Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät
Institut für Mathematik

Die Crouzeix-Raviart Finite-Elemente Methode für eine Minimierung im Raum der Funktionen von beschränkter Variation

Enrico Bergmann

Version: 16. Januar 2021

Inhaltsverzeichnis

Konvergenz im Fließtext nicht mit overset sondern das n to infty dahinter im Fließtext

Konvergenz Index überprüfen, n sollte nicht benutzt werden, da das schon die Dimension ist. Das heißt n zu k ändern und k zu j oder vielleicht, da umkomplizierter, d für die Dimension nutzen. Das gilt insbesondere für das ‚kontinuierliche Problem' Kapitel

ff. nicht benutzen, falls das nötig sein sollte, lieber die Seitenspanne angeben

Zeidler Pro Tipp S. 637 sind die Abkürzungen (B Space etc) erklärt und alle Symbole

1. Einleitung

write the introduction similar to [bartelsErrorControlAndAdaptivityForBV], just more details. See below.

In particular, drop infos needed about BV (wir werden sehen, dass BV Funktionen dies und das erfüllen und deshalb diese und jene Terme definiert sind) or (wir werden zuerst grundlagen einführen aus der Optimierung und über BV Funktionen [dann verweis auf das entsprechende Kapitel], anschließend das konitnuierliche Problem betrachten [verweis auf kapitel] ...)

1. BV Funtionen allgemein: lassen unstetigkeiten zu, mehr als Sobolev Funktionen, [hier nochmal überlegen, wie ich dieses über 'manifold' (one codimensional (ABM)) springen schreibe, ohne ins Detail gehen zu müssen]

deshalb Anwendung zum Beispiel in

[[ABM14] modelization of a large number of problems in physics, mechanics, or image processing requires the introducion of new functionals spaces permitting discontinuities of the solution. In phase transitions, image segmentation, plasticity theory, the study of crasks and fissures, the study of the wake in fluid dynamics , and so forth, the solution of the problem presents discontinuities along one-odimensionalmanifolds. -solution of these problems cannot be found in classical Sobolev spaces

Viele physikalischen Anwendungen können mit kontinuierlichen Funktionen nicht beschrieben werden [Bartels, Error Control and Adaptivity for a variational model problem defined on functions of bounded variation, und darin zitierte Quellen].

introduction aus [Braides] zitieren einfach mit Bemerkung, dass man dort Beispiele finden kann (vielleicht auch nicht, da sie direkt auf SBV eingeht und nicht auf BV)

insbesondere in der 'Bildbearbeitung' (finde noch das richtige Wort, Computer Vision, computergestützte Analyse von Bildern oder so ähnlich) wird das genutzt (Quellen: [AK06], ...)

2. als Modell Problem dient das ROF-Modell ([CP10, sec 6.2.1], beschreibt auch, was die Parameter und Terme sollen, aber vielleicht auch noch andere Quellen dazu ("siehe auch JZ13")

natürlich an dieser Stelle das Funktional einmal wie in Bartels hinschreiben
an der stelle vielleicht auch kurz schreiben, was Bartels tut und dann was wir hier tun im Unterschied dazu

benannt nach Rudin, Osher und Fatemi, die das Modell vorschlugen in [ROF92] (das ist auch aus CP10, also mit in das Zitat von CP10 rein)

u ist die exakte Lösung, g das gesehene verrauschte Bild und alpha Gewichtet das Verhältniss zwischen Regularisierung und data fitting (tradeoff between regularization and data fitting, CP10) (zitiere eines der Paper/Bücher, CP10 above klärt das ganz gut) große alpha wenig Entrauschen, kleine alpha blurry, oversmoothed u [JZ13]

TV Term verringert Osszilationen, lässt aber Unstetigkeiten der Lösung zu. Regularisierungs Term, der Rauschen und kleine Details entfernt.

der zweite Term versucht die Lösung nahe an g zu halten (Treue, fidelity) (cite getreuer und JZ13, hat aber keinen mathscinet entry), vielleicht auch nur für mich

INSBESONDERE erst ROF beschreiben und Parameter erklären und dann CCs Variante hinchreiben

3. wir betrachten hier eine leicht abgewandlete Variante, die wie folgt zusammenhängt (dann dieses Remark (aber wohl nicht mehr als Remark)

Bemerkung 1.1. In [Bar15, Kapitel 10.1.3] wird Problem 3.1 für ein gegebenes $g \in L^2(\Omega)$ formuliert mit dem Funktional

$$I(v) := |v|_{\mathrm{BV}(\Omega)} + \frac{\alpha}{2} \int_\Omega (v-g)^2 \,\mathrm{d}x$$

für $v \in \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$.

Nun wählen wir $f = \alpha g$. Dann gilt $I(v) = E(v) - \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} + \frac{\alpha}{2}\|g\|^2_{L^2(\Omega)}$ für alle $v \in \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$. Da der Term $\frac{\alpha}{2}\|g\|^2_{L^2(\Omega)}$ konstant ist, haben die Funktionale E und I somit die gleichen Minimierer in $\left\{v \in \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega) \mid \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} = 0\right\}$.

4. Kurzen Überblick über Aufbau der Arbeit („In Kap 1 machen wir das, dann das in Kapitel 2, dann das in Kapitel 3, … “)

5. auch ein hübsches Bild wie bei Philipp (siehe Paper, sowas wie: Originalbild links, verrauschtes Bild (Art des Rauschens nennen) mitte, entrauschtes Bild rechts). Falls ich die Experimente so eingestellt bekomme, dass sie entrauschen (todo)

2. Theoretische Grundlagen

2.1. Notation

TODO usw alle Notationen einführen, die in der ganzen Arbeit gelten, vergleiche Bringmann 2.1 Einleitung. Da wir aber erst sehr allgemein sind bzw hier für Subdiffs und Variationsrechnung etc zwischen Räumen umhersprigen, dieses Kapitel doch lieber nicht machen sondern diese Themen (eben theoretische Grundlagen) abarbeiten und dann immer weiter einschränken Kapitel weise (continuous Problem schränkt Omega ein, dann discrete schränkt zu 2D ein und führt CR ein, usw.) Notation hier also mglw einstampfen und on the fly machen

FRAGE Dann zB CR Notation erst im entsprechenden Kapitel einführen oder auch das schon hier? Oder hier nur ABSOLUTE Grundlagen, extrem basic, und alles andere dann on the fly?

TODO nur die Sachen rausschreiben/zusammentragen/zitieren (um später Theoreme und Gleichungen zitieren zu können statt Bücher) die auch wirklich gebraucht werden später in Beweisen. Insbesondere am Ende nochmal durchgucken, was wirklich gebraucht wurde und ungebrauchtes und/oder uninteressanter und/oder unwichtiges rauswerfen

2.2. Benötigte Begriffe der Variationsrechnung in Banachräumen

im Zeidler lokal konvex Raum. Das irgendwie noch ausdrücken und die Aussage, dass B-spaces lokal konvex sind, einmal rechtzeitig erwähnen.

Die folgenden Aussagen basieren auf [Zei85, S. 189-192]. Wir betrachten einen Banachraum X, eine Teilmenge $V \subseteq X$ und ein Funktional $F : V \to \mathbb{R}$. Sei u ein innerer Punkt von V. Außerdem definieren wir für $h \in X$ die Funktion $\varphi_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $\varphi_h(t) := F(u + th)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Definition 2.1 (n-te Variation)**.** Die n-te Variation von F an der Stelle u in Richtung $h \in X$ ist

$$\delta^n F(u; h) := \varphi_h^{(n)}(0) = \left.\frac{d^n F(u + th)}{dt^n}\right|_{t=0},$$

falls $\varphi_h^{(n)}(0)$ existiert. Wir schreiben δ für δ^1.

Definition 2.2 (Gâteaux- und Fréchet-Differential)**.** F heißt Gâteaux-differenzierbar [redacted] an der Stelle u, falls ein Funktional $F'(u) \in X^*$ existiert mit

$$\lim_{t \to 0} \frac{F(u + th) - F(u)}{t} = \langle F'(u), h \rangle \quad \text{für alle } h \in X.$$

$F'(u)$ heißt dann Gâteaux-Differential von F an der Stelle u.

F heißt Fréchet-differenzierbar an der Stelle u, falls ein Funktional $F'(u) \in X^*$ existiert, sodass

$$\lim_{\|h\|_X \to 0} \frac{|F(u+th) - F(u) - \langle F'(u), h\rangle|}{\|h\|_X} = 0.$$

$F'(u)$ heißt dann Fréchet-Differential von F an der Stelle u. Das Fréchet-Differential von F an der Stelle u in Richtung $h \in X$ ist definiert durch $dF(u;h) := \langle F'(u), h\rangle$.

Die wichtigsten Eigenschaften sind noch einmal in folgender Bemerkung zusammengefasst.

Bemerkung 2.3.
- Existiert das Fréchet-Differential $F'(u)$ von F an der Stelle u, so ist $F'(u)$ auch das Gâteaux-Differential von F an der Stelle u und es gilt

$$\delta F(u;h) = dF(u;h) = \langle F'(u), h\rangle \quad \text{für alle } h \in X.$$

Damit können wir eine wichtige Aussage der Variationsrechnung formulieren, basierend auf [Zei85, S. 193ff., Theorem 40.A, Theorem 40.B].

Theorem 2.4 (Notwendige Optimalitätsbedingung erster Ordnung)**.** *Sei $u \in \mathrm{int}(V)$ lokaler Minimierer von F, das heißt es existiere eine Umgebung*

Definiere Umgebung so wie in Zeilder 'neigborhood', [Zei86, S. 751, (5)] (also es gibt eine offene Menge in der Umgebung, die den Punkt enthällt

U von u, so dass $F(v) \geqslant F(u)$ für alle $v \in U$. Dann gilt für alle $h \in X$, dass $\delta F(u;h) = 0$, falls diese Variation für alle $h \in X$ existiert, beziehungsweise $F'(u) = 0$, falls $F'(u)$ als Gâteaux- oder Fréchet-Differential existiert.

