $f \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$, gegebenen Randdaten $\tilde{\sigma} \in H(\text{div}, \Omega; \mathbb{R}^{n \times n})$ mit $\tilde{\sigma} \nu = g$ auf Γ_N und $u_D \in H^{1/2}(\partial\Omega; \mathbb{R}^n)$ sucht die duale gemischte Formulierung der linearen Elastizität $(\sigma, u) \in H_N(\text{div}, \Omega; \mathbb{S}) \times L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ mit

$$\int_{\Omega} \mathbb{C}^{-1} \sigma : \tau \, dx + \int_{\Omega} \text{div} \tau \cdot u \, dx + \int_{\Omega} \text{div} \sigma \cdot v \, dx = F(\tau, v)$$

für jedes $(\tau, v) \in H_N(\text{div}, \Omega; \mathbb{S}) \times L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$,

Die rechte Seite $F \in (H_N(\text{div}, \Omega; \mathbb{S}) \times L^2(\Omega; \mathbb{R}^n))^*$ für $(\tau, v) \in H_N(\text{div}, \Omega; \mathbb{S}) \times L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ lautet

$$F(\tau, v) := \int_{\Gamma_D} \tau \nu \cdot u_D \, ds - \int_{\Omega} \mathbb{C}^{-1} \tilde{\sigma} : \tau \, dx - \int_{\Omega} f \cdot v \, dx - \int_{\Omega} \text{div} \tilde{\sigma} \cdot v \, dx.$$

Es wird für die Stabilität der dPG-Methode eine Inf-Sup-Bedingung für diese gemischte Formulierung nützlich sein. Um diese Betrachtungen später im Kontext der Räume Y_1 , Y_2 und Y_3 sehen zu können, werden für $j = 1, 2, 3$ die Unterräume $Z_j \subseteq H_N(\text{div}, \Omega; \mathbb{S}) \times L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ definiert durch

$Z_1 := Z_2 := H_N(\operatorname{div}, \Omega; \mathbb{S}) \times L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ und $Z_3 := (H_N(\operatorname{div}, \Omega; \mathbb{S}) \cap \Sigma(\mathcal{T})) \times L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$. Die Normen auf diesen Räumen lauten angelehnt an die Normen auf Y_1 , Y_2 und Y_2 dann

$$\begin{aligned} \|(\tau, v)\|_{Z_1}^2 &:= \|\tau\|_{H(\operatorname{div}, \mathbb{C}^{-1})}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 && \text{für jedes } (\tau, v) \in Z_1, \\ \|(\tau, v)\|_{Z_2}^2 &:= \|\tau\|_{H(\operatorname{div}, \mathbb{C}^{-1})}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 && \text{für jedes } (\tau, v) \in Z_2, \\ \|(\tau, v)\|_{Z_3}^2 &:= \|\tau\|_{H(\operatorname{div})}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 && \text{für jedes } (\tau, v) \in Z_3. \end{aligned}$$

Lemma 2.29 Die Bilinearform $\tilde{b} : (H_N(\operatorname{div}, \Omega; \mathbb{S}) \times L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)) \times (H_N(\operatorname{div}, \Omega; \mathbb{S}) \times L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)) \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$\tilde{b}((\tau, v), (\rho, w)) = (\mathbb{C}^{-1}\tau, \rho)_\Omega + (\operatorname{div} \tau, w)_\Omega + (\operatorname{div} \rho, v)_\Omega,$$

erfüllt für $j = 1, 2, 3$ und die Unterräume $Z_j \subseteq H_N(\operatorname{div}, \Omega; \mathbb{S}) \times L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ die Inf-Sup-Bedingung

$$0 < \tilde{\beta} := \sup_{(\tau, v) \in Z_j \setminus \{0\}} \sup_{(\rho, w) \in Z_j \setminus \{0\}} \frac{\tilde{b}((\tau, v), (\rho, w))}{\|(\rho, w)\|_{Z_j} \|(\tau, v)\|_{Z_j}}.$$

Diese Inf-Sup-Bedingung gilt in allen drei Fällen $j = 1, 2, 3$ mit λ -unabhängiger Konstante $\tilde{\beta}$. Für jedes $F \in Z_j^*$ existiert zudem genau ein $(\tau, v) \in Z_j$, sodass

$$\tilde{b}((\tau, v), (\rho, w)) = F(\rho, w) \quad \text{für jedes } (\rho, w) \in Z_j.$$

Beweis: Die eindeutige Lösbarkeit des genannten Problems wird in [BBF13, S. 541ff.] mittels des Brezzi-Splitting-Lemmas bewiesen. Dazu definiert man die Bilinearformen

$$\begin{aligned} a(\tau, \rho) &:= (\mathbb{C}^{-1}\tau, \rho)_\Omega \quad \text{für jedes } (\tau, \rho) \in H_N(\operatorname{div}, \Omega; \mathbb{S}) \times H_N(\operatorname{div}, \Omega; \mathbb{S}) \quad \text{und} \\ c(\tau, w) &:= (\operatorname{div} \tau, w)_\Omega \quad \text{für jedes } (\tau, w) \in H_N(\operatorname{div}, \Omega; \mathbb{S}) \times L^2(\Omega; \mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung und Korollar 2.31 liefern sofort

$$a(\tau, \rho) \leq \|\tau\|_{\mathbb{C}^{-1}} \|\rho\|_{\mathbb{C}^{-1}} \leq \|\tau\|_{H(\operatorname{div}, \mathbb{C}^{-1})} \|\rho\|_{H(\operatorname{div}, \mathbb{C}^{-1})} \leq \max\{1, 1/(2\mu)\} \|\tau\|_{H(\operatorname{div})} \|\rho\|_{H(\operatorname{div})}$$

und

$$c(\tau, w) \leq \|\operatorname{div} \tau\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{L^2(\Omega)} \leq \min\{\|\tau\|_{H(\operatorname{div})}, \|\tau\|_{H(\operatorname{div}, \mathbb{C}^{-1})}\} \|w\|_{L^2(\Omega)},$$

also Beschränktheit beiden Bilinearformen auf den ganzen Räumen in beiden verfügbaren Normen mit λ -unabhängigen Konstanten. Es gilt wegen des Fundamentallemmas der Variationsrechnung

$$\begin{aligned} \{\tau \in H_N(\operatorname{div}, \Omega; \mathbb{S}) \mid \operatorname{div} \tau = 0\} &= \{\tau \in H_N(\operatorname{div}, \Omega; \mathbb{S}) \mid c(\tau, \bullet) = 0 \text{ in } L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)^*\} \\ &= \{\tau \in H_N(\operatorname{div}, \Omega; \mathbb{S}) \cap \Sigma(\mathcal{T}) \mid c(\tau, \bullet) = 0 \text{ in } L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)^*\}. \end{aligned}$$

Auf diesem Raum gilt $\|\tau\|_{H(\operatorname{div})} = \|\tau\|_{L^2(\Omega)}$ beziehungsweise $\|\tau\|_{H(\operatorname{div}, \mathbb{C}^{-1})} = \|\tau\|_{\mathbb{C}^{-1}}$, insbesondere wegen Lemma 2.35 und Korollar 2.31 auch $\|\tau\|_{L^2(\Omega)} \leq c_{\operatorname{td}}(2\mu)^{1/2} \|\tau\|_{\mathbb{C}^{-1}}$. Dies impliziert die Elliptizität der Bilinearform a für alle τ in diesem Raum in beiden Normen durch

$$\|\tau\|_{L^2(\Omega)} \leq c_{\operatorname{td}}(2\mu)^{1/2} \|\tau\|_{\mathbb{C}^{-1}} = c_{\operatorname{td}}(2\mu)^{1/2} a(\tau, \tau).$$

Es bleibt, die Inf-Sup-Bedingung für c zu beweisen. Dazu sei $v \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ beliebig. Es wird zunächst der Fall $j = 3$ betrachtet. Es sei $u \in H_D^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ die schwache Lösung von

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \varepsilon(u) &= v \quad \text{in } \Omega, \\ \varepsilon(u)v &= 0 \quad \text{auf } \Gamma_N. \end{aligned}$$

Dann gilt mit $\tau := \varepsilon(u)$ wegen $\operatorname{div} \tau = v$ auch $\tau \in H_N(\operatorname{div}, \Omega; \mathbb{S}) \cap \Sigma(\mathcal{T}) \subseteq H_N(\operatorname{div}, \Omega; \mathbb{S})$, da für $\Gamma_N = \emptyset$ die Gleichung

$$\int_{\Omega} \operatorname{tr}(\tau) = \int_{\Omega} \operatorname{div} u \, dx = \int_{\partial\Omega} u \cdot \nu \, ds = 0$$

gilt. Es gilt außerdem aufgrund der schwachen Formulierung und mit der Cauchy-Schwarz-, der Korn- und Friedrichsungleichung

$$\|\varepsilon(u)\|_{L^2(\Omega)} = (\varepsilon(u), \varepsilon(u))_{\Omega} = (v, u)_{\Omega} \leq \|v\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq c_F c_{\text{Korn}} \|v\|_{L^2(\Omega)} \|\varepsilon(u)\|_{L^2(\Omega)}$$

und daher wegen $\|\tau\|_{L^2(\Omega)} = \|\varepsilon(u)\|_{L^2(\Omega)}$ insgesamt

$$\|\tau\|_{H(\operatorname{div})}^2 \leq (c_F^2 c_{\text{Korn}}^2 + 1) \|v\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Daher gilt die Inf-Sup-Bedingung im Fall $j = 3$ durch

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} = \frac{\|v\|_{L^2(\Omega)}^2}{\|v\|_{L^2(\Omega)}} = \frac{c(\tau, v)}{\|v\|_{L^2(\Omega)}} \leq (c_F^2 c_{\text{Korn}}^2 + 1)^{1/2} \frac{c(\tau, v)}{\|\tau\|_{H(\operatorname{div})}}.$$

Für die Fälle $j = 1, 2$ ist $\|\tau\|_{H(\operatorname{div}, \mathbb{C}^{-1})}^2 \leq \max\{1, 1/(2\mu)\} \|\tau\|_{H(\operatorname{div})}^2$ und der Rest folgt analog.

Somit ist das Brezzi-Splitting-Lemma anwendbar und liefert eindeutige Lösbarkeit des genannten Problems. Die globale Inf-Sup-Konstante von \tilde{b} hängt laut dem Beweis zum Brezzi-Splitting-Lemma, vgl. [Car09b, S. 207], nur von der Elliptizitäts- und der Beschränktheitskonstante von a , sowie der Inf-Sup-Konstante von c ab. Da alle diese Werte oben von λ unabhängig waren, gilt dies auch für $\tilde{\beta}$. ■

2.7 Verwendete Hilfsmittel und Resultate

Das folgende Lemma fasst einige Eigenschaften und Rechenregeln des Elastizitätstensors \mathbb{C} aus (4.5) zusammen.

Lemma 2.30 (Eigenschaften von \mathbb{C}) *Für die Abbildung \mathbb{C} gilt:*

(a) *Es ist $\mathbb{C}(\mathbb{S}) \subseteq \mathbb{S}$.*

(b) *\mathbb{C} ist invertierbar, und es gilt*

$$\mathbb{C}^{-1}A = \frac{1}{2\mu}A - \frac{\lambda}{2\mu(2\mu + n\lambda)} \operatorname{tr}(A)I_{n \times n} = \frac{1}{2\mu} \operatorname{dev} A + \frac{1}{n(2\mu + n\lambda)} \operatorname{tr}(A)I_{n \times n}.$$

(c) Für beliebige Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt

$$A : \mathbb{C}B = \mathbb{C}A : B, \quad A : \mathbb{C}^{-1}B = \mathbb{C}^{-1}A : B \quad \text{und} \quad A : B = \mathbb{C}A : \mathbb{C}^{-1}B.$$

(d) Es existieren eindeutig bestimmte, positiv definite lineare Abbildungen $\mathbb{C}^{1/2} : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\mathbb{C}^{-1/2} : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\mathbb{C}^{1/2} \circ \mathbb{C}^{1/2} = \mathbb{C}$ und $\mathbb{C}^{-1/2} \circ \mathbb{C}^{-1/2} = \mathbb{C}^{-1}$. Es gelten die Darstellungen

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{1/2}(A) &= \sqrt{2\mu}A + \frac{\sqrt{2\mu + n\lambda} - \sqrt{2\mu}}{n} \text{tr}(A)I_{n \times n}, \\ \mathbb{C}^{-1/2}(A) &= \frac{1}{\sqrt{2\mu}}A - \frac{\sqrt{2\mu + n\lambda} - \sqrt{2\mu}}{n\sqrt{2\mu(2\mu + n\lambda)}} \text{tr}(A)I_{n \times n} \end{aligned}$$

und $\mathbb{C}^{1/2}A : B = A : \mathbb{C}^{1/2}B$ sowie $\mathbb{C}^{-1/2}A : B = A : \mathbb{C}^{-1/2}B$ für alle $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

(e) Es gelten für alle $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Abschätzungen

$$|\mathbb{C}^{-1}A| \leq \frac{1}{2\mu}|A|, \quad |\mathbb{C}^{-1/2}A| \leq \frac{1}{\sqrt{2\mu}}|A|, \quad |A| \leq \frac{1}{2\mu}|\mathbb{C}A|, \quad |A| \leq \frac{1}{\sqrt{2\mu}}|\mathbb{C}^{1/2}A|.$$

Beweis: Die Aussage (a) folgt sofort aufgrund der Symmetrie von $I_{n \times n}$. Es wird nun zunächst eine allgemeine Identität hergeleitet, die dann das Nachprüfen der Behauptungen (b) und (d) erleichtert. Seien dazu $f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathbb{R}$ und die Abbildungen $F(A) = f_1A + f_2 \text{tr}(A)I_{n \times n}$ und $G(A) = g_1A + g_2 \text{tr}(A)I_{n \times n}$ für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gegeben. Dann gilt

$$\begin{aligned} F(G(A)) &= f_1G(A) + f_2 \text{tr}(G(A))I_{n \times n} \\ &= f_1g_1A + f_1g_2 \text{tr}(A)I_{n \times n} + f_2(g_1 \text{tr}(A) + ng_2 \text{tr}(A))I_{n \times n} \\ &= f_1g_1A + (f_1g_2 + f_2g_1 + nf_2g_2) \text{tr}(A)I_{n \times n}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Somit gilt für (b) mit dem angegebenen \mathbb{C}^{-1} für jedes $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{C}(\mathbb{C}^{-1}A) &= A + \left(\frac{-2\lambda\mu}{2\mu(2\mu + n\lambda)} + \frac{\lambda}{2\mu} + \frac{-n\lambda^2}{2\mu(2\mu + n\lambda)} \right) \text{tr}(A)I_{n \times n} \\ &= A + \frac{-2\lambda\mu + \lambda(2\mu + n\lambda) - n\lambda^2}{2\mu(2\mu + n\lambda)} \text{tr}(A)I_{n \times n} \\ &= A. \end{aligned}$$

Außerdem ist $(2\mu + n\lambda)\lambda - 2\mu\lambda - n\lambda^2 = 0$, also $\mathbb{C}^{-1} \circ \mathbb{C} = \text{id}$. Die zweite Darstellung von \mathbb{C}^{-1} gilt wegen

$$-\frac{1}{2\mu n} + \frac{1}{n(2\mu + n\lambda)} = \frac{-2\mu - n\lambda + 2\mu}{2\mu n(2\mu + n\lambda)} = \frac{-\lambda}{2\mu(2\mu + n\lambda)}.$$

Teil (c) der Behauptung lässt sich aus der allgemeinen Formel $(f_1A + f_2 \text{tr}(A)I_{n \times n}) : B = f_1A : B + f_2 \text{tr}(A) \text{tr}(B)$ und deren Symmetrie in den Matrizen A und B herleiten.

Für (d) wird zunächst positive Definitheit der Abbildung \mathbb{C} gezeigt. Sei dazu $A \in \mathbb{R}^{n \times n} \setminus \{0\}$. Dann folgt wegen $\text{tr}(A) = A : I_{n \times n}$, dass

$$\mathbb{C}A : A = 2\mu A : A + \lambda \text{tr}(A)^2 \geq 2\mu|A|^2 > 0.$$

Somit existieren Wurzeln der symmetrischen, positiv definiten Abbildungen \mathbb{C} und \mathbb{C}^{-1} . Die Formeln für $\mathbb{C}^{1/2}$ und $\mathbb{C}^{-1/2}$ werden durch eine Probe mit Hilfe von (2.5) überprüft,

$$\mathbb{C}^{1/2}(\mathbb{C}^{1/2}A) = 2\mu A \left(\frac{2\sqrt{2\mu}(\sqrt{2\mu+n\lambda}-\sqrt{2\mu})}{n} + \frac{n(\sqrt{2\mu+n\lambda}-\sqrt{2\mu})^2}{n^2} \right) \text{tr}(A) I_{n \times n}.$$

Aber es gilt

$$\begin{aligned} & \frac{2\sqrt{2\mu}(\sqrt{2\mu+n\lambda}-\sqrt{2\mu})}{n} + \frac{n(\sqrt{2\mu+n\lambda}-\sqrt{2\mu})^2}{n^2} \\ &= \frac{2\sqrt{2\mu(2\mu+n\lambda)}}{n} - \frac{4\mu}{n} + \frac{2\mu+n\lambda}{n} + \frac{2\mu}{n} - \frac{2\sqrt{2\mu(2\mu+n\lambda)}}{n} \\ &= \lambda, \end{aligned}$$

also $\mathbb{C}^{1/2} \circ \mathbb{C}^{1/2} = \mathbb{C}$. Außerdem

$$\mathbb{C}^{-1/2}(\mathbb{C}^{-1/2}A) = \frac{1}{2\mu}A + \left(-2\frac{1}{\sqrt{2\mu}} \frac{\sqrt{2\mu+n\lambda}-\sqrt{2\mu}}{n\sqrt{2\mu(2\mu+n\lambda)}} + \frac{n(\sqrt{2\mu+n\lambda}-\sqrt{2\mu})^2}{(n\sqrt{2\mu(2\mu+n\lambda)})^2} \right) \text{tr}(A) I_{n \times n}.$$

Dann

$$-2\frac{1}{\sqrt{2\mu}} \frac{\sqrt{2\mu+n\lambda}-\sqrt{2\mu}}{n\sqrt{2\mu(2\mu+n\lambda)}} = -2\frac{\sqrt{2\mu+n\lambda}-\sqrt{2\mu}}{2n\mu\sqrt{2\mu+n\lambda}}$$

und

$$\frac{n(\sqrt{2\mu+n\lambda}-\sqrt{2\mu})^2}{(n\sqrt{2\mu(2\mu+n\lambda)})^2} = \frac{2\mu+n\lambda+2\mu-2\sqrt{2\mu(2\mu+n\lambda)}}{2n\mu\sqrt{2\mu+n\lambda}\sqrt{2\mu+n\lambda}}.$$

Die Addition der letzten beiden Gleichungen ergibt

$$\begin{aligned} & -2\frac{\sqrt{2\mu+n\lambda}-\sqrt{2\mu}}{2n\mu\sqrt{2\mu+n\lambda}} + \frac{2\mu+n\lambda+2\mu-2\sqrt{2\mu(2\mu+n\lambda)}}{2n\mu\sqrt{2\mu+n\lambda}\sqrt{2\mu+n\lambda}} \\ &= \frac{-2(\sqrt{2\mu+n\lambda}-\sqrt{2\mu})\sqrt{2\mu+n\lambda}+2\mu+n\lambda+2\mu-2\sqrt{2\mu(2\mu+n\lambda)}}{2n\mu\sqrt{2\mu+n\lambda}\sqrt{2\mu+n\lambda}} \\ &= \frac{-2(2\mu+n\lambda)+2\sqrt{2\mu(2\mu+n\lambda)}+4\mu+n\lambda-2\sqrt{2\mu(2\mu+n\lambda)}}{2n\mu\sqrt{2\mu+n\lambda}\sqrt{2\mu+n\lambda}} \\ &= \frac{-2(2\mu+n\lambda)+4\mu+n\lambda}{2n\mu\sqrt{2\mu+n\lambda}\sqrt{2\mu+n\lambda}} \\ &= \frac{-\lambda}{2\mu(2\mu+n\lambda)}, \end{aligned}$$

somit $\mathbb{C}^{-1/2} \circ \mathbb{C}^{-1/2} = \mathbb{C}^{-1}$.

Für Teil (e) sei $\{E_{jk}\}_{j,k=1,\dots,n}$ die Basis der Einheitsmatrizen von $\mathbb{R}^{n \times n}$. Die Abbildung \mathbb{C} hat als Eigenwerte 2μ (für Eigenvektoren E_{jk} , $j \neq k$ sowie $E_{11} - E_{jj}$, $j = 2, \dots, n$) und $2\mu + n\lambda$ (für Eigenvektor $I_{n \times n}$). Damit besitzt \mathbb{C}^{-1} die Eigenwerte $1/(2\mu)$ und $1/(2\mu + n\lambda)$. Mit $\mathbb{R}^{n \times n} \cong \mathbb{R}^{n^2}$

lässt sich \mathbb{C}^{-1} als Abbildung $\mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$ auffassen. Das Skalarprodukt „:“ auf $\mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau die Entsprechung der Euklidischen Norm auf \mathbb{R}^{n^2} unter diesem Isomorphismus, daher gilt für die Spektralnorm $\|\mathbb{C}^{-1}\|$ der darstellenden Matrix von \mathbb{C}^{-1} aufgrund der Submultiplikativität, dass

$$|\mathbb{C}^{-1} A| \leq \|\mathbb{C}^{-1}\| |A|.$$

Die Spektralnorm der Abbildung \mathbb{C}^{-1} ist wegen ihrer Symmetrie und positiven Definitheit genau deren größter Eigenwert [SK11, S. 52], also $1/(2\mu) \geq 1/(2\mu + n\lambda)$. Daraus folgt

$$|\mathbb{C}^{-1} A| \leq \frac{1}{2\mu} |A|.$$

Insbesondere folgt wegen der Cauchy-Schwarz-Ungleichung auch für jedes $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dass

$$|\mathbb{C}^{-1/2} A| = \sqrt{\mathbb{C}^{-1} A : A} \leq \sqrt{|\mathbb{C}^{-1} A|} \sqrt{|A|} \leq \frac{1}{\sqrt{2\mu}} |A|.$$

Außerdem folgt mit den Substitutionen $A := \mathbb{C} B$ bzw. $A := \mathbb{C}^{1/2} B$ und den vorigen Abschätzungen, dass $|B| \leq (1/(2\mu)) |\mathbb{C} B|$ und $|B| \leq (1/(2\mu))^{1/2} |\mathbb{C}^{1/2} B|$ für alle $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. ■

Korollar 2.31 *Es gilt für alle $\tau \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^{n \times n})$, dass*

$$\|\text{dev } \tau\|_{L^2(\Omega)} \leq 2\mu \|\mathbb{C}^{-1} \tau\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{und} \quad \|\tau\|_{\mathbb{C}^{-1}} \leq (1/2\mu)^{1/2} \|\tau\|_{L^2(\Omega)}.$$

Insbesondere gilt dann $\|\text{dev } \tau\|_{L^2(\Omega)} \leq (2\mu)^{1/2} \|\tau\|_{\mathbb{C}^{-1}}$.

Beweis: Laut Lemma 2.30(b) gilt $\mathbb{C}^{-1} \tau = 1/(2\mu) \text{dev } \tau + 1/(n(2\mu + n\lambda)) \text{tr}(\tau) I_{n \times n}$, also

$$\begin{aligned} \|\mathbb{C}^{-1} \tau\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \frac{1}{4\mu^2} \|\text{dev } \tau\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{(n(2\mu + n\lambda))^2} \|\text{tr}(\tau) I_{n \times n}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + 2 \frac{1}{2\mu n(2\mu + n\lambda)} (\text{dev } \tau, \text{tr}(\tau) I_{n \times n})_{\Omega}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Aber es gilt auch für alle $x \in \Omega$, dass

$$\text{dev } \tau(x) : \text{tr}(\tau(x)) I_{n \times n} = \text{tr}(\tau(x)) (\text{dev } \tau(x) : I_{n \times n}) = \text{tr}(\tau(x)) \text{tr}(\text{dev } \tau(x)),$$

also wegen der Spurfreiheit des deviatorischen Anteils dann $(\text{dev } \tau, \text{tr}(\tau) I_{n \times n})_{\Omega} = 0$. Insgesamt folgt mit (2.6), dass

$$\|\text{dev } \tau\|_{L^2(\Omega)} \leq 2\mu \|\mathbb{C}^{-1} \tau\|_{L^2(\Omega)}.$$

Für die zweite Abschätzung wird Teil (e) von Lemma 2.30 benutzt, und man erhält

$$\|\tau\|_{\mathbb{C}^{-1}}^2 = \int_{\Omega} \tau : \mathbb{C}^{-1} \tau \, dx = \int_{\Omega} |\mathbb{C}^{-1/2} \tau|^2 \, dx \leq 1/(2\mu) \int_{\Omega} |\tau|^2 \, dx = 1/(2\mu) \|\tau\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad \blacksquare$$

Die folgenden drei Ungleichungen sind nützlich für Norm-Abschätzungen. Beweise finden sich in [PW60], [Alt06, S. 253] und [Bra13, S. 195].

Satz 2.32 (Poincaré-Ungleichung) Für ein beschränktes, konvexes Gebiet Ω gilt für jedes $v \in H^1(\Omega)$ und $\bar{v} := |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} v \, dx$, dass

$$\|v - \bar{v}\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\text{diam}(\Omega)}{\pi} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Satz 2.33 (Friedrichs-Ungleichung) Für jedes beschränkte, polygonal berandete Lipschitz-Gebiet Ω existiert $c_F > 0$, sodass für jedes $v \in H_D^1(\Omega)$ gilt

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq c_F \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Satz 2.34 (Kornsche Ungleichung) Für jedes beschränkte, polygonal berandete Lipschitz-Gebiet Ω existiert $c_{\text{Korn}} > 0$, sodass für jedes $v \in H_D^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ gilt

$$\|D v\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c_{\text{Korn}}^2 \int_{\Omega} \varepsilon(v) : \varepsilon(v) \, dx.$$

Das folgende, [CGS14] entnommene Lemma ist eine Verallgemeinerung des in [BBF13, S. 542] bewiesenen Lemmas.

Lemma 2.35 (tr-dev-div-Lemma) Sei Σ_0 ein abgeschlossener Unterraum von $H(\text{div}, \Omega; \mathbb{R}^{n \times n})$, der nicht den konstanten Tensor $I_{n \times n}$ enthält. Dann existiert eine Konstante $c_{\text{td}} > 0$, die nur von Ω , Γ_N und Γ_D abhängt, sodass für $\tau \in \Sigma_0$,

$$\|\tau\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c_{\text{td}}^2 (\|\text{dev } \tau\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\text{div } \tau\|_{L^2(\Omega)}^2).$$

Bemerkung 2.36 Die zwei Fälle für Σ_0 , die in dieser Arbeit benutzt werden, sind

$$\Sigma_0^{(1)} := \{\tau \in H(\text{div}, \Omega; \mathbb{R}^{n \times n}) \mid \int_{\Omega} \text{tr}(\tau) \, dx = 0\} \text{ wenn } \Gamma_N = \emptyset,$$

$$\Sigma_0^{(2)} := \{\tau \in H(\text{div}, \Omega; \mathbb{R}^{n \times n}) \mid \tau \nu = 0 \text{ fast überall auf } \Gamma_N\} \text{ wenn } \Gamma_N \neq \emptyset.$$

Diese beiden Räume erfüllen die Bedingungen aus dem Lemma.

Beweis der Bemerkung: Offensichtlich gilt $I_{n \times n} \notin \Sigma_0^{(1)} \cup \Sigma_0^{(2)}$, es muss also nur noch Abgeschlossenheit der Unterräume in $H(\text{div}, \Omega; \mathbb{R}^{n \times n})$ gezeigt werden. Es sei dazu $\{\tau^j\}_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \Sigma_0^{(1)}$ eine in $H(\text{div}, \Omega; \mathbb{R}^{n \times n})$ konvergente Folge mit Grenzwert $\tau \in H(\text{div}, \Omega; \mathbb{R}^{n \times n})$. Aufgrund der Linearität der Spur, wegen $\tau^j \in \Sigma_0^{(1)}$ und mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung in $L^2(\Omega)$ mit der konstanten Funktion 1 folgt für jedes $j \in \mathbb{N}$, dass

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \text{tr}(\tau) \, dx \right| &= \left| \int_{\Omega} \text{tr}(\tau - \tau^j) \, dx \right| \leq \int_{\Omega} |\text{tr}(\tau - \tau^j)| \, dx = \|\text{tr}(\tau - \tau^j)\|_{L^1(\Omega)} \\ &= \left\| \sum_{k=1}^n \tau_{kk} - \tau_{kk}^j \right\|_{L^1(\Omega)} \leq \sum_{k=1}^n \|\tau_{kk} - \tau_{kk}^j\|_{L^1(\Omega)} \\ &\leq |\Omega|^{1/2} \sum_{k=1}^n \|\tau_{kk} - \tau_{kk}^j\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Andererseits gilt wegen der Cauchy-Schwarz-Ungleichung im \mathbb{R}^n , dass

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \|\tau_{kk} - \tau_{kk}^j\|_{L^2(\Omega)} &= \sum_{k=1}^n 1 \|\tau_{kk} - \tau_{kk}^j\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq |(1, \dots, 1)^\top| \cdot |(\|\tau_{11} - \tau_{11}^j\|_{L^2(\Omega)}, \dots, \|\tau_{nn} - \tau_{nn}^j\|_{L^2(\Omega)})^\top| \\ &= \sqrt{n} \sqrt{\sum_{k=1}^n \|\tau_{kk} - \tau_{kk}^j\|_{L^2(\Omega)}^2}. \end{aligned}$$

Aber wegen der Definition des Skalarproduktes : gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \|\tau_{kk} - \tau_{kk}^j\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \sum_{k,\ell=1}^n \|\tau_{k\ell} - \tau_{k\ell}^j\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \|\tau - \tau^j\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\rightarrow 0, j \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Somit gilt $\int_{\Omega} \operatorname{tr}(\tau) \, dx = 0$, also $\tau \in \Sigma_0^{(1)}$.

Im Fall $\Gamma_N \neq \emptyset$ sei wieder eine in $H(\operatorname{div}, \Omega; \mathbb{R}^{n \times n})$ konvergente Folge $\{\tau^j\}_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \Sigma_0^{(2)}$ mit Grenzwert $\tau \in H(\operatorname{div}, \Omega; \mathbb{R}^{n \times n})$ gegeben. Sei $\varphi \in H_D^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ eine beliebige Testfunktion. Dann gilt für jedes $j \in \mathbb{N}$ mit einer partiellen Integration, dass

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial\Omega} \varphi \cdot \tau^j \nu \, ds \\ &= \int_{\Omega} \operatorname{div} \tau^j \cdot \varphi \, dx + \int_{\Omega} \tau^j : D \varphi \, dx. \end{aligned}$$

Da $\tau^j \rightarrow \tau$ und $\operatorname{div} \tau^j \rightarrow \operatorname{div} \tau$ in $L^2(\Omega; \mathbb{R}^{n \times n})$, gilt auch

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} \operatorname{div} \tau \cdot \varphi \, dx + \int_{\Omega} \tau : D \varphi \, dx \\ &= \int_{\partial\Omega} \varphi \cdot \tau \nu \, ds. \end{aligned}$$

Da die Testfunktion φ beliebig war, gilt $\tau \nu = 0$ fast überall entlang Γ_N , also $\tau \in \Sigma_0^{(2)}$. ■

Bemerkung 2.37 (Variante des tr-dev-div-Lemmas für L^2 -Funktionen) Diese Variante des tr-dev-div-Lemmas gilt auch für Funktionen, die gar keine schwache Divergenz besitzen. Es sei dazu $\tau \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^{n \times n})$ mit $\int_{\Omega} \operatorname{tr}(\tau) \, dx = 0$ gegeben. Dann lässt sich $\operatorname{div} \tau$ auffassen als Abbildung

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \tau : H_D^1(\Omega; \mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathbb{R}, \\ v &\mapsto \int_{\Omega} \tau : D v \, dx. \end{aligned}$$

Es gilt dann mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung $\operatorname{div} \tau \in H_D^1(\Omega; \mathbb{R}^n)^* =: H^{-1}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ und

$$\|\operatorname{div} \tau\|_{H^{-1}(\Omega)} := \sup_{v \in H_D^1(\Omega; \mathbb{R}^n) \setminus \{0\}} \frac{(\tau, D v)_{\Omega}}{\|v\|_{H^1(\Omega)}}.$$

Ersetzt man im Beweis des tr-dev-div-Lemmas in [BBF13] eine Abschätzung, die dort per Cauchy-Schwarz-Ungleichung geschieht, durch die Abschätzung mit obiger Operatornorm, so erhält man eine Variante des Lemmas als Abschätzung

$$\|\tau\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c_{\text{td}}^2 (\|\text{dev } \tau\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\text{div } \tau\|_{H^{-1}(\Omega)}^2).$$

Für die Normen auf den Spurräumen lassen sich zwei später sehr nützliche Lemmas beweisen.

Lemma 2.38 (Dualitätslemma I) *Für jedes $s \in H_D^{1/2}(\partial\mathcal{T}; \mathbb{R}^n)$ und für $\Sigma(\mathcal{T}) \subseteq H(\text{div}, \mathcal{T}; \mathbb{S})$ wie in Definition 2.25 gilt*

$$\|s\|_{H_D^{1/2}(\partial\mathcal{T}, \mathbb{C})} \leq \sup_{q \in \Sigma(\mathcal{T}) \setminus \{0\}} \frac{\langle \gamma_v^{\mathcal{T}} q, s \rangle_{\partial\mathcal{T}}}{\|q\|_{H(\text{div}, \mathbb{C}^{-1}), NC}}$$

und mit den Konstanten c_F und c_{Korn} aus der Friedrichsungleichung und der Kornungleichung

$$\|s\|_{H_D^{1/2}(\partial\mathcal{T})} \leq c_{\text{Korn}} (1 + c_F^2)^{1/2} \sup_{q \in \Sigma(\mathcal{T}) \setminus \{0\}} \frac{\langle \gamma_v^{\mathcal{T}} q, s \rangle_{\partial\mathcal{T}}}{\|q\|_{H(\text{div}), NC}}$$

Beweis: Der Beweis ist eine Modifikation eines Beweises aus der noch unveröffentlichten Arbeit [CDG14a]. Es sei dazu $w \in H^1(\mathcal{T}; \mathbb{R}^n)$, das auf jedem Element $T \in \mathcal{T}$ als schwache Lösung der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbb{C}\mathcal{E}(w) &= 0 && \text{in } T, \\ w &= s_T && \text{auf } \partial T, \end{aligned}$$

definiert ist. Dadurch gilt $\gamma_0^{\mathcal{T}} w = s \in H_D^{1/2}(\partial\mathcal{T}; \mathbb{R}^n)$ und somit $w \in H_D^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ nach Bemerkung 2.24. Für jedes $\varphi \in H_D^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$, $\gamma_0^{\mathcal{T}} \varphi = 0$ gilt dann aber wegen der schwachen Formulierung des obigen Problems, dass

$$0 = (\mathbb{C}\mathcal{E}(w), \mathcal{E}(\varphi))_{\Omega}$$

und daher der Satz des Pythagoras

$$\|w + \varphi\|^2 = \|w\|^2 + \|\varphi\|^2.$$

Insbesondere gilt dann $\|w\| \leq \|v\|$ für jedes $v \in H_D^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$, $\gamma_0^{\mathcal{T}} v = s$, also $\|w\| = \|s\|_{H_D^{1/2}(\partial\mathcal{T}, \mathbb{C})}$. Es definiert nun $q := \mathbb{C}\mathcal{E}_{NC}(w) \in H(\text{div}, \mathcal{T}; \mathbb{S})$ eine Funktion mit $\text{div}_{NC} q = 0$. Für den Fall $\Gamma_N = \emptyset$ ist dann aber auch

$$\int_{\Omega} \text{tr}(q) \, dx = (2\mu + n\lambda) \int_{\Omega} \text{div } w \, dx = (2\mu + n\lambda) \int_{\partial\Omega} w \cdot \nu \, ds = 0,$$

also sogar $q \in \Sigma(\mathcal{T})$. Es gilt für diese aber mit der Formel der partiellen Integration aus Satz 2.19, dass

$$\langle \gamma_v^{\mathcal{T}} q, s \rangle_{\partial\mathcal{T}} = \langle \gamma_v^{\mathcal{T}} q, \gamma_0^{\mathcal{T}} w \rangle_{\partial\mathcal{T}} = (q, D w)_{\Omega} + (\text{div}_{NC} q, w)_{\Omega} = \|w\|^2.$$

Andererseits ist $\|q\|_{H(\operatorname{div}, \mathbb{C}^{-1}), NC}^2 = \|q\|_{\mathbb{C}^{-1}}^2 = \|w\|^2$, also folgt insgesamt der erste Teil der Behauptung durch

$$\|s\|_{H_D^{1/2}(\partial\mathcal{T}, \mathbb{C})} = \|w\| = \frac{\langle \gamma_v^\mathcal{T} q, s \rangle_{\partial\mathcal{T}}}{\|q\|_{H(\operatorname{div}, \mathbb{C}^{-1}), NC}} \leq \sup_{q \in \Sigma(\mathcal{T}) \setminus \{0\}} \frac{\langle \gamma_v^\mathcal{T} q, s \rangle_{\partial\mathcal{T}}}{\|q\|_{H(\operatorname{div}, \mathbb{C}^{-1}), NC}}.$$

Für die zweite Ungleichung beobachtet man zunächst mit der Friedrichs- und der Kornungleichung

$$\begin{aligned} \|s\|_{H_D^{1/2}(\partial\mathcal{T})} &= \min\{\|w\|_{H^1(\Omega)} \mid w \in H_D^1(\Omega; \mathbb{R}^n), \gamma_0^\mathcal{T}(w) = s\} \\ &\leq c_{\text{Korn}}(1 + c_F^2)^{1/2} \min\{\|\varepsilon(w)\|_{L^2(\Omega)} \mid w \in H_D^1(\Omega; \mathbb{R}^n), \gamma_0^\mathcal{T}(w) = s\}. \end{aligned}$$

Analog zu oben zeigt sich, dass die schwache Lösung zu

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \varepsilon(w) &= 0 && \text{in } T, \\ w &= s_T && \text{auf } \partial T, \end{aligned}$$

die Norm in $\min\{\|\varepsilon(w)\|_{L^2(\Omega)} \mid w \in H_D^1(\Omega; \mathbb{R}^n), \gamma_0^\mathcal{T}(w) = s\}$ minimiert. Mit $q := \varepsilon_{NC}(w) \in \Sigma(\mathcal{T})$ folgt mit derselben Argumentation wie vorher

$$\|s\|_{H_D^{1/2}(\partial\mathcal{T})} \leq c_{\text{Korn}}(1 + c_F^2)^{1/2} \|\varepsilon(w)\|_{L^2(\Omega)} = c_{\text{Korn}}(1 + c_F^2)^{1/2} \frac{\langle \gamma_v^\mathcal{T} q, s \rangle_{\partial\mathcal{T}}}{\|q\|_{H(\operatorname{div})}},$$

also die Behauptung. ■

Lemma 2.39 (Dualitätslemma II) *Für jedes $t \in H_N^{-1/2}(\partial\mathcal{T}; \mathbb{R}^n)$ gilt*

$$\|t\|_{H_N^{-1/2}(\partial\mathcal{T}, \mathbb{C}^{-1})} \leq \sup_{v \in H^1(\mathcal{T}; \mathbb{R}^n) \setminus \{0\}} \frac{\langle t, \gamma_0^\mathcal{T} v \rangle_{\partial\mathcal{T}}}{(\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v\|_{NC}^2)^{1/2}}$$

und

$$\|t\|_{H_D^{1/2}(\partial\mathcal{T})} \leq \sup_{v \in H^1(\mathcal{T}; \mathbb{R}^n) \setminus \{0\}} \frac{\langle t, \gamma_0^\mathcal{T} v \rangle_{\partial\mathcal{T}}}{\|v\|_{H^1(\Omega), NC}}.$$

Beweis: Auch dieser Beweis orientiert sich an [CDG14a]. Es sei $v \in H^1(\mathcal{T}; \mathbb{R}^n)$ auf jedem Element $T \in \mathcal{T}$ die schwache Lösung der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \mathbb{C} D v + v &= 0 && \text{in } T, \\ \mathbb{C} D v v_T &= t_T && \text{auf } \partial T. \end{aligned}$$

Die eindeutige Lösbarkeit dieser schwachen Formulierung folgt wie für die schwache Formulierung der linearen Elastizität wegen der Elliptizität der zugehörigen Bilinearform $(D \bullet, \mathbb{C} D \bullet)_T + (\bullet, \bullet)_T$ auf $H^1(T)$. Es sei nun $\sigma := \mathbb{C} D_{NC} v \in H(\operatorname{div}, \mathcal{T}; \mathbb{R}^{n \times n})$. Wegen $\gamma_v^\mathcal{T} \sigma = t \in H_N^{-1/2}(\partial\mathcal{T}; \mathbb{R}^n)$ gilt dann laut Bemerkung 2.24 aber auch $\sigma \in H_N(\operatorname{div}, \Omega; \mathbb{R}^{n \times n})$, außerdem $\operatorname{div} \sigma = v$. Daher gilt $\|t\|_{H_N^{-1/2}(\partial\mathcal{T}, \mathbb{C}^{-1})} \leq \|\sigma\|_{H(\operatorname{div}, \mathbb{C}^{-1})}$. Man kann hier sogar wie im Beweis zum vorigen Lemma zeigen,

dass dies sogar eine Gleichheit ist, also σ das Minimum in der Definition der Spurnorm annimmt. Es gilt für die Norm von v

$$\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\llbracket v \rrbracket\|_{NC}^2 = \|\operatorname{div} \sigma\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\sigma\|_{\mathbb{C}^{-1}}^2 = \|\sigma\|_{H(\operatorname{div}, \mathbb{C}^{-1})}^2.$$

Außerdem gilt

$$\langle t, \gamma_0^\mathcal{T} v \rangle_{\partial\mathcal{T}} = \langle \gamma_v^\mathcal{T} \sigma, \gamma_0^\mathcal{T} v \rangle_{\partial\mathcal{T}} = (\sigma, D_{NC} v)_\Omega + (\operatorname{div} \sigma, v)_\Omega = \|\sigma\|_{H(\operatorname{div}, \mathbb{C}^{-1})}^2.$$

Die erste Ungleichung folgt dann nach Übergang zum Supremum wegen

$$\|t\|_{H_N^{-1/2}(\partial\mathcal{T}, \mathbb{C}^{-1})} \leq \|\sigma\|_{H(\operatorname{div}, \mathbb{C}^{-1})} = \frac{\langle t, \gamma_0^\mathcal{T} v \rangle_{\partial\mathcal{T}}}{(\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\llbracket v \rrbracket\|_{NC}^2)^{1/2}}.$$

Die zweite Ungleichung folgt als Spezialfall der ersten für $\mathbb{C} = \operatorname{id}$ (also $\mu = 1/2$, $\lambda = 0$), da sich die jeweiligen Normen auch als dieser Spezialfall betrachten lassen. ■

Bemerkung 2.40 Wie in [CDG14a] zusätzlich gezeigt wird, lassen sich (je nach Normen bis auf Konstanten) auch die umgekehrten Abschätzungen der Ungleichungen aus Lemma 2.38 und Lemma 2.39 beweisen. Die Beweise dort werden für die nur für die Standard- L^2 -, H^1 - und $H(\operatorname{div})$ -Normen und ohne Symmetriebedingungen geführt, weshalb sich dort in sogar jeweils eine Gleichheit der Terme einstellt.

Satz 2.41 (Helmholtz-Zerlegung [CD98]) Für $n = 2$ gilt die Zerlegung

$$L^2(\Omega; \mathbb{S}) = \mathbb{C}\varepsilon(H_D^1(\Omega; \mathbb{R}^2)) \oplus \operatorname{Curl} \operatorname{Curl} \tilde{H}_2(\Omega),$$

wobei $\tilde{H}_2(\Omega) := \{\beta \in H^2(\Omega) \mid \int_\Omega \beta \, dx = 0 \text{ und } \operatorname{Curl} \beta = 0 \text{ auf } \Gamma_N\}$ mit Orthogonalität bezüglich des Skalarproduktes $(\bullet, \mathbb{C}^{-1} \bullet)_\Omega$.

Beweis: Siehe [CD98], Lemma 3.2. Orthogonalität siehe dort, Anfang Kapitel 5. ■

Dieses Kapitel schließt ab mit einem technischen Lemma, das insbesondere für die Berechnung der Terme der Bilinearform für die Implementierung hilfreich ist, und dessen Beweis in [EM73] zu finden ist. Es seien dazu für ein Dreieck $T = \operatorname{conv}\{P_1, P_2, P_3\} \subseteq \mathbb{R}^2$ die *baryzentrischen Koordinaten* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 : T \rightarrow \mathbb{R}$, die durch $x = \lambda_1(x)P_1 + \lambda_2(x)P_2 + \lambda_3(x)P_3$, $1 = \lambda_1(x) + \lambda_2(x) + \lambda_3(x)$ für alle $x \in T$ definiert sind. Diese lassen sich dann [CL91, S. 66] eindeutig darstellen durch $\lambda_k \in P_1(T)$, $\lambda_k(P_\ell) = \delta_{k\ell}$ für $k, \ell = 1, 2, 3$.

Lemma 2.42 Für jedes Dreieck T und dessen baryzentrische Koordinaten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in P_1(T)$ gilt die Formel

$$\int_T \lambda_1^\alpha \lambda_2^\beta \lambda_3^\gamma \, dx = 2|T| \frac{\alpha! \beta! \gamma!}{(2 + \alpha + \beta + \gamma)!}.$$

3 Allgemeiner Rahmen der dPG-Methode

In diesem Kapitel wird die allgemeine Theorie der dPG-Methoden beschrieben. Dazu werden zunächst 4 allgemeine Annahmen genannt, mit denen dann Stabilität der Methode, quasi-optimale Konvergenz sowie Zuverlässigkeit und Effizienz des Residuumschätzers bewiesen werden. Im speziellen Rahmen eines bestimmten Problems, etwa für die ultraschwache Formulierung der Navier-Lamé-Gleichungen der linearen Elastizität genügt es dann, diese allgemeinen Annahmen zu verifizieren. Das folgende Vorgehen für Banachräume verallgemeinert die Techniken aus [CDG14b; CGHW14], die sich auf Hilberträume beschränken. Abschnitt 3.4 behandelt den Hilbertraum-Fall hier als Spezialfall der allgemeinen Banachraum-Theorie.

3.1 Annahmen

Es gelte durch das ganze Kapitel hinweg, dass X und Y Banachräume seien, ausgestattet mit den Normen $\|\bullet\|_X$ und $\|\bullet\|_Y$. Es seien $X_h \subseteq X$ und $Y_h \subseteq Y$ abgeschlossene, endlichdimensionale Unterräume dieser Banachräume. Des Weiteren sei $b: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle und beschränkte Bilinearform, $\|b\| := \sup_{x \in S(X)} \sup_{y \in S(Y)} b(x, y)$ deren Norm. Es bezeichne außerdem

$$N_h := \{y_h \in Y_h \mid b(\bullet, y_h) = 0 \text{ in } X_h^\star\} \subseteq Y_h$$

den Kern der Bilinearform. Dieser ist aufgrund der Stetigkeit von b ein abgeschlossener Unterraum von Y_h .

Im Folgenden werden nun die 4 Annahmen angeführt, die dann für das jeweilige Anwendungsproblem nachgeprüft werden müssen.

