Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät
Institut für Mathematik

Die Crouzeix-Raviart Finite-Elemente Methode für eine Minimierung im Raum der Funktionen von beschränkter Variation

Enrico Bergmann

Version: 22. September 2020

Inhaltsverzeichnis

Todo list

1. Einleitung

[ABM] modelization of a large number of problems in physics, mechanics, or image processing requires the introducion of new functionals spaces permitting discontinuities of the solution. In phase transitions, image segmentation, plasticity theory, the study of crasks and fissures, the study of the wake in fluid dynamics , and so forth, the solution of the problem presents discontinuities along one-odimensionalmanifolds. - solution of these problems cannot be found in classical Sobolev spaces

[Braides] 1st page: image reconstruction might be our functional

Viele physikalischen Anwendungen können mit kontinuierlichen Funktionen nicht beschrieben werden [Bartels, Error Control and Adaptivity for a variational model problem defined on functions of bounded variation, und darin zitierte Quellen].

TODO schreibe Einleitung, zitiere Quellen, die Anwendungen beschreiben

2. Theoretische Grundlagen

TODO nur die Sachen rausschreiben/zusammentragen/zitieren (um später Theoreme und Gleichungen zitieren zu können statt Bücher) die auch wirklich gebraucht werden später in Beweisen. Insbesondere am Ende nochmal durchgucken, was wirklich gebraucht wurde und ungebrauchtes und/oder uninteressanter und/oder unwichtiges rauswerfen

2.1. Maßtheoretische Grundlagen

TODO doch noch wenigstens eine einfach Def für Radon Maße (vor allem mit Zitat zu einer Quelle

TODO Maßtheorie für Vektormaße ist absolut nicht notwenig, da meine Anwendung ausschließlich von R2 nach R geht Möglicherweise kann ich also doch eine durchgehende Geschichte erzählen und insbesondere alles verstehen, im Quelltext sind noch auskommentierte Theorem zur Maßtheorie

2.2. Direkte Methode der Variationsrechnung

2.3. Subdifferential

2.4. Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen

2.5. Funktionen Beschränkter Variation

Dieser Abschnitt folgt Kapitel 10 von [Bar15]. Dabei sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes, polygonal berandetes Lipschitz-Gebiet.

Direkt von R2 ausgehen, weil mehr im Programm nicht geht?

TODO jede übernommene Definition/Theorem/etc. zitieren trotz Disclaimer oben? jede Notation erklären bzw. definieren? Falls ja; am Anfang oder Ende der Arbeit?

Definition 2.1. Die Vervollständigung des Raums $C_C^\infty(\Omega;\mathbb{R}^m)$ bezüglich der Norm $\|\bullet\|_{L^\infty(\Omega)}$ ist ein separabler Banachraums und wird bezeichnet mit $C_0(\Omega;\mathbb{R}^m)$. Der Dualraum $\mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ von $C_0(\Omega;\mathbb{R}^m)$ wird durch den Riesz'schen Darstellungssatz identifiziert mit dem Raum aller (vektoriellen) Radon Maße. Dabei wird die Anwendung von $\mu \in \mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ auf $\phi \in C_0(\Omega;\mathbb{R}^m)$ identifiziert mit

TODO vielleicht zu Grundlagen über Radonmaße verschieben

TODO zitiere?

$$\langle \mu, \phi \rangle = \int_\Omega \phi \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \phi(x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Definition 2.2 (Funktionen beschränkter Variation)**.** Eine Funktion $u \in L^1(\Omega)$ ist von beschränkter Variation, wenn ihre distributionelle Ableitung ein Radonmaß definiert, d.h. eine Konstante $c \geqslant 0$ existiert, sodass

$$\langle Du, \Phi \rangle = -\int_\Omega u \operatorname{div}(\phi)\, \mathrm{d}x \leqslant c\|\phi\|_{L^\infty(\Omega)} \tag{2.1}$$

für alle $\phi \in C_C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$.

Die minimale Konstante $c \geqslant 0$, die (2.1) erfüllt, heißt totale Variation von Du und besitzt die Darstellung

$$|u|_{\mathrm{BV}(\Omega)} = \sup_{\substack{\phi \in C_C^1(\Omega;\mathbb{R}^n) \\ \|\phi\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant 1}} -\int_\Omega u \operatorname{div}(\phi)\, \mathrm{d}x.$$

Der Raum aller Funktionen beschränkter Variation $\mathrm{BV}(\Omega)$ ist ausgestattet mit der Norm

$$\|u\|_{\mathrm{BV}(\Omega)} := \|u\|_{L^1(\Omega)} + |u|_{\mathrm{BV}(\Omega)}$$

für $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$.

Bemerkung 2.3. Es gilt $W^{1,1}(\Omega) \subset \mathrm{BV}(\Omega)$ und $\|u\|_{\mathrm{BV}(\Omega)} = \|u\|_{W^{1,1}(\Omega)}$ für alle $u \in W^{1,1}(\Omega)$. es gilt für diese u tatsächlich (nach BV lecture04) ca. $|u|_{\mathrm{BV}(\Omega)=\|\nabla u\|_{L^1(\Omega)}}$

Definition 2.4. Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{BV}(\Omega)$ und sei $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$ mit $u_n \to u$ in $L^1(\Omega)$ für $n \to \infty$.

