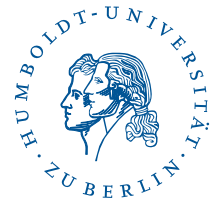


Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät
Institut für Mathematik



Masterarbeit

Die unstetige Petrov-Galerkin-Methode angewandt auf die zeitharmonischen Maxwell-Gleichungen

eingereicht von: Johannes Storn
geboren am: 06.11.1989
in: Berlin
Betreuer: Prof. Dr. Carstensen

Berlin, den 1. Oktober 2015

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
2. Funktionalanalytische Grundlagen	3
2.1. Hilberträume	3
2.2. Lösungstheorie von Variationsgleichungen	4
3. Sobolev-Räume und deren Spuren	9
3.1. Allgemeine Definitionen	9
3.2. Der Raum $H^1(\Omega)$	10
3.3. Der Raum $H(\text{curl}, \Omega)$	11
4. Die Maxwell-Gleichungen	16
4.1. Die Maxwell-Gleichung zweiter Ordnung	16
4.2. Die Variationsgleichung	17
4.3. Vereinfachende Annahmen	18
4.4. Existenz einer Lösung	19
4.4.1. Existenzbeweis mittels Fredholm-Alternative	19
4.4.2. Existenzbeweis mittels inf-sup-Bedingung	22
5. Die Nédélec-FEM	26
5.1. Allgemeine Definitionen	26
5.2. Das Nédélec-Elemente	27
5.3. Existenz einer Lösung	29
6. Die dPG-Methode	31
6.1. Die idealisierte dPG-Methode	31
6.2. Die praktische dPG-Methode	33
6.3. Gebrochene Räume	35
6.4. Die kontinuierliche Variationsformulierung	37
6.5. Die Diskretisierung der Räume	39
6.5.1. Ansatz 1	40
6.5.2. Ansatz 2	47
6.5.3. Ansatz 3	50
7. Numerische Experimente	52
7.1. Implementierung	52
7.2. Experimente	57
8. Zusammenfassung und Ausblick	66

A. Das Kreuzprodukt

68

1. Einleitung

Von Anfang an begleiten elektromagnetische Phänomene, wie Gewitter oder Polarlichter, die Entwicklung der Menschheit. Der Weg zum physikalischen Verständnis dieser Erscheinungen war ein langer. Bereits um 600 v. Chr. notierte der griechische Mathematiker und Philosoph Thales erste Beobachtungen. Seine Entdeckung, dass das Reiben von Bernstein an Seide Funken erzeugt, lässt sich noch heute im Wort Elektron, dem griechischen Wort für Bernstein, wiederfinden. Auch die Bezeichnung Magnetismus ist aus Thales Entdeckung magnetischen Gesteins in der Nähe des Ortes Magnesia hergeleitet. Es dauerte 2000 Jahre, bis William Gilbert 1600 nachweisen konnte, dass die Erde selbst ein riesiger Magnet ist. Weitere Entdeckungen folgten, die dank der Formulierung des Gauß'schen Integralsatzes um 1800 in einen genauen mathematischen Kontext gebracht werden konnten. Bei der Vielzahl der Beobachtungen scheint es umso erstaunlicher, dass James Clerk Maxwell sämtliche Phänomene 1873 mittels vier grundlegender Gesetze beschreiben konnte. Seine vereinheitlichte Theorie der Elektrizität und des Magnetismus wurde zur Grundlage vieler ingenieurwissenschaftlicher Herausforderungen im Rahmen der Elektrotechnik. Gleichzeitig begründet sie eine Vielzahl physikalischer Bereiche, wie der Quantendynamik, Optik und Photonik. Mehrfach wurde die 1979 mit dem Nobelpreis ausgezeichnete Theorie, dass die Maxwell-Gleichungen bis zum Auftreten von Interferenzen mit der schwachen Wechselwirkung gelten, experimentell nachgewiesen. Wie Messungen des Deutschen Elektronen-Synchrotrons und des CERN zeigen, tritt die Interferenz erst bei Wellenlängen von unter einem zehnmillionstel Nanometer auf. Somit lassen sich nahezu alle Phänomene der Elektrodynamik mittels der vier Maxwell-Gleichungen beschreiben. [NS00, Pop14]

Mit dem Aufkommen des Computers ist die technische Möglichkeit zur Berechnung dieser Phänomene gegeben. Im Rahmen der mathematische Analyse, Entwicklung, Implementierung und Anwendung numerischen Methoden für die Simulation elektrodynamischer Prozesse hat sich dazu in den letzten Jahrzehnten das Forschungsgebiet der *Computational Electromagnetics* etabliert. Es umfasst eine Vielzahl anspruchsvoller Herausforderungen, wie der Instabilität von Finiten-Elemente-Methoden bei groben Triangulierungen. Die neu entwickelte unstetige Petrov-Galerkin-Methode (dPG-Methode) umgeht dieses Problem durch eine Vergrößerung des Testraumes im Rahmen einer Methode der kleinsten Quadrate [CDG15]. Numerische Experimente legen jedoch nahe, dass die gewählten Testräume unnötig groß sind. Kleinere Testräume haben den Vorteil, dass sich mit ihnen der Berechnungsaufwand erheblich vermindert.

Daher werden im Rahmen dieser Masterarbeit die Eigenschaften von Testräumen niedriger Ordnung in der dPG-Methode für die Maxwell-Gleichungen untersucht. Im ersten Kapitel befinden sich einige grundlegende Resultate der Funktionalanalysis. Neben Standardresultaten zur Lösung von Variationsgleichungen ist das Splitting Lemma von besonderer Bedeutung, da es mehrfach für Existenzbeweise in der dPG-Methode angewandt wird. Anschließend werden Sobolev-Räume eingeführt. Mittels des Dualitätslemmas lässt sich dabei die technisch aufwendige Analyse der Spuren von $H(\text{curl}, \Omega)$ -Funktionen nach Ciarlet und

Buffa [BC01] umgehen. Im dritten Kapitel werden die Maxwell-Gleichungen eingeführt und die Existenz einer Lösung wird bewiesen. Es folgt die Nédélec-Finite-Elemente-Methode (Nédélec-FEM), ein Standardansatz zur numerischen Lösung der Gleichungen. Die Instabilität dieses Ansatzes wird durch eine exakte Bestimmung der inf-sup-Konstanten verdeutlicht. Im anschließenden Kapitel wird mit der dPG-Methode ein Ansatz präsentiert, der einige Vorteile gegenüber den Standardansätzen für solche indefiniten Variationsprobleme hat. Die grundlegende Idee wird dabei zuerst abstrakt erläutert, bevor sie auf die Maxwell-Gleichungen angewandt wird. Nachdem die Wohlgestellttheit der dPG-Variationsformulierung gezeigt wurde, werden verschiedene Wahlen von diskreten Ansatz- und Testräumen untersucht. Die theoretischen Resultate werden zum Abschluss numerisch überprüft.

2. Funktionalanalytische Grundlagen

Dieses Kapitel listet grundlegende Resultate der Funktionalanalysis auf. Der Großteil lässt sich in Lehrbüchern in gegebenenfalls allgemeineren Versionen wiederfinden. Die Ausnahme bildet Lemma 2.2.5, welches [CDG15] entnommen ist. Die darin auftretende Abschätzung wird mittels eines neuen Beweises verbessert.

2.1. Hilberträume

Im Folgenden ist $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Ferner wird mit \Re der Real-, mit \Im der Imaginärteil sowie mit $|\bullet|$ der Betrag bezeichnet. Des Weiteren symbolisiert ein Strich über einer komplexen Zahl (oder Funktion) ihre komplexe Konjugation, d.h., für $x \in \mathbb{C}$ ist $\bar{x} = \Re x - i\Im x$.

Definition 2.1.1 (Hilbertraum). Das Paar $(X, (\bullet, \bullet)_X)$ heißt Hilbertraum, wenn der \mathbb{K} -Vektorraum X vollständig ist bezüglich der durch das Skalarprodukt $(\bullet, \bullet)_X$ induzierten Metrik

$$\|x\|_X := \sqrt{(x, x)_X}.$$

Lemma 2.1.2. Für beliebige Elemente $x_1, x_2 \in X$ des Hilbertraums X gilt

$$|(x_1, x_2)_X| \leq \|x_1\|_X \|x_2\|_X \quad (\text{Cauchy-Schwarz-Ungleichung})$$

mit Gleichheit genau dann, wenn x_1 und x_2 linear abhängig sind, und

$$\|x_1 + x_2\|_X^2 + \|x_1 - x_2\|_X^2 = 2(\|x_1\|_X^2 + \|x_2\|_X^2) \quad (\text{Parallelogrammidentität}).$$

Sollten die Elemente senkrecht aufeinander stehen, d.h. $(x_1, x_2)_X = 0$, so ist

$$\|x_1 - x_2\|_X^2 = \|x_1\|_X^2 + \|x_2\|_X^2 \quad (\text{Satz des Pythagoras}).$$

Beweis. [Alt12, 0.2 Lemma] □

Satz 2.1.3 (Satz von Jordan und von Neumann). Die Norm $\|\bullet\|_X$ wird genau dann durch ein Skalarprodukt induziert, wenn die Parallelogrammidentität gilt.

Beweis. [JVN35, Theorem 1] □

Definition 2.1.4. Sind X und Y \mathbb{K} -Vektorräume, so bezeichnet $L(X; Y)$ die Menge der linearen und stetigen Abbildungen von X nach Y , d.h.,

$$L(X; Y) := \{T : X \rightarrow Y \mid T \text{ ist linear und stetig}\}.$$

Satz 2.1.5. Eine lineare Abbildung $T : X \rightarrow Y$ ist genau dann stetig, wenn sie beschränkt im Sinne von $\|T\|_{L(X; Y)} := \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \|Tx\|_Y / \|x\|_X < \infty$ ist.

Beweis. [Alt12, 3.1 Lemma] □

Definition 2.1.6. Der Dualraum X^* des \mathbb{K} -Vektorraums X ist definiert als $X^* := L(X; \mathbb{K})$. Für jedes Element $x^* \in X^*$ und $x \in X$ ist die duale Paarung $\langle x^*, x \rangle_{X^*, X} := x^*(x)$ und die Norm $\|x^*\|_{X^*} := \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \langle x^*, x \rangle_{X^*, X} / \|x\|_X$.

Definition 2.1.7. Gilt für die Abbildung $T : X \rightarrow \mathbb{K}$, dass alle $x_1, x_2 \in X$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ die Gleichung $T(\alpha x_1 + x_2) = \bar{\alpha}T(x_1) + T(x_2)$ erfüllen, so heißt sie konjugiert linear. Im reellen Fall entspricht dies Linearität.

Satz 2.1.8 (Riesz'scher Darstellungssatz). *Für den \mathbb{K} -Hilbertraum X mit Dualraum X^* ist durch die Abbildungsvorschrift*

$$R_X : X \rightarrow X^*, \quad x \mapsto (\bullet, x)_X$$

ein isometrischer konjugiert linearer Isomorphismus definiert.

Beweis. [Alt12, 4.1 Riesz'scher Darstellungssatz] □

2.2. Lösungstheorie von Variationsgleichungen

Definition 2.2.1 (Sesquilinearform). Sind X und Y Hilberträume, so wird die Abbildung $b(\bullet, \bullet) : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ Sesquilinearform genannt, falls für alle $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, $x_1, x_2 \in X$ sowie $y_1, y_2 \in Y$ gilt

$$\begin{aligned} b(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y_1) &= \alpha_1 b(x_1, y_1) + \alpha_2 b(x_2, y_1), \\ b(x_1, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) &= \bar{\alpha}_1 b(x_1, y_1) + \bar{\alpha}_2 b(x_1, y_2). \end{aligned}$$

Zur Definition einer Variationsgleichung wird ein Ansatzraum X und ein Testraum Y benötigt. In dieser Arbeit handelt es sich dabei stets um Hilberträume. Ferner bezeichnet $b(\bullet, \bullet) : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ eine Sesquilinearform und $F \in Y^*$ ein Element des Dualraums. Die Variationsgleichung lautet

$$b(x, y) = F(y) \quad \text{für alle } y \in Y. \tag{2.1}$$

Ein häufig genutztes Hilfsmittel zum Beweis der Existenz einer Lösung $x \in X$ der Variationsgleichung bei gleichem Ansatz- und Testraum ist das Lemma von Lax-Milgram.

Satz 2.2.2 (Lemma von Lax-Milgram). *Ist X ein \mathbb{K} -Hilbertraum mit Sesquilinearform $b(\bullet, \bullet) : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ und Konstanten $0 \leq \beta \leq C_0 < \infty$, sodass für alle $x_1, x_2 \in X$ gilt*

$$\begin{aligned} |b(x_1, x_2)| &\leq C_0 \|x_1\|_X \|x_2\|_X, & (\text{Stetigkeit}) \\ \beta \|x_1\|_X^2 &\leq |b(x_1, x_1)|, & (\text{Koerzivität}) \end{aligned}$$

dann existiert genau eine Abbildung $B \in L(X; X)$ mit

$$b(Bf, x) = (f, x)_X \quad \text{für alle } x \in X,$$

wobei $\|Bf\|_X \leq \|f\|_X / \beta$.

Beweis. Der Satz ist ein Spezialfall des folgenden Satzes 2.2.3. □

Die verallgemeinerte Version des Lemmas von Lax-Milgram für verschieden Ansatz- und Testräume geht zurück auf Babuška. Sie sichert die Existenz einer Lösung sowie deren Stabilität zu, vorausgesetzt die Sesquilinearform $b : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ erfüllt die Beschränktheit

$$(A1) \quad \|b\| := \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \sup_{y \in Y \setminus \{0\}} \frac{|b(x, y)|}{\|x\|_X \|y\|_Y} < \infty$$

und die inf-sup-Bedingung

$$(A2) \quad 0 < \beta := \inf_{x \in X \setminus \{0\}} \sup_{y \in Y \setminus \{0\}} \frac{|b(x, y)|}{\|x\|_X \|y\|_Y}.$$

Satz 2.2.3 (Satz von Babuška-Lax-Milgram). *Sind X und Y Hilberträume mit Sesquilinearform $b(\bullet, \bullet) : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$, welche die Bedingungen (A1), (A2) sowie die Eindeutigkeitsbedingung*

$$\{y \in Y \mid b(x, y) = 0 \text{ für alle } x \in X\} = \{0\}$$

erfüllt, so existiert zu jedem $F \in Y^$ eine eindeutige Lösung $x \in X$ der Variationsgleichung (2.1). Des Weiteren gilt mit der Konstanten β aus (A2), dass $\beta\|x\|_X \leq \|F\|_{Y^*}$.*

Beweis. [Bab71, Theorem 2.1] □

Bemerkung 2.2.4. Auch wenn die Eindeutigkeitsbedingung nicht gegeben ist, so lässt sich der Kern

$$\Lambda := \{y \in Y \mid b(x, y) = 0 \text{ für alle } x \in X\}$$

mittels der bzgl. $(\bullet, \bullet)_Y$ orthogonalen Zerlegung $Y = Y_0 \oplus \Lambda$ entfernen. Mit dem neuen Hilbertraum Y_0 anstelle von Y werden die Bedingungen des Satzes erfüllt. Somit existiert zu gegebenem $F \in Y^*$ ein eindeutiges $x \in X$, sodass $b(x, y_0) = F(y_0)$ für alle $y_0 \in Y_0$. Dabei ist $\beta\|x\|_X \leq \|F\|_{Y^*}$. Mit anderen Worten existiert zu jedem $y_0 \in Y_0$ ein $x \in X$, sodass $b(x, y) = (y_0, \tilde{y}_0)_Y$ für alle $\tilde{y}_0 \in Y_0$ mit $\beta\|x\|_X \leq \|y_0\|_Y$. Dies ergibt

$$0 < \beta = \beta \frac{(y_0, y_0)}{\|y_0\|_Y^2} \leq \frac{b(x, y_0)}{\|x\|_X \|y_0\|_Y},$$

woraus die inf-sup-Bedingung

$$0 < \beta \leq \inf_{y_0 \in Y_0} \sup_{x \in X} \frac{|b(x, y_0)|}{\|x\|_X \|y_0\|_Y}$$

folgt. Ersetzt man X durch Y_0 und Y durch X im vorangegangenen Satz, so besagt dieser, dass für jedes $G \in X^*$ ein eindeutiges $y_0 \in Y_0$ mit $b(x, y_0) = G(x)$ für alle $x \in X$ sowie $\beta\|y_0\|_Y \leq \|G\|_{X^*}$ existiert.

Für den Nachweis von (A2) der in Kapitel 6 vorgestellten Methode erweist sich folgendes Lemma als hilfreich.

Lemma 2.2.5 (Splitting Lemma). *X und Y sind Hilberträume mit den Unterräumen $X_1, X_2 \subset X$ und $Y_1 \subset Y$. Ferner ist $b(\bullet, \bullet) : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ eine Sesquilinearform und*

$$b_1 := \sup_{x \in X_1 \setminus \{0\}} \sup_{y \in Y \setminus \{0\}} \frac{|b(x, y)|}{\|x\|_X \|y\|_Y}.$$

Wird jede der vier Bedingungen

$$(S1) \quad X = X_1 + X_2, \text{ sodass } (x_1, x_2)_X = 0 \text{ für alle } x_1 \in X_1, x_2 \in X_2,$$

$$(S2) \quad b(x_2, y_1) = 0 \text{ für alle } x_2 \in X_2, y_1 \in Y_1,$$

$$(S3) \quad 0 < \beta_1 := \inf_{x_1 \in X_1 \setminus \{0\}} \sup_{y_1 \in Y_1 \setminus \{0\}} \frac{|b(x_1, y_1)|}{\|x_1\|_X \|y_1\|_Y},$$

$$(S4) \quad 0 < \beta_2 := \inf_{x_2 \in X_2 \setminus \{0\}} \sup_{y \in Y \setminus \{0\}} \frac{|b(x_2, y)|}{\|x_2\|_X \|y\|_Y},$$

erfüllt, so ist $(\beta_1^{-2} + \beta_2^{-2}(1 + b_1/\beta_1)^2)^{-1/2} \leq \beta$ in **(A2)**.

Beweis. Jedes Element $x \in X$ lässt sich (nicht zwangsläufig eindeutig) zerlegen in $x = x_1 + x_2$ mit $x_1 \in X_1$ und $x_2 \in X_2$. Des Weiteren lässt sich der Hilbertraum Y bzgl. $(\bullet, \bullet)_Y$ orthogonal zerlegen in $Y = Y_1 \oplus Y_2$. Dabei gilt

$$\beta_2 = \inf_{x_2 \in X_2 \setminus \{0\}} \sup_{y_2 \in Y_2 \setminus \{0\}} \frac{|b(x_2, y_2)|}{\|x_2\|_X \|y_2\|_Y}.$$

Zu $x_2 \in X_2$ existiert nach Bemerkung 2.2.4 ein $y_2 \in Y_2$ mit $\beta_2 \|y_2\|_Y \leq \|x_2\|_X$ und

$$b(\tilde{x}_2, y_2) = (x_2, \tilde{x}_2)_X \quad \text{für alle } \tilde{x}_2 \in X_2.$$

Nach der selben Bemerkung existiert zu $x_1 \in X_1$ ein $y_1 \in Y_1$ mit $\beta_1 \|y_1\|_Y \leq \|x_1\|_X + b_1 \|y_2\|_Y$ und

$$b(\tilde{x}_1, y_1) = (x_1, \tilde{x}_1)_X - b(\tilde{x}_1, y_2) \quad \text{für alle } \tilde{x}_1 \in X_1.$$

Somit ist

$$\begin{aligned} b(x_1 + x_2, y_1 + y_2) &= b(x_1, y_1) + b(x_2, y_2) + b(x_1, y_2) + b(x_2, y_1) \\ &= \|x_1\|_X^2 - b(x_1, y_2) + \|x_2\|_X^2 + b(x_1, y_2). \end{aligned}$$

Für die Norm von $y = y_1 + y_2$ gilt

$$\begin{aligned} \|y\|_Y^2 &= \|y_1\|_Y^2 + \|y_2\|_Y^2 \leq \beta_1^{-2}(\|x_1\|_X + \beta_2^{-1}b_1\|x_2\|_X)^2 + \beta_2^{-2}\|x_2\|_X^2 \\ &\leq \beta_1^{-2}(\|x_1\|_X^2 + \|x_2\|_X^2)(1 + \beta_2^{-2}b_1^2) + \beta_2^{-2}\|x_2\|_X^2 \\ &\leq (\beta_1^{-2}(1 + \beta_2^{-2}b_1^2) + \beta_2^{-2})(\|x_1\|_X^2 + \|x_2\|_X^2). \end{aligned}$$

Da $x \in X$ beliebig gewählt wurde, ist

$$(\beta_1^{-2} + \beta_2^{-2} + \beta_1^{-2}\beta_2^{-2}b_1^2)^{-1/2} \leq \inf_{x \in X \setminus \{0\}} \sup_{y \in Y \setminus \{0\}} \frac{|b(x, y)|}{\|x\|_X \|y\|_Y}.$$

□

Bemerkung 2.2.6. Die in [CDG15, Theorem 3.1] bewiesene Abschätzung lautet

$$(\beta_1^{-2} + \beta_2^{-2} + \beta_1^{-2}\beta_2^{-2}b_1^2 + 2\beta_1^{-1}\beta_2^{-2}b_1^2)^{1/2} \leq \beta$$

und ist somit unschärfer als die gerade bestimmte Abschätzung.

Bemerkung 2.2.7. Sollte die Zerlegung von X in **(S1)** nicht orthogonal sein, lässt sich mit $\|x_1 + x_2\|_X^2 \leq 2(\|x_1\|_X^2 + \|x_2\|_X^2)$ und dem vorangegangenen Beweis die Abschätzung

$$2^{-1/2}(\beta_1^{-2} + \beta_2^{-2} + \beta_1^{-2}\beta_2^{-2}b_1^2)^{-1/2} \leq \beta$$

zeigen.

Eine Möglichkeit, die Lösung einer Variationsgleichung näherungsweise zu bestimmen, bietet das Petrov-Galerkin Verfahren. Dabei werden die Räume X und Y durch die endlichdimensionalen Räume $X_h \subset X$ und $Y_h \subset Y$ approximiert. Ziel ist es, ein $x_h \in X_h$ zu finden, sodass

$$b(x_h, y_h) = F(y_h) \quad \text{für alle } y_h \in Y_h. \quad (2.2)$$

Satz 2.2.8. Sind $X_h \subset X$ und $Y_h \subset Y$ abgeschlossene Unterräume der Banachräume X und Y , sodass die diskrete inf-sup-Bedingung

$$(\mathbf{dA2}) \quad 0 < \beta_h := \inf_{x_h \in X_h \setminus \{0\}} \sup_{y_h \in Y_h \setminus \{0\}} \frac{b(x_h, y_h)}{\|x_h\|_X \|y_h\|_Y}$$

und die Eindeutigkeitsbedingung

$$\{y_h \in Y_h \mid b(x_h, y_h) = 0 \text{ für alle } x_h \in X_h\} = \{0\}$$

erfüllt werden, so hat das Problem (2.2) eine eindeutige Lösung $x_h \in X_h$. Mit der Konstanten β_h aus **(A2)** gilt dabei

$$\|x - x_h\|_X \leq (1 + \|b\|/\beta_h) \inf_{\xi_h \in X_h} \|x - \xi_h\|_X. \quad (2.3)$$

Beweis. [Bab71, Theorem 2.2]. □

Bemerkung 2.2.9. Für einen Hilbertraum X gilt nach [Kat60] das *oblique projection lemma*. Es besagt für die Identität I und $P \in L(X; X)$ mit $I \neq P \circ P = P \neq 0$, dass

$$\|I - P\|_{L(X; X)} = \|P\|_{L(X; X)}.$$

Xu und Zikatanov nutzen dieses Lemma in [XZ03], um für Hilberträume X und Y die Fehlerabschätzung (2.3) zu verbessern. Sie erhalten mit den Konstanten aus Satz 2.2.8 die Abschätzung

$$\|x - x_h\|_X \leq \|b\|/\beta_h \inf_{\xi_h \in X_h} \|x - \xi_h\|_X.$$

Ein weiteres abstraktes Hilfsmittel, welches häufig für den Existenzbeweis einer Lösung der Maxwell-Gleichungen genutzt wird, ist die Fredholm-Alternative.

Satz 2.2.10 (Fredholm-Alternative). *Mit I wird die Identität und mit A ein kompakter Operator im Hilbertraum X bezeichnet, wobei $B = I + A \in L(X; X)$. Hat die Gleichung $Bx = 0$ nur die triviale Lösung, so existiert zu jedem $f \in X$ genau ein $x \in X$, sodass $Bx = f$. Dabei hängt die Lösung stetig von der rechten Seite $f \in X$ ab.*

Wie sich zeigen wird, hängt die Existenz einer Lösung der Maxwell-Gleichung u.a. von den Eigenwerten λ eines Operators $\tilde{K} \in L(X; X)$ ab. Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{C}$ sind definiert als Lösung von $\tilde{K}x = \lambda x$ für ein $x \in X \setminus \{0\}$. Ein abstraktes Resultat zur Charakterisierung von Eigenwerten ist das Hilbert-Schmidt-Theorem.

Satz 2.2.11 (Hilbert-Schmidt-Theorem). *Ist X ein Hilbertraum und $\tilde{K} \in L(X; X)$ ein kompakter und selbstadjungierter Operator, so sind die Eigenwerte $\lambda_n \in \mathbb{C}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ reell, positiv und von endlicher Multiplizität. Sie lassen sich sortieren und die zugehörigen Eigenfunktionen $\phi_n \in X$ können so gewählt werden, dass*

i) $0 < \dots \leq \lambda_2 \leq \lambda_1 < \infty$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$ sowie

ii) $(\phi_n, \phi_m)_X = 0$ für $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \neq m$ und $(\phi_n, \phi_n)_X = 1$ für $n \in \mathbb{N}$ ist.