Annahme (A1) „Existenz einer Lösung“

Zu jedem $F \in Y^\star$ existiert eine Lösung $x \in X$ für $b(x, \bullet) = F$ in Y^\star .

Annahme (A2) „Inf-Sup-Bedingung“

Es gilt $0 < \beta := \inf_{x \in S(X)} \sup_{y \in S(Y)} b(x, y)$.

Annahme (A2_h) „Diskrete Inf-Sup-Bedingung“

Es gilt $0 < \beta_h := \inf_{x_h \in S(X_h)} \sup_{y_h \in S(Y_h)} b(x_h, y_h)$.

Annahme (A3) „Existenz eines Fortin-Operators“

Es existiert eine lineare und beschränkte Abbildung $\Pi: Y \rightarrow Y_h$ mit $b(x_h, (1 - \Pi)y) = 0$ für jedes $x_h \in X_h$ und $y \in Y$.

3.2 Idealisierte und praktische dPG-Methode

Betrachtet wird über dieses ganze Kapitel hinweg eine als Variationsformulierung gegebene Problemstellung.

Problem 1 (Variationsformulierung des exakten Problemes)

Zu gegebenem $F \in Y^*$, suche $x \in X$ mit

$$b(x, \bullet) = F \quad \text{in } Y^*.$$

Die Annahme (A1) besagt genau, dass dieses Problem eine Lösung besitzt. Diese Variationsformulierung ist aber wegen $\|F - b(x, \bullet)\|_{Y^*} = 0 \leq \|F - b(\xi, \bullet)\|_{Y^*}$ für jedes $\xi \in X$ äquivalent zur folgenden Minimierungsaufgabe.

Problem 2 (Exaktes Problem als Minimierung des Residuums)

Zu gegebenem $F \in Y^*$, suche $x \in X$ mit

$$x \in \arg \min_{\xi \in X} \|F - b(\xi, \bullet)\|_{Y^*}.$$

Im Hilbertraum-Fall und bei der letztendlichen Berechnung wird diese Zielfunktion auch quadriert betrachtet, weshalb die dPG-Methode auch als Least-Squares-Methode gesehen werden kann. Ist nun ein Unterraum $X_h \subseteq X$ gewählt, so lässt sich die Problemstellung diskretisieren. Dies führt zur sogenannten *idealisierten dPG-Methode*.

Problem 3 (Idealisierte dPG-Methode als Minimierung des Residuums)

Zu gegebenem $F \in Y^*$, suche $x_h \in X_h$ mit

$$x_h \in \arg \min_{\xi_h \in X_h} \|F - b(\xi_h, \bullet)\|_{Y^*}.$$

Ist Y ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $(\bullet, \bullet)_Y$, so lässt sich der *trial-to-test*-Operator $T : X \rightarrow Y$ definieren durch

$$(Tx, y)_Y = b(x, y) \quad \text{für alle } y \in Y.$$

Ist $R : Y \rightarrow Y^*$ der Riesz-Isomorphismus [Alt06, S. 162] und $B : X \rightarrow Y^*$, $Bx(y) := b(x, y)$, so gilt offensichtlich $T = R^{-1} \circ B$. Durch diesen Operator lässt sich eine zur obigen Minimierungsaufgabe äquivalente Formulierung finden.

Problem 4 (Idealisierte dPG-Methode als Variationsformulierung)

Zu gegebenem $F \in Y^*$, suche $x_h \in X_h$ mit

$$b(x_h, \bullet) = F \quad \text{in } (T(X_h))^*.$$

Lemma 3.1 *Es ist $x_h \in X_h$ Lösung von Problem 3 genau dann, wenn x_h Lösung von Problem 4 ist.*

Beweis nach [RBD14]: Zunächst stellt man fest, dass aufgrund der Nichtnegativität der Norm kann äquivalent auch das Minimierungsproblem

$$x_h \in \operatorname{argmin}_{\xi_h \in X_h} \|F - b(\xi_h, \bullet)\|_{Y^*}^2$$

betrachtet werden kann. Zudem ist der Riesz-Isomorphismus eine Isometrie, also gilt für jedes $\xi_h \in X_h$, dass

$$\|F - b(\xi_h, \bullet)\|_{Y^*} = \|F - B\xi_h\|_{Y^*} = \|R^{-1}(F - B\xi_h)\|_Y.$$

Minimiert $x_h \in X_h$ die Norm $\|F - B\xi_h\|_{Y^*}^2$, so verschwindet die Gateaux-Ableitung $d/dt|_{t=0}$ im Punkt x_h , siehe z.B. [Smi98, S. 35], das heißt für jedes $\xi_h \in X_h$ gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \|F - B(x_h + t\xi_h)\|_{Y^*}^2 \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \|R^{-1}F - R^{-1}Bx_h - tR^{-1}B\xi_h\|_Y^2 \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\|R^{-1}(F - Bx_h)\|_Y^2 - 2t(R^{-1}(F - Bx_h), R^{-1}B\xi_h)_Y + t^2\|R^{-1}B\xi_h\|_Y^2) \\ &= 2(R^{-1}(F - Bx_h), R^{-1}B\xi_h)_Y. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Andererseits folgt aus dieser Rechnung für $t = 1$ und jedes $\xi_h \in X_h$ auch

$$\begin{aligned} \|F - Bx_h\|_{Y^*}^2 - 2(R^{-1}(F - Bx_h), R^{-1}B\xi_h)_Y \\ \leq \|R^{-1}(F - Bx_h)\|_Y^2 - 2(R^{-1}(F - Bx_h), R^{-1}B\xi_h)_Y + \|R^{-1}B\xi_h\|_Y^2 \\ = \|F - B(x_h + \xi_h)\|_{Y^*}^2. \end{aligned}$$

Folglich ist die Bedingung (3.1) auch hinreichend für die Minimierung. Sie ist äquivalent zu

$$(R^{-1}Bx_h, R^{-1}B\xi_h)_Y = (R^{-1}F, R^{-1}B\xi_h)_Y \quad \text{für alle } \xi_h \in X_h,$$

also aufgrund der Definition des Riesz-Isomorphismus

$$(Bx_h)(R^{-1}B\xi_h) = F(R^{-1}B\xi_h) \quad \text{für alle } \xi_h \in X_h,$$

und wegen $T = R^{-1} \circ B$ dann

$$(Bx_h)(T\xi_h) = F(T\xi_h) \quad \text{für alle } \xi_h \in X_h.$$

Da alle Umformungen äquivalent waren, ist dies genau die Behauptung. ■

Die Zielfunktion der Minimierungsaufgabe aus der idealisierten dPG-Methode ist hierbei ein zuverlässiger und effizienter Fehlerschätzer.

Korollar 3.2 (Zuverlässigkeit, Effizienz) *Unter den Voraussetzungen (A1) und (A2) gilt für jedes $\xi_h \in X_h$, dass*

$$\beta \|x - \xi_h\|_X \leq \|F - b(\xi_h, \bullet)\|_{Y^*} \leq \|b\| \|x - \xi_h\|_X.$$

Beweis: Es gilt für $\xi_h \neq x$ die Abschätzung

$$\beta = \inf_{\tilde{x} \in X \setminus \{0\}} \frac{\|b(\tilde{x}, \bullet)\|_{Y^*}}{\|\tilde{x}\|_X} \leq \frac{\|b(x - \xi_h, \bullet)\|_{Y^*}}{\|x - \xi_h\|_X} \leq \frac{\|b\| \|x - \xi_h\|_X}{\|x - \xi_h\|_X}.$$

Wegen $\|F - b(\xi_h, \bullet)\|_{Y^*} = \|b(x - \xi_h, \bullet)\|_{Y^*}$ entspricht dies der Behauptung. ■

Da der Raum Y im Allgemeinen unendlichdimensional ist, ist der Wert $\|F - b(\xi, \bullet)\|_{Y^*}$ bzw. der Operator T nicht direkt berechenbar. Deshalb diskretisiert man auch den Raum Y und erhält so die praktische dPG-Methode.

Problem 5 (Praktische dPG-Methode als Least-Squares-Formulierung)

Zu gegebenem $F \in Y^*$, suche $x_h \in X_h$ mit

$$x_h \in \operatorname{argmin}_{\xi_h \in X_h} \|F - b(\xi_h, \bullet)\|_{Y_h^*}.$$

Analog zur idealisierten dPG-Methode definiert man Falle eines Hilbertraumes Y einen approximativen trial-to-test-Operator $T_h: X \rightarrow Y_h$ durch

$$(T_h x, y_h)_Y = b(x, y_h) \quad \text{für alle } y_h \in Y_h.$$

und erhält eine Variationsformulierung für die idealisierte dPG-Methode.

Problem 6 (Praktische dPG-Methode als Variationsformulierung)

Zu gegebenem $F \in Y^*$, suche $x_h \in X_h$ mit

$$b(x_h, \bullet) = F \quad \text{in } (T_h(X_h))^*.$$

Analog zu Lemma 3.1 folgt hier die Äquivalenz der Probleme 5 und 6.

3.3 Betrachtungen für allgemeine direkte Zerlegungen von Y_h

Dieser Abschnitt lässt sich prinzipiell losgelöst von den dPG-Methoden betrachten. Im folgenden Abschnitt werden dann die dPG-Methoden als Spezialfall dieser Betrachtungen identifiziert. Es wird eine allgemeine Zerlegung $Y_h = N_h \oplus M_h$ für einen Unterraum M_h von Y_h zugrunde gelegt. Für diese wird nun gezeigt, dass die Lösung einer Variationsaufgabe bezüglich M_h quasi-optimale Konvergenz aufweist und die veränderte Zielfunktion immernoch zuverlässig und bis auf Datenoszillationen effizient ist, wobei jeweils verschiedene der Annahmen aus Abschnitt 3.1 nötig sind.

Lemma 3.3 *Es gelte die Annahme $(A2_h)$ und es sei eine Zerlegung $Y_h = N_h \oplus M_h$ gegeben. Dann existiert genau ein $x_h \in X_h$ mit*

$$b(x_h, \bullet) = F \quad \text{in } M_h^*.$$

Beweis: Es sei die lineare Abbildung $P_h : Y_h \rightarrow M_h$ definiert durch $P_h(y_h) = m_h$ für die eindeutige Zerlegung $y_h = m_h + n_h$, $m_h \in M_h$, $n_h \in N_h$. Diese Abbildung ist stetig [Wer11, Satz IV.6.3] mit $\|P_h\| > 0$. Aus $M_h \subseteq Y_h$ folgt für alle $\xi_h \in X_h$, dass

$$\sup_{m_h \in M_h \setminus \{0\}} \frac{b(\xi_h, m_h)}{\|m_h\|_Y} \leq \sup_{y_h \in Y_h \setminus \{0\}} \frac{b(\xi_h, y_h)}{\|y_h\|_Y}.$$

Weiterhin gilt

$$\sup_{y_h \in Y_h \setminus \{0\}} \frac{b(\xi_h, y_h)}{\|y_h\|_Y} = \sup_{y_h \in Y_h \setminus \{0\}} \frac{b(\xi_h, y_h - P_h(y_h)) + b(\xi_h, P_h(y_h))}{\|y_h\|_Y}.$$

Es ist $y_h - P_h(y_h) \in N_h$ und daher $b(\xi_h, y_h - P_h(y_h)) = 0$. Daraus und aus der Abschätzung $1/\|y_h\|_Y \leq \|P_h\|/\|P_h(y_h)\|_Y$ und $P(Y_h) = M_h$ folgt

$$\begin{aligned} \sup_{y_h \in Y_h \setminus \{0\}} \frac{b(\xi_h, y_h)}{\|y_h\|_Y} &= \sup_{y_h \in Y_h \setminus \{0\}} \frac{b(\xi_h, P_h(y_h))}{\|y_h\|_Y} \\ &\leq \|P_h\| \sup_{y_h \in Y_h \setminus \{0\}} \frac{b(\xi_h, P_h(y_h))}{\|P_h(y_h)\|_Y} \\ &= \|P_h\| \sup_{y_h \in M_h \setminus \{0\}} \frac{b(\xi_h, m_h)}{\|m_h\|_Y}. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt dann für

$$\gamma_h := \inf_{x_h \in \mathcal{S}(X_h)} \sup_{y_h \in \mathcal{S}(M_h)} b(x_h, y_h),$$

dass

$$0 < \frac{\beta_h}{\|P_h\|} \leq \gamma_h \leq \beta_h. \quad (3.2)$$

Da $M_h \cap N_h = \{0\}$, existiert für alle $m_h \in M_h \setminus \{0\}$ ein $x_h \in X_h$ mit $b(x_h, m_h) \neq 0$. Somit folgt Existenz und Eindeutigkeit der Lösung aus der klassischen Babuška-Brezzi-Theorie [Bra13, S. 119, Satz 3.6]. Diese ist hier anwendbar, da X_h und M_h endlichdimensionale Banachräume, also Hilberträume sind. ■

Satz 3.4 (Quasi-optimale Konvergenz) *Unter den Voraussetzungen (A1) und (A2_h) und mit der Zerlegung $Y_h = N_h \oplus M_h$ gilt für die exakte Lösung x von $b(x, \bullet) = F$ in Y^\star und die diskrete Lösung x_h von $b(x_h, \bullet) = F$ in M_h^\star die Abschätzung*

$$\|x - x_h\|_X \leq (1 + \|P_h\| \|b\| / \beta_h) \text{dist}_X(x, X_h).$$

Beweis: Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig und $x_h^\star \in X_h$ so gewählt, dass $\|x - x_h^\star\|_X \leq \text{dist}_X(x, X_h) + \varepsilon$. Dann gilt mit $\gamma_h > 0$ aus dem Beweis zu Lemma 3.3, dass

$$\begin{aligned} \|x_h^\star - x_h\|_X \gamma_h &\leq \sup_{m_h \in M_h \setminus \{0\}} \frac{b(x_h^\star - x_h, m_h)}{\|m_h\|_Y} \\ &= \sup_{m_h \in M_h \setminus \{0\}} \frac{b(x_h^\star - x, m_h) + b(x, m_h) - b(x_h, m_h)}{\|m_h\|_Y} \\ &= \sup_{m_h \in M_h \setminus \{0\}} \frac{b(x_h^\star - x, m_h) + F(m_h) - F(m_h)}{\|m_h\|_Y} \\ &= \sup_{m_h \in M_h \setminus \{0\}} \frac{b(x_h^\star - x, m_h)}{\|m_h\|_Y} \\ &\leq \|b\| \|x_h^\star - x\|_X. \end{aligned}$$

Dann gilt aber insgesamt mit der Dreiecksungleichung und (3.2), dass

$$\begin{aligned} \|x - x_h\|_X &\leq \|x - x_h^\star\|_X + \|x_h^\star - x_h\|_X \\ &\leq (1 + \|b\| / \gamma_h) \|x - x_h^\star\|_X \\ &\leq (1 + \|b\| / \gamma_h) (\text{dist}_X(x, X_h) + \varepsilon) \\ &\leq (1 + \|P_h\| \|b\| / \beta_h) (\text{dist}_X(x, X_h) + \varepsilon). \end{aligned}$$

Da diese Ungleichung für alle $\varepsilon > 0$ gilt, folgt die Behauptung für $\varepsilon \rightarrow 0$. ■

Der folgende Satz ist [CDG14b] entnommen.

Satz 3.5 (Zuverlässigkeit und Effizienz) *Unter den Voraussetzungen (A1), (A2) und (A3) gilt für die exakte Lösung x und für jedes $\xi_h \in X_h$ die Abschätzung*

$$\beta \|x - \xi_h\|_X \leq \|\Pi\| \|F - b(\xi_h, \bullet)\|_{Y_h^\star} + \|F \circ (1 - \Pi)\|_{Y^\star} \leq \|b\| (\|\Pi\| + \|1 - \Pi\|) \|x - \xi_h\|_X.$$

Beweis: Laut Korollar 3.2 gilt sofort die Abschätzung $\beta \|x - \xi_h\|_X \leq \|F - b(\xi_h, \bullet)\|_{Y^\star}$. Es gilt weiterhin nach Definition der Dualnorm, dass

$$\begin{aligned} \|F - b(\xi_h, \bullet)\|_{Y^\star} &= \sup_{y \in S(Y)} F(y) - b(\xi_h, y) \\ &= \sup_{y \in S(Y)} F(y - \Pi y) + F(\Pi y) - b(\xi_h, y) \\ &= \sup_{y \in S(Y)} F(y - \Pi y) + F(\Pi y) - b(\xi_h, y - \Pi y + \Pi y) \\ &\leq \sup_{y \in S(Y)} F(y - \Pi y) + \sup_{y \in S(Y)} F(\Pi y) - b(\xi_h, \Pi y) + b(\xi_h, \Pi y - y). \end{aligned}$$

Wegen (A3) gilt $b(\xi_h, \Pi y - y) = 0$. Außerdem ist

$$F(\Pi y) - b(\xi_h, \Pi y) \leq \|F - b(\xi_h, \bullet)\|_{Y_h^*} \|\Pi y\|_Y \leq \|F - b(\xi_h, \bullet)\|_{Y_h^*} \|\Pi\| \|y\|_Y.$$

Insgesamt folgt der erste Teil der Abschätzung

$$\beta \|x - \xi_h\|_X \leq \|F \circ (1 - \Pi)\|_{Y^*} + \|F - b(\xi_h, \bullet)\|_{Y_h^*} \|\Pi\|.$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} \|\Pi\| \|F - b(\xi_h, \bullet)\|_{Y_h^*} &= \|\Pi\| \|b(x, \bullet) - b(\xi_h, \bullet)\|_{Y_h^*} \\ &= \|\Pi\| \|b(x - \xi_h, \bullet)\|_{Y_h^*} \\ &\leq \|\Pi\| \|b\| \|x - \xi_h\|_X. \end{aligned}$$

Außerdem

$$\begin{aligned} \|F \circ (1 - \Pi)\|_{Y^*} &= \sup_{y \in \mathcal{S}(Y)} F(y - \Pi y) \\ &= \sup_{y \in \mathcal{S}(Y)} b(x, y - \Pi y) \\ &= \sup_{y \in \mathcal{S}(Y)} b(x, y - \Pi y) - b(\xi_h, y - \Pi y) \\ &= \sup_{y \in \mathcal{S}(Y)} b(x - \xi_h, (1 - \Pi)y) \\ &\leq \|b\| \|x - \xi_h\|_X \|1 - \Pi\|. \end{aligned}$$

Summation der letzten beiden Ungleichung liefert die Behauptung. ■

Bemerkung 3.6 Zuverlässigkeit und Effizienz wurden hier nicht nur für die diskrete Lösung, sondern für alle Elemente des diskreten Raumes bewiesen. Dadurch ist die Abschätzung auch zum Beispiel beim inexakten Lösen stabil.

Lemma 3.7 Es gelte die Annahme (A2_h) und es gebe eine Zerlegung $Y_h = N_h \oplus M_h$. Dann gilt (A3).

Beweis: Aus Lemma 3.3 folgt die Bijektivität der Abbildung $B_2 : X_h \rightarrow M_h^*, x_h \mapsto b(x_h, \bullet)$. Aus der Theorie der inf-sup-Bedingungen [Car09b, Thm 4.2] folgt dann auch die Bijektivität von $B_1 : M_h \rightarrow X_h^*, m_h \mapsto b(\bullet, m_h)$. Es definiert $G : Y \rightarrow X_h^*, y \mapsto b(\bullet, y)$ eine lineare und stetige Abbildung. Dies ermöglicht nun die Definition von $\Pi : Y \rightarrow M_h \subseteq Y_h$ durch $\Pi y := B_1^{-1} G(y)$.

Es bleibt zu zeigen, dass die so definierte Abbildung die gewünschten Eigenschaften erfüllt. Linearität und Stetigkeit der Abbildung folgt sofort, da sie als Komposition zweier linearer und stetiger Abbildungen definiert ist. Außerdem gilt für jedes $y \in Y$ die Gleichheit

$$b(\bullet, y) = G(y) = B_1(\Pi y) = b(\bullet, \Pi y) \quad \text{in } X_h^*,$$

also $b(\bullet, (1 - \Pi)(y)) = 0$ in X_h^* . ■

Bemerkung 3.8 In [GQ14; DG11b; CDG14b] wird ein Fortin-Operator wie in (A3) immer explizit konstruiert. Der Ansatz des Beweises einer diskreten Inf-Sup-Bedingung anstelle dessen wurde für das Poisson-Modell-Problem erst in [CGHW14] eingeführt.

Bemerkung 3.9 Es gilt auch eine Umkehrung von Lemma 3.7: Unter den Voraussetzungen (A2) und (A3) gilt auch (A2_h). Um dies zu beweisen, sei $\Pi : Y \rightarrow Y_h$ der laut (A3) gegebene Operator. Wäre $\Pi \equiv 0$, so gälte $b(X_h, Y) = 0$ im Widerspruch zu (A2), daher $\|\Pi\| \neq 0$. Sei nun $x_h \in X_h \setminus \{0\}$, beliebig, aber fest und $y \in Y \setminus \{0\}$ mit $\Pi y \neq 0$. Dann gilt

$$\frac{b(x_h, y)}{\|\Pi\| \|y\|_Y} = \frac{b(x_h, \Pi y)}{\|\Pi\| \|y\|_Y} \leq \frac{b(x_h, \Pi y)}{\|\Pi y\|_Y} \leq \sup_{y_h \in Y_h \setminus \{0\}} \frac{b(x_h, y_h)}{\|y_h\|_Y}.$$

Für $\Pi y = 0$ gilt $b(x_h, y) = 0$, daher insgesamt

$$\frac{1}{\|\Pi\|} \sup_{y \in Y \setminus \{0\}} \frac{b(x_h, y)}{\|y\|_Y} \leq \sup_{y_h \in Y_h \setminus \{0\}} \frac{b(x_h, y_h)}{\|y_h\|_Y}.$$

Daraus folgt die Behauptung mit $\beta_h \geq \beta / \|\Pi\|$.

3.4 Hilbertraum-Fall und Zusammenhang zur praktischen dPG-Methode

In diesem gesamten Abschnitt sei Y ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $(\bullet, \bullet)_Y$. Nach dem Satz von der Orthogonalprojektion [Wer11, S. 226, V.3.4], gilt $Y_h = N_h \oplus M_h$, also die im vorigen Abschnitt geforderte Zerlegung, mit dem abgeschlossenen Unterraum

$$M_h := N_h^\perp := \{m_h \in Y_h \mid \forall n_h \in N_h, (m_h, n_h)_Y = 0\}.$$

Für jedes $n_h \in N_h$ und $x_h \in X_h$ gilt per Definition von T_h und N_h , dass

$$(T_h x_h, n_h)_Y = b(x_h, n_h) = 0.$$

Daher gilt $T_h(X_h) \subseteq M_h$. Es lässt sich weiterhin zeigen, dass $M_h \subseteq T_h(X_h)$. Denn für ein beliebiges $m_h \in M_h$ definiert $(m_h, \bullet)_Y$ eine Abbildung in M_h^* . Dann existiert wegen Lemma 3.3 genau ein $x_h \in X_h$, sodass $b(x_h, \tilde{m}_h) = (m_h, \tilde{m}_h)_Y$ für alle $\tilde{m}_h \in M_h$. Insbesondere gilt dann für alle $\tilde{y}_h = \tilde{n}_h + \tilde{m}_h \in Y_h$, $\tilde{n}_h \in N_h$, $\tilde{m}_h \in M_h$, dass

$$(m_h, \tilde{y}_h)_Y = (m_h, \tilde{m}_h)_Y = b(x_h, \tilde{m}_h) = b(x_h, \tilde{y}_h),$$

also $m_h = T_h(x_h)$, also $T_h(X_h) = M_h$.

Lemma 3.3 liefert nun Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung der praktischen dPG-Methode.

Korollar 3.10 *Unter der Annahme (A2_h) existiert genau eine Lösung von Problem 6. Diese ist genau die Lösung aus Lemma 3.3 für $M_h := T_h(X_h)$.*

Die folgenden Korollare wiederholen die Ergebnisse der vorigen Abschnitte mit vereinfachten Konstanten in diesem speziellen Fall.

Korollar 3.11 (Quasi-optimale Konvergenz im Hilbertraum-Fall) *Unter den Voraussetzungen (A1) und (A2_h) gilt für die exakte Lösung x von $b(x, \bullet) = F$ in Y^* und die diskrete Lösung x_h von $b(x_h, \bullet) = F$ in $T_h(X_h)^*$ die Abschätzung*

$$\|x - x_h\|_X \leq (1 + \|b\| / \beta_h) \text{dist}_X(x, X_h).$$

Beweis: Wegen des Satzes von der Orthogonalprojektion [Wer11, S. 226, V.3.4] gilt für die orthogonale Projektion $P_h : Y_h \rightarrow M_h$, dass $\|P_h\| = 1$. Der Rest der Aussage entspricht der von Satz 3.4. ■

Bemerkung 3.12 In Hilberträumen ist es laut [DG11a] möglich, als verbesserte Konstante in obiger Abschätzung $\|b\|/\beta_h$ statt $(1 + \|b\|/\beta_h)$ zu erhalten.

Korollar 3.13 (Zuverlässigkeit und Effizienz im Hilbertraum-Fall) *Unter den Voraussetzungen (A1), (A2) und (A2_h) gilt für die exakte Lösung x von $b(x, \bullet) = F$ und für jedes $\xi_h \in X_h$ die Abschätzung*

$$\beta \|x - \xi_h\|_X \leq \|b\|/\beta_h \|F - b(\xi_h, \bullet)\|_{Y_h^*} + \|F \circ (1 - \Pi)\|_{Y^*} \leq \|b\|(1 + 2\|b\|/\beta_h) \|x - \xi_h\|_X.$$

Beweis: Aus Lemma 3.7 folgt die Annahme (A3). Es sei $\Pi : Y \rightarrow M_h$ der in diesem Lemma konstruierte Fortin-Operator. Dann erfüllt wegen $\|B_1^{-1}\| = 1/\gamma_h = 1/\beta_h$ [Car09b, Thm 4.2] jedes $y \in Y$, dass

$$\begin{aligned} \|\Pi y\|_Y &= \|B_1^{-1}(Gy)\|_Y \\ &\leq \|B_1^{-1}\| \|Gy\|_Y \\ &\leq \|b\|/\beta_h \|y\|_Y. \end{aligned}$$

Daher gilt $\|\Pi\| \leq \|b\|/\beta_h$ und mit der Dreiecksungleichung auch $\|1 - \Pi\| \leq 1 + \|b\|/\beta_h$. Die behauptete Abschätzung folgt mit diesen Konstanten aus Satz 3.5. ■

Bemerkung 3.14 Für die a-priori- und a-posteriori-Abschätzungen dieses Kapitels genügt es also im Falle der dPG-Methoden auf einem Hilbertraum, die Annahmen (A1), (A2) und (A2_h) nachzuprüfen.

Das folgende Lemma ist ein Hilfsmittel zum Nachweis der kontinuierlichen Inf-sup-Bedingung (A2).

Lemma 3.15 (Splitting-Lemma) *Es seien Unterräume $X_1, X_2 \subseteq X$ und $Y_1 \subseteq Y$ gegeben, die der (nicht notwendigerweise direkten) Zerlegung*

$$X = X_1 + X_2 \tag{3.3}$$

genügen. Es gelte

$$b(x_2, y_1) = 0 \quad \text{für alle } x_2 \in X_2, y_1 \in Y_1, \tag{3.4}$$

sowie die beiden Inf-Sup-Bedingungen

$$0 < \beta_1 := \inf_{x_1 \in \mathcal{S}(X_1)} \sup_{y_1 \in \mathcal{S}(Y_1)} b(x_1, y_1) \tag{3.5}$$

und

$$0 < \beta_2 := \inf_{x_2 \in \mathcal{S}(X_2)} \sup_{y \in \mathcal{S}(Y)} b(x_2, y). \tag{3.6}$$

Dann gilt (A2) mit

$$\beta \geq \frac{\beta_1 \beta_2}{\beta_1 + \beta_2 + \|b\|}.$$

Beweis: Dieser Beweis ist der noch unveröffentlichten Arbeit [CDG14a] entnommen. Es sei $x \in X \setminus \{0\}$ mit beliebiger Zerlegung $x = x_1 + x_2$ vorgegeben. Dann gilt wegen (3.4) für jedes $y_1 \in Y_1$, dass $b(x, y_1) = b(x_1, y_1)$. Daher impliziert die Inf-Sup-Bedingung (3.5) und $Y_1 \subseteq Y$ dann

$$\beta_1 \|x_1\|_X \leq \|b(x_1, \bullet)\|_{Y_1^*} = \|b(x, \bullet)\|_{Y_1^*} \leq \|b(x, \bullet)\|_{Y^*}.$$

Andererseits folgt aus der anderen Inf-Sup-Bedingung (3.6) mit der Dreiecksungleichung, dass

$$\beta_2 \|x_2\|_X \leq \|b(x_2, \bullet)\|_{Y^*} \leq \|b(x, \bullet)\|_{Y^*} + \|b(x_1, \bullet)\|_{Y^*} \leq \|b(x, \bullet)\|_{Y^*} + \|b\| \|x_1\|_X,$$

und daher

$$\beta_2 \|x_2\|_X \leq (1 + \|b\| / \beta_1) \|b(x, \bullet)\|_{Y^*}.$$

Es gilt dann die Behauptung wegen

$$\|x\|_X \leq \|x_1\|_X + \|x_2\|_X \leq (1/\beta_1 + 1/\beta_2 + \|b\|/(\beta_1\beta_2)) \|b(x, \bullet)\|_{Y^*}. \quad \blacksquare$$

4 Analysis der ersten dPG-Methode

In diesem Kapitel wird die erste der drei Methoden zur Lösung der Navier-Lamé-Gleichungen, die *Energiemethode ohne Nebenbedingung* vorgestellt und analysiert. Der Klarheit wegen wird auf den Index in den Räumen X_1 und Y_1 sowie den zugehörigen Normen in diesem Kapitel verzichtet. Die Räume X und Y mit zugehörigen Normen sollen dann über dieses gesamte Kapitel, entsprechend Definition 2.25, wie folgt lauten,

$$\begin{aligned} X &= L^2(\Omega; \mathbb{S}) \times L^2(\Omega; \mathbb{R}^n) \times H_N^{-1/2}(\partial\mathcal{T}; \mathbb{R}^n) \times H_D^{1/2}(\partial\mathcal{T}; \mathbb{R}^n), \\ Y &= H(\operatorname{div}, \mathcal{T}; \mathbb{S}) \times H^1(\mathcal{T}; \mathbb{R}^n), \\ \|(\sigma, u, t, s)\|_X^2 &= \|\sigma\|_{\mathbb{C}^{-1}}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|t\|_{H_N^{-1/2}(\partial\mathcal{T}, \mathbb{C}^{-1})}^2 + \|s\|_{H_D^{1/2}(\partial\mathcal{T}, \mathbb{C})}^2, \\ \|(\tau, v)\|_Y^2 &= \|\tau\|_{H(\operatorname{div}, \mathbb{C}^{-1}), NC}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\tau\|_{NC}^2. \end{aligned}$$

Dieses Kapitel sowie die nächsten beiden entspricht den Darstellungen in [CH14] in ausführlicher Form.

4.1 Vorbereitungen und Problemformulierung

Der Übersichtlichkeit halber seien zunächst die Navier-Lamé-Gleichungen wiederholt.

Problem 7 (Navier-Lamé Gleichungen als System 1. Ordnung)

Zu gegebenem $f \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ sowie gegebenen Randdaten $u_D \in H^{1/2}(\partial\Omega; \mathbb{R}^n)$ und $g \in H^{-1/2}(\partial\Omega; \mathbb{R}^n)$ und gegebenen Lamé-Parametern $\mu, \lambda > 0$ finde $u \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ und $\sigma \in H(\operatorname{div}, \Omega; \mathbb{S})$ mit

$$-\operatorname{div} \sigma = f \quad \text{auf } \Omega, \quad (4.1)$$

$$\sigma = \mathbb{C}\varepsilon(u) \quad \text{auf } \Omega, \quad (4.2)$$

$$u = u_D \quad \text{auf } \Gamma_D, \quad (4.3)$$

$$\sigma \nu = g \quad \text{on } \Gamma_N, \quad (4.4)$$

wobei

$$\mathbb{C}A = 2\mu A + \lambda \operatorname{tr}(A) I_{n \times n} \quad \text{für jedes } A \in \mathbb{R}^{n \times n}. \quad (4.5)$$

Definition 4.1 Definiere die Bilinearform $b: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ für $x = (\sigma, u, t, s) \in X$ und $y = (\tau, v) \in Y$ durch

$$b(x, y) := (\sigma, \mathbb{C}^{-1}\tau)_\Omega + (u, \operatorname{div}_{NC} \tau)_\Omega + (\sigma, \varepsilon_{NC}(v))_\Omega - \langle t, \gamma_0^\mathcal{T} v \rangle_{\partial\mathcal{T}} - \langle \gamma_\nu^\mathcal{T} \tau, s \rangle_{\partial\mathcal{T}}. \quad (4.6)$$

Zu gegebenen Daten $f \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$, $\tilde{s} \in H^{1/2}(\partial\mathcal{T}; \mathbb{R}^n)$ und $\tilde{t} \in H^{-1/2}(\partial\mathcal{T}; \mathbb{R}^n)$ definiere die Linearform $F \in Y^*$ für $y = (\tau, v) \in Y$ durch

$$F(y) := (f, v)_\Omega + \langle \tilde{t}, \gamma_0^\mathcal{T} v \rangle_{\partial\mathcal{T}} + \langle \gamma_v^\mathcal{T} \tau, \tilde{s} \rangle_{\partial\mathcal{T}}$$

Problem 8 (Ultraschwache Formulierung)

Zu gegebenem $f \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$, $\tilde{s} \in H^{1/2}(\partial\mathcal{T}; \mathbb{R}^n)$ und $\tilde{t} \in H^{-1/2}(\partial\mathcal{T}; \mathbb{R}^n)$ finde $(\sigma, u, t, s) \in X$ mit

$$b(\sigma, u, t, s; \tau, v) = F(\tau, v) \quad \text{für alle } (\tau, v) \in Y. \quad (4.7)$$

Der folgende Satz beweist den Zusammenhang zwischen der ultraschwachen Formulierung und den Navier-Lamé-Gleichungen und zeigt, dass alle theoretischen Betrachtungen für Nullranddaten $u_D = 0$ und $g = 0$ mit allgemeinen rechten Seiten durchgeführt werden dürfen.

Satz 4.2 *Es löse $(u, \sigma) \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^n) \times H(\text{div}, \Omega; \mathbb{S})$ Problem 7. Es seien weiterhin $\tilde{u} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ und $\tilde{\sigma} \in H(\text{div}, \Omega; \mathbb{R}^{n \times n})$ festgelegt mit $\tilde{u} = u_D$ auf Γ_D und $\tilde{\sigma} \nu = g$ auf Γ_N . Es bezeichnen $\tilde{s} := \gamma_0^\mathcal{T} \tilde{u} \in H^{1/2}(\partial\mathcal{T}; \mathbb{R}^n)$ und $\tilde{t} := \gamma_v^\mathcal{T} \tilde{\sigma} \in H^{-1/2}(\partial\mathcal{T}; \mathbb{R}^n)$, sowie $s := \gamma_0^\mathcal{T} u - \tilde{s} \in H_D^{1/2}(\partial\mathcal{T}; \mathbb{R}^n)$, $t := \gamma_v^\mathcal{T} \sigma - \tilde{t} \in H_N^{-1/2}(\partial\mathcal{T}; \mathbb{R}^n)$.*

Dann ist $(\sigma, u, t, s) \in X$ Lösung von Problem 8 zu den Daten $f \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$, $\tilde{s} \in H^{1/2}(\partial\mathcal{T}; \mathbb{R}^n)$ und $\tilde{t} \in H^{-1/2}(\partial\mathcal{T}; \mathbb{R}^n)$.

Beweis: Wegen $u - \tilde{u} = 0$ auf Γ_D und $\sigma \nu - \tilde{\sigma} \nu = 0$ auf Γ_N gilt mit obigen Definitionen tatsächlich $s \in H_D^{1/2}(\partial\mathcal{T}; \mathbb{R}^n)$ und $t \in H_N^{-1/2}(\partial\mathcal{T}; \mathbb{R}^n)$, also $(\sigma, u, t, s) \in X$. Es sei nun $(\tau, v) \in Y$ und $T \in \mathcal{T}$ beliebig. Die Formel der partiellen Integration aus Satz 2.19, Gleichung (4.1) von Problem 7 und die Symmetrie von σ zeigen dann

$$\begin{aligned} \langle \gamma_v \sigma, \gamma_0 v \rangle_{\partial T} &= (\sigma, D_{NC} v)_T + (\text{div} \sigma, v)_T \\ &= (\sigma, \varepsilon_{NC}(v))_T - (f, v)_T. \end{aligned}$$

Summation über alle $T \in \mathcal{T}$ und die Gleichheit $\gamma_v^\mathcal{T} \sigma = t + \tilde{t}$ ergeben

$$\langle t + \tilde{t}, \gamma_0^\mathcal{T} v \rangle_{\partial\mathcal{T}} = (\sigma, \varepsilon_{NC}(v))_\Omega - (f, v)_\Omega,$$

also

$$(f, v)_\Omega + \langle \tilde{t}, \gamma_0^\mathcal{T} v \rangle_{\partial\mathcal{T}} = (\sigma, \varepsilon_{NC}(v))_\Omega - \langle t, \gamma_0^\mathcal{T} v \rangle_{\partial\mathcal{T}}. \quad (4.8)$$

Erneute Anwendung der partiellen Integration aus Satz 2.19 und diesmal Gleichung (4.2), zusammen mit Lemma 2.30(c) ergeben

$$\begin{aligned} \langle \gamma_v \tau, \gamma_0 u \rangle_{\partial T} &= (\tau, D u)_T + (\text{div}_{NC} \tau, u)_T \\ &= (\mathbb{C}^{-1} \tau, \mathbb{C} \varepsilon(u))_T + (\text{div}_{NC} \tau, u)_T \\ &= (\mathbb{C}^{-1} \tau, \sigma)_T + (\text{div}_{NC} \tau, u)_T. \end{aligned}$$

Mit Summation über $T \in \mathcal{T}$ und der Gleichheit $\gamma_0^\mathcal{T} u = s + \tilde{s}$ folgt

$$\langle \gamma_v^\mathcal{T} \tau, s + \tilde{s} \rangle_{\partial\mathcal{T}} = (\mathbb{C}^{-1} \tau, \sigma)_\Omega + (\operatorname{div}_{NC} \tau, u)_\Omega,$$

also

$$\langle \gamma_v^\mathcal{T} \tau, \tilde{s} \rangle_{\partial\mathcal{T}} = (\mathbb{C}^{-1} \tau, \sigma)_\Omega + (\operatorname{div}_{NC} \tau, u)_\Omega - \langle \gamma_v^\mathcal{T} \tau, s \rangle_{\partial\mathcal{T}}. \quad (4.9)$$

Die Addition der Gleichungen (4.8) und (4.9) führt dann zur Behauptung. \blacksquare

Zuächst wird die Beschränktheit der Bilinearform bewiesen.

Satz 4.3 (Beschränktheit) *Die Bilinearform b ist beschränkt, das heißt für jedes $(\sigma, u, t, s) \in X$ und $(\tau, v) \in Y$ gilt, dass*

$$b(\sigma, u, t, s; \tau, v) \leq M \|(\sigma, u, t, s)\|_X \|(\tau, v)\|_Y,$$

mit $M := (2 \max\{2, 1 + c_F^2 c_{\text{Korn}}^2 / (2\mu)\})^{1/2}$.

Beweis: Seien $(\sigma, u, t, s) \in X$ und $(\tau, v) \in Y$ gegeben. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, aber fest. Nach Definition der Normen auf den Spurräumen $H_D^{1/2}(\partial\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)$ und $H_N^{-1/2}(\partial\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)$ existieren dann $w \in H_D^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ und $q \in H(\operatorname{div}, \Omega; \mathbb{R}^{n \times n})$ mit $s = \gamma_0^\mathcal{T}(w)$ und $t = \gamma_v^\mathcal{T}(q)$ mit $\|w\|^2 \leq \|s\|_{H_D^{1/2}(\partial\mathcal{T}, \mathbb{C})}^2 + \varepsilon$ und $\|q\|_{H(\operatorname{div}, \mathbb{C}^{-1})}^2 \leq \|t\|_{H_N^{-1/2}(\partial\mathcal{T}, \mathbb{C}^{-1})}^2 + \varepsilon$. Die Formel der partiellen Integration aus Satz 2.19 liefert

$$\langle t, \gamma_0^\mathcal{T} v \rangle_{\partial\mathcal{T}} = \int_T \operatorname{div} q \cdot v \, dx + \int_T q : D_{NC} v \, dx$$

und

$$\langle \gamma_v^\mathcal{T} \tau, s \rangle_{\partial\mathcal{T}} = \int_T \operatorname{div}_{NC} \tau \cdot w \, dx + \int_T \tau : D w \, dx.$$

Dies führt auf die Darstellung

$$\begin{aligned} b(\sigma, u, t, s; \tau, v) &:= (\sigma, \mathbb{C}^{-1} \tau)_\Omega + (u, \operatorname{div}_{NC} \tau)_\Omega + (\sigma, \varepsilon_{NC}(v))_\Omega \\ &\quad - (\operatorname{div} q, v)_\Omega - (q, D_{NC} v)_\Omega - (\operatorname{div}_{NC} \tau, w)_\Omega - (\tau, D w). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Somit gilt wegen der Symmetrie von σ und τ , den Eigenschaften von \mathbb{C} aus Lemma 2.30 und mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\begin{aligned} b(\sigma, u, t, s; \tau, v) &:= (\mathbb{C}^{-1/2} \sigma, \mathbb{C}^{-1/2} \tau)_\Omega + (u, \operatorname{div}_{NC} \tau)_\Omega + (\mathbb{C}^{-1/2} \sigma, \mathbb{C}^{1/2} D_{NC} v)_\Omega \\ &\quad - (\operatorname{div} q, v)_\Omega - (\mathbb{C}^{-1/2} q, \mathbb{C}^{1/2} D_{NC} v)_\Omega \\ &\quad - (\operatorname{div}_{NC} \tau, w)_\Omega - (\mathbb{C}^{-1/2} \tau, \mathbb{C}^{1/2} \varepsilon(w)) \\ &\leq \|\sigma\|_{\mathbb{C}^{-1}} \|\tau\|_{\mathbb{C}^{-1}} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \|\operatorname{div}_{NC} \tau\|_{L^2(\Omega)} + \|\sigma\|_{\mathbb{C}^{-1}} \|v\| \\ &\quad + \|\operatorname{div} q\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|q\|_{\mathbb{C}^{-1}} \|v\| \\ &\quad + \|\operatorname{div}_{NC} \tau\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{L^2(\Omega)} + \|\tau\|_{\mathbb{C}^{-1}} \|w\|. \end{aligned}$$

Die Friedrichs-Ungleichung, die Korn-Ungleichung und Korollar 2.31 liefern

$$\|w\|_{L^2(\Omega)} \leq c_F \|D w\|_{L^2(\Omega)} \leq c_F c_{\text{Korn}} \|\varepsilon(w)\|_{L^2(\Omega)} \leq c_F c_{\text{Korn}} / (2\mu)^{1/2} \|w\|.$$

Insgesamt gilt mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung im \mathbb{R}^7 die Abschätzung

$$\begin{aligned} b(\sigma, u, t, s; \tau, v) &\leq (2\|\sigma\|_{\mathbb{C}^{-1}}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|q\|_{H(\text{div}, \mathbb{C}^{-1})}^2 + (1 + c_F^2 c_{\text{Korn}}^2 / (2\mu)) \|w\|^2)^{1/2} \\ &\quad \times (2\|\tau\|_{H(\text{div}, \mathbb{C}^{-1}), NC}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\|v\|^2)^{1/2}, \end{aligned}$$

also

$$b(\sigma, u, t, s; \tau, v) \leq (2 \max\{2, 1 + c_F^2 c_{\text{Korn}}^2 / (2\mu)\})^{1/2} (\|(\sigma, u, t, s)\|_X^2 + 2\varepsilon)^{1/2} \|(\tau, v)\|_Y.$$

Die Behauptung folgt nach dem Übergang $\varepsilon \rightarrow 0$. ■

Lemma 4.4 *Es gilt für obige Bilinearform, dass*

$$\{y \in Y \mid b(\bullet, y) = 0 \text{ in } X^\star\} = \{0\}.$$

Beweis: Es sei $y = (\tau, v) \in Y$, sodass $b(\sigma, u, t, s; \tau, v) = 0$ für jedes $(\sigma, u, t, s) \in X$. Zunächst sei $x = (0, u, 0, 0)$ für $u \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n) \subseteq L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$. Dann folgt $0 = (u, \text{div}_{NC} \tau)_\Omega$, also mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung, dass $\text{div}_{NC} \tau = 0$. Für $w \in H_D^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ und $s = \gamma_0^\mathcal{T} w \in H_D^{1/2}(\partial\mathcal{T}; \mathbb{R}^n)$ beliebig folgt

$$0 = \langle \gamma_v^\mathcal{T} \tau, s \rangle_{\partial\mathcal{T}} = (\text{div}_{NC} \tau, w)_\Omega + (\tau, D w)_\Omega = (\tau, D w)_\Omega = \int_{\partial\Omega} w \cdot \tau \nu \, ds,$$

also $\tau \in H(\text{div}, \mathcal{T}; \mathbb{S})$ und $\tau \nu = 0$ fast überall entlang Γ_N . Dann ist $x = (0, 0, \gamma_v^\mathcal{T} \tau, 0) \in X$ und mit einer partiellen Integration folgt, dass

$$0 = \langle \gamma_v^\mathcal{T} \tau, \gamma_0^\mathcal{T} v \rangle_{\partial\mathcal{T}} = (v, \text{div}_{NC} \tau)_\Omega + (D_{NC} v, \tau)_\Omega = (D_{NC} v, \tau)_\Omega. \quad (4.11)$$

Andererseits ist dann für $x = (\tau, 0, 0, 0) \in X$ auch

$$0 = (\tau, \mathbb{C}^{-1} \tau)_\Omega + (\tau, \varepsilon_{NC}(v))_\Omega = (\tau, \mathbb{C}^{-1} \tau)_\Omega = \|\tau\|_{\mathbb{C}^{-1}},$$

also $\tau = 0$. Für $x = (\sigma, 0, 0, 0) \in X$ mit $\sigma \in L^2(\Omega; \mathbb{S})$ beliebig folgt $0 = (\sigma, D_{NC} v)_\Omega$. Es sei $\tilde{v} \in H_D^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ die eindeutig bestimmte schwache Lösung zum Elastizitätsproblem

$$\begin{aligned} \text{div} \mathbb{C} \varepsilon(\tilde{v}) &= v && \text{in } \Omega, \\ \mathbb{C} \varepsilon(\tilde{v}) \nu &= 0 && \text{auf } \Gamma_N, \\ \tilde{v} &= 0 && \text{auf } \Gamma_D. \end{aligned}$$

Dann gilt insbesondere $q := \mathbb{C} \varepsilon(\tilde{v}) \in H(\text{div}, \Omega; \mathbb{S})$ mit $\text{div} q = v$ und $q \nu = 0$ auf Γ_N und daher $\gamma_v^\mathcal{T} q \in H_N^{-1/2}(\partial\mathcal{T}; \mathbb{R}^n)$. Mit $x = (0, 0, \gamma_v^\mathcal{T} q, 0) \in X$ für dieses q folgt mit einer partiellen Integration wie in (4.11) und der Symmetrie von q , dass

$$0 = (v, \text{div} q)_\Omega + (D_{NC} v, q)_\Omega = \|v\|_{L^2(\Omega)}^2$$

und somit $v = 0$. ■

Es folgt ein Lemma für eine vereinfachte kontinuierliche Inf-Sup-Bedingung, die dann zum Beweis der eigentlichen kontinuierlichen Inf-Sup-Bedingung (A2) genutzt wird. Es bezeichne $Z := H_N(\operatorname{div}, \Omega; \mathbb{S}) \times L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ mit Norm $\|(\tau, v)\|_Z^2 := \|\tau\|_{H(\operatorname{div}, \mathbb{C}^{-1})}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2$ für jedes $(\tau, v) \in Z$ den Raum wie in Abschnitt 2.6 definiert. Außerdem sei $Y_1 := H_N(\operatorname{div}, \Omega; \mathbb{S}) \times H_D^1(\Omega; \mathbb{R}^n) \subseteq Z$.