(i) Die Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert strikt gegen u, wenn $|u_n|_{\mathrm{BV}(\Omega)} \to |u|_{\mathrm{BV}(\Omega)}$ für $n \to \infty$. strikte Konvergenz gdw. ($\|u - u_n\|_{L^1(\Omega)} \to 0$ und $|u_n|_{\mathrm{BV}(\Omega)} \to |u|_{\mathrm{BV}(\Omega)}$) was impliziert $\|u_n\|_{\mathrm{BV}} \to \|u\|_{\mathrm{BV}}$ aber nicht unbedingt $\|u_n - u\|_{\mathrm{BV}} \to 0$, da nicht folgt, dass $|u_n - u|_{\mathrm{BV}} \to 0$

aus BV Konvergenz, also $\|u_n - u\|_{\mathrm{BV}} \to 0$, folgt hingegen aber ($\|u - u_n\|_{L^1(\Omega)} \to 0$ und $|u_n - u|_{\mathrm{BV}(\Omega)} \to 0$), also insbesondere ($\|u - u_n\|_{L^1(\Omega)} \to 0$ und $|u_n|_{\mathrm{BV}(\Omega)} \to |u|_{\mathrm{BV}(\Omega)}$), d.h. strikte Konvergenz

jede BV konvergente Folge ist also strikt konvergent aber nicht umgekehrt, es gibt also mehr strikt konvergente Folgen, deshalb klingt es sinnvoll, dass wir BV Funktionen durch C^∞ Funktionen (usw.) approximieren können bzgl strikter Konvergenz aber nicht bzgl BV Konvergenz (strong topology, vgl. Ende von BV lecture04

(ii) Die Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert schwach gegen u, wenn $Du_n \rightharpoonup^* Du$ in $\mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ für $n \to \infty$, d.h. für alle $\phi \in C_0(\Omega; \mathbb{R}^n)$ gilt $\langle Du_n, \phi \rangle \to \langle Du, \phi \rangle$ für $n \to \infty$.

Theorem 2.5 (Schwache Unterhalbstetigkeit)**.** *Seien $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{BV}(\Omega)$ und $u \in L^1(\Omega)$ mit $|u_n|_{\mathrm{BV}(\Omega)} \leqslant c$ für ein $c > 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$ und $u_n \to u$ in $L^1(\Omega)$ für $n \to \infty$.*

Dann gilt $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$ und $|u|_{\mathrm{BV}(\Omega)} \leqslant \liminf_{n\to\infty} |u_n|_{\mathrm{BV}(\Omega)}$. Außerdem gilt $u_n \rightharpoonup u$ in $\mathrm{BV}(\Omega)$ für $n \to \infty$.

Theorem 2.6 (Appoximation mit glatten Funktionen). *Die Räume* $C^\infty(\overline{\Omega})$ *und* $C^\infty(\Omega) \cap \mathrm{BV}(\Omega)$ *liegen dicht in* $\mathrm{BV}(\Omega)$ *bezüglich strikter Konvergenz.*

BV lecture05 Thm 2.4 liefert sogar (Folge in $C^\infty \cap W^{1,1}$*) sowohl strikte als auch schwache Konvergenz gegen gegebenes* $u \in \mathrm{BV}$*, also wir haben nach diesem Thm die Dichte von* $C^\infty \cap W^{1,1}$ *bzgl. strikter und schwacher BV Konvergenz*

da für Folgen in $W^{1,1}$ *BV und* $W^{1,1}$ *Norm übereinstimmen und da* $W^{1,1}$ *der Abschluss von* C^∞ *bzgl. der* $W^{1,1}$ *Norm ist (* C^∞ *dicht in* $W^{1,1}$ *bzgl. W11 Norm), ist für* $W^{1,1}$ *Funktionen W11 auch Abschluss von Cinfty bzgl der BV Norm (Cinfty dicht in W11 bzhl BV Norm)*

JETZT DER KNACKPUNKT und wie aus Thmeorem 2.6 gefolgert werden kann was in BV lecture steht: da BV Konvergenz strikte Konvergenz impliziert, ist also Cinfty auch dicht in W11 bzgl strikter Konvergenz und W11 ist Teilmenge von BV. Da A dicht in B und B Teilmenge C impliziert das B dicht in C (wiki, natürlich beides bzgl gleicher Metrik), folgt insgesamt W11 dicht in BV bzgl strikter Konvergenz

MORGEN CONTINUE IN WITH THIS IN EXISTENCE PROOF: NOW I might know WHY infimizing sequence in BV can simply be choosen in W11 or something (Think about it and what bartels did)

Theorem 2.7. *Sei* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{BV}(\Omega)$ *eine beschränkte Folge. Dann existiert eine Teilfolge* $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *und ein* $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$*, sodass* $u_{n_k} \rightharpoonup u$ *in* $\mathrm{BV}(\Omega)$ *für* $k \to \infty$*. augenscheinlich nicht in BV lecture*

Theorem 2.8. *Die Einbettung* $\mathrm{BV}(\Omega) \to L^p(\Omega)$ *ist stetig für* $1 \leqslant p \leqslant n/(n-1)$ *und kompakt für* $1 \leqslant p < n/(n-1)$

TODO vielleicht wichtig, Quelle braucht es noch

Theorem 2.9 (Spuroperator). *Es existiert ein linearer Operator* $T : \mathrm{BV}(\Omega) \to L^1(\partial\Omega)$ *mit* $T(u) = u|_{\partial\Omega}$ *für alle* $u \in \mathrm{BV}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Der Operator T *ist stetig bezüglich strikter Konvergenz in* $\mathrm{BV}(\Omega)$*, aber nicht stetig bezüglich schwacher Konvergenz in* $\mathrm{BV}(\Omega)$.