Das Bild von \tilde{K} wird aufgespannt durch den Abschluss der Menge aller Eigenfunktionen. Für jedes Element $x \in X$ gilt die Darstellung $\tilde{K}x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n (\phi_n, x)_X \phi_n$.

Beweis. [RR04, Theorem 8.94]

□

3. Sobolev-Räume und deren Spuren

Auf die Funktionalanalysis folgen nun einige grundlegende Definitionen und Resultate bzgl. der später zugrunde liegenden Räume. Es handelt es sich dabei erneut um Standardresultate, welche sich in diversen Büchern wiederfinden lassen. Jedoch ist die Untersuchung der Spuren von $H(\text{curl}, \Omega; \mathbb{C}^3)$ -Funktionen neu und umgeht die technische Analyse der Arbeiten [BC01] und [BCS02] mittels des in [CDG15] eingeführten Dualitätslemmas.

3.1. Allgemeine Definitionen

Bevor die Sobolev-Räume $H^1(\Omega; \mathbb{C})$ und $H(\text{curl}, \Omega; \mathbb{C}^3)$ eingeführt werden können, bedarf es einiger Vorbereitung. Für $\mathbb{K}^n \in \{\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$ bezeichnet \cdot das Standardskalarprodukt in \mathbb{K}^n . Ist $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$, bedeutet dies

$$x \cdot y = x_1 \bar{y}_1 + \dots + x_n \bar{y}_n.$$

Mit $L^2(\Omega; \mathbb{K}^n)$ wird die Menge aller messbaren Funktionen f bezeichnet, die vom offenen Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ nach \mathbb{K}^n abbilden und quadratisch integrierbar sind, d.h., $\int_{\Omega} f \cdot f \, dx < \infty$. Die Menge $L^2(\Omega; \mathbb{K}^n)$ bildet einen Hilbertraum mit Skalarprodukt

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} := \int_{\Omega} f \cdot g \, dx.$$

Der Abschluss der offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ wird durch $\bar{\Omega}$ gekennzeichnet. Des Weiteren ist für $n \in \mathbb{N}$

- $\mathcal{C}^0(\bar{\Omega}; \mathbb{K}^n)$ die Menge aller stetigen Funktionen von $\bar{\Omega}$ nach \mathbb{K}^n ,
- $\mathcal{C}^\infty(\Omega; \mathbb{K}^n)$ die Menge aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen in Ω mit Bild in \mathbb{K}^n ,
- $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega; \mathbb{K}^n)$ die Menge aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Support in Ω und Bild in \mathbb{K}^n ,
- $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}; \mathbb{K}^n)$ die Einschränkung von Funktionen aus $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{K}^n)$ auf Ω .

Definition 3.1.1 (schwache Ableitung). Vermöge $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{N}^3$ ein Multiindex der Ordnung $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$. Die Funktion $u \in L^2(\Omega; \mathbb{K})$ besitzt in $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ die schwache Ableitung $v = \partial^\alpha u$ mit

$$\partial^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_3^{\alpha_3}},$$

falls v lokal integrierbar ist und

$$(\phi, v)_{L^2(\Omega)} = (-1)^{|\alpha|} (\partial^\alpha \phi, u)_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}). \quad (3.1)$$

Bemerkung 3.1.2. Tatsächlich ist es schwer, in der Literatur Definitionen für komplexwertige Funktionen und Räume zu finden. Meistens wird lediglich der reelle Fall eingeführt und angemerkt, dass er sich für komplexe Fälle verallgemeinern lässt. Tatsächlich folgt aus der Definition der schwachen Ableitung, welche Anmerkung 5.15 aus [RR04] zur Definition von Distributionen entnommen ist, dass Realteil $\Re v$ und Imaginärteil $\Im v$ getrennt voneinander untersucht werden können, da (3.1) äquivalent ist zu

$$\begin{cases} (\phi, \Re v)_{L^2(\Omega)} &= (-1)^{|\alpha|} (\partial^\alpha \phi, \Re u)_{L^2(\Omega)} & \text{für alle } \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}), \\ (\phi, \Im v)_{L^2(\Omega)} &= (-1)^{|\alpha|} (\partial^\alpha \phi, \Im u)_{L^2(\Omega)} & \text{für alle } \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}). \end{cases}$$

Somit ist eine komplexwertige Funktion genau dann schwach differenzierbar, wenn Real- und Imaginärteil schwach differenzierbar sind.

Notation 3.1.3. *Skalarprodukte und Normen werden durch Angabe des Raumes als Index gekennzeichnet, wobei auf die Angabe des Bildraumes verzichtet wird.*

Definition 3.1.4 (Lipschitz-Rand). Das beschränkte Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ hat genau dann einen Lipschitz-Rand, wenn der Rand Γ durch endlich viele offene Mengen U^1, \dots, U^l überdeckt werden kann, sodass $\Gamma \cap U^j$ für $j = 1, \dots, l$ der Graph einer Lipschitz-stetigen Funktion ist und die Mengen $\Omega \cap U^j$ auf jeweils einer Seite des Graphen liegen. Sollte Ω einen Lipschitz-Rand haben, so heißt es Lipschitz-Gebiet.

Bemerkung 3.1.5. Lipschitz-Gebiet haben auf dem Rand fast überall einen wohldefinierten äußeren Normalenvektor ν [Neč67].

3.2. Der Raum $H^1(\Omega)$

Definition 3.2.1. Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein offenes Lipschitz-Gebiet, so ist der Gradient einer Funktion $f \in L^2(\Omega; \mathbb{K})$ definiert als

$$\nabla f := (\partial f / \partial x_1, \dots, \partial f / \partial x_3),$$

wobei $\partial f / \partial x_k$ für $k = 1, 2, 3$ die schwache Ableitung bezeichnet.

Satz 3.2.2. *Der \mathbb{K} -Vektorraum*

$$H^1(\Omega; \mathbb{K}) := \{f \in L^2(\Omega) \mid \nabla f \in L^2(\Omega)\}$$

mit Skalarprodukt

$$(f, g)_{H^1(\Omega)} := (f, g)_{L^2(\Omega)} + (\nabla f, \nabla g)_{L^2(\Omega)}.$$

ist ein Hilbertraum.

Beweis. [RR04, Theorem 7.5]. □

Bemerkung 3.2.3. Folglich handelt es sich beim Abschluss $H_0^1(\Omega; \mathbb{K}) := \overline{\mathcal{C}_0^\infty(\Omega; \mathbb{K})}^{\|\bullet\|_{H^1(\Omega)}}$ bzgl. der durch das Skalarprodukt $(\bullet, \bullet)_{H^1(\Omega)}$ induzierten Norm $\|\bullet\|_{H^1(\Omega)}$ um einen Unterraum von $H^1(\Omega; \mathbb{K})$.

Satz 3.2.4 (Spursatz). *Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein offenes, beschränktes Lipschitz-Gebiet, so existiert genau eine stetige lineare Abbildung $\gamma_0 : H^1(\Omega; \mathbb{K}) \rightarrow L^2(\Gamma; \mathbb{K})$ mit $\gamma_0 f = f|_\Gamma$ für $f \in H^1(\Omega; \mathbb{K}) \cap C^0(\bar{\Omega}; \mathbb{K})$.*

Beweis. [Alt12, A6.6 Spursatz]. □

Notation 3.2.5. *Der Spuoperator γ_0 wird in der Regel nicht explizit angegeben, d.h., anstelle von $\gamma_0 f(x)$ wird lediglich $f(x)$ für $x \in \Gamma$ notiert.*

Eine ausführlichere Analyse des Spuoperators γ_0 gibt es im Buch von McLean [McL00]. Standardmäßig bezeichnen dabei

$$H^{1/2}(\Gamma; \mathbb{K}) := \gamma_0(H^1(\Omega; \mathbb{K})) \quad \text{und} \quad H^{-1/2}(\Gamma; \mathbb{K}) := (H^{1/2}(\Gamma; \mathbb{K}))^*$$

das Bild des Operators bzw. dessen Dualraum. Für vektorwertige Funktionen ist $H^{1/2}(\Gamma; \mathbb{K}^n) := \gamma_0(H^1(\Omega; \mathbb{K}^n))$, wobei der Spuoperator komponentenweise angewandt wird. Der dazugehörige Dualraum ist $H^{-1/2}(\Gamma; \mathbb{K}^n) := (H^{1/2}(\Gamma; \mathbb{K}^n))^*$. Des Weiteren steht $\langle \bullet, \bullet \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma), H^{1/2}(\Gamma)}$ für die duale Paarung.

3.3. Der Raum $H(\text{curl}, \Omega)$

Für eine vektorwertige Funktion $\Phi \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{K}^3)$ ist die Rotation definiert durch

$$\text{curl } \Phi := \begin{pmatrix} \partial \Phi_3 / \partial x_2 - \partial \Phi_2 / \partial x_3 \\ \partial \Phi_1 / \partial x_3 - \partial \Phi_3 / \partial x_1 \\ \partial \Phi_2 / \partial x_1 - \partial \Phi_1 / \partial x_2 \end{pmatrix}.$$

Wendet man (3.1) auf jede Komponente der Rotation an, so besitzt $F \in L^2(\Omega; \mathbb{K}^3)$ die schwache Rotation $\text{curl } F$ genau dann, wenn

$$(\text{curl } F, \Phi)_{L^2(\Omega)} = (F, \text{curl } \Phi)_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } \Phi \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{K}^3). \quad (3.2)$$

Satz 3.3.1. *Für das offene Lipschitz-Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ist der \mathbb{K} -Vektorraum*

$$H(\text{curl}, \Omega; \mathbb{K}^3) := \{F \in L^2(\Omega; \mathbb{K}^3) \mid \text{curl } F \in L^2(\Omega; \mathbb{K}^3)\}$$

ein Hilbertraum mit Skalarprodukt

$$(F, G)_{H(\text{curl}, \Omega)} := (F, G)_{L^2(\Omega)} + (\text{curl } F, \text{curl } G)_{L^2(\Omega)}.$$

Beweis. [Mon03, Theorem 3.26]. □

Bemerkung 3.3.2. Der Abschluss $H_0(\text{curl}, \Omega; \mathbb{K}^3) := \overline{C_0^\infty(\Omega; \mathbb{K}^3)}^{\|\bullet\|_{H(\text{curl}, \Omega)}}$ bzgl. der durch $(\bullet, \bullet)_{H(\text{curl}, \Omega)}$ induzierten Norm $\|\bullet\|_{H(\text{curl}, \Omega)}$ ist ein Hilbertraum.

Für $\Psi, \Phi \in C_0^\infty(\bar{\Omega}; \mathbb{K}^3)$ gilt mit dem im Anhang (A.1) definierten Kreuzprodukt und der Divergenz $\text{div } \Phi := \partial \Phi_1 / \partial x_1 + \partial \Phi_2 / \partial x_2 + \partial \Phi_3 / \partial x_3$ die Gleichung $\text{div}(\Phi \times \Psi) = \text{curl } \Phi \cdot \Psi - \Phi \cdot \text{curl } \Psi$. Des Weiteren entspricht auf dem Rand Γ des beschränkten Lipschitz-Gebiets Ω mit äußerem Normalenvektor $\nu \in \mathbb{R}^3$ der Ausdruck $(\Phi \times \Psi) \cdot \nu = \nu \times \Psi \cdot \Phi$. Aus dem Gauß'sche Integralsatz $\int_\Omega \text{div}(\Phi) \, dx = \int_\Gamma \Phi \cdot \nu \, ds$ folgt

$$\int_\Omega \text{curl } \Phi \cdot \Psi \, dx - \int_\Omega \Phi \cdot \text{curl } \Psi \, dx = \int_\Gamma \nu \times \Psi \cdot \Phi \, ds.$$

Ziel ist es, diese partielle Integrationsformel für alle Elemente in $H(\text{curl}, \Omega)$ zu erweitern.

Satz 3.3.3. *Ist Ω ein offenes Lipschitz-Gebiet, so liegt $C_0^\infty(\overline{\Omega}; \mathbb{K}^3)$ bzgl. der $\|\bullet\|_{H(\text{curl}, \Omega)}$ -Norm dicht in $H(\text{curl}, \Omega; \mathbb{K}^3)$.*

Beweis. [GR86, Theorem 2.10]. □

Satz 3.3.4. *Für ein offenes, beschränktes Lipschitz-Gebiet Ω mit äußerem Normalenvektor $\nu \in \mathbb{R}^3$ lässt sich der auf $C_0^\infty(\overline{\Omega}; \mathbb{K}^3)$ definierte Spuroperator*

$$\gamma_\tau : \Phi \mapsto \Phi \times \nu$$

stetig zu einer linearen und stetigen Abbildung $\gamma_\tau : H(\text{curl}, \Omega; \mathbb{K}^3) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma; \mathbb{K}^3)$ erweitern, sodass für alle $F \in H(\text{curl}, \Omega; \mathbb{K}^3)$ und $G \in H^1(\Omega; \mathbb{K})$ gilt,

$$(\text{curl } F, G)_{L^2(\Omega)} - (F, \text{curl } G)_{L^2(\Omega)} = \langle \gamma_\tau F, G \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma; \mathbb{K}^3), H^{1/2}(\Gamma; \mathbb{K}^3)}. \quad (3.3)$$

Beweis. [GR86, Theorem 2.11]. □

Bemerkung 3.3.5. Der Operator γ_τ lässt sich wie in [Buf03] auch durch $\Phi \mapsto \nu \times \Phi$ definieren. Dies hat zur Folge, dass die Vorzeichen der linken Seite von (3.3) vertauscht sind.

Notation 3.3.6. *Entsprechend der Konvention in [CDG14] und [CDG15] werden Spuren $\hat{h} \in H^{-1/2}(\text{div}_\Gamma, \Gamma; \mathbb{K}^3)$ mittels Zirkumflex gekennzeichnet.*

Satz 3.3.7. *$H_0(\text{curl}, \Omega; \mathbb{K}^3)$ ist der Kern der Abbildung $\gamma_\tau : H(\text{curl}, \Omega; \mathbb{K}^3) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma; \mathbb{K}^3)$.*

Beweis. [GR86, Theorem 2.12]. □

Entsprechend der Arbeit [BC01] ist $H^{-1/2}(\text{div}_\Gamma, \Gamma; \mathbb{K}^3) := \gamma_\tau(H(\text{curl}, \Omega; \mathbb{K}^3))$. Um die partielle Integrationsformel (3.3) auch für $G \in H(\text{curl}, \Omega; \mathbb{K}^3)$ zu definieren, muss ein weiterer Spuroperator

$$\pi_\tau : H(\text{curl}, \Omega; \mathbb{K}^3) \rightarrow H^{-1/2}(\text{curl}_\Gamma, \Gamma; \mathbb{K}^3) := (H^{-1/2}(\text{div}_\Gamma, \Gamma; \mathbb{K}^3))^*$$

eingeführt werden. Die Analyse der Spuroperatoren und der dazugehörigen Räume ist, insbesondere für Lipschitz-Gebiete, sehr aufwendig. Für weitere Informationen sei auf die Übersichtsarbeit von Annalisa Buffa [Buf03] verwiesen. Die technische und komplizierte Analyse wird im Folgenden umgangen und basiert auf den bereits eingeführten Resultaten der Funktionalanalysis.

Definition 3.3.8. Die lineare Abbildung $\mathcal{H} : H^{-1/2}(\text{div}_\Gamma, \Gamma; \mathbb{K}^3) \rightarrow H(\text{curl}, \Omega; \mathbb{K}^3)$ ist definiert durch

$$\begin{cases} (\mathcal{H}\hat{h}, F)_{L^2(\Omega)} + (\text{curl } \mathcal{H}\hat{h}, \text{curl } F)_{L^2(\Omega)} = 0 & \text{für alle } F \in H_0(\text{curl}, \Omega; \mathbb{K}^3), \\ \gamma_\tau \mathcal{H}\hat{h} = \hat{h}. \end{cases} \quad (3.4)$$

Lemma 3.3.9. *Die Abbildung \mathcal{H} ist wohldefiniert.*

Beweis. Nach dem Darstellungssatz von Riesz (Satz 2.1.8) existiert zu $H \in H(\operatorname{curl}, \Omega; \mathbb{K}^3)$ mit $\gamma_\tau H = \hat{h}$ genau ein $H_0 \in H_0(\operatorname{curl}, \Omega; \mathbb{K}^3)$, sodass

$$(H_0, F)_{L^2(\Omega)} + (\operatorname{curl} H_0, \operatorname{curl} F)_{L^2(\Omega)} = -(H, F)_{L^2(\Omega)} - (\operatorname{curl} H, \operatorname{curl} F)_{L^2(\Omega)}$$

für alle $F \in H_0(\operatorname{curl}, \Omega; \mathbb{K}^3)$. Damit löst $\mathcal{H}\hat{h} := H_0 + H$ das System (3.4). Ist $G \in H(\operatorname{curl}, \Omega; \mathbb{K}^3)$ eine weitere Lösung von (3.4), so ist die Differenz $\mathcal{H}\hat{h} - G$ ein Element in $H_0(\operatorname{curl}, \Omega; \mathbb{K}^3)$ mit

$$(\mathcal{H}\hat{h} - G, F)_{L^2(\Omega)} + (\operatorname{curl}(\mathcal{H}\hat{h} - G), \operatorname{curl} F)_{L^2(\Omega)} = 0 \quad \text{für alle } F \in H_0(\operatorname{curl}, \Omega; \mathbb{K}^3).$$

Da in $H_0(\operatorname{curl}, \Omega; \mathbb{K}^3)$ die eindeutige Lösung dieser Gleichung die Nullfunktion ist, muss $\mathcal{H}\hat{h} = G$ sein. \square

Lemma 3.3.10 (Dualitätslemma (a)). *Die Funktion $\mathcal{H}\hat{h} \in H(\operatorname{curl}, \Omega; \mathbb{K}^3)$ minimiert die Menge aller Funktionen aus $H(\operatorname{curl}, \Omega; \mathbb{K}^3)$ mit Spur $\hat{h} \in H^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma; \mathbb{K}^3)$, d.h.,*

$$\|\hat{h}\|_{H^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)} := \inf_{\substack{H \in H(\operatorname{curl}, \Omega; \mathbb{K}^3) \\ \gamma_\tau H = \hat{h}}} \|H\|_{H(\operatorname{curl}, \Omega)} = \|\mathcal{H}\hat{h}\|_{H(\operatorname{curl}, \Omega)}.$$

Beweis. Für ein beliebiges $H \in H(\operatorname{curl}, \Omega; \mathbb{K}^3)$ mit $\gamma_\tau H = \hat{h}$ ist $H - \mathcal{H}\hat{h} \in H_0(\operatorname{curl}, \Omega; \mathbb{K}^3)$. Somit ist $(\mathcal{H}\hat{h}, H - \mathcal{H}\hat{h})_{H(\operatorname{curl}, \Omega)} = 0$ und folglich

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|H - \mathcal{H}\hat{h}\|_{H(\operatorname{curl}, \Omega)}^2 \\ &= \|H\|_{H(\operatorname{curl}, \Omega)}^2 + \|\mathcal{H}\hat{h}\|_{H(\operatorname{curl}, \Omega)}^2 - 2\Re(\mathcal{H}\hat{h}, H)_{H(\operatorname{curl}, \Omega; \mathbb{C}^3)} \\ &= \|H\|_{H(\operatorname{curl}, \Omega)}^2 + \|\mathcal{H}\hat{h}\|_{H(\operatorname{curl}, \Omega)}^2 - 2\Re(\mathcal{H}\hat{h}, H - \mathcal{H}\hat{h})_{H(\operatorname{curl}, \Omega; \mathbb{C}^3)} - 2\|\mathcal{H}\hat{h}\|_{H(\operatorname{curl}, \Omega)}^2 \\ &= \|H\|_{H(\operatorname{curl}, \Omega)}^2 - \|\mathcal{H}\hat{h}\|_{H(\operatorname{curl}, \Omega)}^2. \end{aligned}$$

Dies impliziert $\|\mathcal{H}\hat{h}\|_{H(\operatorname{curl}, \Omega)} \leq \|\hat{h}\|_{H^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)}$. Da $\mathcal{H}\hat{h} \in H(\operatorname{curl}, \Omega; \mathbb{K}^3)$ mit $\gamma_\tau \mathcal{H}\hat{h} = \hat{h}$ ist, gilt Gleichheit. \square

Satz 3.3.11. *Der Raum $H^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma; \mathbb{K}^3)$ bildet mit der Norm $\|\bullet\|_{H^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)}$ einen Hilbertraum.*

Beweis. Für $\hat{h}, \hat{g} \in H^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma; \mathbb{K}^3)$ folgt aus Lemma 3.3.10 (Dualitätslemma (a)) und der Parallelogrammgleichung

$$2\left(\|\mathcal{H}\hat{h}\|_{H(\operatorname{curl}, \Omega)}^2 + \|\mathcal{H}\hat{g}\|_{H(\operatorname{curl}, \Omega)}^2\right) = \|\mathcal{H}\hat{h} + \mathcal{H}\hat{g}\|_{H(\operatorname{curl}, \Omega)}^2 + \|\mathcal{H}\hat{h} - \mathcal{H}\hat{g}\|_{H(\operatorname{curl}, \Omega)}^2$$

die Parallelogrammgleichung in der Norm $\|\bullet\|_{H^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)}$. Nach Satz 2.1.3 (Jordan und von Neumann) wird $\|\bullet\|_{H^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)}$ somit durch ein Skalarprodukt induziert.

Für eine Cauchy-Folge $(\hat{g}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$ ist aufgrund der Linearität von \mathcal{H} die Folge $(\mathcal{H}\hat{g}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ebenfalls eine Cauchy-Folge. Da $H(\operatorname{curl}, \Omega; \mathbb{K}^3)$ abgeschlossen ist, konvergiert diese gegen ein $G \in H(\operatorname{curl}, \Omega; \mathbb{K}^3)$. Aus der Stetigkeit von $(\bullet, F)_{H(\operatorname{curl}, \Omega)}$ für alle $F \in H(\operatorname{curl}, \Omega; \mathbb{K}^3)$ folgt, dass G die Gleichung (3.4a) erfüllt. Mit $\hat{g} := \gamma_\tau G$ gilt daher $G = \mathcal{H}\hat{g}$ und

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{H}\hat{g} - \mathcal{H}\hat{g}_n\|_{H(\operatorname{curl}, \Omega)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{H}(\hat{g} - \hat{g}_n)\|_{H(\operatorname{curl}, \Omega)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\hat{g} - \hat{g}_n\|_{H^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)}.$$

Somit ist $H^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma; \mathbb{K}^3)$ vollständig. \square

Satz 3.3.12. Für das offene, beschränkte Lipschitz-Gebiet Ω existiert ein Spuroperator

$$\pi_\tau : H(\text{curl}, \Omega; \mathbb{K}^3) \rightarrow (H^{-1/2}(\text{div}_\Gamma, \Gamma; \mathbb{K}^3))^* =: H^{-1/2}(\text{curl}_\Gamma, \Gamma; \mathbb{K}^3),$$

sodass die duale Paarung $\langle \bullet, \bullet \rangle_{H^{-1/2}(\text{curl}_\Gamma, \Gamma; \mathbb{K}^3), H^{-1/2}(\text{div}_\Gamma, \Gamma; \mathbb{K}^3)} =: \langle \bullet, \bullet \rangle_\Gamma$ die Gleichung

$$\langle \pi_\tau F, \gamma_\tau G \rangle_\Gamma = (\text{curl } G, F)_{L^2(\Omega)} - (G, \text{curl } F)_{L^2(\Omega)} \quad (3.5)$$

für alle $F, G \in H(\text{curl}, \Omega; \mathbb{K}^3)$ erfüllt.

Beweis. Der Beweis erfolgt in zwei Schritten. Zuerst wird der Operator π_τ definiert und anschließend die partielle Integrationsformel (3.5) nachgewiesen.