Lemma 4.5 *Es existiert $\beta_1 \geq c_1^{-1}$, sodass für jedes $(\sigma, u) \in L^2(\Omega; \mathbb{S}) \times L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ die Ungleichung*

$$\beta_1 (\|\sigma\|_{\mathbb{C}^{-1}}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2)^{1/2} \leq \sup_{(\tau, v) \in Y_1 \setminus \{0\}} \frac{(u, \operatorname{div} \tau)_\Omega + (\sigma, \mathbb{C}^{-1} \tau)_\Omega + (\sigma, \varepsilon(v))_\Omega}{\|(\tau, v)\|_Y}$$

erfüllt ist. Dabei ist, für die λ -unabhängige Konstante $\tilde{\beta}$ aus Lemma 2.29,

$$c_1^2 := 2(1 + 2c_{\operatorname{Korn}}^2) / \tilde{\beta}^2 + 2c_{\operatorname{Korn}}^2.$$

Beweis: Es sei $0 \neq (\sigma, u) \in L^2(\Omega; \mathbb{S}) \times L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ vorgegeben, dann lässt sich $F \in Z^*$ definieren durch

$$F(\rho, w) := (\mathbb{C}^{-1} \sigma, \rho)_\Omega + (u, w)_\Omega \quad \text{für jedes } (\rho, w) \in Z.$$

Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung impliziert

$$\|F\|_{Z^*} \leq \|\sigma\|_{\mathbb{C}^{-1}} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq 2^{1/2} \sqrt{\|\sigma\|_{\mathbb{C}^{-1}}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2}.$$

Laut Lemma 2.29 existiert dann $(\tau, -v) \in Z$ mit $\tilde{b}((\tau, -v), (\rho, w)) = F(\rho, w)$ für jedes $(\rho, w) \in Z$ für die dort definierte Bilinearform. Außerdem gilt wegen der dortigen Inf-Sup-Bedingung

$$\tilde{\beta} \|(\tau, v)\|_Z = \tilde{\beta} \|(\tau, -v)\|_Z \leq \|\tilde{b}((\tau, -v), \bullet)\|_{Z^*} = \|F\|_{Z^*} \leq 2^{1/2} \sqrt{\|\sigma\|_{\mathbb{C}^{-1}}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2}. \quad (4.12)$$

Weiterhin gilt wegen $\tilde{b}((\tau, -v), \bullet) = F$ für jedes $(\rho, w) \in Z$ aufgrund der Definition von \tilde{b} , dass

$$0 = (\mathbb{C}^{-1}(\tau - \sigma), \rho)_\Omega + (\operatorname{div} \rho, -v)_\Omega + (\operatorname{div} \tau - u, w)_\Omega.$$

Insbesondere folgt mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung dann $\operatorname{div} \tau = u$ und mit einer Argumentation wie in [Bra13, S. 298] auch $v \in H_D^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ mit $\varepsilon(v) = \mathbb{C}^{-1}(\sigma - \tau)$. Insbesondere gilt $(\tau, v) \in Y_1 \subseteq Y$. Damit folgt

$$(u, \operatorname{div} \tau)_\Omega + (\sigma, \mathbb{C}^{-1} \tau)_\Omega + (\sigma, \varepsilon(v))_\Omega = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\sigma\|_{\mathbb{C}^{-1}}^2. \quad (4.13)$$

Es gilt aufgrund der Kornungleichung, der Abschätzung $c_{\operatorname{Korn}} \geq 1$, der Dreiecksungleichung und der Definition von \mathbb{C} die Ungleichung

$$\begin{aligned} \|v\|^2 &= (D v, \mathbb{C} D v)_\Omega \\ &= 2\mu \|D v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda \|\operatorname{div} v\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq c_{\operatorname{Korn}}^2 (2\mu \|\varepsilon(v)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda \|\operatorname{div} v\|_{L^2(\Omega)}^2) \\ &= c_{\operatorname{Korn}}^2 \|\varepsilon(v)\|_{\mathbb{C}}^2 \\ &= c_{\operatorname{Korn}}^2 \|\mathbb{C}^{-1}(\sigma - \tau)\|_{\mathbb{C}}^2 \\ &\leq 2c_{\operatorname{Korn}}^2 \|\sigma\|_{\mathbb{C}^{-1}}^2 + 2c_{\operatorname{Korn}}^2 \|\tau\|_{\mathbb{C}^{-1}}^2 \end{aligned}$$

und daher unter Ausnutzung von (4.12),

$$\begin{aligned}
\|(\tau, v)\|_Y^2 &= \|\tau\|_{H(\operatorname{div}, \mathbb{C}^{-1})}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v\|^2 \\
&\leq \|\tau\|_{H(\operatorname{div}, \mathbb{C}^{-1})}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2c_{\text{Korn}}^2 \|\sigma\|_{\mathbb{C}^{-1}}^2 + 2c_{\text{Korn}}^2 \|\tau\|_{\mathbb{C}^{-1}}^2 \\
&\leq (1 + 2c_{\text{Korn}}^2) \|(\tau, v)\|_Z^2 + 2c_{\text{Korn}}^2 \|\sigma\|_{\mathbb{C}^{-1}}^2 \\
&\leq 2(1 + 2c_{\text{Korn}}^2) / \tilde{\beta}^2 (\|\sigma\|_{\mathbb{C}^{-1}}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2) + 2c_{\text{Korn}}^2 \|\sigma\|_{\mathbb{C}^{-1}}^2 \\
&\leq (2(1 + 2c_{\text{Korn}}^2) / \tilde{\beta}^2 + 2c_{\text{Korn}}^2) (\|\sigma\|_{\mathbb{C}^{-1}}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2) \\
&=: c_1^2 (\|\sigma\|_{\mathbb{C}^{-1}}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2).
\end{aligned}$$

Daraus folgt aber

$$\|(\tau, v)\|_Y (\|\sigma\|_{\mathbb{C}^{-1}}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2)^{1/2} \leq c_1 (\|\sigma\|_{\mathbb{C}^{-1}}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2),$$

was zusammen mit Gleichung (4.13) wegen $(\tau, v) \in Y_1$ ergibt, dass

$$\begin{aligned}
(\|\sigma\|_{\mathbb{C}^{-1}}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2)^{1/2} &\leq c_1 \frac{(u, \operatorname{div} \tau)_\Omega + (\sigma, \mathbb{C}^{-1} \tau)_\Omega + (\sigma, \varepsilon(v))_\Omega}{\|(\tau, v)\|_Y} \\
&\leq c_1 \sup_{(\tau, v) \in Y_1 \setminus \{0\}} \frac{(u, \operatorname{div} \tau)_\Omega + (\sigma, \mathbb{C}^{-1} \tau)_\Omega + (\sigma, \varepsilon(v))_\Omega}{\|(\tau, v)\|_Y}.
\end{aligned}$$

Nun ist es möglich, (A2) für die Energiemethode ohne Nebenbedingung zu beweisen.

Satz 4.6 (Kontinuierliche Inf-Sup-Bedingung) *Es gilt*

$$\frac{1/(c_1 2\sqrt{2})}{1/c_1 + 1/(2\sqrt{2}) + (2 \max\{2, 1 + c_F^2 c_{\text{Korn}}^2 / 2\mu\})^{1/2}} \leq \beta = \inf_{x \in \mathcal{S}(X)} \sup_{y \in \mathcal{S}(Y)} b(x, y),$$

mit

$$c_1^2 := 2(1 + 2c_{\text{Korn}}^2) / \tilde{\beta}^2 + 2c_{\text{Korn}}^2.$$

Beweis: Es sei

$$Y_1 := H_N(\operatorname{div}, \Omega; \mathbb{S}) \times H_D^1(\Omega; \mathbb{R}^n) \subseteq Y,$$

$$X_1 := L^2(\Omega; \mathbb{S}) \times L^2(\Omega; \mathbb{R}^n) \times \{0\} \times \{0\} \subseteq X,$$

$$X_2 := \{0\} \times \{0\} \times H_N^{-1/2}(\partial\mathcal{T}; \mathbb{R}^n) \times H_D^{1/2}(\partial\mathcal{T}; \mathbb{R}^n) \subseteq X,$$

dann ist offensichtlich $X = X_1 + X_2$ erfüllt. Außerdem gilt für jedes $(\tau, v) \in Y_1$ sowie für jedes $q \in H_N(\operatorname{div}, \Omega; \mathbb{R}^{n \times n})$ und $w \in H_D^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$, also $(0, 0, \gamma_v^\mathcal{T} q, \gamma_0^\mathcal{T} w) \in X_2$, mit zweifacher partieller Integration wegen der Randdaten der beteiligten Funktionen

$$\begin{aligned}
b(0, 0, \gamma_v^\mathcal{T} q, \gamma_0^\mathcal{T} w; \tau, v) &= -\langle t, \gamma_0^\mathcal{T} v \rangle_{\partial\mathcal{T}} - \langle \gamma_v^\mathcal{T} \tau, s \rangle_{\partial\mathcal{T}} \\
&= -(q, D v)_\Omega - (\operatorname{div} q, v)_\Omega - (\tau, D w)_\Omega - (\operatorname{div} \tau, w)_\Omega \\
&= -\int_{\partial\Omega} v \cdot q \nu \, ds - \int_{\partial\Omega} w \cdot \tau \nu \, ds \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Dies ist (3.4) aus Lemma 3.15. Die Bedingung (3.5) dieses Lemmas gilt nach Lemma 4.5. Wegen Lemma 2.38, $\Sigma(\mathcal{T}) \subseteq H(\text{div}, \mathcal{T}; \mathbb{S})$ und Lemma 2.39 gilt

$$1 \leq \beta'_2 := \inf_{t \in \mathcal{S}(H_N^{-1/2}(\partial\mathcal{T}; \mathbb{R}^n)) \setminus \{0\}} \sup_{v \in \mathcal{S}(H^1(\mathcal{T}; \mathbb{R}^n)) \setminus \{0\}} \langle t, \gamma_0^\mathcal{T} v \rangle_{\partial\mathcal{T}},$$

$$1 \leq \beta''_2 := \inf_{s \in \mathcal{S}(H_D^{1/2}(\partial\mathcal{T}; \mathbb{R}^n)) \setminus \{0\}} \sup_{\tau \in \mathcal{S}(H(\text{div}, \mathcal{T}; \mathbb{S})) \setminus \{0\}} \langle \gamma_v^\mathcal{T} \tau, s \rangle_{\partial\mathcal{T}}.$$

Andererseits gilt für jedes $x_2 = (0, 0, t, s) \in X_2$ und für alle $(\tau, v) \in Y$ mit $\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v\|_{NC}^2 = 1$ und $\|\tau\|_{H(\text{div}, \mathbb{C}^{-1}), NC}^2 = 1$, dass

$$\begin{aligned} \|x_2\|_X &= (\|t\|_{H_N^{-1/2}(\partial\mathcal{T}, \mathbb{C}^{-1})}^2 + \|s\|_{H_D^{1/2}(\partial\mathcal{T}, \mathbb{C})}^2)^{1/2} \\ &\leq \|t\|_{H_N^{-1/2}(\partial\mathcal{T}, \mathbb{C}^{-1})} + \|s\|_{H_D^{1/2}(\partial\mathcal{T}, \mathbb{C})} \\ &\leq 1/\beta'_2 \langle t, \gamma_0^\mathcal{T} v \rangle_{\partial\mathcal{T}} + 1/\beta''_2 \langle \gamma_v^\mathcal{T} \tau, s \rangle_{\partial\mathcal{T}} \\ &\leq (1/\beta'_2 + 1/\beta''_2) (-b(0, 0, t, s; \tau, v)) \\ &\leq (1/\beta'_2 + 1/\beta''_2) \sup_{(\tau, v) \in \mathcal{S}(Y)} b(0, 0, t, s; \tau, v) \|(\tau, v)\|_Y \\ &= \sqrt{2}(1/\beta'_2 + 1/\beta''_2) \sup_{(\tau, v) \in \mathcal{S}(Y)} b(0, 0, t, s; \tau, v) \\ &= 2\sqrt{2} \sup_{(\tau, v) \in \mathcal{S}(Y)} b(0, 0, t, s; \tau, v), \end{aligned} \tag{4.14}$$

also (3.6) aus Lemma 3.15 mit $\beta_2 \geq (2\sqrt{2})^{-1}$. Es sind also alle Voraussetzungen von Lemma 3.15 erfüllt, und daher gilt die kontinuierliche Inf-Sup-Bedingung (A2) mit einer Konstanten

$$\beta \geq \frac{1/(c_1 2\sqrt{2})}{1/c_1 + 1/(2\sqrt{2}) + (2 \max\{2, 1 + c_F^2 c_{\text{Korn}}^2 / (2\mu)\})^{1/2}}. \quad \blacksquare$$

Korollar 4.7 Aus Lemma 4.4 und Satz 4.6 folgt nun mit [Bra13, S. 119, Satz 3.6], dass Problem 8 eine eindeutige Lösung besitzt, also insbesondere (A1) für diese Methode.

4.2 Diskretisierung

Es werden nun Diskretisierungen der Räume X und Y gewählt.

Definition 4.8 Die Räume $X_h \subseteq X$ und $Y_h \subseteq Y$ werden definiert durch

$$X_h := P_0(\mathcal{T}; \mathbb{S}) \times P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^n) \times P_0(\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}(N); \mathbb{R}^n) \times S_D^1(\mathcal{E}; \mathbb{R}^n),$$

$$Y_h := \text{sym} RT_0^{NC}(\mathcal{T}; \mathbb{R}^{n \times n}) \times P_1(\mathcal{T}; \mathbb{R}^n).$$

Im Beweis der diskreten Inf-sup-Bedingung erweist sich die Behandlung der Spurterme $t_0 \in P_0(\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}(N); \mathbb{R}^n)$ und $s_1 \in S_D^1(\mathcal{E}; \mathbb{R}^n)$ als problematisch. Um dieses Problem zu lösen, wird mittels partieller Integration eine alternative Darstellung der Bilinearform mit ausschließlich Volumentermen hergeleitet. Zunächst folgt jedoch ein Lemma, das den Übergang von den Spur- zu Volumentermen rechtfertigen soll.

Lemma 4.9 (a) Jedes $w_C \in S_D^1(\mathcal{T}; \mathbb{R}^n)$ erfüllt die Normäquivalenz

$$\|\gamma_0^\mathcal{T} w_C\|_{H_D^{1/2}(\partial\mathcal{T}, \mathbb{C})} = \|w_C\|.$$

(b) Jedes $q_{RT} \in RT_0(\mathcal{T}, \Gamma_N; \mathbb{R}^{n \times n})$ erfüllt mit $c := \max\{(\frac{h_T}{\pi} + \frac{2h_{\max}}{3n})(1/(2\mu))^{1/2} + 1, 1/(2\mu)^{1/2}\}$ die Normäquivalenz

$$\|\gamma_v^\mathcal{T} q_{RT}\|_{H_N^{-1/2}(\partial\mathcal{T}, \mathbb{C}^{-1})} \leq \|q_{RT}\|_{H(\text{div}, \mathbb{C}^{-1})} \leq 2c \|\gamma_v^\mathcal{T} q_{RT}\|_{H_N^{-1/2}(\partial\mathcal{T}, \mathbb{C}^{-1})}.$$

Beweis: (a) Die Ungleichung $\|\gamma_0^\mathcal{T} w_C\|_{H_D^{1/2}(\partial\mathcal{T}, \mathbb{C})} \leq \|w_C\|$ folgt sofort. Für den Beweis der umgekehrten Abschätzung sei $v \in H_D^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ mit $\gamma_0^\mathcal{T} v = \gamma_0^\mathcal{T} w_C$ beliebig. Da $D w_C$ stückweise konstant ist, impliziert dies für jedes $T \in \mathcal{T}$, dass

$$|T|^{-1} \int_T D w_C \, dx = |T|^{-1} \int_{\partial T} w_C \otimes v_T \, ds = |T|^{-1} \int_{\partial T} v \otimes v_T \, ds = |T|^{-1} \int_T v \, dx,$$

also $D w_C = \Pi_0 D v$ und daher $\varepsilon(w_C) = \Pi_0 \varepsilon(v)$. Die Orthogonalität

$$(\varepsilon(v) - \Pi_0 \varepsilon(v), \Pi_0 \varepsilon(v))_{\mathbb{C}} = 0$$

führt zum Satz des Pythagoras

$$\|\varepsilon(v)\|_{\mathbb{C}}^2 = \|\varepsilon(v) - \Pi_0 \varepsilon(v)\|_{\mathbb{C}}^2 + \|\Pi_0 \varepsilon(v)\|_{\mathbb{C}}^2.$$

Daraus folgt

$$\|w_C\| = \|\Pi_0 \varepsilon(v)\|_{\mathbb{C}} \leq \|\varepsilon(v)\|_{\mathbb{C}} = \|v\|.$$

Deshalb $\|w_C\| \leq \inf_{v \in H_D^1(\Omega; \mathbb{R}^n), \gamma_0^\mathcal{T} v = \gamma_0^\mathcal{T} w_C} \|v\| = \|\gamma_0^\mathcal{T} w_C\|_{H_D^{1/2}(\partial\mathcal{T}, \mathbb{C})}$.

(b) Die Abschätzung $\|\gamma_v^\mathcal{T} q_{RT}\|_{H_N^{-1/2}(\partial\mathcal{T}, \mathbb{C}^{-1})} \leq \|q_{RT}\|_{H(\text{div}, \mathbb{C}^{-1})}$ folgt sofort.

Für den Beweis der zweiten Abschätzung sei $q \in H(\text{div}, \Omega; \mathbb{R}^{n \times n})$ mit $\gamma_v^\mathcal{T} q = \gamma_v^\mathcal{T} q_{RT}$. Für jedes $T \in \mathcal{T}$,

$$\begin{aligned} \text{div } q_{RT}|_T &= |T|^{-1} \int_T \text{div } q_{RT} \, dx = |T|^{-1} \int_{\partial T} q_{RT} v_T \, ds \\ &= |T|^{-1} \int_{\partial T} q v_T \, ds = |T|^{-1} \int_T \text{div } q \, dx = \Pi_0 \text{div } q|_T. \end{aligned}$$

Der Satz des Pythagoras

$$\|\text{div } q\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|\Pi_0 \text{div } q - \text{div } q\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\Pi_0 \text{div } q\|_{L^2(\Omega)}^2$$

impliziert mit $\text{div } q_{RT} = \Pi_0 \text{div } q$, dass

$$\|\text{div } q_{RT}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\text{div } q\|_{L^2(\Omega)}. \quad (4.15)$$

Da $q_{RT} \in RT_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^{n \times n})$ existiert $A_0 \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^{n \times n})$ und $b_0 \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^n)$, so dass

$$q_{RT}(x) = A_0 + b_0 \otimes (x - \text{mid}(\mathcal{T})).$$

Es gilt

$$(1 - \Pi_0) q_{RT} = b_0 \otimes (x - \text{mid}(\mathcal{T})) \quad \text{und} \quad \text{div } q_{RT} = n b_0. \quad (4.16)$$

Die Orthogonalität von $(\bullet - \text{mid}(\mathcal{T}))$ auf stückweise konstanten Funktionen sowie die Identität $q_{RT} = \Pi_0 q_{RT} + (1 - \Pi_0) q_{RT}$ zeigen

$$\begin{aligned} \|q_{RT}\|_{\mathbb{C}^{-1},T}^2 &= \int_T q_{RT} : \mathbb{C}^{-1} \Pi_0 q_{RT} + q_{RT} : \mathbb{C}^{-1} (1 - \Pi_0) q_{RT} \, dx \\ &= \int_T q_{RT} : \mathbb{C}^{-1} \Pi_0 q_{RT} + q_{RT} : \mathbb{C}^{-1} (b_0 \otimes (x - \text{mid}(\mathcal{T}))) \, dx. \end{aligned}$$

Da $\mathbb{C}^{-1} \Pi_0 q_{RT} \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^{n \times n})$, existiert $\alpha_1 \in P_1(\mathcal{T}; \mathbb{R}^n)$ so dass $D_{NC} \alpha_1 = \mathbb{C}^{-1} \Pi_0 q_{RT}$. Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned} \int_T q_{RT} : \mathbb{C}^{-1} \Pi_0 q_{RT} \, dx &= \int_T q_{RT} : D_{NC} \alpha_1 \, dx \\ &= - \int_T \text{div } q_{RT} \cdot \alpha_1 \, dx + \int_{\partial T} \alpha_1 \cdot q_{RT} \nu_T \, ds. \end{aligned}$$

Es gilt $q_{RT} \nu_T = q \nu_T$ auf $\partial \mathcal{T}$ und daher

$$\begin{aligned} \int_T q_{RT} : \mathbb{C}^{-1} \Pi_0 q_{RT} \, dx &= - \int_T \underbrace{\text{div } q_{RT} \cdot \alpha_1}_{\Pi_0 \text{div } q} \, dx + \int_T q : D_{NC} \alpha_1 \, dx + \int_T \text{div } q \cdot \alpha_1 \, dx \\ &= \int_T (1 - \Pi_0) \text{div } q \cdot \alpha_1 \, dx + \int_T q : \mathbb{C}^{-1} \Pi_0 q_{RT} \, dx \\ &= \int_T \text{div } q \cdot (1 - \Pi_0) \alpha_1 \, dx + \int_T q : \mathbb{C}^{-1} \Pi_0 q_{RT} \, dx \end{aligned}$$

Die Cauchy-Schwarz- und die Poincaré-Ungleichung, Satz 2.32, ergeben

$$\int_T q_{RT} : \mathbb{C}^{-1} \Pi_0 q_{RT} \, dx \leq \frac{h_T}{\pi} \|\text{div } q\|_{L^2(T)} \|D_{NC} \alpha_1\|_{L^2(T)} + \|q\|_{\mathbb{C}^{-1},T} \|\mathbb{C}^{-1} \Pi_0 q_{RT}\|_{L^2(T)}.$$

Es gilt $\|D_{NC} \alpha_1\|_{L^2(T)} = \|\mathbb{C}^{-1} \Pi_0 q_{RT}\|_{L^2(T)}$, und der Satz des Pythagoras und Korollar 2.31 liefern

$$\|\mathbb{C}^{-1} \Pi_0 q_{RT}\|_{L^2(T)} \leq (1/(2\mu))^{1/2} \|\Pi_0 q_{RT}\|_{\mathbb{C}^{-1},T} \leq (1/(2\mu))^{1/2} \|q_{RT}\|_{\mathbb{C}^{-1},T},$$

also insgesamt

$$\int_T q_{RT} : \mathbb{C}^{-1} \Pi_0 q_{RT} \, dx \leq \left(\frac{h_T}{\pi} \|\text{div } q\|_{L^2(T)} + \|q\|_{\mathbb{C}^{-1},T} \right) (1/(2\mu))^{1/2} \|q_{RT}\|_{\mathbb{C}^{-1},T}.$$

Gleichungen (4.16) und (4.15), Korollar 2.31 und die Abschätzung $|x - \text{mid}(T)| \leq 2/3 h_T$ zeigen

$$\begin{aligned} \|b_0 \otimes (\bullet - \text{mid}(\mathcal{T}))\|_{\mathbb{C}^{-1},T}^2 &\leq 1/(2\mu) \int_T \underbrace{|b_0|^2}_{\frac{1}{n^2} (\text{div } q_{RT})^2} |x - \text{mid}(\mathcal{T})|^2 \, dx \\ &\leq \frac{4h_T^2}{18\mu n^2} \|\text{div } q_{RT}\|_{L^2(T)}^2 \leq \frac{4h_T^2}{18\mu n^2} \|\text{div } q\|_{L^2(T)}^2. \end{aligned}$$

Zusammengefasst zeigt $\int_T q_{RT} : \mathbb{C}^{-1}(b_0 \otimes (x - \text{mid}(\mathcal{T}))) \, dx \leq \|q_{RT}\|_{\mathbb{C}^{-1},T} \|b_0 \otimes (\bullet - \text{mid}(\mathcal{T}))\|_{\mathbb{C}^{-1},T}$, dass

$$\|q_{RT}\|_{\mathbb{C}^{-1},T} \leq \left(\frac{h_T}{\pi} + \frac{2h_T}{3n}\right) (1/(2\mu))^{1/2} \|\text{div } q\|_{L^2(T)} + (1/(2\mu))^{1/2} \|q\|_{\mathbb{C}^{-1},T}.$$

Summation über $T \in \mathcal{T}$, die Abschätzung $h_T \leq h_{\max}$ und (4.15) schließen den Beweis ab. \blacksquare

Bemerkung 4.10 Laut vorangegangenen Lemma lässt sich

$$(S_D^1(\mathcal{E}; \mathbb{R}^n), \|\bullet\|_{H_D^{1/2}(\partial\mathcal{T})}) \text{ mit } (S_D^1(\mathcal{T}; \mathbb{R}^n), \|\bullet\|) \text{ und} \\ (P_0(\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}(N); \mathbb{R}^n), \|\bullet\|_{H_N^{-1/2}(\partial\mathcal{T})}) \text{ mit } (RT_0(\mathcal{T}, \Gamma_N; \mathbb{R}^{n \times n}), \|\bullet\|_{H(\text{div})})$$

identifizieren. Wie im Beweis zu Satz 4.3 ergibt sich dann durch partielle Integration eine alternative Darstellung der Bilinearform auf dem Raum $P_0(\mathcal{T}; \mathbb{S}) \times P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^n) \times RT_0(\mathcal{T}, \Gamma_N; \mathbb{R}^{n \times n}) \times S_D^1(\mathcal{T}; \mathbb{R}^n)$, der wieder mit X_h bezeichnet wird, durch

$$\begin{aligned} b(\sigma_0, u_0, q_{RT}, w_C; \tau_1, v_1) = & \int_{\Omega} \sigma_0 : \mathbb{C}^{-1} \tau_1 \, dx + \int_{\Omega} u_0 \cdot \text{div}_{NC} \tau_1 \, dx \\ & + \int_{\Omega} \sigma_0 : \varepsilon_{NC}(v_1) \, dx - \int_{\Omega} w_C \cdot \text{div}_{NC} \tau_1 \, dx \\ & - \int_{\Omega} D w_C : \tau_1 \, dx - \int_{\Omega} q_{RT} : D_{NC} v_1 \, dx - \int_{\Omega} \text{div } q_{RT} \cdot v_1 \, dx \end{aligned}$$

für

$$\begin{aligned} (\sigma_0, u_0, q_{RT}, w_C) & \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{S}) \times P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^n) \times RT_0(\mathcal{T}, \Gamma_N; \mathbb{R}^{n \times n}) \times S_D^1(\mathcal{T}; \mathbb{R}^n), \\ (\tau_1, v_1) & \in \text{sym } RT_0^{NC}(\mathcal{T}; \mathbb{R}^{n \times n}) \times P_1(\mathcal{T}; \mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

4.3 Beweis der diskreten Inf-Sup-Bedingung

In diesem Abschnitt wird die diskrete Inf-Sup-Bedingung für $n = 2$ bewiesen. Damit sind dann insgesamt die Annahmen (A1), (A2) und (A2_h) gezeigt und somit alle nötigen Voraussetzungen aus Kapitel 3 erfüllt.

Satz 4.11 (Diskrete Inf-Sup-Bedingung) *Es gilt*

$$(2h_{\max}^2/9\mu + 1)^{-1/2}/(2c) \leq \beta_h = \inf_{x_h \in \mathcal{S}(X_h)} \sup_{y_h \in \mathcal{S}(Y_h)} b(x_h, y_h),$$

mit λ -unabhängiger Konstante

$$\begin{aligned} c = & \max\{2/(2\mu)^{1/2} c_F c_{\text{Korn}} + 7, \\ & (1/(2\mu))^{1/2} (h_{\max}/3 + (2\mu)^{1/2} + (1/(2\mu))^{1/2} c_F c_{\text{Korn}} + 3)(c_F c_{\text{Korn}} + 2h_{\max}/3)\}. \end{aligned}$$

Beweis: Der Beweis wird in mehreren Schritten geführt. Es wird im gesamten Beweis nur die alternative Darstellung der Bilinearform aus Bemerkung 4.10 benutzt.

Schritt 1. Zu gegebenem beliebigen $x_h = (\sigma_0, u_0, q_{RT}, w_C) \in X_h$ definiere $y_h = (\tau_1, v_1) \in Y_h$ vermöge

$$\begin{aligned}\tau_1 &:= \sigma_0 - \mathbb{C}\varepsilon(w_C) + \text{sym}((u_0 - \Pi_0 w_C) \otimes (\bullet - \text{mid}(\mathcal{T}))/2), \\ v_1 &:= -\text{div } q_{RT} + (\mathbb{C}^{-1}(\sigma_0 - \Pi_0 q_{RT}))(\bullet - \text{mid}(\mathcal{T})).\end{aligned}$$

Schritt 2. *Behauptung:* Es gilt

$$\text{div}_{NC}(\text{sym}((u_0 - \Pi_0 w_C) \otimes (\bullet - \text{mid}(\mathcal{T}))/2)) = \frac{3}{4}(u_0 - \Pi_0 w_C).$$

Beweis der Behauptung: Sei $T \in \mathcal{T}$ fest, also $(u_0 - \Pi_0 w_C)|_T =: a \in \mathbb{R}^2$. Es gilt $\sum_{k=1}^2 \partial_k(a_j x_k + a_k x_j) = 2a_j + \sum_{k=1}^2 a_k \delta_{jk} = 3a_j$ und damit wegen der Linearität von div_{NC} und \otimes ,

$$\begin{aligned}\text{div}_{NC}(\text{sym}(a \otimes \frac{1}{2}(x - \text{mid}(T)))) &= \text{div}_{NC}(\text{sym}(a \otimes \frac{1}{2}x)) \\ &= \frac{1}{2} \text{div}_{NC}(\text{sym}(a \otimes x)) = \frac{3}{4}a,\end{aligned}$$

also die Behauptung. □

Schritt 3. *Behauptung:* Es gilt

$$\begin{aligned}b(x_h, y_h) &= \|\sigma_0 - \mathbb{C}\varepsilon(w_C)\|_{\mathbb{C}^{-1}}^2 + \frac{3}{4}\|u_0 - \Pi_0 w_C\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \|\sigma_0 - \Pi_0 q_{RT}\|_{\mathbb{C}^{-1}}^2 + \|\text{div } q_{RT}\|_{L^2(\Omega)}^2.\end{aligned}$$

Beweis der Behauptung: Aus Schritt 2 und der Definition von τ_1 und v_1 berechnet man, dass

$$\text{div}_{NC} \tau_1 = \frac{3}{4}(u_0 - \Pi_0 w_C) \text{ und} \tag{4.17}$$

$$\text{D}_{NC} v_1 = \mathbb{C}^{-1}(\sigma_0 - \Pi_0 q_{RT}). \tag{4.18}$$

Dies ergibt

$$\begin{aligned}b(x_h, y_h) &= \int_{\Omega} \sigma_0 : (\mathbb{C}^{-1}\sigma_0 - \varepsilon(w_C) + \mathbb{C}^{-1}(\text{sym}((u_0 - \Pi_0 w_C) \otimes (\bullet - \text{mid}(\mathcal{T}))/2))) \, dx \\ &\quad + \frac{3}{4} \int_{\Omega} u_0 \cdot (u_0 - \Pi_0 w_C) \, dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \sigma_0 : \mathbb{C}^{-1}(\sigma_0 - \Pi_0 q_{RT}) \, dx \\ &\quad - \int_{\Omega} w_C \cdot (\frac{3}{4}(u_0 - \Pi_0 w_C)) \, dx \\ &\quad - \int_{\Omega} \text{D } w_C : (\sigma_0 - \mathbb{C}\varepsilon(w_C) + \text{sym}((u_0 - \Pi_0 w_C) \otimes (\bullet - \text{mid}(\mathcal{T}))/2)) \, dx \\ &\quad - \int_{\Omega} q_{RT} : \mathbb{C}^{-1}(\sigma_0 - \Pi_0 q_{RT}) \, dx \\ &\quad - \int_{\Omega} \text{div } q_{RT} \cdot (-\text{div } q_{RT} + (\mathbb{C}^{-1}(\sigma_0 - \Pi_0 q_{RT}))(\bullet - \text{mid}(\mathcal{T}))) \, dx.\end{aligned}$$

Aufgrund der Orthogonalität von $(\bullet - \text{mid}(\mathcal{T}))$ bzw. $(w_C - \Pi_0 w_C)$ bzw. $(q_{RT} - \Pi_0 q_{RT})$ auf stückweise konstanten Funktionen sowie der Symmetrie von σ_0 und $\mathbb{C}\varepsilon(w_C)$ und Lemma 2.30(c) folgt

$$\begin{aligned}
b(x_h, y_h) &= \int_{\Omega} \sigma_0 : (\mathbb{C}^{-1} \sigma_0 - \varepsilon(w_C)) \, dx + 3/4 \int_{\Omega} u_0 \cdot (u_0 - \Pi_0 w_C) \, dx \\
&+ \int_{\Omega} \sigma_0 : \mathbb{C}^{-1} (\sigma_0 - \Pi_0 q_{RT}) \, dx - 3/4 \int_{\Omega} w_C \cdot (u_0 - \Pi_0 w_C) \, dx \\
&- \int_{\Omega} \mathbb{D} w_C : (\sigma_0 - \mathbb{C}\varepsilon(w_C)) \, dx - \int_{\Omega} q_{RT} : \mathbb{C}^{-1} (\sigma_0 - \Pi_0 q_{RT}) \, dx \\
&+ \int_{\Omega} \text{div } q_{RT} \cdot \text{div } q_{RT} \, dx \\
&= \int_{\Omega} (\sigma_0 - \varepsilon(w_C)) : (\mathbb{C}^{-1} \sigma_0 - \varepsilon(w_C)) \, dx + 3/4 \int_{\Omega} (u_0 - \Pi_0 w_C) \cdot (u_0 - \Pi_0 w_C) \, dx \\
&+ \int_{\Omega} (\sigma_0 - \Pi_0 q_{RT}) : \mathbb{C}^{-1} (\sigma_0 - \Pi_0 q_{RT}) \, dx + \int_{\Omega} \text{div } q_{RT} \cdot \text{div } q_{RT} \, dx.
\end{aligned}$$

□

Schritt 4. Behauptung: Es gilt $\|y_h\|_Y^2 \leq (2h_{\max}^2/9\mu + 1)b(x_h, y_h)$.

Beweis der Behauptung: Mit den in Schritt 3 hergeleiteten Darstellungen (4.17) und (4.18) wegen $\text{sym } \mathbb{C}^{-1} = \mathbb{C}^{-1} \text{sym}$ erhält man

$$\begin{aligned}
\|(\tau_1, \nu_1)\|_Y^2 &= \|\tau_1\|_{\mathbb{C}^{-1}}^2 + \|\text{div}_{NC} \tau_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nu_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathbb{D}_{NC} \nu_1\|_{\mathbb{C}}^2 \\
&= \int_{\Omega} (\sigma_0 - \mathbb{C}\varepsilon(w_C) + \text{sym}((u_0 - \Pi_0 w_C) \otimes (\bullet - \text{mid}(\mathcal{T}))/2)) \\
&\quad : \mathbb{C}^{-1} (\sigma_0 - \mathbb{C}\varepsilon(w_C) + \text{sym}((u_0 - \Pi_0 w_C) \otimes (\bullet - \text{mid}(\mathcal{T}))/2)) \, dx \\
&\quad + 9/16 \|u_0 - \Pi_0 w_C\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\quad + \int_{\Omega} (-\text{div } q_{RT} + (\mathbb{C}^{-1} (\sigma_0 - \Pi_0 q_{RT}))(\bullet - \text{mid}(\mathcal{T}))) \\
&\quad \cdot (-\text{div } q_{RT} + (\mathbb{C}^{-1} (\sigma_0 - \Pi_0 q_{RT}))(\bullet - \text{mid}(\mathcal{T}))) \, dx \\
&\quad + \int_{\Omega} \mathbb{C}^{-1} (\sigma_0 - \Pi_0 q_{RT}) : \mathbb{C} \mathbb{C}^{-1} (\sigma_0 - \Pi_0 q_{RT}) \, dx \\
&= \|\sigma_0 - \mathbb{C}\varepsilon(w_C)\|_{\mathbb{C}^{-1}}^2 + \|\text{sym}((u_0 - \Pi_0 w_C) \otimes (\bullet - \text{mid}(\mathcal{T}))/2)\|_{\mathbb{C}^{-1}}^2 \\
&\quad + \int_{\Omega} \underbrace{(\sigma_0 - \mathbb{C}\varepsilon(w_C))}_{\in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^{2 \times 2})} : \underbrace{\mathbb{C}^{-1} \text{sym}((u_0 - \Pi_0 w_C) \otimes (\bullet - \text{mid}(\mathcal{T}))/2)}_{\perp_{L^2} P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^{2 \times 2})} \\
&\quad + 9/16 \|u_0 - \Pi_0 w_C\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\quad + \|\text{div } q_{RT}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathbb{C}^{-1} (\sigma_0 - \Pi_0 q_{RT})(\bullet - \text{mid}(\mathcal{T}))\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\quad - \int_{\Omega} \underbrace{\text{div } q_{RT}}_{\in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)} \cdot \underbrace{(\mathbb{C}^{-1} (\sigma_0 - \Pi_0 q_{RT})(\bullet - \text{mid}(\mathcal{T})))}_{\perp_{L^2} P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)} \, dx \\
&\quad + \|\sigma_0 - \Pi_0 q_{RT}\|_{\mathbb{C}^{-1}}.
\end{aligned}$$

Wegen der Orthogonalität von $(\bullet - \text{mid}(\mathcal{T}))$ auf stückweise konstanten Funktionen folgt

$$\begin{aligned} \|(\tau_1, \nu_1)\|_Y^2 &= \|\sigma_0 - \mathbb{C}\mathcal{E}(w_C)\|_{\mathbb{C}^{-1}}^2 + \|\text{sym}((u_0 - \Pi_0 w_C) \otimes (\bullet - \text{mid}(\mathcal{T}))) / 2\|_{\mathbb{C}^{-1}}^2 \\ &\quad + 9/16 \|u_0 - \Pi_0 w_C\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \|\text{div } q_{RT}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathbb{C}^{-1}(\sigma_0 - \Pi_0 q_{RT})(\bullet - \text{mid}(\mathcal{T}))\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \|\sigma_0 - \Pi_0 q_{RT}\|_{\mathbb{C}^{-1}}^2. \end{aligned}$$

Wegen Lemma 2.9 folgt

$$|\text{sym}((u_0 - \Pi_0 w_C) \otimes (\bullet - \text{mid}(\mathcal{T})))| \leq |(u_0 - \Pi_0 w_C) \otimes (\bullet - \text{mid}(\mathcal{T}))|,$$

daher folgt insgesamt

$$\begin{aligned} \|(\tau_1, \nu_1)\|_Y^2 &\leq \|\sigma_0 - \mathbb{C}\mathcal{E}(w_C)\|_{\mathbb{C}^{-1}}^2 + 1/4 \|(u_0 - \Pi_0 w_C) \otimes (\bullet - \text{mid}(\mathcal{T}))\|_{\mathbb{C}^{-1}}^2 \\ &\quad + 9/16 \|u_0 - \Pi_0 w_C\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \|\text{div } q_{RT}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathbb{C}^{-1}(\sigma_0 - \Pi_0 q_{RT})(\bullet - \text{mid}(\mathcal{T}))\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \|\sigma_0 - \Pi_0 q_{RT}\|_{\mathbb{C}^{-1}}^2. \end{aligned}$$

Wegen Korollar 2.31 und $|(\bullet - \text{mid}(\mathcal{T}))| \leq 2h_{\max}/3$ folgt

$$\begin{aligned} \|(\tau_1, \nu_1)\|_Y^2 &\leq \|\sigma_0 - \mathbb{C}\mathcal{E}(w_C)\|_{\mathbb{C}^{-1}}^2 + h_{\max}^2/18\mu \|u_0 - \Pi_0 w_C\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + 9/16 \|u_0 - \Pi_0 w_C\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \|\text{div } q_{RT}\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2h_{\max}^2/9\mu \|\mathbb{C}^{-1/2}(\sigma_0 - \Pi_0 q_{RT})\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \|\sigma_0 - \Pi_0 q_{RT}\|_{\mathbb{C}^{-1}}^2. \end{aligned}$$

Zusammengefasst gilt

$$\begin{aligned} \|(\tau_1, \nu_1)\|_Y^2 &\leq (2h_{\max}^2/9\mu + 1)(\|\sigma_0 - \mathbb{C}\mathcal{E}(w_C)\|_{\mathbb{C}^{-1}}^2 \\ &\quad + 3/4 \|u_0 - \Pi_0 w_C\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\text{div } q_{RT}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\sigma_0 - \Pi_0 q_{RT}\|_{\mathbb{C}^{-1}}^2). \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt dann aus Schritt 3. □

Schritt 5. Zu $\text{sym } q_{RT} - \mathbb{C}\mathcal{E}(w_C) \in L^2(\Omega; \mathbb{S})$ wählt man entsprechend der Helmholtz-Zerlegung aus Satz 2.41 ein $\alpha \in H_D^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$ und $\beta \in H^2(\Omega)/P_1(\Omega)$, sodass

$$\text{sym } q_{RT} - \mathbb{C}\mathcal{E}(w_C) = \mathbb{C}\mathcal{E}(\alpha) + \text{Curl Curl } \beta.$$

Behauptung: $\|\alpha + w_C\| \leq 1/(2\mu)^{1/2} c_F c_{\text{Korn}} \|\text{div } q_{RT}\|_{L^2(\Omega)} + \|\text{asym } q_{RT}\|_{\mathbb{C}^{-1}}$

Beweis der Behauptung: Mit der Orthogonalität $\int_{\Omega} \mathbb{C}^{-1} \text{Curl Curl } \beta : \mathbb{C} \varepsilon(w_C + \alpha) \, dx = 0$ sowie partieller Integration berechnet man

$$\begin{aligned}
\|\alpha + w_C\|^2 &= \int_{\Omega} \varepsilon(\alpha + w_C) : \mathbb{C} \varepsilon(\alpha + w_C) \, dx \\
&= \int_{\Omega} \mathbb{C}^{-1} (\text{sym } q_{RT} - \text{Curl Curl } \beta) : \mathbb{C} \varepsilon(\alpha + w_C) \, dx \\
&= \int_{\Omega} \mathbb{C}^{-1} \text{sym } q_{RT} : \mathbb{C} \varepsilon(\alpha + w_C) \, dx \\
&= \int_{\Omega} \text{sym } q_{RT} : \varepsilon(\alpha + w_C) \, dx \\
&= \int_{\Omega} \text{sym } q_{RT} : D(\alpha + w_C) \, dx \\
&= \int_{\Omega} q_{RT} : D(\alpha + w_C) \, dx - \int_{\Omega} \text{asym } q_{RT} : D(\alpha + w_C) \, dx \\
&= - \int_{\Omega} \text{div } q_{RT} \cdot (\alpha + w_C) \, dx \\
&\quad - \int_{\Omega} \text{asym } q_{RT} : D(\alpha + w_C) \, dx \\
&\leq \|\text{div } q_{RT}\|_{L^2(\Omega)} \|\alpha + w_C\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \|\text{asym } q_{RT}\|_{\mathbb{C}^{-1}} \|\alpha + w_C\|
\end{aligned}$$

Die Friedrichs- und Korn-Ungleichung, sowie Korollar 2.31 implizieren

$$\|\alpha + w_C\| \leq 1/(2\mu)^{1/2} c_F c_{\text{Korn}} \|\text{div } q_{RT}\|_{L^2(\Omega)} + \|\text{asym } q_{RT}\|_{\mathbb{C}^{-1}}. \quad \square$$

Schritt 6. *Behauptung:* Es gilt

$$\|w_C\| \leq 1/(2\mu)^{1/2} (c_F c_{\text{Korn}} + 2h_{\max}/3) \|\text{div } q_{RT}\|_{L^2(\Omega)} + 2\|\Pi_0 q_{RT} - \sigma_0\|_{\mathbb{C}^{-1}} + \|\sigma_0 - \mathbb{C} \varepsilon(w_C)\|_{\mathbb{C}^{-1}}.$$

Beweis der Behauptung: Die Orthogonalität von symmetrischen und asymmetrischen Matrizen zeigt den Satz des Pythagoras

$$\begin{aligned}
\|q_{RT} - \sigma_0\|_{\mathbb{C}^{-1}}^2 &= \|\text{asym } q_{RT}\|_{\mathbb{C}^{-1}}^2 + \|\text{sym } q_{RT} - \sigma_0\|_{\mathbb{C}^{-1}}^2, \text{ also} \\
\|\text{asym } q_{RT}\|_{\mathbb{C}^{-1}} &\leq \|q_{RT} - \sigma_0\|_{\mathbb{C}^{-1}}.
\end{aligned}$$

Analog schließt man $\|\text{sym } q_{RT} - \mathbb{C} \varepsilon(w_C)\|_{\mathbb{C}^{-1}} \leq \|q_{RT} - \mathbb{C} \varepsilon(w_C)\|_{\mathbb{C}^{-1}}$. Auch mit Pythagoras und der Orthogonalität aus der Helmholtz-Zerlegung ergibt sich

$$\|\varepsilon(\alpha)\|_{\mathbb{C}} = \|\mathbb{C} \varepsilon(\alpha)\|_{\mathbb{C}^{-1}} \leq \|\text{sym } q_{RT} - \mathbb{C} \varepsilon(w_C)\|_{\mathbb{C}^{-1}} \leq \|q_{RT} - \mathbb{C} \varepsilon(w_C)\|_{\mathbb{C}^{-1}}.$$

Insgesamt gilt dann mit der Dreiecksungleichung und dem vorigen Schritt

$$\begin{aligned}
\|w_C\| &\leq \|\varepsilon(\alpha + w_C)\|_{\mathbb{C}} + \|\varepsilon(\alpha)\|_{\mathbb{C}} \\
&\leq 1/(2\mu)^{1/2} c_F c_{\text{Korn}} \|\text{div } q_{RT}\|_{L^2(\Omega)} + \|q_{RT} - \sigma_0\|_{\mathbb{C}^{-1}} + \|q_{RT} - \mathbb{C} \varepsilon(w_C)\|_{\mathbb{C}^{-1}} \\
&\leq 1/(2\mu)^{1/2} c_F c_{\text{Korn}} \|\text{div } q_{RT}\|_{L^2(\Omega)} + 2\|q_{RT} - \sigma_0\|_{\mathbb{C}^{-1}} + \|\sigma_0 - \mathbb{C} \varepsilon(w_C)\|_{\mathbb{C}^{-1}}.
\end{aligned}$$

Einschub von $\pm \Pi_0 q_{RT}$ und Dreiecksungleichung liefert

$$\begin{aligned} |||w_C||| &\leq 1/(2\mu)^{1/2} c_F c_{\text{Korn}} \|\operatorname{div} q_{RT}\|_{L^2(\Omega)} + 2\|q_{RT} - \Pi_0 q_{RT}\|_{\mathbb{C}^{-1}} + 2\|\Pi_0 q_{RT} - \sigma_0\|_{\mathbb{C}^{-1}} \\ &\quad + \|\sigma_0 - \mathbb{C}\varepsilon(w_C)\|_{\mathbb{C}^{-1}}. \end{aligned}$$