TODO finde Quelle, nur ein Remark in Bartels (wird aber für CCs Funktional offensichtlich gebraucht, es gibt noch weitere Aussagen in Bartels (zB integration by parts aber erstmal nur Existens und Stetigkeit hier (wie gesagt, nur was gebraucht wird zitieren, oder?)

3. Das kontinuierliche Problem

Betrachte für gegebene $\alpha > 0$ und $f \in L^2(\Omega)$ das folgende Minimierungsproblem.

Problem 3.1. Finde $u \in \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$, sodass u das Funktional

$$E(v) := \frac{\alpha}{2}\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + |v|_{\mathrm{BV}(\Omega)} + \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} - \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x \tag{3.1}$$

unter allen $v \in \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ minimiert.

TODO Vielleicht auch erst beim Diskreten Problem, da es dort Nullranddaten gibt? Beachte insbesondere, dass $f = \alpha g$

Bemerkung 3.2.
In [Bar15, Kapitel 10.1.3] wird Problem 3.1 für ein gegebenes $g \in L^2(\Omega)$ formuliert mit dem Funktional

$$I(v) := |v|_{\mathrm{BV}(\Omega)} + \frac{\alpha}{2}\int_\Omega (v-g)^2 \,\mathrm{d}x$$

für $v \in \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$. Für $f = \alpha g$ gilt $I(v) = E(v) - \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} + \frac{\alpha}{2}\|g\|^2_{L^2(\Omega)}$ für alle $v \in \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$. Da der Term $\frac{\alpha}{2}\|g\|^2_{L^2(\Omega)}$ konstant ist, haben beide Funktionale die gleichen Minimierer in $\left\{v \in \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega) \mid \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} = 0\right\}$.

Theorem 3.3 (Existenz einer Lösung)**.** *Problem 3.1 besitzt eine Lösung $u \in \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$.*

Beweis. Das Funktional E in (3.1) ist nach unten beschränkt, denn für alle $v \in \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ gilt mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und der Youngschen Ungleichung

TODO Ungleichungen erwähnen/zitieren in Kapitel 1

$$\begin{aligned}
E(v) &= \frac{\alpha}{2}\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + |v|_{\mathrm{BV}(\Omega)} + \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} - \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x \\
&\geqslant \frac{\alpha}{2}\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + |v|_{\mathrm{BV}(\Omega)} + \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} - \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\geqslant \frac{\alpha}{2}\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + |v|_{\mathrm{BV}(\Omega)} + \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} - \frac{1}{\alpha}\|f\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{\alpha}{4}\|v\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\geqslant \frac{\alpha}{4}\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + |v|_{\mathrm{BV}(\Omega)} + \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} - \frac{1}{\alpha}\|f\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\geqslant -\frac{1}{\alpha}\|f\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Somit existiert eine infimierende Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ von E, d.h. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllt $\lim_{n\to\infty} E(u_n) = \inf_{v\in\mathrm{BV}(\Omega)\cap L^2(\Omega)} E(v)$.

Gleichung (3.2) impliziert außerdem, dass $E(u_n) \to \infty$ falls $|u_n|_{\mathrm{BV}(\Omega)} \to \infty$ für $n \to \infty$. Falls andererseits $|u_n|_{\mathrm{BV}(\Omega)} \leqslant c$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und ein $c \in \mathbb{R}_+$ aber $\|u_n\|_{\mathrm{BV}(\Omega)} \to \infty$

für $n \to \infty$, folgt nach Definition von $\|\bullet\|_{\mathrm{BV}(\Omega)}$, dass $\int_\Omega |u_n| \,\mathrm{d}x = \|u_n\|_{L^1(\Omega)} \to \infty$ für $n \to \infty$. Dafür ist für fast alle $x \in \mathbb{R}$ notwendig, dass $|u_n(x)| \to \infty$ für $n \to \infty$, also insbesondere $|u_n(x)| \geqslant 1$ für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt für solche hinreichend große $n \in \mathbb{N}$, dass $\|u_n\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |u_n| \,\mathrm{d}x \leqslant \int_\Omega |u_n|^2 \,\mathrm{d}x = \|u_n\|^2_{L^2(\Omega)}$ und somit ebenfalls durch Gleichung (3.2) $E(u_n) \to \infty$ für $n \to \infty$.

Die Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ muss also beschränkt in $\mathrm{BV}(\Omega)$ sein, da sonst $(E(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt divergiert, im Widerspruch dazu, dass $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ infimierende Folge ist.