Schritt 1. Für $F \in H(\text{curl}, \Omega; \mathbb{K}^3)$ ist die lineare Abbildung $T_F : H^{-1/2}(\text{div}_\Gamma, \Gamma; \mathbb{K}^3) \rightarrow \mathbb{K}$ definiert als

$$T_F(\hat{h}) := (\text{curl } F, \mathcal{H}\hat{h})_{L^2(\Omega)} - (F, \text{curl } \mathcal{H}\hat{h})_{L^2(\Omega)}.$$

Aus der Cauchy-Schwarz Ungleichung folgt

$$\begin{aligned} T_F(\hat{h}) &\leq \|\text{curl } F\|_{L^2(\Omega)} \|\mathcal{H}\hat{h}\|_{L^2(\Omega)} + \|F\|_{L^2(\Omega)} \|\text{curl } \mathcal{H}\hat{h}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|F\|_{H(\text{curl}, \Omega)} \|\mathcal{H}\hat{h}\|_{H(\text{curl}, \Omega)} \\ &= \|F\|_{H(\text{curl}, \Omega)} \|\hat{h}\|_{H^{-1/2}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

So lässt sich der Spuroperator für alle $F \in H(\text{curl}, \Omega; \mathbb{K}^3)$ definieren durch $\pi_\tau : F \mapsto T_F \in H^{-1/2}(\text{curl}_\Gamma, \Gamma; \mathbb{K}^3)$. Dabei ist $\pi_\tau \in L(H(\text{curl}, \Omega; \mathbb{K}^3); H^{-1/2}(\text{curl}_\Gamma, \Gamma; \mathbb{K}^3))$, denn die Abbildung ist linear und aus (3.6) folgt

$$\begin{aligned} \|\pi_\tau\|_{L(H(\text{curl}, \Omega; \mathbb{K}^3); H^{-1/2}(\text{curl}_\Gamma, \Gamma; \mathbb{K}^3))} &:= \sup_{\substack{F \in H(\text{curl}, \Omega; \mathbb{K}^3) \\ \|F\|_{H(\text{curl}, \Omega)} = 1}} \|\pi_\tau F\|_{H^{-1/2}(\text{curl}_\Gamma, \Gamma)} \\ &:= \sup_{\substack{F \in H(\text{curl}, \Omega; \mathbb{K}^3) \\ \|F\|_{H(\text{curl}, \Omega)} = 1}} \sup_{\substack{\hat{h} \in H^{-1/2}(\text{div}_\Gamma, \Gamma; \mathbb{K}^3) \\ \|\hat{h}\|_{H^{-1/2}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)} = 1}} X_F(\hat{h}) \leq 1. \end{aligned}$$

Schritt 2. Für beliebige $F \in H(\text{curl}, \Omega; \mathbb{K}^3)$ und $\hat{h} \in H^{-1/2}(\text{div}_\Gamma, \Gamma; \mathbb{K}^3)$ ist $\langle \pi_\tau F, \gamma_\tau \mathcal{H}\hat{h} \rangle_\Gamma = (\text{curl } F, \mathcal{H}\hat{h})_{L^2(\Omega)} - (F, \text{curl } \mathcal{H}\hat{h})_{L^2(\Omega)}$. Ist $H \in H(\text{curl}, \Omega; \mathbb{K}^3)$ mit Spur $\gamma_\tau H = \hat{h}$, so gilt $\gamma_\tau(\mathcal{H}\hat{h} - H) = 0$, d.h., nach Satz 3.3.7 ist $\mathcal{H}\hat{h} - H \in H_0(\text{curl}, \Omega; \mathbb{C}^3)$. Entsprechend der Bemerkung 3.3.2 ist die Funktion $\mathcal{H}\hat{h} - H$ Grenzwert von Funktionen $(\Theta_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}_0^\infty(\bar{\Omega}; \mathbb{K}^3)$. Da $\gamma_0 \Theta_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, gilt nach Satz 3.3.4, dass

$$\begin{aligned} &(\text{curl } F, \mathcal{H}\hat{h} - H)_{L^2(\Omega)} - (F, \text{curl}(\mathcal{H}\hat{h} - H))_{L^2(\Omega)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} ((\text{curl } F, \Theta_n)_{L^2(\Omega)} - (F, \text{curl } \Theta_n)_{L^2(\Omega)}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \gamma_\tau \Theta_n, F \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma; \mathbb{K}^3), H^{1/2}(\Gamma; \mathbb{K}^3)} = 0. \end{aligned}$$

Daraus erschließt sich

$$\begin{aligned} \langle \pi_\tau F, \gamma_\tau H \rangle_\Gamma &= (\text{curl } F, \mathcal{H}\hat{h})_{L^2(\Omega)} - (F, \text{curl } \mathcal{H}\hat{h})_{L^2(\Omega)} \\ &= (\text{curl } F, \mathcal{H}\hat{h} - H)_{L^2(\Omega)} - (F, \text{curl}(\mathcal{H}\hat{h} - H))_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + (\text{curl } F, H)_{L^2(\Omega)} - (F, \text{curl } H)_{L^2(\Omega)} \\ &= (\text{curl } F, H)_{L^2(\Omega)} - (F, \text{curl } H)_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad \square$$

Bemerkung 3.3.13. Aufgrund der Dichtheit von $H^1(\Omega; \mathbb{K})$ in $H(\text{curl}, \Omega; \mathbb{K}^3)$ lässt sich $\pi_\tau F$ für $F \in H^1(\Omega; \mathbb{K}^3)$ mit $\nu \times (F \times \nu)$ identifizieren.

Definition 3.3.14. Für $\hat{h} \in H^{-1/2}(\text{div}_\Gamma, \Gamma; \mathbb{K}^3)$ bildet

$$\nu \times : H^{-1/2}(\text{div}_\Gamma, \Gamma; \mathbb{K}^3) \rightarrow H^{-1/2}(\text{curl}_\Gamma, \Gamma; \mathbb{K}^3) \quad \text{mit} \quad \nu \times \hat{h} := \pi_\tau \mathcal{H} \hat{h} \quad (3.7)$$

auf die Spur im Raum $H^{-1/2}(\text{curl}_\Gamma, \Gamma; \mathbb{K}^3)$ ab.

Zum Beweis der kontinuierlichen inf-sup-Bedingung im Kapitel 6 muss Lemma 3.3.10 entsprechend [CDG15, Lemma 2.2] erweitert werden.

Lemma 3.3.15 (Dualitätslemma (b)). Für $\hat{h} \in H^{-1/2}(\text{div}_\Gamma, \Gamma; \mathbb{K}^3)$ und $E := -\text{curl } \mathcal{H} \hat{h} \in L^2(\Omega; \mathbb{K}^3)$ gilt $\text{curl } E = \mathcal{H} \hat{h}$. Folglich ist $E \in H(\text{curl}, \Omega; \mathbb{K}^3)$ und erfüllt die Gleichung

$$\|\nu \times \hat{h}\|_{H^{-1/2}(\text{curl}_\Gamma, \Gamma)} := \sup_{\substack{F \in H(\text{curl}, \Omega; \mathbb{K}^3) \\ \|F\|_{H(\text{curl}, \Omega)} = 1}} \langle \nu \times \hat{h}, \gamma_\tau F \rangle_\Gamma = \|E\|_{H(\text{curl}, \Omega)} = \|\hat{h}\|_{H^{-1/2}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)}.$$

Beweis. Die Spur $\hat{h} \in H^{-1/2}(\text{div}_\Gamma, \Gamma; \mathbb{K}^3)$ erfüllt für alle $\Phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}^3)$ die Gleichung

$$0 = (\mathcal{H} \hat{h}, \Phi)_{L^2(\Omega)} + (\text{curl } \mathcal{H} \hat{h}, \text{curl } \Phi)_{L^2(\Omega)} = (\mathcal{H} \hat{h}, \Phi)_{L^2(\Omega)} - (E, \text{curl } \Phi)_{L^2(\Omega)}.$$

Entsprechend der Definition des schwachen curl-Operators (3.2) ist somit die Rotation $\text{curl } E = \mathcal{H} \hat{h}$. Dies hat zur Folge, dass

$$\langle \nu \times \hat{h}, \gamma_\tau F \rangle_\Gamma = (\text{curl } F, \mathcal{H} \hat{h})_{L^2(\Omega)} - (F, \text{curl } \mathcal{H} \hat{h})_{L^2(\Omega)} = (\text{curl } F, \text{curl } E)_{L^2(\Omega)} + (F, E)_{L^2(\Omega)}$$

für alle $F \in H(\text{curl}, \Omega; \mathbb{K}^3)$. Dadurch gilt

$$\sup_{\substack{F \in H(\text{curl}, \Omega; \mathbb{K}^3) \\ \|F\|_{H(\text{curl}, \Omega)} = 1}} \langle \nu \times \hat{h}, \gamma_\tau F \rangle_\Gamma = \sup_{\substack{F \in H(\text{curl}, \Omega; \mathbb{K}^3) \\ \|F\|_{H(\text{curl}, \Omega)} = 1}} (F, E)_{L^2(\Omega)} + (\text{curl } F, \text{curl } E)_{L^2(\Omega)} = \|E\|_{H(\text{curl}, \Omega)},$$

wobei $\|E\|_{H(\text{curl}, \Omega)} = \|H\|_{H(\text{curl}, \Omega)}$. Aus Lemma 3.3.10 folgt

$$\|\nu \times \hat{h}\|_{H^{-1/2}(\text{curl}_\Gamma, \Gamma)} = \|\hat{h}\|_{H^{-1/2}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)}. \quad \square$$

Korollar 3.3.16. Die in (3.7) definierte Abbildung $\nu \times$ ist ein isometrischer Isomorphismus. Insbesondere gilt dadurch

$$\pi_\tau(H(\text{curl}, \Omega; \mathbb{K}^3)) = H^{-1/2}(\text{curl}_\Gamma, \Gamma; \mathbb{K}^3).$$

Beweis. Aus Lemma 3.3.15 folgt die Isometrie-, Injektivitäts- und Stetigkeitseigenschaft. Surjektivität und Stetigkeit der Umkehrfunktion ergeben sich aus Satz 2.2.3 (Babuška-Lax-Milgram) mit Sesquilinearform $b(\hat{h}, \hat{g}) := \langle \nu \times \hat{h}, \hat{g} \rangle_\Gamma$ für $\hat{h}, \hat{g} \in H^{-1/2}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$. Somit ist

$$H^{-1/2}(\text{curl}_\Gamma, \Gamma; \mathbb{K}^3) = \nu \times (H^{-1/2}(\text{div}_\Gamma, \Gamma; \mathbb{K}^3)) \subset \pi_\tau(H(\text{curl}, \Omega; \mathbb{K}^3)) \subset H^{-1/2}(\text{curl}_\Gamma, \Gamma; \mathbb{K}^3). \quad \square$$

4. Die Maxwell-Gleichungen

4.1. Die Maxwell-Gleichung zweiter Ordnung

Die Maxwell-Gleichungen beschreiben elektrodynamische Prozesse mittels der Vektorfelder $\mathcal{E}, \mathcal{D}, \mathcal{H}$ und \mathcal{B} im Raum-Zeit-Zylinder $Q = \Omega \times (0, T)$. Dabei stehen \mathcal{E} und \mathcal{H} für das elektrische bzw. das magnetische Feld sowie \mathcal{D} und \mathcal{B} für die elektrische bzw. magnetische Flussdichte. Die vektorwertige elektrische Stromdichte \mathcal{J} beschreibt den Fluss des elektrischen Stroms und die skalarwertige Ladungsdichte ρ die Verteilung der Ladung. Die Maxwell-Gleichungen lauten

$$\begin{aligned} \partial \mathcal{D} / \partial t - \operatorname{curl} \mathcal{H} &= -\mathcal{J} && \text{(Ampères Gesetz),} \\ \partial \mathcal{B} / \partial t + \operatorname{curl} \mathcal{E} &= 0 && \text{(Faradays Gesetz),} \\ \operatorname{div} \mathcal{D} &= \rho && \text{(Gauß'sches Gesetz),} \\ \operatorname{div} \mathcal{B} &= 0 && \text{(Gauß'sches Gesetz für Magnetfelder).} \end{aligned} \tag{4.1}$$

Dass den zwölf Komponenten der vier Vektorfelder $\mathcal{E}, \mathcal{D}, \mathcal{H}$ und \mathcal{B} nur acht Gleichungen gegenüberstehen, offenbart, dass es weitere Zusammenhänge geben muss. Eine Beziehung stellen die linear vereinfachten Materialgesetze dar. Mit ortsabhängigen positiv definiten Materialparametern Permittivität $\varepsilon \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^{3 \times 3})$ und Permeabilität $\mu \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^{3 \times 3})$ besagen sie

$$\mathcal{D} = \varepsilon \mathcal{E} \quad \text{und} \quad \mathcal{B} = \mu \mathcal{H}. \tag{4.2}$$

Auch das Ohm'sche Gesetz lässt sich in die Maxwell-Gleichungen einbauen. So gilt mit der ortsabhängigen positiv semidefiniten elektrischen Leitfähigkeit $\sigma \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^{3 \times 3})$ und der vektorwertigen *impressed (source) current* $\mathcal{J}^{\text{imp}} \in L^2(\Omega; \mathbb{C}^3)$ die Beziehung

$$\mathcal{J} = \sigma \mathcal{E} + \mathcal{J}^{\text{imp}}. \tag{4.3}$$

Im einfachsten Fall sind \mathcal{J}^{imp} und ρ , die Materialparameter ε, μ und σ sowie Rand- und Anfangsbedingungen in (4.1)-(4.3) gegeben. Häufig wird angenommen, dass die Felder wellenförmig mit Frequenz $\omega > 0$ auftreten und so durch Exponentialfunktion und imaginäre Einheit i dargestellt werden können als

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(x, t) &= \Re(\exp(-i\omega t)E(x)), \\ \mathcal{D}(x, t) &= \Re(\exp(-i\omega t)D(x)), \\ \mathcal{H}(x, t) &= \Re(\exp(-i\omega t)H(x)), \\ \mathcal{B}(x, t) &= \Re(\exp(-i\omega t)B(x)). \end{aligned}$$

Dabei sollen auch die rechten Seiten darstellbar sein durch

$$\mathcal{J}^{\text{imp}}(x, t) = \Re(\exp(-i\omega t)J^{\text{imp}}(x)) \quad \text{und} \quad \rho(x, t) = \Re(\exp(-i\omega t)\rho(x)).$$

Durch diese Transformation werden die Vektorfelder zeitunabhängig. Im Gegenzug sind sie komplexwertig. Zusammengefasst folgen die zeitharmonischen Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned} i\omega\varepsilon E + \operatorname{curl} H &= \sigma E + J^{\text{imp}}, \\ -i\omega\mu H + \operatorname{curl} E &= 0, \\ \operatorname{div} \varepsilon E &= \rho, \\ \operatorname{div} \mu H &= 0. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Die Substitution der Divergenz von (4.4a) in (4.4c) ergibt die Kompatibilitätsbedingung $i\omega\rho = \sigma E + J^{\text{imp}}$. Ist diese gegeben, so erfüllt jede Lösung E und H von (4.4a)-(4.4b) die Gleichungen (4.4c)-(4.4d). Die Maxwell-Gleichungen reduzieren sich so zu

$$\begin{aligned} (i\omega\varepsilon - \sigma)E + \operatorname{curl} H &= J^{\text{imp}}, \\ -i\omega\mu H + \operatorname{curl} E &= 0. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Durch das Einsetzen von (4.5b) in (4.5a), der Multiplikation mit $-i\omega$ und der Definition von $\kappa := \varepsilon + i\sigma/\omega$ erhält man das System zweiter Ordnung

$$\operatorname{curl} \mu^{-1} \operatorname{curl} E - \omega^2 \kappa E = i\omega J^{\text{imp}}. \tag{4.6}$$

4.2. Die Variationsgleichung

Die Maxwell-Gleichungen zweiter Ordnung werden nun in einer Kavität, einem beschränkten Lipschitzgebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, betrachtet. Die gegebene *impressed current density* J^{imp} wird durch die Funktion $(i\omega)^{-1}J \in L^2(\Omega; \mathbb{C}^3)$ repräsentiert. Aus der Multiplikation mit einer Testfunktion und der partielle Integration (3.5) ergibt sich aus (4.6) die schwache Formulierung

$$(\mu^{-1} \operatorname{curl} E, \operatorname{curl} F)_{L^2(\Omega)} - \omega^2 (\kappa E, F)_{L^2(\Omega)} = (J, F)_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } F \in H_0(\operatorname{curl}, \Omega; \mathbb{C}^3). \tag{4.7}$$

Diese Formulierung modelliert die Dirichlet-Randbedingung des perfekten Leiters $\nu \times E = 0$. Weitere Randbedingungen wären die inhomogene Dirichlet-Randbedingungen $\nu \times E = \nu \times E^{\text{imp}}$ mit gegebenem $E^{\text{imp}} \in H(\operatorname{curl}, \Omega; \mathbb{C}^3)$ sowie die Neumann-Randbedingung $\nu \times (\mu^{-1} \operatorname{curl} E) = i\omega J_S^{\text{imp}}$ mit gegebenem *impressed surface current* J_S^{imp} , wobei $J_S^{\text{imp}} \cdot \nu \equiv 0$. Für $J_S^{\text{imp}} \equiv 0$ nennt sich diese Randbedingung *magnetic symmetry wall*. Die Randbedingungen lassen sich kombinieren, sodass mit disjunkten Rändern $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$ gilt,

$$\begin{aligned} \nu \times E &= \nu \times E^{\text{imp}} && \text{auf } \Gamma_1, \\ \nu \times (\mu^{-1} \operatorname{curl} E) &= i\omega J_S^{\text{imp}} && \text{auf } \Gamma_2. \end{aligned}$$

Im Folgenden wird das Modell mit der Randbedingung des perfekten Leiters untersucht. Jedoch folgt aus der Wohlgestellttheit des Problems mit homogener Randbedingung unmittelbar die Wohlgestellttheit des Problems mit inhomogener Randbedingung. Auch Neumann- und gemischte Randbedingungen lassen sich mit den im folgenden betrachteten Techniken analysieren. Zuerst werden jedoch weitere Annahmen getroffen.

4.3. Vereinfachende Annahmen

Wie so häufig in der Literatur wird das physikalische Modell zur Vereinfachung der Analyse eingeschränkt. Dies wurde bereits bei der Randbedingung getan. Eine weitere Einschränkung stellt die Annahme dar, dass es sich bei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um ein Lipschitzgebiet handelt. Im dreidimensionalen Raum gibt es einfache Geometrien, die dieser Annahme nicht genügen (vgl. Abbildung 4.1). Eine weitere vereinfachende, aber umgängliche Annahme ist, dass

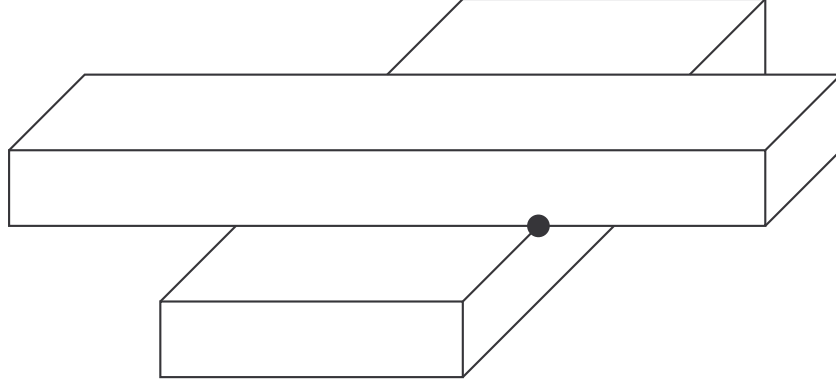


Abbildung 4.1.: Beispiel für ein Gebiet, welches kein Lipschitzgebiet ist.

die Materialparameter ε, μ und σ skalarwertig sind. Ferner sollen Konstanten $\varepsilon_{\inf}, \varepsilon_{\sup}, \mu_{\inf}$ und μ_{\sup} in \mathbb{R} existieren, sodass für fast alle $x \in \Omega$ gilt

$$0 < \varepsilon_{\inf} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{\sup} < \infty \quad \text{and} \quad 0 < \mu_{\inf} \leq \mu \leq \mu_{\sup} < \infty. \quad (4.8)$$

Dies ermöglicht die Definition gewichteter Skalarprodukte.

Lemma 4.3.1. Für $F, H \in L^2(\Omega; \mathbb{C}^3)$ ist

$$(F, H)_{L^2_\varepsilon(\Omega)} := (\varepsilon F, H)_{L^2(\Omega)}$$

ein Skalarprodukt. Es induziert die zu $\|\bullet\|_{L^2(\Omega)}$ äquivalente Norm $\|\bullet\|_{L^2_\varepsilon(\Omega)}$. Der Raum $L^2_\varepsilon(\Omega; \mathbb{C}^3)$, definiert als Menge $L^2(\Omega; \mathbb{C}^3)$ mit gewichtetem Skalarprodukt $(\bullet, \bullet)_{L^2_\varepsilon(\Omega)}$, ist ein Hilbertraum.

Beweis. Es ist einfach nachzuprüfen, dass $(\bullet, \bullet)_{L^2_\varepsilon(\Omega)}$ ein Skalarprodukt ist. Die Äquivalenz der Norm folgt für $F \in L^2(\Omega; \mathbb{C}^3)$ aus der Abschätzung

$$\varepsilon_{\inf}(F, F)_{L^2(\Omega)} \leq (\varepsilon F, F)_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon_{\sup}(F, F)_{L^2(\Omega)}. \quad \square$$

Mit dem Raum $H(\text{curl}, \Omega; \mathbb{C}^3)$ lässt sich entsprechend verfahren. Dazu ist

$$c_{\inf} := \min\{\varepsilon_{\inf}, \mu_{\sup}^{-1}\}^{1/2} \quad \text{und} \quad c_{\sup} := \max\{\varepsilon_{\sup}, \mu_{\inf}^{-1}\}^{1/2}.$$

Lemma 4.3.2. Für $F, H \in H(\text{curl}, \Omega; \mathbb{C}^3)$ ist das Skalarprodukt

$$(F, H)_{H_{\mu, \varepsilon}(\text{curl}, \Omega)} := (\mu^{-1} \text{curl} F, \text{curl} H)_{L^2(\Omega)} + (\varepsilon F, H)_{L^2(\Omega)}.$$

Es induziert die Norm $\|\bullet\|_{H_{\mu,\varepsilon}(\text{curl},\Omega)}$, sodass für alle $F \in H(\text{curl}, \Omega; \mathbb{C}^3)$ gilt,

$$c_{\inf}\|F\|_{H(\text{curl},\Omega)} \leq \|F\|_{H_{\mu,\varepsilon}(\text{curl},\Omega)} \leq c_{\sup}\|F\|_{H(\text{curl},\Omega)}. \quad (4.9)$$

Folglich ist $H_{\mu,\varepsilon}(\text{curl}, \Omega)$, definiert als Menge $H(\text{curl}, \Omega; \mathbb{C}^3)$ mit gewichtetem Skalarprodukt $(\bullet, \bullet)_{H_{\mu,\varepsilon}(\text{curl},\Omega)}$, ein Hilbertraum.

Beweis. Der Beweis entspricht dem des Lemmas 4.3.1. \square

Die letzte Annahme betrifft erneut das Gebiet Ω . Es soll einfach zusammenhängend sein. Dies ermöglicht folgende Aussage.

Satz 4.3.3. *Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, so befindet sich eine Funktion $F \in H_0(\text{curl}, \Omega; \mathbb{C}^3)$ genau dann im Kern des curl-Operators, wenn sie Gradient einer $H_0^1(\Omega)$ -Funktion ist. Mit anderen Worten gilt*

$$\{F \in H_0(\text{curl}, \Omega; \mathbb{C}^3) \mid \text{curl } F = 0\} = \nabla H_0^1(\Omega).$$

Beweis. Der Satz ist ein Spezialfall von [Ces96, Theorem 8]. \square

4.4. Existenz einer Lösung

Aufgrund zweier Aspekte unterscheidet sich die Gleichung (4.7) aus mathematischer Sicht von herkömmlichen elliptischen Problemen, wie z.B. der Laplace-Gleichung $-\Delta u = f$. Zum einen ist es der große Kern des curl-Operators, zum anderen die nicht vorhandene Koerzivität der Sesquilinearform $b(\bullet, \bullet)$. Trotz alledem lässt sich die Existenz für fast alle κ nachweisen. Ein Beweis dazu befindet sich im Buch von Monk [Mon03]. Er basiert auf der Fredholm-Alternative (Satz 2.2.10) und wird im Folgenden erläutert.

4.4.1. Existenzbeweis mittels Fredholm-Alternative

Zuerst wird der Kern des curl-Operators mittels folgender Zerlegung beseitigt.

Lemma 4.4.1 (Zerlegung von $H_0(\text{curl}, \Omega; \mathbb{C}^3)$). *Mit dem Raum*

$$X_0^\kappa := \{F \in H_0(\text{curl}, \Omega; \mathbb{C}^3) \mid (\kappa F, \nabla q)_{L^2(\Omega)} = 0 \text{ für alle } q \in H_0^1(\Omega)\}$$

gilt die Zerlegung $H_0(\text{curl}, \Omega; \mathbb{C}^3) = \nabla H_0^1(\Omega) \oplus X_0^\kappa$.

Beweis. [Mon03, Lemma 4.5]. \square

Bemerkung 4.4.2. Für alle $q \in H_0^1(\Omega)$ und $F \in X_0^\kappa$ gilt zwar $(\kappa F, \nabla q)_{L^2(\Omega)} = 0$, da κ komplexwertig ist, im Allgemeinen jedoch nicht $(\kappa \nabla q, F)_{L^2(\Omega)} = 0$.

Die Lösung $E \in H_0(\text{curl}, \Omega; \mathbb{C}^3)$ und Testfunktion $F \in H_0(\text{curl}, \Omega; \mathbb{C}^3)$ aus (4.7) zerfallen mittels der Zerlegung in Lemma 4.4.1 mit $p, q \in H_0^1(\Omega)$ und $E_0, F_0 \in X_0^\kappa$ zu $E = \nabla p + E_0$ und $F = \nabla q + F_0$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} b(E, F) &= (\mu^{-1} \text{curl } E_0, \text{curl } F_0)_{L^2(\Omega)} - \omega^2 (\kappa E_0, F_0)_{L^2(\Omega)} \\ &\quad - \omega^2 (\kappa \nabla p, \nabla q)_{L^2(\Omega)} - \omega^2 (\kappa \nabla p, F_0)_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Für das Gradientenfeld ∇p mit $p \in H_0^1(\Omega)$ gilt insbesondere

$$-\omega^2(\kappa \nabla p, \nabla q)_{L^2(\Omega)} = (J, \nabla q)_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } q \in H_0^1(\Omega),$$

wodurch es nach Satz 2.2.2 (Lax-Milgram) eindeutig bestimmt ist. Aufwendiger gestaltet sich der Existenz- und Eindeutigkeitsnachweis von $E_0 \in X_0^\kappa$, definiert durch

$$b(E_0, F_0) = (J, F_0)_{L^2(\Omega)} + \omega^2(\kappa \nabla p, F_0)_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } F_0 \in X_0^\kappa. \quad (4.10)$$

Dazu bedarf der Raum X_0^κ eine genauere Untersuchung.

Lemma 4.4.3 (Eigenschaften von X_0^κ).