Die Identität $q_{RT} = \Pi_0 q_{RT} + \operatorname{div} q_{RT} \cdot (\bullet - \operatorname{mid}(\mathcal{T}))/2$ und Korollar 2.31 liefern

$$\begin{aligned} \|q_{RT} - \Pi_0 q_{RT}\|_{\mathbb{C}^{-1}} &\leq (1/(2\mu))^{1/2} \|\operatorname{div} q_{RT} \cdot (\bullet - \operatorname{mid}(\mathcal{T}))/2\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq (1/(2\mu))^{1/2} h_{\max}/3 \|\operatorname{div} q_{RT}\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

□

Schritt 7. *Behauptung:* Es gilt $\|(\sigma_0, u_0, q_{RT}, w_C)\|_X^2 \leq 4c^2 b(x_h, y_h)$ mit

$$\begin{aligned} c &:= \max\{2/(2\mu)^{1/2} c_F c_{\text{Korn}} + 7, \\ &\quad (1/(2\mu))^{1/2} (h_{\max}/3 + (2\mu)^{1/2} + (1/(2\mu))^{1/2} c_F c_{\text{Korn}} + 3)(c_F c_{\text{Korn}} + 2h_{\max}/3)\}. \end{aligned}$$

Beweis der Behauptung: Es gilt mit Anwendung von Dreiecksungleichung, Korn-Ungleichung, Korollar 2.31 und (4.19), dass

$$\begin{aligned} \|\sigma_0\|_{\mathbb{C}^{-1}} &\leq \|\sigma_0 - \mathbb{C}\varepsilon(w_C)\|_{\mathbb{C}^{-1}} + \|\mathbb{C}\varepsilon(w_C)\|_{\mathbb{C}^{-1}} \\ &= \|\sigma_0 - \mathbb{C}\varepsilon(w_C)\|_{\mathbb{C}^{-1}} + |||w_C|||, \\ \|u_0\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|u_0 - \Pi_0 w_C\|_{L^2(\Omega)} + \|\Pi_0 w_C\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|u_0 - \Pi_0 w_C\|_{L^2(\Omega)} + \|w_C\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|u_0 - \Pi_0 w_C\|_{L^2(\Omega)} + 1/(2\mu)^{1/2} c_F c_{\text{Korn}} |||w_C||| \text{ und} \\ \|q_{RT}\|_{\mathbb{C}^{-1}} &\leq \|q_{RT} - \Pi_0 q_{RT}\|_{\mathbb{C}^{-1}} + \|\Pi_0 q_{RT} - \sigma_0\|_{\mathbb{C}^{-1}} + \|\sigma_0\|_{\mathbb{C}^{-1}} \\ &\leq 1/(2\mu)^{1/2} h_{\max}/3 \|\operatorname{div} q_{RT}\|_{L^2(\Omega)} + \|\Pi_0 q_{RT} - \sigma_0\|_{\mathbb{C}^{-1}} + \|\sigma_0\|_{\mathbb{C}^{-1}} \\ &\leq 1/(2\mu)^{1/2} h_{\max}/3 \|\operatorname{div} q_{RT}\|_{L^2(\Omega)} + \|\Pi_0 q_{RT} - \sigma_0\|_{\mathbb{C}^{-1}} \\ &\quad + \|\sigma_0 - \mathbb{C}\varepsilon(w_C)\|_{\mathbb{C}^{-1}} + |||w_C|||. \end{aligned}$$

Diese Rechnung und Schritt 6 ergeben zusammengefasst

$$\begin{aligned} &\|\sigma_0\|_{\mathbb{C}^{-1}} + \|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|q_{RT}\|_{\mathbb{C}^{-1}} + \|\operatorname{div} q_{RT}\|_{L^2(\Omega)} + |||w_C||| \\ &\leq 2\|\sigma_0 - \mathbb{C}\varepsilon(w_C)\|_{\mathbb{C}^{-1}} + \|u_0 - \Pi_0 w_C\|_{L^2(\Omega)} + (1/(2\mu))^{1/2} c_F c_{\text{Korn}} + 3) |||w_C||| \\ &\quad + (1/(2\mu))^{1/2} h_{\max}/3 + 1) \|\operatorname{div} q_{RT}\|_{L^2(\Omega)} + \|\Pi_0 q_{RT} - \sigma_0\|_{\mathbb{C}^{-1}} \\ &\leq (5 + 1/(2\mu))^{1/2} c_{\text{Korn}} c_F \|\sigma_0 - \mathbb{C}\varepsilon(w_C)\|_{\mathbb{C}^{-1}} + \|u_0 - \Pi_0 w_C\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + (1/(2\mu))^{1/2} h_{\max}/3 + 1 + (1/(2\mu))^{1/2} c_F c_{\text{Korn}} + 3) 1/(2\mu)^{1/2} (c_F c_{\text{Korn}} + 2h_{\max}/3) \|\operatorname{div} q_{RT}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + (2/(2\mu))^{1/2} c_F c_{\text{Korn}} + 7) \|\Pi_0 q_{RT} - \sigma_0\|_{\mathbb{C}^{-1}}. \end{aligned}$$

Dies impliziert

$$\begin{aligned} &\|\sigma_0\|_{\mathbb{C}^{-1}} + \|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|q_{RT}\|_{\mathbb{C}^{-1}} + \|\operatorname{div} q_{RT}\|_{L^2(\Omega)} + |||w_C||| \\ &\leq c(\|\sigma_0 - \mathbb{C}\varepsilon(w_C)\|_{\mathbb{C}^{-1}} + (3/4)^{1/2} \|u_0 - \Pi_0 w_C\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \|\sigma_0 - \Pi_0 q_{RT}\|_{\mathbb{C}^{-1}} + \|\operatorname{div} q_{RT}\|_{L^2(\Omega)}) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
c &:= \max\{5 + 1/(2\mu)^{1/2} c_{\text{Korn}} c_F, (4/3)^{1/2}, 2/(2\mu)^{1/2} c_F c_{\text{Korn}} + 7, \\
&\quad (1/(2\mu)^{1/2} h_{\max}/3 + 1 + (1/(2\mu)^{1/2} c_F c_{\text{Korn}} + 3) 1/(2\mu)^{1/2} (c_F c_{\text{Korn}} + 2h_{\max}/3))\} \\
&= \max\{2/(2\mu)^{1/2} c_F c_{\text{Korn}} + 7, \\
&\quad (1/(2\mu)^{1/2} (h_{\max}/3 + (2\mu)^{1/2} + (1/(2\mu)^{1/2} c_F c_{\text{Korn}} + 3) (c_F c_{\text{Korn}} + 2h_{\max}/3))\}.
\end{aligned}$$

Somit ist mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung des Skalarproduktes in \mathbb{R}^4 und der Darstellung von $b(x_h, y_h)$ aus Schritt 3

$$\begin{aligned}
&\|(\sigma_0, u_0, q_{RT}, w_C)\|_X^2 \\
&\leq (\|\sigma_0\|_{\mathbb{C}^{-1}} + \|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|q_{RT}\|_{\mathbb{C}^{-1}} + \|\operatorname{div} q_{RT}\|_{L^2(\Omega)} + \|w_C\|)^2 \\
&\leq c^2 (\|\sigma_0 - \mathbb{C}\varepsilon(w_C)\|_{\mathbb{C}^{-1}} + (3/4)^{1/2} \|u_0 - \Pi_0 w_C\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \|\sigma_0 - \Pi_0 q_{RT}\|_{\mathbb{C}^{-1}} + \|\operatorname{div} q_{RT}\|_{L^2(\Omega)})^2 \\
&\leq 4c^2 b(x_h, y_h).
\end{aligned}$$

□

Aus den vorhergegangenen Schritten folgt nun, dass für jedes $x_h \in X_h$ ein $y_h \in Y_h$ existiert, sodass $\|x_h\|_X \|y_h\|_Y \leq 2c(2h_{\max}^2/9\mu + 1)^{1/2} b(x_h, y_h)$. Damit folgt insbesondere, dass für jedes $x_h \in X_h$ der Wert

$$\sup_{y_h \in Y_h} \frac{b(x_h, y_h)}{\|x_h\|_X \|y_h\|_Y} \geq (2h_{\max}^2/9\mu + 1)^{-1/2} / (2c)$$

unabhängig von x_h nach unten beschränkt ist und somit die Behauptung. ■

5 Analysis der zweiten dPG-Methode

Die Analyse der zweiten in dieser Arbeit vorgestellten Methode, der *Energiemethode mit Nebenbedingung*, erfolgt in diesem Kapitel. Das Weglassen der Indizes führt zu den Räumen X und Y aus Definition 2.25 mit zugehörigen Normen, die lauten

$$\begin{aligned} X &= \Sigma \times L^2(\Omega; \mathbb{R}^n) \times H_N^{-1/2}(\partial\mathcal{T}; \mathbb{R}^n) \times H_D^{1/2}(\partial\mathcal{T}; \mathbb{R}^n), \\ Y &= \Sigma(\mathcal{T}) \times H^1(\mathcal{T}; \mathbb{R}^n), \text{ mit} \\ \Sigma &= \begin{cases} \{\sigma \in L^2(\Omega; \mathbb{S}) \mid \int_{\Omega} \text{tr}(\sigma) \, dx = 0\} & \text{falls } \Gamma_N = \emptyset, \\ L^2(\Omega; \mathbb{S}) & \text{falls } \Gamma_N \neq \emptyset, \end{cases} \\ \Sigma(\mathcal{T}) &= \begin{cases} \{\tau \in H(\text{div}, \mathcal{T}; \mathbb{S}) \mid \int_{\Omega} \text{tr}(\tau) \, dx = 0\} & \text{falls } \Gamma_N = \emptyset, \\ H(\text{div}, \mathcal{T}; \mathbb{S}) & \text{falls } \Gamma_N \neq \emptyset, \end{cases} \\ \|(\sigma, u, t, s)\|_X^2 &= \|\sigma\|_{\mathbb{C}^{-1}}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|t\|_{H_N^{-1/2}(\partial\mathcal{T}, \mathbb{C}^{-1})}^2 + \|s\|_{H_D^{1/2}(\partial\mathcal{T}, \mathbb{C})}^2, \\ \|(\tau, v)\|_Y^2 &= \|\tau\|_{H(\text{div}, \mathbb{C}^{-1}), NC}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v\|_{NC}^2. \end{aligned}$$

5.1 Vorbereitungen und Problemformulierung

Im Falle $\Gamma_N \neq \emptyset$ entspricht diese Methode genau der Methode aus Kapitel 4 und es lässt sich sofort mit den dortigen Definitionen für Bilinearform und Linearform der Satz 4.2 anwenden. Für $\Gamma_N = \emptyset$ unterscheiden sich die beiden Methoden, und es ist eine abweichende Linearform nötig.

Definition 5.1 Es sei $b: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ die Bilinearform aus Definition 4.1. Des weiteren sei für $\Gamma_N = \emptyset$ zu gegebenen Daten $f \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$, $\tilde{s} \in H^{1/2}(\partial\mathcal{T}; \mathbb{R}^n)$ und $\tilde{\sigma} \in H(\text{div}, \Omega; \mathbb{R}^{n \times n})$ die Linearform $F: Y \rightarrow \mathbb{R}$ für $y = (\tau, v) \in Y$ definiert durch

$$F(y) := (f, v)_{\Omega} + \langle \gamma_v^{\mathcal{T}} \tau, \tilde{s} \rangle_{\partial\mathcal{T}} - (\tilde{\sigma}, \mathbb{C}^{-1} \tau)_{\Omega} - (\tilde{\sigma}, \varepsilon_{NC}(v))_{\Omega}.$$

Problem 9 (Ultraschwache Formulierung für $\Gamma_N = \emptyset$)

Zu gegebenem $f \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$, $\tilde{s} \in H^{1/2}(\partial\mathcal{T}; \mathbb{R}^n)$ und $\tilde{\sigma} \in H(\text{div}, \Omega; \mathbb{R}^{n \times n})$ finde $(\sigma, u, t, s) \in X$ mit

$$b(\sigma, u, t, s; \tau, v) = F(\tau, v) \quad \text{für alle } (\tau, v) \in Y. \quad (5.1)$$

Auch in diesem Fall lassen sich die Betrachtungen mit folgendem Satz auf homogene Randdaten beschränken.

Satz 5.2 Es löse $(u, \sigma) \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^n) \times H(\operatorname{div}, \Omega; \mathbb{S})$ Problem 7 für $\Gamma_N = \emptyset$. Es sei außerdem $\tilde{u} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ festgelegt mit $\tilde{u} = u_D$ auf Γ_D . Es bezeichne $\tilde{s} := \gamma_0^\mathcal{T} \tilde{u} \in H^{1/2}(\partial\mathcal{T}; \mathbb{R}^n)$ und $s := \gamma_0^\mathcal{T} u - \tilde{s} \in H_D^{1/2}(\partial\mathcal{T}; \mathbb{R}^n)$ sowie $t := \gamma_v^\mathcal{T} \sigma \in H_N^{-1/2}(\partial\mathcal{T}; \mathbb{R}^n)$. Es sei weiterhin $\tilde{\sigma} = (2\mu + n\lambda)/(n|\Omega|) \int_{\Gamma_D} u_D \cdot v \, ds I_{n \times n} \in H(\operatorname{div}, \Omega; \mathbb{R}^{n \times n})$.

Dann ist $(\sigma - \tilde{\sigma}, u, t, s) \in X$ Lösung von Problem 9 zu den Daten $f \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$, $\tilde{s} \in H^{1/2}(\partial\mathcal{T}; \mathbb{R}^n)$ und $\tilde{\sigma} \in H(\operatorname{div}, \Omega; \mathbb{R}^{n \times n})$.

Beweis: Wegen $u - \tilde{u} = 0$ auf Γ_D und $\Gamma_N = \emptyset$ gilt mit obigen Definitionen für die Spurterme tatsächlich $s \in H_D^{1/2}(\partial\mathcal{T}; \mathbb{R}^n)$ und $t \in H_N^{-1/2}(\partial\mathcal{T}; \mathbb{R}^n)$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{tr}(\sigma) \, dx &= \int_{\Omega} \operatorname{tr}(\mathbb{C}\varepsilon(u)) \, dx \\ &= (2\mu + n\lambda) \int_{\Omega} \operatorname{div} u \, dx \\ &= (2\mu + n\lambda) \int_{\partial\Omega} u \cdot v \, ds \\ &= (2\mu + n\lambda) \int_{\Gamma_D} u_D \cdot v \, ds, \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{tr}(\tilde{\sigma}) \, dx &= \frac{(2\mu + n\lambda) \int_{\Gamma_D} u_D \cdot v \, ds}{n|\Omega|} \int_{\Omega} \operatorname{tr}(I_{n \times n}) \, dx \\ &= (2\mu + n\lambda) \int_{\Gamma_D} u_D \cdot v \, ds. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt $\sigma - \tilde{\sigma} \in \Sigma$, also $(\sigma - \tilde{\sigma}, u, t, s) \in X$. Analog zu Satz 4.2 zeigt partielle Integration für jedes $(\tau, v) \in Y$, dass

$$\begin{aligned} (f, v)_{\Omega} + \langle \gamma_v^\mathcal{T} \tau, \tilde{s} \rangle_{\partial\mathcal{T}} &= (\sigma, \varepsilon_{NC}(v))_{\Omega} - \langle t, \gamma_0^\mathcal{T} v \rangle_{\partial\mathcal{T}} + (\mathbb{C}^{-1} \tau, \sigma)_{\Omega} \\ &\quad + (\operatorname{div} \tau, u)_{\Omega} - \langle \gamma_v^\mathcal{T} \tau, s \rangle_{\partial\mathcal{T}} \\ &= (\sigma - \tilde{\sigma}, \varepsilon_{NC}(v))_{\Omega} - \langle t, \gamma_0^\mathcal{T} v \rangle_{\partial\mathcal{T}} + (\mathbb{C}^{-1} \tau, \sigma - \tilde{\sigma})_{\Omega} \\ &\quad + (\operatorname{div} \tau, u)_{\Omega} - \langle \gamma_v^\mathcal{T} \tau, s \rangle_{\partial\mathcal{T}} \\ &\quad + (\tilde{\sigma}, \varepsilon_{NC}(v))_{\Omega} + (\mathbb{C}^{-1} \tau, \tilde{\sigma})_{\Omega}, \end{aligned}$$

dies entspricht der Behauptung. ■

Da dieselben Normen und dieselbe Bilinearform wie im vorigen Kapitel benutzt werden, gilt die Beschränktheit der Bilinearform analog zu Satz 4.3.

Lemma 5.3 Es gilt für obige Bilinearform, dass

$$\{y \in Y \mid b(\bullet, y) = 0 \text{ in } X^*\} = \{0\}.$$

Beweis: Im Falle $\Gamma_N \neq \emptyset$ ist diese Aussage genau die von Lemma 4.4. Es sei also von nun an $\Gamma_N = \emptyset$. Es sei wieder $y = (\tau, v) \in Y$, sodass $b(\sigma, u, t, s; \tau, v) = 0$ für jedes $(\sigma, u, t, s) \in X$. Die Argumentation für $\tau = 0$ folgt dann analog zu der im Beweis von Lemma 4.4. Es gilt dann außerdem mit $x = (\sigma, 0, 0, 0) \in X$, dass $0 = (\sigma, D_{NC} v)_\Omega$ für jedes $\sigma \in \Sigma$. Es sei $q := \mathbb{C}\varepsilon(\tilde{v}) \in H(\text{div}, \Omega; \mathbb{S})$ für die Lösung $\tilde{v} \in H_D^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ von

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbb{C}\varepsilon(\tilde{v}) &= v \quad \text{in } \Omega, \\ \tilde{v} &= 0 \quad \text{auf } \Gamma_D. \end{aligned}$$

Dann gilt insbesondere

$$\int_{\Omega} \text{tr}(q) \, dx = \int_{\Omega} \text{tr}(\mathbb{C}\varepsilon(\tilde{v})) \, dx = (2\mu + \lambda n) \int_{\Omega} \text{div } \tilde{v} \, dx = (2\mu + \lambda n) \int_{\partial\Omega} \tilde{v} \cdot \nu \, dx = 0,$$

also $q \in \Sigma$ und daher $0 = (q, D_{NC} v)_\Omega$. Der Rest des Beweises ist analog zu Lemma 4.4. \blacksquare

Die folgende vereinfachte Inf-Sup-Bedingung wird für $Z := (H_N(\text{div}, \Omega; \mathbb{S}) \cap \Sigma(\mathcal{T})) \times L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ aus Abschnitt 2.6 mit Norm $\|(\tau, v)\|_Z^2 := \|\tau\|_{H(\text{div}, \mathbb{C}^{-1})}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2$ für jedes $(\tau, v) \in Z$ und $Y_1 := (H_N(\text{div}, \Omega; \mathbb{S}) \cap \Sigma(\mathcal{T})) \times H_D^1(\Omega; \mathbb{R}^n) \subseteq Z$ bewiesen.

Lemma 5.4 *Es existiert $\beta_1 \geq c_1^{-1}$, sodass für jedes $(\sigma, u) \in \Sigma \times L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ die Ungleichung*

$$\beta_1 (\|\sigma\|_{\mathbb{C}^{-1}}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2)^{1/2} \leq \sup_{(\tau, v) \in Y_1 \setminus \{0\}} \frac{(u, \text{div } \tau)_\Omega + (\sigma, \mathbb{C}^{-1} \tau)_\Omega + (\sigma, \varepsilon(v))_\Omega}{\|(\tau, v)\|_Y}$$

erfüllt ist. Dabei ist, für die λ -unabhängige Konstante $\tilde{\beta}$ aus Lemma 2.29,

$$c_1^2 := 2(1 + 2c_{\text{Korn}}^2) / \tilde{\beta}^2 + 2c_{\text{Korn}}^2.$$

Beweis: Der Beweis wird analog zum Beweis von Lemma 4.5 geführt. Für $\Gamma_N \neq \emptyset$ entspricht diese Methode der ersten Energiemethode, es werden also nur die Modifikationen im Beweis für den Fall $\Gamma_N = \emptyset$ kurz untersucht. Wieder lässt sich zu $(\sigma, u) \in \Sigma \times L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ mit Lemma 2.29 $(\tau, -v) \in Z$ finden mit

$$0 = (\mathbb{C}^{-1}(\tau - \sigma), \varrho)_\Omega + (-v, \text{div } \varrho)_\Omega + (\text{div } \tau - u, w)_\Omega \quad \text{für jedes } (\varrho, w) \in Z.$$

Die Identität $\text{div } \tau = u$ folgt wieder mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung. Um die Identität $\varepsilon(v) = \mathbb{C}^{-1}(\sigma - \tau)$ wieder herzuleiten, muss beachtet werden, dass hier in der Gleichung $(v, \text{div } \varphi)_\Omega = (\mathbb{C}^{-1}(\tau - \sigma), \varphi)_\Omega$, die dafür genutzt wird, diesmal nur Testfunktionen $\varphi \in L^2(\Omega; \mathbb{S})$ mit $\int_{\Omega} \text{tr}(\varphi) \, dx = 0$ zulässig sind. Allerdings gilt $\int_{\Omega} \text{tr}(\mathbb{C}^{-1} \tau) \, dx = \int_{\Omega} \text{tr}(\mathbb{C}^{-1} \sigma) \, dx = 0$. Für allgemeine Testfunktionen $\varphi \in C_C^\infty(\Omega; \mathbb{S})$ lässt sich $c \in \mathbb{R}$ finden mit $\tilde{\varphi} = \varphi - cI_{n \times n} \in L^2(\Omega; \mathbb{S})$, $\int_{\Omega} \text{tr}(\tilde{\varphi}) \, dx = 0$. Dann gilt aber

$$\begin{aligned} (v, \text{div } \varphi)_\Omega - (\mathbb{C}^{-1}(\tau - \sigma), \varphi)_\Omega &= (v, \text{div } \tilde{\varphi})_\Omega - (\mathbb{C}^{-1}(\tau - \sigma), \tilde{\varphi})_\Omega - (\mathbb{C}^{-1}(\tau - \sigma), cI_{n \times n})_\Omega \\ &= (v, \text{div } \tilde{\varphi})_\Omega - (\mathbb{C}^{-1}(\tau - \sigma), \tilde{\varphi})_\Omega \\ &= 0, \end{aligned} \tag{5.2}$$

also sind in dieser Identität sogar alle Testfunktionen $\varphi \in C_C^\infty(\Omega; \mathbb{S})$ zulässig, was wie in Lemma 4.5 zu $v \in H_D^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ mit $\varepsilon(v) = \mathbb{C}^{-1}(\sigma - \tau)$ führt. Der Rest des Beweises erfolgt analog. \blacksquare

Der folgende Satz lässt sich mit Y_1 wie oben und $X_1 := \Sigma \times L^2(\Omega; \mathbb{R}^n) \times \{0\} \times \{0\}$ sowie $X_2 := \{0\} \times \{0\} \times H_N^{-1/2}(\partial\mathcal{T}; \mathbb{R}^n) \times H_D^{1/2}(\partial\mathcal{T}; \mathbb{R}^n)$ wörtlich wie Satz 4.6 beweisen, da die Lemmas 2.38 und 2.39 auch für diesen Fall mit denselben Konstanten gelten.

Satz 5.5 (Kontinuierliche Inf-Sup-Bedingung II) *Es gilt*

$$\frac{1/(c_1 2\sqrt{2})}{1/c_1 + 1/(2\sqrt{2}) + (2 \max\{2, 1 + c_F^2 c_{\text{Korn}}^2 / (2\mu)\})^{1/2}} \leq \beta = \inf_{x \in \mathcal{S}(X)} \sup_{y \in \mathcal{S}(Y)} b(x, y),$$

mit

$$c_1^2 := 2(1 + 2c_{\text{Korn}}^2)/\tilde{\beta}^2 + 2c_{\text{Korn}}^2.$$

5.2 Diskretisierung und Beweis der diskreten Inf-Sup-Bedingung

Definition 5.6 Die Räume $X_h \subseteq X$ und $Y_h \subseteq Y$ werden definiert durch

$$\begin{aligned} X_h &:= P_0(\mathcal{T}; \mathbb{S})/\mathbb{R} \times P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^n) \times P_0(\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}(N); \mathbb{R}^n) \times S_D^1(\mathcal{E}; \mathbb{R}^n), \\ Y_h &:= \text{sym } RT_0^{NC}(\mathcal{T}; \mathbb{R}^{n \times n})/\mathbb{R} \times P_1(\mathcal{T}; \mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} P_0(\mathcal{T}; \mathbb{S})/\mathbb{R} &:= P_0(\mathcal{T}; \mathbb{S}) \cap \Sigma, \\ \text{sym } RT_0^{NC}(\mathcal{T}; \mathbb{R}^{n \times n})/\mathbb{R} &:= \text{sym } RT_0^{NC}(\mathcal{T}; \mathbb{R}^{n \times n}) \cap \Sigma(\mathcal{T}). \end{aligned}$$

Der folgende Beweis wird für $n = 2$ geführt.

Satz 5.7 (Diskrete Inf-Sup-Bedingung II) *Es gilt*

$$(2h_{\max}^2/9\mu + 1)^{-1/2}/(2c) \leq \beta_h = \inf_{x_h \in \mathcal{S}(X_h)} \sup_{y_h \in \mathcal{S}(Y_h)} b(x_h, y_h),$$

mit λ -unabhängiger Konstante

$$\begin{aligned} c &= \max\{2/(2\mu)^{1/2} c_F c_{\text{Korn}} + 7, \\ &\quad (1/(2\mu)^{1/2} (h_{\max}/3 + (2\mu)^{1/2} + (1/(2\mu)^{1/2} c_F c_{\text{Korn}} + 3)(c_F c_{\text{Korn}} + 2h_{\max}/3))\}. \end{aligned}$$

Beweis: Da die Räume X und X der Energiemethode mit Nebenbedingung aus diesem Kapitel sich nur in den Nebenbedingungen $\int_{\Omega} \text{tr}(\sigma_0) \, dx = 0$ bzw. $\int_{\Omega} \text{tr}(\tau_1) \, dx = 0$ von der ersten vorgestellten Methode aus Kapitel 4 unterscheiden, muss im Vergleich zum Beweis von Satz 4.11 nur die Aussage überprüft werden, ob $x_h = (\sigma_0, u_0, q_{RT}, w_C) \in X$ impliziert, dass $y_h = (\tau_1, v_1) \in Y$ für

$$\begin{aligned} v_1 &:= -\text{div } q_{RT} + (\mathbb{C}^{-1}(\sigma_0 - \Pi_0 q_{RT}))(\bullet - \text{mid}(\mathcal{T})), \\ \tau_1 &:= \sigma_0 - \mathbb{C}\mathcal{E}(w_C) + \text{sym}((u_0 - \Pi_0 w_C) \otimes (\bullet - \text{mid}(\mathcal{T}))/2). \end{aligned}$$

Aber für $\Gamma_N = \emptyset$ und $\int_{\Omega} \operatorname{tr}(\sigma_0) \, dx = 0$ gilt, dass

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \operatorname{tr}(\tau_1) \, dx &= \int_{\Omega} \operatorname{tr}(\sigma_0) \, dx - \int_{\Omega} \operatorname{tr}(\mathbb{C}\varepsilon(w_C)) \, dx \\
&\quad + \int_{\Omega} \operatorname{tr}(\operatorname{sym}((u_0 - \Pi_0 w_C) \otimes (\bullet - \operatorname{mid}(\mathcal{T}))/2)) \, dx \\
&= - \int_{\Omega} \operatorname{tr}(\mathbb{C}\varepsilon(w_C)) \, dx \\
&= -(2\mu + 2\lambda) \int_{\Omega} \operatorname{tr}(\varepsilon(w_C)) \, dx \\
&= -(2\mu + 2\lambda) \int_{\Omega} \operatorname{div} w_C \, dx \\
&= -(2\mu + 2\lambda) \int_{\partial\Omega} w_C \cdot \nu \, dx \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Daher ist $y_h \in Y$ und der Rest des Beweises gilt wörtlich. ■

Das folgende Lemma zeigt noch, warum die Nebenbedingung an den Testraum in Bezug auf die Inf-Sup-Bedingung eigentlich nicht nötig ist. Dazu sei \tilde{Y}_h der Raum ohne Nebenbedingung aus Kapitel 4 und Y_h der in diesem Kapitel betrachtete Raum mit Nebenbedingung. Da sich diese ohnehin nur für ein reines Dirichletrandproblem unterscheiden, sei im Folgenden $\Gamma_N = \emptyset$.

Lemma 5.8 *Für jedes $x_h = (\sigma_0, u_0, t_0, s_1) \in X_h$, $x_h \neq 0$ gilt*

$$\sup_{y_h \in \tilde{Y}_h} \frac{b(x_h, \tilde{y}_h)}{\|\tilde{y}_h\|_Y} = \sup_{y_h \in Y_h} \frac{b(x_h, y_h)}{\|y_h\|_Y}.$$

Beweis: Für jedes $\tilde{y}_h = (\tilde{\tau}_1, \tilde{\nu}_1) \in \tilde{Y}_h$, $\tilde{y}_h \neq 0$ existiert $y_h = (\tau_1, \tilde{\nu}_1) \in Y_h$, $y_h = \tilde{y}_h - (cI_{2 \times 2}, 0)$ mit $c = \int_{\Omega} \operatorname{tr}(\tilde{\tau}_1) \, dx / (2|\Omega|)$. Mit dem Skalarprodukt $(\bullet, \bullet)_Y$ auf Y , definiert für $(\tau, \nu), (\varrho, w) \in Y$ durch

$$((\tau, \nu), (\varrho, w))_Y := (\tau, \varrho)_{\mathbb{C}^{-1}} + (\operatorname{div}_{NC} \tau, \operatorname{div}_{NC} \varrho)_{\Omega} + (\nu, w)_{\Omega} + (D_{NC} \nu, D_{NC} w)_{\mathbb{C}}$$

gilt die Orthogonalität

$$\begin{aligned}
(y_h, (cI_{2 \times 2}, 0))_Y &= (\tau_1, cI_{2 \times 2})_{\mathbb{C}^{-1}} + (\operatorname{div}_{NC} \tau_1, \operatorname{div}_{NC} cI_{2 \times 2})_{\Omega} \\
&= (\tau_1, cI_{2 \times 2})_{\mathbb{C}^{-1}} \\
&= c(1/(2\mu) - \lambda/(2\mu^2 + 2\mu\lambda)) \int_{\Omega} \operatorname{tr}(\tau_1) \, dx \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Dies impliziert den Satz des Pythagoras

$$\|\tilde{y}_h\|_Y^2 = \|y_h\|_Y^2 + \|(cI_{2 \times 2}, 0)\|_Y^2$$

und daher $\|y_h\|_Y \leq \|\tilde{y}_h\|_Y$. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}
b(x_h, (cI_{2 \times 2}, 0)) &= (\sigma_0, cI_{2 \times 2})_{\mathbb{C}^{-1}} + (u_0, \operatorname{div}_{NC} cI_{2 \times 2})_{\Omega} - \langle \gamma_v^T cI_{2 \times 2}, s_1 \rangle_{\partial\mathcal{T}} \\
&= c(1/(2\mu) - \lambda/(2\mu^2 + 2\mu\lambda)) \int_{\Omega} \operatorname{tr}(\sigma_0) \, dx - \int_{\partial\Omega} cI_{2 \times 2} \nu \cdot s_1 \, ds \\
&= 0,
\end{aligned}$$

woraus $b(x_h, y_h) = b(x_h, \tilde{y}_h)$ folgt. Insgesamt folgt

$$\frac{b(x_h, \tilde{y}_h)}{\|\tilde{y}_h\|_Y} \leq \frac{b(x_h, y_h)}{\|y_h\|_Y} \leq \sup_{y_h \in Y_h} \frac{b(x_h, y_h)}{\|y_h\|_Y}.$$

Da $\tilde{y}_h \in Y_h$ beliebig war, folgt

$$\sup_{\tilde{y}_h \in \tilde{Y}_h} \frac{b(x_h, \tilde{y}_h)}{\|\tilde{y}_h\|_Y} \leq \sup_{y_h \in Y_h} \frac{b(x_h, y_h)}{\|y_h\|_Y}.$$

Wegen $Y_h \subseteq \tilde{Y}_h$ gilt auch die umgekehrte Abschätzung, was zur behaupteten Gleichheit führt. ■

6 Analysis der dritten dPG-Methode

Die in den beiden vorigen Kapiteln vorgestellten Methoden könnten aufgrund der Tatsache, dass in den benutzten Normen der Lamé-Parameter λ vorkommt, mit einer Argumentation wie in [BS08] ein Locking-Verhalten zeigen. Die gewählten Normen haben direkten Einfluss auf die dPG-Methode. Die Wahl einer λ -unabhängigen Norm könnte also das Locking verhindern. Dies führt zur hier betrachteten L^2 - H^1 -Methode. Wie schon in den beiden vorigen Kapiteln werden die Indizes in den Notationen $X_3, \|\cdot\|_{X_3}, Y_3$ und $\|\cdot\|_{Y_3}$ weggelassen und die Räume und Normen lauten

$$\begin{aligned} X &= \Sigma \times L^2(\Omega; \mathbb{R}^n) \times H_N^{-1/2}(\partial\mathcal{T}; \mathbb{R}^n) \times H_D^{1/2}(\partial\mathcal{T}; \mathbb{R}^n), \\ Y &= \Sigma(\mathcal{T}) \times H^1(\mathcal{T}; \mathbb{R}^n), \text{ mit} \\ \Sigma &= \begin{cases} \{\sigma \in L^2(\Omega; \mathbb{S}) \mid \int_{\Omega} \text{tr}(\sigma) \, dx = 0\} & \text{falls } \Gamma_N = \emptyset, \\ L^2(\Omega; \mathbb{S}) & \text{falls } \Gamma_N \neq \emptyset, \end{cases} \\ \Sigma(\mathcal{T}) &= \begin{cases} \{\tau \in H(\text{div}, \mathcal{T}; \mathbb{S}) \mid \int_{\Omega} \text{tr}(\tau) \, dx = 0\} & \text{falls } \Gamma_N = \emptyset, \\ H(\text{div}, \mathcal{T}; \mathbb{S}) & \text{falls } \Gamma_N \neq \emptyset, \end{cases} \\ \|(\sigma, u, t, s)\|_X^2 &= \|\sigma\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|t\|_{H_N^{-1/2}(\partial\mathcal{T})}^2 + \|s\|_{H_D^{1/2}(\partial\mathcal{T})}^2, \\ \|(\tau, v)\|_Y^2 &= \|\tau\|_{H(\text{div}), NC}^2 + \|v\|_{H^1(\Omega), NC}^2. \end{aligned}$$

6.1 Vorbereitungen und Problemformulierung

Die ultraschwache Formulierung für diese Methode entspricht für beide Fälle $\Gamma_N \neq \emptyset$ und $\Gamma_N = \emptyset$ aufgrund der Gleichheit der Räume genau derjenigen der Energiemethode mit Nebenbedingung aus dem vorigen Kapitel. Die Beschränktheit der Bilinearform muss in diesem Fall allerdings wegen der abweichenden Normen neu überprüft werden.

Satz 6.1 (Beschränktheit III) *Die Bilinearform b in (4.6) ist beschränkt bezüglich der Normen in diesem Kapitel, das heißt, für jedes $(\sigma, u, t, s) \in X$ und $(\tau, v) \in Y$ gilt*

$$b(\sigma, u, t, s; \tau, v) \leq M \|(\sigma, u, t, s)\|_X \|(\tau, v)\|_Y$$

mit $M := (2 + 1/\mu)^{1/2}$.

Beweis: Das Vorgehen ist analog zum Beweis aus Satz 4.3 der Beschränktheit der Methode aus Kapitel 4. Zu $(\sigma, u, t, s) \in X$ und $(\tau, v) \in Y$ und zu gegebenem $\varepsilon > 0$ wähle $w \in H_D^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ und $q \in H(\text{div}, \Omega; \mathbb{R}^{n \times n})$ mit $s = \gamma_0^{\mathcal{T}}(w)$ und $t = \gamma_v^{\mathcal{T}}(q)$, die $\|w\|_{H^1(\Omega)} \leq \|s\|_{H_D^{1/2}(\partial\mathcal{T})} + \varepsilon$ und $\|q\|_{H(\text{div})} \leq \|t\|_{H_N^{-1/2}(\partial\mathcal{T})} + \varepsilon$ erfüllen. Die Darstellung (4.10) gilt auch hier wieder und ergibt mit Cauchy-

Schwarz-Ungleichung und Korollar 2.31, dass

$$\begin{aligned}
b(\sigma, u, t, s; \tau, v) &= \int_{\Omega} \sigma : \mathbb{C}^{-1} \tau \, dx + \int_{\Omega} u \cdot \operatorname{div}_{NC} \tau \, dx \\
&\quad + \int_{\Omega} \sigma : D_{NC}(v) \, dx - \int_{\Omega} w \cdot \operatorname{div}_{NC} \tau \, dx \\
&\quad - \int_{\Omega} D w : \tau \, dx - \int_{\Omega} q : D_{NC} v \, dx \\
&\quad - \int_{\Omega} \operatorname{div} q \cdot v \, dx \\
&\leq \|\sigma\|_{L^2(\Omega)} \underbrace{\|\mathbb{C}^{-1} \tau\|_{L^2(\Omega)}}_{\leq 1/(2\mu)\|\tau\|_{L^2(\Omega)}} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \|\operatorname{div}_{NC} \tau\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \|\sigma\|_{L^2(\Omega)} \|D_{NC} v\|_{L^2(\Omega)} + \|w\|_{L^2(\Omega)} \|\operatorname{div}_{NC} \tau\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \|D w\|_{L^2(\Omega)} \|\tau\|_{L^2(\Omega)} + \|q\|_{L^2(\Omega)} \|D_{NC} v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \|\operatorname{div} q\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq (2 + 1/\mu)^{1/2} (\|(\sigma, u, t, s)\|_X^2 + 2\varepsilon)^{1/2} \|(\tau, v)\|_Y.
\end{aligned}$$

Der Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ liefert die Behauptung. ■

Es folgt wieder ein Lemma mit vereinfachter kontinuierlicher Inf-Sup-Bedingung. Dazu sei wie in Abschnitt 2.6 definiert $Z := (H_N(\operatorname{div}, \Omega; \mathbb{S}) \cap \Sigma(\mathcal{T})) \times L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ mit Norm $\|(\tau, v)\|_Z^2 := \|\tau\|_{H(\operatorname{div})}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2$ für jedes $(\tau, v) \in Z$. Außerdem definiere $Y_1 := (H_N(\operatorname{div}, \Omega; \mathbb{S}) \cap \Sigma(\mathcal{T})) \times H_D^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ einen Unterraum von Y und Z .

Lemma 6.2 *Es existiert $\beta_1 := (\max\{1, 2c_{\text{td}}^2 \mu\} c_1^2 + c_{\text{td}}^2)^{-1/2}$, sodass für jedes $(\sigma, u) \in \Sigma \times L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ die Ungleichung*

$$\beta_1 (\|\sigma\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2)^{1/2} \leq \sup_{(\tau, v) \in Y_1 \setminus \{0\}} \frac{(u, \operatorname{div} \tau)_{\Omega} + (\sigma, \mathbb{C}^{-1} \tau)_{\Omega} + (\sigma, \varepsilon(v))_{\Omega}}{\|(\tau, v)\|_Y}$$

erfüllt ist. Dabei ist, für die λ -unabhängige Konstante $\tilde{\beta}$ aus Lemma 2.29,

$$c_1^2 := (1 + c_{\text{Korn}}^2 / (2\mu^2)) (2 + 1/\mu) / \tilde{\beta}^2 + c_{\text{Korn}}^2 / \mu.$$

Beweis: Es sei $(\sigma, u) \in \Sigma \times L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ vorgegeben, dann können $F \in Z^*$ und $(\tau, -v) \in Z$ definiert werden wie im Beweis zu Lemma 4.5, da das dort verwendete Lemma 2.29 auch in diesem Fall anwendbar ist. Es gilt dann analog zu dort

$$\tilde{\beta} \|(\tau, v)\|_Z \leq (2 + 1/\mu)^{1/2} \sqrt{\|\sigma\|_{\mathbb{C}^{-1}}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2}. \quad (6.1)$$

Mit einer Argumentation wie (5.2) im Beweis zu Lemma 5.4, die noch die Nebenbedingung enthält, folgt auch hier wieder $\operatorname{div} \tau = u$ und $v \in H_D^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ mit $\varepsilon(v) = \mathbb{C}^{-1}(\sigma - \tau)$ sowie

$$(u, \operatorname{div} \tau)_{\Omega} + (\sigma, \mathbb{C}^{-1} \tau)_{\Omega} + (\sigma, \varepsilon(v))_{\Omega} = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\sigma\|_{\mathbb{C}^{-1}}^2. \quad (6.2)$$

Es gilt aufgrund der Kornungleichung, der Dreiecksungleichung und mehrmaliger Anwendung von Korollar 2.31 die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\|D v\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq c_{\text{Korn}}^2 \|\varepsilon(v)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&= c_{\text{Korn}}^2 \|\mathbb{C}^{-1}(\sigma - \tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\leq 2c_{\text{Korn}}^2 \|\mathbb{C}^{-1}\sigma\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2c_{\text{Korn}}^2 \|\mathbb{C}^{-1}\tau\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\leq c_{\text{Korn}}^2 / \mu \|\sigma\|_{\mathbb{C}^{-1}}^2 + c_{\text{Korn}}^2 / (2\mu^2) \|\tau\|_{L^2(\Omega)}^2
\end{aligned}$$

und daher unter Ausnutzung von (6.1),

$$\begin{aligned}
\|(\tau, v)\|_Y^2 &= \|\tau\|_{H(\text{div})}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|D v\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\leq \|\tau\|_{H(\text{div})}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + c_{\text{Korn}}^2 / \mu \|\sigma\|_{\mathbb{C}^{-1}}^2 + c_{\text{Korn}}^2 / (2\mu^2) \|\tau\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\leq (1 + c_{\text{Korn}}^2 / (2\mu^2)) \|(\tau, v)\|_Z^2 + c_{\text{Korn}}^2 / \mu \|\sigma\|_{\mathbb{C}^{-1}}^2 \\
&\leq (1 + c_{\text{Korn}}^2 / (2\mu^2)) (2 + 1/\mu) / \tilde{\beta}^2 (\|\sigma\|_{\mathbb{C}^{-1}}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2) + c_{\text{Korn}}^2 / \mu \|\sigma\|_{\mathbb{C}^{-1}}^2 \\
&\leq ((1 + c_{\text{Korn}}^2 / (2\mu^2)) (2 + 1/\mu) / \tilde{\beta}^2 + c_{\text{Korn}}^2 / \mu) (\|\sigma\|_{\mathbb{C}^{-1}}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2) \\
&=: c_1^2 (\|\sigma\|_{\mathbb{C}^{-1}}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2).
\end{aligned}$$

Daraus folgt aber

$$\|(\tau, v)\|_Y (\|\sigma\|_{\mathbb{C}^{-1}}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2)^{1/2} \leq c_1 (\|\sigma\|_{\mathbb{C}^{-1}}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2),$$

was zusammen mit Gleichung (6.2) und $(\tau, v) \in Y_1$ ergibt, dass

$$\begin{aligned}
(\|\sigma\|_{\mathbb{C}^{-1}}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2)^{1/2} &\leq c_1 \frac{(u, \text{div } \tau)_\Omega + (\sigma, \mathbb{C}^{-1}\tau)_\Omega + (\sigma, \varepsilon(v))_\Omega}{\|(\tau, v)\|_Y} \\
&\leq c_1 M.
\end{aligned}$$

mit

$$M := \sup_{(\tau, v) \in Y_1 \setminus \{0\}} \frac{(u, \text{div } \tau)_\Omega + (\sigma, \mathbb{C}^{-1}\tau)_\Omega + (\sigma, \varepsilon(v))_\Omega}{\|(\tau, v)\|_Y}.$$

Die Variante des tr-dev-div-Lemmas aus Bemerkung 2.37 und Korollar 2.31 zeigen

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\sigma\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2c_{\text{td}}^2 \mu \|\sigma\|_{\mathbb{C}^{-1}}^2 + c_{\text{td}}^2 \|\text{div } \sigma\|_{H^{-1}(\Omega)}^2.$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned}
\|\text{div } \sigma\|_{H^{-1}(\Omega)} &= \sup_{v \in H_D^1(\Omega; \mathbb{R}^n) \setminus \{0\}} \frac{(\sigma, \varepsilon(v))_\Omega}{\|v\|_{H^1(\Omega)}} \\
&= \sup_{(\tau, v) \in Y_1 \setminus \{0\}, \tau=0} \frac{(u, \text{div } \tau)_\Omega + (\sigma, \mathbb{C}^{-1}\tau)_\Omega + (\sigma, \varepsilon(v))_\Omega}{\|(\tau, v)\|_Y} \\
&\leq M.
\end{aligned}$$

Insgesamt folgt die Behauptung durch

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\sigma\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \max\{1, 2c_{\text{td}}^2 \mu\} (\|\sigma\|_{\mathbb{C}^{-1}}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2) + c_{\text{td}}^2 M^2 \\
&\leq (\max\{1, 2c_{\text{td}}^2 \mu\} c_1^2 + c_{\text{td}}^2) M^2.
\end{aligned}$$

■

Satz 6.3 (Kontinuierliche Inf-Sup-Bedingung III) *Es gilt*

$$\frac{\beta_1 \beta_2}{\beta_1 + \beta_2 + (2 + 1/\mu)^{1/2}} \leq \beta = \inf_{x \in S(X)} \sup_{y \in S(Y)} b(x, y),$$

mit β_1 aus Lemma 6.2 und $\beta_2 \geq (\sqrt{2}(1 + (c_{\text{Korn}}(1 + c_F^2))^{1/2}))^{-1}$.

Beweis: Es sei $Y_1 = (H_N(\text{div}, \Omega; \mathbb{S}) \cap \Sigma(\mathcal{T})) \times H_D^1(\Omega; \mathbb{R}^n) \subseteq Y$ wie oben und

$$X_1 := \Sigma \times L^2(\Omega; \mathbb{R}^n) \times \{0\} \times \{0\} \subseteq X,$$

$$X_2 := \{0\} \times \{0\} \times H_N^{-1/2}(\partial\mathcal{T}; \mathbb{R}^n) \times H_D^{1/2}(\partial\mathcal{T}; \mathbb{R}^n) \subseteq X.$$

Die Eigenschaften (3.4) und (3.4) aus Lemma 3.15 sind analog zum Beweis von Satz 4.6 erfüllt. Lemma 6.2 impliziert (3.5). Laut den Lemmas 2.38 und 2.39 gilt

$$1 \leq \beta_2' := \inf_{t \in S(H_N^{-1/2}(\partial\mathcal{T}; \mathbb{R}^n))} \sup_{v \in S(H^1(\mathcal{T}; \mathbb{R}^n))} \langle t, \gamma_0^\mathcal{T} v \rangle_{\partial\mathcal{T}},$$

$$(c_{\text{Korn}}(1 + c_F^2))^{-1/2} \leq \beta_2'' := \inf_{s \in S(H_D^{1/2}(\partial\mathcal{T}; \mathbb{R}^n))} \sup_{\tau \in S(\Sigma(\mathcal{T}))} \langle \gamma_v^\mathcal{T} \tau, s \rangle_{\partial\mathcal{T}}.$$

Gleichung (3.6) aus Lemma 3.15 gilt dann wie in (4.14) aus Satz 4.6 mit

$$\beta_2 \geq (\sqrt{2}(1 + (c_{\text{Korn}}(1 + c_F^2))^{1/2}))^{-1}.$$

Auch hier sind dann alle Voraussetzungen von Lemma 3.15 erfüllt, und daher gilt (A2) mit einer Konstanten

$$\beta \geq \frac{\beta_1 \beta_2}{\beta_1 + \beta_2 + (2 + 1/\mu)^{1/2}} \quad \blacksquare$$

Korollar 6.4 *Für diese Methode folgt (A1) wegen Satz 6.3 und Lemma 5.3, das hier anwendbar ist, da die Räume im Vergleich zur zweiten Methode dieselben sind und die unterschiedlichen Normen in den Beweis nicht eingehen.*

6.2 Diskretisierung und Beweis der diskreten Inf-Sup-Bedingung

Die Diskretisierung erfolgt genau wie im Kapitel 5. Da auch für diese Methode im Beweis der Inf-Sup-Bedingung zur Volumentermen übergegangen werden muss, folgt auch hier das Lemma zur Äquivalenz der Normen.