2.3. Subdifferential

In diesem Abschnitt trage ich die in dieser Arbeit benötigten Eigenschaften des Subdifferentials eines Funktionals $F : X \to [-\infty, \infty]$ auf einem Banachraum $(X, \|\cdot\|_X)$ und die dafür benötigten Begriffe zusammen.

Zunächst eine grundlegende Definition.

Definition 2.5 ([Zei85, S. 245, Definition 42.1])**.** Sei X ein Vektorraum, $M \subseteq X$ und $F : M \to \mathbb{R}$.

Dann heißt die Menge M konvex, wenn für alle $u, v \in M$ und alle $t \in [0,1]$ gilt $(1-t)u + tv \in M$.

Ist M konvex, so heißt F konvex, falls für alle $u, v \in M$ und alle $t \in [0,1]$ gilt $F\big((1-t)u + tv\big) \leqslant (1-t)F(u) + tF(v)$.

In [Zei85] werden einige der folgenden Aussagen auf reellen lokal konvexen Räumen X formuliert. Da nach [Zei86, S. 781, (43)] alle Banachräume (in [Zei86] und [Zei85] genannt „B-spaces", [Zei86, S. 786]) lokal konvex sind und in dieser Arbeit die Aussagen nur auf Banachräumen benötigt werden, beschränke ich die folgenden Aussagen, falls nicht anders spezifiziert, wie folgt. Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein reeller Banachraum und $F : X \to [-\infty, \infty]$ ein Funktional auf X.

Definition 2.6 (Subdifferential, [Zei85, S. 385, Definition 47.8])**.** Für $u \in X$ mit $F(u) \neq \pm\infty$ heißt

$$\partial F(u) \coloneqq \{u^* \in X^* \mid \forall v \in X \quad F(v) \geqslant F(u) + \langle u^*, v - u \rangle\} \tag{2.1}$$

Subdifferential von F an der Stelle u. Für $F(u) = \pm\infty$ definiere $\partial F(u) \coloneqq \varnothing$.

Ein Element $u^* \in \partial F(u)$ heißt Subgradient von F an der Stelle u.

Theorem 2.7 ([Zei85, S. 387, Proposition 47.12])**.** *Falls $F : X \to (-\infty, \infty]$ mit $F \not\equiv \infty$, gilt $F(u) = \inf_{v \in X} F(v)$ genau dann, wenn $0 \in \partial F(u)$.*

Theorem 2.8 ([Zei85, S. 387, Proposition 47.13])**.** *Falls F konvex ist und Gâteaux-differenzierbar (in [Zei86] und [Zei85] genannt „G-differentiable", [Zei86, S. 135f.]) an der Stelle $u \in X$ mit Gâteaux-Differential $F'(u)$, gilt $\partial F(u) = \{F'(u)\}$.*

TODO checke Notation und Definition mit der Gateaux/Frechet-differenzierbarkeit, für die ich mich entschieden habe (d.h. meint Zeidler das gleiche
Bemerke, die Prop liefert noch wann das umgekehrte gilt, aber nur aufschreiben, wenn das mal benötigt wird in dieser Arbeit
nutze vielleicht Zeidler I als Quelle für die Differentiale und vielleicht auch Notation?

Das folgende Theorem folgt aus [Zei85, S. 389, Theorem 47.B] unter Beachtung der Tatsache, dass die Addition von Funktionalen $F_1, F_2, \ldots, F_n : X \to (-\infty, \infty]$ und die Addition von Menge in X^* kommutieren.

Theorem 2.9. *Seien für $n \geqslant 2$ die Funktionale $F_1, F_2, \ldots, F_n : X \to (-\infty, \infty]$ konvex und es existiere ein $u_0 \in X$ und ein $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ mit $F_k(u_0) < \infty$ für alle $k \in \{1, 2 \ldots, n\}$, sodass für alle $k \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{j\}$ das Funktional F_k stetig an der Stelle u_0 ist.*

Dann gilt

$$\partial(F_1 + F_2 + \ldots + F_n)(u) = \partial F_1(u) + \partial F_2(u) + \ldots + \partial F_n(u) \quad \textit{für alle } u \in X.$$

Theorem 2.10 ([Zei85, S. 396f., Definition 47.15, Theorem 47.F])**.** *Sei $F : X \to (-\infty, \infty]$ konvex und unterhalbstetig mit $F \not\equiv \infty$.*

Dann ist $\partial F(\bullet)$ monoton, das heißt

$$\langle u^* - v^*, u - v \rangle \geqslant 0 \quad \textit{für alle } u, v \in X, u^* \in \partial F(u), v^* \in \partial F(v).$$

2.4. Funktionen Beschränkter Variation

Dieser Abschnitt präsentiert die für diese Arbeite benötigten Aussagen über Funktionen beschrankter Variation und basiert auf Kapitel 10 in [ABM14].

Schreibe vlt noch sowas wie ‚Für weitere Aussagen und Details zu BV Funktionen und den maßtheoretischen Grundlagen dafür siehe [EG92, Braides, ABM14]'

Dabei sei Ω eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Der Raum aller $\mathbb{R}^n$-wertigen Borelmaße wird bezeichnet mit $M(\Omega; \mathbb{R}^n)$ und ist nach Riesz identifizierbar mit dem Dualraum von $C_0(\Omega; \mathbb{R}^n)$ ausgestattet mit der Norm $\|\phi\|_\infty \coloneqq (\sum_{j=1}^n \sup_{x \in \Omega} |\phi_j(x)|^2)^{1/2}$ für $\phi \in C_0(\Omega; \mathbb{R}^n)$.

Die folgende Definition basiert auf [ABM14, S. 393 f.].

Wenn einmal gesagt wurde worauf diese Section basiert, sind dann noch Zitate wie dieses notwendig? Ich würde einfach nur noch zitieren, wenn eine Aussage mal aus einer anderen Quelle kommt.

Definition 2.11 (Funktionen beschränkter Variation)**.** Eine Funktion $u \in L^1(\Omega)$ ist von beschränkter Variation, wenn ihre distributionelle Ableitung Du ein Element in $M(\Omega;\mathbb{R}^n)$ definiert. Das ist äquivalent zu der Bedingung

$$|u|_{\mathrm{BV}(\Omega)} := \sup_{\substack{\phi \in C_C^1(\Omega;\mathbb{R}^n) \\ \|\phi\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant 1}} \int_\Omega u \operatorname{div}(\phi) \, \mathrm{d}x < \infty. \tag{2.2}$$

Durch $|\bullet|_{\mathrm{BV}(\Omega)}$ ist eine Seminorm auf $\mathrm{BV}(\Omega)$ gegeben.

Der Raum aller Funktionen beschränkter Variation $\mathrm{BV}(\Omega)$ ist ausgestattet mit der Norm

$$\|u\|_{\mathrm{BV}(\Omega)} := \|u\|_{L^1(\Omega)} + |u|_{\mathrm{BV}(\Omega)}$$

für $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$.

Nach [ABM14, S. 395, Theorem 10.1.1.] ist $(\mathrm{BV}(\Omega), \|\bullet\|_{\mathrm{BV}(\Omega)})$ ein Banachraum.

Bemerkung 2.12. Es gilt $W^{1,1}(\Omega) \subset \mathrm{BV}(\Omega)$ und $\|u\|_{\mathrm{BV}(\Omega)} = \|u\|_{W^{1,1}(\Omega)}$ für alle $u \in W^{1,1}(\Omega)$. ([ABM14, S. 394])

Definition 2.13. Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{BV}(\Omega)$ und sei $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$ mit $u_n \to u$ in $L^1(\Omega)$ für $n \to \infty$.

(i) Die Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert strikt gegen u, wenn $|u_n|_{\mathrm{BV}(\Omega)} \to |u|_{\mathrm{BV}(\Omega)}$ für $n \to \infty$ (unter Beachtung von [ABM14, Remark 10.1.1]).

(ii) Die Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert schwach gegen u, wenn Du_n in $M(\Omega;\mathbb{R}^n)$ schwach gegen Du konvergiert.

Theorem 2.14 (Schwache Unterhalbstetigkeit, Prop. 10.1.1)**.** *Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathrm{BV}(\Omega)$ mit $\sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|_{\mathrm{BV}(\Omega)} < \infty$ und $u \in L^1(\Omega)$ mit $u_n \to u$ in $L^1(\Omega)$ für $n \to \infty$.*

Dann gilt $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$ und $|u|_{\mathrm{BV}(\Omega)} \leqslant \liminf_{n\to\infty} |u_n|_{\mathrm{BV}(\Omega)}$. Außerdem konvergiert u_n schwach gegen u in $\mathrm{BV}(\Omega)$.

Mit Blick auf die folgenden Kapitel, sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nun ein polygonal berandetes Lipschitz-Gebiet.

Nochmal nachfragen: das heißt tatsächlich offen, beschränkt mit Lipschitz Rand, korrekt?

Nochmal nachfragen: $\sup u_k < \infty \Leftrightarrow u_k$ bounded, korrekt? Ich übersehe da nichts, oder? Falls doch, alle Theoreme nochmal nachschlagen und sichergehen, dass sie richtig zitiert sind.

Die BV Aussagen aus den nächsten Kapitel wieder hierher holen, soweit sinnvoll. Vielleicht auch nur die Spuroperator Aussage. Kann kopiert werden aus delTexts.tex.