Nun garantiert Theorem 2.7 die Existenz einer schwach konvergenten Teilfolge $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit schwachem Grenzwert $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Aus Gleichung (3.2) folgt $E(v) \to \infty$ für $\|v\|_{L^2(\Omega)} \to \infty$. Somit muss $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch beschränkt sein bezüglich der Norm $\|\bullet\|_{L^2(\Omega)}$ und besitzt deshalb wegen der Reflexivität von $L^2(\Omega)$ eine Teilfolge (ohne Beschränkung der Allgemeinheit weiterhin bezeichnet mit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$), die in $L^2(\Omega)$ schwach gegen $\tilde{u} \in L^2(\Omega)$ konvergiert.

Allerdings bedeutet die schwache Konvergenz $u_n \rightharpoonup u$ in $\mathrm{BV}(\Omega)$ insbesondere, dass $u_n \to u$ in $L^1(\Omega)$. Es gilt

$$
\begin{aligned}
u_n \to u \text{ in } L^1(\Omega) &\Rightarrow \|u_n - u\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |u_n - u| \,\mathrm{d}x \to 0 \\
&\Rightarrow |u_n(x) - u(x)| \to 0 \text{ a.e. in } \Omega \\
&\Rightarrow |u_n(x) - u(x)|^2 \to 0 \text{ a.e. in } \Omega \\
&\Rightarrow \|u_n - u\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |u_n - u|^2 \,\mathrm{d}x \to 0 \\
&\Rightarrow u_n \to u \text{ in } L^2(\Omega) \\
&\Rightarrow u_n \rightharpoonup u \text{ in } L^2(\Omega).
\end{aligned}
$$

TODO wahrscheinlich falsch, Konvergenz in Norm impliziert i.A. nicht Konvergenz a.e. oder umgekehrt

Da schwache Grenzwerte eindeutig bestimmt sind, gilt also $u = \tilde{u} \in L^2(\Omega)$, d.h. $u \in \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$.

Theorem 2.5 liefert die schwache Unterhalbstetigkeit der Seminorm $|\bullet|_{\mathrm{BV}(\Omega)}$ bezüglich schwacher Konvergenz in $\mathrm{BV}(\Omega)$.

Randterm sufs? Die beiden verbleibenden Terme sind ufs, aber auch sufs?

Damit gilt insgesamt

$$
\inf_{v\in\mathrm{BV}(\Omega)\cap L^2(\Omega)} E(v) \leqslant E(u) \leqslant \liminf_{n\to\infty} E(u_n) = \lim_{n\to\infty} E(u_n) = \inf_{v\in\mathrm{BV}(\Omega)\cap L^2(\Omega)} E(v),
$$

d.h. $\min_{v\in\mathrm{BV}(\Omega)\cap L^2(\Omega)} E(v) = E(u)$. □

Theorem 3.4 (Stabilität und Eindeutigkeit). *Seien $u_1, u_2 \in \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ die Minimierer des Problems 3.1 mit $f_1, f_2 \in L^2(\Omega)$ anstelle von f.*

Dann gilt

$$
\|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \|f_1 - f_2\|_{L^2(\Omega)}.
$$

Beweis. Definiere die konvexen Funktionale $F : \mathrm{BV}(\Omega) \to \mathbb{R}$ und $G_\ell : L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$, $\ell = 1, 2$, durch

$$F(u) := |u|_{\mathrm{BV}(\Omega)} + \|u\|_{L^1(\partial\Omega)}, \qquad G_\ell(u) := \frac{\alpha}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega f_\ell u \,\mathrm{d}x.$$

Bezeichne $E_\ell := F + G_\ell$ und setze F auf $L^2(\Omega)$ durch ∞ fort.

G_ℓ ist Fréchet-differenzierbar mit Fréchet-Ableitung

$$\delta G_\ell(u)[v] = \alpha(u, v)_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega f_\ell v \,\mathrm{d}x = (\alpha u - f_\ell, v)_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } v \in L^2(\Omega).$$

Das Funktional F ist konvex, deshalb (TODO quote Rf) ist das Subdifferential ∂F von F monoton, d.h. für alle $\mu_\ell \in \partial F(u_\ell)$, $\ell = 1, 2$, gilt

$$(\mu_1 - \mu_2, u_1 - u_2)_{L^2(\Omega)} \geqslant 0. \tag{3.3}$$

Für $\ell = 1, 2$ wird E_ℓ von u_ℓ minimiert, deshalb gilt $0 \in \partial E_\ell(u_\ell) = \partial F(u_\ell) + \partial G_\ell(u_\ell) = \partial F(u_\ell) + \{\delta G_\ell(u_\ell)\}$ (TODO quote) und es folgt $-\delta G_\ell(u_\ell) \in \partial F(u_\ell)$. Daraus folgt zusammen mit (3.3)

$$\big(-(\alpha u_1 - f_1) + (\alpha u_2 - f_2), u_1 - u_2 \big)_{L^2(\Omega)} \geqslant 0.$$

Umformen und Anwenden der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung impliziert

$$\begin{aligned} \alpha\|u_1 - u_2\|^2_{L^2(\Omega)} &\leqslant \big(f_1 - f_2, u_1 - u_2\big)_{L^2(\Omega)} \\ &\leqslant \|f_1 - f_2\|_{L^2(\Omega)}\|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

TODO wie verschwindet das α hier? Oder verpasst man der Abschätzung im Satz noch eine Konstante $1/\alpha$ vor der oberen Schranke?