Lemma 6.5 (a) *Jedes $w_C \in S_D^1(\mathcal{T}; \mathbb{R}^n)$ erfüllt die Normäquivalenz*

$$\|\gamma_0^\mathcal{T} w_C\|_{H_D^{1/2}(\partial\mathcal{T})} \leq \|w_C\|_{H^1(\Omega)} \leq (c_F + 1) \|\gamma_0^\mathcal{T} w_C\|_{H_D^{1/2}(\partial\mathcal{T})}.$$

(b) *Jedes $q_{RT} \in RT_0(\mathcal{T}, \Gamma_N; \mathbb{R}^{n \times n})$ erfüllt die Normäquivalenz*

$$\|\gamma_v^\mathcal{T} q_{RT}\|_{H_N^{-1/2}(\partial\mathcal{T})} \leq \|q_{RT}\|_{H(\text{div})} \leq 2^{1/2}(2h_{\max}/\pi + 1) \|\gamma_v^\mathcal{T} q_{RT}\|_{H_N^{-1/2}(\partial\mathcal{T})}.$$

Beweis: Der Beweis erfolgt ähnlich zu dem für Lemma 4.9 und ist für den eindimensionalen Fall nachzulesen in [CGHW14]. ■

Der Beweis der diskreten Inf-Sup-Bedingung sei wieder auf $n = 2$ beschränkt.

Satz 6.6 (Diskrete Inf-Sup-Bedingung III) *Es gilt*

$$(4h_{\max}^2/9 + 1)^{-1/2}/(2c_2) \leq \beta_h := \inf_{x_h \in \mathcal{S}(X_h)} \sup_{y_h \in \mathcal{S}(Y_h)} b(x_h, y_h).$$

mit λ -unabhängiger Konstante

$$c := \max\{3 + 2c_{\text{tdd}} + c_1(2 + 4\mu c_{\text{tdd}})(1/(2\mu))(c_{\text{Korn}} + 1 + c_{\text{tdd}}), \\ 4\mu c_{\text{tdd}} + c_1(2 + 4\mu c_{\text{tdd}})(1 + c_{\text{tdd}}), \\ c_3 + c_1 c_2(1/(2\mu))(2 + 4\mu c_{\text{tdd}})\},$$

wobei $c_1 := c_F c_{\text{Korn}} + c_{\text{Korn}}$, $c_2 := c_F c_{\text{Korn}} + h_{\max}/3(c_{\text{Korn}} + 1 + c_{\text{tdd}})$ und $c_3 := 1 + 2c_{\text{tdd}} + h_{\max} + 2c_{\text{tdd}} h_{\max}/3$.

Beweis: Die Struktur dieses Beweises folgt der des Beweises zu Satz 4.11.

Schritt 1. Zu gegebenem beliebigen $x_h = (\sigma_0, u_0, q_{RT}, w_C) \in X_h$ definiere $y_h = (\tau_1, \nu_1) \in Y_h$ vermöge

$$\tau_1 := \mathbb{C}^{-1} \sigma_0 - \varepsilon(w_C) + \text{sym}((u_0 - \Pi_0 w_C) \otimes (\bullet - \text{mid}(\mathcal{T}))/2), \\ \nu_1 := -\text{div } q_{RT} + (\sigma_0 - \Pi_0 q_{RT})(\bullet - \text{mid}(\mathcal{T})).$$

Schritt 2. *Behauptung:* Es gilt

$$b(x_h, y_h) = \|\mathbb{C}^{-1} \sigma_0 - \varepsilon(w_C)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 3/4 \|u_0 - \Pi_0 w_C\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ + \|\sigma_0 - \Pi_0 q_{RT}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\text{div } q_{RT}\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Beweis der Behauptung: Aus Schritt 2 des Beweises von Satz 4.11 und der Definition von τ_1 und ν_1 berechnet man, dass

$$\text{div}_{NC} \tau_1 = 3/4 (u_0 - \Pi_0 w_C) \text{ und} \tag{6.3}$$

$$D_{NC} \nu_1 = (\sigma_0 - \Pi_0 q_{RT}). \tag{6.4}$$

Dies ergibt wieder wegen der Orthogonalität von $(\bullet - \text{mid}(\mathcal{T}))$ bzw. $(w_C - \Pi_0 w_C)$ bzw. $(q_{RT} -$

$\Pi_0 q_{RT}$) auf stückweise konstanten Funktionen

$$\begin{aligned}
b(x_h, y_h) &= b(\sigma_0, u_0, q_{RT}, w_C; \tau_1, v_1) \\
&= \int_{\Omega} \sigma_0 : \mathbb{C}^{-1} \tau_1 \, dx + \int_{\Omega} u_0 \cdot \operatorname{div}_{NC} \tau_1 \, dx \\
&\quad + \int_{\Omega} \sigma_0 : \varepsilon_{NC}(v_1) \, dx - \int_{\Omega} w_C \cdot \operatorname{div}_{NC} \tau_1 \, dx \\
&\quad - \int_{\Omega} D w_C : \tau_1 \, dx - \int_{\Omega} q_{RT} : D_{NC} v_1 \, dx - \int_{\Omega} \operatorname{div} q_{RT} \cdot v_1 \, dx \\
&= \int_{\Omega} \mathbb{C}^{-1} \sigma_0 : (\mathbb{C}^{-1} \sigma_0 - \varepsilon(w_C)) \, dx + 3/4 \int_{\Omega} u_0 \cdot (u_0 - \Pi_0 w_C) \, dx \\
&\quad + \int_{\Omega} \sigma_0 : (\sigma_0 - \Pi_0 q_{RT}) \, dx - 3/4 \int_{\Omega} \Pi_0 w_C \cdot (u_0 - \Pi_0 w_C) \, dx \\
&\quad - \int_{\Omega} \varepsilon(w_C) : (\mathbb{C}^{-1} \sigma_0 - \varepsilon(w_C)) \, dx - \int_{\Omega} \Pi_0 q_{RT} : (\sigma_0 - \Pi_0 q_{RT}) \, dx \\
&\quad + \int_{\Omega} \operatorname{div} q_{RT} \cdot \operatorname{div} q_{RT} \, dx.
\end{aligned}$$

Dies entspricht der Behauptung. □

Schritt 3. *Behauptung:* Es gilt $\|y_h\|_Y^2 \leq (1 + 4h_{\max}^2/9) b(x_h, y_h)$.

Beweis der Behauptung: Wieder mit den in Schritt 2 hergeleiteten Darstellungen (6.3) und (6.4) und mit Orthogonalität gilt hier für die neue Norm, dass

$$\begin{aligned}
\|(\tau_1, v_1)\|_Y^2 &= \|\tau_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\operatorname{div}_{NC} \tau_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|D_{NC}(v_1)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&= \|\mathbb{C}^{-1} \sigma_0 - \varepsilon(w_C)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\operatorname{sym}((u_0 - \Pi_0 w_C) \otimes (\bullet - \operatorname{mid}(\mathcal{T}))/2)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\quad + 9/16 \|(u_0 - \Pi_0 w_C)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\quad + \|\operatorname{div} q_{RT}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|(\sigma_0 - \Pi_0 q_{RT})(\bullet - \operatorname{mid}(\mathcal{T}))\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\quad + \|\sigma_0 - \Pi_0 q_{RT}\|_{L^2(\Omega)}^2.
\end{aligned}$$

Mit denselben Argumenten wie bevor folgt

$$\begin{aligned}
\|(\tau_1, v_1)\|_Y^2 &\leq \|\mathbb{C}^{-1} \sigma_0 - \varepsilon(w_C)\|_{L^2(\Omega)}^2 + h_{\max}^2/9 \|u_0 - \Pi_0 w_C\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\quad + 9/16 \|(u_0 - \Pi_0 w_C)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\quad + \|\operatorname{div} q_{RT}\|_{L^2(\Omega)}^2 + 4h_{\max}^2/9 \|\sigma_0 - \Pi_0 q_{RT}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\quad + \|\sigma_0 - \Pi_0 q_{RT}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\leq \max\{3/4 + 4h_{\max}^2/27, 1 + 4h_{\max}^2/9\} b(x_h, y_h) \\
&= (1 + 4h_{\max}^2/9) b(x_h, y_h).
\end{aligned}$$
□

Schritt 4. *Behauptung:*

$$\begin{aligned}
\|w_C\|_{H^1(\Omega)} &\leq (c_F c_{\text{Korn}} + c_{\text{Korn}})((1 + c_{\text{td}})\|\mathbb{C}^{-1} \sigma_0 - \varepsilon(w_C)\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + (c_{\text{Korn}} + 1 + c_{\text{td}})/(2\mu) \|q_{RT} - \sigma_0\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + c_F c_{\text{Korn}}/(2\mu) \|\operatorname{div} q_{RT}\|_{L^2(\Omega)})
\end{aligned}$$

Beweis der Behauptung: Im Fall $\Gamma_N = \emptyset$ definiere $\tilde{q}_{RT} := q_{RT} - \frac{\int_{\Omega} \text{tr}(q_{RT}) dx}{2|\Omega|} I_{2 \times 2}$, falls $\Gamma_N \neq \emptyset$ durch $\tilde{q}_{RT} = q_{RT}$. Satz 2.41 impliziert die Existenz von $a \in H_D^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$ und $b \in H^2(\Omega)$ mit

$$\text{sym } \tilde{q}_{RT} = \mathbb{C}\varepsilon(a) + \text{Curl Curl } b.$$

Es gilt der Satz des Pythagoras

$$\|\text{sym } \tilde{q}_{RT}\|_{\mathbb{C}^{-1}}^2 = \|a\|^2 + \|\text{Curl Curl } b\|_{\mathbb{C}^{-1}}^2,$$

und somit

$$\|a\| \leq \|\text{sym } \tilde{q}_{RT}\|_{\mathbb{C}^{-1}} \quad \text{und} \quad \|\text{Curl Curl } b\|_{\mathbb{C}^{-1}} \leq \|\text{sym } \tilde{q}_{RT}\|_{\mathbb{C}^{-1}}. \quad (6.5)$$

Andererseits gilt die Zerlegung

$$\begin{aligned} \|\text{sym } \tilde{q}_{RT}\|_{\mathbb{C}^{-1}}^2 &= (\text{sym } \tilde{q}_{RT}, \mathbb{C}^{-1}(\mathbb{C}\varepsilon(a) + \text{Curl Curl } b))_{\Omega} \\ &= (\text{sym } \tilde{q}_{RT}, D a)_{\Omega} + (\mathbb{C}^{-1} \text{sym } \tilde{q}_{RT}, \text{Curl Curl } b)_{\Omega}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung und partielle Integration zeigen für den ersten Summanden, dass

$$\begin{aligned} (\text{sym } \tilde{q}_{RT}, D a)_{\Omega} &= (\tilde{q}_{RT}, D a)_{\Omega} - (\text{asym } \tilde{q}_{RT}, D a)_{\Omega} \\ &= -(\text{div } \tilde{q}_{RT}, a)_{\Omega} - (\text{asym } \tilde{q}_{RT}, D a)_{\Omega} \\ &\leq \|\text{div } \tilde{q}_{RT}\|_{L^2(\Omega)} \|a\|_{L^2(\Omega)} + \|\text{asym } \tilde{q}_{RT}\|_{L^2(\Omega)} \|D a\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Friedrichs- und Korn'sche Ungleichung sowie (6.5) zeigen

$$\begin{aligned} \|a\|_{L^2(\Omega)} &\leq c_F \|D a\|_{L^2(\Omega)} \leq c_F c_{\text{Korn}} \|\varepsilon(a)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq c_F c_{\text{Korn}} (1/(2\mu))^{1/2} \|a\| \leq c_F c_{\text{Korn}} (1/(2\mu))^{1/2} \|\text{sym } \tilde{q}_{RT}\|_{\mathbb{C}^{-1}}. \end{aligned}$$

Dies ergibt

$$(\text{sym } \tilde{q}_{RT}, D a)_{\Omega} \leq c_{\text{Korn}} (1/(2\mu))^{1/2} (c_F \|\text{div } \tilde{q}_{RT}\|_{L^2(\Omega)} + \|\text{asym } \tilde{q}_{RT}\|_{L^2(\Omega)}) \|\text{sym } \tilde{q}_{RT}\|_{\mathbb{C}^{-1}}. \quad (6.7)$$

Für den zweiten Summanden der Zerlegung zeigen die Orthogonalität in der Helmholtz-Zerlegung und wieder die Cauchy-Schwarz-Ungleichung, dass

$$\begin{aligned} (\mathbb{C}^{-1} \text{sym } \tilde{q}_{RT}, \text{Curl Curl } b)_{\Omega} &= (\mathbb{C}^{-1} \text{sym } \tilde{q}_{RT} - \varepsilon(w_C), \text{Curl Curl } b)_{\Omega} \\ &\leq \|\mathbb{C}^{-1} \text{sym } \tilde{q}_{RT} - \varepsilon(w_C)\|_{L^2(\Omega)} \|\text{Curl Curl } b\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Für $\Gamma_N = \emptyset$ gilt nach Definition von \tilde{q}_{RT} , dass $\int_{\Omega} \text{tr}(\text{sym } \tilde{q}_{RT}) dx = 0$. Außerdem gilt $\text{tr } \mathbb{C}\varepsilon(a) = (2\mu + 2\lambda) \text{tr}(\varepsilon(a)) = (2\mu + 2\lambda) \text{div } a$ und $\int_{\Omega} \text{div } a dx = \int_{\partial\Omega} a \cdot \nu ds = 0$, also $\int_{\Omega} \text{tr}(\text{Curl Curl } b) dx = 0$. Für $\Gamma_N \neq \emptyset$ gilt $\text{Curl Curl } b = 0$ auf Γ_N . In beiden Fällen lässt sich also das tr-dev-div-Lemma auf die divergenzfreie $H(\text{div}, \Omega; \mathbb{R}^{2 \times 2})$ -Funktion $\text{Curl Curl } b$ anwenden und ergibt mit Korollar 2.31 und (6.5), dass

$$\|\text{Curl Curl } b\|_{L^2(\Omega)} \leq c_{\text{td}} (2\mu)^{1/2} \|\text{Curl Curl } b\|_{\mathbb{C}^{-1}} \leq c_{\text{td}} (2\mu)^{1/2} \|\text{sym } \tilde{q}_{RT}\|_{\mathbb{C}^{-1}},$$

und daher

$$(\mathbb{C}^{-1} \operatorname{sym} \tilde{q}_{RT}, \operatorname{Curl} \operatorname{Curl} b)_{\Omega} \leq c_{\text{td}}(2\mu)^{1/2} \|\mathbb{C}^{-1} \operatorname{sym} \tilde{q}_{RT} - \varepsilon(w_C)\|_{L^2(\Omega)} \|\operatorname{sym} \tilde{q}_{RT}\|_{\mathbb{C}^{-1}}. \quad (6.8)$$

Insgesamt führt die Zerlegung (6.6) mit den Ungleichungen (6.7) und (6.8) und mit der Abschätzung $\|\operatorname{asym} q_{RT}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|q_{RT} - \sigma_0\|_{L^2(\Omega)}^2$ zu

$$\begin{aligned} \|\operatorname{sym} \tilde{q}_{RT}\|_{\mathbb{C}^{-1}} &\leq c_F c_{\text{Korn}}(1/(2\mu))^{1/2} \|\operatorname{div} \tilde{q}_{RT}\|_{L^2(\Omega)} + c_{\text{Korn}}(1/(2\mu))^{1/2} \|\operatorname{asym} \tilde{q}_{RT}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + c_{\text{td}}(2\mu)^{1/2} \|\mathbb{C}^{-1} \operatorname{sym} \tilde{q}_{RT} - \varepsilon(w_C)\|_{L^2(\Omega)} \\ &= c_F c_{\text{Korn}}(1/(2\mu))^{1/2} \|\operatorname{div} q_{RT}\|_{L^2(\Omega)} + c_{\text{Korn}}(1/(2\mu))^{1/2} \|\operatorname{asym} q_{RT}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + c_{\text{td}}(2\mu)^{1/2} \|\mathbb{C}^{-1} \operatorname{sym} \tilde{q}_{RT} - \varepsilon(w_C)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq c_F c_{\text{Korn}}(1/(2\mu))^{1/2} \|\operatorname{div} q_{RT}\|_{L^2(\Omega)} + c_{\text{Korn}}(1/(2\mu))^{1/2} \|q_{RT} - \sigma_0\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + c_{\text{td}}(2\mu)^{1/2} \|\mathbb{C}^{-1} \operatorname{sym} \tilde{q}_{RT} - \varepsilon(w_C)\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Es wird nun gezeigt, dass der Term $\|\mathbb{C}^{-1} \operatorname{sym} \tilde{q}_{RT} - \varepsilon(w_C)\|_{L^2(\Omega)}$ durch $\|\mathbb{C}^{-1} \operatorname{sym} q_{RT} - \varepsilon(w_C)\|_{L^2(\Omega)}$ abgeschätzt werden kann. Für $\Gamma_N \neq \emptyset$ ist diese Abschätzung trivial. Falls $\Gamma_N = \emptyset$, gilt wie oben gezeigt $\int_{\Omega} \operatorname{tr}(\operatorname{sym} \tilde{q}_{RT}) \, dx = 0$. Dies zeigt mit der Abkürzung $c := \frac{\int_{\Omega} \operatorname{tr}(q_{RT}) \, dx}{n|\Omega|}$, also $\tilde{q}_{RT} = q_{RT} - cI_{2 \times 2}$, dass

$$\begin{aligned} \|\mathbb{C}^{-1} \operatorname{sym} q_{RT} - \varepsilon(w_C)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \|\mathbb{C}^{-1} \operatorname{sym} \tilde{q}_{RT} - \varepsilon(w_C)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathbb{C}^{-1} cI_{2 \times 2}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + (\mathbb{C}^{-1} \operatorname{sym} \tilde{q}_{RT} - \varepsilon(w_C), \mathbb{C}^{-1} cI_{2 \times 2})_{\Omega} \\ &= \|\mathbb{C}^{-1} \operatorname{sym} \tilde{q}_{RT} - \varepsilon(w_C)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathbb{C}^{-1} cI_{2 \times 2}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + c/(2\mu + 2\lambda) (\mathbb{C}^{-1} \operatorname{sym} \tilde{q}_{RT} - \varepsilon(w_C), I_{2 \times 2})_{\Omega}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Es gilt aber wegen der Spurfreiheit des deviatorischen Anteiles, dass

$$\begin{aligned} (\mathbb{C}^{-1} \operatorname{sym} \tilde{q}_{RT} - \varepsilon(w_C), I_{2 \times 2})_{\Omega} &= \int_{\Omega} \operatorname{tr}(\mathbb{C}^{-1} \operatorname{sym} \tilde{q}_{RT} - \varepsilon(w_C)) \, dx \\ &= 1/(2\mu) \int_{\Omega} \operatorname{tr}(\operatorname{dev} \operatorname{sym} \tilde{q}_{RT}) \, dx \\ &\quad + 1/(4\lambda + 4\mu) \int_{\Omega} \operatorname{tr}(\operatorname{tr}(\operatorname{sym} \tilde{q}_{RT}) I_{2 \times 2}) \\ &\quad - \int_{\Omega} \operatorname{tr}(\varepsilon(w_C)) \, dx \\ &= 2/(4\lambda + 4\mu) \int_{\Omega} \operatorname{tr}(\operatorname{sym} \tilde{q}_{RT}) - \int_{\Omega} \operatorname{div} w_C \, dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Somit gilt dann mit Dreiecksungleichung und Orthogonalität von symmetrischen und asymmetrischen Matrizen, dass

$$\begin{aligned} \|\mathbb{C}^{-1} \operatorname{sym} \tilde{q}_{RT} - \varepsilon(w_C)\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|\mathbb{C}^{-1} \operatorname{sym} q_{RT} - \varepsilon(w_C)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|\mathbb{C}^{-1} \sigma_0 - \varepsilon(w_C)\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbb{C}^{-1} \operatorname{sym} q_{RT} - \mathbb{C}^{-1} \sigma_0\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|\mathbb{C}^{-1} \sigma_0 - \varepsilon(w_C)\|_{L^2(\Omega)} + 1/(2\mu) \|\operatorname{sym} q_{RT} - \sigma_0\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|\mathbb{C}^{-1} \sigma_0 - \varepsilon(w_C)\|_{L^2(\Omega)} + 1/(2\mu) \|q_{RT} - \sigma_0\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Die Friedrichs- und die Korn'sche Ungleichung zeigen

$$\|w_C\|_{H^1(\Omega)} \leq (c_F c_{\text{Korn}} + c_{\text{Korn}}) \|\varepsilon(w_C)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Insgesamt zeigen Dreiecksungleichung sowie Abschätzungen (6.9) und (6.11), dass

$$\begin{aligned} \|\varepsilon(w_C)\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|\mathbb{C}^{-1} \operatorname{sym} \tilde{q}_{RT} - \varepsilon(w_C)\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbb{C}^{-1} \operatorname{sym} \tilde{q}_{RT}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|\mathbb{C}^{-1} \operatorname{sym} \tilde{q}_{RT} - \varepsilon(w_C)\|_{L^2(\Omega)} + (1/(2\mu))^{1/2} \|\operatorname{sym} \tilde{q}_{RT}\|_{\mathbb{C}^{-1}} \\ &\leq (1 + c_{\text{td}}) \|\mathbb{C}^{-1} \operatorname{sym} \tilde{q}_{RT} - \varepsilon(w_C)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + c_{\text{Korn}}/(2\mu) \|q_{RT} - \sigma_0\|_{L^2(\Omega)} + c_F c_{\text{Korn}}/(2\mu) \|\operatorname{div} q_{RT}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq (1 + c_{\text{td}}) (\|\mathbb{C}^{-1} \sigma_0 - \varepsilon(w_C)\|_{L^2(\Omega)} + 1/(2\mu) \|q_{RT} - \sigma_0\|_{L^2(\Omega)}) \\ &\quad + c_{\text{Korn}}/(2\mu) \|q_{RT} - \sigma_0\|_{L^2(\Omega)} + c_F c_{\text{Korn}}/(2\mu) \|\operatorname{div} q_{RT}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq (1 + c_{\text{td}}) \|\mathbb{C}^{-1} \sigma_0 - \varepsilon(w_C)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + (c_{\text{Korn}} + 1 + c_{\text{td}})/(2\mu) \|q_{RT} - \sigma_0\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + c_F c_{\text{Korn}}/(2\mu) \|\operatorname{div} q_{RT}\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned} \quad \square$$

Schritt 5. *Behauptung*: $\|(\sigma_0, u_0, q_{RT}, w_C)\|_X^2 \lesssim b(x_h, y_h)$

Beweis der Behauptung: Eine analoge Argumentation zu (6.10) zeigt

$$\|\sigma_0 - \tilde{q}_{RT}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\sigma_0 - q_{RT}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Mit dem tr-dev-div-Lemma für \tilde{q}_{RT} folgt

$$\begin{aligned} \|\tilde{q}_{RT}\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq c_{\text{td}}^2 \|\operatorname{dev} \tilde{q}_{RT}\|_{L^2(\Omega)}^2 + c_{\text{td}}^2 \|\operatorname{div} \tilde{q}_{RT}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq c_{\text{td}}^2 (\|\operatorname{dev} \tilde{q}_{RT}\|_{L^2(\Omega)} + \|\operatorname{div} \tilde{q}_{RT}\|_{L^2(\Omega)})^2 \end{aligned}$$

Wegen der Konstruktion von \tilde{q}_{RT} gilt zudem $\operatorname{dev} \tilde{q}_{RT} = \operatorname{dev} q_{RT}$ und $\operatorname{div} \tilde{q}_{RT} = \operatorname{div} q_{RT}$, also insgesamt mit Korollar 2.31 sowie der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} \|\sigma_0\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|\sigma_0 - \tilde{q}_{RT}\|_{L^2(\Omega)} + \|\tilde{q}_{RT}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|\sigma_0 - q_{RT}\|_{L^2(\Omega)} + c_{\text{td}} \|\operatorname{dev} q_{RT}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + c_{\text{td}} \|\operatorname{div} q_{RT}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|\sigma_0 - q_{RT}\|_{L^2(\Omega)} + 2\mu c_{\text{td}} \|\mathbb{C}^{-1} q_{RT}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + c_{\text{td}} \|\operatorname{div} q_{RT}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|\sigma_0 - q_{RT}\|_{L^2(\Omega)} + 2\mu c_{\text{td}} \|\mathbb{C}^{-1} (q_{RT} - \sigma_0)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + 2\mu c_{\text{td}} \|\mathbb{C}^{-1} \sigma_0\|_{L^2(\Omega)} + c_{\text{td}} \|\operatorname{div} q_{RT}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq (1 + c_{\text{td}}) \|\sigma_0 - q_{RT}\|_{L^2(\Omega)} + 2\mu c_{\text{td}} \|\mathbb{C}^{-1} \sigma_0\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + c_{\text{td}} \|\operatorname{div} q_{RT}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq (1 + c_{\text{td}}) \|\sigma_0 - q_{RT}\|_{L^2(\Omega)} + 2\mu c_{\text{td}} \|\mathbb{C}^{-1} \sigma_0 - \varepsilon(w_C)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + 2\mu c_{\text{td}} \|\varepsilon(w_C)\|_{L^2(\Omega)} + c_{\text{td}} \|\operatorname{div} q_{RT}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq (1 + c_{\text{td}}) \|\sigma_0 - q_{RT}\|_{L^2(\Omega)} + 2\mu c_{\text{td}} \|\mathbb{C}^{-1} \sigma_0 - \varepsilon(w_C)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + 2\mu c_{\text{td}} \|w_C\|_{H^1(\Omega)} + c_{\text{td}} \|\operatorname{div} q_{RT}\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Außerdem gilt, siehe Abschätzung (4.19) aus dem Beweis zu Satz 4.11, dass

$$\begin{aligned}
\|\sigma_0 - q_{RT}\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \|(1 - \Pi_0)q_{RT}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\sigma_0 - \Pi_0 q_{RT}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\leq h_{\max}^2/9 \|\operatorname{div} q_{RT}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\sigma_0 - \Pi_0 q_{RT}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\leq (h_{\max}/3 \|\operatorname{div} q_{RT}\|_{L^2(\Omega)} + \|\sigma_0 - \Pi_0 q_{RT}\|_{L^2(\Omega)})^2.
\end{aligned} \tag{6.13}$$

Die Dreiecksungleichung zeigt

$$\begin{aligned}
\|u_0\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|u_0 - \Pi_0 w_C\|_{L^2(\Omega)} + \|\Pi_0 w_C\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \|u_0 - \Pi_0 w_C\|_{L^2(\Omega)} + \|w_C\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \|u_0 - \Pi_0 w_C\|_{L^2(\Omega)} + \|w_C\|_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{6.14}$$

Mit der Dreiecksungleichung und Abschätzung (6.12) folgt

$$\begin{aligned}
\|q_{RT}\|_{H(\operatorname{div})} &\leq \|q_{RT}\|_{L^2(\Omega)} + \|\operatorname{div} q_{RT}\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \|q_{RT} - \sigma_0\|_{L^2(\Omega)} + \|\sigma_0\|_{L^2(\Omega)} + \|\operatorname{div} q_{RT}\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq (2 + c_{\text{td}})\|\sigma_0 - q_{RT}\|_{L^2(\Omega)} + 2\mu c_{\text{td}} \|\mathbb{C}^{-1}\sigma_0 - \varepsilon(w_C)\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + 2\mu c_{\text{td}} \|w_C\|_{H^1(\Omega)} + (1 + c_{\text{td}})\|\operatorname{div} q_{RT}\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{6.15}$$

Zusammengefasst gilt für $x_h = (\sigma_0, u_0, q_{RT}, w_C)$ mit Gleichungen (6.12) bis (6.15), dass

$$\begin{aligned}
\|x_h\|_X &\leq \|\sigma_0\|_{L^2(\Omega)} + \|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|q_{RT}\|_{H(\operatorname{div})} + \|w_C\|_{H^1(\Omega)} \\
&\leq (3 + 2c_{\text{td}})\|\sigma_0 - q_{RT}\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + 4\mu c_{\text{td}} \|\mathbb{C}^{-1}\sigma_0 - \varepsilon(w_C)\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + (2 + 4\mu c_{\text{td}})\|w_C\|_{H^1(\Omega)} \\
&\quad + (1 + 2c_{\text{td}})\|\operatorname{div} q_{RT}\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \|u_0 - \Pi_0 w_C\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq (3 + 2c_{\text{td}})(h_{\max}/3 \|\operatorname{div} q_{RT}\|_{L^2(\Omega)} + \|\sigma_0 - \Pi_0 q_{RT}\|_{L^2(\Omega)}) \\
&\quad + 4\mu c_{\text{td}} \|\mathbb{C}^{-1}\sigma_0 - \varepsilon(w_C)\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + (2 + 4\mu c_{\text{td}})\|w_C\|_{H^1(\Omega)} \\
&\quad + (1 + 2c_{\text{td}})\|\operatorname{div} q_{RT}\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \|u_0 - \Pi_0 w_C\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq (3 + 2c_{\text{td}})\|\sigma_0 - \Pi_0 q_{RT}\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + 4\mu c_{\text{td}} \|\mathbb{C}^{-1}\sigma_0 - \varepsilon(w_C)\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + (2 + 4\mu c_{\text{td}})\|w_C\|_{H^1(\Omega)} \\
&\quad + (1 + 2c_{\text{td}} + h_{\max} + 2c_{\text{td}} h_{\max}/3)\|\operatorname{div} q_{RT}\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \|u_0 - \Pi_0 w_C\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Schritt 4, zusammen mit Gleichung (6.13) ergibt

$$\begin{aligned}
\|w_C\|_{H^1(\Omega)} &\leq (c_F c_{\text{Korn}} + c_{\text{Korn}})(1 + c_{\text{tdd}}) \|\mathbb{C}^{-1} \sigma_0 - \varepsilon(w_C)\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + (c_F c_{\text{Korn}} + c_{\text{Korn}})(1/(2\mu))(c_{\text{Korn}} + 1 + c_{\text{tdd}}) \|\sigma_0 - \Pi_0 q_{RT}\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + (c_F c_{\text{Korn}} + c_{\text{Korn}})(1/(2\mu))(c_F c_{\text{Korn}} + h_{\max}/3(c_{\text{Korn}} + 1 + c_{\text{tdd}})) \\
&\quad \quad \times \|\operatorname{div} q_{RT}\|_{L^2(\Omega)} \\
&= c_1(1 + c_{\text{tdd}}) \|\mathbb{C}^{-1} \sigma_0 - \varepsilon(w_C)\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + c_1(1/(2\mu))(c_{\text{Korn}} + 1 + c_{\text{tdd}}) \|\sigma_0 - \Pi_0 q_{RT}\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + c_1(1/(2\mu))c_2 \|\operatorname{div} q_{RT}\|_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

mit den Konstanten $c_1 := c_F c_{\text{Korn}} + c_{\text{Korn}}$ und $c_2 := c_F c_{\text{Korn}} + h_{\max}/3(c_{\text{Korn}} + 1 + c_{\text{tdd}})$. Dies und die vorige Abschätzung ergibt schließlich mit $c_3 := 1 + 2c_{\text{tdd}} + h_{\max} + 2c_{\text{tdd}}h_{\max}/3$, dass

$$\begin{aligned}
\|x_h\|_X &\leq (3 + 2c_{\text{tdd}} + c_1(2 + 4\mu c_{\text{tdd}})(1/(2\mu))(c_{\text{Korn}} + 1 + c_{\text{tdd}})) \|\sigma_0 - \Pi_0 q_{RT}\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + (4\mu c_{\text{tdd}} + c_1(2 + 4\mu c_{\text{tdd}})(1 + c_{\text{tdd}})) \|\mathbb{C}^{-1} \sigma_0 - \varepsilon(w_C)\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + (c_3 + c_1 c_2(1/(2\mu))(2 + 4\mu c_{\text{tdd}})) \|\operatorname{div} q_{RT}\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \|u_0 - \Pi_0 w_C\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq c(\|\sigma_0 - \Pi_0 q_{RT}\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbb{C}^{-1} \sigma_0 - \varepsilon(w_C)\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \|\operatorname{div} q_{RT}\|_{L^2(\Omega)} + (3/4)^{1/2} \|u_0 - \Pi_0 w_C\|_{L^2(\Omega)}),
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
c &:= \max\{3 + 2c_{\text{tdd}} + c_1(2 + 4\mu c_{\text{tdd}})(1/(2\mu))(c_{\text{Korn}} + 1 + c_{\text{tdd}}), \\
&\quad 4\mu c_{\text{tdd}} + c_1(2 + 4\mu c_{\text{tdd}})(1 + c_{\text{tdd}}), \\
&\quad c_3 + c_1 c_2(1/(2\mu))(2 + 4\mu c_{\text{tdd}})\}.
\end{aligned}$$

Dies ergibt insgesamt

$$\|x_h\|_X^2 \leq 4c^2 b(x_h, y_h).$$

□

Aus den vorhergegangenen Schritten folgt nun, dass für jedes $x_h \in X_h$ ein $y_h \in Y_h$ existiert, sodass $\|x_h\|_X \|y_h\|_Y \leq 2c(1 + 4h_{\max}^2/9)^{1/2} b(x_h, y_h)$. Damit folgt insbesondere, dass für jedes $x_h \in X_h$ der Wert

$$\sup_{y_h \in Y_h} \frac{b(x_h, y_h)}{\|x_h\|_X \|y_h\|_Y} \geq 1/(2c(1 + 4h_{\max}^2/9)^{1/2})$$

unabhängig von x_h nach unten beschränkt ist und somit die Behauptung. ■

Ein zu Lemma 5.8 analoges Lemma beweist auch hier, dass die Nebenbedingung an Y_h in Bezug auf die diskrete Inf-Sup-Bedingung nicht bedacht werden muss.

7 Implementierung

In diesem Kapitel werden die rechnerischen Grundlagen beschrieben, auf denen die Implementation der drei vorgestellten dPG-Methoden beruht. Die Implementation wurde in Matlab vorgenommen für $n = 2$ im Rahmen des AFEM-Software-Paketes [Car09a]. Dazu wurden die zwei Löser `solveLinElastEnergydPG.m` und `solveLinElastL2H1dPG.m` implementiert. Der erste der Löser berechnet die Lösung für die in den Kapiteln 4 und 5 vorgestellten Energie-Methoden mit oder ohne Nebenbedingungen, der zweite für die L^2 - H^1 -Methode aus Kapitel 6. Zudem wurden Routinen `estimateLinElastEnergydPG.m` und `estimateLinElastL2dPG.m` programmiert, die beide zugehörigen Residuums-Fehlerschätzer berechnen.

Die Auswertung der exakten Fehlerterme wurde in den Dateien `error4eDPGLinElastEnergy.m` und `error4eDPGLinElastL2.m` implementiert und konnte größtenteils mit Modifikationen von im AFEM-Paket bestehenden Methoden geschehen. Für die Auswertung der Fehlerterme in $H(\text{div}, \Omega)$ -Normen von $t_0 \in P_0(\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}(N); \mathbb{R}^2)$ bzw. $q_{RT} \in RT_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^{2 \times 2})$ wurde eine von Philipp Bringmann im Rahmen der Bachelorarbeit [Bri12] erstellte Methode genutzt und verändert. Die Methode `dPGLinElast.m` enthält die AFEM-Routine und ruft die oben beschriebenen Funktionen auf. Für die Behandlung verschiedener Randbedingungen in den verschiedenen Komponenten der Lösung wie in dem Beispiel aus Abschnitt 8.5 benötigt, wurden außerdem die Verfeinerungsroutinen des AFEM-Paketes angepasst.

Die in Abschnitt 7.1 beschriebenen Basisfunktionen und die Berechnung der Steifigkeitsmatrix aus Abschnitt 7.2 ist für beide Löser gleich. Die drei Methoden unterscheiden sich allerdings durch die verwendeten Normen und somit durch die Normmatrizen sowie durch die eventuell vorhandene Nebenbedingung. Die zwei Normmatrizen für die drei Methoden werden in Abschnitt 7.3 beschrieben. In Abschnitt 7.4 wird allgemein beschrieben, wie aus gegebener Steifigkeits- und Normmatrix und der rechten Seite die Lösung mit oder ohne Nebenbedingung und damit dann der Fehlerschätzer berechnet wird.

7.1 Basis-Funktionen

In diesem Abschnitt wird die Basiswahl für die Räume X_h und Y_h erläutert. Dabei werden für alle drei Methoden zunächst dieselben Basen für die Räume gewählt, das heißt insbesondere, die Nebenbedingungen “/R” werden in der Basiswahl nicht berücksichtigt. Diese werden für den Ansatzraum erst später, bei der eigentlichen Lösung, durch einen Lagrange-Multiplikator eingebracht und werden für den Testraum laut Lemma 5.8 gar nicht benötigt. Es werden also nun Basen für die Räume $X_h = P_0(\mathcal{T}; \mathbb{S}) \times P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2) \times P_0(\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}(N); \mathbb{R}^2) \times S_D^1(\mathcal{E}; \mathbb{R}^2)$ und $Y_h = \text{sym} RT_0^{NC}(\mathcal{T}; \mathbb{R}^{2 \times 2}) \times P_1(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)$ genannt. Als Anzahl der Freiheitsgrade bezeichnet man hier die Dimension des diskreten Ansatzraumes, $\text{ndof} = \dim(X_h)$.

Für ein Dreieck $T = \text{conv}\{P_1^T, P_2^T, P_3^T\}$ sind die baryzentrischen Koordinaten $\lambda_1^T, \lambda_2^T, \lambda_3^T \in P_1(T)$ definiert durch $\lambda_k^T(P_\ell^T) = \delta_{k\ell}$, $k, \ell = 1, 2, 3$, fortgesetzt durch 0 auf den übrigen Dreiecken. Für jedes $z \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}(D)$ sind die nodalen Basisfunktionen $\varphi_z \in S_D^1(\mathcal{T})$ definiert über $\varphi_z(z) = 1, \varphi_z(P) =$

0 für $P \in \mathcal{N} \setminus \{z\}$. Es sei $\{e_1, e_2\}$ die Standardbasis für \mathbb{R}^2 und $\{S_1, S_2, S_3\}$ eine Basis für \mathbb{S} , wobei

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für ein Dreieck $T \in \mathcal{T}$ (bzw. eine Seite $E \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}(N)$), sei die charakteristische Funktion $\chi_T \in P_0(\mathcal{T})$ (bzw. $\chi_E \in P_0(\mathcal{E})$), die den Wert 1 auf T (bzw. E) und den Wert 0 auf allen anderen Dreiecken (bzw. Seiten) hat.

Bei den Räumen, deren Basisfunktionen sich eindeutig je einem Dreieck zuordnen lassen, wird so sortiert, dass jeweils alle Funktionen, die zu einem Dreieck assoziiert sind, direkt nebeneinander stehen. Da die gewählten Basisfunktionen jeweils nur ein Dreieck als Träger haben, ist so gewährleistet, dass die Normmatrix und die Blöcke der Steifigkeitsmatrix eine Blockstruktur haben. Dies ist besonders wichtig für die Normmatrix, da für diese dann eine Invertierung durch Invertierung der Blöcke geschehen kann. Diese Vorbemerkungen erlauben nun die Definition einer Basis von Y_h und X_h wie folgt, wobei $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_K\}$, $\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}(N) = \{E_1, \dots, E_M\}$ und $\mathcal{N} \setminus \mathcal{N}(D) = \{z_1, \dots, z_L\}$.

Zunächst folgt die Basiswahl für $Y_h = \text{sym} RT_0^{NC}(\mathcal{T}; \mathbb{R}^{2 \times 2}) \times P_1(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)$. Für $P_1(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)$ wird als Basis die komponentenweisen baryzentrischen Koordinaten je Dreieck gewählt.

$$P_1(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2) = \text{span}(\{\lambda_1^{T_1} e_1, \lambda_2^{T_1} e_1, \lambda_3^{T_1} e_1, \lambda_1^{T_1} e_2, \lambda_2^{T_1} e_2, \lambda_3^{T_1} e_2, \dots, \lambda_1^{T_K} e_1, \lambda_2^{T_K} e_1, \lambda_3^{T_K} e_1, \lambda_1^{T_K} e_2, \lambda_2^{T_K} e_2, \lambda_3^{T_K} e_2\}).$$

Als Basis für den Raum $\text{sym} RT_0^{NC}(\mathcal{T}; \mathbb{R}^{2 \times 2})$ werden die symmetrischen Anteile von Basisfunktionen aus $RT_0^{NC}(\mathcal{T}; \mathbb{R}^{2 \times 2})$ gewählt. Eine Funktion aus $RT_0^{NC}(\mathcal{T}; \mathbb{R}^{2 \times 2})$ ist auf jedem Dreieck durch $A + b \otimes x$ für konstante $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $b \in \mathbb{R}^2$ gegeben. Eine Basis der symmetrischen Anteile der konstanten Matrizen ist genau $\{S_1, S_2, S_3\}$, eine Basis für $\text{sym}(\{b \otimes \text{id} | b \in \mathbb{R}^2\})$ ist $\{\text{sym}(e_1 \otimes \text{id} |_T), \text{sym}(e_2 \otimes \text{id} |_T)\}$. Durch eine Verschiebung mit $\text{mid}(T)$, die nicht notwendig ist, sich aber für die Berechnungen als nützlich erweisen wird, ergibt sich so eine Basis für $\text{sym} RT_0^{NC}(\mathcal{T}; \mathbb{R}^{2 \times 2})$, mit der Abkürzung $f = \text{id} - \text{mid}(\mathcal{T})$, durch

$$\text{sym} RT_0^{NC}(\mathcal{T}; \mathbb{R}^{2 \times 2}) = \text{span}(\{\chi_{T_1} S_1, \chi_{T_1} S_2, \chi_{T_1} S_3, \chi_{T_1} \text{sym}(e_1 \otimes f), \chi_{T_1} \text{sym}(e_2 \otimes f), \dots, \chi_{T_K} S_1, \chi_{T_K} S_2, \chi_{T_K} S_3, \chi_{T_K} \text{sym}(e_1 \otimes f), \chi_{T_K} \text{sym}(e_2 \otimes f)\}).$$

Die Basen für die Anteile von $X_h = P_0(\mathcal{T}; \mathbb{S}) \times P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2) \times P_0(\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}(N); \mathbb{R}^2) \times S_D^1(\mathcal{E}; \mathbb{R}^2)$ werden wie folgt gewählt. Für die stückweise konstanten Funktionen $P_0(\mathcal{T}; \mathbb{S})$, $P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)$ und $P_0(\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}(N); \mathbb{R}^2)$ aus X_h , nehme die komponentenweisen charakteristischen Funktionen, d.h.

$$\begin{aligned} P_0(\mathcal{T}; \mathbb{S}) &= \text{span}(\{\chi_{T_1} S_1, \chi_{T_1} S_2, \chi_{T_1} S_3, \dots, \chi_{T_K} S_1, \chi_{T_K} S_2, \chi_{T_K} S_3\}), \\ P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2) &= \text{span}(\{\chi_{T_1} e_1, \chi_{T_1} e_2, \dots, \chi_{T_K} e_1, \chi_{T_K} e_2\}), \\ P_0(\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}(N); \mathbb{R}^2) &= \text{span}(\{\chi_{E_1} e_1, \chi_{E_1} e_2, \dots, \chi_{E_M} e_1, \chi_{E_M} e_2\}). \end{aligned}$$

Schließlich werden für die Spuren $S_D^1(\mathcal{E}; \mathbb{R}^2)$ die Spuren der komponentenweisen nodalen Basisfunktionen gewählt, also

$$S_D^1(\mathcal{E}; \mathbb{R}^2) = \text{span}(\{\gamma_0^T \varphi_{z_1} e_1, \gamma_0^T \varphi_{z_1} e_2, \dots, \gamma_0^T \varphi_{z_L} e_1, \gamma_0^T \varphi_{z_L} e_2\}).$$

7.2 Steifigkeitsmatrix

Die Steifigkeitsmatrix ist die Matrix, die die Berechnung der Bilinearform beschreibt. Sind allgemein Basen $\{\Phi_1, \dots, \Phi_m\}$ von X_h und $\{\Psi_1, \dots, \Psi_\ell\}$ von Y_h gegeben, so ist sie definiert als $A = (b(\Phi_j, \Psi_k))_{kj} \in \mathbb{R}^{\ell \times m}$. Ist dann $y_h = \sum_{k=1}^{\ell} y_k \Psi_k \in Y_h$ und $x_h = \sum_{j=1}^m x_j \Phi_j \in X_h$ mit den Koeffizientenvektoren $x = (x_j) \in \mathbb{R}^m$ und $y = (y_k) \in \mathbb{R}^\ell$, so gilt

$$b(x_h, y_h) = y^\top A x.$$

Durch die Produktstruktur der Räume $X_h = P_0(\mathcal{T}; \mathbb{S}) \times P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2) \times P_0(\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}(N); \mathbb{R}^2) \times S_D^1(\mathcal{E}; \mathbb{R}^2)$ und $Y_h = \text{sym } RT_0^{NC}(\mathcal{T}; \mathbb{R}^{2 \times 2}) \times P_1(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)$ besteht eine 2×4 -Blockstruktur der Steifigkeitsmatrix. Einige Blöcke sind von vornherein 0, etwa der zu $P_0(\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}(N); \mathbb{R}^2)$ und $\text{sym } RT_0^{NC}(\mathcal{T}; \mathbb{R}^{2 \times 2})$ gehörige Block, da die gegebene Bilinearform keinen Term hat, der diese Anteile von Ansatz- und Testraum verbindet. So ergibt sich die Struktur

$$A = \begin{bmatrix} B & C & 0 & D \\ F & 0 & G & 0 \end{bmatrix}.$$

In den folgenden Abschnitten wird die Berechnung der einzelnen Blöcke jeweils vorgestellt.

7.2.1 Block B

Dieser Block enthält die Anteile der Bilinearform für $\sigma_0 \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{S})$ und $\tau_1 \in \text{sym } RT_0^{NC}(\mathcal{T}; \mathbb{R}^{2 \times 2})$, also $(\sigma_0, \mathbb{C}^{-1} \tau_1)_\Omega$. Das folgende Lemma fasst die Berechnung zusammen.