Theorem 2.15 ([EG92, S. 176, Theorem 4])**.** *Sei* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{BV}(\Omega)$ *eine beschränkte Folge. Dann existiert eine Teilfolge* $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *von* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und ein* $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$*, sodass* $u_{n_k} \to u$ *in* $L^1(\Omega)$ *für* $k \to \infty$*.*

Das kann vielleciht auch noch im kontinuierlichen Existenzbeweis eingebracht werden und den etwas vereinfachen/verkürzen. Prüf das Zukunfts-Ich

Theorem 2.16. *Sei* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{BV}(\Omega)$ *eine beschränkte Folge. Dann existiert eine Teilfolge* $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *und ein* $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$*, sodass* $u_{n_k} \rightharpoonup u$ *in* $\mathrm{BV}(\Omega)$ *für* $k \to \infty$*.*

Beweis. Nach Theorem 2.15 besitzt $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die in $L^1(\Omega)$ gegen ein $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$ konvergiert. Diese Folge ist nach Voraussetzung ebenfalls beschränkt in $\mathrm{BV}(\Omega)$, woraus nach Definition der Norm auf $\mathrm{BV}(\Omega)$ insbesondere folgt, dass $\sup_{k\in\mathbb{N}} |u_{n_k}|_{\mathrm{BV}(\Omega)} < \infty$.

Insgesamt liefert Theorem 2.14 dann die schwache Konvergenz von $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{BV}(\Omega)$ gegen $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$. □

3. Das kontinuierliche Problem

Sei nun $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes, polygonal berandetes Lipschitz-Gebiet. Wir betrachten für ein gegebenes $\alpha \in \mathbb{R}^+$ und eine Funktion $f \in L^2(\Omega)$ das folgende Minimierungsproblem.

Problem 3.1. Finde $u \in \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$, sodass u das Funktional

$$E(v) := \frac{\alpha}{2}\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + |v|_{\mathrm{BV}(\Omega)} + \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} - \int_\Omega fv \,\mathrm{d}x \tag{3.1}$$

unter allen $v \in \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ minimiert.

Nach [ABM14, S. 400, Theorem 10.2.1] existiert ein linearer Operator $T : \mathrm{BV}(\Omega) \to L^1(\partial\Omega)$ mit $T(u) = u|_{\partial\Omega}$ für alle $u \in \mathrm{BV}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Somit ist der Term $\|v\|_{L^1(\partial\Omega)}$ wohldefiniert.

Bemerkung 3.2. Nach [ABM14, S. 399, Theorem 10.1.3] ist

noch fragen, was 1-regular nochmal heißt und ob das hier glatt geht (tut es sehr wahrscheinlich)

die Einbettung $\mathrm{BV}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ stetig für $1 \leqslant p \leqslant n/(n-1)$. Damit ist $\mathrm{BV}(\Omega)$ für $n = 2$ Teilmenge von $L^2(\Omega)$ und die Lösung von Problem 3.1 kann in $\mathrm{BV}(\Omega)$ gesucht werden. Für beliebige $n \in \mathbb{N}$, die wir in diesem Abschnitt betrachten, ist dies im Allgemeinen nicht gültig.

Zunächst zeigen wir, dass Problem 3.1 eine Lösung besitzt. Dafür benötigen wir die folgenden Ungleichungen.

Lemma 3.3 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)**.** *Sei V ein reeller oder komplexer Vektorraum mit Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)_V$. Dann gilt für alle $x, y \in V$*

$$|(x,y)_V|^2 \leqslant (x,x)_V(y,y)_V.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn x und y linear unabhängig sind.

Lemma 3.4 (Youngsche Ungleichung)**.** *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gilt*

$$ab \leqslant \frac{1}{\varepsilon}a^2 + \frac{\varepsilon}{4}b^2.$$

Lemma 3.5 (Höldersche Ungleichung)**.** *Seien $p, q \in [1,\infty]$ mit $1/p + 1/q = 1$, $f \in L^p(\Omega)$ und $g \in L^q(\Omega)$. Dann gilt $fg \in L^1(\Omega)$ mit*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leqslant \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Q alle drei zitieren mit irgendeiner Quelle mit der passenden Formulierung oder ist das zu basic

In Grundlagen einmal darüber reden, wie für fast alle hier zu verstehen ist? Es gibt verschiedene Konventionen und hier ist natürlich gemeint für alle x bis auf die aus Nullmengen

Außerdem wird im Beweis folgende Aussage benötigt, die direkt aus [EG92, S. 183, Theorem 1] folgt, da $0 \in \mathrm{BV}(\mathbb{R}^n \backslash \Omega)$, $|0|_{\mathrm{BV}(\mathbb{R}^n \backslash \Omega)} = 0$ und $0|_{\partial\Omega} = 0$.

Q vielleicht den Trace Operator T immer mitnehmen?

Lemma 3.6. *Sei $v \in \mathrm{BV}(\Omega)$. Definiere, für alle $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$\tilde{v}(x) := \begin{cases} v(x), & \text{falls } x \in \Omega, \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega. \end{cases}$$

Dann gilt $\tilde{v} \in \mathrm{BV}(\mathbb{R}^n)$ und $|\tilde{v}|_{\mathrm{BV}(\mathbb{R}^n)} = |v|_{\mathrm{BV}(\Omega)} + \|v\|_{L^1(\partial\Omega)}$.

Theorem 3.7 (Existenz einer Lösung)**.** *Problem 3.1 besitzt eine Lösung $u \in \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$.*

Beweis. Für diesen Beweis folgen wir der direkte Methode der Variationsrechnung (cf. cite Dracoragna). Für alle $v \in L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ gilt mit der Hölderschen Ungleichung

Q wo und wie einmal erwähnen, dass die Lp Räume geschachtelt sind da Omega bdd ist? In Grundlagenkapitel 'Da bdd gilt hier immer die Inklusion ..' vielleicht einmal allgemein, dann noch mit Zitierung.

(Lemma 3.5) für $p = q = 2$, dass

$$\|v\|_{L^1} = \|1 \cdot v\|_{L^1(\Omega)} \leqslant \|1\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{|\Omega|}\|v\|_{L^2(\Omega)}. \tag{3.2}$$

Dann folgt für das Funktional E in (3.1) für alle $v \in \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ durch die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung (Lemma 3.3), die Youngsche Ungleichung (3.4) und Gleichung (3.2), dass

$$\begin{aligned} E(v) &= \frac{\alpha}{2}\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + |v|_{\mathrm{BV}(\Omega)} + \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} - \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x \\ &\geqslant \frac{\alpha}{2}\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + |v|_{\mathrm{BV}(\Omega)} + \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} - \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\geqslant \frac{\alpha}{2}\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + |v|_{\mathrm{BV}(\Omega)} + \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} - \frac{1}{\alpha}\|f\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{\alpha}{4}\|v\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\geqslant \frac{\alpha}{4}\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + |v|_{\mathrm{BV}(\Omega)} + \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} - \frac{1}{\alpha}\|f\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\geqslant \frac{\alpha}{4|\Omega|}\|v\|^2_{L^1(\Omega)} + |v|_{\mathrm{BV}(\Omega)} + \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} - \frac{1}{\alpha}\|f\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\geqslant -\frac{1}{\alpha}\|f\|^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Somit ist E nach unten beschränkt, was die Existenz einer infimierenden Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ von E impliziert, d.h. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllt $\lim_{n\to\infty} E(u_n) = \inf_{v\in\mathrm{BV}(\Omega)\cap L^2(\Omega)} E(v)$.

Ungleichung (3.3) impliziert außerdem, dass $E(u_n) \overset{n\to\infty}{\to} \infty$, falls $|u_n|_{\mathrm{BV}(\Omega)} \overset{n\to\infty}{\to} \infty$ oder $\|u_n\|_{L^1(\Omega)} \overset{n\to\infty}{\to} \infty$, also insgesamt, falls $\|u_n\|_{\mathrm{BV}(\Omega)} \overset{n\to\infty}{\to} \infty$.

Deshalb muss die Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt in $\mathrm{BV}(\Omega)$ sein.

Nun garantiert Theorem 2.16 die Existenz einer schwach konvergenten Teilfolge $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit schwachem Grenzwert $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Schwache Konvergenz von $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{BV}(\Omega)$ gegen u bedeutet nach Definition insbesondere, dass $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stark und damit auch schwach in $L^1(\Omega)$ gegen u konvergiert.

Weiterhin folgt aus (3.3), dass $E(v) \to \infty$ für $\|v\|_{L^2(\Omega)} \to \infty$. Somit muss $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch beschränkt sein bezüglich der Norm $\|\bullet\|_{L^2(\Omega)}$ und besitzt deshalb, wegen der Reflexivität von $L^2(\Omega)$, eine Teilfolge (ohne Beschränkung der Allgemeinheit weiterhin bezeichnet mit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$), die in $L^2(\Omega)$ schwach gegen einen Grenzwert $\tilde{u} \in L^2(\Omega)$ konvergiert. Somit gilt für alle $w \in L^2(\Omega) \cong L^2(\Omega)^*$ und, da $L^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, insbesondere auch für alle $w \in L^\infty(\Omega) \cong L^1(\Omega)^*$, dass $\int_\Omega u_n w \,\mathrm{d}x \overset{n\to\infty}{\to} \int_\Omega \tilde{u} w \,\mathrm{d}x$. Damit konvergiert $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ also auch schwach in $L^1(\Omega)$ gegen $\tilde{u} \in L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$.

Da schwache Grenzwerte eindeutig bestimmt sind, gilt insgesamt $u = \tilde{u} \in L^2(\Omega)$, das heißt $u \in \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$.