- i) X_0^κ ist kompakt in $L^2(\Omega; \mathbb{C}^3)$ eingebettet. (Kompaktheit)
- ii) Es existiert eine Konstante $C_{\text{Fried}} < \infty$, sodass für alle $F_0 \in X_0^\kappa$ gilt, $\|F_0\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{\text{Fried}} \|\text{curl } F_0\|_{L^2(\Omega)}$. (Friedrichsungleichung)
- iii) X_0^κ ist abgeschlossen. (Abgeschlossenheit)

Beweis. Eigenschaft i) entspricht [Mon03, Theorem 4.7] und Eigenschaft ii) [Mon03, Corollary 4.8]. Aufgrund der Vollständigkeit von $H_0(\text{curl}, \Omega; \mathbb{C}^3)$ konvergiert jede Cauchy-Folge $(F_{0,n})_{n \in \mathbb{N}} \subset X_0^\kappa$ gegen ein $F = F_0 + \nabla p$ mit $F_0 \in X_0^\kappa$ und $p \in H_0^1(\Omega)$. Es bleibt zu zeigen, dass $p \equiv 0$. Dazu lässt sich o.B.d.A. annehmen, dass $F_0 \equiv 0$, da ansonsten lediglich F_0 von jedem Element der Cauchy-Folge abgezogen werden muss. Für $F = \nabla q$ mit $q \in H_0^1(\Omega)$ gilt

$$\begin{aligned} (1 + C_{\text{Fried}})^{-1} \|F\|_{H(\text{curl}, \Omega)} &= (1 + C_{\text{Fried}})^{-1} \lim_{n \rightarrow \infty} \|F_{0,n}\|_{H(\text{curl}, \Omega)} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|\text{curl } F_{0,n}\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|\text{curl } F_{0,n} - \text{curl } \nabla q\|_{L^2(\Omega)} = 0. \end{aligned}$$

Dies impliziert $F \equiv 0$ und somit Vollständigkeit. □

Um mit einer koerziven Sesquilinearform zu arbeiten, ist

$$b_+(G, F) := (\mu^{-1} \text{curl } G, \text{curl } F)_{L^2(\Omega)} + \omega^2(\kappa G, F)_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } G, F \in X_0^\kappa.$$

Lemma 4.4.4. Die Abbildung $\mathcal{K} : L^2(\Omega; \mathbb{C}^3) \rightarrow X_0^\kappa \subset L^2(\Omega; \mathbb{C}^3)$ mit

$$b_+(\mathcal{K}G, F_0) = -2\omega^2(\kappa G, F_0)_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } F_0 \in X_0^\kappa$$

ist eine wohldefinierte, beschränkte und kompakte Abbildung von $L^2(\Omega; \mathbb{C}^3)$ nach $L^2(\Omega; \mathbb{C}^3)$.

Beweis. [Mon03, Theorem 4.11]. □

Aus der Koerzivität und Stetigkeit von $b_+(\bullet, \bullet)$ folgt die eindeutige Existenz eines $E_0^+ \in X_0^\kappa$, sodass $b_+(E_0^+, F_0) = (J, F_0)_{L^2(\Omega)} + \omega^2(\kappa \nabla p, F_0)_{L^2(\Omega)}$ für alle $F_0 \in X_0^\kappa$ (Satz 2.2.2). Somit lässt sich das Variationsproblem (4.10) mit der Identität I umformulieren zu

$$(I + \mathcal{K})E_0 = E_0^+. \quad (4.11)$$

Lemma 4.4.5. Hat die Gleichung $(I + \mathcal{K})G = 0$ nur die triviale Lösung, so ist das Problem (4.11) wohlgestellt.

Beweis. Satz 2.2.10 (Fredholm-Alternative). \square

Es bleibt die Trivialität der Lösung $-G = \mathcal{K}G$ zu zeigen. Erfüllt $G \in L^2(\Omega; \mathbb{C}^3)$ diese Gleichung, so folgt aus $\mathcal{K}G \in X_0^\kappa$, dass $G := G_0 \in X_0^\kappa$. Ferner ist genau dann $-G_0 = \mathcal{K}G_0$, wenn

$$-2\omega^2(\kappa G_0, F_0)_{L^2(\Omega)} = 2\omega^2(\kappa \mathcal{K}G_0, F_0)_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } F_0 \in X_0^\kappa.$$

Aus der Definition der Abbildung \mathcal{K} lässt sich dies umformulieren zu

$$(\mu^{-1} \operatorname{curl} \mathcal{K}G_0, \operatorname{curl} F_0)_{L^2(\Omega)} + \omega^2(\kappa \mathcal{K}G_0, F_0)_{L^2(\Omega)} = 2\omega^2(\kappa \mathcal{K}G_0, F_0)_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } F_0 \in X_0^\kappa,$$

was äquivalent ist zum Eigenwertproblem

$$(\mu^{-1} \operatorname{curl} \mathcal{K}G_0, \operatorname{curl} F_0)_{L^2(\Omega)} = \omega^2(\kappa \mathcal{K}G_0, F_0)_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } F_0 \in X_0^\kappa. \quad (4.12)$$

Wird die zulässige Testfunktion $\mathcal{K}G_0$ eingesetzt, ergibt sich

$$(\mu^{-1} \operatorname{curl} \mathcal{K}G_0, \operatorname{curl} \mathcal{K}G_0)_{L^2(\Omega)} - \omega^2(\varepsilon \mathcal{K}G_0, \mathcal{K}G_0)_{L^2(\Omega)} = i\omega(\sigma \mathcal{K}G_0, \mathcal{K}G_0)_{L^2(\Omega)}.$$

Dabei ist die linke Seite reellwertig und folglich muss für die rechte gelten, dass $\sigma \mathcal{K}G_0 = 0$ fast überall in Ω . Mit anderen Worten muss die Eigenfunktion des Eigenwertproblems (4.12) auf der Menge $\{x \in \Omega \mid \sigma(x) > 0\}$ fast überall verschwinden. Um zu demonstrieren, dass dem nicht so sein kann, benötigt Monk eine Vielzahl von Annahmen bzgl. der Regularität der Koeffizienten μ und κ . Unter anderem soll sich das Gebiet Ω in die messbaren Mengen Ω_1 und Ω_2 zerlegen lassen, sodass $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Dabei ist $\sigma = 0$ in Ω_1 und es existiert eine Konstante σ_{\inf} , sodass $0 < \sigma_{\inf} \leq \sigma$ in Ω_2 . Da die anderen Annahmen im weiteren Verlauf der Arbeit keine Rolle spielen, wird auf sie nicht weiter eingegangen.

Lemma 4.4.6. *Die Gleichung (4.12) hat unter den Voraussetzungen an die Koeffizienten in [Mon03, Abschnitt 4.2] keine nichttrivialen Lösungen, wenn $|\Omega_2| > 0$ ist.*

Beweis. [Mon03, Theorem 4.17]. \square

Der Fall $\sigma \equiv 0$ wird durch die Verwendung der Bezeichnung X_0^ε anstelle von X_0^κ verdeutlicht. Ferner wird der in Lemma 4.3.1 eingeführte Raum $L_\varepsilon^2(\Omega; \mathbb{C}^3)$ mit der durch das Skalarprodukt $(\bullet, \bullet)_{L_\varepsilon^2(\Omega)}$ induzierten Norm $\|\bullet\|_{L_\varepsilon^2(\Omega)}$ verwendet.

Satz 4.4.7 (Spektralzerlegung von X_0^ε). *Die Eigenwertgleichung*

$$(\mu^{-1} \operatorname{curl} \Phi, \operatorname{curl} F_0)_{L^2(\Omega)} = \lambda(\Phi, F_0)_{L_\varepsilon^2(\Omega)} \quad \text{für alle } F_0 \in X_0^\varepsilon \quad (4.13)$$

wird gelöst durch Eigenwerte $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$. Die dazugehörigen Eigenfunktionen $\Phi_n \in X_0^\varepsilon \cap L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$ mit $\|\Phi_n\|_{L_\varepsilon^2(\Omega)} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ lassen sich so wählen, dass sie orthogonal bzgl. $(\bullet, \bullet)_{L_\varepsilon^2(\Omega)}$ und $(\bullet, \bullet)_{H_{\mu, \varepsilon}(\operatorname{curl}, \Omega)}$ aufeinander stehen. Es gilt $X_0^\varepsilon = \overline{\operatorname{span}\{\Phi_1, \Phi_2, \dots\}}$, d.h., jedes $F_0 \in X_0^\varepsilon$ lässt sich darstellen als

$$F_0 = \sum_{n \in \mathbb{N}} (F_0, \Phi_n)_{L_\varepsilon^2(\Omega)} \Phi_n.$$

Beweis. Da sich in (4.13) Real- und Imaginärteil getrennt voneinander betrachten lassen, ist die Gleichung äquivalent zu

$$(\mu^{-1} \operatorname{curl} \Phi, \operatorname{curl} F_0)_\Omega = \lambda(\Phi, F_0)_{L^2_\varepsilon(\Omega)} \quad \text{für alle } F_0 \in X_0^\varepsilon \cap L^2(\Omega; \mathbb{R}^3).$$

Mit den selben Argumenten wie im Beweis der Eigenschaften von \mathcal{K} folgt die Wohlgestelltheit und Kompaktheit von $\tilde{\mathcal{K}} : L^2_\varepsilon(\Omega; \mathbb{R}^3) \rightarrow X_0^\varepsilon \cap L^2_\varepsilon(\Omega; \mathbb{R}^3)$ definiert durch

$$(\mu^{-1} \operatorname{curl} \tilde{\mathcal{K}} G, \operatorname{curl} F_0)_{L^2(\Omega)} + (\tilde{\mathcal{K}} G, F_0)_{L^2_\varepsilon(\Omega)} = (G, F_0)_{L^2_\varepsilon(\Omega)} \quad \text{für alle } F_0 \in X_0^\varepsilon.$$

Die Abbildung $\tilde{\mathcal{K}}$ ist selbstadjungiert, denn für alle $F, G \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$ gilt

$$(F, \tilde{\mathcal{K}} G)_{L^2_\varepsilon(\Omega)} = (\tilde{\mathcal{K}} F, \tilde{\mathcal{K}} G)_{H_{\mu,\varepsilon}(\operatorname{curl}, \Omega)} = (\tilde{\mathcal{K}} F, G)_{L^2_\varepsilon(\Omega)}.$$

Das Hilbert-Schmidt-Theorem (Satz 2.2.11) impliziert die Existenz von reellen, positiven Eigenwerten $\zeta_1 \geq \zeta_2 \geq \dots$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n = 0$ und zugehörigen Eigenfunktionen $\Phi_n \in X_0^\varepsilon \cap L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$ mit $\|\Phi_n\|_{L^2_\varepsilon(\Omega)} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sodass $\tilde{\mathcal{K}} \Phi_n = \zeta_n \Phi_n$. Dies ist äquivalent zu

$$(\mu^{-1} \operatorname{curl} \Phi_n, \operatorname{curl} F_0)_{L^2(\Omega)} + (\Phi_n, F_0)_{L^2_\varepsilon(\Omega)} = \zeta_n^{-1} (\Phi_n, F_0)_{L^2_\varepsilon(\Omega)} \quad \text{für alle } F_0 \in X_0^\varepsilon.$$

Das Einsetzen der zulässigen Testfunktion $\Phi_n \in X_0^\varepsilon$ zeigt $\zeta_n^{-1} > 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit erfüllt $\lambda_n := \zeta_n^{-1} - 1$ mit $n \in \mathbb{N}$ die geforderten Eigenschaften. Die Orthogonalität der Eigenfunktionen folgt für verschiedene Eigenwerte $\lambda_n \neq \lambda_m$ mit $n, m \in \mathbb{N}$ unmittelbar aus

$$(\Phi_n, \Phi_m)_{H_{\mu,\varepsilon}(\operatorname{curl}, \Omega)} = (1 + \lambda_n)(\Phi_n, \Phi_m)_{L^2_\varepsilon(\Omega)} = (1 + \lambda_m)(\Phi_n, \Phi_m)_{L^2_\varepsilon(\Omega)}.$$

Für mehrfache Eigenwerte lassen sich die Basisfunktionen durch die Gram-Schmidt-Orthogonalisierung [Alt12, Satz 7.8] so konstruieren, dass sie orthogonal aufeinander stehen. \square

Somit lässt sich die Hauptaussage dieses Abschnitts im folgenden Satz zusammenfassen.

Satz 4.4.8. *Zu gegebenem $J \in L^2(\Omega; \mathbb{C}^3)$ existiert unter den getroffenen Annahmen genau dann eine eindeutige Lösung $E \in H_0(\operatorname{curl}, \Omega; \mathbb{C}^3)$ der Variationsgleichung (4.7), wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist.*

- i) *Der Imaginärteil von κ ist positiv in einer offenen, nicht leeren Teilmenge von Ω .*
 - ii) *Die Frequenz ω^2 ist kein Eigenwert des Maxwell-Eigenwertproblems (4.13).*
- Sollte eine der beiden Bedingungen erfüllt sein, so existiert eine Konstante $C > 0$, sodass für alle $J \in L^2(\Omega; \mathbb{C}^3)$ mit Lösung $E \in H(\operatorname{curl}, \Omega; \mathbb{C}^3)$ gilt,*

$$\|E\|_{H(\operatorname{curl}, \Omega)} \leq C \|J\|_{L^2(\Omega)}.$$

4.4.2. Existenzbeweis mittels inf-sup-Bedingung

Ein Nachteil des Beweises mittels Fredholm-Alternative ist, dass die Konstante $C > 0$ aus Satz 4.4.8 nicht bekannt ist und auch nicht geschätzt werden kann. Diese Konstante geht jedoch in a-priori und a-posteriori Fehleranalysen ein und ermöglicht die Berechnung

garantierter Fehlerschranken. Es folgen daher zwei weitere Existenzbeweise, die unter bestimmten Voraussetzungen an die Konduktivität σ die inf-sup Konstanten

$$\beta_1 := \inf_{\substack{E \in H_0(\operatorname{curl}, \Omega; \mathbb{C}^3) \\ \|E\|_{H(\operatorname{curl}, \Omega)}=1}} \sup_{\substack{F \in H_0(\operatorname{curl}, \Omega; \mathbb{C}^3) \\ \|F\|_{H(\operatorname{curl}, \Omega)}=1}} |b(E, F)|$$

aus Satz 2.2.3 (Babuška-Lax-Milgram) abschätzen und so eine Abschätzung für C ermöglichen.

Der erste Beweis basiert auf einem Ansatz aus [DV98] für eine veränderte Variationsformulierung der Maxwell-Gleichung mit zusätzlichem Lagrange-Multiplikator. Die Spektralzerlegung aus Satz 4.4.7 ist diesmal nicht der Abschluss, sondern der Anfang des Beweises. Sie führt unter der Voraussetzung $\sigma \equiv 0$ auf eine explizite Angabe der inf-sup Konstante

$$\beta_{\mu, \varepsilon} := \inf_{\substack{E \in H_0(\operatorname{curl}, \Omega; \mathbb{C}^3) \\ \|E\|_{H_{\mu, \varepsilon}(\operatorname{curl}, \Omega)}=1}} \sup_{\substack{F \in H_0(\operatorname{curl}, \Omega; \mathbb{C}^3) \\ \|F\|_{H_{\mu, \varepsilon}(\operatorname{curl}, \Omega)}=1}} |b(E, F)|.$$

Aus der Normäquivalenz in Lemma 4.3.2 folgt somit $c_{\inf}^2 \beta_{\mu, \varepsilon} \leq \beta_1 \leq c_{\sup}^2 \beta_{\mu, \varepsilon}$.

Lemma 4.4.9. *Für $\sigma \equiv 0$ ist mit den Eigenwerten λ_n des Eigenwertproblems (4.13)*

$$\beta_{\mu, \varepsilon} = \min \left\{ 1, \omega^2, \frac{|\lambda_n - \omega^2|}{1 + \lambda_n} \text{ für } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Beweis. Vermöge $E \in H_0(\operatorname{curl}, \Omega; \mathbb{C}^3) \setminus \{0\}$. Satz 4.4.7 besagt, dass die bzgl. $\|\bullet\|_{L_{\varepsilon}^2(\Omega)}$ normierten und orthogonalen Eigenfunktionen $\Phi_n \in H(\operatorname{curl}, \Omega; \mathbb{C}^3)$ mit $n \in \mathbb{N}$ des Eigenwertproblems (4.13) den Raum X_0^{ε} aufspannen. Mit der Zerlegung $H_0(\operatorname{curl}, \Omega; \mathbb{C}^3) = \nabla H_0^1(\Omega) \oplus X_0^{\varepsilon}$ aus Lemma 4.4.1 lassen sich so E und die Testfunktion $F \in H_0(\operatorname{curl}, \Omega; \mathbb{C}^3)$ durch ein Gradientenfeld ∇p sowie ∇q mit $p, q \in H_0^1(\Omega)$ und Koeffizienten $E^n, F^n \in \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}$ darstellen als

$$E = \nabla p + \sum_{n \in \mathbb{N}} E^n \Phi_n \quad \text{und} \quad F = \nabla q + \sum_{n \in \mathbb{N}} F^n \Phi_n.$$

Mit den zu Φ_n für $n \in \mathbb{N}$ gehörenden Eigenwerten λ_n gilt für die Norm

$$\begin{aligned} \|F\|_{H_{\mu, \varepsilon}(\operatorname{curl}, \Omega)}^2 &= \sum_{n \in \mathbb{N}} (F^n \Phi_n, F^n \Phi_n)_{L_{\varepsilon}^2(\Omega)} + \sum_{n \in \mathbb{N}} (\mu^{-1} F^n \operatorname{curl} \Phi_n, F^n \operatorname{curl} \Phi_n)_{L^2(\Omega)} + (\nabla q, \nabla q)_{L_{\varepsilon}^2(\Omega)} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} (1 + \lambda_n) F^n \cdot F^n + \|\nabla q\|_{L_{\varepsilon}^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Die Sesquilinearform zerfällt zu

$$\begin{aligned} b(E, F) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} (\mu^{-1} E^n \operatorname{curl} \Phi_n, F^n \operatorname{curl} \Phi_n)_{L^2(\Omega)} - \omega^2 \sum_{n \in \mathbb{N}} (E^n \Phi_n, F^n \Phi_n)_{L_{\varepsilon}^2(\Omega)} - \omega^2 (\nabla p, \nabla q)_{L_{\varepsilon}^2(\Omega)} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} (\lambda_n - \omega^2) E^n \cdot F^n - \omega^2 (\nabla p, \nabla q)_{L_{\varepsilon}^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Eine obere Schranke liefert die Cauchy-Schwarz Ungleichung für den Folgenraum ℓ^2 (vgl. [Alt12, 0.23]) sowie $L_\varepsilon^2(\Omega; \mathbb{C}^3)$, denn

$$\begin{aligned}
 |b(E, F)| &\leq \left| \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{|\lambda_n - \omega^2|}{\sqrt{1 + \lambda_n}} E^n \cdot \sqrt{1 + \lambda_n} F^n \right| + \omega^2 |(\nabla p, \nabla q)_{L_\varepsilon^2(\Omega)}| \\
 &\leq \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{|\lambda_n - \omega^2|^2}{1 + \lambda_n} E^n \cdot E^n \right)^{1/2} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} (1 + \lambda_n) F^n \cdot F^n \right)^{1/2} + \omega^2 \|\nabla p\|_{L_\varepsilon^2(\Omega)} \|\nabla q\|_{L_\varepsilon^2(\Omega)} \\
 &\leq \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{|\lambda_n - \omega^2|^2}{1 + \lambda_n} E^n \cdot E^n + \omega^4 \|\nabla p\|_{L_\varepsilon^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \|F\|_{H_{\mu, \varepsilon}(\text{curl}, \Omega)}. \tag{4.14}
 \end{aligned}$$

Für die Testfunktion $F = \sum_{n \in \mathbb{N}} F^n \Phi_n + \nabla q$, definiert durch

$$\begin{cases} F^n := E^n & \text{für } n \in \mathbb{N} \text{ mit } \lambda_n - \omega^2 \geq 0, \\ F^n := -E^n & \text{für } n \in \mathbb{N} \text{ mit } \lambda_n - \omega^2 < 0, \\ \nabla q := -\nabla p, \end{cases}$$

ist $\|F\|_{H_{\mu, \varepsilon}(\text{curl}, \Omega)} = \|E\|_{H_{\mu, \varepsilon}(\text{curl}, \Omega)}$ und

$$b(E, F) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{|\lambda_n - \omega^2|}{1 + \lambda_n} E^n \cdot (1 + \lambda_n) E^n + \omega^2 \|\nabla p\|_{L_\varepsilon^2(\Omega)}^2.$$

Durch das Ausklammern des Infimums ergibt sich

$$\inf \left\{ \omega^2, \frac{|\lambda_n - \omega^2|}{1 + \lambda_n} \text{ für } n \in \mathbb{N} \right\} \|E\|_{H_{\mu, \varepsilon}(\text{curl}, \Omega)}^2 \leq b(E, F).$$

Sollte das Infimum nicht angenommen werden, so ist es der Grenzwert des Bruchs für $n \rightarrow \infty$. Dieser beträgt eins. Zusammengefasst lässt sich festhalten, dass

$$\min \left\{ 1, \omega^2, \frac{|\lambda_n - \omega^2|}{1 + \lambda_n} \text{ für } n \in \mathbb{N} \right\} \leq \inf_{\substack{E \in H_0(\text{curl}, \Omega; \mathbb{C}^3) \\ \|E\|_{H_{\mu, \varepsilon}(\text{curl}, \Omega)} = 1}} \sup_{\substack{F \in H_0(\text{curl}, \Omega; \mathbb{C}^3) \\ \|F\|_{H_{\mu, \varepsilon}(\text{curl}, \Omega)} = 1}} |b(E, F)|.$$

Die Gleichheit folgt aus dem Einsetzen von $E = \nabla p$ mit $p \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$, $E = \Phi_n$ mit $n \in \mathbb{N}$ oder der Grenzwertbildung $\lim_{n \rightarrow \infty} b(\Phi_n, F)$ in (4.14). \square

Für den Fall, dass die Konduktivität σ nicht verschwindet, sich jedoch durch Konstanten $\sigma_{\inf}, \sigma_{\sup}$ abschätzen lässt durch

$$0 < \sigma_{\inf} \leq \sigma \leq \sigma_{\sup} \quad \text{für fast alle } x \in \Omega, \tag{4.15}$$

folgt eine weitere Abschätzung für β_1 . Dazu ist die Konstante $c_\sigma > 0$ definiert als kleinster Wert mit

$$\varepsilon/\sigma \leq c_\sigma \quad \text{für fast alle } x \in \Omega. \tag{4.16}$$

Nach Bemerkung 3.1.2 lassen sich komplexwertige $H_0(\text{curl}, \Omega; \mathbb{C}^3)$ -Funktionen E und F schreiben als

$$E = E_{\Re} + iE_{\Im} \quad \text{sowie} \quad F = F_{\Re} + iF_{\Im},$$

wobei $E_{\Re} := \Re E$, $E_{\Im} := \Im E$, $F_{\Re} := \Re F$ und $F_{\Im} := \Im F$ Funktionen in $H_0(\text{curl}, \Omega; \mathbb{R}^3)$ sind. Der Betrag der Sesquilinearform $b(E, F)$ kann durch deren Realteil

$$\begin{aligned} \Re b(E, F) = & (\mu^{-1} \text{curl } E_{\Re}, \text{curl } F_{\Re})_{L^2(\Omega)} + (\mu^{-1} \text{curl } E_{\Im}, \text{curl } F_{\Im})_{L^2(\Omega)} \\ & - \omega^2 (\varepsilon E_{\Re}, F_{\Re})_{L^2(\Omega)} - \omega^2 (\varepsilon E_{\Im}, F_{\Im})_{L^2(\Omega)} \\ & + \omega (\sigma E_{\Im}, F_{\Re})_{L^2(\Omega)} - \omega (\sigma E_{\Re}, F_{\Im})_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

abgeschätzt werden. Daraus ergibt sich folgendes Lemma.

Lemma 4.4.10. *Mit den Konstanten aus (4.8), (4.15) und (4.16) ist*

$$(2\mu_{\sup}^2 (1 + (\omega c_{\sigma} + (\omega \mu_{\sup} \sigma_{\inf})^{-1})^2))^{-1/2} \leq \beta_1. \quad (4.18)$$

Beweis. Das Einsetzen von $F_{\Re} := E_{\Re} + (\omega c_{\sigma} + (\omega \mu_{\sup} \sigma_{\inf})^{-1}) E_{\Im}$ und $F_{\Im} := E_{\Im} - (\omega c_{\sigma} + (\omega \mu_{\sup} \sigma_{\inf})^{-1}) E_{\Re}$ in (4.17) führt auf

$$\begin{aligned} \Re b(E, F) = & (\mu^{-1} \text{curl } E_{\Re}, \text{curl } E_{\Re})_{L^2(\Omega)} + (\mu^{-1} \text{curl } E_{\Im}, \text{curl } E_{\Im})_{L^2(\Omega)} + \\ & - \omega^2 (\varepsilon E_{\Re}, E_{\Re})_{L^2(\Omega)} - \omega^2 (\varepsilon E_{\Im}, E_{\Im})_{L^2(\Omega)} \\ & + \omega^2 c_{\sigma} (\sigma E_{\Re}, E_{\Re})_{L^2(\Omega)} + \omega^2 c_{\sigma} (\sigma E_{\Im}, E_{\Im})_{L^2(\Omega)} \\ & + \mu_{\sup}^{-1} \sigma_{\inf}^{-1} (\sigma E_{\Re}, E_{\Re})_{L^2(\Omega)} + \mu_{\sup}^{-1} \sigma_{\inf}^{-1} (\sigma E_{\Im}, E_{\Im})_{L^2(\Omega)} \\ \geq & \mu_{\sup}^{-1} (\|\text{curl } E\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|E\|_{L^2(\Omega)}^2). \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} \|F_{\Re}\|_{H(\text{curl}, \Omega)} & \leq \|E_{\Re}\|_{H(\text{curl}, \Omega)} + (\omega c_{\sigma} + (\omega \mu_{\sup} \sigma_{\inf})^{-1}) \|E_{\Im}\|_{H(\text{curl}, \Omega)} \\ & \leq (1 + (\omega c_{\sigma} + (\omega \mu_{\sup} \sigma_{\inf})^{-1})^2)^{1/2} \|E\|_{H(\text{curl}, \Omega)}. \end{aligned}$$

Die selbe Abschätzung lässt sich auf F_{\Im} anwenden, sodass

$$\|F\|_{H(\text{curl}, \Omega)}^2 = \|F_{\Re}\|_{H(\text{curl}, \Omega)}^2 + \|F_{\Im}\|_{H(\text{curl}, \Omega)}^2 \leq (1 + (\omega c_{\sigma} + (\omega \mu_{\sup} \sigma_{\inf})^{-1})^2) \|E\|_{H(\text{curl}, \Omega)}^2.$$

Dies ergibt

$$\begin{aligned} (2\mu_{\sup}^2 (1 + (\omega c_{\sigma} + (\omega \mu_{\sup} \sigma_{\inf})^{-1})^2))^{-1/2} & = \frac{\mu_{\sup}^{-1} \|E\|_{H(\text{curl}, \Omega)}^2}{2^{1/2} (1 + (\omega c_{\sigma} + (\omega \mu_{\sup} \sigma_{\inf})^{-1})^2)^{1/2} \|E\|_{H(\text{curl}, \Omega)}^2} \\ & \leq \frac{|b(E, F)|}{\|E\|_{H(\text{curl}, \Omega)} \|F\|_{H(\text{curl}, \Omega)}}. \quad \square \end{aligned}$$

Der Beweis basiert auf einem Vorlesungsskript von Schöberl [Sch09]. Die Abschätzung ist sehr einfach und höchstwahrscheinlich nicht scharf. Das Lemma liefert, wie auch Lemma 4.4.9, keine Aussage für $\sigma \neq 0$ mit $c_{\sigma}^{\inf} = 0$. In der Literatur wird häufig angegeben, dass eine nicht verschwindende Konduktivität $\sigma \neq 0$ das Problem stabilisiert [DV98, Remark 2], [Sch09, Seite 12]. Konkrete Argumente bzw. Beweise dafür habe ich nicht gefunden.