Lemma 7.1 Für $T, \tilde{T} \in \mathcal{T}$ und $j, k \in \{1, 2, 3\}$, $\ell \in \{1, 2\}$ gilt

$$(\chi_T S_j, \mathbb{C}^{-1} \chi_{\tilde{T}} S_k)_\Omega = \begin{cases} |T| \mu_1, & \text{falls } T = \tilde{T} \text{ und } (j = k = 1 \text{ oder } j = k = 3), \\ |T| / \mu, & \text{falls } T = \tilde{T} \text{ und } j = k = 2, \\ |T| \mu_2, & \text{falls } T = \tilde{T} \text{ und } j, k \neq 2, j + k = 4, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

und

$$(\chi_T S_j, \mathbb{C}^{-1} \chi_{\tilde{T}} \text{sym}(e_\ell \otimes (x - \text{mid}(\tilde{T})))_\Omega = 0,$$

wobei $\mu_1 = (2\mu + \lambda) / (4\mu^2 + 4\mu\lambda)$ und $\mu_2 = -\lambda / (4\mu^2 + 4\mu\lambda)$.

Diese Berechnung zieht eine Blockdiagonalstruktur des Blockes B selbst nach sich,

$$B = \begin{bmatrix} B(T_1) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & B(T_K) \end{bmatrix}.$$

Dabei sind die $B(T) \in \mathbb{R}^{5 \times 3}$ die lokalen Blöcke zum Dreieck T . Lemma 7.1 ergibt eine explizite Darstellung von $B(T)$ durch

$$B(T) = |T| \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & \mu_2 \\ 0 & 1/\mu & 0 \\ \mu_2 & 0 & \mu_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Beweis des Lemmas:

Da χ_T Träger T und $\chi_{\tilde{T}}$ Träger \tilde{T} hat, können $(\chi_T S_j, \mathbb{C}^{-1} \chi_{\tilde{T}} S_k)_\Omega$ und $(\chi_T S_j, \mathbb{C}^{-1} \chi_{\tilde{T}} \text{sym}(e_\ell \otimes (x - \text{mid}(\tilde{T})))_\Omega$ offensichtlich nur für $T = \tilde{T}$ von 0 verschieden sein. Sei also im Folgenden $T = \tilde{T}$. Mithilfe von Lemma 2.30 folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{-1} S_1 &= 1/(2\mu) S_1 + \mu_2 I_{2 \times 2}, \\ \mathbb{C}^{-1} S_2 &= 1/(2\mu) S_2, \\ \mathbb{C}^{-1} S_3 &= 1/(2\mu) S_3 + \mu_2 I_{2 \times 2}. \end{aligned}$$

Zusammengefasst gilt dann

$$S_j : \mathbb{C}^{-1} S_k = \begin{cases} 1/(2\mu) + \mu_2, & \text{falls } (j=1, k=1), (j=3, k=3), \\ \mu_2, & \text{falls } (j=1, k=3), (j=3, k=1), \\ 1/\mu, & \text{falls } (j=2, k=2), \\ 0, & \text{falls } (j=1, k=2), (j=2, k=1), \\ & (j=2, k=3), (j=3, k=2). \end{cases} \quad (7.1)$$

Insgesamt folgt wegen $1/(2\mu) + \mu_2 = \frac{2\mu+2\lambda-\lambda}{4\mu^2+4\mu\lambda} = \mu_1$,

$$\begin{aligned} (\chi_T S_j, \mathbb{C}^{-1} \chi_T S_k)_\Omega &= \int_\Omega \chi_T S_j : \mathbb{C}^{-1} \chi_T S_k \, dx \\ &= \int_T S_j : \mathbb{C}^{-1} S_k \, dx \\ &= (S_j : \mathbb{C}^{-1} S_k) |T|. \end{aligned}$$

Mit der Abkürzung $y := x - \text{mid}(T)$ gilt, dass

$$\text{sym}(e_1 \otimes y) = \text{sym} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2/2 \\ y_2/2 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

und

$$\text{sym}(e_2 \otimes y) = \text{sym} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & y_1/2 \\ y_1/2 & y_2 \end{pmatrix}. \quad (7.3)$$

Da $\mathbb{C}^{-1} S_j$ konstant ist, ist $\mathbb{C}^{-1} S_j : \text{sym}(e_\ell \otimes y)$ eine Linearkombination von y_1 und y_2 mit konstanten Koeffizienten. Da aber per Definition von y gilt, dass $\int_T y_1 \, dx = \int_T y_2 \, dx = 0$, folgt

$$(\chi_T S_j, \mathbb{C}^{-1} \chi_T \text{sym}(e_\ell \otimes (x - \text{mid}(T))))_\Omega = \int_T \mathbb{C}^{-1} S_j : \text{sym}(e_\ell \otimes y) \, dx = 0. \quad \blacksquare$$

7.2.2 Block C

Der Block C beinhaltet den Beitrag, den die Bilinearform von den Termen $u_0 \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)$ und $\tau_1 \in \text{sym} RT_0^{NC}(\mathcal{T}; \mathbb{R}^{2 \times 2})$ enthält, das ist $(u_0, \text{div}_{NC} \tau_1)_\Omega$. Die Berechnung dieses Beitrages erfolgt im folgenden Lemma.

Lemma 7.2 Für $T, \tilde{T} \in \mathcal{T}$, $j, \ell \in \{1, 2\}$ und $k \in \{1, 2, 3\}$ gilt

$$(\chi_T e_j, \text{div}_{NC}(\chi_{\tilde{T}} S_k))_\Omega = 0,$$

und

$$\begin{aligned} & (\chi_T e_j, \text{div}_{NC}(\chi_{\tilde{T}} \text{sym}(e_\ell \otimes (x - \text{mid}(\tilde{T}))))_\Omega \\ &= |T| \begin{cases} 3/2 \delta_{j\ell}, & \text{falls } T = \tilde{T}, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \end{aligned}$$

Wie schon für den vorigen Block, folgt daraus eine Blockstruktur von C für lokale Matrizen $C(T) \in \mathbb{R}^{5 \times 2}$,

$$C = \begin{bmatrix} C(T_1) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & C(T_K) \end{bmatrix}.$$

Die lokalen Beiträge stellen sich dabei wegen Lemma 7.2 dar als

$$C(T) = |T| \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 3/2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{bmatrix}.$$

Beweis des Lemmas: Auch hier kann wegen der Träger der Funktionen sofort der Fall $T \neq \tilde{T}$ aus den Betrachtungen ausgeschlossen werden. Da S_k eine Konstante ist, gilt $\text{div}_{NC}(\chi_T S_k) = 0$ und somit der erste Teil der Behauptung.

Mit einer Rechnung wie in Schritt 2 des Beweises zu Satz 4.11 gilt

$$\text{div}_{NC} \text{sym}(e_\ell \otimes (x - \text{mid}(T))) = 3/2 e_\ell \tag{7.4}$$

also die Behauptung. ■

7.2.3 Block D

Block D der Steifigkeitsmatrix besteht aus Einträgen der Bilinearform von $s_1 \in S_D^1(\mathcal{E}; \mathbb{R}^2)$ und $\tau_1 \in \text{sym} RT_0^{NC}(\mathcal{T}; \mathbb{R}^{2 \times 2})$ gegeben durch $-\langle \gamma_\nu^\mathcal{T} \tau_1, s_1 \rangle_{\partial\mathcal{T}}$, die sich wie unten beschrieben berechnen lassen.

Lemma 7.3 Für $z \in \mathcal{N}$, $\tilde{T} \in \mathcal{T}$, $j, \ell \in \{1, 2\}$ und $k \in \{1, 2, 3\}$ gilt

$$\langle \gamma_0^\mathcal{T} \varphi_z e_j, \gamma_v^\mathcal{T} \chi_{\tilde{T}} S_k \rangle_{\partial\mathcal{T}} = |\tilde{T}| \begin{cases} \partial_1 \varphi_z|_{\tilde{T}} & \text{falls } z \in \mathcal{N}(\tilde{T}) \text{ und } j = k, \\ \partial_2 \varphi_z|_{\tilde{T}} & \text{falls } z \in \mathcal{N}(\tilde{T}) \text{ und } j = k + 1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

und

$$\langle \gamma_0^\mathcal{T} \varphi_z e_j, \gamma_v^\mathcal{T} \chi_{\tilde{T}} \text{sym}(e_\ell \otimes (x - \text{mid}(\tilde{T}))) \rangle_{\partial\mathcal{T}} = |\tilde{T}| \begin{cases} 1/2 \delta_{j\ell}, & \text{falls } z \in \mathcal{N}(\tilde{T}), \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

Da die nodalen Basisfunktionen φ_z globale Stetigkeitsbedingungen erfüllen und jeder Knoten z im Allgemeinen Ecknoten mehrerer Dreiecke ist, kann man hier nicht von einer Blockstruktur des Blockes D ausgehen. Die lokale Steifigkeitsmatrix $D(T) \in \mathbb{R}^{5 \times 6}$ für ein Dreieck $T \in \mathcal{T} = \text{conv}\{P_1, P_2, P_3\}$, deren Spalten in dieser Reihenfolge für die nodalen Basisfunktionen $\varphi_{P_1} e_1, \varphi_{P_2} e_1, \varphi_{P_3} e_1, \varphi_{P_1} e_2, \varphi_{P_2} e_2$ und $\varphi_{P_3} e_2$ stehen, hat dann die Form

$$D(T) = -|T| \begin{bmatrix} g_1^\top & 0 \\ g_2^\top & g_1^\top \\ 0 & g_2^\top \\ h^\top & 0 \\ 0 & h^\top \end{bmatrix},$$

für $g_j = (\partial_j \lambda_1, \partial_j \lambda_2, \partial_j \lambda_3)^\top \in \mathbb{R}^3$ für $j = 1, 2$ die Vektoren, die die Ableitungen bzw. Gradienten der nodalen Basisfunktionen des Dreiecks enthalten und $h := (1/2, 1/2, 1/2)^\top \in \mathbb{R}^3$.

Beweis des Lemmas: Da $\chi_{\tilde{T}}$ als Träger nur \tilde{T} hat, ist

$$\langle \gamma_0^\mathcal{T} \varphi_z e_j, \gamma_v^\mathcal{T} \chi_{\tilde{T}} S_k \rangle_{\partial\mathcal{T}} = \langle \varphi_z|_{\partial\tilde{T}} e_j, S_k \nu_{\tilde{T}} \rangle_{\partial\tilde{T}}.$$

Mit partieller Integration folgt

$$\langle \gamma_0^\mathcal{T} \varphi_z e_j, \gamma_v^\mathcal{T} \chi_{\tilde{T}} S_k \rangle_{\partial\mathcal{T}} = \int_{\tilde{T}} D(\varphi_z e_j) : S_k \, dx + \int_{\tilde{T}} \varphi_z e_j \cdot \text{div}_{NC} S_k \, dx. \quad (7.5)$$

Da $\text{div}_{NC} S_k = 0$ und $\nabla \varphi_z|_{\tilde{T}} = 0$ falls $z \notin \mathcal{N}(\tilde{T})$ folgt somit der erste Teil der Behauptung wegen

$$\begin{aligned} \langle \gamma_0^\mathcal{T} \varphi_z e_j, \gamma_v^\mathcal{T} \chi_{\tilde{T}} S_k \rangle_{\partial\mathcal{T}} &= |\tilde{T}| D(\varphi_z e_j)|_{\tilde{T}} : S_k \, dx \\ &= |\tilde{T}| (e_j \otimes \nabla \varphi_z|_{\tilde{T}}) : S_k. \end{aligned}$$

Für den zweiten Teil der Behauptung wird wieder eine partielle Integration durchgeführt. Diese

ergibt mit $\int_{\tilde{T}} x - \text{mid}(\tilde{T}) \, dx = 0$, Gleichung (7.4) und Lemma 2.42, dass

$$\begin{aligned}
& \langle \gamma_0^T \varphi_z e_j, \gamma_v^T \chi_{\tilde{T}} \text{sym}(e_\ell \otimes (x - \text{mid}(\tilde{T}))) \rangle_{\partial \mathcal{T}} \\
&= \int_{\tilde{T}} D(\varphi_z e_j) : \text{sym}(e_\ell \otimes (x - \text{mid}(\tilde{T}))) \, dx + \int_{\tilde{T}} \varphi_z e_j \cdot \text{div}_{NC} \text{sym}(e_\ell \otimes (x - \text{mid}(\tilde{T}))) \, dx \\
&= \int_{\tilde{T}} \varphi_z e_j \cdot \text{div}_{NC} \text{sym}(e_\ell \otimes (x - \text{mid}(\tilde{T}))) \, dx \\
&= 3/2 \delta_{j\ell} \int_{\tilde{T}} \varphi_z \, dx \\
&= 3/2 \delta_{j\ell} \frac{2|\tilde{T}|}{3!} \\
&= 1/2 \delta_{j\ell} |\tilde{T}|.
\end{aligned}$$

■

7.2.4 Block F

In diesem Block befinden sich die Einträge, die von $\sigma_0 \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{S})$ und $\nu_1 \in P_1(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)$ in der Bilinearform erzeugt werden. Die Berechnung dieser Terme, gegeben durch $(\sigma_0, \varepsilon_{NC}(\nu_1))_\Omega$, ist wieder in nachstehendem Lemma zu finden.

Lemma 7.4 Für $T, \tilde{T} \in \mathcal{T}$, $j, \ell \in \{1, 2, 3\}$ und $k \in \{1, 2\}$ gilt

$$(\chi_T S_j, \varepsilon_{NC}(\lambda_\ell^{\tilde{T}} e_k))_\Omega = \begin{cases} |T| \partial_1 \lambda_\ell^T, & \text{falls } T = \tilde{T} \text{ und } j = k, \\ |T| \partial_2 \lambda_\ell^T, & \text{falls } T = \tilde{T} \text{ und } j = k + 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da hier beide Basisfunktionen als Träger nur ein Dreieck haben, ergibt sich erneut eine Blockstruktur

$$F = \begin{bmatrix} F(T_1) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & F(T_K) \end{bmatrix}.$$

Die Blöcke $F(T) \in \mathbb{R}^{6 \times 3}$ sind hierbei gegeben durch

$$F(T) = |T| \begin{bmatrix} g_1 & g_2 & 0 \\ 0 & g_1 & g_2 \end{bmatrix},$$

wieder für $g_j = (\partial_j \lambda_1, \partial_j \lambda_2, \partial_j \lambda_3)^\top \in \mathbb{R}^3$ für $j = 1, 2$.

Beweis des Lemmas: Nach Ausschluss des Falles $T \neq \tilde{T}$ gilt aufgrund der Symmetrie von S_j , dass

$$S_j : \varepsilon_{NC}(\lambda_\ell^T e_k) = S_j : D_{NC}(\lambda_\ell^T e_k).$$

Insbesondere ist dann

$$(\chi_T S_j, \varepsilon_{NC}(\lambda_\ell^T e_k))_\Omega = |T| S_j : (e_k \otimes \nabla \lambda_\ell^T),$$

und die Behauptung folgt mit derselben Rechnung wie in Lemma 7.3.

■

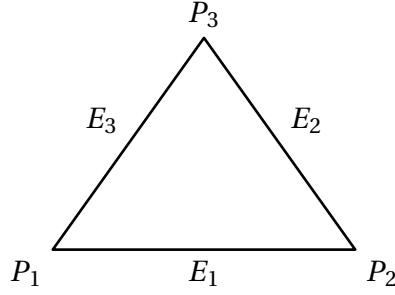


Abbildung 5: Lokale Nummerierung von Knoten und Kanten eines Dreiecks

7.2.5 Block G

Der Block G enthält die Beiträge $-\langle \gamma_0^\mathcal{T} \nu_1, t_0 \rangle_{\partial\mathcal{T}}$ der Bilinearform von $t_0 \in P_0(\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}(N); \mathbb{R}^2)$ und $\nu_1 \in P_1(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)$, berechnet wie im folgenden Lemma angegeben.

Lemma 7.5 Für $E \in \mathcal{E}$, $\tilde{T} \in \mathcal{T}$, $j, k \in \{1, 2\}$ und $\ell \in \{1, 2, 3\}$ gilt

$$\langle \gamma_0^\mathcal{T} \lambda_\ell^{\tilde{T}} e_j, \chi_E e_k \rangle_{\partial\mathcal{T}} = \begin{cases} \varrho_{\tilde{T}, E} |E|/2, & \text{falls } P_\ell^{\tilde{T}} \in \mathcal{N}(E) \text{ und } E \in \mathcal{E}(\tilde{T}) \text{ und } j = k, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Auch hier kann nicht von einer Blockstruktur des Blockes G ausgegangen werden. Für ein Dreieck $T = \text{conv}\{P_1, P_2, P_3\} \in \mathcal{T}$ sind die Seiten E_1, E_2, E_3 in der Nummerierung gegeben wie in Abbildung 5. Dann lautet die lokale Steifigkeitsmatrix $G(T) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$, deren Spalten in dieser Reihenfolge die Basisfunktionen $\chi_{E_1} e_1, \chi_{E_2} e_1, \chi_{E_3} e_1, \chi_{E_1} e_2, \chi_{E_2} e_2, \chi_{E_3} e_2$ repräsentieren,

$$G(T) = -1/2 \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix},$$

mit

$$e = \begin{bmatrix} \varrho_{T, E_1} |E_1| & 0 & \varrho_{T, E_3} |E_3| \\ \varrho_{T, E_1} |E_1| & \varrho_{T, E_2} |E_2| & 0 \\ 0 & \varrho_{T, E_2} |E_2| & \varrho_{T, E_3} |E_3| \end{bmatrix}.$$

Beweis: Es ist $\chi_E = 0$ auf allen Kanten ungleich E , somit ist $\int_{\tilde{E}} \chi_E e_k \cdot \lambda_\ell^{\tilde{T}} e_j \, ds = 0$ für jedes $\tilde{E} \neq E$. Daher gilt wegen des Trägers von $\lambda_\ell^{\tilde{T}}$ und vermöge der Einbettung $P_0(\mathcal{E}; \mathbb{R}^2) \hookrightarrow H^{-1/2}(\partial\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)$ aus Abschnitt 2.5, dass

$$\begin{aligned} \langle \gamma_0^\mathcal{T} \lambda_\ell^{\tilde{T}} e_j, \chi_E e_k \rangle_{\partial\mathcal{T}} &= \int_{\partial\tilde{T}} \varrho_{\tilde{T}, E} \chi_E e_k \cdot \lambda_\ell^{\tilde{T}} e_j \, ds \\ &= \int_E \varrho_{\tilde{T}, E} \chi_E e_k \cdot \lambda_\ell^{\tilde{T}} e_j \, ds. \end{aligned}$$

Weiterhin ist $\lambda_\ell^{\tilde{T}} e_j = 0$ auf allen Kanten, die nicht Kanten von \tilde{T} sind und die nicht den Knoten $P_\ell^{\tilde{T}}$ enthalten, somit ist für $P_k^{\tilde{T}} \notin \mathcal{N}(E)$ oder $E \notin \mathcal{E}(\tilde{T})$ das Kantenintegral $\int_E \chi_E e_k \cdot \lambda_\ell^{\tilde{T}} e_j \, ds = 0$. Es

gilt dann also für $P_k^{\tilde{T}} \in \mathcal{N}(E)$ und $E \in \mathcal{E}(\tilde{T})$, dass

$$\langle \gamma_0^{\mathcal{T}} \lambda_{\ell}^{\tilde{T}} e_j, \chi_E e_k \rangle_{\partial \mathcal{T}} = \delta_{jk} \varrho_{\tilde{T}, E} \int_E \lambda_{\ell}^{\tilde{T}} ds.$$

Da $\lambda_{\ell}^{\tilde{T}}$ entlang der Kante E affin ist mit Wert 0 in einem und Wert 1 im anderen Endpunkt der Kante, berechnet sich $\int_E \lambda_{\ell}^{\tilde{T}} ds$ als eindimensionales Linienintegral durch

$$\int_E \lambda_{\ell}^{\tilde{T}} ds = |E|/2.$$

Dies schließt den Beweis ab. ■

7.3 Normmatrix

Die sogenannte Normmatrix des Raumes Y_h bezüglich einer Basis $\{\Psi_1, \dots, \Psi_{\ell}\}$ beschreibt die Norm dieses Raumes. Genauer ist sie definiert als diejenige Matrix $M \in \mathbb{R}^{\ell \times \ell}$, sodass für jedes $y_h \in Y_h$ mit der Darstellung $y_h = \sum_{k=1}^{\ell} y_k \Psi_k$ für y_h und den Koeffizientenvektor $y \in \mathbb{R}^{\ell}$ gilt, dass

$$y^{\top} M y = \|y_h\|_Y^2.$$

Aus dieser Definition folgt sofort, dass die Normmatrix symmetrisch und positiv definit ist.

Der Raum Y_h aus dieser Arbeit ist gegeben als Produktraum $Y_h = \text{sym } RT_0^{NC}(\mathcal{T}; \mathbb{R}^{2 \times 2}) \times P_1(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)$, und die Norm $\|(\tau_1, v_1)\|_Y^2$ durch $\|\tau_1\|_{H(\text{div}, \mathbb{C}^{-1})}^2 + \|v_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v_1\|_{NC}^2$ für die Energiemethoden bzw. durch $\|\tau_1\|_{H(\text{div})}^2 + \|v_1\|_{H^1(\Omega)}^2$ für die L^2 - H^1 -Methode. Durch diese “Entkopplung” der Normen auf den Teilen des Produktraumes ergibt sich sofort eine Blockstruktur der Normmatrix M durch

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix}.$$

Hierbei ist M_1 die Normmatrix von $\text{sym } RT_0^{NC}(\mathcal{T}; \mathbb{R}^{2 \times 2})$ und M_2 die Normmatrix von $P_1(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)$. Für beide vorgestellten Methoden sind $\text{sym } RT_0^{NC}(\mathcal{T}; \mathbb{R}^{2 \times 2})$ und $P_1(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)$ Hilberträume. Eine elementare Rechnung zeigt allgemein für die Normmatrix M_H eines endlichdimensionalen Hilbertraumes H mit Skalarprodukt $(\bullet, \bullet)_H$ und Basis $\{\Psi_1, \dots, \Psi_{\ell}\}$, dass

$$M_H = (m_{jk})_{j,k=1,\dots,\ell} = ((\Psi_j, \Psi_k)_H)_{j,k=1,\dots,\ell}.$$

Da die gewählten Basisfunktionen von $\text{sym } RT_0^{NC}(\mathcal{T}; \mathbb{R}^{2 \times 2})$ und $P_1(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)$ als Träger jeweils nur genau ein Dreieck haben, ergibt sich auch eine Blockstruktur von M_1 und M_2 selbst durch

$$M_1 = \begin{bmatrix} M_1(T_1) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & M_1(T_K) \end{bmatrix}$$

und

$$M_2 = \begin{bmatrix} M_2(T_1) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & M_2(T_K) \end{bmatrix}.$$

Für ein $T \in \mathcal{T}$ sind hierbei $M_1(T) \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ bzw. $M_2(T) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ die lokalen Normmatrizen, d.h. die Normmatrizen von $\text{sym} RT_0^{NC}(T; \mathbb{R}^{2 \times 2})$ bzw. $P_1(T; \mathbb{R}^2)$. In den folgenden zwei Abschnitten wird die Berechnung dieser lokalen Normmatrizen vorgestellt.

Bemerkung 7.6 In Satz 7.9 wird später gezeigt, dass für die Lösung des diskreten Problem es die Invertierung der Normmatrix notwendig ist. Die oben gezeigte Blockstruktur ermöglicht die Invertierung von M über die Invertierung der lokalen Normmatrizen. Dies bedeutet, egal wie viele Dreiecke in der Triangulierung auftreten, für die Invertierung der Normmatrix müssen nur Matrizen der maximalen Größe 6×6 invertiert werden. Diese kann man dann insbesondere parallel berechnen.

7.3.1 Erste und Zweite Methode

Sei für diesen Abschnitt ein $T = \text{conv}\{P_1, P_2, P_3\} \in \mathcal{T}$ fest. Der Übersichtlichkeit halber wird auf den Index T bei den baryzentrischen Koordinaten λ_j^T , $j = 1, 2, 3$, jeweils verzichtet.

Zunächst wird $M_1(T)$ berechnet. Das Skalarprodukt auf $\text{sym} RT_0^{NC}(\mathcal{T}; \mathbb{R}^{2 \times 2})$ in den Energiemethoden ist gegeben durch $(\bullet, \bullet)_{\mathbb{C}^{-1}} + (\text{div}_{NC} \bullet, \text{div}_{NC} \bullet)_{\Omega}$. Die Matrix $M_1(T)$ lässt sich also aufspalten in die zugehörigen Anteile $M_1(T) = M_1^{\mathbb{C}^{-1}}(T) + M_1^{\text{div}}(T)$. Für die gegebene Basis gilt zur Berechnung dann dieses Lemma.

Lemma 7.7 Für $j, k \in \{1, 2, 3\}$ und $\ell \in \{1, 2\}$ gilt mit $\mu_1 = (2\mu + \lambda)/(4\mu^2 + 4\mu\lambda)$ und $\mu_2 = -\lambda/(4\mu^2 + 4\mu\lambda)$, dass

$$(\chi_T S_j, \chi_T S_k)_{\mathbb{C}^{-1}} = |T| \begin{cases} \mu_1, & \text{falls } j = k = 1 \text{ oder } j = k = 3, \\ 1/\mu, & \text{falls } j = k = 2, \\ \mu_2, & \text{falls } j, k \neq 2, j + k = 4, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

und

$$(\chi_T S_j, \chi_T \text{sym}(e_\ell \otimes (x - \text{mid}(T))))_{\mathbb{C}^{-1}} = 0.$$

Außerdem gilt für $j, k \in \{1, 2\}$ und mit $s_p := (P_1(p) - P_2(p), P_2(p) - P_3(p), P_3(p) - P_1(p))^T \in \mathbb{R}^3$ für $p \in \{1, 2\}$, dass

$$\begin{aligned} & (\chi_T \text{sym}(e_j \otimes (x - \text{mid}(T))), \chi_T \text{sym}(e_k \otimes (x - \text{mid}(T))))_{\mathbb{C}^{-1}} \\ &= |T|/36 \begin{cases} \mu_1 |s_1|^2 + 1/(4\mu) |s_2|^2, & \text{falls } j = k = 1, \\ (\mu_2 + 1/(4\mu)) s_1 \cdot s_2, & \text{falls } j \neq k, \\ \mu_1 |s_2|^2 + 1/(4\mu) |s_1|^2, & \text{falls } j = k = 2, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Weiterhin gilt für $j, k \in \{1, 2, 3\}$ und $\ell \in \{1, 2\}$, dass

$$(\operatorname{div}_{NC} \chi_T S_j, \operatorname{div}_{NC} \chi_T S_k)_\Omega = 0,$$

und

$$(\operatorname{div}_{NC} \chi_T S_j, \operatorname{div}_{NC} \chi_T \operatorname{sym}(e_\ell \otimes (x - \operatorname{mid}(T))))_\Omega = 0,$$

und für $j, k \in \{1, 2\}$, dass

$$(\operatorname{div}_{NC} \chi_T \operatorname{sym}(e_j \otimes (x - \operatorname{mid}(T))), \operatorname{div}_{NC} \chi_T \operatorname{sym}(e_k \otimes (x - \operatorname{mid}(T))))_\Omega = 9/4 \delta_{jk} |T|.$$

Es ergibt sich also mit der gegebenen Sortierung der Basisfunktionen die lokale Normmatrix des $(\bullet, \bullet)_{\mathbb{C}^{-1}}$ -Anteiles des Skalarproduktes als

$$M_1^{\mathbb{C}^{-1}}(T) = |T|/36 \begin{bmatrix} 36\mu_1 & 0 & 36\mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 36/\mu & 0 & 0 & 0 \\ 36\mu_2 & 0 & 36\mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_1 |s_1|^2 + 1/(4\mu) |s_2|^2 & (\mu_2 + 1/(4\mu)) s_1 \cdot s_2 \\ 0 & 0 & 0 & (\mu_2 + 1/(4\mu)) s_1 \cdot s_2 & \mu_1 |s_2|^2 + 1/(4\mu) |s_1|^2 \end{bmatrix}.$$

Für die lokale Normmatrix des Divergenz-Anteiles gilt

$$M_1^{\operatorname{div}}(T) = |T| \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9/4 \end{bmatrix}.$$

Beweis: Die ersten beiden Aussage gelten sofort nach Lemma 7.1. Wegen $\mathbb{C}^{-1}A = 1/(2\mu)A + \mu_2 \operatorname{tr}(A)I_{2 \times 2}$ für jedes $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ und den Darstellungen (7.2) und (7.3) gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{-1} \operatorname{sym}(e_1 \otimes y) &= \begin{pmatrix} 1/(2\mu)y_1 + \mu_2 y_1 & 1/(4\mu)y_2 \\ 1/(4\mu)y_2 & \mu_2 y_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mu_1 y_1 & 1/(4\mu)y_2 \\ 1/(4\mu)y_2 & \mu_2 y_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{-1} \operatorname{sym}(e_2 \otimes y) &= \begin{pmatrix} \mu_2 y_2 & 1/(4\mu)y_1 \\ 1/(4\mu)y_1 & 1/(2\mu)y_2 + \mu_2 y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mu_2 y_2 & 1/(4\mu)y_1 \\ 1/(4\mu)y_1 & \mu_1 y_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Daher gilt

$$\operatorname{sym}(e_1 \otimes y) : \mathbb{C}^{-1} \operatorname{sym}(e_1 \otimes y) = \mu_1 y_1^2 + 1/(4\mu) y_2^2,$$

sowie

$$\text{sym}(e_1 \otimes y) : \mathbb{C}^{-1} \text{sym}(e_2 \otimes y) = \mu_2 y_1 y_2 + 1/(4\mu) y_1 y_2,$$

und

$$\text{sym}(e_2 \otimes y) : \mathbb{C}^{-1} \text{sym}(e_2 \otimes y) = \mu_1 y_2^2 + 1/(4\mu) y_1^2.$$

Es gilt für $p, q \in \{1, 2\}$, dass

$$\begin{aligned} \int_T y(p)y(q) \, dx &= \int_T (x - \text{mid}(T))(p)(x - \text{mid}(T))(q) \, dx \\ &= \int_T (x - \text{mid}(T))(p)x(q) \, dx \\ &= \int_T (x(p)x(q) - \text{mid}(T)(p)x(q)) \, dx \\ &= \int_T x(p)x(q) \, dx - |T| \text{mid}(T)(p) \text{mid}(T)(q). \end{aligned}$$

Wegen $x = \lambda_1(x)P_1 + \lambda_2(x)P_2 + \lambda_3(x)P_3$ und mit Lemma 2.42 gilt

$$\begin{aligned} \int_T x(p)x(q) &= \sum_{k=1}^3 P_k(p)P_k(q) \int_T \lambda_k^2 \, dx + \sum_{k,\ell=1,2,3,k \neq \ell} P_k(p)P_\ell(q) \int_T \lambda_k \lambda_\ell \, dx \\ &= |T|/6 \sum_{k=1}^3 P_k(p)P_k(q) + |T|/12 \sum_{k,\ell=1,2,3,k \neq \ell} P_k(p)P_\ell(q). \end{aligned}$$

Somit gilt insgesamt wegen $\text{mid}(T) = 1/3(P_1 + P_2 + P_3)$, dass

$$\begin{aligned} \int_T y(p)y(q) \, dx &= |T|/6 \sum_{k=1}^3 P_k(p)P_k(q) + |T|/12 \sum_{k,\ell=1,2,3,k \neq \ell} P_k(p)P_\ell(q) \\ &\quad - |T|/9 \left(\sum_{k=1}^3 P_k(p)P_k(q) + \sum_{k,\ell=1,2,3,k \neq \ell} P_k(p)P_\ell(q) \right) \\ &= |T|/18 \sum_{k=1}^3 P_k(p)P_k(q) - |T|/36 \sum_{k,\ell=1,2,3,k \neq \ell} P_k(p)P_\ell(q) \\ &= 1/36 |T| \left(2 \sum_{k=1}^3 P_k(p)P_k(q) - \sum_{k,\ell=1,2,3,k \neq \ell} P_k(p)P_\ell(q) \right). \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt dann wegen

$$\begin{aligned} s(p) \cdot s(q) &= (P_1(p) - P_2(p))(P_1(q) - P_2(q)) \\ &\quad + (P_2(p) - P_3(p))(P_2(q) - P_3(q)) \\ &\quad + (P_3(p) - P_1(p))(P_3(q) - P_1(q)) \\ &= P_1(p)P_1(q) + P_2(p)P_2(q) - P_2(p)P_1(q) - P_1(p)P_2(q) \\ &\quad + P_2(p)P_2(q) + P_3(p)P_3(q) - P_3(p)P_2(q) - P_2(p)P_3(q) \\ &\quad + P_3(p)P_3(q) + P_1(p)P_1(q) - P_1(p)P_3(q) - P_3(p)P_1(q) \\ &= 2 \sum_{k=1}^3 P_k(p)P_k(q) - \sum_{k,\ell=1,2,3,k \neq \ell} P_k(p)P_\ell(q). \end{aligned}$$

Für die Berechnungen des Divergenz-Anteils stellt man zunächst fest, dass $\text{div}_{NC} \chi_T S_j = 0$. Die letzte Aussage folgt mit $\text{div}_{NC} \chi_T \text{sym}(e_j \otimes y) = 3/2 e_j \chi_T$, was in Schritt 2 zum Beweis von Satz 4.11 bewiesen wird. ■

Nun wird die Matrix $M_2(T)$ betrachtet. Auf $P_1(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)$ ist das Skalarprodukt gegeben durch $(\bullet, \bullet)_\Omega + (\mathcal{D}_{NC}(\bullet), \mathcal{D}_{NC}(\bullet))_\mathbb{C}$. Dementsprechend wird auch hier die zugehörige Zerlegung $M_2(T) = M_2^{L^2}(T) + M_2^D(T)$ benutzt.

Lemma 7.8 Für $j, k \in \{1, 2\}$ und $\ell, m \in \{1, 2, 3\}$ gilt

$$(\lambda_\ell e_j, \lambda_m e_k)_T = |T|/12 \begin{cases} 2\delta_{jk}, & \text{falls } \ell = m, \\ \delta_{jk}, & \text{falls } \ell \neq m. \end{cases}$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} & (\mathcal{D}_{NC}(\lambda_\ell e_j), \mathcal{D}_{NC}(\lambda_m e_k))_\mathbb{C} \\ &= |T| \begin{cases} (2\mu + \lambda) \partial_1 \lambda_\ell \partial_1 \lambda_m + 2\mu \partial_2 \lambda_\ell \partial_2 \lambda_m, & \text{falls } j = k = 1 \\ \lambda \partial_1 \lambda_\ell \partial_2 \lambda_m, & \text{falls } j = 1, k = 2, \\ \lambda \partial_2 \lambda_\ell \partial_1 \lambda_m, & \text{falls } j = 2, k = 1 \\ (2\mu + \lambda) \partial_2 \lambda_\ell \partial_2 \lambda_m + 2\mu \partial_1 \lambda_\ell \partial_1 \lambda_m, & \text{falls } j = k = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Durch diese Rechnung ergibt sich mit der Notation

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

die Matrix

$$M_2^{L^2}(T) = |T|/12 \begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix}$$

sowie

$$M_2^D(T) = |T| \begin{bmatrix} (2\mu + \lambda) g_1 g_1^\top + 2\mu g_2 g_2^\top & \lambda g_1 g_2^\top \\ \lambda g_2 g_1^\top & (2\mu + \lambda) g_2 g_2^\top + 2\mu g_1 g_1^\top \end{bmatrix}$$

für $g_j = (\partial_j \lambda_1, \partial_j \lambda_2, \partial_j \lambda_3)^\top \in \mathbb{R}^3$ für $j = 1, 2$.

Beweis: Die erste Aussage folgt sofort mit $(\lambda_\ell, \lambda_\ell)_\Omega = |T|/6$ und $(\lambda_\ell, \lambda_m)_\Omega = |T|/12$ für $\ell \neq m$.

Es gilt

$$\mathcal{D}_{NC}(\lambda_\ell e_j) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \partial_1 \lambda_\ell & \partial_2 \lambda_\ell \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & \text{falls } j = 1, \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \partial_1 \lambda_\ell & \partial_2 \lambda_\ell \end{pmatrix}, & \text{falls } j = 2, \end{cases}$$

also

$$\mathbb{C}D_{NC}(\lambda_m e_k) = \begin{cases} \begin{pmatrix} (2\mu + \lambda)\partial_1 \lambda_m & 2\mu\partial_2 \lambda_m \\ 0 & \lambda\partial_1 \lambda_m \end{pmatrix}, & \text{falls } k = 1, \\ \begin{pmatrix} \lambda\partial_2 \lambda_m & 0 \\ 2\mu\partial_1 \lambda_m & (2\mu + \lambda)\partial_2 \lambda_m \end{pmatrix}, & \text{falls } k = 2. \end{cases}$$

Zusammen ergibt das

$$D_{NC}(\lambda_\ell e_j) : \mathbb{C}D_{NC}(\lambda_m e_k) = \begin{cases} (2\mu + \lambda)\partial_1 \lambda_\ell \partial_1 \lambda_m + 2\mu\partial_2 \lambda_\ell \partial_2 \lambda_m, & \text{falls } j = k = 1 \\ \lambda\partial_1 \lambda_\ell \partial_2 \lambda_m, & \text{falls } j = 1, k = 2, \\ \lambda\partial_2 \lambda_\ell \partial_1 \lambda_m, & \text{falls } j = 2, k = 1 \\ (2\mu + \lambda)\partial_2 \lambda_\ell \partial_2 \lambda_m + 2\mu\partial_1 \lambda_\ell \partial_1 \lambda_m, & \text{falls } j = k = 2. \end{cases}$$

Die Behauptung folgt nach Integration. ■

7.3.2 Dritte Methode

Für die L^2 - H^1 -Methode und den Teil $M_1(T)$ ist das Skalarprodukt auf $\text{sym } RT_0^{NC}(\mathcal{T}; \mathbb{R}^{2 \times 2})$ durch $(\bullet, \bullet)_\Omega + (\text{div}_{NC} \bullet, \text{div}_{NC} \bullet)_\Omega$ gegeben. Es wird erneut die Normmatrix in die entsprechenden Teile geteilt durch $M_1(T) = M_1^{L^2}(T) + M_1^{\text{div}}(T)$. Hierbei ist die Matrix $M_1^{\text{div}}(T)$ des Divergenz-Anteils genau dieselbe wie für die erste Methode. Die Matrix $M_1^{L^2}(T)$ ergibt sich als Spezialfall derjenigen der ersten Methode durch $\mathbb{C} = \text{id}$, also $\mu = 1/2$ und $\lambda = 0$. Dies ergibt $\mu_1 = 1$ und $\mu_2 = 0$. Insgesamt führt dies zu

$$M_1^{L^2}(T = |T|) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/36(|s_1|^2 + 1/2|s_2|^2) & 1/36(1/2s_1 \cdot s_2) \\ 0 & 0 & 0 & 1/36(1/2s_1 \cdot s_2) & 1/36(|s_2|^2 + 1/2|s_1|^2) \end{bmatrix}$$

und

$$M_1^{\text{div}}(T) = |T| \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9/4 \end{bmatrix}.$$

Für $P_1(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)$ und somit $M_2(T)$ ist das Skalarprodukt für diese Methode $(\bullet, \bullet)_\Omega + (D_{NC} \bullet, D_{NC} \bullet)_\Omega$. Mit der Aufspaltung $M_2(T) = M_2^{L^2}(T) + M_2^D(T)$ ist $M_2^{L^2}(T)$ genau dieselbe Matrix wie für die erste

Methode. Die Matrix $M_2^D(T)$ ergibt sich erneut als Spezialfall derjenigen aus Lemma 7.8 für $\mu = 1/2$ und $\lambda = 0$. Damit lauten die lokalen Normmatrizen für diese Methode

$$M_2^{L^2}(T) = |T|/12 \begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix}$$

sowie

$$M_2^D(T) = |T| \begin{bmatrix} gg^\top & 0 \\ 0 & gg^\top \end{bmatrix}$$

für $g = (g_1, g_2) \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ die Matrix, die die Gradienten der nodalen Basisfunktionen enthält.

7.4 Löser und Fehlerschätzer

Für diesen Abschnitt wird angenommen, dass die Steifigkeitsmatrix A , die Normmatrix M und die rechte Seite $d = (F(\Psi_k)) \in \mathbb{R}^\ell$ für eine beliebige Methode bezüglich einer Basis $\{\Phi_1, \dots, \Phi_m\}$ von X_h und $\{\Psi_1, \dots, \Psi_\ell\}$ von Y_h gegeben sind. Zunächst wird die Situation betrachtet, in der keinerlei Nebenbedingungen an X_h und Y_h auftreten, also genau die Konstellation der ersten Methode.

Der folgende Satz beschreibt, wie die Lösung der praktischen dPG-Methode (Problem 5) aus diesen Daten berechnet werden kann.

Satz 7.9 *Es sei $x_h \in X_h$ mit $x_h = \sum_{j=1}^m x_j \Phi_j$, $x = (x_j) \in \mathbb{R}^m$ gegeben. Dann gilt*

$$x_h \in \operatorname{argmin}_{\xi_h \in X_h} \|F - b(\xi_h, \bullet)\|_{Y_h^\star}$$

genau dann, wenn

$$(A^\top M^{-1} A)x = A^\top M^{-1} d.$$

Beweis: Zunächst wird beobachtet, dass wegen der Nichtnegativität der Dualnorm gilt, dass

$$\begin{aligned} x_h &\in \operatorname{argmin}_{\xi_h \in X_h} \|F - b(\xi_h, \bullet)\|_{Y_h^\star} \\ \Leftrightarrow x_h &\in \operatorname{argmin}_{\xi_h \in X_h} \|F - b(\xi_h, \bullet)\|_{Y_h^\star}^2. \end{aligned}$$

Sei $\xi_h \in X_h$, $\xi_h = \sum_{j=1}^m \xi_j \Phi_j$, $\xi = (\xi_j) \in \mathbb{R}^m$ beliebig. Es wird nun der Term $\|F - b(\xi_h, \bullet)\|_{Y_h^\star}^2$ berechnet. Es gilt

$$\|F - b(\xi_h, \bullet)\|_{Y_h^\star}^2 = \sup_{y_h \in Y_h, \|y_h\|_Y=1} (F(y_h) - b(\xi_h, y_h))^2.$$

Ist $y_h = \sum_{k=1}^\ell y_k \Psi_k$, $y = (y_k) \in \mathbb{R}^\ell$ so gilt per Konstruktion des Lastvektors d und der Steifigkeitsmatrix gerade $F(y_h) = y^\top d$ und $b(\xi_h, y_h) = y^\top A\xi$. Außerdem ist $\|y_h\|_Y^2 = y^\top M y$. Somit gilt

$$\|F - b(\xi_h, \bullet)\|_{Y_h^\star}^2 = \sup_{y \in \mathbb{R}^\ell, y^\top M y=1} (y^\top (d - A\xi))^2.$$

Die Lösung dieser Extremalaufgabe $\sup_y (y^\top c)^2$, $c := (d - A\xi)$ unter der Nebenbedingung $\varphi^{-1}(0)$, $\varphi(y) := y^\top My - 1$ kann mit der Multiplikator-Regel von Lagrange [For11, S. 114] bestimmt werden. Die Zielfunktion $f(y) := (y^\top c)^2$ hat als Gradienten $\nabla f(y) = 2c$. Die Ableitung der Funktion für die Nebenbedingung ist $\nabla \varphi(y) = 2My$. Die Multiplikator-Regel besagt nun, dass für eine Extremalstelle \tilde{y} der Aufgabe gilt, dass $\nabla f(\tilde{y}) = \lambda \nabla \varphi(\tilde{y})$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$, d.h.

$$c = \lambda M \tilde{y}. \quad (7.6)$$

Da die stetige Funktion f ihr Maximum auf dem Kompaktum $\varphi^{-1}(0)$ annimmt, ist diese Bedingung dann auch hinreichend für die Maximierung. Andererseits erfüllt \tilde{y} die Nebenbedingung, also

$$\tilde{y}^\top M \tilde{y} = 1. \quad (7.7)$$

Setzt man Gleichung (7.6) in Gleichung (7.7) ein, erhält man $\tilde{y}^\top c = \lambda$. Da aber $\tilde{y}^\top c$ genau die Wurzel des Maximums der Funktion unter der Nebenbedingung repräsentiert, gilt

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^\ell, y^\top My = 1} f(y) = \lambda^2.$$

Andererseits ist M positiv definit und symmetrisch, also invertierbar mit symmetrischer Inverser, und wegen Gleichung (7.6) gilt $\lambda \tilde{y} = M^{-1}c$, eingesetzt in Gleichung (7.7) ergibt dies $\lambda^2 = c^\top M^{-1}c$. Dies führt zu

$$\max_{y \in \mathbb{R}^\ell, y^\top My = 1} (\tilde{y}^\top c)^2 = \lambda^2 = c^\top M^{-1}c.$$

Insbesondere

$$\|F - b(\xi_h, \bullet)\|_{Y_h^*}^2 = (d - A\xi)^\top M^{-1}(d - A\xi).$$

Ein Ausmultiplizieren der Faktoren ergibt

$$\|F - b(\xi_h, \bullet)\|_{Y_h^*}^2 = \xi^\top (A^\top MA)\xi - 2(d^\top M^{-1}A)\xi + d^\top M^{-1}d.$$

Einfache Umformungen und ein Standardresultat zur Optimierung quadratischer Funktionen ergeben dann

$$\begin{aligned} x_h &\in \operatorname{argmin}_{\xi_h \in X_h} \|F - b(\xi_h, \bullet)\|_{Y_h^*}^2 \\ &\Leftrightarrow x \in \operatorname{argmin}_{\xi \in \mathbb{R}^m} \xi^\top (A^\top MA)\xi - 2(d^\top M^{-1}A)\xi + d^\top M^{-1}d \\ &\Leftrightarrow x \in \operatorname{argmin}_{\xi \in \mathbb{R}^m} 1/2 \xi^\top (A^\top MA)\xi - (d^\top M^{-1}A)\xi \\ &\Leftrightarrow (A^\top MA)x = (d^\top M^{-1}A)^\top \\ &\Leftrightarrow (A^\top MA)x = A^\top M^{-1}d. \end{aligned}$$

■

Für die Beschreibung der zweiten und dritten Methode sei $\Lambda : X_h \rightarrow \mathbb{R}$ ein lineares Funktional, das die Nebenbedingung in X_h durch $\Lambda(x_h) = 0$ beschreibt. Das heißt, hier wird minimiert über dem Raum $\tilde{X}_h := X_h \cap \Lambda^{-1}(0)$. Analog zur Norm- und Steifigkeitsmatrix definiert man eine Matrix für die Nebenbedingung durch $L := ((\Lambda(\Phi_j))_{j=1, \dots, m})^\top$. Die Lösung der praktischen dPG-Methode unter dieser Nebenbedingung lässt sich wie folgt berechnen.