Nun definieren wir, für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\tilde{u}_n(x) := \begin{cases} u_n(x), & \text{falls } x \in \Omega, \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega \end{cases}$$

und

$$\tilde{u}(x) := \begin{cases} u(x), & \text{falls } x \in \Omega, \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega. \end{cases}$$

Dann gilt nach Lemma 3.6 sowohl $\tilde{u} \in \mathrm{BV}(\mathbb{R}^n)$ und $|\tilde{u}|_{\mathrm{BV}(\mathbb{R}^n)} = |u|_{\mathrm{BV}(\Omega)} + \|u\|_{L^1(\partial\Omega)}$ als auch $\tilde{u}_n \in \mathrm{BV}(\mathbb{R}^n)$ und $|\tilde{u}_n|_{\mathrm{BV}(\mathbb{R}^n)} = |u_n|_{\mathrm{BV}(\Omega)} + \|u_n\|_{L^1(\partial\Omega)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ infimierende Folge von E ist, muss aufgrund der Form von E die Folge $(|\tilde{u}_n|_{\mathrm{BV}(\mathbb{R}^n)})_{n\in\mathbb{N}} = (|u_n|_{\mathrm{BV}(\Omega)} + \|u_n\|_{L^1(\partial\Omega)})_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt sein. Außerdem gilt $\tilde{u}_n \overset{n\to\infty}{\to} \tilde{u}$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$, da aus der Definition von $\tilde{u}$ und $\tilde{u}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und der bereits bekannten Eigenschaft $u_n \overset{n\to\infty}{\to} u$ folgt

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_n - \tilde{u}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{u}_n - \tilde{u}| \,\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega |u_n - u| \,\mathrm{d}x \\ &= \|u_n - u\|_{L^1(\Omega)} \overset{n\to\infty}{\to} 0. \end{aligned}$$

Insgesamt ist also $(\tilde{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathrm{BV}(\mathbb{R}^n)$, die in $L^1(\mathbb{R}^n)$ gegen $\tilde{u} \in \mathrm{BV}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ konvergiert und erfüllt, dass $(|\tilde{u}_n|_{\mathrm{BV}(\mathbb{R}^n)})_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist. Somit folgt mit Theorem 2.14

$$\begin{aligned} |u|_{\mathrm{BV}(\Omega)} + \|u\|_{L^1(\partial\Omega)} = |\tilde{u}|_{\mathrm{BV}(\mathbb{R}^n)} &\leqslant \liminf_{n\to\infty} |\tilde{u}_n|_{\mathrm{BV}(\mathbb{R}^n)} \\ &= \liminf_{n\to\infty} (|u_n|_{\mathrm{BV}(\Omega)} + \|u_n\|_{L^1(\partial\Omega)}). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Die Funktionen $\|\bullet\|^2_{L^2(\Omega)}$ und $-\int_\Omega f \bullet \mathrm{d}x$ sind auf $L^2(\Omega)$ stetig und konvex, was impliziert, dass sie schwach unterhalbstetig auf $L^2(\Omega)$ sind. Da wir bereits wissen, dass $u_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} u$ in $L^2(\Omega)$, folgt daraus

$$\frac{\alpha}{2}\|u\|_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega f u \,\mathrm{d}x \leqslant \liminf_{n\to\infty} \left(\frac{\alpha}{2}\|u_n\|_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega f u_n \,\mathrm{d}x \right).$$

Damit und mit Gleichung (3.4) gilt insgesamt

$$\inf_{v\in \mathrm{BV}(\Omega)\cap L^2(\Omega)} E(v) \leqslant E(u) \leqslant \liminf_{n\to\infty} E(u_n) = \lim_{n\to\infty} E(u_n) = \inf_{v\in \mathrm{BV}(\Omega)\cap L^2(\Omega)} E(v),$$

d.h. $\min_{v\in \mathrm{BV}(\Omega)\cap L^2(\Omega)} E(v) = E(u)$. □

Theorem 3.8 (Stabilität und Eindeutigkeit)**.** *Seien $u_1, u_2 \in \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ die Minimierer des Problems 3.1 mit $f_1, f_2 \in L^2(\Omega)$ anstelle von f.*

Dann gilt

$$\|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \frac{1}{\alpha}\|f_1 - f_2\|_{L^2(\Omega)}.$$

Beweis. Definiere die konvexen Funktionale $F : \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ und $G_\ell : \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$, $\ell = 1, 2$, durch

$$F(u) := |u|_{\mathrm{BV}(\Omega)} + \|u\|_{L^1(\partial\Omega)}, \qquad G_\ell(u) := \frac{\alpha}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega f_\ell u \, \mathrm{d}x.$$

Bezeichne $E_\ell := F + G_\ell$.

G_ℓ ist Fréchet-differenzierbar

TODO nachrechnen, Gateaux ist klar, aber auch Frechet? EDIT: nachgerechnet, es funktioniert nach WIKI Def.
Außerdem: Im Grundlagen Kapitel noch einführen, was hier in dieser Arbeit mit Gateaux, Frechet etc gemeint ist? (ist ja von Autor zu Autor anders (cf Wiki)) und insbesondere irgendwo einmal alle Notationen einführen, was ist welche Ableitung

und die Fréchet-Ableitung $G'_\ell(u) : L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ von G_ℓ an der Stelle $u \in \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ ist für alle $v \in L^2(\Omega)$ gegeben durch

$$dG_\ell(u; v) = \alpha(u, v)_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega f_\ell v \, \mathrm{d}x = (\alpha u - f_\ell, v)_{L^2(\Omega)}.$$

Das Funktional F ist konvex und stetig, also insbesondere unterhalbstetig, deshalb ist nach Theorem 2.10 das Subdifferential ∂F von F monoton, das heißt für alle $\mu_\ell \in \partial F(u_\ell)$, $\ell = 1, 2$, gilt

$$(\mu_1 - \mu_2, u_1 - u_2)_{L^2(\Omega)} \geqslant 0. \tag{3.5}$$

TODO eigentlich auch mal über Dualraumtheorie reden, insbesondere für Lp Räume und wie die Sachen identifiziert werden können nach Riesz?

Für $\ell = 1, 2$ wird E_ℓ von u_ℓ minimiert und G_ℓ ist stetig. Nach Theorem 2.7 und Theorem 2.9 gilt deshalb $0 \in \partial E_\ell(u_\ell) = \partial F(u_\ell) + \partial G_\ell(u_\ell) = \partial F(u_\ell) + \{G'_\ell(u_\ell)\}$ und es folgt $-G'_\ell(u_\ell) \in \partial F(u_\ell)$. Daraus folgt zusammen mit (3.5)

$$\big(-(\alpha u_1 - f_1) + (\alpha u_2 - f_2), u_1 - u_2\big)_{L^2(\Omega)} \geqslant 0.$$

Umformen und Anwenden der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung impliziert

$$\begin{aligned}\alpha\|u_1 - u_2\|^2_{L^2(\Omega)} &\leqslant \big(f_1 - f_2, u_1 - u_2\big)_{L^2(\Omega)} \\ &\leqslant \|f_1 - f_2\|_{L^2(\Omega)}\|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Falls $\|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega)} = 0$, gilt der Satz. Ansonsten führt Division durch $\alpha\|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega)} \neq 0$ den Beweis zum Abschluss. □

Theorem 3.9. *Sei $u \in \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ Lösung von Problem 3.1.*
Dann gilt

$$\frac{\alpha}{2}\|u - v\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant E(v) - E(u) \quad \textit{für alle } v \in \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega).$$

Beweis. Definiere die konvexen Funktionale $F : \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ und $G : \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ durch

$$F(u) := |u|_{\mathrm{BV}(\Omega)} + \|u\|_{L^1(\partial\Omega)}, \qquad G(u) := \frac{\alpha}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega f u \,\mathrm{d}x.$$

Es gilt $E = F + G$.

G ist Fréchet-differenzierbar und die Fréchet-Ableitung $G'(u) : L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ von G an der Stelle $u \in \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ ist für alle $v \in L^2(\Omega)$ gegeben durch

$$dG(u; v) = \alpha(u, v)_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x = (\alpha u - f, v)_{L^2(\Omega)}.$$

Das impliziert mit wenigen Rechenschritten

$$dG(u; v - u) + \frac{\alpha}{2}\|u - v\|^2_{L^2(\Omega)} + G(u) = G(v) \tag{3.6}$$

für alle $u, v \in \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$.

Da u Minimierer von E ist, gilt mit Theorem 2.7, Theorem 2.9 und Theorem 2.8, dass

$$0 \in \partial E(u) = \partial F(u) + \{G'(u)\},$$

woraus folgt

$$-G'(u) \in \partial F(u),$$

was nach Definition 2.6 äquivalent ist zu

$$-dG(u; v - u) \leqslant F(v) - F(u) \quad \text{für alle } v \in \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega).$$

Daraus folgt zusammen mit Gleichung (3.6), dass

$$\frac{\alpha}{2}\|u - v\|^2_{L^2(\Omega)} + G(u) - G(v) + F(u) = -dG(u; v - u) + F(u) \leqslant F(v)$$

für alle $v \in \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$.