5. Die Nédélec-FEM

In diesem Kapitel werden Definitionen eingeführt, welche für die numerische Behandlung von partiellen Differentialgleichungen mittels Finite-Elemente-Methode unerlässlich sind. Konkret handelt es sich dabei um die reguläre Triangulierung mittels Tetraedern und das finite Element. Beide Definitionen entstammen dem Buch von Ciarlet [Cia78]. Ferner wird ein spezielles finites Element, das Nédélec-Element, genauer beleuchtet. Dabei wird die Variationsgleichung (2.1) diskretisiert und die Existenz einer eindeutigen Lösung diskutiert.

5.1. Allgemeine Definitionen

Notation 5.1.1. Für ein Tetraeder T bezeichnet $\mathcal{N}(T)$ die Menge aller Ecken, $\mathcal{E}(T)$ die Menge aller Kanten und $\mathcal{F}(T)$ die Menge aller Flächen. Für eine Vereinigung von Tetraedern \mathcal{T} ist $\mathcal{N} := \bigcup_{T \in \mathcal{T}} \mathcal{N}(T)$, $\mathcal{E} := \bigcup_{T \in \mathcal{T}} \mathcal{E}(T)$ und $\mathcal{F} := \bigcup_{T \in \mathcal{T}} \mathcal{F}(T)$.

Definition 5.1.2 (reguläre Triangulierung nach Ciarlet). Eine reguläre Triangulierung \mathcal{T} des Gebiets $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ist eine endliche Vereinigung nicht-degenerierter Tetraeder T , sodass

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}} T.$$

Ferner gilt für zwei verschiedene Elemente $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$, dass sie

- i) disjunkt sind, d.h. $T_1 \cap T_2 = \emptyset$, oder
- ii) sich eine gemeinsame Ecke z teilen, d.h. $T_1 \cap T_2 = \mathcal{N}(T_1) \cap \mathcal{N}(T_2) = \{z\}$, oder
- iii) sich eine gemeinsame Kante e teilen, d.h. $T_1 \cap T_2 = \mathcal{E}(T_1) \cap \mathcal{E}(T_2) = \{e\}$ oder
- iv) sich eine gemeinsame Fläche f teilen, d.h. $T_1 \cap T_2 = \mathcal{F}(T_1) \cap \mathcal{F}(T_2) = \{f\}$.

Bemerkung 5.1.3. Die reguläre Triangulierung ist für allgemeinere Teilmengen, wie Lipschitz-Gebiete oder Simplexes, definiert. In der Praxis werden meist Hexaeder oder, wie in dieser Arbeit, Tetraeder verwendet.

Notation 5.1.4. Durch die Notation $a \lesssim b$ wird ausgedrückt, dass $a \leq Cb$ mit einer generischen Konstanten $C > 0$, welche zwar von Ω abhängen kann, jedoch nicht von a , b oder der Gitterweite der Triangulierung. Mit $a \approx b$ ist $a \lesssim b \lesssim a$ gemeint.

Notation 5.1.5. Für eine Triangulierung des Gebiets Ω werden mit $\mathcal{N}(\Omega)$ die inneren Knoten, $\mathcal{E}(\Omega)$ die inneren Kanten und $\mathcal{F}(\Omega)$ die inneren Flächen bezeichnet.

Bemerkung 5.1.6. Der Rand Γ des Gebietes Ω wird als polygonal angenommen.

Definition 5.1.7 (Formregularität). Die Formregularität eines Tetraeders $T \in \mathcal{T}$ ist definiert als

$$\gamma(T) := \text{diam}(T) / \max\{r > 0 \mid \text{es existiert ein } x \in T, \text{ sodass die Kugel } \overline{B(x, r)} \subset T\}.$$

Man nennt eine Familie von Triangulierungen \mathcal{T}_n formregulär, falls $\sup_{n \in \mathbb{N}} \max_{T \in \mathcal{T}_n} \gamma(T) < \infty$.

Definition 5.1.8 (finites Element nach Ciarlet). Ein finites Element ist ein Tripel (T, P, Σ) , wobei

- i) T ein abgeschlossener Unterraum des \mathbb{R}^3 mit Lipschitz-Rand und innerem Punkt ist, z.B. ein nicht degeneriertes Tetraeder,
- ii) P ein reellwertiger Funktionenraum, für gewöhnlich Polynome, auf dem Gebiet T ist und
- iii) Σ eine endliche Menge auf dem Raum P definierter linear unabhängiger Linearformen ϕ_i für $i = 1, \dots, n$ ist.

Ferner soll die Menge Σ unisolvent sein, d.h., für jede Menge $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \in \mathbb{R}^n$ existiert genau eine Funktion $p \in P$, sodass $\phi_i(p) = \alpha_i$ für alle $i = 1, \dots, n$. Die Linearformen ϕ_i für $i = 1, \dots, n$ werden Freiheitsgrade des finiten Elements genannt. Die Definition lässt sich für komplexwertige Funktionenräume erweitern. Ein wichtiges Hilfsmittel zur Definition solcher Räume sind Polynomräume.

Notation 5.1.9. Mit P_k^n wird der Polynomraum von Grad $k \in \mathbb{N}$ mit Bildraum \mathbb{C}^n für $n \in \mathbb{N}$ bezeichnet. Dabei ist $P_k := P_k^1$. Die Menge der homogenen Polynome vom Grad $k \in \mathbb{N}$ mit Bildraum \mathbb{C}^n für $n \in \mathbb{N}$ wird als \tilde{P}_k^n , d.h. $\tilde{P}_k^n = P_k^n \setminus P_{k-1}^n$ für $k \geq 1$, bezeichnet.

5.2. Das Nédélec-Elemente

In seinen Arbeiten [Néd80] und [Néd86] führt Nédélec die später nach ihm benannten Nédélec-Elemente ein. Diese finiten Elemente erlauben eine konforme Diskretisierung des Raums $H(\text{curl}, \Omega; \mathbb{C}^3)$, d.h., der finite Elementerraum ist ein Unterraum des $H(\text{curl}, \Omega; \mathbb{C}^3)$. Es werden zwei verschiedene Arten von Nédélec-Elementen verwendet. Des Weiteren existieren eine Vielzahl von Kantenelementen beliebiger Ordnung zur Approximation von $H(\text{curl}, \Omega; \mathbb{C}^3)$ -Funktionen. In [Dem01] fasst Demkowicz die wesentlichen Ideen hinter der Konstruktion von Kantenelementen beliebiger Ordnung zusammen und vergleicht diese entsprechend der Arbeiten [Hip99] und [Hip01] von Hiptmair mit den Nédélec-Elementen erster Art.

Im Gegensatz dazu wird im Folgenden lediglich auf das Nédélec-Element erster Art niedrigster Ordnung eingegangen. Vor Nédélec nutzte bereits Whitney dieses Element [Whi57], weswegen es auch Whitney-Element genannt wird. Dessen Basisfunktionen lassen sich mit Hilfe der nodalen Basis des $H^1(\Omega)$ -konformen Courant-Finiten-Elemente-Raums

$$S^1(\mathcal{T}) := \{p \in H^1(\Omega) \mid \text{für alle } T \in \mathcal{T} \text{ existieren } a \in \mathbb{C}, B \in \mathbb{C}^3, \text{ sodass } u|_T = a + B \cdot \bullet\}$$

darstellen. Für jeden Knoten $z \in \mathcal{N}$ sind die Basisfunktionen φ_z definiert als affine Funktion auf jedem Tetraeder $T \in \mathcal{T}$ mit den Funktionswerten 1 in z und 0 in jedem anderen Knoten. Die Menge $\{\varphi_z \mid z \in \mathcal{N}(\Omega)\}$ ist eine Basis von $S_0^1(\mathcal{T}) := S^1(\mathcal{T}) \cap H_0^1(\Omega)$.

Definition 5.2.1 (Nédélec-Element erster Art niedrigster Ordnung). Das finite Element (T, R_1, Σ_T) besteht aus dem Tetraeder $T \subset \mathbb{R}^3$, dem Funktionenraum

$$R_1 := P_0^3 \oplus \{Q \in \tilde{P}_1^3 \mid x \cdot Q(x) = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^3\}$$

und den Freiheitsgraden

$$\Sigma_T = \left\{ M_e(U) = \int_e U \times \nu \, ds \mid e \in \mathcal{E}(T) \right\}.$$

Bemerkung 5.2.2. Die Definition ist ein Spezialfall der für höhere Polynomgrade verallgemeinerten Definition 5.33 in [Mon03]. Da die Freiheitsgrade nur mit den Kanten korrespondieren, nennt man dieses Element auch Kantenelement. Nach [Mon03, Abschnitt 5.5.1] lässt sich die Menge R_1 schreiben als

$$R_1 = \{Q \in P_1^3 \mid Q(x) = A + B \times x \text{ mit } A, B \in \mathbb{C}^3\}.$$

Für die Rotation gilt dabei $\text{curl}(A + B \times x) = 2B$ für $A, B \in \mathbb{C}^3$.

Bemerkung 5.2.3. Das so definierte Element ist $H(\text{curl}, \Omega; \mathbb{C}^3)$ -konform und unisolvent [Mon03, Theorem 5.37].

Definition 5.2.4. Die globalen Finite-Elemente-Räume auf der Triangulierung \mathcal{T} sind definiert durch

$$\begin{aligned} \mathcal{N}d^1(\mathcal{T}) &:= \{F \in H(\text{curl}, \Omega; \mathbb{C}^3) \mid F|_T \in R_1 \text{ für alle } T \in \mathcal{T}\}, \\ \mathcal{N}d_0^1(\mathcal{T}) &:= \mathcal{N}d^1(\mathcal{T}) \cap H_0(\text{curl}, \Omega; \mathbb{C}^3). \end{aligned}$$

Bemerkung 5.2.5. Aus der Definition folgt $\nabla S_0^1(\mathcal{T}) \subset \mathcal{N}d_0^1(\mathcal{T})$. Dies ermöglicht eine orthogonale Zerlegung ähnliche Lemma 4.4.1. Dazu ist

$$X_{0,h}^\kappa := \{F_h \in \mathcal{N}d_0^1(\mathcal{T}) \mid (\kappa F_h, \nabla p_h)_{L^2(\Omega)} = 0 \text{ für alle } p_h \in S_0^1(\mathcal{T})\}$$

der Raum der diskret divergenzfreien finiten Elemente. Zwar ist somit für jedes Element $F_h \in X_{0,h}^\kappa$ die Sesquilinearform $(\kappa F_h, \nabla p)_{L^2(\Omega)} = 0$ für alle $p \in S_0^1(\mathcal{T})$, im Allgemeinen jedoch nicht für $p \in H_0^1(\Omega)$, d.h., $X_{0,h} \not\subset X_0$. Ferner ist $\nabla S^1(\mathcal{T}) \subset \mathcal{N}d^1(\mathcal{T})$ und

$$X_h^\kappa := \{F_h \in \mathcal{N}d^1(\mathcal{T}) \mid (\kappa F_h, \nabla p_h)_{L^2(\Omega)} = 0 \text{ für alle } p_h \in S^1(\mathcal{T})\}.$$

Bemerkung 5.2.6 (diskrete de Rham-Sequenz). Die Rotation von $F_h \in \mathcal{N}d^1(\mathcal{T})$ verschwindet genau dann, wenn F_h darstellbar ist als $F_h = \nabla p_h$ für ein $p_h \in S^1(\mathcal{T})$. Selbiges gilt für $F_h \in \mathcal{N}d_0^1(\mathcal{T})$, wobei $p_h \in S_0^1(\mathcal{T})$. Dies sind Sonderfälle der diskreten de Rham-Diagramme [Bof01].

Satz 5.2.7. Für $T \in \mathcal{T}$ mit $\mathcal{E}(T) = \{e_1, \dots, e_6\}$ werden die Endpunkte einer jeden Kante für $k = 1, \dots, 6$ bezeichnet mit $e_k^1, e_k^2 \in \mathcal{N}(T)$, d.h., $e_k = \text{conv}\{e_k^1, e_k^2\}$. Die Funktionen

$$\psi_{e_k} := \varphi_{e_k^1} \nabla \varphi_{e_k^2} - \varphi_{e_k^2} \nabla \varphi_{e_k^1}, \quad k = 1, \dots, 6,$$

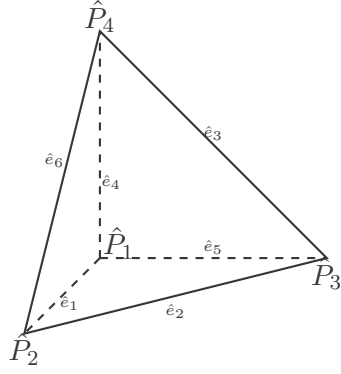
bilden eine Basis von R_1 . Des Weiteren gilt für alle $k, l = 1, \dots, 6$, dass

$$\int_{e_k} \psi_{e_l} \cdot \tau \, ds = \delta_{k,l} \quad \text{und} \quad \text{curl } \psi_{e_k} = 2 \nabla \varphi_{e_k^1} \times \nabla \varphi_{e_k^2},$$

wobei $\delta_{k,l}$ das Kronecker-Delta bezeichnet.

Beweis. Die Aussage lässt sich für das Referenzdreieck \hat{T} nachprüfen (vgl. Abbildung 5.1) und mittels Koordinatentransformation [Mon03, (5.33)] auf ein beliebiges Element $T \in \mathcal{T}$ übertragen. \square

Korollar 5.2.8. Die in Satz 5.2.7 definierten Funktionen ψ_e mit $e \in \mathcal{E}$ bilden eine Basis von $\mathcal{N}d^1(\mathcal{T})$. Des Weiteren ist $\{\psi_e \mid e \in \mathcal{E}(\Omega)\}$ eine Basis von $\mathcal{N}d_0^1(\mathcal{T})$.



Das Referenzdreieck \hat{T} hat die Knoten $\hat{P}_1 = (0, 0, 0)$, $\hat{P}_2 = (1, 0, 0)$, $\hat{P}_3 = (0, 1, 0)$, $\hat{P}_4 = (0, 0, 1)$ und Kanten \hat{e}_i , $i = 1, \dots, 6$. Für $\hat{e}_j = \text{conv}\{\hat{P}_n, \hat{P}_m\}$ ist die Basis

$$\hat{\psi}_{\hat{e}_j} = \lambda_{\hat{P}_m} \nabla \lambda_{\hat{P}_n} - \lambda_{\hat{P}_n} \nabla \lambda_{\hat{P}_m}.$$

Kante	\hat{e}_1	\hat{e}_2	\hat{e}_3	\hat{e}_4	\hat{e}_5	\hat{e}_6
Knoten	\hat{P}_1, \hat{P}_2	\hat{P}_2, \hat{P}_3	\hat{P}_3, \hat{P}_4	\hat{P}_4, \hat{P}_1	\hat{P}_1, \hat{P}_3	\hat{P}_2, \hat{P}_4
Basisfunktion $\hat{\psi}_{\hat{e}_i}$	$\begin{pmatrix} 1-y-z \\ x \\ x \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -z \\ -z \\ x+y-1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} y \\ 1-x-z \\ y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ x \end{pmatrix}$
Rotation $\text{curl } \hat{\psi}_{\hat{e}_i}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Abbildung 5.1.: Referenzdreieck mit Basisfunktionen.

5.3. Existenz einer Lösung

In der Nédélec-FEM wird die Lösung $E_h \in \mathcal{N}d_0^1(\mathcal{T})$ der Variationsformulierung

$$(\mu^{-1} \text{curl } E_h, \text{curl } F_h)_{L^2(\Omega)} - \omega^2 (\kappa E_h, F_h)_{L^2(\Omega)} = (J, F_h)_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } F_h \in \mathcal{N}d_0^1(\mathcal{T}) \quad (5.1)$$

gesucht. Existenzbeweise der Lösung wie in [Mon03, Abschnitt 7.3] nutzen häufig ein kollektives Kompaktheitsargument. Dies hat den Nachteil, dass die Konstanten der Fehlerabschätzungen nicht bestimmt werden können und die Ausgangstriangulierung hinreichend fein sein muss. Die bereits in Abschnitt 4.4.2 genutzten Techniken umgehen zumindest das Problem der unbekannten Konstanten und basieren u.a. auf den Eigenpaaren $(\lambda_h, \Phi_h) \in \mathbb{C} \times \mathcal{N}d_0^1(\mathcal{T}) \setminus \{0\}$ des diskreten Eigenwertproblems

$$(\mu^{-1} \text{curl } \Phi_h, \text{curl } F_h)_{L^2(\Omega)} = \lambda_h (\kappa \Phi_h, F_h)_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } F_h \in \mathcal{N}d_0^1(\mathcal{T}). \quad (5.2)$$

Mit den selben Argumenten wie im kontinuierlichen Fall lassen sich diese diskreten Eigenpaare im folgenden Satz charakterisieren.

Satz 5.3.1. *Alle Eigenwerte λ_h^n mit $n = 1, \dots, \dim \mathcal{N}d_0^1(\mathcal{T})$ des Eigenwertproblems (5.2) sind reellwertig. Sie verschwinden, wenn die Eigenfunktion $\Phi_h \in \nabla S_0^1(\mathcal{T})$ ist und sind echt größer 0, wenn $\Phi_h \in X_{0,h}^\varepsilon$. Ferner wird der m -dimensionale Raum $X_{0,h}^\varepsilon$ aufgespannt durch die zu den Eigenwerten*

$$0 < \lambda_h^1 \leq \lambda_h^2 \leq \dots \leq \lambda_h^m$$

gehörenden Eigenfunktionen. Diese lassen sich so wählen, dass sie normiert bzgl. der Norm $\|\bullet\|_{L^2(\Omega)}$ sind und orthogonal aufeinander stehen.

Beweis. [Mon03, Abschnitt 7.5] □

Gesucht ist die diskrete inf-sup-Konstante

$$\beta_h^1 := \inf_{\substack{E_h \in \mathcal{N}d_0^1(\mathcal{T}) \\ \|E_h\|_{H(\text{curl}, \Omega)}=1}} \sup_{\substack{F_h \in \mathcal{N}d_0^1(\mathcal{T}) \\ \|F_h\|_{H(\text{curl}, \Omega)}=1}} |b(E_h, F_h)|.$$

Wie bereits im kontinuierlichen Fall eignet sich für den Spezialfall $\sigma \equiv 0$ die Norm $\|\bullet\|_{H_{\mu, \varepsilon}(\text{curl}, \Omega)}$ besser, um

$$\beta_h^{\mu, \varepsilon} := \inf_{\substack{E_h \in \mathcal{N}d_0^1(\mathcal{T}) \\ \|E_h\|_{H_{\mu, \varepsilon}(\text{curl}, \Omega)}=1}} \sup_{\substack{F_h \in \mathcal{N}d_0^1(\mathcal{T}) \\ \|F_h\|_{H_{\mu, \varepsilon}(\text{curl}, \Omega)}=1}} |b(E_h, F_h)|$$

exakt zu bestimmen. Aus der Normäquivalenz folgt erneut $c_{\text{inf}}^2 \beta_h^{\mu, \varepsilon} \leq \beta_h^1 \leq c_{\text{sup}}^2 \beta_h^{\mu, \varepsilon}$. Zerlegt man nun E_h und F_h mittels der zu den Eigenwerten λ_h^n gehörenden Eigenfunktionen $\Phi_h^n \in X_{0,h}^\varepsilon$ für $n = 1, \dots, m$, sodass

$$E_h = \nabla p_h + \sum_{n=1}^m E_h^n \Phi_h^n \quad \text{sowie} \quad F_h = \nabla q_h + \sum_{n=1}^m F_h^n \Phi_h^n \quad (5.3)$$

mit $p_h, q_h \in S_0^1(\mathcal{T})$ und $E_h^n, F_h^n \in \mathbb{C}$ für $n = 1, \dots, m$, zerfällt die Sesquilinearform und mit den selben Argumenten wie in Lemma 4.4.9 ergibt sich folgendes Lemma.

Lemma 5.3.2. *Für $\sigma \equiv 0$ ist*

$$\beta_h^{\mu, \varepsilon} = \min \left\{ \omega^2, \frac{|\lambda_h^n - \omega^2|}{1 + \lambda_h^n} \text{ für } n = 1, \dots, m \right\}.$$

Bemerkung 5.3.3. Ist ω^2 kein Maxwell-Eigenwert, so kann es trotzdem ein diskreter Eigenwert λ_h sein. Somit folgt aus dem Lemma nicht zwangsläufig $\beta_h > 0$. Diese Aussage kann erst asymptotisch aufgrund der Konvergenz der diskreten gegen die exakten Eigenwerte [Mon03, Theorem 7.29] getroffen werden. Ferner zeigt das Lemma die Gitterabhängigkeit von β_h im vorasymptotischen Bereich. Die Experimente im Kapitel 7 bestätigen diese Beobachtung.

Lemma 5.3.4. *Existiert eine Konstante σ_{inf} , sodass $0 < \sigma_{\text{inf}} \leq \sigma$ für fast alle $x \in \Omega$, so kann β_h^1 wie Lemma 4.4.10 abgeschätzt werden durch*

$$(2\mu_{\text{sup}}^2(1 + (\omega c_\sigma + (\omega \mu_{\text{sup}} \sigma_{\text{inf}})^{-1})^2))^{-1/2} \leq \beta_h^1.$$

Unter der Annahme, dass es sich bei ω^2 um keine diskreten Eigenwerte handelt oder $0 < \sigma_{\text{inf}} \leq \sigma$ für fast alle $x \in \Omega$ ist, ist die Eindeutigkeitsbedingung gegeben, sodass nach Satz 2.2.8 zu $J \in L^2(\Omega; \mathbb{C}^3)$ eine eindeutige Lösung $E_h \in \mathcal{N}d_0^1(\mathcal{T})$ von (5.1) existiert. Ferner wird der Fehler zur exakten Lösung $E \in H(\text{curl}, \Omega; \mathbb{C}^3)$ von (4.7) beschränkt durch

$$\|E - E_h\|_{H(\text{curl}, \Omega)} \leq \|b\|/\beta_h^1 \inf_{F_h \in \mathcal{N}d_0^1(\mathcal{T})} \|E - F_h\|_{H(\text{curl}, \Omega)}.$$

6. Die dPG-Methode

6.1. Die idealisierte dPG-Methode

Die ursprünglich Idee der unstetigen Petrov-Galerkin-Methode (dPG-Methode) war, durch die Konstruktion optimaler Testräume die Stabilität von numerischen Verfahren in konvektionsdominierten Gleichungen zu erhöhen [DG10, DG11, DGN12, ZMD⁺11]. Gesucht wird in den Hilberträumen X und Y mit Sesquilinearform $b(\bullet, \bullet) : X \times Y \rightarrow \mathbb{K}$ zu gegebenem $F \in Y^*$ die Lösung $x \in X$ des Variationsproblems

$$b(x, y) = F(y) \quad \text{für alle } y \in Y. \quad (6.1)$$

Mit anderen Worten ist zu $B : X \rightarrow Y^*, x \mapsto b(x, \bullet)$ ein $x \in X$ gesucht, sodass $Bx = F$. Sind **(A1)**, **(A2)** und die Eindeutigkeitsbedingung aus Kapitel 2 erfüllt, d.h., die Sesquilinearform $b(\bullet, \bullet)$ ist stetig **(A1)**, es gilt die kontinuierliche inf-sup-Bedingung

$$\textbf{(A2)} \quad 0 < \beta := \inf_{x \in X \setminus \{0\}} \sup_{y \in Y \setminus \{0\}} \frac{|b(x, y)|}{\|x\|_X \|y\|_Y}$$

und die Menge $\{y \in Y \mid b(x, y) = 0 \text{ für alle } x \in Y\}$ ist trivial, so existiert nach Satz 2.2.3 (Babuška-Lax-Milgram) eine eindeutige Lösung $x \in X$. Um diese zu approximieren, wird in der Methode der finiten Elemente ein $x_h \in X_h \subset X$ bestimmt, sodass

$$b(x_h, y_h) = F(y_h) \quad \text{für alle } y_h \in Y_h \subset Y. \quad (6.2)$$

Nach Satz 2.2.8 (Babuška) sowie Bemerkung 2.2.9 folgt aus der diskreten inf-sup-Bedingung

$$\textbf{(dA2)} \quad 0 < \beta_h := \inf_{x_h \in X_h \setminus \{0\}} \sup_{y_h \in Y_h \setminus \{0\}} \frac{|b(x_h, y_h)|}{\|x_h\|_X \|y_h\|_Y}$$

die Existenz einer Lösung x_h mit

$$\|x - x_h\|_X \leq \|b\|/\beta_h \inf_{\xi_h \in X_h} \|x - \xi_h\|_X.$$

Selbst wenn die kontinuierlich inf-sup-Bedingung **(A2)** erfüllt ist, kann die Konstante β_h sehr klein oder gleich Null sein, sodass die diskrete Lösung nur sehr schlecht approximiert oder nicht existiert. Kerngedanke der idealisierten dPG-Methode ist es, dieses Problem zu umgehen, indem ein *optimaler Testraum* konstruiert wird.