Falls $\|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega)} = 0$, gilt der Satz. Ansonsten führt Division durch $\|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega)} \neq 0$ den Beweis zum Abschluss. □

4. Das diskrete Problem

Betrachte für gegebenes $\alpha > 0$ und rechte Seite $f \in L^2(\Omega)$ folgende Diskretisierung von Problem 3.1.

Problem 4.1. Finde $u_{\mathrm{CR}} \in V_{\mathrm{NC}}(\mathcal{T}) := \mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$, sodass u_{CR} das Funktional

$$E_{\mathrm{NC}}(v_{\mathrm{CR}}) := \frac{\alpha}{2}\|v_{\mathrm{CR}}\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla_{\mathrm{NC}} v_{\mathrm{CR}}\|_{L^1(\Omega)} - \int_\Omega f v_{\mathrm{CR}}\,\mathrm{d}x \tag{4.1}$$

unter allen $v_{\mathrm{CR}} \in V_{\mathrm{NC}}(\mathcal{T})$ minimiert.

Für $v_{\mathrm{CR}} \in V_{\mathrm{NC}}(\mathcal{T})$, $\Lambda \in \mathbb{P}_0(\mathcal{T};\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned} K_1(0) &:= \{\Lambda \in L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^n) \mid |\Lambda(\bullet)| \leqslant 1 \text{ fast überall in } \Omega\}, \\ I_{K_1(0)}(\Lambda) &:= \begin{cases} -\infty, & \text{falls } \Lambda \notin K_1(0) \text{ und} \\ 0, & \text{falls } \Lambda \in K_1(0), \end{cases} \end{aligned}$$

ist das dazugehörige Lagrange-Funktional definert als

$$\mathcal{L}_h(v_{\mathrm{CR}}, \Lambda) := \int_\Omega \Lambda \cdot \nabla_{\mathrm{NC}} v_{\mathrm{CR}}\,\mathrm{d}x + \frac{\alpha}{2}\|v_{\mathrm{CR}}\|^2_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega f v_{\mathrm{CR}}\,\mathrm{d}x - I_{K_1(0)}(\Lambda) \tag{4.2}$$

und das Sattelpunktsproblem dem entsprechend wie folgt.

Problem 4.2. Löse

$$\inf_{v_{\mathrm{CR}} \in V_{\mathrm{NC}}(\mathcal{T})} \sup_{\Lambda \in \mathbb{P}_0(\mathcal{T};\mathbb{R}^n)} \mathcal{L}_h(v_{\mathrm{CR}}, \Lambda).$$

Theorem 4.3 (Charakterisierung diskreter Lösungen)**.** *Es existiert eine eindeutiges Lösung $u_{\mathrm{CR}} \in V_{\mathrm{NC}}(\mathcal{T})$ von Problem 4.1. Außerdem gelten folgende äquivalente Charakterisierungen von u_{CR}.*

(i) Es existiert ein $\Lambda \in \mathbb{P}_0(\mathcal{T};\mathbb{R}^n)$ mit $|\Lambda(\bullet)| \leqslant 1$ fast überall in Ω, sodass

$$\begin{aligned} \Lambda(\bullet)\cdot\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}(\bullet) &= |\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}(\bullet)| \quad \textit{fast überall in } \Omega \textit{ und} \\ (\Lambda, \nabla_{\mathrm{NC}} v_{\mathrm{CR}})_{L^2(\Omega)} &= (f - \alpha u_{\mathrm{CR}}, v_{\mathrm{CR}})_{L^2(\Omega)} \quad \textit{für alle } v_{\mathrm{CR}} \in V_{\mathrm{NC}}(\mathcal{T}). \end{aligned}$$

(ii) Für alle $v_{\mathrm{CR}} \in V_{\mathrm{NC}}(\mathcal{T})$ gilt die Variationsungleichung

$$(f - \alpha u_{\mathrm{CR}}, v_{\mathrm{CR}} - u_{\mathrm{CR}})_{L^2(\Omega)} \leqslant \|\nabla_{\mathrm{NC}} v_{\mathrm{CR}}\|_{L^1(\Omega)} - \|\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}\|_{L^1(\Omega)}.$$

Beweis. (i). Es existiert eine eindeutige Lösung $u_{\mathrm{CR}} \in V_{\mathrm{NC}}(\mathcal{T})$ von Problem 4.1, deshalb besitzt das Sattelpunktsproblem 4.2 eine Lösung $(u_{\mathrm{CR}}, \Lambda) \in V_{\mathrm{NC}}(\mathcal{T}) \times$

$(\mathbb{P}_0(\mathcal{T};\mathbb{R}^n) \cap K_1(0)$. In der ersten Komponente ist das Lagrange-Funktional Fréchet-differenzierbar mit

$$\delta_{u_{\mathrm{CR}}}\mathcal{L}_h(u_{\mathrm{CR}},\Lambda)[v_{\mathrm{CR}}] = \int_\Omega \Lambda \cdot \nabla_{\mathrm{NC}} v_{\mathrm{CR}}\,\mathrm{d}x + \alpha(u_{\mathrm{CR}},v_{\mathrm{CR}})_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega f v_{\mathrm{CR}}\,\mathrm{d}x.$$