Da $E = F + G$, folgt daraus die Aussage. □

4. Das diskrete Problem

Quote all CR and discretisation stuff right here somewhere (mglw in einer subsection)

bevor wir das diskrete problem von (cref probcont) formulieren, bemerken wir, dass jede CR Funtkion in BV ist, was induktiv aus [ABM14, S. 404, Example 10.2.1] folgt unter Nutzung (noch irgendwas Dichte Argument mäßiges für die totale Variation)

$$|v_{\mathrm{CR}}|_{\mathrm{BV}(\Omega)} = \|\nabla_{\mathrm{NC}} v_{\mathrm{CR}}\|_{L^1(\Omega)} + \sum_{F \in \mathcal{F}(\Omega)} \int_F |[v_{\mathrm{CR}}]_F| \,\mathrm{d}s,$$

woraus folgt

$$|v_{\mathrm{CR}}|_{\mathrm{BV}(\Omega)} + \|v_{\mathrm{CR}}\|_{L^1(\partial\Omega)} = \|\nabla_{\mathrm{NC}} v_{\mathrm{CR}}\|_{L^1(\Omega)} + \sum_{F \in \mathcal{F}} \int_F |[v_{\mathrm{CR}}]_F| \,\mathrm{d}s,$$

Wir betrachten eine nichtkonforme Diskretisierung, da wir die Sprungterme weglassen, wenn wir $|v_{\mathrm{CR}}|_{\mathrm{BV}(\Omega)} + \|v_{\mathrm{CR}}\|_{L^1(\partial\Omega)}$ durch $\|\nabla_{\mathrm{NC}} v_{\mathrm{CR}}\|_{L^1(\Omega)}$ ersetzen. Somit erhalten wir:

Above was just WIP, write that properly and cite stuff

Betrachte für gegebenes $\alpha > 0$ und rechte Seite $f \in L^2(\Omega)$ folgende Diskretisierung von Problem 3.1.

Problem 4.1. Finde $u_{\mathrm{CR}} \in \mathrm{CR}^1_0(\mathcal{T})$, sodass u_{CR} das Funktional

$$E_{\mathrm{NC}}(v_{\mathrm{CR}}) := \frac{\alpha}{2}\|v_{\mathrm{CR}}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla_{\mathrm{NC}} v_{\mathrm{CR}}\|_{L^1(\Omega)} - \int_\Omega f v_{\mathrm{CR}} \,\mathrm{d}x \tag{4.1}$$

unter allen $v_{\mathrm{CR}} \in \mathrm{CR}^1_0(\mathcal{T})$ minimiert.

Definiere für $v_{\mathrm{CR}} \in \mathrm{CR}^1_0(\mathcal{T})$, $\Lambda \in \mathbb{P}_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^n) \subset L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n)$, stimmt das?

$$K_1(0) := \{\Lambda \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n) \mid |\Lambda(\bullet)| \leqslant 1 \text{ fast überall in } \Omega\},$$

$$I_{K_1(0)}(\Lambda) := \begin{cases} \infty, & \text{falls } \Lambda \notin K_1(0), \\ 0, & \text{falls } \Lambda \in K_1(0) \end{cases}$$

und das Funktional $\mathcal{L}_h : \mathrm{CR}^1_0(\mathcal{T}) \times \mathbb{P}_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^n) \to [-\infty, \infty)$ durch

$$\mathcal{L}_h(v_{\mathrm{CR}}, \Lambda) := \int_\Omega \Lambda \cdot \nabla_{\mathrm{NC}} v_{\mathrm{CR}} \,\mathrm{d}x + \frac{\alpha}{2}\|v_{\mathrm{CR}}\|^2_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega f v_{\mathrm{CR}} \,\mathrm{d}x - I_{K_1(0)}(\Lambda). \tag{4.2}$$

Falls $\Lambda \notin K_1(0)$, gilt $\mathcal{L}(v_{\mathrm{CR}}, \Lambda) = -\infty$. Da außerdem für beliebige $\Lambda \in \mathbb{P}_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^n) \cap K_1(0)$ (d.h. $|\Lambda| \leqslant 1$ fast überall in Ω und außerdem $I_{K_1(0)}(\Lambda) = 0$) mit der CSU gilt, stimmt das so dass

$$\int_\Omega \Lambda \cdot \nabla_{\mathrm{NC}} v_{\mathrm{CR}} \,\mathrm{d}x \leqslant \int_\Omega |\Lambda \cdot \nabla_{\mathrm{NC}} v_{\mathrm{CR}}| \,\mathrm{d}x \leqslant \int_\Omega |\Lambda||\nabla_{\mathrm{NC}} v_{\mathrm{CR}}| \,\mathrm{d}x$$
$$\leqslant \int_\Omega 1|\nabla_{\mathrm{NC}} v_{\mathrm{CR}}| \,\mathrm{d}x = \|\nabla_{\mathrm{NC}} v_{\mathrm{CR}}\|_{L^1(\Omega)},$$

folgt zunächst

$$\sup_{\Lambda \in \mathbb{P}_0(\mathcal{T};\mathbb{R}^n)} \mathcal{L}(v_{\mathrm{CR}}, \Lambda) = \sup_{\Lambda \in \mathbb{P}_0(\mathcal{T};\mathbb{R}^n) \cap K_1(0)} \mathcal{L}(v_{\mathrm{CR}}, \Lambda) \leqslant E_{\mathrm{NC}}(v_{\mathrm{CR}}).$$

Weiterhin gilt für $\Lambda \in \operatorname{sign}(\nabla_{\mathrm{NC}} v_{\mathrm{CR}}) \subset \mathbb{P}_0(\mathcal{T};\mathbb{R}^n) \cap K_1(0)$, dass $E_{\mathrm{NC}}(v_{\mathrm{CR}}) = \mathcal{L}(v_{\mathrm{CR}}, \Lambda)$ und deshalb $E_{\mathrm{NC}}(v_{\mathrm{CR}}) \leqslant \sup_{\Lambda \in \mathbb{P}_0(\mathcal{T};\mathbb{R}^n)} \mathcal{L}(v_{\mathrm{CR}}, \Lambda)$

Somit ist das folgende Sattelpunktsproblem äquivalent zu Problem 4.1.

Problem 4.2. Löse

$$\inf_{v_{\mathrm{CR}} \in \mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})} \sup_{\Lambda \in \mathbb{P}_0(\mathcal{T};\mathbb{R}^n)} \mathcal{L}_h(v_{\mathrm{CR}}, \Lambda).$$

Theorem 4.3 (Charakterisierung diskreter Lösungen)**.** *Es existiert eine eindeutige Lösung $u_{\mathrm{CR}} \in \mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$ von Problem 4.1.*

Außerdem sind die folgenden drei Aussagen für eine Funktion $u_{\mathrm{CR}} \in \mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$ äquivalent.

(i) Problem 4.1 wird von u_{CR} gelöst.

(ii) Es existiert ein $\bar{\Lambda} \in \mathbb{P}_0(\mathcal{T};\mathbb{R}^n)$ mit $|\bar{\Lambda}(\bullet)| \leqslant 1$ fast überall in Ω, sodass

$$\bar{\Lambda}(\bullet) \cdot \nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}(\bullet) = |\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}(\bullet)| \quad \textit{fast überall in } \Omega \tag{4.3}$$

und

$$\big(\bar{\Lambda}, \nabla_{\mathrm{NC}} v_{\mathrm{CR}}\big)_{L^2(\Omega)} = (f - \alpha u_{\mathrm{CR}}, v_{\mathrm{CR}})_{L^2(\Omega)} \quad \textit{für alle } v_{\mathrm{CR}} \in \mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T}). \tag{4.4}$$

(iii) Für alle $v_{\mathrm{CR}} \in \mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$ gilt

$$(f - \alpha u_{\mathrm{CR}}, v_{\mathrm{CR}} - u_{\mathrm{CR}})_{L^2(\Omega)} \leqslant \|\nabla_{\mathrm{NC}} v_{\mathrm{CR}}\|_{L^1(\Omega)} - \|\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}\|_{L^1(\Omega)}. \tag{4.5}$$

Beweis. Mit analogen Abschätzungen wie in Ungleichung (3.3) erhalten wir für das Funktional E_{NC} aus Problem 4.1 für alle $v_{\mathrm{CR}} \in \mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T}) \subset L^2(\Omega)$ die Abschätzung

$$E_{\mathrm{NC}}(v_{\mathrm{CR}}) \geqslant -\frac{1}{\alpha}\|f\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Somit ist E_{NC} nach unten beschränkt und es existiert eine infimierende Folge $(v_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset$ [redacted] $\mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$ von E_{NC}. Aufgrund der Form von E_{NC} ist diese Folge beschränkt bezüglich der Norm $\|\bullet\|_{L^2(\Omega)}$ und wegen der Reflexivität des abgeschlossenen Unterraums $\mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$ des reflexiven Raums $L^2(\Omega)$ besitzt diese Folge eine schwach konvergente Teilfolge in $\mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$ bezüglich der Norm $L^2(\Omega)$, welche auch stark konvergent ist, da $\mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$ endlichdimensional ist. Der Grenzwert dieser Folge liegt aufgrund der

Abgeschlossenheit von $\mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$ in $\mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$ und minimiert E_{NC}, da E_{NC} stetig ist bezüglich der Konvergenz in $L^2(\Omega)$.

Absatz above: Sachen noch näher begründen? All die benutzten grundlegenden Aussagen noch zusammen suchen und zitieren irgendwo?

Die Lösung $u_{\mathrm{CR}} \in \mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$ ist eindeutig, da das Funktional E_{NC} aus Problem 4.1 strikt konvex ist der erste Term ist quadratisch, also strikt konvex, der zweite ist konvex und der dritte linear, also ist deren Summe strikt konvex.

grundlegende Aussagen der Optimierung wie diese noch zitieren? Beweis ist einfach bei dieser, schneller Widerspruchsbeweis

Nachdem wir die Existenz eines eindeutigen Minimierers $u_{\mathrm{CR}} \in \mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$ von Problem 4.1 bewiesen haben, zeigen wir nun die äquivalenten Charakterisierung von u_{CR}.