Satz 7.10 Es sei $x_h \in \tilde{X}_h$ mit $x_h = \sum_{j=1}^m x_j \Phi_j$, $x = (x_j) \in \mathbb{R}^m$ gegeben. Dann gilt

$$x_h \in \operatorname{argmin}_{\xi_h \in \tilde{X}_h} \|F - b(\xi_h, \bullet)\|_{Y_h^*}$$

genau dann, wenn für ein $z \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{pmatrix} A^\top M^{-1} A & L \\ L^\top & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^\top M^{-1} d \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7.8)$$

Beweis: Per Definition der Matrix L und der Linearität von Λ gilt $x_h \in \tilde{X}_h$, genau dann wenn $L^\top x = 0$, da

$$L^\top x = \sum_{j=1}^m L_j x_j = \sum_{j=1}^m \Lambda(\Phi_j) x_j = \Lambda\left(\sum_{j=1}^m x_j \Phi_j\right) = \Lambda(x_h) = 0.$$

Analog zum Beweis von Satz 7.9 gilt, dass

$$\begin{aligned} x_h &\in \operatorname{argmin}_{\xi_h \in \tilde{X}_h} \|F - b(\xi_h, \bullet)\|_{Y_h^*}^2 \\ &\Leftrightarrow x \in \operatorname{argmin}_{\xi \in \mathbb{R}^m, L^\top \xi = 0} \xi^\top (A^\top M A) \xi - 2(d^\top M^{-1} A) \xi + d^\top M^{-1} d \\ &\Leftrightarrow x \in \operatorname{argmin}_{\xi \in \mathbb{R}^m, L^\top \xi = 0} 1/2 \xi^\top (A^\top M A) \xi - (d^\top M^{-1} A) \xi. \end{aligned}$$

Auch hier wird die Lagrange-Multiplikator-Regel zur Lösung dieser Minimierung unter Nebenbedingungen genutzt. Dies ergibt

$$(A^\top M A)x - A^\top M^{-1} d = -zL$$

für den Lagrange-Multiplikator $z \in \mathbb{R}$ und $L^\top x = 0$. Diese beiden Gleichungen zusammen sind äquivalent zum System (7.8). ■

Bemerkung 7.11 (Fehlerschätzer global und lokal) Der Beweis zu Satz 7.9 liefert sofort die Formel zur Berechnung des Fehlerschätzers $\eta^2 = \|F - b(x_h, \bullet)\|_{Y_h^*}^2 = (d - Ax)^\top M^{-1} (d - Ax)$.

Mit den lokalen Normmatrizen $M_1(T)$ und $M_2(T)$ der Blöcke M_1 und M_2 aus Abschnitt 7.3 lassen sich außerdem lokale Normmatrizen definieren durch

$$M(T) = \begin{bmatrix} M_1(T) & 0 \\ 0 & M_2(T) \end{bmatrix}.$$

Es sei $\{\Psi_1, \dots, \Psi_\ell\}$ die gewählte Basis von Y_h mit der Eigenschaft, dass für jedes $k \in \{1, \dots, \ell\}$ ein $\tilde{T} \in \mathcal{T}$ existiert, sodass $\operatorname{supp} \Psi_k \subseteq \tilde{T}$. Die in Abschnitt 7.1 gewählte Basis von Y_h erfüllt diese Eigenschaft. Für jedes $T \in \mathcal{T}$, bezeichne mit $I(T) \subseteq \{1, \dots, \ell\}$ die Indizes der Basisfunktionen, die nur auf T definiert sind, das heißt

$$I(T) := \{k \in \{1, \dots, \ell\} \mid \operatorname{supp} \Psi_k \subseteq T\}.$$

Für einen Vektor $v \in \mathbb{R}^\ell$ bezeichne noch $v_T := (v_k)_{k \in I(T)}$, und es sei

$$Y_h(T) := \text{span}\{\Psi_k \mid k \in I(T)\}.$$

So kann man für jedes $T \in \mathcal{T}$ einen lokalen Schätzerterm definieren und analog zum globalen Fehlerschätzer berechnen durch

$$\eta^2(T) := \|F - b(x_h, \cdot)\|_{Y_h(T)^\star}^2 = (d - Ax)_T M(T)^{-1} (d - Ax)_T.$$

Aufgrund der Blockstruktur der (inversen) Normmatrix und wegen $Y_h = \bigcup_{T \in \mathcal{T}} Y_h(T)$ und der Disjunktheit der $Y_h(T)$ gilt dann

$$\eta^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}} \eta^2(T).$$

In den numerischen Experimenten aus Kapitel 8 wird dieser Term zur adaptiven Verfeinerung benutzt. Der Standard-AFEM-Algorithmus, der dazu benutzt wurde, ist im Folgenden kurz wiederholt [CGHW14].

Algorithmus 1 AFEM

Input: Reguläre Anfangstriangulierung \mathcal{T}_0 und Bulk-Parameter $0 < \theta \leq 1$

for $\ell = 0, 1, 2, \dots$ **do**

Solve. Berechnen der Lösung x_ℓ des diskreten Problemes auf \mathcal{T}_ℓ .

Estimate. Berechnen der lokalen Terme des Fehlerschätzers $\{\eta_\ell^2(T)\}_{T \in \mathcal{T}_\ell}$ und des globalen Fehlerschätzers $\eta^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}} \eta^2(T)$.

Mark. Wählen einer Menge $\mathcal{M}_\ell \subseteq \mathcal{T}_\ell$ minimaler Kardinalität $|\mathcal{M}_\ell|$ mit

$$\theta \sum_{T \in \mathcal{T}_\ell} \eta_\ell^2(T) \leq \sum_{T \in \mathcal{M}_\ell} \eta_\ell^2(T).$$

Refine. Generieren einer regulären Traingulierung $\mathcal{T}_{\ell+1}$ minimaler Kardinalität, die Verfeinerung von \mathcal{T}_ℓ ist mit $\mathcal{M}_\ell \subseteq \mathcal{T}_\ell \setminus \mathcal{T}_{\ell+1}$.

end for

Output: Folge von Triangulierungen \mathcal{T}_ℓ und Lösungen x_ℓ und Fehlerschätzern η_ℓ .

7.5 Skalierung

In der implementierten Software werden vor dem Lösen noch zwei Skalierungen vorgenommen, eine bezüglich der Lamé-Parameter und die andere bezüglich des Gebietes. Diese Skalierung wird in den folgenden beiden Abschnitten auf der Ebene der klassischen Formulierung gerechtfertigt.

7.5.1 Skalierung der Lamé-Parameter

Für die Berechnungen kann o.B.d.A. $\mu = 1/2$ angenommen werden. Um dies zu erkennen, wird die klassische Formulierung herangezogen.

$$\begin{aligned} \text{Zu } f, u_D, g, \mu, \lambda \text{ suche } u, \sigma \text{ mit} \\ -\operatorname{div} \sigma = f \quad \text{auf } \Omega, \\ \sigma = 2\mu \varepsilon(u) + \lambda \operatorname{tr}(\varepsilon(u)) I_{2 \times 2} \quad \text{auf } \Omega, \\ u = u_D \quad \text{auf } \Gamma_D, \\ \sigma \nu = g \quad \text{on } \Gamma_N. \end{aligned}$$

Dieses System ist aufgrund der Linearität von ε und der Spur äquivalent zum System

$$\begin{aligned} \text{Zu } f, u_D, g, \mu, \lambda \text{ suche } u, \sigma \text{ mit} \\ -\operatorname{div} \sigma = f \quad \text{auf } \Omega, \\ \sigma = \varepsilon(2\mu u) + \lambda/(2\mu) \operatorname{tr}(\varepsilon(2\mu u)) I_{2 \times 2} \quad \text{auf } \Omega, \\ 2\mu u = 2\mu u_D \quad \text{auf } \Gamma_D, \\ \sigma \nu = g \quad \text{on } \Gamma_N. \end{aligned}$$

Insgesamt ist es also durch die Substitutionen $\tilde{u} = 2\mu u$, $\tilde{u}_D = 2\mu u_D$, $\tilde{\mu} = 1/2$ und $\tilde{\lambda} = \lambda/(2\mu)$ möglich, das System

$$\begin{aligned} \text{Zu } f, \tilde{u}_D, g, \tilde{\mu}, \tilde{\lambda} \text{ suche } \tilde{u}, \sigma \text{ mit} \\ -\operatorname{div} \sigma = f \quad \text{auf } \Omega, \\ \sigma = 2\tilde{\mu} \varepsilon(\tilde{u}) + \tilde{\lambda} \operatorname{tr}(\varepsilon(\tilde{u})) I_{2 \times 2} \quad \text{auf } \Omega, \\ \tilde{u} = \tilde{u}_D \quad \text{auf } \Gamma_D, \\ \sigma \nu = g \quad \text{on } \Gamma_N, \end{aligned}$$

zu lösen und anschließend für die Lösung \tilde{u} die Resubstitution $u = (1/2\mu)\tilde{u}$ durchzuführen. Im Kontext der vorgestellten dPG-Methoden bilden die Komponenten u_0 und s_1 der Lösung $(\sigma_0, u_0, t_0, s_1) \in X_h$ zwei Approximationen der Verschiebung, daher muss die Resubstitution hier genau für diese beiden Anteile der Lösung stattfinden.

7.5.2 Skalierung des Gebietes

Eine weitere Skalierung, die das Problem erfahren kann, ist die Skalierung auf $\Omega \subseteq [-1, 1]^2$. Dazu sei $c := \max_{x \in \Omega} |x|$ für ein beliebiges Gebiet Ω gegeben. Um das Problem auf $\tilde{\Omega} := 1/c \Omega \subseteq [-1, 1]^2$ zu skalieren, werden die Variablen auf dieses Gebiet transformiert vermöge der Transformation $\Phi = c \operatorname{id} : \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$ und $\tilde{\Gamma}_N := \Phi^{-1}(\Gamma_N)$, $\tilde{\Gamma}_D := \Phi^{-1}(\Gamma_D)$. Dazu definiert man $\tilde{u} = u \circ \Phi : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\tilde{\sigma} = \sigma \circ \Phi : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{S}$ und die Daten $\tilde{f} = f \circ \Phi : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\tilde{u}_D = u_D \circ \Phi : \tilde{\Gamma}_D \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\tilde{g} = g \circ \Phi : \tilde{\Gamma}_N \rightarrow \mathbb{R}^2$ und das äußere Einheitsnormalenfeld $\tilde{\nu} = \nu \circ \Phi : \tilde{\Gamma}_N \rightarrow \mathbb{R}^2$. Die Ableitungen in den neuen Koordinaten $\tilde{x} := \Phi^{-1}(x)$, symbolisiert durch einen Index \tilde{x} an den Differentialoperatoren, lassen sich dann durch die Kettenregel berechnen durch

$$\begin{aligned} D_{\tilde{x}} \tilde{u} &= D_{\tilde{x}}(u \circ \Phi) = D_x u \circ D_{\tilde{x}} \Phi = D_x u \circ (c \operatorname{id}) = c D_x u, \\ \operatorname{div}_{\tilde{x}} \tilde{\sigma} &= c \operatorname{div}_x \sigma. \end{aligned}$$

Es gelte auf Ω das ursprüngliche System, also

$$\begin{aligned} \text{Zu } f, u_D, g \text{ suche } u, \sigma \text{ mit} \\ -\operatorname{div} \sigma &= f \quad \text{auf } \Omega, \\ \sigma &= \mathbb{C}\varepsilon(u) \quad \text{auf } \Omega, \\ u &= u_D \quad \text{auf } \Gamma_D, \\ \sigma \nu &= g \quad \text{on } \Gamma_N. \end{aligned}$$

Dann folgt für alle $\tilde{x} \in \tilde{\Omega}$, dass

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}_{\tilde{x}} \tilde{\sigma}(\tilde{x}) &= -c \operatorname{div}_x \sigma(x) = c f(x) = c \tilde{f}(\tilde{x}) \text{ und} \\ \tilde{\sigma}(\tilde{x}) &= \sigma(x) = \mathbb{C}\varepsilon_x(u)(x) = 1/c \mathbb{C}\varepsilon_{\tilde{x}}(\tilde{u})(\tilde{x}), \end{aligned}$$

und somit das neue System auf $\tilde{\Omega}$ durch

$$\begin{aligned} \text{Zu } \tilde{f}, \tilde{u}_D, \tilde{g} \text{ suche } \tilde{u}, \tilde{\sigma} \text{ mit} \\ -\operatorname{div} \tilde{\sigma} &= c \tilde{f} \quad \text{auf } \tilde{\Omega}, \\ \tilde{\sigma} &= 1/c \mathbb{C}\varepsilon(\tilde{u}) \quad \text{auf } \tilde{\Omega}, \\ \tilde{u} &= \tilde{u}_D \quad \text{auf } \tilde{\Gamma}_D, \\ \tilde{\sigma} \tilde{\nu} &= \tilde{g} \quad \text{on } \tilde{\Gamma}_N. \end{aligned}$$

Multiplikation der ersten, zweiten und vierten Gleichung mit c und die Substitution $\hat{f} = c^2 \tilde{f}$, $\hat{\sigma} = c \tilde{\sigma}$ und $\hat{g} = c \tilde{g}$ ergeben das System

$$\begin{aligned} \text{Zu } \hat{f}, \hat{u}_D, \hat{g} \text{ suche } \hat{u}, \hat{\sigma} \text{ mit} \\ -\operatorname{div} \hat{\sigma} &= \hat{f} \quad \text{auf } \tilde{\Omega}, \\ \hat{\sigma} &= \mathbb{C}\varepsilon(\hat{u}) \quad \text{auf } \tilde{\Omega}, \\ \hat{u} &= \hat{u}_D \quad \text{auf } \tilde{\Gamma}_D, \\ \hat{\sigma} \hat{\nu} &= \hat{g} \quad \text{on } \tilde{\Gamma}_N. \end{aligned}$$

Durch anschließende Resubstitution $\tilde{\sigma} = 1/c \hat{\sigma}$, $\tilde{u} = \hat{u}$ ergibt sich die Lösung auf $\tilde{\Omega}$, und durch $\sigma = \tilde{\sigma}(1/c \bullet)$, $u = \tilde{u}(1/c \bullet)$ die Lösung auf dem ursprünglichen Gebiet Ω . Die Spannung σ wird im Lösungstupel $(\sigma_0, u_0, t_0, s_1) \in X_h$ durch die Größen σ_0 und t_0 approximiert, weshalb dann dort auch genau diese beiden Größen nach dem Lösen auf $\tilde{\Omega}$ mit $1/c$ und nach Ω zurückskaliert werden müssen.

8 Numerische Experimente

Dieses Kapitel zeigt numerische Experimente zu den drei vorgestellten dPG-Methoden, die mit der Software aus Kapitel 7 durchgeführt wurden. Die ersten beiden Abschnitte beschreiben Benchmark-Probleme mit bekannter exakter Lösung, die zur Verifizierung des Programmes dienen. Anschließend werden einige in den Ingenieurwissenschaften übliche Experimente, meist ohne bekannte Lösung, durchgeführt. Als Materialparameter wurden, sofern nicht extra gekennzeichnet, $E = 10^4$ und $\nu = 0.4$ benutzt. Die Umrechnung in Lamé-Parameter λ und μ erfolgte entsprechend der Formeln aus Abschnitt 2.6.

8.1 Einheitsquadrat mit exakter Lösung

Das betrachtete Gebiet ist das Einheitsquadrat $\Omega = [0, 1]^2$ mit homogenen Dirichlet-Randdaten $u_D = 0$ auf dem gesamten Rand $\Gamma_D = \partial\Omega$ und gegebener exakter Lösung

$$u(x, y) = \begin{pmatrix} \pi \cos(\pi y) \sin(\pi y) \sin^2(\pi x) \\ -\pi \cos(\pi x) \sin(\pi x) \sin^2(\pi y) \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Volumenkraftdichte

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} -2\mu\pi^3 \cos(\pi y) \sin(\pi y) (2 \cos(2\pi x) - 1) \\ 2\mu\pi^3 \cos(\pi x) \sin(\pi x) (2 \cos(2\pi y) - 1) \end{pmatrix}$$

ist nicht vom kritischen Lamé-Parameter λ abhängig.

Die Abbildung 6 zeigt den direkten Vergleich von Fehlerschätzer $\eta = \|F - b(x_h, \bullet)\|_{Y_h^*}$ und Gesamtfehler gegenüber der Anzahl der Freiheitsgrade ndof der drei Methoden für diese Experimente mit uniformer Verfeinerung. Dabei ist zu erkennen, dass sich die Fehler in den drei untersuchten Methoden nicht unterscheiden. Die Konvergenzrate beträgt in allen drei Experimenten $1/2$, wie für die gegebene glatte Lösung zu erwarten war. Der Fehlerschätzer der L^2 - H^1 -Methode liegt deutlich, etwa um den Faktor 5, unter dem exakten Fehler, während die Energiemethoden den exakten Fehler um den Faktor 17 überschätzen.

In Abbildung 7 werden die einzelnen Fehleranteile für die L^2 - H^1 -Methode und die Energiemethode ohne Nebenbedingung verglichen, die alle mit Rate $1/2$ konvergieren. In den Experimenten stellte sich heraus, dass sich die beiden Energiemethoden nicht nur in ihrem Fehlerschätzer und Gesamtfehler, sondern auch in den Graphen der Fehleranteile gleichen. Dies gilt für alle in dieser Arbeit durchgeführten Experimente, weshalb im Folgenden die Darstellung häufig auf die Energiemethode ohne Nebenbedingung beschränkt wird. In Abbildung 7 wird deutlich, dass die Fehleranteile für die Verschiebung u_0 und den Normalenspuranteil der Spannung t_0 für Energie- und L^2 - H^1 -Methode gleich sind. Letzterer dominiert für beide Methoden den Gesamtfehler, die Graphen fallen im Prinzip zusammen. Im Falle der L^2 - H^1 -Methode haben beide Anteile der Lösung, die Diskretisierungen der Verschiebung sind, also u_0 und s_1 , viel kleinere Fehler als die restlichen beiden Komponenten. Für die Energiemethode hat der s_1 -Anteil der Lösung im Vergleich zur L^2 - H^1 -Methode einen größeren Fehler, dafür hat diese Methode einen geringeren

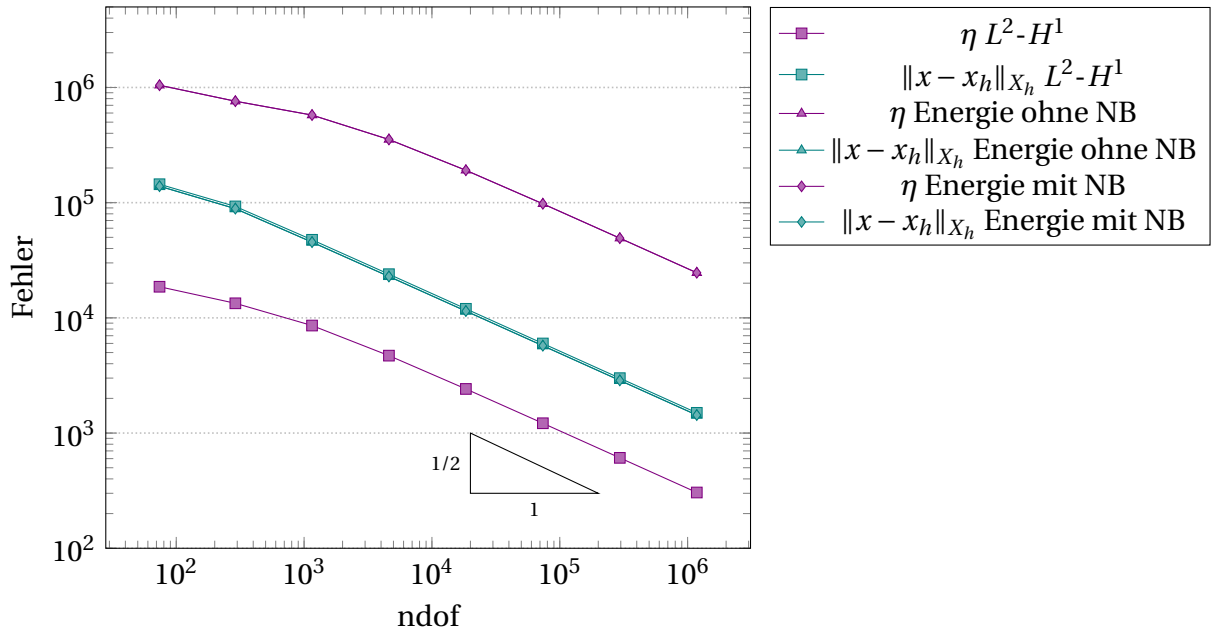


Abbildung 6: Einheitsquadrat, Konvergenzgraphen für uniforme Verfeinerung, Vergleich der Methoden.

Fehler in der stückweise konstanten Approximation σ_0 der Spannung. Offensichtlich unterscheiden sich die Methoden in diesem Beispiel nur dadurch, dass diese beiden Fehleranteile in der durchgeführten Minimierung anders gewichtet werden.

In Abbildung 8 wird exemplarisch für die L^2 - H^1 -Methode die uniforme mit adaptiver Verfeinerung verglichen, die anderen Methoden zeigen ähnliche Ergebnisse. Da bereits die uniforme Verfeinerungstrategie die optimale Rate von $1/2$ lieferte, ist für die adaptive Verfeinerung keine Verbesserung zu erwarten und auch nicht im Graphen zu erkennen. Für beide Verfeinerungsarten ist festzustellen, dass der Fehlerschätzer eine Näherung des Fehlers im Anteil σ_0 der Lösung zu sein scheint.

8.2 Rotiertes L-Gebiet mit exakter Lösung

Es wird das rotierte L-Gebiet

$$\Omega = \text{conv}\{(0, 0), (-1, -1), (0, -2), (1, -1)\} \cup \text{conv}\{(-1, 1), (1, -1), (2, 0), (0, 2)\}$$

aus Abbildung 9(a) betrachtet. Die beiden Kanten hin zur einspringenden Ecke bilden den Neumann-Rand, d.h. $\Gamma_N = \{(x, y) \in \partial\Omega \mid |y| \leq 1, x \leq 0\}$ und die restlichen Kanten den Dirichlet-Rand $\Gamma_D = \partial\Omega \setminus \Gamma_N$. Die rechte Seite ist

$$f \equiv 0.$$

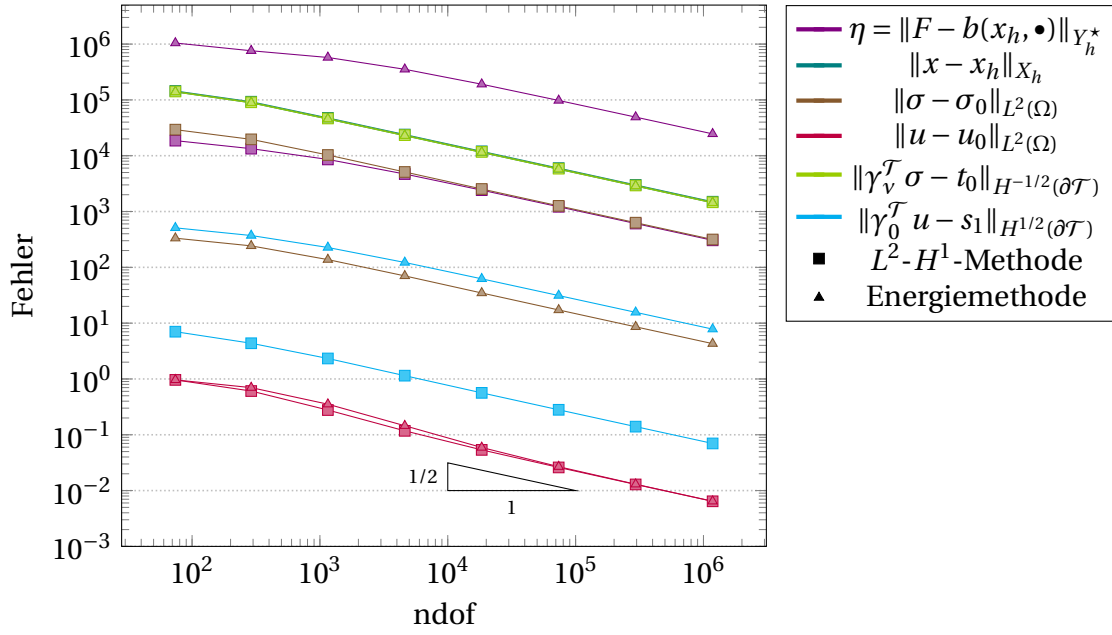


Abbildung 7: Einheitsquadrat, Konvergenzgraphen für uniforme Verfeinerung, Fehleranteile der L^2 - H^1 -Methode und Energiemethode im Vergleich.

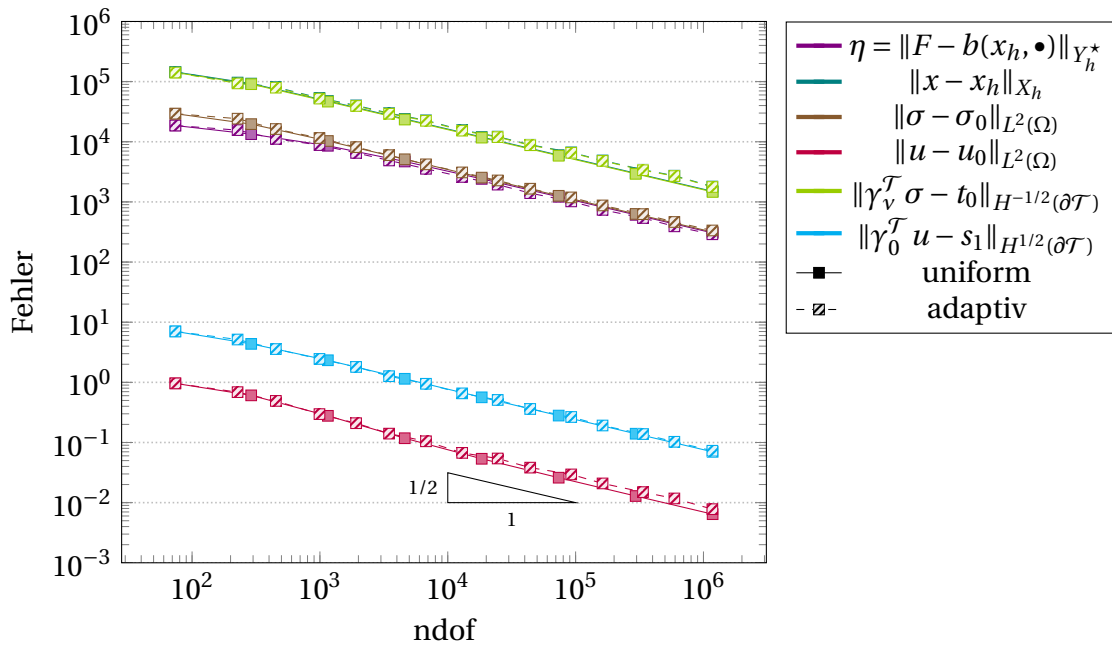


Abbildung 8: Einheitsquadrat, Konvergenzgraphen der Fehleranteile für uniforme und adaptive Verfeinerung, L^2 - H^1 -Methode.

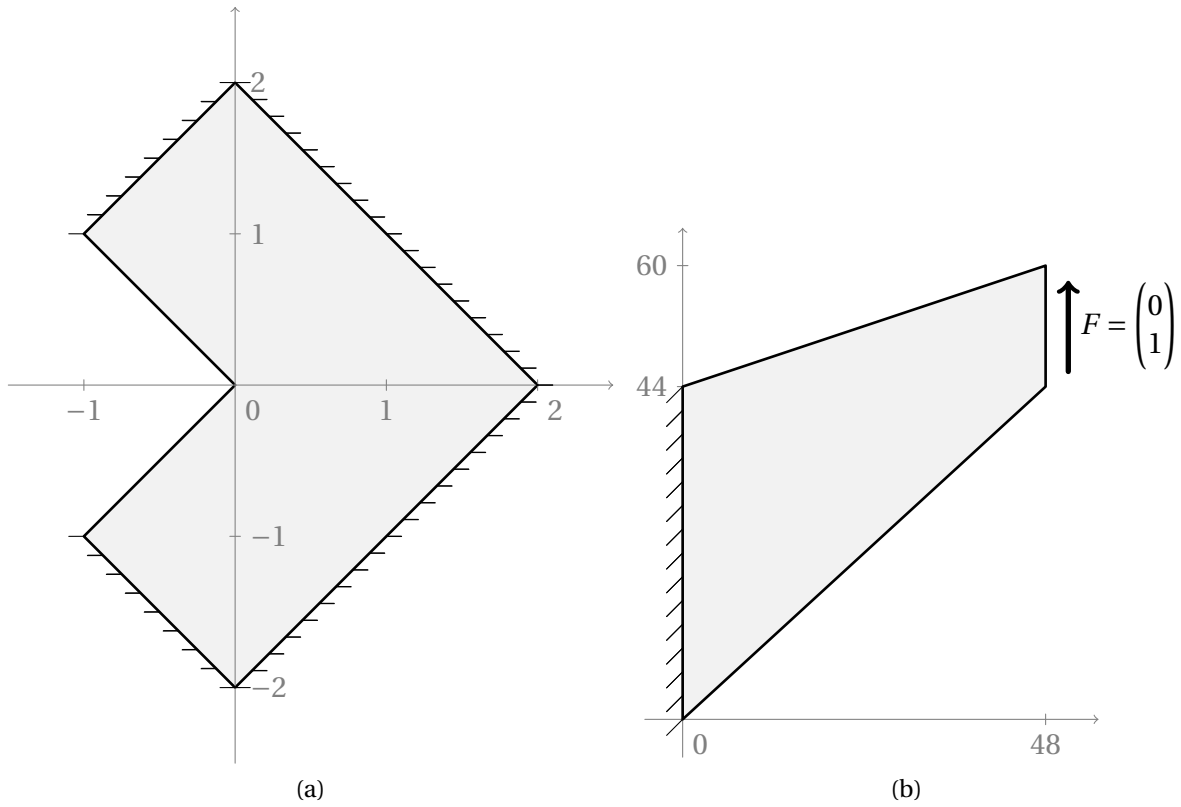


Abbildung 9: Rotiertes L-Gebiet und Cook-Membran.

Die exakte Lösung dazu lautet in Polarkoordinaten, siehe [CDFH00],

$$u(r, \varphi) = \begin{pmatrix} u_r(r, \varphi) \sin(\varphi) - u_\varphi(r, \varphi) \cos(\varphi) \\ u_r(r, \varphi) \sin(\varphi) + u_\varphi(r, \varphi) \cos(\varphi) \end{pmatrix},$$

wobei

$$u_r(r, \varphi) = \frac{1}{2\mu} r^\alpha (-(\alpha + 1) \cos((\alpha + 1)\varphi) + (c_2 - \alpha - 1) c_1 \sin((\alpha - 1)\varphi)),$$

$$u_\varphi(r, \varphi) = \frac{1}{2\mu} r^\alpha ((\alpha + 1) \sin((\alpha + 1)\varphi) + (c_2 + \alpha - 1) c_1 \cos((\alpha - 1)\varphi)),$$

mit der positiven Lösung $\alpha \approx 0.544483736782$ der Gleichung $\alpha \sin(3\pi/2) + \sin(3\alpha\pi/2) = 0$ und den Konstanten

$$c_1 = -\frac{\cos(3\pi(\alpha + 1)/4)}{\cos(3\pi(\alpha - 1)/4)},$$

$$c_2 = \frac{2\lambda + 4\mu}{\lambda + \mu}.$$

Diese exakte Lösung gibt die Dirichletranddaten vor. Die Neumannranddaten lassen sich zu $g = 0$ berechnen.

In Abbildung 10 sind die Konvergenzgraphen von Fehler und Fehlerschätzer für alle drei Methoden und jeweils adaptive und uniforme Verfeinerung verglichen. Es stellt sich zunächst wieder

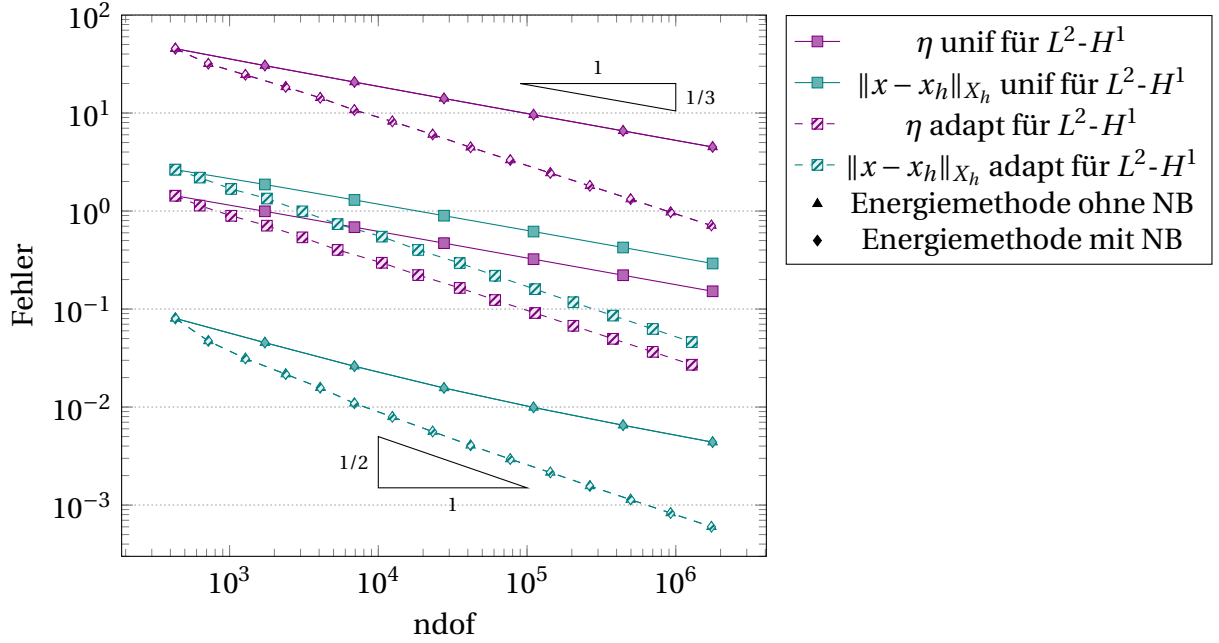


Abbildung 10: L-Gebiet, Konvergenzgraphen für uniforme und adaptive Verfeinerung, Vergleich der Methoden.

heraus, dass sich die beiden Energiemethoden für beide Verfeinerungstechniken in Fehler und Fehlerschätzer gleichen und dass die Fehlerschätzer den Fehler sehr deutlich, etwa um den Faktor 1000 überschätzen. Der Fehlerschätzer für die L^2-H^1 -Methode liegt etwa um den Faktor 2 unter dem exakten Fehler. Der Fehler der Energiemethoden liegt jeweils um den Faktor 60 unter dem der L^2-H^1 -Methode. Für die uniforme Verfeinerung lässt sich für alle drei Experimente die suboptimale Konvergenzrate von $1/3$ ablesen, die der Singularität der Ableitung der Lösung in der einspringenden Ecke geschuldet ist. Die adaptiven Varianten der drei Methoden sind in der Lage, die optimale Konvergenzrate von $1/2$ zurückzugewinnen. Abbildung 13 zeigt eine Triangulierung, die mit dem adaptiven Algorithmus erzeugt wurde, die Verfeinerung hin zur einspringenden Ecke gut erkennbar.

Die einzelnen Fehleranteile für die L^2-H^1 -Methode sind in Abbildung 11 zu sehen. Es sind die beiden Diskretisierungen der Verschiebungen in ihren Fehlern wieder deutlich kleiner als die restlichen Fehler, der dominierende Fehleranteil ist jeweils der von t_0 . Außerdem scheint auch hier der Fehler in σ_0 mit dem Fehlerschätzer relativ gut übereinzustimmen. Ein Phänomen, dass sich auch schon in Experimenten zum Poisson-Problem für das L-Gebiet beobachten ließ und für das noch keine Erklärung besteht [CGHW14], ist die optimale Konvergenz des u_0 -Anteiles der Lösung bereits im uniformen Fall.

In dem in Abbildung 12 dargestellten Experiment wurde für die adaptive Verfeinerung im Bulk-Parameter θ variiert. Je kleiner der Parameter ist, desto besser ist die Konvergenzrate. Jedoch bedeutet ein kleiner Bulk-Parameter im Gegenzug auch, dass mehr Rechenschritte durchgeführt werden müssen, um das gewünschte ndof zu erreichen. Es stellt sich heraus, dass bereits der relativ große Bulk-Parameter 0.5 eine gute Konvergenzrate liefert, was die Wahl von diesem Parameter für die restlichen Experimente mit Adaptivität in Bezug auf die Balance zwischen Rate und Rechenaufwand rechtfertigt.

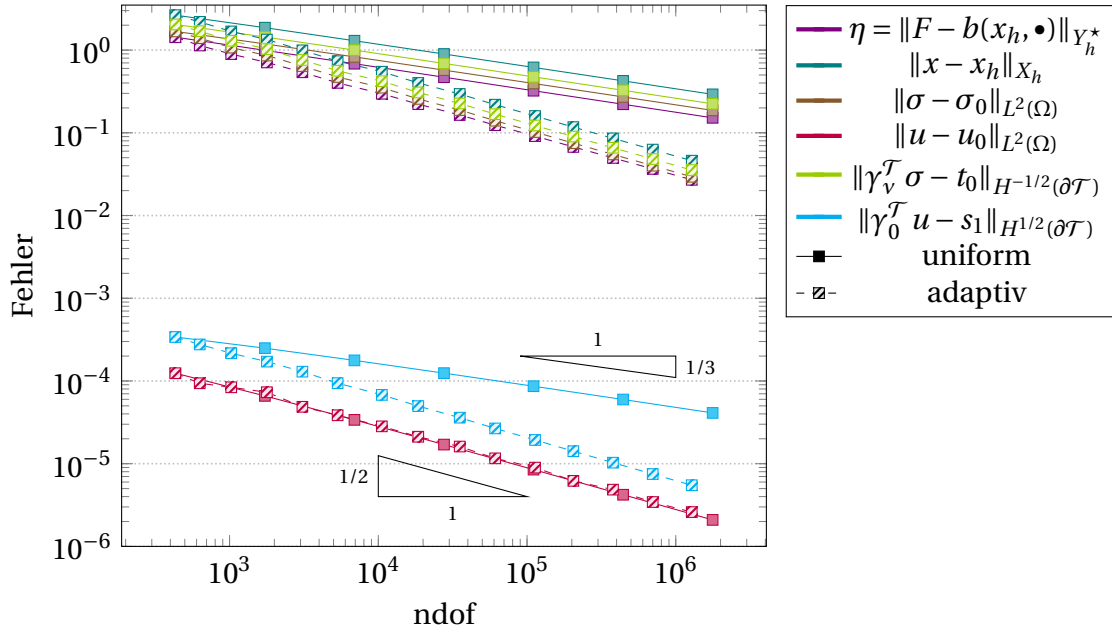


Abbildung 11: L-Gebiet, Konvergenzgraphen der Fehleranteile für uniforme und adaptive Verfeinerung, L^2 - H^1 -Methode.

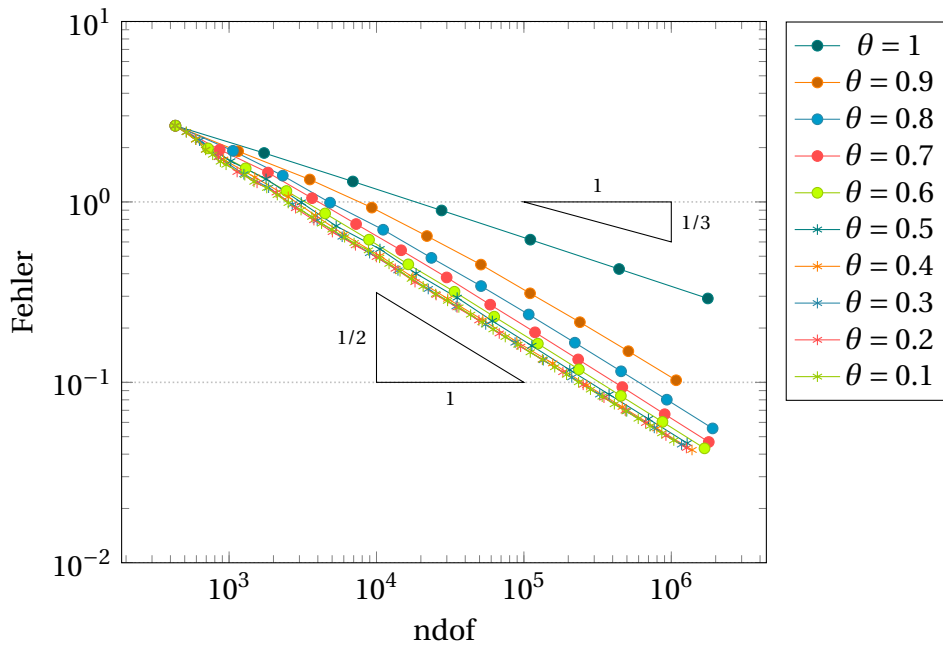


Abbildung 12: L-Gebiet, Konvergenzgraphen der Gesamtfehler für L^2 - H^1 -Methode mit verschiedenen Bulk-Parametern.

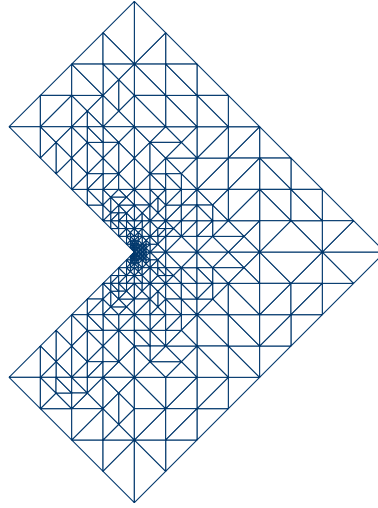


Abbildung 13: L-Gebiet, Triangulierung nach adaptiver Verfeinerung mit 592 Dreiecken und 5328 ndof.

8.3 Cooks Membranproblem

Das von R.D.Cook [Coo74] eingeführte biegedominierte Cook-Membran-Problem betrachtet $\Omega = \text{conv}\{(0,0), (48,44), (48,60), (0,44)\}$, siehe Abbildung 9(b), eine an einer Seite eingespannte viereckige Platte, auf die an der gegenüberliegenden Kante eine konstante Schubkraft wirkt. Es ist also $\Gamma_D = \{0\} \times [0,44]$ mit $u_D = 0$ und $\Gamma_N = \partial\Omega \setminus \Gamma_D$ mit $g = (0,1)^\top$ für $x \in \{48\} \times [44,60]$ und $g = 0$ sonst. Die Volumenkraftdichte beträgt

$$f \equiv 0.$$

Für dieses Problem ist keine exakte Lösung bekannt, weshalb in den Graphen nur der Residuums-Fehlerschätzer betrachtet werden kann. Die Abbildung 14 zeigt die Deformation der Cook-Membran mit um den Faktor 200 verstärkter Deformation und ein durch den adaptiven Algorithmus erzeugtes Gitter. Die farbig eingetragenen Werte entsprechen $|\text{dev}(\sigma_0^*)|$, wobei $\sigma_0^* \in P_1(\mathcal{T}; \mathbb{S}) \cap C(\Omega; \mathbb{S})$ eine Glättung der stückweise konstanten Spannungsapproximation σ_0 wie in [ACFK02] ist. Die größten Spannungen treten dabei an der Ecke $(0,44)$ auf. Dort und an der Seite, an der die Schubkraft wirkt, verfeinert der adaptive Algorithmus besonders stark.

In Abbildung 15 sind die Fehlerschätzer für die drei Methoden jeweils für uniforme und adaptive Verfeinerung dargestellt. Ab etwa 20000 ndof gleichen sich die Fehlerschätzer der drei Methoden jeweils. Die Experimente zur uniformen Verfeinerung weisen dabei jeweils eine Konvergenzrate von etwa $1/3$ auf, die sich durch die Unstetigkeit der Randbedingungen erklären lässt. Auch in diesem Experiment ist die adaptive Methode in der Lage, die optimale Rate von $1/2$ wiederherzustellen. Die L^2 - H^1 -Methode erreicht bereits ab etwa 1000 ndof den asymptotischen Bereich, der Fehlerschätzer der Energiemethoden steigt anfangs sogar erst noch an, bevor dann ab etwa 20000 ndof Asymptotik erkennbar ist.

Die vertikale Verschiebung der oberen Spitze wird in Abbildung 16 gezeigt. Die Werte der L^2 - H^1 -Methode konvergieren dabei deutlich schneller gegen den angegebenen Referenzwert einer konformen P_4 -Approximation als die Energiemethoden.

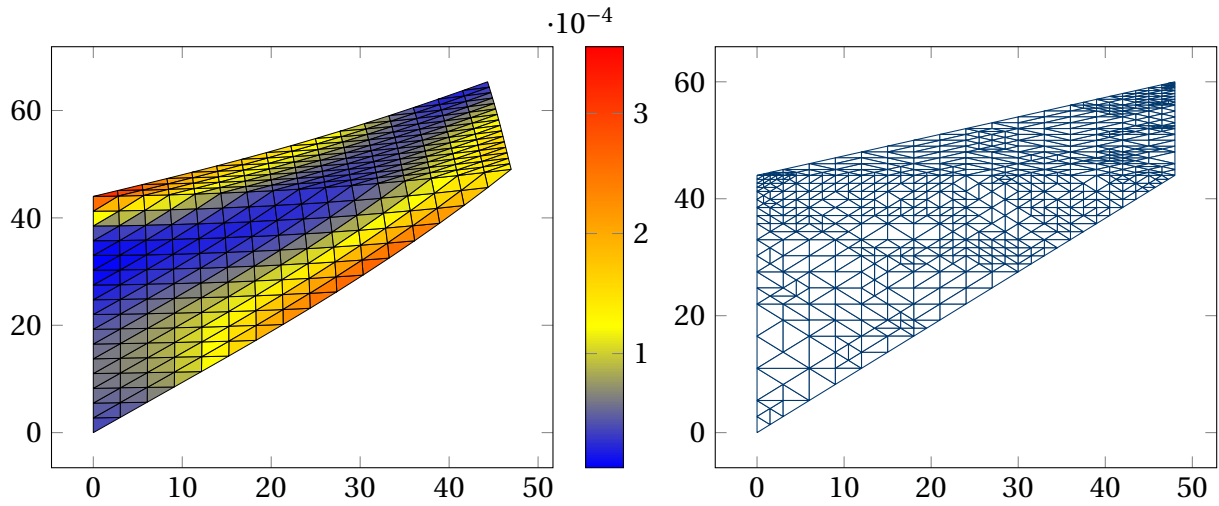


Abbildung 14: Cook-Membran, Visualisierung der Deformation um Faktor 200 verstärkt für 513 Dreiecke und 4608 ndof und adaptiv generierte Triangulierung mit 1115 Dreiecken und 10035 ndof. Im Deformationsplot farbig dargestellt ist $|\text{dev}(\sigma_0^\star)|$ für eine Glättung σ_0^\star von σ_0 .

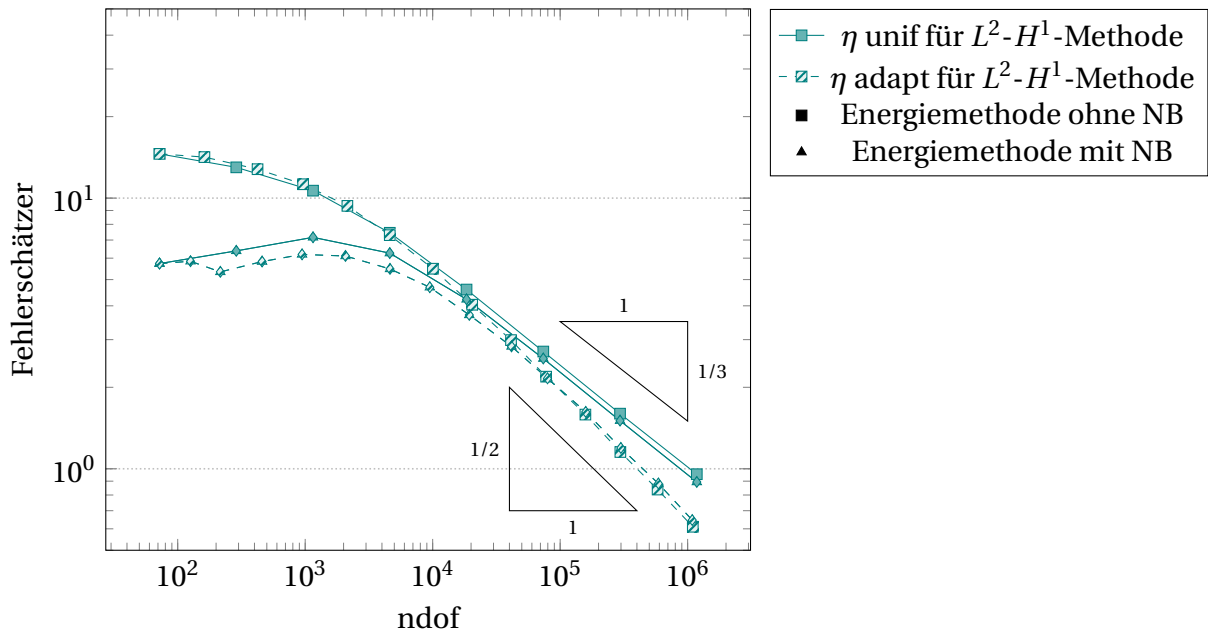


Abbildung 15: Cook-Membran, Konvergenzgraphen für uniforme und adaptive Verfeinerung der drei Methoden für Parameter $\nu = 0.3$, $E = 10^4$.