Die Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen für eine Lösung $(u_{\mathrm{CR}},\Lambda) \in V_{\mathrm{NC}} \times (\mathbb{P}_0(\mathcal{T};\mathbb{R}^n) \cap K_1(0))$ des Sattelpunktsproblems 4.2 lauten damit

$$\begin{aligned} 0 &= \delta_{u_{\mathrm{CR}}}\mathcal{L}_h(u_{\mathrm{CR}},\Lambda)[v_{\mathrm{CR}}] \\ &= \int_\Omega \Lambda \cdot \nabla_{\mathrm{NC}} v_{\mathrm{CR}}\,\mathrm{d}x + \alpha(u_{\mathrm{CR}},v_{\mathrm{CR}})_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega f v_{\mathrm{CR}}\,\mathrm{d}x \qquad \text{für alle } v_{\mathrm{CR}} \in V_{\mathrm{NC}} \qquad \text{und} \\ 0 &\in \partial_\Lambda \mathcal{L}_h(u_{\mathrm{CR}},\Lambda) = \{(\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}, \bullet)_{L^2(\Omega)}\} - \partial I_{K_1(0)}(\Lambda). \end{aligned}$$

Die erste Bedingung ist für alle $v_{\mathrm{CR}} \in V_{\mathrm{NC}}(\mathcal{T})$ äquivalent zu

$$(\Lambda, \nabla_{\mathrm{NC}} v_{\mathrm{CR}})_{L^2(\Omega)} = (f - \alpha u_{\mathrm{CR}}, v_{\mathrm{CR}})_{L^2(\Omega)}.$$

Die zweite Bedingung bedeutet, dass $(\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}, \bullet)_{L^2(\Omega)} \in -\partial I_{K_1(0)}(\Lambda)$, d.h. für alle $q_0 \in \mathbb{P}_0(\mathcal{T};\mathbb{R}^n)$ gilt

$$(\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}, q_0 - \Lambda)_{L^2(\Omega)} \leqslant I_{K_1(0)}(q_0) - I_{K_1(0)}(\Lambda) = I_{K_1(0)}(q_0).$$

Für $q_0 \in \mathbb{P}_0(\mathcal{T};\mathbb{R}^n) \cap K_1(0)$ folgt insbesondere

$$\begin{aligned} (\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}, q_0 - \Lambda)_{L^2(\Omega)} &\leqslant 0, \qquad \text{also} \\ (\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}, q_0)_{L^2(\Omega)} &\leqslant (\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}, \Lambda)_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Mit der Wahl $q_0 := \operatorname{sign} \nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}$, der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und $\Lambda \in K_1(0)$ impliziert das

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}|\,\mathrm{d}x &\leqslant (\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}, \Lambda)_{L^2(\Omega)} \\ &\leqslant \int_\Omega |\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}|\,|\Lambda|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_\Omega |\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}|\,\mathrm{d}x \qquad \text{bzw.} \\ \sum_{T\in\mathcal{T}} |T|\,\left|(\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}})_{|T}\right| &= \sum_{T\in\mathcal{T}} |T|\,(\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}} \cdot \Lambda)_{|T} \end{aligned}$$

Außerdem gilt mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung auf allen $T \in \mathcal{T}$, dass $(\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}} \cdot \Lambda)_{|T} \leqslant (\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}})_{|T}$. Dementsprechend muss sogar für alle $T \in \mathcal{T}$ gelten, dass $(\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}} \cdot \Lambda)_{|T} = (\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}})_{|T}$, d.h. fast überall in Ω gilt $\Lambda(\bullet) \cdot \nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}(\bullet) = |\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}(\bullet)|$. □

5. Numerische Realisierung

6. Experimente

6.1. Konstruktion eines Experiments mit exakter Lösung

Um eine rechte Seite zu finden, zu der die exakte Lösung bekannt ist, wähle eine Funktion des Radius $u \in H_0^1([0,1])$ mit Träger im zweidimensionalen Einheitskreis. Insbesondere muss damit gelten $u(1) = 0$ und u stetig. Die rechte Seite als Funktion des Radius $f \in L^2([0,1])$ ist dann gegeben durch

$$f := \alpha u - \partial_r(\operatorname{sign}(\partial_r u)) - \frac{\operatorname{sign}(\partial_r u)}{r},$$

wobei für $F \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ gilt $\operatorname{sign}(F) := \left\{\frac{F}{|F|}\right\}$ und $\operatorname{sign}(0) \in B_1(0)$. Damit außerdem gilt $f \in H_0^1([0,1])$, was z.B. für GLEB relevant ist, muss also noch Stetigkeit von $\operatorname{sign}(\partial_r u)$ und $\partial_r(\operatorname{sign}(\partial_r u))$ verlangt werden und $\partial_r(\operatorname{sign}(\partial_r u(1)) = \operatorname{sign}(\partial_r u(1)) = 0$. Damit f in 0 definierbar ist, muss auch gelten $\operatorname{sign}(\partial_r u) \in o(r)$ für $r \to 0$.