(i) ⇒ (ii). Zunächst sei erwähnt, dass aus der Existenz des Minimierers u_{CR} von Problem 4.1 und der Äquivalenz des Minimierungsproblems 4.1 und des Sattelpunktsproblems 4.2, wobei wir insbesondere bereits gezeigt haben, dass $E_{\mathrm{NC}}(v_{\mathrm{CR}}) = \sup_{\Lambda\in\mathbb{P}_0(\mathcal{T};\mathbb{R}^n)} \mathcal{L}_h(v_{\mathrm{CR}},\Lambda)$ für alle $v_{\mathrm{CR}} \in \mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$, folgt, dass $\bar{\Lambda} \in \mathbb{P}_0(\mathcal{T};\mathbb{R}^n) \cap K_1(0)$ (denn sonst ist das innere sup nicht erfüllt, da sonst $-I_{K_1(0)}(\bar{\Lambda}) = -\infty$) existiert mit

$$\mathcal{L}_h\left(u_{\mathrm{CR}},\bar{\Lambda}\right) = \inf_{v_{\mathrm{CR}}\in\mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})} \sup_{\Lambda\in\mathbb{P}_0(\mathcal{T};\mathbb{R}^n)} \mathcal{L}_h(v_{\mathrm{CR}},\Lambda).$$

Da nach [Roc70, S. 379, Lemma 36.1] gilt, dass

$$\inf_{v_{\mathrm{CR}}\in\mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})} \sup_{\Lambda\in\mathbb{P}_0(\mathcal{T};\mathbb{R}^n)} \mathcal{L}_h(v_{\mathrm{CR}},\Lambda) \geqslant \sup_{\Lambda\in\mathbb{P}_0(\mathcal{T};\mathbb{R}^n)} \inf_{v_{\mathrm{CR}}\in\mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})} \mathcal{L}_h(v_{\mathrm{CR}},\Lambda),$$

folgt insgesamt

$$\inf_{v_{\mathrm{CR}}\in\mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})} \sup_{\Lambda\in\mathbb{P}_0(\mathcal{T};\mathbb{R}^n)} \mathcal{L}_h(v_{\mathrm{CR}},\Lambda) = \mathcal{L}_h\left(u_{\mathrm{CR}},\bar{\Lambda}\right) = \sup_{\Lambda\in\mathbb{P}_0(\mathcal{T};\mathbb{R}^n)} \inf_{v_{\mathrm{CR}}\in\mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})} \mathcal{L}_h(v_{\mathrm{CR}},\Lambda).$$

Somit ist $\left(u_{\mathrm{CR}},\bar{\Lambda}\right) \in \mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})\times(\mathbb{P}_0(\mathcal{T};\mathbb{R}^n)\cap K_1(0))$ nach [Roc70, S. 380, Lemma 36.2] Sattelpunkt von $\mathcal{L}_h$ bezüglich der Maximierung über $\mathbb{P}_0(\mathcal{T};\mathbb{R}^n)$ und der Minimierung über $\mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$. Das bedeutet nach [Roc70, S. 380] insbesondere, dass u_{CR} Minimierer von $\mathcal{L}_h(\bullet,\bar{\Lambda})$ in $\mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$ ist und $\bar{\Lambda}$ Maximierer von $\mathcal{L}_h(u_{\mathrm{CR}},\bullet)$ über $\mathbb{P}_0(\mathcal{T};\mathbb{R}^n)$.

In der zweiten Komponente ist $\mathcal{L}_h$ konkav ($K_1(0)$ ist konvex, somit ist $I_{K_1(0)}$ konvex, also $-I_{K_1(0)}$ konkav. Die restlichen Terme sind konstant oder linear in Λ)

diese grundlegende Aussage über Indikatorfunktionen irgendwo (vielleicht sogar in Grundlagen) einmal zitieren

. Da wir bereits wissen, dass $\mathcal{L}_h(u_{\mathrm{CR}},\bullet)$ von $\bar{\Lambda}$ in $\mathbb{P}_0(\mathcal{T};\mathbb{R}^n)$ maximiert wird, wird das konvexe Funktional $-\mathcal{L}_h(u_{\mathrm{CR}},\bullet)$

zitieren, was konkav ist und das -konvex=konkav

von $\bar{\Lambda}$ in $\mathbb{P}_0(\mathcal{T};\mathbb{R}^n)$ minimiert

auch diese basic optimierungsaussage noch zitieren

. Nach den Theoremen 2.7, 2.9 und 2.8 gilt somit

$$0 \in \partial\left(-\mathcal{L}_h(u_{\mathrm{CR}},\bullet)\right)(\bar{\Lambda}) = \{-(\nabla_{\mathrm{NC}}u_{\mathrm{CR}},\bullet)_{L^2(\Omega)}\} + \partial I_{K_1(0)}(\bar{\Lambda}).$$

Äquivalent zu dieser Aussage ist, dass $(\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}, \bullet)_{L^2(\Omega)} \in \partial I_{K_1(0)}(\bar\Lambda)$, das heißt nach Definition 2.6 gilt für alle $\Lambda \in \mathbb{P}_0(\mathcal{T};\mathbb{R}^n)$

$$(\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}, \Lambda - \bar\Lambda)_{L^2(\Omega)} \leqslant I_{K_1(0)}(\Lambda) - I_{K_1(0)}(\bar\Lambda) = I_{K_1(0)}(\Lambda),$$

da $\bar\Lambda \in K_1(0)$. Für $\Lambda \in \mathbb{P}_0(\mathcal{T};\mathbb{R}^n) \cap K_1(0)$ folgt insbesondere

$$\begin{aligned}(\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}, \Lambda - \bar\Lambda)_{L^2(\Omega)} &\leqslant 0, \quad \text{also}\\ (\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}, \Lambda)_{L^2(\Omega)} &\leqslant (\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}, \bar\Lambda)_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Damit und der Wahl $\Lambda \in \operatorname{sign}(\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}) \subset \mathbb{P}_0(\mathcal{T};\mathbb{R}^n) \cap K_1(0)$ impliziert die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung, dass

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}|\,\mathrm{d}x &= (\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}, \Lambda)_{L^2(\Omega)} \leqslant (\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}, \bar\Lambda)_{L^2(\Omega)}\\ &\leqslant \int_\Omega |\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}|\,|\bar\Lambda|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_\Omega |\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}|\,\mathrm{d}x, \quad \text{also}\\ \int_\Omega |\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}|\,\mathrm{d}x &= (\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}, \bar\Lambda)_{L^2(\Omega)} \quad \text{beziehungsweise}\\ \sum_{T\in\mathcal{T}} |T|\,\big|(\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}})|_T\big| &= \sum_{T\in\mathcal{T}} |T|\,(\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}} \cdot \bar\Lambda)|_T.\end{aligned}$$

Außerdem gilt mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung auf allen $T \in \mathcal{T}$, dass $(\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}} \cdot \bar\Lambda)|_T \leqslant \big|(\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}})|_T\big|$, da $\bar\Lambda \in K_1(0)$. Dementsprechend muss (da somit alle Summanden der rechten Summe kleiner-gleich den entsprechenden Summanden (d.h. zum gleichen T) der linken Summe sind und Gleichheit der Summen somit nur noch möglich ist, wenn die entsprechenden Summanden tatsächlich gleich sind) für alle $T \in \mathcal{T}$ gelten, dass $(\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}} \cdot \bar\Lambda)|_T = \big|(\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}})|_T\big|$, das heißt fast überall in Ω gilt $\bar\Lambda(\bullet) \cdot \nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}(\bullet) = |\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}(\bullet)|$.

Damit ist Gleichung (4.3) gezeigt.

'Lagrange' weglassen, falls nicht doch noch benötigt? Keine Quelle nannte das bisher so

In der ersten Komponente ist das Lagrange-Funktional Fréchet-differenzierbar (und für $\bar\Lambda$ ist das Funktional reellwertig und nimmt nicht $-\infty$ an, also ist Zeidler anwendbar) mit

$$d\mathcal{L}_h(\bullet, \bar\Lambda)(u_{\mathrm{CR}}; v_{\mathrm{CR}}) = \int_\Omega \bar\Lambda \cdot \nabla_{\mathrm{NC}} v_{\mathrm{CR}}\,\mathrm{d}x + \alpha(u_{\mathrm{CR}}, v_{\mathrm{CR}})_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega f v_{\mathrm{CR}}\,\mathrm{d}x$$

für alle $v_{\mathrm{CR}} \in \mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$. Da u_{CR} Minimierer von $\mathcal{L}_h(\bullet, \bar\Lambda)$ (reellwertig!!!) in $\mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$ ist, gilt nach Theorem 2.4, dass $0 = d\mathcal{L}_h(\bullet, \bar\Lambda)(u_{\mathrm{CR}}; v_{\mathrm{CR}})$.

Diese Bedingung ist für alle $v_{\mathrm{CR}} \in \mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$ äquivalent zu

$$(\bar\Lambda, \nabla_{\mathrm{NC}} v_{\mathrm{CR}})_{L^2(\Omega)} = (f - \alpha u_{\mathrm{CR}}, v_{\mathrm{CR}})_{L^2(\Omega)}.$$

Somit ist Gleichung (4.4) gezeigt.