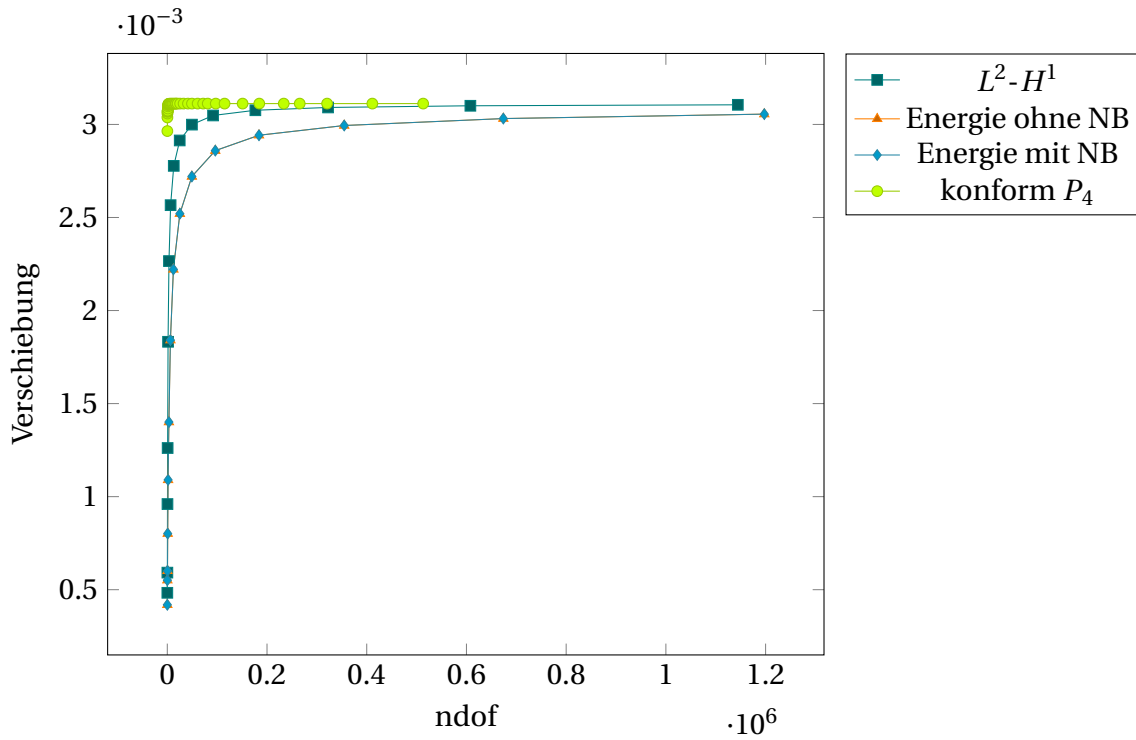


Abbildung 16: Cook-Membran, vertikale Verschiebung der oberen Spitze (48, 60) für adaptive Verfeinerung und Parameter $\nu = 0.499$, $E = 10^5$, verglichen mit einer konformen P_4 -Approximation aus [CEG11] als Referenzlösung.

8.4 L-Gebiet mit Locking

In diesem Abschnitt wird ein unrotiertes L-Gebiet $\Omega = [-1, 1]^2 \setminus ([0, 1] \times [0, -1])$ mit stückweise konstanter rechter Seite

$$f(x, y) = \begin{cases} (1, 0)^\top, & \text{falls } xy \geq 0, \max\{|x|, |y|\} \leq 0.5, \\ (0, 0)^\top, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wie in Abbildung 17 betrachtet. Hierzu ist keine exakte Lösung bekannt. Es werden homogene Dirichletranddaten $u_D = 0$ betrachtet auf dem gesamten Rand $\Gamma_D = \partial\Omega$. Alle Rechnungen erfolgen mit Elastizitätsmodul $E = 1$. Aufgrund der Formel $\lambda = E\nu/((1 + \nu)(1 - 2\nu))$ wird λ sehr groß für $\nu \rightarrow 1/2$, während $\mu = E/(2(1 + \nu))$ beschränkt bleibt.

Abbildung 17 zeigt auch ein adaptives Gitter. Für dieses L-Gebiets-Beispiel ist ebenfalls eine Verfeinerung hin zur einspringenden Ecke zu erkennen.

Die Konvergenzgraphen uniformer Verfeinerung für variierende Werte von $\nu \in [0.4, 0.5)$ bei konstantem $E = 1$ sind in Abbildung 18 zu finden. Die beiden Graphen der L^2-H^1 -Methode für $\nu = 0.4$ und $\nu = 0.49999999$ unterscheiden sich hierbei kaum und konvergieren im Prinzip von Beginn an mit der Rate von $1/3$. Da $E = 1$, $\nu = 0.4$ Werten von $\mu = 0.36$, $\lambda = 1.4$ entspricht und $E = 1$, $\nu = 0.49999999$ Werten von $\mu = 0.3$ und $\lambda = 16666666$, zeigt die L^2-H^1 -Methode in diesem Beispiel kein Locking. Die Energiemethoden ohne Nebenbedingung hingegen, die sich im Übrigen auch in diesem Beispiel genau wie diejenige mit Nebenbedingung verhält, zeigt hier

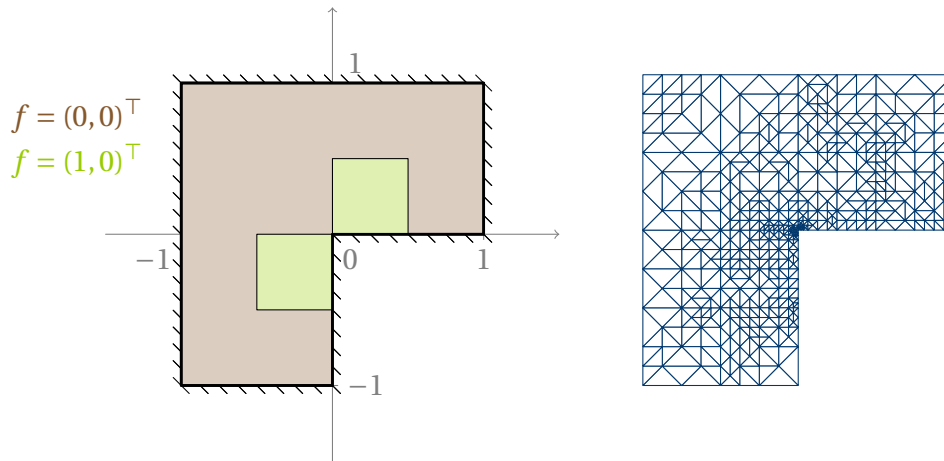


Abbildung 17: Locking-Beispiel, Gebiet mit rechter Seite und Triangulierung nach adaptiver Verfeinerung mit 761 Dreiecken und 6851 ndof.

starke vorasymptotische Effekte. Für den Wert $\nu = 0.4$ beobachtet man noch eine Konvergenzrate von $1/3$ ab 1000 ndof. Je näher der Wert ν an $1/2$ gelangt, desto später gelangt der Graph in den asymptotischen Bereich. So benötigt die Energiemethode bei $\nu = 0.499$, das entspricht $\lambda = 500$, bereits 200000 Freiheitsgrade um die Konvergenzrate von $1/3$ anzunehmen. Für den letzten getesteten Wert von $\nu = 0.49999999$ ist im gesamten Diagramm, das heißt bis 3 Millionen ndof, keine Asymptotik zu erkennen. Die theoretischen Vermutungen, dass die Energiemethoden aufgrund der benutzten Normen ein locking-Verhalten zeigen könnten, wird also in diesem Experiment bestätigt.

Abbildung 19 zeigt dasselbe Experiment für adaptive Verfeinerungen. Hier sind für die Energiemethode zwar auch jeweils ca. 10000 Freiheitsgrade nötig, um in den asymptotischen Bereich zu gelangen, jedoch ist dieser Bereich bei Weitem nicht so groß wie für die uniforme Verfeinerung. Die L^2 - H^1 -Methode zeigt kein vorasymptotisches Verhalten, jedoch ist für eine kleine Poisson-Zahl von 0.4 ein Abweichen von der Asymptotik bei etwa 200000 ndof zu sehen. Insgesamt scheint jedoch hier Adaptivität das Locking im Wesentlichen zu verhindern, ein Effekt, der sich teilweise auch bei anderen Methoden beobachten lässt, für den es jedoch auch dort noch keine theoretische Erklärung gibt.

8.5 Kirsch-Problem

Das nach Ernst Gustav Kirsch benannte Problem betrachtet in diesem Fall eine Platte unendlicher Ausdehnung mit einem Loch darin, hier modelliert durch das Gebiet $\tilde{\Omega} := [-100, 100]^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 25\}$ wie in Abbildung 20(a). An der oberen und unteren Kante wirkt jeweils eine konstante Oberflächenkraft, an den Seiten ist diese Null. Der Rand am Loch sei fest, also durch $u_D = 0$ gekennzeichnet. Aufgrund der Symmetrie des Problems kann auch nur ein Teil der Fläche betrachtet werden, etwa der Teil im ersten Quadranten. So ergibt sich das in den Berechnungen letztendlich verwendete Gebiet durch $\Omega := [0, 100]^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 25\}$ aus

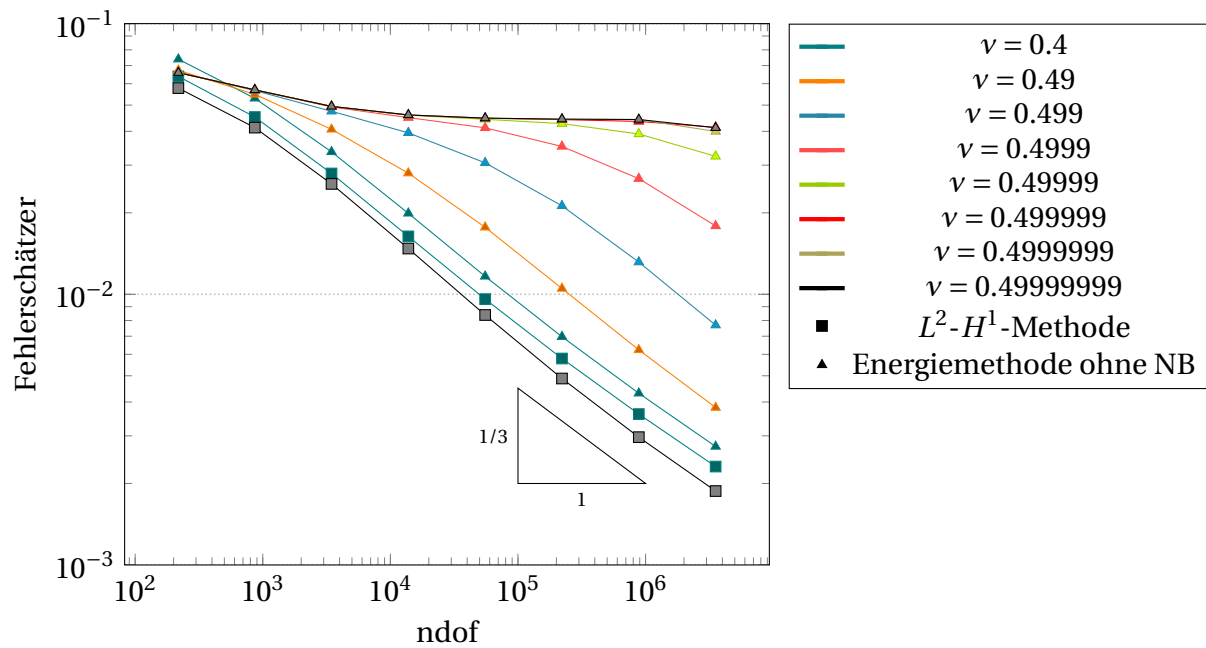


Abbildung 18: Locking-Beispiel, Fehlerschätzer für verschiedene Werte von ν für uniforme Verfeinerung.

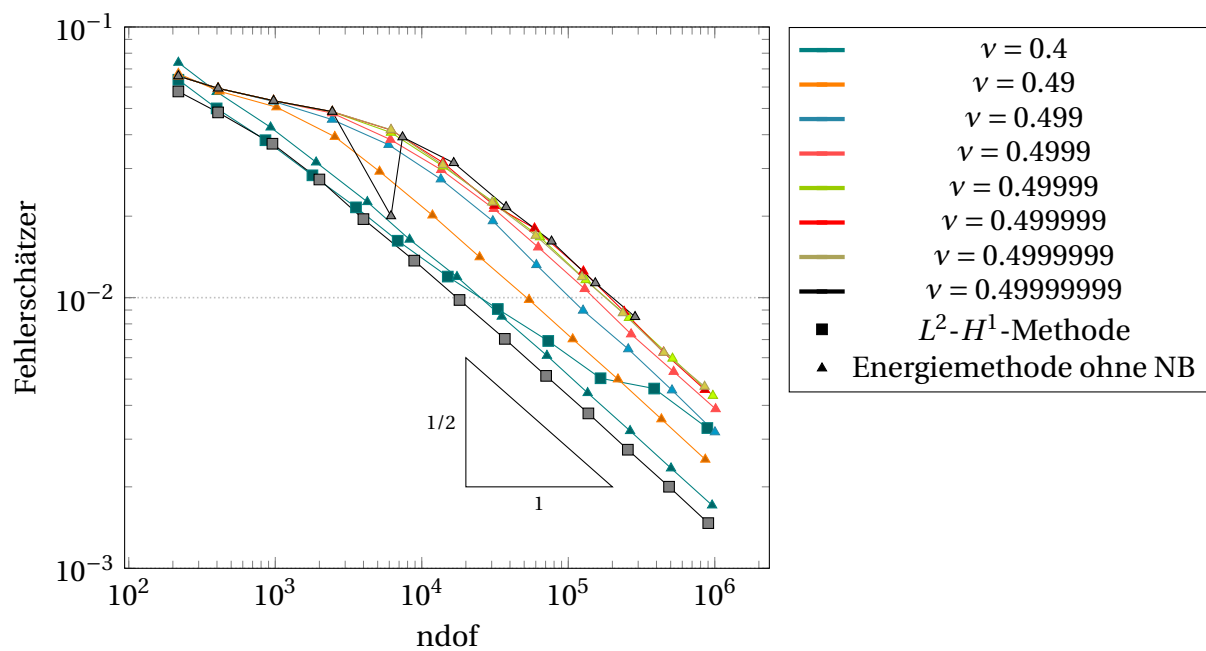


Abbildung 19: Locking-Beispiel, Fehlerschätzer für verschiedene Werte von ν für adaptive Verfeinerung.

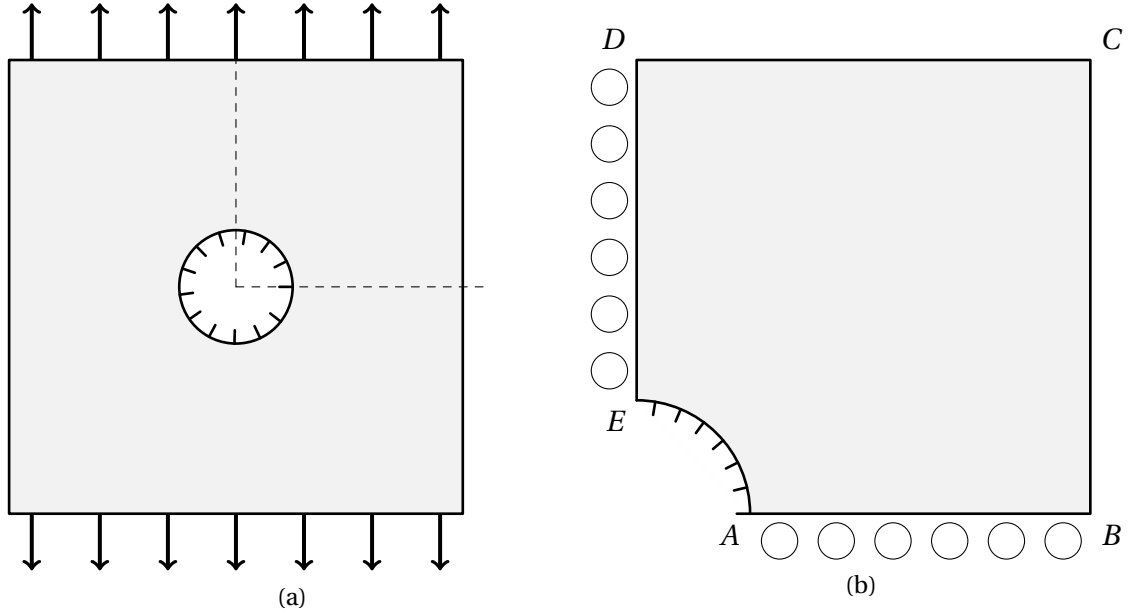


Abbildung 20: Membran mit Loch und Teilstück des symmetrischen Gebietes, auf dem gerechnet wird.

Abbildung 20(b). An den Kanten \overline{AB} und \overline{DE} müssen wegen dieser Betrachtung des Teilgebietes neue Randbedingungen eingebracht werden. Durch die Symmetrie des Ausgangsproblems kann etwa an der Kante \overline{AB} keine Verschiebung in vertikale Richtung stattfinden, in horizontale Richtung allerdings schon. Im Gegenzug kann man argumentieren, dass dann in der zweiten Komponente dort keine Oberflächenkräfte wirken. An der Kante \overline{DE} ist das dann genau umgekehrt. Es werden also an diesen beiden Kanten unterschiedliche Arten von Randbedingungen in beiden Komponenten gefordert. Es ist insgesamt mit der Notation \widetilde{EA} für den Kreisbogen zwischen den Punkten E und A der Dirichletrand in der ersten Komponente $\Gamma_D^{(1)} := \overline{DE} \cup \widetilde{EA}$ und der Dirichletrand in der zweiten Komponente $\Gamma_D^{(2)} := \widetilde{EA} \cup \overline{AB}$ und $\Gamma_N^{(1)} := \partial\Omega \setminus \Gamma_D^{(1)}$ sowie $\Gamma_N^{(2)} := \partial\Omega \setminus \Gamma_D^{(2)}$. Wie bereits erklärt, gilt jeweils $u_D = 0$ auf den jeweiligen Dirichletrandkanten. Die Neumannranddaten lauten $g = (1, 0)^\top$ auf \overline{CD} und $g = 0$ sonst. Die Volumenkraftdichte beträgt $f \equiv 0$.

Abbildung 21 zeigt die Konvergenzgraphen der Fehlerschätzer der drei Methoden für uniforme und adaptive Verfeinerung. Alle drei Methoden konvergieren für beide Verfeinerungsarten mit Rate $1/2$, dabei liegen die Graphen der adaptiven Verfeinerung jeweils etwas unter denen der uniformen.

In Abbildung 22(a) ist die benutzte Anfangstriangulierung des Gebietes zu sehen. Um das runde Stück des Randes zu approximieren, werden nach jedem Verfeinerungsschritt diejenigen Knoten, die in diesem Bereich des Randes liegen, auf den Kreisrand verschoben. Es ist deshalb zur Vermeidung der Degenierung der Randdreiecke darauf zu achten, dass in der Anfangstriangulierung keine Innenkante tangential an den Kreis liegt. Das adaptive Gitter aus Abbildung 22(b) zeigt eine Verfeinerung hin zum Rand des Loches.

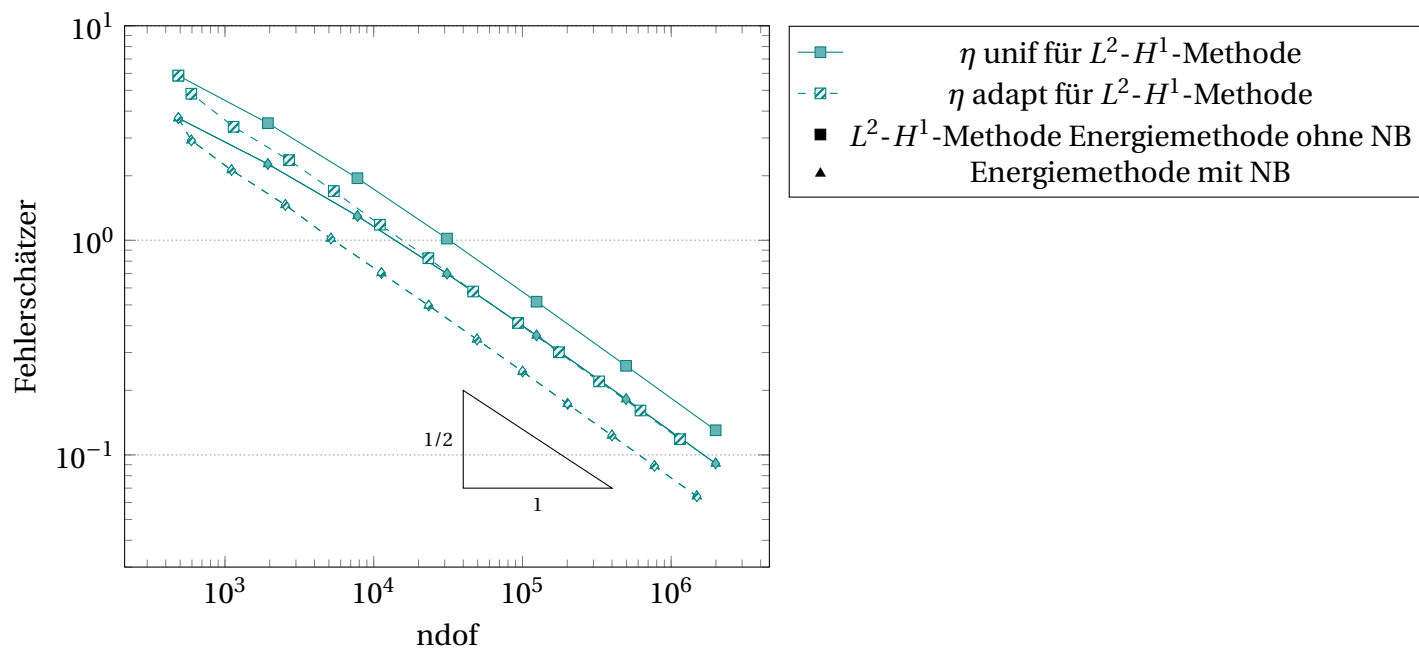


Abbildung 21: Kirsch-Problem, Konvergenzgraphen für uniforme und adaptive Verfeinerung der drei Methoden für Parameter $\nu = 0.4$, $E = 10^4$.

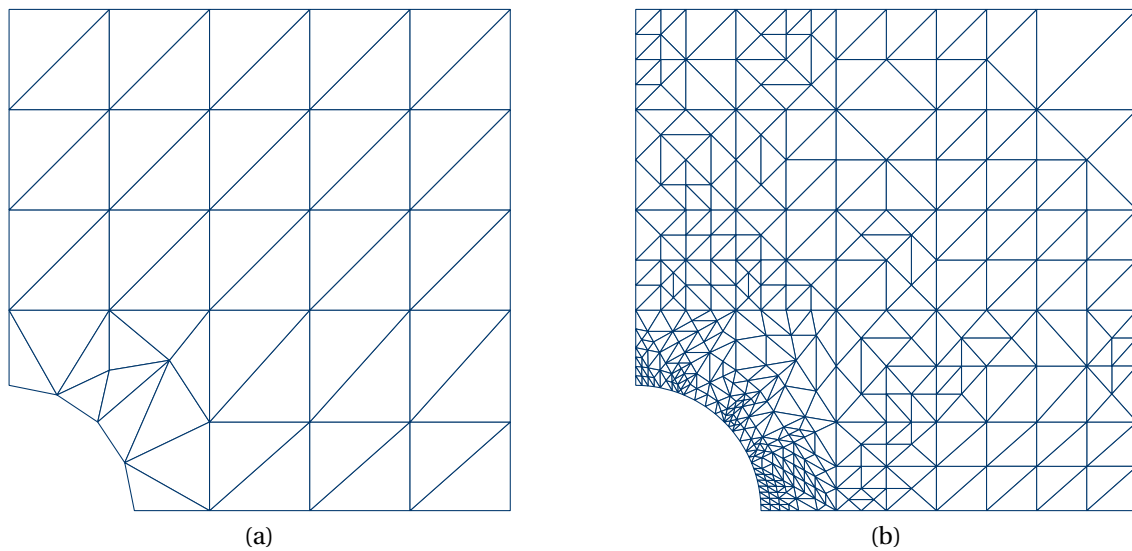


Abbildung 22: Kirsch-Problem, Anfangstriangulierung und Triangulierung nach adaptiver Verfeinerung mit 599 Dreiecken und 5391 ndof.

8.6 Circular Inclusion

Dieses Problem betrachtet dasselbe Gebiet wie das Kirsch-Problem aus dem vorigen Abschnitt, mit derselben Aufteilung der Randkanten in $\Gamma_D^{(1)}$, $\Gamma_D^{(2)}$, $\Gamma_N^{(1)}$ und $\Gamma_N^{(2)}$. Die Dirichlet- und Neumannranddaten auf den Kanten \overline{AB} und \overline{DE} sowie dem Kreisbogen \widetilde{EA} sind ebenfalls genauso gegeben wie zuvor. Für dieses Problem ist jedoch eine exakte Lösung [KS95] gegeben durch

$$u(r, \varphi) = \begin{pmatrix} u_r(r, \varphi) \sin(\varphi) - u_\varphi(r, \varphi) \cos(\varphi) \\ u_r(r, \varphi) \sin(\varphi) + u_\varphi(r, \varphi) \cos(\varphi) \end{pmatrix},$$

wobei

$$u_r(r, \varphi) = \frac{1}{8\mu r} ((\kappa - 1)r^2 + 2\gamma a^2 + (2r^2 - 2(\kappa + 1)a^2/\kappa + 2a^4/(\kappa r^2)) \cos(2\varphi)),$$

$$u_\varphi(r, \varphi) = -\frac{1}{8\mu r} (2r^2 - 2(\kappa - 1)a^2/\kappa - 2a^4/(\kappa r^2)) \sin(2\varphi)$$

mit $\kappa = 3 - 4\nu$, $\gamma = 2\nu - 1$ und $a = 25$. Diese exakte Lösung bestimmt die exakte Spannung $\sigma = \mathbb{C}\varepsilon(u)$, die durch $g := \sigma v$ die Neumannranddaten auf den Kanten \overline{BC} und \overline{CD} festlegt.

In Abbildung 23 sind die Konvergenzgraphen für jeweils die uniforme und adaptive Variante der drei Methoden zu sehen. Die Methoden konvergieren alle mit Rate 1/2, die Graphen der adaptiven Methoden liegen dabei wieder etwas unter den uniformen. Abbildung 24 untersucht noch einmal die Konvergenz der einzelnen Fehleranteile. Es stellt sich auch hier heraus, dass der Fehlerschätzer eine gute Approximation des Fehlers in σ_0 ist. Hier stellt man außerdem fest, dass der Fehler in s_1 als einziger mit einer Rate von 1 konvergiert.

In Abbildung 25 sind die Verschiebungen auf dem gesamten Gebiet visualisiert, indem die Lösung entsprechend an den Symmetrieachsen gespiegelt wurde. In Abbildung 25(a) wird klar, dass die gewählten Randbedingungen an die Verschiebungen entlang der Symmetrieachsen für die Stetigkeit der Lösung dort sorgen. Der Deformationsplot 25(b) mit um den Faktor 2000 vergrößerten Verschiebungen zeigt deutlich, dass das Gebiet unter Einfluss der wirkenden Kräfte in x -Richtung auseinandergezogen wird und dadurch in y -Richtung schmaler wird, wie zu erwarten war.

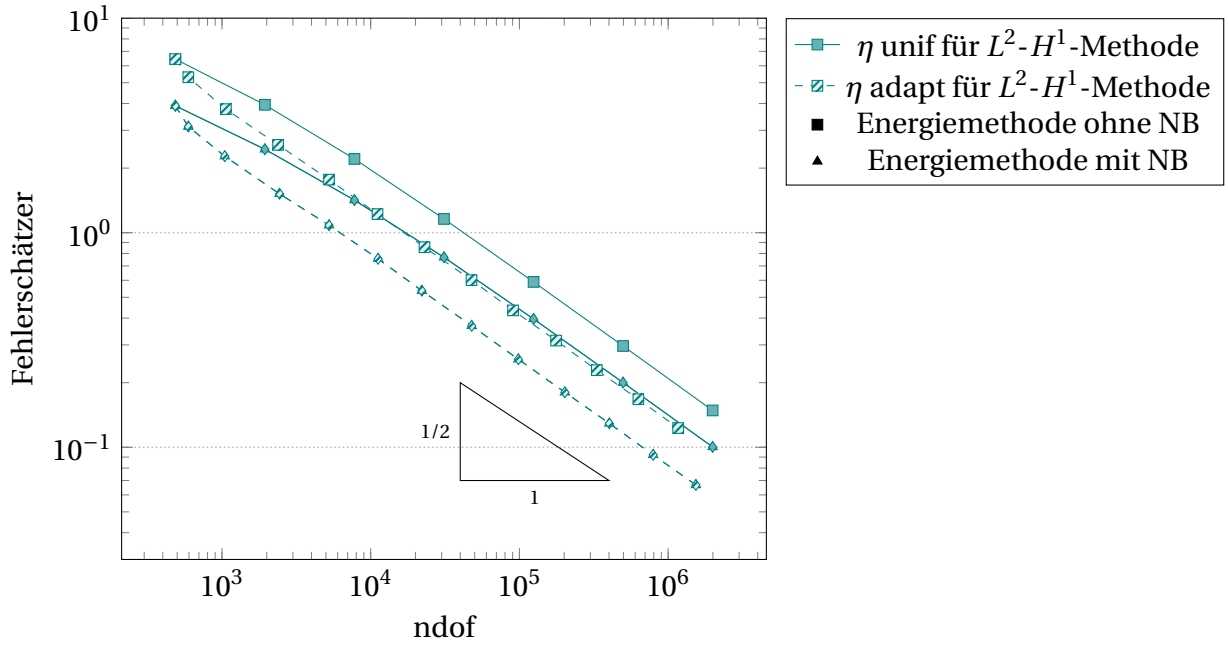


Abbildung 23: Circular Inclusion, Konvergenzgraphen für uniforme und adaptive Verfeinerung der drei Methoden für Parameter $\nu = 0.4$, $E = 10^4$.

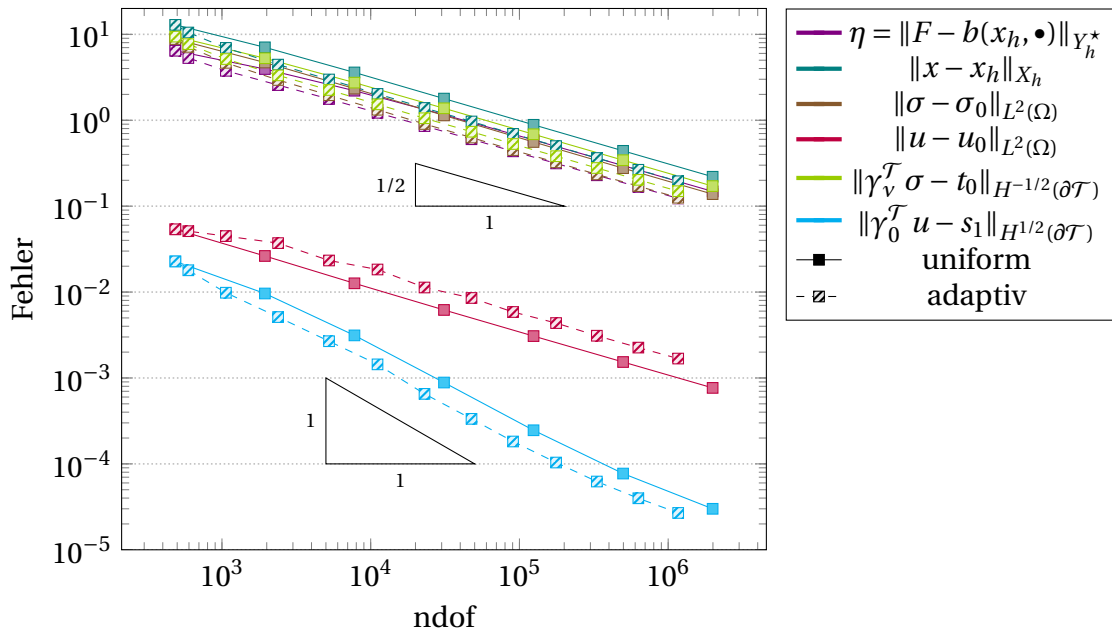


Abbildung 24: Circular Inclusion, Konvergenzgraphen der Fehleranteile für uniforme und adaptive Verfeinerung, L^2 - H^1 -Methode.

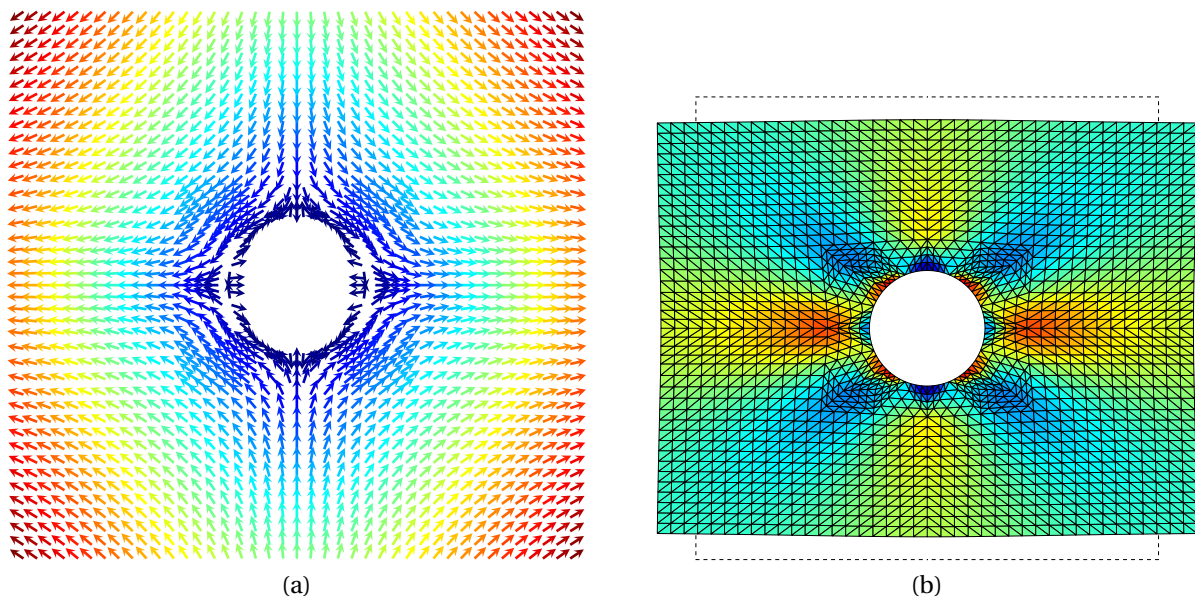


Abbildung 25: Circular Inclusion, Visualisierung der Verschiebungen und Deformationsplot mit um Faktor 2000 vergrößerten Verschiebungen für 864 Dreiecke und 7776 ndof auf dem Viertelgebiet, Spiegelung auf die übrigen Quadranten.

9 Zusammenfassung

In dieser Masterarbeit wurden drei verschiedene dPG-Methoden für das Problem der Navier-Lamé-Gleichungen der linearen Elastizität untersucht. Diese Klasse von Methoden beruht auf der Minimierung eines Residuums in der Dualnorm. Es wurde allgemein gezeigt, dass für die a-priori- und a-posteriori-Stabilität einer solchen Methode in Hilberträumen neben der Lösbarkeit des kontinuierlichen Problems eine kontinuierliche und eine diskrete Inf-Sup-Bedingung hinreichend sind.

Für die drei in dieser Arbeit untersuchten Methoden, die alle den großen Vorteil der punktweise symmetrischen Spannungsdiskretisierung aufweisen, wurde dabei die ultraschwache Formulierung der Navier-Lamé-Gleichungen zur Hand genommen. Die Definition zusätzlicher Unbekannter in Form von Spurtermen auf dem Skelett der Triangulierung ermöglichte die Wahl gebrochener Testräume. Die deshalb großen Testräume erlauben dann den Beweis der Inf-Sup-Bedingungen, die im Hauptteil bewiesen wurden. Es wurden dabei für die Beweise der kontinuierlichen Inf-Sup-Bedingungen einige sehr nützliche Techniken eingeführt und benutzt, darunter ein Splitting-Lemma, Dualitätslemmas und die Wohlgestelltheit der üblichen dualen gemischten Formulierung. Die Beweise der diskreten Inf-Sup-Bedingung hingegen machten in den kritischen Schritten Gebrauch von einer Helmholtz-Zerlegung.

Besonderer Augenmerk wurde in allen Beweisen auf das genaue Protokollieren der Konstanten gelegt. Um Robustheit der Methode auch für nahezu inkompressible Materialien zu gewährleisten, sollten die auftretenden Konstanten nicht vom Lamé-Parameter λ abhängen. Dies erforderte oftmals zusätzlichen Aufwand, jedoch konnten letztendlich alle Konstanten, häufig mithilfe des tr-dev-div-Lemmas, unabhängig von λ abgeschätzt werden. Der explizite Gebrauch des Parameters λ in den Normen der beiden Energiemethoden ließ dennoch einen Locking-Effekt befürchten, weshalb mit der L^2 - H^1 -Methode eine Methode eingeführt wurde, von der aufgrund der veränderten Normen kein Locking erwartet wird.

Die numerischen Ergebnisse bestätigen die Stabilität der Methode. Es wurden neben akademischen Beispielen mit bekannter exakter Lösung auch einige durch tatsächliche Anwendungen motivierte Probleme betrachtet. Die Energiemethoden zeigten dabei tatsächlich für ein Beispiel ein Locking-Verhalten, während die L^2 - H^1 -Methode sich auch dort stabil im Parameter λ verhielt. Die Energiemethoden unterscheiden sich jedoch kaum. Die Experimente mit adaptiver Verfeinerung zeigten im Vergleich zur uniformen Verfeinerungsstrategie stets eine gleiche oder sogar bessere Konvergenzrate und waren in allen Beispielen in der Lage, die optimale Konvergenzrate zu erreichen.

Die Untersuchung der adaptiven dPG-Methoden auf Konvergenz und optimale Konvergenzraten stellt demnach perspektivisch einen weiteren Schritt der theoretischen Betrachtungen in diesem Kontext dar. Für dPG-Methoden im Allgemeinen sind dazu noch keinerlei analytische Ergebnisse vorhanden. Weitere offene Arbeitspunkte könnten etwa die Verallgemeinerung der Methoden auf höhere Raumdimensionen, allgemeinere Triangulierungen und höhere Polynomgrade sein.

Literatur

- [AAW08] Douglas N. Arnold, Gerard Awanou und Ragnar Winther. „Finite elements for symmetric tensors in three dimensions“. In: *Math. Comp.* 77.263 (2008), S. 1229–1251.
- [ABD84] Douglas N. Arnold, Franco Brezzi und Jim Douglas Jr. „PEERS: a new mixed finite element for plane elasticity“. In: *Japan J. Appl. Math.* 1.2 (1984), S. 347–367.
- [ACFK02] J. Alpert, C. Carstensen, S.A. Funken und R. Klose. „Matlab implementation of the finite element method in elasticity“. In: *Computing* 69.3 (2002), S. 239–263.
- [Alt06] Hans Wilhelm Alt. *Lineare Funktionalanalysis*. 5. Aufl. Heidelberg: Springer-Verlag, 2006.
- [AW02] Douglas N. Arnold und Ragnar Winther. „Mixed finite elements for elasticity“. In: *Numer. Math.* 92.3 (2002), S. 401–419.
- [AW03] Douglas N. Arnold und Ragnar Winther. „Nonconforming mixed elements for elasticity“. In: *Math. Models Methods Appl. Sci.* 13.3 (2003), S. 295–307.
- [BBF13] Daniele Boffi, Franco Brezzi und Michel Fortin. *Mixed finite element methods and applications*. Bd. 44. Springer Series in Computational Mathematics. Springer, Heidelberg, 2013.
- [BDGQ12] Jamie Bramwell, Leszek Demkowicz, Jay Gopalakrishnan und Weifeng Qiu. „A locking-free *hp* DPG method for linear elasticity with symmetric stresses“. In: *Numer. Math.* 122.4 (2012), S. 671–707.
- [BMS02] Carlo L. Bottasso, Stefano Micheletti und Riccardo Sacco. „The discontinuous Petrov-Galerkin method for elliptic problems“. In: *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 191.31 (2002), S. 3391–3409.
- [Bra13] Dietrich Braess. *Finite Elemente*. 5. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2013.
- [Bri12] Philipp Bringmann. „Least-Squares Finite-Elemente-Methoden für die Stokes-Gleichungen“. Lokal verfügbar. Bachelorarbeit. Humboldt-Universität zu Berlin, 2012.
- [BS08] Susanne C. Brenner und L. Ridgway Scott. *The mathematical theory of finite element methods*. 3. Aufl. Bd. 15. Texts in Applied Mathematics. Springer, New York, 2008.
- [BS92] Ivo Babuška und Manil Suri. „Locking effects in the finite element approximation of elasticity problems“. In: *Numer. Math.* 62.4 (1992), S. 439–463.
- [Car09a] Carsten Carstensen. *AFEM Software-Paket*. Humboldt-Universität zu Berlin, 2009.
- [Car09b] Carsten Carstensen. „Yonsei Lectures at the WCU Department Computational Science and Engineering on Finite Element Method“. Lokal verfügbar. 2009.
- [CD98] C. Carstensen und G. Dolzmann. „A posteriori error estimates for mixed FEM in elasticity“. In: *Numer. Math.* 81.2 (1998), S. 187–209.
- [CDFH00] C. Carstensen, G. Dolzmann, S.A. Funken und D.S. Helm. „Locking-free mixed finite element methods in linear elasticity“. In: *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 190.13–14 (2000), S. 1701–1781.

- [CDG14a] C. Carstensen, L. Demkowicz und J. Gopalakrishnan. „The paradigm of broken test-functions in DPG discretisations of elliptic second-order PDEs.“ In Vorbereitung. 2014.
- [CDG14b] Carsten Carstensen, Leszek Demkowicz und Jay Gopalakrishnan. „A posteriori error control for DPG methods“. In: *SIAM J. Numer. Anal.* 52.3 (2014), S. 1335–1353.
- [CEG11] C. Carstensen, M. Eigel und J. Gedicke. „Computational competition of symmetric mixed FEM in linear elasticity“. In: *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 200.41–44 (2011), S. 2903–2915.
- [CGHW14] C. Carstensen, D. Gallistl, F. Hellwig und L. Weggler. „Low-order dPG-FEM for an elliptic PDE“. In: *Comput. Math. Appl.* 68.11 (2014), S. 1503–1512.
- [CGS14] C. Carstensen, D. Gallistl und M. Schedensack. „ L^2 best-approximation of the elastic stress in the Arnold-Winther FEM“. In: (2014). Preprint 2014-15, Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik.
- [CH14] C. Carstensen und Friederike Hellwig. „A Low-Order dPG-FEM for Linear Elasticity“. In Vorbereitung. 2014.
- [Cia88] Philippe G. Ciarlet. *Mathematical elasticity. Vol. I*. Bd. 20. Studies in Mathematics and its Applications. Three-dimensional elasticity. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1988.
- [CL91] Philippe G. Ciarlet und Jacques-Louis Lions. *Handbook of numerical analysis. 2. Finite element methods ; (pt. 1)*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1991.
- [Coo74] Robert D. Cook. „Improved Two-Dimensional Finite Element“. In: *Journal of the Structural Division* 100.9 (1974), S. 1851–1863.
- [Cou43] R. Courant. „Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations“. In: *Bull. Amer. Math. Soc.* 49 (1943), S. 1–23.
- [DG10] L. Demkowicz und J. Gopalakrishnan. „A class of discontinuous Petrov-Galerkin methods. Part I: the transport equation“. In: *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 199.23-24 (2010), S. 1558–1572.
- [DG11a] L. Demkowicz und J. Gopalakrishnan. „A class of discontinuous Petrov-Galerkin methods. II. Optimal test functions“. In: *Numer. Methods Partial Differential Equations* 27.1 (2011), S. 70–105.
- [DG11b] L. Demkowicz und J. Gopalakrishnan. „Analysis of the DPG method for the Poisson equation“. In: *SIAM J. Numer. Anal.* 49.5 (2011), S. 1788–1809.
- [DGN12] Leszek Demkowicz, Jay Gopalakrishnan und Antti H. Niemi. „A class of discontinuous Petrov-Galerkin methods. Part III: Adaptivity“. In: *Appl. Numer. Math.* 62.4 (2012), S. 396–427.
- [EM73] Martin A. Eisenberg und Lawrence E. Malvern. „On finite element integration in natural co-ordinates“. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 7.4 (1973), S. 574–575.
- [For11] Otto Forster. *Analysis 2*. 9. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2011.
- [GHSW14] Dietmar Gross, Werner Hauger, Jörg Schröder und Wolfgang A. Wall. *Technische Mechanik 2 - Elastostatik*. 12. Aufl. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2014.

- [GQ14] J. Gopalakrishnan und W. Qiu. „An analysis of the practical DPG method“. In: *Math. Comp.* 83.286 (2014), S. 537–552.
- [KS95] Reijo Kouhia und Rolf Stenberg. „A linear nonconforming finite element method for nearly incompressible elasticity and Stokes flow“. In: *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 124.3 (1995), S. 195–212.
- [Ode91] J. Tinsley Oden. „Finite elements: an introduction“. In: *Handbook of numerical analysis, Vol. II.* Handb. Numer. Anal., II. North-Holland, Amsterdam, 1991, S. 3–15.
- [PW60] L.E. Payne und H.F. Weinberger. „An optimal Poincaré inequality for convex domains“. In: *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 5.1 (1960), S. 286–292.
- [RBD14] Nathan V. Roberts, Tan Bui-Thanh und Leszek Demkowicz. „The DPG method for the Stokes problem“. In: *Comput. Math. Appl.* 67.4 (2014), S. 966–995.
- [SK11] Hans-Rudolf Schwarz und Norbert Köckler. *Numerische Mathematik*. 8. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2011.
- [Smi98] Donald R. Smith. *Variational methods in optimization*. Reprint of the 1974 original. New York: Dover Publications, 1998.
- [Tem77] Roger Temam. *Navier-Stokes equations. Theory and numerical analysis*. Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 2. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York-Oxford, 1977, S. x+500.
- [Wer11] Dirk Werner. *Funktionalanalysis*. 7. Aufl. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2011.

Selbstständigkeitserklärung

Ich erkläre, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe und ich zum ersten Mal eine Masterarbeit in diesem Studiengang einreiche.

Berlin, den 05.12.2014

Datum, Unterschrift