Damit erhält man für die Funktion

$$u_1(r) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } 0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{6}, \\ 1 + (6r-1)^\beta, & \text{wenn } \frac{1}{6} \leqslant r \leqslant \frac{1}{3}, \\ 2, & \text{wenn } \frac{1}{3} \leqslant r \leqslant \frac{1}{2}, \\ 2(\frac{5}{2} - 3r)^\beta, & \text{wenn } \frac{1}{2} \leqslant r \leqslant \frac{5}{6}, \\ 0, & \text{wenn } \frac{5}{6} \leqslant r, \end{cases}$$

wobei $\beta \geqslant 1/2$, mit der Wahl

$$\operatorname{sign}(\partial_r u_1(r)) = \begin{cases} 12r - 36r^2, & \text{wenn } 0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{6}, \\ 1, & \text{wenn } \frac{1}{6} \leqslant r \leqslant \frac{1}{3}, \\ \cos(\pi(6r-2)), & \text{wenn } \frac{1}{3} \leqslant r \leqslant \frac{1}{2}, \\ -1, & \text{wenn } \frac{1}{2} \leqslant r \leqslant \frac{5}{6}, \\ -\frac{1+\cos(\pi(6r-5))}{2}, & \text{wenn } \frac{5}{6} \leqslant r \leqslant 1, \end{cases}$$

die rechte Seite

$$f_1(r) := \begin{cases} \alpha - 12(2-9r), & \text{wenn } 0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{6}, \\ \alpha(1 + (6r-1)^\beta) - \frac{1}{r}, & \text{wenn } \frac{1}{6} \leqslant r \leqslant \frac{1}{3}, \\ 2\alpha + 6\pi \sin(\pi(6r-2)) - \frac{1}{r}\cos(\pi(6r-2)), & \text{wenn } \frac{1}{3} \leqslant r \leqslant \frac{1}{2}, \\ 2\alpha(\frac{5}{2} - 3r)^\beta + \frac{1}{r}, & \text{wenn } \frac{1}{2} \leqslant r \leqslant \frac{5}{6}, \\ -3\pi \sin(\pi(6r-5)) + \frac{1+\cos(\pi(6r-5))}{2r}, & \text{wenn } \frac{5}{6} \leqslant r \leqslant 1. \end{cases}$$

Für die Funktion

$$u_2(r) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } 0 \leqslant r \leqslant \frac{1-\beta}{2}, \\ -\frac{1}{\beta} r + \frac{1+\beta}{2\beta}, & \text{wenn } \frac{1-\beta}{2} \leqslant r \leqslant \frac{1+\beta}{2}, \\ 0, & \text{wenn } \frac{1+\beta}{2} \leqslant r, \end{cases}$$

erhält man mit der Wahl

$$\begin{aligned} &\operatorname{sign}(\partial_r u_2(r)) \\ &\quad := \begin{cases} \frac{4}{1-\beta} r \left(\frac{1}{1-\beta} r - 1 \right), & \text{wenn } 0 \leqslant r \leqslant \frac{1-\beta}{2}, \\ -1, & \text{wenn } \frac{1-\beta}{2} \leqslant r \leqslant \frac{1+\beta}{2}, \\ \frac{4}{(\beta-1)^3} \left(4r^3 - 3(\beta+3)r^2 + 6(\beta+1)r - 3\beta - 1 \right), & \text{wenn } \frac{1+\beta}{2} \leqslant r \leqslant 1, \end{cases} \end{aligned}$$

die rechte Seite

$$f_2(r) := \begin{cases} \alpha - \frac{4}{1-\beta} \left(\frac{3}{1-\beta} r - 2 \right), & \text{wenn } 0 \leqslant r \leqslant \frac{1-\beta}{2}, \\ -\frac{\alpha}{\beta} \left(r - \frac{1+\beta}{2} \right) + \frac{1}{r}, & \text{wenn } \frac{1-\beta}{2} \leqslant r \leqslant \frac{1+\beta}{2}, \\ \frac{-4}{(\beta-1)^3} \left(16r^2 - 9(\beta+3)r + 12(\beta+1) - \frac{3\beta+1}{r} \right), & \text{wenn } \frac{1+\beta}{2} \leqslant r \leqslant 1. \end{cases}$$

Damit können Experimente durchgeführt werden bei denen `exactSolutionKnown = true` gesetzt werden kann und entsprechend auch der L^2-Fehler berechnet wird.

Soll nun auch die Differenz der exakten Energie mit der garantierten unteren Energie Schranke (GLEB) berechnet werden, dann werden die stückweisen Gradienten der exakten Lösung und der rechten Seite benötigt.

Dabei gelten folgende Ableitungsregeln für die Ableitungen einer Funktion g, wenn man ihr Argument $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ in Polarkoordinaten mit Länge $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ und Winkel $\varphi = \operatorname{atan2}(x_2, x_1)$, wobei

$$\operatorname{atan2}(x_2, x_1) := \begin{cases} \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right), & \text{wenn } x_1 > 0, \\ \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right) + \pi, & \text{wenn } x_1 < 0, x_2 \geqslant 0, \\ \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right) - \pi, & \text{wenn } x_1 < 0, x_2 < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{wenn } x_1 = 0, x_2 > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{wenn } x_1 = 0, x_2 < 0, \\ \text{undefiniert}, & \text{wenn } x_1 = x_2 = 0, \end{cases}$$

auffasst,

$$\begin{aligned} \partial_{x_1} &= \cos(\varphi)\partial_r - \frac{1}{r}\sin(\varphi)\partial_\varphi, \\ \partial_{x_2} &= \sin(\varphi)\partial_r - \frac{1}{r}\cos(\varphi)\partial_\varphi. \end{aligned}$$