(ii) ⇒ (iii). Für alle $v_{\mathrm{CR}} \in \mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$ gilt mit Gleichung (4.4), der CSU, Glei-

chung (4.3) und $\left|\bar{\Lambda}(\bullet)\right| \leqslant 1$ fast überall in Ω , dass

$$\begin{aligned}
(f - \alpha u_{\mathrm{CR}}, v_{\mathrm{CR}} - u_{\mathrm{CR}})_{L^2(\Omega)} &= (f - \alpha u_{\mathrm{CR}}, v_{\mathrm{CR}})_{L^2(\Omega)} - (f - \alpha u_{\mathrm{CR}}, u_{\mathrm{CR}})_{L^2(\Omega)} \\
&= \left(\bar{\Lambda}, \nabla_{\mathrm{NC}} v_{\mathrm{CR}}\right)_{L^2(\Omega)} - \left(\bar{\Lambda}, \nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}\right)_{L^2(\Omega)} \\
&= \int_\Omega \bar{\Lambda} \cdot \nabla_{\mathrm{NC}} v_{\mathrm{CR}} \,\mathrm{d}x - \int_\Omega \bar{\Lambda} \cdot \nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}} \,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_\Omega \left|\bar{\Lambda}\right| \left|\nabla_{\mathrm{NC}} v_{\mathrm{CR}}\right| \mathrm{d}x - \int_\Omega \left|\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}\right| \mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_\Omega \left|\nabla_{\mathrm{NC}} v_{\mathrm{CR}}\right| \mathrm{d}x - \int_\Omega \left|\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}\right| \mathrm{d}x \\
&= \|\nabla_{\mathrm{NC}} v_{\mathrm{CR}}\|_{L^1(\Omega)} - \|\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}\|_{L^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Damit löst u_{CR} Ungleichung (4.5) für alle $v_{\mathrm{CR}} \in \mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$ in $\mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$.

(iii) ⇒ (i). Sei $u_{\mathrm{CR}} \in \mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$ Lösung von Problem 4.1. Wir haben bereits gezeigt, dass u_{CR} stets existiert und außerdem, dass u_{CR} insbesondere für alle $v_{\mathrm{CR}} \in \mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$ eine Lösung von Ungleichung (4.5) in $\mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$ ist.

Zu zeigen ist somit nur noch, dass eine beliebige Funktion $\tilde{u}_{\mathrm{CR}} \in \mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$, die Ungleichung (4.5) in $\mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$ für alle $v_{\mathrm{CR}} \in \mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$ löst, auch eine Lösung von Problem 4.1 ist, das heißt zu zeigen ist $\tilde{u}_{\mathrm{CR}} = u_{\mathrm{CR}}$.

Für ein solches $\tilde{u}_{\mathrm{CR}}$ gilt

$$\begin{aligned}
(f - \alpha u_{\mathrm{CR}}, \tilde{u}_{\mathrm{CR}} - u_{\mathrm{CR}})_{L^2(\Omega)} &\leqslant \|\nabla_{\mathrm{NC}} \tilde{u}_{\mathrm{CR}}\|_{L^1(\Omega)} - \|\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}\|_{L^1(\Omega)} \quad \text{und} \\
(f - \alpha \tilde{u}_{\mathrm{CR}}, u_{\mathrm{CR}} - \tilde{u}_{\mathrm{CR}})_{L^2(\Omega)} &\leqslant \|\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}\|_{L^1(\Omega)} - \|\nabla_{\mathrm{NC}} \tilde{u}_{\mathrm{CR}}\|_{L^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Addition dieser Ungleichungen liefert die Ungleichung

$$(-\alpha u_{\mathrm{CR}}, \tilde{u}_{\mathrm{CR}} - u_{\mathrm{CR}})_{L^2(\Omega)} + (-\alpha \tilde{u}_{\mathrm{CR}}, u_{\mathrm{CR}} - \tilde{u}_{\mathrm{CR}})_{L^2(\Omega)} \leqslant 0,$$

welche äquivalent ist zu

$$\alpha \|\tilde{u}_{\mathrm{CR}} - u_{\mathrm{CR}}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leqslant 0.$$

Da $\alpha > 0$, impliziert das $\|\tilde{u}_{\mathrm{CR}} - u_{\mathrm{CR}}\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0$, also $\tilde{u}_{\mathrm{CR}} = u_{\mathrm{CR}}$ in $\mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$. □

5. Numerische Realisierung

Wenigstens sagen worauf der basiert (kann aus Bartels übernommen werden), vorher nochmal prüfen, ob CC und Bartels Alg wirklich gleich sind, ansonsten kann mglw trotzdem ‚basiert' gessagt werden

Algorithmus 5.1 (Primale-Duale Iteration).
Input: $u_0 \in \mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$, $\Lambda_0 \in P_0(\mathcal{T}; \overline{B(0,1)}), \tau > 0$
Initialisiere $v_0 := 0$ *in* $\mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$.
for $j = 1, 2, \dots$

$$\tilde{u}_j := u_{j-1} + \tau v_{j-1}, \tag{5.1}$$

$$\Lambda_j := (\Lambda_{j-1} + \tau \nabla_{\mathrm{NC}} \tilde{u}_j)/(\max\{1, |\Lambda_{j-1} + \tau \nabla_{\mathrm{NC}} \tilde{u}_j|\}), \tag{5.2}$$

bestimme $u_j \in \mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$ *als Lösung des linearen Gleichungssystems*

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\tau} a_{\mathrm{NC}}(u_j, \bullet) + \alpha(u_j, \bullet)_{L^2(\Omega)} \\ &\quad = \frac{1}{\tau} a_{\mathrm{NC}}(u_{j-1}, \bullet) + (f, \bullet)_{L^2(\Omega)} - (\Lambda_j, \nabla_{\mathrm{NC}} \bullet)_{L^2(\Omega)} \end{aligned} \tag{5.3}$$

in $\mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$,

$$v_j := (u_j - u_{j-1})/\tau.$$

Output: *Folge* $(u_j, \Lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$ *in* $\mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T}) \times P_0(\mathcal{T}; \overline{B(0,1)})$

Theorem 5.2. *Sei* $u_{\mathrm{CR}} \in \mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$ *Lösung von Problem 4.1 und* $\bar{\Lambda} \in \mathrm{sign}(\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}})$. *Falls* $0 < \tau \leqslant 1$, *dann konvergieren die Iterate des Algorithmus Algorithmus 5.1 gegen* u_{CR}.

6. Experimente

6.1. Konstruktion eines Experiments mit exakter Lösung

Um eine rechte Seite zu finden, zu der die exakte Lösung bekannt ist, wähle eine Funktion des Radius $u \in H_0^1([0,1])$ mit Träger im zweidimensionalen Einheitskreis. Insbesondere muss damit gelten $u(1) = 0$ und u stetig. Die rechte Seite als Funktion des Radius $f \in L^2([0,1])$ ist dann gegeben durch

$$f := \alpha u - \partial_r(\operatorname{sign}(\partial_r u)) - \frac{\operatorname{sign}(\partial_r u)}{r},$$

wobei für $F \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ gilt $\operatorname{sign}(F) := \left\{\frac{F}{|F|}\right\}$ und $\operatorname{sign}(0) \in B_1(0)$. Damit außerdem gilt $f \in H_0^1([0,1])$, was z.B. für GLEB relevant ist, muss also noch Stetigkeit von $\operatorname{sign}(\partial_r u)$ und $\partial_r(\operatorname{sign}(\partial_r u))$ verlangt werden und $\partial_r(\operatorname{sign}(\partial_r u(1)) = \operatorname{sign}(\partial_r u(1)) = 0$. Damit f in 0 definierbar ist, muss auch gelten $\operatorname{sign}(\partial_r u) \in o(r)$ für $r \to 0$.

Damit erhält man für die Funktion

$$u_1(r) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } 0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{6}, \\ 1 + (6r-1)^\beta, & \text{wenn } \frac{1}{6} \leqslant r \leqslant \frac{1}{3}, \\ 2, & \text{wenn } \frac{1}{3} \leqslant r \leqslant \frac{1}{2}, \\ 2(\frac{5}{2} - 3r)^\beta, & \text{wenn } \frac{1}{2} \leqslant r \leqslant \frac{5}{6}, \\ 0, & \text{wenn } \frac{5}{6} \leqslant r, \end{cases}$$

wobei $\beta \geqslant 1/2$, mit der Wahl

$$\operatorname{sign}(\partial_r u_1(r)) = \begin{cases} 12r - 36r^2, & \text{wenn } 0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{6}, \\ 1, & \text{wenn } \frac{1}{6} \leqslant r \leqslant \frac{1}{3}, \\ \cos(\pi(6r-2)), & \text{wenn } \frac{1}{3} \leqslant r \leqslant \frac{1}{2}, \\ -1, & \text{wenn } \frac{1}{2} \leqslant r \leqslant \frac{5}{6}, \\ -\frac{1+\cos(\pi(6r-5))}{2}, & \text{wenn } \frac{5}{6} \leqslant r \leqslant 1, \end{cases}$$

die rechte Seite

$$f_1(r) := \begin{cases} \alpha - 12(2-9r), & \text{wenn } 0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{6}, \\ \alpha(1 + (6r-1)^\beta) - \frac{1}{r}, & \text{wenn } \frac{1}{6} \leqslant r \leqslant \frac{1}{3}, \\ 2\alpha + 6\pi \sin(\pi(6r-2)) - \frac{1}{r}\cos(\pi(6r-2)), & \text{wenn } \frac{1}{3} \leqslant r \leqslant \frac{1}{2}, \\ 2\alpha(\frac{5}{2} - 3r)^\beta + \frac{1}{r}, & \text{wenn } \frac{1}{2} \leqslant r \leqslant \frac{5}{6}, \\ -3\pi \sin(\pi(6r-5)) + \frac{1+\cos(\pi(6r-5))}{2r}, & \text{wenn } \frac{5}{6} \leqslant r \leqslant 1. \end{cases}$$