Definition 6.1.1 (Trial-to-Test Operator und optimaler Testraum). Der optimale Testraum Y_h wird durch den Operator $T : X \rightarrow Y$ mit

$$(Tx, y)_Y = b(x, y) \quad \text{für alle } y \in Y$$

definiert als $Y_h := TX_h$.

Mit dem Raum Y_h ist bzgl. der *energy norm* $\|x\|_E := \sup_{y \in Y} |b(x, y)| / \|y\|_Y$ für $x \in X$ automatisch die Beschränktheit $b(x, y) \leq \|x\|_E \|y\|_Y$ sowie die diskrete inf-sup-Bedingung

$$\inf_{x_h \in X_h \setminus \{0\}} \sup_{y_h \in Y_h \setminus \{0\}} \frac{|b(x_h, y_h)|}{\|x_h\|_E \|y_h\|_Y} = \inf_{x_h \in X_h \setminus \{0\}} \sup_{y_h \in Y_h \setminus \{0\}} \frac{|(Tx_h, y_h)_Y|}{\|x_h\|_E \|y_h\|_Y} = 1$$

gegeben. Ferner folgt aus der Trivialität des Kerns $\Lambda := \{y \in Y \mid b(x, y) = 0 \text{ für alle } x \in X\}$ die Trivialität von $\Lambda_h := \{y_h \in Y_h \mid b(x_h, y_h) = 0 \text{ für alle } x_h \in X_h\}$. So lässt sich aus der Existenz einer Lösung $x \in X$ mit Satz 2.2.3 die eindeutige Existenz einer Lösung $x_h \in X_h$ der diskreten Variationsformulierung (6.2) mit

$$\|x - x_h\|_E = \inf_{\xi \in X_h} \|x - \xi\|_E$$

schlussfolgern [DG11, Theorem 2.2]. Der Testraum Y_h führt somit auf optimale Abschätzungen in der Norm $\|\bullet\|_E$. Gleichzeitig folgt mit der Isometrie $R_Y : Y \rightarrow Y^*$ des Riesz'schen Darstellungssatzes (Satz 2.1.8), dass

$$\|x - x_h\|_E = \inf_{\xi_h \in X_h} \|x - \xi_h\|_E = \inf_{\xi_h \in X_h} \|B\xi_h - F\|_{Y^*} = \inf_{\xi_h \in X_h} \|R_Y^{-1}(B\xi_h - F)\|_Y.$$

Somit ist die diskrete Lösung $x_h \in X_h$ die eindeutige Lösung des konvexen Minimierungsproblems

$$\arg \min_{\xi_h \in X_h} 1/2 \|R_Y^{-1}(B\xi_h - F)\|_Y^2.$$

Mit anderen Worten lässt sich der Petrov-Galerkin Ansatz umformulieren zu einer Methode der kleinsten Quadrate. Der Ausdruck auf der rechten Seite ist konvex und differenzierbar. Mit Hilfe von konvexer Analysis [Roc70] lässt sich die Lösung $x_h \in X_h$ eindeutig charakterisieren durch

$$(R_Y^{-1}(Bx_h - F), R_Y^{-1}B\xi_h)_Y = 0 \quad \text{für alle } \xi_h \in X_h.$$

Definiert man das Residuum $\eta := R_Y^{-1}(Bx_h - F) \in Y$, so ist dies äquivalent zu

$$(\eta, R_Y^{-1}B\xi_h)_Y = 0 \quad \text{für alle } \xi_h \in X_h.$$

Damit lässt sich das Optimierungsproblem umformulieren zum gemischten Problem

$$\begin{cases} (\eta, y)_Y - b(x_h, y) = -F(y) & \text{für alle } y \in Y, \\ b(\xi_h, \eta) = 0 & \text{für alle } \xi_h \in X_h. \end{cases} \quad (6.3)$$

Neben der hohen Stabilität hat die idealisierte dPG-Methode den Vorteil, dass man den Fehler $\|Bx_h - F\|_{Y^*} = \|\eta\|_Y$ nicht nur abschätzen, sondern explizit ausrechnen kann. Jedoch lässt sich die Methode in den meisten Fällen nur schlecht bis gar nicht anwenden, da das Bestimmen des optimalen Testraums Y_h bzw. das Lösen des Sattelpunktpblems (6.3) über dem gesamten Raum Y sehr aufwendig oder gar nicht durchführbar ist.

6.2. Die praktische dPG-Methode

Die praktische dPG-Methode umgeht das Problem der idealisierten, indem der Raum Y durch einen hinreichend gut approximierenden diskreten Hilbertraum $Y_h \subset Y$ ersetzt wird. Dieser kann dabei von größerer Dimension als X_h sein. Die Norm in Y_h entspricht der Norm in Y und das Element $F \in Y^*$ wird im Dualraum von Y_h mit Norm

$$\|F\|_{Y_h^*} := \sup_{y_h \in Y_h \setminus \{0\}} |F(y_h)| / \|y_h\|_Y$$

betrachtet. Erneut existiert eine Isometrie $R_{Y_h} : Y_h \rightarrow Y_h^*$ nach dem Riesz'schen Darstellungssatz (Satz 2.1.8), womit sich das Minimierungsproblem

$$\arg \min_{\xi_h \in X_h} 1/2 \|R_{Y_h}^{-1}(B\xi_h - F)\|_Y^2,$$

herleiten lässt. Dieses ist äquivalent zur Aussage

$$(R_{Y_h}^{-1}(Bx_h - F), R_{Y_h}^{-1}B\xi_h)_Y = 0 \quad \text{für alle } \xi_h \in X_h. \quad (6.4)$$

Durch die Definition von $\eta_h := R_{Y_h}^{-1}(Bx_h - F)$ entspricht sie dem gemischten Problem für $(x_h, \eta_h) \in X_h \times Y_h$ mit

$$\begin{cases} (\eta_h, y_h)_Y - b(x_h, y_h) = -F(y_h) & \text{für alle } y_h \in Y_h, \\ b(\xi_h, \eta_h) = 0 & \text{für alle } \xi_h \in X_h. \end{cases} \quad (6.5)$$

Satz 6.2.1. *Ist das kontinuierliche Problem $Bx = F$ wohlgestellt, so existiert eine eindeutige Lösung des diskreten Sattelpunktpblems (6.5), falls **(dA2)** erfüllt ist. Für die eindeutige Lösung gilt*

$$\|x - x_h\|_X \leq \|b\|/\beta_h \inf_{\xi_h \in X_h} \|x - \xi_h\|_X.$$

Beweis. Der Satz folgt aus zweimaligem Anwenden von Satz 2.2.8. Dazu ist der Kern

$$\Lambda_h := \{y_h \in Y_h \mid b(x_h, y_h) = 0 \text{ für alle } x_h \in X_h\}.$$

Ferner bezeichnet $I : Y_h \rightarrow Y_h$ die Identität und $P : Y_h \rightarrow \Lambda_h$ die bzgl. $(\bullet, \bullet)_Y$ orthogonale Projektion. So lässt sich der Raum Y_h aufspalten in $Y_h = \Lambda_h \oplus \Lambda_h^\perp$ mit $\Lambda_h^\perp := (I - P)Y_h$. Die inf-sup Bedingung **(dA2)** ist äquivalent zu

$$0 < \beta_h = \inf_{x_h \in X_h \setminus \{0\}} \sup_{y_h \in \Lambda_h^\perp \setminus \{0\}} \frac{|b(x_h, y_h)|}{\|x_h\|_X \|y_h\|_Y}.$$

Somit existiert ein eindeutiges $x_h \in X_h$ mit

$$-b(x_h, y_h) = -F(y_h) \quad \text{für alle } y_h \in \Lambda_h^\perp.$$

Es erfüllt die geforderten Approximationseigenschaften. Der selbe Satz besagt, dass ein eindeutiges $\eta_h \in \Lambda_h$ existiert, sodass

$$(\eta_h, y_h)_Y = b(x_h, y_h) - F(y_h) \quad \text{für alle } y_h \in \Lambda_h.$$

Zusammengefasst erfüllt $(x_h, \eta_h) \in X_h \times Y_h$ das Sattelpunktpunktproblem (6.5). \square

Zwar hat sich der Existenzbeweis mittels diskreter inf-sup Bedingung **(dA2)** für Probleme mit Testräumen von niedriger Ordnung bewährt [CGHW14], häufiger wird jedoch die Bedingung genutzt, dass eine lineare Abbildung Π mit $\Pi : Y \rightarrow Y_h$ existiert, sodass

$$(A3) \quad \begin{cases} b(x_h, y - \Pi y) = 0 & \text{für alle } x_h \in X_h \text{ und alle } y \in Y, \\ \|\Pi\| := \sup_{y \in Y \setminus \{0\}} \Pi y / \|y\|_Y < \infty. \end{cases}$$

Bemerkung 6.2.2. Ist **(A2)** erfüllt, impliziert **(A3)** die diskrete inf-sup-Bedingung **(dA2)** mit $\beta / \|\Pi\| \leq \beta_h$. Satz 6.2.1 und Bemerkung 6.2.2 ergeben so

$$\|x - x_h\|_X \leq \|b\| \|\Pi\| / \beta \inf_{\xi_h \in X_h} \|x - \xi_h\|_X.$$

Beweis. Π ist eine lineare Abbildung die **(A3)** erfüllt. Die Operatornorm ist größer gleich eins, denn für $y \in Y$ mit $\|y\|_Y = 1$ und $(y, y_h)_Y = 0$ für alle $y_h \in Y_h$ ist

$$0 \leq \|\Pi y + y\|_Y^2 = \|\Pi y\|_Y^2 - \|y\|_Y^2 = \|\Pi y\|_Y^2 - 1.$$

Zu einem beliebigen $x_h \in X_h$ mit $\|x_h\|_X = 1$ existiert nach **(A2)** ein $y \in Y$ mit

$$0 < \beta \leq |b(x_h, y)| / \|y\|_Y.$$

Aus $b(x_h, y) \neq 0$ folgt $\Pi y \neq 0$. Daher ist

$$0 < \beta \leq |b(x_h, y)| / \|y\|_Y \leq \|\Pi\| |b(x_h, y)| / \|\Pi y\|_Y = \|\Pi\| |b(x_h, \Pi y)| / \|\Pi y\|_Y.$$

Folglich wird **(dA2)** mit $\beta / \|\Pi\| \leq \beta_h$ erfüllt. \square

Das Residuum $\eta_h := R_{Y_h}^{-1}(Bx_h - F)$ lässt sich aufgrund der Eigenschaft $\|\eta_h\|_Y = \|Bx_h - F\|_{Y_h^*}$ als Fehlerschätzer nutzen. Zusammen mit dem Fortin-Operators Π ist dieser Schätzer, wie der folgende Satz zeigt, zuverlässig und effizient. Dabei ist es gleich, ob $x_h \in X_h$ die diskrete Lösung oder beliebiges Element in X_h ist.

Satz 6.2.3 (Zuverlässigkeit und Effizienz). *Sind (A1)-(A3) erfüllt, so gilt für das zu $x_h \in X_h$ gehörende Residuum $\eta_h := R_{Y_h}^{-1}(Bx_h - F)$ und den Datenapproximationsfehler $\text{osc}(F) := \|F \circ (1 - \Pi)\|_{Y^*}$, dass*

$$\begin{aligned} \|\eta_h\|_Y &\leq \|b\| \|x - x_h\|_X, \\ \beta^2 \|x - x_h\|_X^2 &\leq \|\eta_h\|_Y^2 + (\|\Pi\| \|\eta_h\|_Y + \text{osc}(F))^2, \\ \text{osc}(F) &\leq \|b\| \|I - \Pi\| \min_{\xi_h \in X_h} \|x - \xi_h\|_X. \end{aligned}$$

Beweis. [CDG14, Theorem 2.1] \square

Bemerkung 6.2.4 (Berechnung der Lösung). Im m -dimensionalen diskreten Raum Y_h lässt sich $y_h \in Y_h$ darstellen durch einen Vektor $y = (y^1, \dots, y^m)^\top \in \mathbb{K}^m$, sodass mit der Basis ζ_k für $k = 1, \dots, m$ von Y_h gilt,

$$y_h = \sum_{k=1}^m y^k \zeta_k.$$

Für $x_h \in X_h$ existiert eine entsprechende Darstellung als Vektor $x \in \mathbb{K}^n$ im n -dimensionalen Raum X_h mit Basis θ_k für $k = 1, \dots, n$. Mit den Matrizen $\mathbf{G} \in \mathbb{K}^{m \times m}$ und $\mathbf{B} \in \mathbb{K}^{m \times n}$, definiert durch

$$\begin{aligned} (\mathbf{G})_{kl} &= (\zeta_k, \zeta_l)_Y && \text{für } k, l = 1, \dots, m, \\ (\mathbf{B})_{kl} &= b(\theta_k, \zeta_l) && \text{für } k = 1, \dots, m \text{ sowie } l = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

und dem Vektor $\mathbf{F} \in \mathbb{K}^m$ mit $\mathbf{F}_k = F(\zeta_k)$, $k = 1, \dots, m$, lässt sich das diskrete Sattelpunktproblem (6.5) schreiben als

$$\begin{aligned} \mathbf{G}\eta_h - \mathbf{B}x_h &= -\mathbf{F}, \\ \mathbf{B}^\top \eta_h &= 0. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Das Gleichungssystem (6.6) lässt sich umformen zu

$$\begin{aligned} \eta_h &= \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{B}x_h - \mathbf{F}), \\ \mathbf{B}^\top \mathbf{G}^{-1} \mathbf{B}x_h &= \mathbf{B}^\top \mathbf{G}^{-1} \mathbf{F}. \end{aligned}$$

Damit sich \mathbf{G} gut invertieren lässt, ist es von Vorteil, wenn die Matrix die Struktur einer Blockdiagonalmatrix hat. Daher wird der Raum Y_h in der Praxis so definiert, dass die Basisfunktionen ζ_k mit $k = 1, \dots, m$ nur auf einem Element der Triangulierung definiert sind. Aus diesem Grund werden in Abschnitt 6.3 gebrochene Räume eingeführt.

6.3. Gebrochene Räume

Ist \mathcal{T} eine reguläre Triangulierung des Gebiets Ω (vgl. Definition 5.1.2), so lassen sich gebrochene Räume sowie dessen Spuren auf dem Skelett $\partial\mathcal{T} := \bigcup_{T \in \mathcal{T}} \bigcup_{f \in \mathcal{F}(T)} f$ definieren.

Definition 6.3.1 (Gebrochene $H(\text{curl})$ -Funktionen). Der Raum der gebrochenen $H(\text{curl})$ -Funktionen ist definiert als

$$H(\text{curl}, \mathcal{T}; \mathbb{K}^3) := \{F \in L^2(\Omega; \mathbb{K}^3) \mid \text{für alle } T \in \mathcal{T} \text{ ist } F|_T \in H(\text{curl}, T; \mathbb{K}^3)\}.$$

Um zu verdeutlichen, dass die Stetigkeitseigenschaften von Elementen aus $H(\text{curl}, \mathcal{T}; \mathbb{C}^3)$ nicht global gegeben sind, werden sie durch den Index pw gekennzeichnet. Ferner wird mit dem Operator curl_{NC} die elementweise Anwendung des curl-Operators bezeichnet, d.h., $\text{curl}_{\text{NC}} : H(\text{curl}, \mathcal{T}; \mathbb{K}^3) \rightarrow L^2(\Omega; \mathbb{K}^3)$ mit $(\text{curl}_{\text{NC}} F^{\text{pw}})|_T := \text{curl } F^{\text{pw}}|_T$ für alle $T \in \mathcal{T}$. So lässt sich für $F^{\text{pw}}, G^{\text{pw}} \in H(\text{curl}, \mathcal{T}; \mathbb{K}^3)$ das Skalarprodukt $(\bullet, \bullet)_{H(\text{curl}, \mathcal{T})}$ schreiben als

$$\begin{aligned} (F^{\text{pw}}, G^{\text{pw}})_{H(\text{curl}, \mathcal{T})} &:= \sum_{T \in \mathcal{T}} (F^{\text{pw}}|_T, G^{\text{pw}}|_T)_{H(\text{curl}, T)} \\ &= (\text{curl}_{\text{NC}} F^{\text{pw}}, \text{curl}_{\text{NC}} G^{\text{pw}})_{L^2(\Omega)} + (F^{\text{pw}}, G^{\text{pw}})_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Die durch $(\bullet, \bullet)_{H(\text{curl}, \mathcal{T})}$ induzierte Norm wird mit $\|\bullet\|_{H(\text{curl}, \mathcal{T})}$ bezeichnet.

Definition 6.3.2 (Gebrochene Spurooperatoren). Auf jedem Element $T \in \mathcal{T}$ lassen sich die Spurooperatoren γ_τ^T und π_τ^T entsprechend der Sätze 3.3.4 und 3.3.12 definieren. Folglich können Operatoren

$$\begin{aligned}\gamma_\tau^T : H(\text{curl}, \mathcal{T}; \mathbb{K}^3) &\rightarrow \prod_{T \in \mathcal{T}} H^{-1/2}(\text{div}_{\partial T}, \partial T; \mathbb{K}^3), \\ \pi_\tau^T : H(\text{curl}, \mathcal{T}; \mathbb{K}^3) &\rightarrow \prod_{T \in \mathcal{T}} H^{-1/2}(\text{curl}_{\partial T}, \partial T; \mathbb{K}^3)\end{aligned}$$

für $F^{\text{pw}}, G^{\text{pw}} \in H(\text{curl}, \mathcal{T}; \mathbb{K}^3)$ definiert werden durch

$$\begin{aligned}\gamma_\tau^T F^{\text{pw}} &:= (\hat{f}_T)_{T \in \mathcal{T}} \quad \text{mit } \hat{f}_T := \gamma_\tau^T F^{\text{pw}}|_T, \\ \pi_\tau^T G^{\text{pw}} &:= (\hat{g}_T)_{T \in \mathcal{T}} \quad \text{mit } \hat{g}_T := \pi_\tau^T G^{\text{pw}}|_T.\end{aligned}$$

Die Spuren globaler $H(\text{curl}, \Omega; \mathbb{C}^3)$ -Funktionen werden bezeichnet als

$$\begin{aligned}H^{-1/2}(\text{div}_{\partial \mathcal{T}}, \partial \mathcal{T}; \mathbb{K}^3) &:= \gamma_\tau^T(H(\text{curl}, \Omega; \mathbb{K}^3)) \subset \prod_{T \in \mathcal{T}} H^{-1/2}(\text{div}_{\partial T}, \partial T; \mathbb{K}^3), \\ H^{-1/2}(\text{curl}_{\partial \mathcal{T}}, \partial \mathcal{T}; \mathbb{K}^3) &:= \pi_\tau^T(H(\text{curl}, \Omega; \mathbb{K}^3)) \subset \prod_{T \in \mathcal{T}} H^{-1/2}(\text{curl}_{\partial T}, \partial T; \mathbb{K}^3).\end{aligned}$$

Wendet man die Resultate und Definitionen aus Abschnitt 3.3 auf jedem Tetraeder $T \in \mathcal{T}$ an, so lassen sie sich übertragen.

Satz 6.3.3. *Der Raum $H(\text{curl}, \mathcal{T}; \mathbb{K}^3)$ bildet mit dem Skalarprodukt $(\bullet, \bullet)_{H(\text{curl}, \mathcal{T})}$ einen Hilbertraum.*

Satz 6.3.4. *Der Raum $H^{-1/2}(\text{div}_{\partial \mathcal{T}}, \partial \mathcal{T}; \mathbb{K}^3)$ ist ein Hilbertraum.*

Satz 6.3.5 (partielle Integration für den gebrochen Raum). *Für $F^{\text{pw}}, G^{\text{pw}} \in H(\text{curl}, \mathcal{T}; \mathbb{K}^3)$ gilt die partielle Integrationsformel*

$$\begin{aligned}\langle \pi_\tau^T F^{\text{pw}}, \gamma_\tau^T G^{\text{pw}} \rangle_{\partial \mathcal{T}} &:= \sum_{T \in \mathcal{T}} \langle \pi_\tau^T F^{\text{pw}}|_T, \gamma_\tau^T G^{\text{pw}}|_T \rangle_{\partial T} \\ &= (\text{curl}_{\text{NC}} G^{\text{pw}}, F^{\text{pw}})_{L^2(\Omega)} - (G^{\text{pw}}, \text{curl}_{\text{NC}} F^{\text{pw}})_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Definition 6.3.6. Für $\hat{h} = \gamma_\tau^T H$ mit $H \in H(\text{curl}, \mathcal{T}; \mathbb{K}^3)$ ist

$$\nu \times : H^{-1/2}(\text{div}_{\partial \mathcal{T}}, \partial \mathcal{T}; \mathbb{K}^3) \rightarrow H^{-1/2}(\text{curl}_{\partial \mathcal{T}}, \partial \mathcal{T}; \mathbb{K}^3)$$

definiert durch $\hat{h} \mapsto \pi_\tau^T H$.

Lemma 6.3.7 (Dualitätslemma für Spuren auf dem Skelett). *Der Raum $H^{-1/2}(\text{div}_{\partial \mathcal{T}}, \partial \mathcal{T}; \mathbb{K}^3)$ ist ein Hilbertraum mit Dualraum $H^{-1/2}(\text{curl}_{\partial \mathcal{T}}, \partial \mathcal{T}; \mathbb{K}^3)$. Für die Normen*

$$\begin{aligned}\|\hat{h}\|_{H^{-1/2}(\text{div}_{\partial \mathcal{T}}, \partial \mathcal{T})} &:= \inf_{\substack{\tilde{H} \in H(\text{curl}, \Omega; \mathbb{K}^3) \\ \gamma_\tau^T \tilde{H} = \hat{h}}} \|\tilde{H}\|_{H(\text{curl}, \mathcal{T})}, \\ \|\nu \times \hat{h}\|_{H^{-1/2}(\text{curl}_{\partial \mathcal{T}}, \partial \mathcal{T})} &:= \sup_{\substack{\hat{g} \in H^{-1/2}(\text{div}_{\partial \mathcal{T}}, \partial \mathcal{T}; \mathbb{K}^3) \\ \|\hat{g}\|_{H^{-1/2}(\text{div}_{\partial \mathcal{T}}, \partial \mathcal{T})} = 1}} \langle \nu \times \hat{h}, \hat{g} \rangle_{\partial \mathcal{T}} = \sup_{\substack{G \in H(\text{curl}, \mathcal{T}; \mathbb{K}^3) \\ \|G\|_{H(\text{curl}, \mathcal{T})} = 1}} \langle \nu \times \hat{h}, \gamma_\tau^T G \rangle_{\partial \mathcal{T}}\end{aligned}$$

gilt $\|\hat{h}\|_{H^{-1/2}(\text{div}_{\partial \mathcal{T}}, \partial \mathcal{T})} = \|\nu \times \hat{h}\|_{H^{-1/2}(\text{curl}_{\partial \mathcal{T}}, \partial \mathcal{T})}$.

Korollar 6.3.8. *Die Abbildung $\nu \times : H^{-1/2}(\text{div}_{\partial \mathcal{T}}, \partial \mathcal{T}; \mathbb{K}^3) \rightarrow H^{-1/2}(\text{curl}_{\partial \mathcal{T}}, \partial \mathcal{T}; \mathbb{K}^3)$ ist ein isometrischer Isomorphismus. Folglich ist $\pi_\tau^T(H(\text{curl}, \Omega; \mathbb{K}^3)) = H^{-1/2}(\text{curl}_{\partial \mathcal{T}}, \partial \mathcal{T}; \mathbb{K}^3)$.*

6.4. Die kontinuierliche Variationsformulierung

Um die Variationsformulierung für die dPG-Methode zu erhalten, wird das System zweiter Ordnung (4.6) mit einer Testfunktion $F^{\text{pw}} \in H(\text{curl}, \mathcal{T}; \mathbb{C}^3) =: Y$ skalar multipliziert und integriert. Die partielle Integration wird anschließend elementweise durchgeführt und die Spur $\gamma_\tau^T E$ durch $\hat{h} \in H^{-1/2}(\text{div}_{\partial\mathcal{T}}, \partial\mathcal{T}; \mathbb{C}^3)$ ersetzt. Daraus ergibt sich die Sesquilinearform

$$b((E, \hat{h}), F^{\text{pw}}) := (\mu^{-1} \text{curl} E, \text{curl}_{\text{NC}} F^{\text{pw}})_{L^2(\Omega)} - \omega^2 (\kappa E, F^{\text{pw}})_{L^2(\Omega)} + \langle \pi_\tau^T F^{\text{pw}}, \hat{h} \rangle_{\partial\mathcal{T}}.$$

Satz 6.4.1. *Der Testraum $X := H_0(\text{curl}, \Omega; \mathbb{C}^3) \times H^{-1/2}(\text{div}_{\partial\mathcal{T}}, \partial\mathcal{T}; \mathbb{C}^3)$ ist ein Hilbertraum mit Norm*

$$\|(E, \hat{h})\|_X^2 := \|E\|_{H(\text{curl}, \Omega)}^2 + \|\hat{h}\|_{H^{-1/2}(\text{div}_{\partial\mathcal{T}}, \partial\mathcal{T})}^2.$$

Beweis. Der Satz folgt unmittelbar aus den Hilbertraumeigenschaften von $H_0(\text{curl}, \Omega; \mathbb{C}^3)$ und $H^{-1/2}(\text{div}_{\partial\mathcal{T}}, \partial\mathcal{T}; \mathbb{C}^3)$. \square

Zu gegebenem Datum $J^{\text{imp}} \in L^2(\Omega; \mathbb{C}^3)$ ist ein $(E, \hat{h}) \in X$ gesucht, sodass

$$b((E, \hat{h}), F^{\text{pw}}) = i\omega (J^{\text{imp}}, F^{\text{pw}})_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } F^{\text{pw}} \in H(\text{curl}, \mathcal{T}; \mathbb{C}^3). \quad (6.7)$$

Der Existenzbeweis erfolgt entsprechend der abstrakten Vorüberlegungen des vorangegangenen Abschnitts 6.2.