Ist g vom Winkel φ unabhängig, so ergibt sich

$$\nabla_{(x_1,x_2)} g = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))\partial_r g.$$

Unter Beachtung der trigonometrischen Zusammenhänge

$$\begin{aligned}\sin(\arctan(y)) &= \frac{y}{\sqrt{1+y^2}},\\ \cos(\arctan(y)) &= \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\end{aligned}$$

ergibt sich

$$(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) = (x_1, x_2)\frac{1}{r}$$

und damit

$$\nabla_{(x_1,x_2)} g = (x_1, x_2)\frac{\partial_r g}{r},$$

es muss also nur $\partial_r g$ bestimmt werden.

Die entsprechenden Ableitung lauten

$$\partial_r f_1(r) = \begin{cases} 108, & \text{wenn } 0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{6},\\ 6\alpha\beta(6r-1)^{\beta-1} + \frac{1}{r^2}, & \text{wenn } \frac{1}{6} \leqslant r \leqslant \frac{1}{3},\\ (36\pi^2 + \frac{1}{r^2})\cos(\pi(6r-2)) + \frac{6\pi}{r}\sin(\pi(6r-2)), & \text{wenn } \frac{1}{3} \leqslant r \leqslant \frac{1}{2},\\ -\left(6\alpha\beta\left(\frac{5}{2}-3r\right)^{\beta-1} + \frac{1}{r^2}\right), & \text{wenn } \frac{1}{2} \leqslant r \leqslant \frac{5}{6},\\ -\left(\left(18\pi^2 + \frac{1}{2r^2}\right)\cos(\pi(6r-5)) + \frac{1}{2r^2} + \frac{3\pi}{r}\sin(\pi(6r-5))\right), & \text{wenn } \frac{5}{6} \leqslant r \leqslant 1, \end{cases}$$

$$\partial_r u_1(r) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } 0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{6},\\ 6\beta(6r-1)^{\beta-1}, & \text{wenn } \frac{1}{6} \leqslant r \leqslant \frac{1}{3},\\ 0, & \text{wenn } \frac{1}{3} \leqslant r \leqslant \frac{1}{2},\\ -6\beta\left(\frac{5}{2}-3r\right)^{\beta-1}, & \text{wenn } \frac{1}{2} \leqslant r \leqslant \frac{5}{6},\\ 0, & \text{wenn } \frac{5}{6} \leqslant r, \end{cases}$$

$$\partial_r f_2(r) = \begin{cases} -\frac{12}{(1-\beta)^2}, & \text{wenn } 0 \leqslant r \leqslant \frac{1-\beta}{2},\\ -\frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{r^2}, & \text{wenn } \frac{1-\beta}{2} \leqslant r \leqslant \frac{1+\beta}{2},\\ -\frac{4}{(1-\beta)^3}\left(32r - 9(\beta+3) + \frac{3\beta+1}{r^2}\right), & \text{wenn } \frac{1+\beta}{2} \leqslant r \leqslant 1, \end{cases}$$

$$\partial_r u_2(r) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } 0 \leqslant r \leqslant \frac{1-\beta}{2},\\ -\frac{1}{\beta}, & \text{wenn } \frac{1-\beta}{2} \leqslant r \leqslant \frac{1+\beta}{2},\\ 0, & \text{wenn } \frac{1+\beta}{2} \leqslant r. \end{cases}$$

Mit diesen Informationen kann mit `computeExactEnergyBV.m` die exakte Energie berechnet werden und somit durch eintragen der exakten Energie in die Variable `exactEnergy` im Benchmark und setzen der Flag `useExactEnergy=true` das Experiment durch anschließendes Ausführen von `startAlgorithmCR.m` gestartet werden.

A. Appendix

Die erste Quelle (und wichtigste) ist [Bar15] und dann gibt es bisher noch [Roc70, S. 200]. Um zu testen zitiert man am besten [TPT99].

NOTE Bsp wie zitieren funktioniert und um Bib zu testen

Literatur

[Bar15] Sören Bartels. *Numerical Methods for Nonlinear Partial Differential Equations*. Bd. 47. Springer Series in Computational Mathematics. Springer International Publishing, 2015. ISBN: 978-3-319-13796-4. DOI: 10.1007/978-3-319-13797-1.

[Roc70] R. Tyrrell Rockafellar. *Convex Analysis*. Princeton University Press, 1970. ISBN: 0-691-08069-0. DOI: 10.1007/978-3-319-13797-1.

[TPT99] Test, Probe und Böse Tierversuch. *Test*. Versuch, 1999.

Selbständigkeitserklärung

Ich erkläre, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und noch nicht für andere Prüfungen eingereicht habe. Sämtliche Quellen, einschließlich Internetquellen, die unverändert oder abgewandelt wiedergegeben werden, insbesondere Quellen für Texte, Grafiken, Tabellen und Bilder, sind als solche kenntlich gemacht. Mir ist bekannt, dass bei Verstößen gegen diese Grundsätze ein Verfahren wegen Täuschungsversuchs bzw. Täuschung eingeleitet wird.

Berlin, den 22. September 2020,