Für die Funktion

$$u_2(r) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } 0 \leqslant r \leqslant \frac{1-\beta}{2}, \\ -\frac{1}{\beta} r + \frac{1+\beta}{2\beta}, & \text{wenn } \frac{1-\beta}{2} \leqslant r \leqslant \frac{1+\beta}{2}, \\ 0, & \text{wenn } \frac{1+\beta}{2} \leqslant r, \end{cases}$$

erhält man mit der Wahl

$$\begin{aligned} &\operatorname{sign}(\partial_r u_2(r)) \\ &\quad := \begin{cases} \frac{4}{1-\beta} r \left(\frac{1}{1-\beta} r - 1 \right), & \text{wenn } 0 \leqslant r \leqslant \frac{1-\beta}{2}, \\ -1, & \text{wenn } \frac{1-\beta}{2} \leqslant r \leqslant \frac{1+\beta}{2}, \\ \frac{4}{(\beta-1)^3} \left(4r^3 - 3(\beta+3)r^2 + 6(\beta+1)r - 3\beta - 1\right), & \text{wenn } \frac{1+\beta}{2} \leqslant r \leqslant 1, \end{cases} \end{aligned}$$

die rechte Seite

$$f_2(r) := \begin{cases} \alpha - \frac{4}{1-\beta} \left(\frac{3}{1-\beta} r - 2 \right), & \text{wenn } 0 \leqslant r \leqslant \frac{1-\beta}{2}, \\ -\frac{\alpha}{\beta} \left(r - \frac{1+\beta}{2} \right) + \frac{1}{r}, & \text{wenn } \frac{1-\beta}{2} \leqslant r \leqslant \frac{1+\beta}{2}, \\ \frac{-4}{(\beta-1)^3} \left(16r^2 - 9(\beta+3)r + 12(\beta+1) - \frac{3\beta+1}{r}\right), & \text{wenn } \frac{1+\beta}{2} \leqslant r \leqslant 1. \end{cases}$$

Damit können Experimente durchgeführt werden bei denen `exactSolutionKnown = true` gesetzt werden kann und entsprechend auch der L^2-Fehler berechnet wird.

Soll nun auch die Differenz der exakten Energie mit der garantierten unteren Energie Schranke (GLEB) berechnet werden, dann werden die stückweisen Gradienten der exakten Lösung und der rechten Seite benötigt.

Dabei gelten folgende Ableitungsregeln für die Ableitungen einer Funktion g, wenn man ihr Argument $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ in Polarkoordinaten mit Länge $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ und Winkel $\varphi = \operatorname{atan2}(x_2, x_1)$, wobei

$$\operatorname{atan2}(x_2, x_1) := \begin{cases} \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right), & \text{wenn } x_1 > 0, \\ \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right) + \pi, & \text{wenn } x_1 < 0, x_2 \geqslant 0, \\ \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right) - \pi, & \text{wenn } x_1 < 0, x_2 < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{wenn } x_1 = 0, x_2 > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{wenn } x_1 = 0, x_2 < 0, \\ \text{undefiniert}, & \text{wenn } x_1 = x_2 = 0, \end{cases}$$

auffasst,

$$\begin{aligned} \partial_{x_1} &= \cos(\varphi)\partial_r - \frac{1}{r}\sin(\varphi)\partial_\varphi, \\ \partial_{x_2} &= \sin(\varphi)\partial_r - \frac{1}{r}\cos(\varphi)\partial_\varphi. \end{aligned}$$

Ist g vom Winkel φ unabhängig, so ergibt sich

$$\nabla_{(x_1,x_2)} g = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))\partial_r g.$$

Unter Beachtung der trigonometrischen Zusammenhänge

$$\begin{aligned}\sin(\arctan(y)) &= \frac{y}{\sqrt{1+y^2}},\\ \cos(\arctan(y)) &= \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\end{aligned}$$

ergibt sich

$$(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) = (x_1, x_2)\frac{1}{r}$$

und damit

$$\nabla_{(x_1,x_2)} g = (x_1, x_2)\frac{\partial_r g}{r},$$

es muss also nur $\partial_r g$ bestimmt werden.

Die entsprechenden Ableitung lauten

$$\partial_r f_1(r) = \begin{cases} 108, & \text{wenn } 0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{6},\\ 6\alpha\beta(6r-1)^{\beta-1} + \frac{1}{r^2}, & \text{wenn } \frac{1}{6} \leqslant r \leqslant \frac{1}{3},\\ (36\pi^2 + \frac{1}{r^2})\cos(\pi(6r-2)) + \frac{6\pi}{r}\sin(\pi(6r-2)), & \text{wenn } \frac{1}{3} \leqslant r \leqslant \frac{1}{2},\\ -\left(6\alpha\beta\left(\frac{5}{2}-3r\right)^{\beta-1} + \frac{1}{r^2}\right), & \text{wenn } \frac{1}{2} \leqslant r \leqslant \frac{5}{6},\\ -\left(\left(18\pi^2 + \frac{1}{2r^2}\right)\cos(\pi(6r-5)) + \frac{1}{2r^2} + \frac{3\pi}{r}\sin(\pi(6r-5))\right), & \text{wenn } \frac{5}{6} \leqslant r \leqslant 1, \end{cases}$$

$$\partial_r u_1(r) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } 0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{6},\\ 6\beta(6r-1)^{\beta-1}, & \text{wenn } \frac{1}{6} \leqslant r \leqslant \frac{1}{3},\\ 0, & \text{wenn } \frac{1}{3} \leqslant r \leqslant \frac{1}{2},\\ -6\beta\left(\frac{5}{2}-3r\right)^{\beta-1}, & \text{wenn } \frac{1}{2} \leqslant r \leqslant \frac{5}{6},\\ 0, & \text{wenn } \frac{5}{6} \leqslant r, \end{cases}$$

$$\partial_r f_2(r) = \begin{cases} -\frac{12}{(1-\beta)^2}, & \text{wenn } 0 \leqslant r \leqslant \frac{1-\beta}{2},\\ -\frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{r^2}, & \text{wenn } \frac{1-\beta}{2} \leqslant r \leqslant \frac{1+\beta}{2},\\ -\frac{4}{(1-\beta)^3}\left(32r - 9(\beta+3) + \frac{3\beta+1}{r^2}\right), & \text{wenn } \frac{1+\beta}{2} \leqslant r \leqslant 1, \end{cases}$$

$$\partial_r u_2(r) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } 0 \leqslant r \leqslant \frac{1-\beta}{2},\\ -\frac{1}{\beta}, & \text{wenn } \frac{1-\beta}{2} \leqslant r \leqslant \frac{1+\beta}{2},\\ 0, & \text{wenn } \frac{1+\beta}{2} \leqslant r. \end{cases}$$

Mit diesen Informationen kann mit `computeExactEnergyBV.m` die exakte Energie berechnet werden und somit durch eintragen der exakten Energie in die Variable **`exactEnergy`** im Benchmark und setzen der Flag `useExactEnergy=true` das Experiment durch anschließendes Ausführen von `startAlgorithmCR.m` gestartet werden.

Take a look at denoising and read [ROF92] for that.

A. Appendix

Literatur

[ABM14] Hedy Attouch, Giuseppe Buttazzo und Gérard Michaille. *Variational Analysis in Sobolev and BV Spaces. Applications to PDEs and Optimization*. Second Edition. Bd. 17. MOS-SIAM Series on Optimization. Philadelphia: Society for Industrial und Applied Mathematics, Mathematical Optimization Society, 2014. ISBN: 978-1-611973-47-1.

[AK06] Gilles Aubert und Pierre Kornprobst. *Mathematical Problems in Image Processing. Partial Differential Equations and the Calculus of Variations*. Second Edition. Bd. 147. Applied Mathematical Sciences. New York: Springer, 2006. ISBN: 0-387-32200-0.

[Bar15] Sören Bartels. *Numerical Methods for Nonlinear Partial Differential Equations*. Bd. 47. Springer Series in Computational Mathematics. Springer International Publishing, 2015. ISBN: 978-3-319-13796-4. DOI: `10.1007/978-3-319-13797-1`.

[CP10] Antonin Chambolle und Thomas Pock. „A First-Order Primal-Dual Algorithm for Convex Problems with Applications to Imaging“. In: *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 40 (2010), S. 120–145. ISSN: 0924-9907. DOI: `10.1007/s10851-010-0251-1`. URL: `https://doi.org/10.1007/s10851-010-0251-1`.

[EG92] Lawrence C. Evans und Ronald F. Gariepy. *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. CRC Press, 1992. ISBN: 0-8493-7157-0.

[JZ13] Yan Jiang und Shu-Ling Zhang. „Image Denoising Based on the Modied ROF Model“. In: *Proceedings of 3rd International Conference on Multimedia Technology(ICMT-13)*. Atlantis Press, 2013, S. 1099–1107. ISBN: 978-90-78677-89-5. DOI: `10.2991/icmt-13.2013.135`. URL: `https://doi.org/10.2991/icmt-13.2013.135`.

[Roc70] R. Tyrrell Rockafellar. *Convex Analysis*. New Jersey: Princeton University Press, 1970. ISBN: 0-691-08069-0.

[ROF92] Leonid I. Rudin, Stanley Osher und Emad Fatemi. „Nonlinear total variation based noise removal algorithms“. In: Bd. 60. 1-4. 1992, S. 259–268. DOI: `10.1016/0167-2789(92)90242-F`. URL: `https://doi.org/10.1016/0167-2789(92)90242-F`.

[Zei85] Eberhard Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications. III: Variational Methods and Optimization*. New York: Springer Science+Business Media, LLC, 1985. ISBN: 978-1-4612-9529-7.

[Zei86] Eberhard Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications. I: Fixed-Point Theorems*. New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo: Springer-Verlag, 1986. ISBN: 0-387-90914-1.

Selbständigkeitserklärung

Ich erkläre, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und noch nicht für andere Prüfungen eingereicht habe. Sämtliche Quellen, einschließlich Internetquellen, die unverändert oder abgewandelt wiedergegeben werden, insbesondere Quellen für Texte, Grafiken, Tabellen und Bilder, sind als solche kenntlich gemacht. Mir ist bekannt, dass bei Verstößen gegen diese Grundsätze ein Verfahren wegen Täuschungsversuchs bzw. Täuschung eingeleitet wird.

Berlin, den 16. Januar 2021,