Lemma 6.4.2 (Beschränktheit). *Mit den Konstanten aus (4.8) und (4.15) ist*

$$(A1) \quad \|b\| := \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \sup_{y \in Y \setminus \{0\}} \frac{|b(x, y)|}{\|x\|_X \|y\|_Y} \leq 2^{1/2} \max\{\mu_{\text{inf}}^{-1}, \omega^2 \varepsilon_{\text{sup}} + \omega \sigma_{\text{sup}}\}.$$

Beweis. Für $(E, \hat{h}) \in X$ und $F^{\text{pw}} \in Y$ folgt mittels Cauchy-Schwarz-Ungleichung sowie dem Dualitätslemma (Lemma 6.3.7), dass

$$\begin{aligned} |b((E, \hat{h}), F^{\text{pw}})| &:= |(\mu^{-1} \text{curl} E, \text{curl}_{\text{NC}} F^{\text{pw}}) - \omega^2 (\kappa E, F^{\text{pw}}) + \langle \pi_\tau^T F^{\text{pw}}, \hat{h} \rangle_{\partial\mathcal{T}}| \\ &\leq \mu_{\text{inf}}^{-1} \|\text{curl} E\|_{L^2(\Omega)} \|\text{curl}_{\text{NC}} F^{\text{pw}}\|_{L^2(\Omega)} + (\omega^2 \varepsilon_{\text{sup}} + \omega \sigma_{\text{sup}}) \|E\|_{L^2(\Omega)} \|F^{\text{pw}}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \|\hat{h}\|_{H^{-1/2}(\text{div}_{\partial\mathcal{T}}, \partial\mathcal{T})} \|F^{\text{pw}}\|_{H(\text{curl}, \mathcal{T})} \\ &\leq (\mu_{\text{inf}}^{-2} \|\text{curl} E\|_{L^2(\Omega)}^2 + (\omega^2 \varepsilon_{\text{sup}} + \omega \sigma_{\text{sup}})^2 \|E\|_{L^2(\Omega)}^2)^{1/2} \|F^{\text{pw}}\|_{H(\text{curl}, \mathcal{T})} \\ &\quad + \|\hat{h}\|_{H^{-1/2}(\text{div}_{\partial\mathcal{T}}, \partial\mathcal{T})} \|F^{\text{pw}}\|_{H(\text{curl}, \mathcal{T})} \\ &\leq 2^{1/2} \max\{1, \mu_{\text{inf}}^{-1}, \omega^2 \varepsilon_{\text{sup}} + \omega \sigma_{\text{sup}}\} \|(E, \hat{h})\|_X \|F^{\text{pw}}\|_{H(\text{curl}, \mathcal{T})}. \end{aligned} \quad \square$$

Lemma 6.4.3 (Inf-sup Bedingung). *Unter den Annahmen von Satz 4.4.8 gilt (A2).*

Beweis. Der Beweis erfolgt mit Hilfe des Splitting Lemmas (Lemma 2.2.5). Der Raum X lässt sich aufspalten in

$$(S1) \quad X = H_0(\text{curl}, \Omega; \mathbb{C}^3) \times \{0\} \oplus \{0\} \times H^{-1/2}(\text{div}_{\partial\mathcal{T}}, \partial\mathcal{T}; \mathbb{C}^3).$$

Mit $Y_1 := H_0(\text{curl}, \Omega; \mathbb{C}^3)$ erfüllt die Zerlegung **(S2)**, da für jedes $\hat{h} \in H^{-1/2}(\text{div}_{\partial\mathcal{T}}, \partial\mathcal{T}; \mathbb{C}^3)$ ein $H \in H(\text{curl}, \Omega; \mathbb{C}^3)$ mit $\hat{h} = \gamma_{\mathcal{T}}^T H$ existiert und somit für alle $F \in Y_1$ die Sesquilinearform

$$\begin{aligned} b((0, \hat{h}), F) &= \langle \pi_{\mathcal{T}}^T F, \hat{h} \rangle_{\partial\mathcal{T}} = (\text{curl}_{\text{NC}} H, F)_{L^2(\Omega)} - (H, \text{curl}_{\text{NC}} F)_{L^2(\Omega)} \\ &= (\text{curl} H, F)_{L^2(\Omega)} - (H, \text{curl} F)_{L^2(\Omega)} = \langle \pi_{\mathcal{T}} F, \hat{h} \rangle_{\Gamma} = 0 \end{aligned}$$

ist. Ferner ist nach Satz 4.4.8 Bedingung **(S3)** erfüllt, wobei sich Abschätzungen für die inf-sup-Konstante β_1 in den Sätzen 4.4.9 und 4.4.10 finden lassen. Aus dem Dualitätslemma (Lemma 6.3.7) folgt

$$(S4) \quad 0 < 1 = \beta_2 := \inf_{\hat{h} \in H^{-1/2}(\text{div}_{\partial\mathcal{T}}, \partial\mathcal{T}; \mathbb{C}^3) \setminus \{0\}} \sup_{F^{\text{pw}} \in H(\text{curl}, \mathcal{T}; \mathbb{C}^3) \setminus \{0\}} \frac{|b((E, 0), F)|}{\|(0, \hat{h})\|_X \|F^{\text{pw}}\|_{H(\text{curl}, \mathcal{T})}}.$$

Da sich b_1 durch $\max\{\mu_{\text{inf}}^{-1}, \omega^2 \varepsilon_{\text{sup}} + \omega \sigma_{\text{sup}}\}$ abschätzen lässt, gilt

$$0 < (1 + \beta_1^{-2} + \beta_1^{-2} \max\{\mu_{\text{inf}}^{-1}, \omega^2 \varepsilon_{\text{sup}} + \omega \sigma_{\text{sup}}\}^2)^{-1/2} \leq \beta. \quad \square$$

Lemma 6.4.4 (Eindeutigkeitsbedingung). *Sind die Bedingungen von Satz (4.4.8) erfüllt und gilt für $F^{\text{pw}} \in H(\text{curl}, \mathcal{T}; \mathbb{C}^3)$, dass $b(x, F^{\text{pw}}) = 0$ für alle $x \in X$, so ist $F^{\text{pw}} = 0$.*

Beweis. Ist $F^{\text{pw}} \in H(\text{curl}, \mathcal{T}; \mathbb{C}^3)$ mit $b((E, \hat{h}), F^{\text{pw}}) = 0$ für alle $(E, \hat{h}) \in X$, gilt dies insbesondere für alle Paare $(0, \gamma_{\mathcal{T}}^T \Phi) \in X$ mit $\Phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}^3) \subset H(\text{curl}, \mathcal{T}; \mathbb{C}^3)$. Folglich ist

$$0 = \langle \pi_{\mathcal{T}}^T F^{\text{pw}}, \gamma_{\mathcal{T}}^T \Phi \rangle_{\partial\mathcal{T}} = (\text{curl} \Phi, F^{\text{pw}})_{L^2(\Omega)} - (\Phi, \text{curl}_{\text{NC}} F^{\text{pw}})_{L^2(\Omega)}$$

für alle $\Phi \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}^3)$ und entsprechend der Definition des schwachen curl-Operators in (3.2) die elementweise Rotation $\text{curl}_{\text{NC}} F^{\text{pw}} = \text{curl} F^{\text{pw}}$, d.h., $F^{\text{pw}} =: F \in H(\text{curl}, \Omega; \mathbb{C}^3)$. Ferner impliziert

$$\langle \pi_{\mathcal{T}} F, \gamma_{\mathcal{T}} H \rangle_{\partial\mathcal{T}} = \langle \pi_{\mathcal{T}} F, \gamma_{\mathcal{T}} H \rangle_{\Gamma} = 0 \quad \text{für alle } H \in H(\text{curl}, \Omega; \mathbb{C}^3),$$

dass die Spur $\pi_{\mathcal{T}}^T F$ verschwindet und somit $F \in H_0(\text{curl}, \Omega; \mathbb{C}^3)$ ist. Da $b((E, 0), F) = 0$ für alle $E \in H_0(\text{curl}, \Omega; \mathbb{C}^3)$ ist, löst $F \in H_0(\text{curl}, \Omega; \mathbb{C}^3)$ das Eigenwertproblem

$$(\mu^{-1} \text{curl} E, \text{curl} F)_{L^2(\Omega)} = \omega^2 (\kappa E, F)_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } E \in H_0(\text{curl}, \Omega; \mathbb{C}^3).$$

Nach Satz 4.4.8 ist die einzige Lösung dieser Gleichung $F = 0$. \square

Satz 6.4.5 (Existenz einer eindeutigen Lösung). *Aus den Lemmata 6.4.2 - 6.4.4 folgt die eindeutige Existenz einer Lösung $(E, \hat{h}) \in X$ der kontinuierlichen Variationsgleichung (6.7), wobei mit der Konstanten β aus dem Beweis von Lemma 6.4.3 gilt, dass*

$$\beta \|(E, \hat{h})\|_X \leq \|J\|_{L^2(\Omega)}.$$

Beweis. Satz 2.2.3 (Babuška-Lax-Milgram). \square

6.5. Die Diskretisierung der Räume

Nun gilt es, eine möglichst gute Näherung der Lösung mittels Diskretisierung der Räume zu berechnen. Dabei ist die Wahl geeigneter Ansatzräume

$$X_h = X_h^1 \times \gamma_\tau^T X_h^2 \subset H_0(\text{curl}, \Omega; \mathbb{C}^3) \times \gamma_\tau^T H(\text{curl}, \Omega; \mathbb{C}^3)$$

und Testräume $Y_h \subset H(\text{curl}, \mathcal{T}; \mathbb{C}^3)$ von vornherein nicht klar. In [CDG15] wird ein Testraum Y_h vorgeschlagen, dessen Polynomgrad dreimal höher als der von X_h^1 und zweimal höher als der von $\gamma_\tau^T X_h^2$ ist. So kann die Existenz des Fortin-Operators in **(A3)** nachgewiesen werden und entsprechend Bemerkung 6.2.2 ein von der Anfangsgitterweite h unabhängiges Konvergenzresultat bewiesen werden. Andererseits resultieren die großen Testräume in einem sehr hohen Berechnungsaufwand. Dem gegenüber steht die Arbeit [CGHW14], in der nachgewiesen wird, dass für das Poisson-Problem der Polynomgrad des Testraums dem des Ansatzraums entsprechen kann und trotzdem **(dA2)** erfüllt wird. So werden im Folgenden verschiedene Wahlmöglichkeiten des Ansatz- und Testraums analysiert und diskutiert. Hauptziel ist der Nachweis von **(A3)**, d.h., der Nachweis der Existenz eines Operators $\Pi \in L(Y; Y_h)$ mit

$$b(x_h, \Pi F^{\text{pw}}) = b(x_h, F^{\text{pw}}) \quad \text{für alle } x_h \in X_h.$$

Zum Nachweis dieser Bedingung lässt sich die Sesquilinearform $b(\bullet, \bullet)$ mittels der partiellen Integration aus Satz 6.3.5 aufspalten in

$$\begin{aligned} b_{\text{vol}}(E_h, F^{\text{pw}}) &= (\mu^{-1} \text{curl } E_h, \text{curl}_{\text{NC}} F^{\text{pw}})_{L^2(\Omega)} - \omega^2 (\kappa E_h, F^{\text{pw}})_{L^2(\Omega)} \quad \text{für } E_h \in X_h^1, F^{\text{pw}} \in Y, \\ b_{\text{tr}}(H_h, F^{\text{pw}}) &= (\text{curl } H_h, F^{\text{pw}})_{L^2(\Omega)} - (H_h, \text{curl}_{\text{NC}} F^{\text{pw}})_{L^2(\Omega)} \quad \text{für } H_h \in X_h^2, F^{\text{pw}} \in Y, \end{aligned}$$

sodass

$$b((E_h, \gamma_\tau^T H_h), F^{\text{pw}}) = b_{\text{vol}}(E_h, F^{\text{pw}}) + b_{\text{tr}}(H_h, F^{\text{pw}}).$$

Definition 6.5.1. Die Bedingung **(A3_{tr})** wird erfüllt, falls ein Operator $\Pi_{\text{tr}} \in L(Y; Y_h)$ existiert, sodass

$$b_{\text{tr}}(H_h, \Pi_{\text{tr}} F^{\text{pw}}) = b_{\text{tr}}(H_h, F^{\text{pw}}) \quad \text{für alle } H_h \in X_h^2.$$

Definition 6.5.2. Mit \tilde{Y}_h wird der Kern

$$\tilde{Y}_h := \{F_h^{\text{pw}} \in Y_h \mid b_{\text{tr}}(H_h, F_h^{\text{pw}}) = 0 \text{ für alle } H_h \in X_h^2\}$$

bezeichnet. Die Bedingung **(A3_{vol})** wird erfüllt, falls ein Operator $\Pi_{\text{vol}} \in L(Y; \tilde{Y}_h)$ existiert, sodass

$$b_{\text{vol}}(H_h, \Pi_{\text{vol}} F^{\text{pw}}) = b_{\text{vol}}(H_h, F^{\text{pw}}) \quad \text{für alle } H_h \in X_h^1.$$

Satz 6.5.3. **(A3_{tr})** und **(A3_{vol})** implizieren **(A3)**.

Beweis. Erfüllen die Operatoren Π_{tr} und Π_{vol} die Bedingungen **(A3_{tr})** bzw. **(A3_{vol})**, so erfüllt $\Pi : Y \rightarrow Y_h$ mit $F^{\text{pw}} \mapsto \Pi_{\text{tr}} F^{\text{pw}} + \Pi_{\text{vol}}(F^{\text{pw}} - \Pi_{\text{tr}} F^{\text{pw}})$ die Bedingung **(A3)**, denn für alle $E_h \in X_h^1, H_h \in X_h^2$ ist

$$\begin{aligned} b_{\text{tr}}(H_h, \Pi F^{\text{pw}}) &= b_{\text{tr}}(H_h, \Pi_{\text{tr}} F^{\text{pw}}) = b_{\text{tr}}(H_h, F^{\text{pw}}), \\ b_{\text{vol}}(E_h, \Pi F^{\text{pw}}) &= b_{\text{vol}}(E_h, \Pi_{\text{tr}} F^{\text{pw}} + \Pi_{\text{vol}} F^{\text{pw}}) - b_{\text{vol}}(E_h, \Pi_{\text{vol}} \Pi_{\text{tr}} F^{\text{pw}}) = b_{\text{vol}}(E_h, F^{\text{pw}}). \end{aligned}$$

Die Norm $\|\Pi\|$ lässt sich abschätzen durch

$$\|\Pi\| \leq \|\Pi_{\text{tr}}\| + \|\Pi_{\text{vol}}\| \|I - \Pi_{\text{tr}}\| < \infty. \quad \square$$

Bemerkung 6.5.4. Der Ansatz korrespondiert mit dem Splitting Lemma (Lemma 2.2.5). Der Raum X_h wird gespalten in $X_h = \{0\} \times \gamma_\tau^T X_h^2 \oplus X_h^1 \times \{0\}$ **(S1)**. Der Unterraum $\tilde{Y}_h \subset Y_h$ ist gerade so definiert, dass **(S2)** erfüllt wird. Die Wohldefiniertheit von Π_{tr} ist äquivalent zu **(S4)**, die von Π_{vol} ist äquivalent zu **(S3)**.

Bemerkung 6.5.5. Um das Ergebnis durch eine Verfeinerung der Triangulierung verbessern zu können, muss die Norm von Π (und somit auch von Π_{tr} und Π_{vol}) unabhängig von der Gitterweite nach oben beschränkt sein.

6.5.1. Ansatz 1

Die ersten Ansatz- und Testfunktionen werden mittels des Nédélec-Elements erster Art niedrigster Ordnung definieren. So ist

$$\begin{aligned} X_h &:= \mathcal{N}_0^1(\mathcal{T}) \times \gamma_\tau^T \mathcal{N}^1(\mathcal{T}), \\ Y_h &:= \{F_h^{\text{pw}} \in H(\text{curl}, \mathcal{T}; \mathbb{C}^3) \mid F_h^{\text{pw}}|_T \in R_1 \text{ für alle } T \in \mathcal{T}\}. \end{aligned}$$

Nachweis von (A3_{tr})

Die Existenz von Π_{tr} ist äquivalent zum Variationsproblem: Finde zu gegebenem $f \in (\mathcal{N}^1(\mathcal{T}))^*$ ein $F_h^{\text{pw}} \in Y_h$, sodass

$$b_{\text{tr}}(H_h, F_h^{\text{pw}}) = f(H_h) \quad \text{für alle } H_h \in \mathcal{N}^1(\mathcal{T}).$$

Da die Sesquilinearform beschränkt ist, lässt sich die Wohlgestelltheit mittels Satz 2.2.3 (Babuška-Lax-Milgram) durch die inf-sup-Bedingung

$$0 < \beta_{\text{tr}} := \inf_{H_h \in \mathcal{N}^1(\mathcal{T}) \setminus \{0\}} \sup_{F_h^{\text{pw}} \in Y_h} \frac{|b_{\text{tr}}(H_h, F_h^{\text{pw}})|}{\|H_h\|_{H(\text{curl}, \Omega)} \|F_h^{\text{pw}}\|_{H(\text{curl}, \mathcal{T})}}$$

nachweisen. Dazu werden lokale Beiträge betrachten, d.h., man maximiert zu gegebenem $H_h \in \mathcal{N}^1(\mathcal{T})$ auf jedem $T \in \mathcal{T}$ mit $H_T := H_h|_T \in \mathcal{N}^1(T)$ den Ausdruck

$$b_{\text{tr}}^T(H_T, F_T^{\text{pw}}) := (\text{curl } F_T^{\text{pw}}, H_T)_{L^2(T)} - (F_T^{\text{pw}}, \text{curl } H_T)_{L^2(T)}$$

über $F_T^{\text{pw}} \in \mathcal{N}^1(T)$ mit $\|F_T^{\text{pw}}\|_{H(\text{curl}, \Omega)} = 1$. Zuerst handelt es sich beim Tetraeder T um das Referenzdreieck $\hat{T} := \text{conv}\{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. Anschließend wird das Resultat mittels Koordinatentransformation auf beliebige Tetraeder $T \in \mathcal{T}$ verallgemeinert.

Lemma 6.5.6. Für das Referenzdreieck $T = \hat{T}$ gilt

$$0,76 \leq \beta_{\text{tr}}^{\hat{T}} := \inf_{H_T \in \mathcal{N}^1(\hat{T}) \setminus \{0\}} \sup_{F_T^{\text{pw}} \in \mathcal{N}^1(\hat{T}) \setminus \{0\}} \frac{|b_{\text{tr}}^{\hat{T}}(H_T, F_T^{\text{pw}})|}{\|H_T\|_{H(\text{curl}, \hat{T})} \|F_T^{\text{pw}}\|_{H(\text{curl}, \hat{T})}}.$$

Beweis. Entsprechend der Definition 5.2.1 bildet

$$\psi_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \psi_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \psi_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \psi_4 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \bullet, \psi_5 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \bullet, \psi_6 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \bullet$$

eine Basis von $\mathcal{N}d^1(\hat{T})$. So lassen sich Funktionen $F_T^{\text{pw}}, H_T \in \mathcal{N}d^1(\hat{T})$ durch Vektoren $F = (F^1, \dots, F^6)^\top, H = (H^1, \dots, H^6)^\top \in \mathbb{C}^6$ darstellen als

$$F_T^{\text{pw}} = \sum_{k=1}^6 F^k \psi_k \quad \text{und} \quad H_T = \sum_{k=1}^6 H^k \psi_k.$$

Definiert man die Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ mittels $(\mathbf{A})_{kl} := b_{\text{tr}}^{\hat{T}}(\psi_k, \psi_l)$ für $k, l = 1, \dots, 6$, so gilt $b_{\text{tr}}^{\hat{T}}(H_T, F_T^{\text{pw}}) = H^\top \mathbf{A} \bar{F}$. Ferner lässt sich die Norm durch die Matrix $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ mit $(\mathbf{M})_{kl} = (\psi_k, \psi_l)_{H(\text{curl}, \hat{T})}$ für $k, l = 1, \dots, 6$ bestimmen, denn $\|F_T^{\text{pw}}\|_{H(\text{curl}, \hat{T})}^2 = F^\top \mathbf{M} \bar{F}$. Berechnungen ergeben

$$\mathbf{A} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \frac{1}{120} \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & 20 & 0 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 20 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 84 & -1 & -1 \\ 5 & 0 & -5 & -1 & 84 & -1 \\ -5 & 5 & 0 & -1 & -1 & 84 \end{pmatrix}.$$

Die inf-sup-Konstante $\beta_{\text{tr}}^{\hat{T}}$ wird mit der Wahl von $F = \mathbf{A}H$ abgeschätzt durch

$$\min_{\substack{H \in \mathbb{C}^6 \\ H^\top \mathbf{M} \bar{H} = 1}} \frac{\mathbf{A}H \cdot \mathbf{A}H}{(\mathbf{A}H \cdot \mathbf{M} \mathbf{A}H)^{1/2}} \leq \min_{\substack{H \in \mathbb{C}^6 \\ H^\top \mathbf{M} \bar{H} = 1}} \max_{F \in \mathbb{C}^6 \setminus \{0\}} \frac{|F^\top \mathbf{A} \bar{H}|}{(F^\top \mathbf{M} \bar{F})^{1/2}} = \beta_{\text{tr}}^{\hat{T}}. \quad (6.8)$$

Die Lösung des Minimierungsproblems der linken Seite lässt sich berechnen. Mathematica ergab mit der Eingabe

```
NMinimize[{(A.{x1, x2, x3, x4, x5, x6}).(A.{x1, x2, x3, x4, x5, x6})/
Sqrt[(A.{x1, x2, x3, x4, x5, x6}).((M.A).{x1, x2, x3, x4, x5,
x6})], {x1, x2, x3, x4, x5, x6}.M.{x1, x2, x3, x4, x5, x6} ==
1}, {x1, x2, x3, x4, x5, x6}]
```

das Minimum 0,761905. Dass hierbei nur über \mathbb{R}^6 und nicht über \mathbb{C}^6 minimiert wurde, ist irrelevant, da sich das komplexe Minimierungsproblem mit $H = H_{\Re} + iH_{\Im}$ mit $H_{\Re}, H_{\Im} \in \mathbb{R}^6$ darstellen lässt als

$$\min_{\substack{H_{\Re}, H_{\Im} \in \mathbb{R}^6, \\ H_{\Re}^\top \mathbf{M} H_{\Re} + H_{\Im}^\top \mathbf{M} H_{\Im} = 1}} \frac{\mathbf{A}H_{\Re} \cdot \mathbf{A}H_{\Re} + \mathbf{A}H_{\Im} \cdot \mathbf{A}H_{\Im}}{(\mathbf{A}H_{\Re} \cdot \mathbf{M} \mathbf{A}H_{\Re} + \mathbf{A}H_{\Im} \cdot \mathbf{M} \mathbf{A}H_{\Im})^{1/2}}.$$

Dieser Ausdruck wird minimal, wenn es sich bei H_{\Re} und H_{\Im} um Vielfache der Minimalstelle H_{\min} des reellwertigen Problems handelt, d.h., es existieren Konstanten α_1 und α_2 in \mathbb{R} mit $\alpha_1 H_{\Re} = H_{\min}$ und $\alpha_2 H_{\Im} = H_{\min}$. Dabei gilt $(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) H_{\min}^\top \mathbf{M} H_{\min} = 1$ und somit $(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) = 1$. Nach Einsetzen in den Bruch lässt sich $(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)$ herauskürzen und man erkennt die Äquivalenz zum Minimierungsproblem über \mathbb{R}^6 . \square

Bemerkung 6.5.7. Für symmetrische Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{M} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ entspricht die Konstante $\beta_{\text{tr}}^{\hat{T}}$ aus (6.8) dem kleinsten Singulärwert $\lambda \geq 0$ mit $\mathbf{A}x = \lambda \mathbf{M}x$ für ein $x \in \mathbb{R}^6 \setminus \{0\}$ [SB05, Satz (Courant, Weyl)]. Folglich könnte $\beta_{\text{tr}}^{\hat{T}}$ schnell berechnet werden. Jedoch ist, unabhängig von der Wahl der Basis, \mathbf{A} mit $(\mathbf{A})_{kl} := b_{\text{tr}}^{\hat{T}}(\psi_k, \psi_l)$ für $k, l = 1, \dots, 6$ und $T \in \mathcal{T}$ niemals symmetrisch, da $b_{\text{tr}}^{\hat{T}}(H_T, H_T) = 0$ für alle $H_T \in \mathcal{N}d^1(\hat{T})$. Somit sind alle Eigenwerte von \mathbf{A} gleich null. Die einzige symmetrische Matrix mit dieser Eigenschaft ist $0 \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$.

Bemerkung 6.5.8. Auch wenn die $\beta_{\text{tr}}^{\hat{T}}$ in (6.8) unabhängig von der Wahl der Basis ist, ist es die untere Schranke

$$\min_{\substack{H \in \mathbb{C}^6 \\ H^\top \mathbf{M} H = 1}} \frac{\mathbf{A}H \cdot \mathbf{A}H}{(\mathbf{A}H \cdot \mathbf{M}AH)^{1/2}}$$

nicht. Mit der Basis aus Abbildung 5.1 ergeben sich

$$\mathbf{A} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \frac{1}{120} \begin{pmatrix} 170 & 80 & 0 & 75 & -75 & 80 \\ 80 & 84 & -1 & 0 & -80 & 1 \\ 0 & -1 & 84 & 80 & 80 & 1 \\ 75 & 0 & 80 & 170 & 75 & 80 \\ -75 & -80 & 80 & 75 & 170 & 0 \\ 80 & 1 & 1 & 80 & 0 & 84 \end{pmatrix}.$$

Das mit Mathematica berechnete Ergebnis lautet 0,242424 und ist somit wesentlich schlechter als das zuvor berechnete.

Das Lemma wird nun mittels affiner Koordinatentransformation $\Phi_T : \hat{T} \rightarrow T$ für beliebige Tetraeder $T \in \mathcal{T}$ erweitert. Dabei ist $\Phi_T(\hat{T}) = T$ und $\Phi_T x = \mathbf{B}_T x + B_T$ mit einer nichtsingulären Matrix $\mathbf{B}_T \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ und einem Vektor $B_T \in \mathbb{R}^3$. Ferner behält die Abbildung die Orientierung bei, d.h., die Determinante $\det(\mathbf{B}_T) > 0$.

Bemerkung 6.5.9. Aus dem Transformationssatz [For12, Seite 103 Satz 1] folgt

$$|T| = \int_T dx = \int_{\hat{T}} |\det(\mathbf{B}_T)| dx = |\hat{T}| |\det(\mathbf{B}_T)| = |\det(\mathbf{B}_T)|/6.$$

Bemerkung 6.5.10. Mit dem kleinsten und dem größten Eigenwert $0 < \lambda_{\min}(\mathbf{B}^\top \mathbf{B}) \leq \lambda_{\max}(\mathbf{B}^\top \mathbf{B}) < \infty$ von $\mathbf{B}^\top \mathbf{B}$ ist $\lambda_{\min}(\mathbf{B}^\top \mathbf{B})x \cdot x \leq x^\top \mathbf{B}^\top \mathbf{B}x \leq \lambda_{\max}(\mathbf{B}^\top \mathbf{B})x \cdot x$. Mit anderen Worten ist die euklidische Norm

$$\lambda_{\min}(\mathbf{B}^\top \mathbf{B})\|x\|_2^2 \leq \|\mathbf{B}x\|_2^2 \leq \lambda_{\max}(\mathbf{B}^\top \mathbf{B})\|x\|_2^2,$$

sodass die Eigenwerte die maximale Stauchung bzw. Streckung eines Vektors $x \in \mathbb{R}^3$ durch die Transformation Φ_T repräsentieren.

Satz 6.5.11. Für $T \in \mathcal{T}$ lässt sich die Konstante

$$\beta_{\text{tr}}^T := \inf_{H_T \in \mathcal{N}d^1(T) \setminus \{0\}} \sup_{F_T^{\text{pw}} \in \mathcal{N}d^1(T) \setminus \{0\}} \frac{|b_{\text{tr}}^T(H_T, F_T^{\text{pw}})|}{\|H_T\|_{H(\text{curl}, T)} \|F_T^{\text{pw}}\|_{H(\text{curl}, T)}}$$

abschätzen durch $\min\{6|T|(\lambda_{\max}(\mathbf{B}^\top \mathbf{B}))^{-1}, (6|T|)^{-1}\lambda_{\min}(\mathbf{B}^\top \mathbf{B})\}\beta_{\text{tr}}^{\hat{T}} \leq \beta_{\text{tr}}^T$.

Beweis. Ist $H_T \in \mathcal{N}d^1(T)$ beliebig, so lässt sich entsprechend der Transformation in [Mon03, (5.33)] ein $H_{\hat{T}} \in \mathcal{N}d^1(\hat{T})$ definieren durch $H_{\hat{T}} := \mathbf{B}_T^\top H_T \circ \Phi_T$. Nach [Mon03, (5.34)] gilt für die Rotation $\operatorname{curl} H_T = (\det(\mathbf{B}_T))^{-1} \mathbf{B}_T \operatorname{curl} H_{\hat{T}}$. Lemma 6.5.6 impliziert die Existenz eines $F_{\hat{T}}^{\text{pw}} \in \mathcal{N}d^1(\hat{T}) \setminus \{0\}$, sodass

$$\beta_{\text{tr}}^{\hat{T}} \|H_{\hat{T}}\|_{H(\operatorname{curl}, \hat{T})} \|F_{\hat{T}}^{\text{pw}}\|_{H(\operatorname{curl}, \hat{T})} \leq a_{\hat{T}}(H_{\hat{T}}, F_{\hat{T}}^{\text{pw}}).$$

Wird $F_T^{\text{pw}} \in \mathcal{N}d^1(T)$ definiert durch $\mathbf{B}_T^{-\top} F_T^{\text{pw}} = F_{\hat{T}}^{\text{pw}} \circ \Phi_T$, ergibt sich aus dem Transformationssatz

$$\begin{aligned} \int_T \operatorname{curl} H_T \cdot F_T^{\text{pw}} \, dx &= \int_{\hat{T}} \operatorname{curl} H_T \cdot F_T^{\text{pw}} \circ \Phi_T |\det(\mathbf{B}_T)| \, dx \\ &= \int_{\hat{T}} \mathbf{B}_T \operatorname{curl} H_{\hat{T}} \cdot \mathbf{B}_T^{-\top} F_{\hat{T}}^{\text{pw}} \, dx = \int_{\hat{T}} \operatorname{curl} H_{\hat{T}} \cdot F_{\hat{T}}^{\text{pw}} \, dx \end{aligned}$$

und somit $b_{\text{tr}}^T(H_T, F_T^{\text{pw}}) = b_{\text{tr}}^{\hat{T}}(H_{\hat{T}}, F_{\hat{T}}^{\text{pw}})$. Ferner ist

$$\begin{aligned} \|\operatorname{curl} H_T\|_{L^2(T)}^2 &= \int_T \operatorname{curl} H_T \cdot \operatorname{curl} H_T \, dx = \det(\mathbf{B}_T)^{-1} \int_{\hat{T}} \mathbf{B}_T \operatorname{curl} H_{\hat{T}} \cdot \mathbf{B}_T \operatorname{curl} H_{\hat{T}} \, dx, \\ \|H_T\|_{L^2(T)}^2 &= \int_T H_T \cdot H_T \, dx = \det(\mathbf{B}_T) \int_{\hat{T}} \mathbf{B}_T^{-\top} H_{\hat{T}} \cdot \mathbf{B}_T^{-\top} H_{\hat{T}} \, dx. \end{aligned}$$

Durch den kleinsten und größten Eigenwert $0 < \lambda_{\min}(\mathbf{B}^\top \mathbf{B}) \leq \lambda_{\max}(\mathbf{B}^\top \mathbf{B}) < \infty$ von $\mathbf{B}^\top \mathbf{B}$ lassen sich die Normen von H_T und F_T^{pw} durch $H_{\hat{T}}$ bzw. $F_{\hat{T}}^{\text{pw}}$ abschätzen. Dabei wird ausgenutzt, dass der größte Eigenwert von $\mathbf{B}^{-\top} \mathbf{B}^{-1}$ dem Wert $\lambda_{\min}(\mathbf{B}^\top \mathbf{B})^{-1}$ entspricht. Es gilt

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{B}_T) \|\operatorname{curl} H_T\|_{L^2(T)}^2 &\leq \lambda_{\max}(\mathbf{B}^\top \mathbf{B}) \|\operatorname{curl} H_{\hat{T}}\|_{L^2(\hat{T})}^2, \\ \det(\mathbf{B}_T)^{-1} \|H_T\|_{L^2(T)}^2 &\leq \lambda_{\min}(\mathbf{B}^\top \mathbf{B})^{-1} \|H_{\hat{T}}\|_{L^2(\hat{T})}^2. \end{aligned}$$

Somit ist

$$\min\{\det(\mathbf{B}_T) \lambda_{\max}(\mathbf{B}^\top \mathbf{B})^{-1}, \det(\mathbf{B}_T)^{-1} \lambda_{\min}(\mathbf{B}^\top \mathbf{B})\} \|H_T\|_{H(\operatorname{curl}, T)}^2 \leq \|H_{\hat{T}}\|_{H(\operatorname{curl}, \hat{T})}^2.$$

Da sich diese Abschätzung auf F_T^{pw} und $F_{\hat{T}}^{\text{pw}}$ übertragen lässt, ergibt sich aus $\det(\mathbf{B}_T) = 6|T|$ die Aussage des Satzes. \square

Bemerkung 6.5.12. Ist die Verfeinerung der Triangulierung formregulär, so ist mit $h_T := \operatorname{diam}(T)$ das Tetraeder $|T| \approx h_T^3$ für alle $T \in \mathcal{T}$. Gleichzeitig gilt

$$\lambda_{\min}(\mathbf{B}^\top \mathbf{B}) \approx \lambda_{\max}(\mathbf{B}^\top \mathbf{B}) \approx h_T^2.$$

Satz 6.5.11 besagt somit $\min\{h_T, h_T^{-1}\} \lesssim \beta_{\text{tr}}^T$. Dies ist ungünstig, da die Konstante auch für sich verändernde Gitterweiten von 0 weg beschränkt sein sollte. Auch in [CDG15] tritt dieses Problem auf und wird umgangen, indem die Norm $\|\bullet\|_{H(\operatorname{curl}, T)}$ im Beweis von Theorem 5.1 skaliert wird zu

$$h_T^{-2} \|\bullet\|_{L^2(T)}^2 + \|\operatorname{curl} \bullet\|_{L^2(T)}^2.$$

Nachweis von (A3_{vol})

Bedingung (A3_{vol}) ist äquivalent zum Variationsproblem: Finde zu gegebenem $f \in (\mathcal{N}d_0^1(\mathcal{T}))^*$ ein $\tilde{F}_h^{\text{pw}} \in \tilde{Y}_h$, sodass

$$b_{\text{vol}}(E_h, \tilde{F}_h^{\text{pw}}) = f(E_h) \quad \text{für alle } E_h \in \mathcal{N}d_0^1(\mathcal{T}).$$

Erneut ließe sich dies mittels der inf-sup-Bedingung

$$0 < \beta_{\text{vol}} := \inf_{E_h \in \mathcal{N}d_0^1(\mathcal{T}) \setminus \{0\}} \sup_{\tilde{F}_h^{\text{pw}} \in \tilde{Y}_h \setminus \{0\}} \frac{|b_{\text{vol}}(E_h, \tilde{F}_h^{\text{pw}})|}{\|E_h\|_{H(\text{curl}, \Omega)} \|\tilde{F}_h^{\text{pw}}\|_{H(\text{curl}, \mathcal{T})}}$$

nachweisen. Dazu wird zuerst der Raum \tilde{Y}_h bestimmt.

Definition 6.5.13. Der Raum der Crouzeix-Raviart-Funktionen ist definiert als

$$\text{CR}^1(\mathcal{T}) := \{p_{\text{CR}} \in P_1(\mathcal{T}; \mathbb{C}^3) \mid p_{\text{CR}} \text{ ist stetig in den Mittelpunkten aller Flächen } f \in \mathcal{F}\}.$$

Für $p_{\text{CR}} \in \text{CR}$ wird mit $\nabla_{\text{NC}} p_{\text{CR}}$ die Anwendung des ∇ -Operators auf jedem Tetraeder $T \in \mathcal{T}$ bezeichnet.

Lemma 6.5.14. *Es gilt die diskrete Helmholtz-Zerlegung*

$$P_0(\mathcal{T}; \mathbb{C}^3) = \nabla_{\text{NC}} \text{CR}^1(\mathcal{T}) \oplus \text{curl } \mathcal{N}d_0^1(\mathcal{T}),$$

wobei für alle $p_{\text{CR}} \in \text{CR}^1(\mathcal{T})$ und $E_h \in \mathcal{N}d_0^1(\mathcal{T})$ das Skalarprodukt $(\nabla_{\text{NC}} p_{\text{CR}}, \text{curl } E_h)_{L^2(\Omega)} = 0$ ist.

Beweis. Das Lemma ist ein Spezialfall von [RHV04, Lemma 5.4], wo zuerst die Orthogonalität mittels partieller Integration und anschließend die Gleichheit durch Zählen der Freiheitsgrade nachgewiesen wird. \square

Korollar 6.5.15. *Es gilt $\nabla_{\text{NC}} \text{CR}^1(\mathcal{T}) = \tilde{Y}_h \cap P_0(\mathcal{T}; \mathbb{C}^3)$.*

Beweis. Ein Element $\tilde{F}_h^{\text{pw}} \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{C}^3)$ liegt in \tilde{Y}_h , wenn $(\text{curl } H_h, \tilde{F}_h^{\text{pw}})_{L^2(\Omega)} = 0$ für alle $H_h \in \mathcal{N}d_0^1(\mathcal{T})$. Nach Lemma 6.5.14 ist dem genau dann so, wenn $\tilde{F}_h^{\text{pw}} \in \nabla_{\text{NC}} \text{CR}^1(\mathcal{T})$. \square

Lemma 6.5.16. *Es gilt $\mathcal{N}d_0^1(\mathcal{T}) \subset \tilde{Y}_h$.*

Beweis. Das Lemma folgt aus der partiellen Integration über Ω . So ergibt sich für $\tilde{F}_h^{\text{pw}} \in \mathcal{N}d_0^1(\mathcal{T})$ und $H_h \in \mathcal{N}d^1(\mathcal{T})$, dass

$$(\text{curl } H_h, \tilde{F}_h^{\text{pw}})_{L^2(\Omega)} - (H_h, \text{curl } \tilde{F}_h^{\text{pw}})_{L^2(\Omega)} = \langle \pi_\tau \tilde{F}_h^{\text{pw}}, \gamma_\tau H_h \rangle_\Gamma = 0. \quad \square$$

Bis jetzt wurde gezeigt, dass sowohl $\nabla_{\text{NC}} \text{CR}^1(\mathcal{T})$ als auch $\mathcal{N}d_0^1(\mathcal{T})$ in \tilde{Y}_h liegen. Nach Bemerkung 5.2.5 lässt sich dies umformulieren zu $\nabla_{\text{NC}} \text{CR}^1(\mathcal{T}) \oplus X_{0,h}^\kappa \subset \tilde{Y}_h$. Gesucht ist die Menge $\tilde{Y}_h^{\text{Rest}}$ mit

$$\nabla_{\text{NC}} \text{CR}^1(\mathcal{T}) \oplus X_{0,h}^\kappa \oplus \tilde{Y}_h^{\text{Rest}} = \tilde{Y}_h.$$

Lemma 6.5.17. *Ist für $F_h^{\text{pw}} \in Y_h$ die Rotation $\text{curl}_{\text{NC}} F_h^{\text{pw}} \equiv 0$, so ist $F_h^{\text{pw}} \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{C}^3)$.*

Beweis. Nach Bemerkung 5.2.2 lässt sich F_h^{pw} in jedem Tetraeder $T \in \mathcal{T}$ darstellen durch $F_h^{\text{pw}}(x) = A + B \times x$ für $x \in T$, wodurch $\text{curl } F_h^{\text{pw}}(x) = 2B$. Mit anderen Worten verschwindet die Rotation in $T \in \mathcal{T}$ genau dann, wenn $B = 0$ und somit $F_h^{\text{pw}}|_T \in P_0(T; \mathbb{C}^3)$ ist. \square

Folglich hat $\tilde{y}_h^{\text{Rest}} \in \tilde{Y}_h^{\text{Rest}} \setminus \{0\}$ eine nicht verschwindende Rotation. Diese soll darstellbar sein durch $\text{curl}_{\text{NC}} \tilde{y}_h^{\text{Rest}} = \nabla_{\text{NC}} q_{\text{CR}}$ mit $q_{\text{CR}} \in \text{CR}^1(\mathcal{T})$, wobei

$$(\nabla p_h, \nabla_{\text{NC}} q_{\text{CR}})_{L^2(\Omega)} = 0 \quad \text{für alle } p_h \in S^1(\mathcal{T}).$$

Definition 6.5.18. Die Abbildung $\text{curl}_{\text{NC}}^{-1} : P_0(\mathcal{T}; \mathbb{C}^3) \rightarrow Y_h$ ist definiert durch

$$Q_0 \mapsto 1/2 Q_0 \times \bullet.$$

Aus Bemerkung 5.2.2 folgt $\text{curl}_{\text{NC}} \text{curl}_{\text{NC}}^{-1} Q_0 = Q_0$ für alle $Q_0 \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{C}^3)$. Mittels dieser Abbildung und einem $Q_0 \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{C}^3)$ lässt sich $\tilde{y}_h \in \tilde{Y}_h$ darstellen als $\tilde{y}_h = \text{curl}_{\text{NC}}^{-1} \nabla_{\text{NC}} q_{\text{CR}} + Q_0$. Für alle Elemente H_h^κ des in Bemerkung 5.2.5 definierten Raums X_h^κ gilt dabei

$$(\text{curl } H_h^\kappa, Q_0)_{L^2(\Omega)} = (H_h^\kappa, \nabla_{\text{NC}} q_{\text{CR}})_{L^2(\Omega)} - (\text{curl } H_h^\kappa, \text{curl}_{\text{NC}}^{-1} \nabla_{\text{NC}} q_{\text{CR}})_{L^2(\Omega)}. \quad (6.9)$$

Durch diese Eigenschaft ist für jedes $q_{\text{CR}} \in \text{CR}^1(\mathcal{T})$ die Funktion $Q_0 \in \text{curl}_{\text{NC}} X_h^\kappa$ eindeutig bestimmt, wie im Folgenden gezeigt wird.

Lemma 6.5.19 (diskrete (gitterabhängige) Friedrichsungleichung). *Es existiert eine Konstante $C_{\text{dFried}}^\kappa(h) < \infty$, sodass für alle $H_h^\kappa \in X_h^\kappa$ die Norm*

$$\|H_h^\kappa\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{\text{dFried}}^\kappa(h) \|\text{curl } H_h^\kappa\|_{L^2(\Omega)}.$$

Beweis. In endlichdimensionalen Räumen sind alle Normen äquivalent [Wer11, Satz I.2.5]. Es genügt also zu zeigen, dass $\|\text{curl } \bullet\|_{L^2(\Omega)}$ eine Norm in X_h^κ ist. Mit anderen Worten ist zu zeigen, dass $H_h^\kappa \in X_h^\kappa$ verschwindet, wenn $\text{curl } H_h^\kappa$ verschwindet. Ist $H_h^\kappa \in X_h^\kappa$ mit $\text{curl } H_h^\kappa = 0$, so folgt aus Bemerkung 5.2.6, dass $H_h^\kappa = \nabla p_h$ mit $p_h \in S^1(\mathcal{T})$. Nach Definition von X_h^κ ist $(\kappa \nabla p_h, \nabla p_h)_{L^2(\Omega)} = 0$. Folglich ist $\nabla p_h = 0$. \square

Bemerkung 6.5.20. Eventuell existiert auch eine gitterunabhängige Konstante $C_{\text{dFried}}^\kappa < \infty$. Der Beweis dafür scheint jedoch nicht einfach zu sein, da der Beweis der diskreten Friedrichsungleichung in [Mon03, Lemma 7.20] für den Unterraum $X_{0,h}^\kappa \subset X_h^\kappa$ auf einem Widerspruch zur kollektiven Kompaktheit beruht und somit erst für hinreichend feine Gitterweiten h aussagekräftig ist, was Monk in [Mon03, Remark 7.21] selber bemängelt.

Lemma 6.5.21. *Es existiert eine eindeutige, wohldefinierte Abbildung $\mathcal{G} : P_0(\mathcal{T}; \mathbb{C}^3) \rightarrow \text{curl } X_h^\kappa$ mit*

$$(\text{curl } H_h^\kappa, \mathcal{G} Q_0)_{L^2(\Omega)} = (H_h^\kappa, Q_0)_{L^2(\Omega)} - (\text{curl } H_h^\kappa, \text{curl}_{\text{NC}}^{-1} Q_0)_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } H_h^\kappa \in X_h^\kappa.$$

Beweis. Aufgrund der diskreten Friedrichsungleichung ist $\text{curl } X_h^\kappa$ ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $(\bullet, \bullet)_{L^2(\Omega)}$. Ferner ist $(H_h^\kappa, Q_0)_{L^2(\Omega)} - (\text{curl } H_h^\kappa, \text{curl}_{\text{NC}}^{-1} Q_0)_{L^2(\Omega)}$ beschränkt und kann somit als Element des Dualraums $(\text{curl } X_h^\kappa)^*$ betrachtet werden, wodurch die Existenz von $\mathcal{G} Q_0$ aus Satz 2.1.8 (Riesz'scher Darstellungssatz) folgt. \square

Definition 6.5.22. Der Raum $\tilde{Y}_h^{\text{Rest}} \subset \tilde{Y}_h$ wird definiert als

$$\tilde{Y}_h^{\text{Rest}} := \{(\text{curl}_{\text{NC}}^{-1} + \mathcal{G}) \nabla_{\text{NC}} q_{\text{CR}} \mid q_{\text{CR}} \in \text{CR}^1(\mathcal{T}) \text{ mit } (\nabla p_h, \nabla_{\text{NC}} q_{\text{CR}})_{L^2(\Omega)} = 0 \text{ für alle } p_h \in S^1(\mathcal{T})\}.$$

Satz 6.5.23. Der Raum \tilde{Y}_h entspricht der inneren direkten Summe

$$\nabla_{\text{NC}} \text{CR}^1(\mathcal{T}) \oplus X_{0,h}^\kappa \oplus \tilde{Y}_h^{\text{Rest}} = \tilde{Y}_h.$$

Beweis. Mit der diskreten Helmholtz-Zerlegung lässt sich die elementweise Rotation von $\tilde{y}_h \in \tilde{Y}_h$ durch ein eindeutiges $G_h \in \mathcal{N}d_0^1(\mathcal{T})$ und ein eindeutiges $q_{\text{CR}} \in \text{CR}^1(\mathcal{T})$ darstellen als

$$\text{curl}_{\text{NC}} \tilde{y}_h = \text{curl} G_h + \nabla_{\text{NC}} q_{\text{CR}}.$$

Nach Lemma 6.5.17 entspricht so \tilde{y}_h der Summe

$$\tilde{y}_h = Q_0 + G_h + (\text{curl}_{\text{NC}}^{-1} + \mathcal{G}) \nabla_{\text{NC}} q_{\text{CR}}$$

mit $Q_0 := \tilde{y}_h - G_h + (\text{curl}_{\text{NC}}^{-1} + \mathcal{G}) \nabla_{\text{NC}} q_{\text{CR}} \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{C}^3)$. Aufgrund der Definition von \tilde{Y}_h ist

$$(\text{curl} H_h^\kappa, \tilde{y}_h)_{L^2(\Omega)} = (H_h^\kappa, \text{curl}_{\text{NC}} \tilde{y}_h)_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } H_h^\kappa \in X_h^\kappa,$$

was nach Lemma 6.5.16 und Definition 6.5.22 äquivalent ist zu

$$(\text{curl} H_h^\kappa, Q_0)_{L^2(\Omega)} = 0 \quad \text{für alle } H_h^\kappa \in X_h^\kappa.$$

Aus Korollar 6.5.15 folgt $Q_0 = \nabla_{\text{NC}} p_{\text{CR}}$ mit $p_{\text{CR}} \in \text{CR}^1(\mathcal{T})$. Somit ist $\nabla_{\text{NC}} \text{CR}^1(\mathcal{T}) \oplus X_{0,h}^\kappa \oplus \tilde{Y}_h^{\text{Rest}}$ eine Obermenge von \tilde{Y}_h . Gleichzeitig sind $\nabla_{\text{NC}} \text{CR}^1(\mathcal{T}), X_{0,h}^\kappa, \tilde{Y}_h^{\text{Rest}}$ nach den vorangegangenen Aussagen bzw. Definitionen Teilmengen von \tilde{Y}_h , woraus Gleichheit folgt. \square

Korollar 6.5.24. Die inf-sup-Konstante β_{vol} ist größer gleich der inf-sup-Konstante der Nédélec-FEM (5.1).

Beweis. Das Korollar folgt aus der Eigenschaft, dass $\mathcal{N}d_0^1(\mathcal{T}) \subset \tilde{Y}_h$. \square

Nach diesem Korollar impliziert die Wohlgestelltheit der Nédélec-FEM die Existenz eines Fortin-Operators und somit die Möglichkeit, abstrakte a priori und a posteriori Resultate anzuwenden. Jedoch ist dies kein Beweis dafür, dass die dPG-Methode stabiler als herkömmliche Ansätze ist. Dazu muss ein Existenzbeweis von $F_1^{\text{pw}} \in \tilde{Y}_h$ gefunden werden, der nicht auf der Wohlgestelltheit der Nédélec-FEM beruht. Die entscheidende Frage ist, ob dazu der Raum \tilde{Y}_h groß genug ist. Insbesondere sollten folglich die zusätzlichen Freiheitsgrade von $\nabla_{\text{NC}} \text{CR}^1(\mathcal{T})$ und $\tilde{Y}_h^{\text{Rest}}$ den Term $|b_{\text{vol}}(E_h, \tilde{F}_h^{\text{pw}})|$ vergrößern, wenn Nédélec-Elemente versagen. Für den Spezialfall $\mu = 1, \sigma = 0$ ist dem so, wie im Beweis von Lemma 5.3.2 gesehen, falls $\Phi_h^n \in \mathcal{N}d_0^1(\mathcal{T})$ eine zum Eigenwert $\lambda_h^n \in [\omega^2 - \delta, \omega^2 + \delta]$ mit $0 \leq \delta \ll 1$ gehörende Eigenfunktion ist. Es gilt daher den Ausdruck

$$\omega^2(\varepsilon \Phi_h^n, \nabla_{\text{NC}} p_{\text{CR}} + (\text{curl}_{\text{NC}}^{-1} + \mathcal{G}) \nabla_{\text{NC}} q_{\text{CR}})_{L^2(\Omega)}$$

über normierte $\tilde{y}_h = \nabla_{\text{NC}} p_{\text{CR}} + (\text{curl}_{\text{NC}}^{-1} + \mathcal{G}) \nabla_{\text{NC}} q_{\text{CR}}$ mit $p_{\text{CR}}, q_{\text{CR}} \in \text{CR}^1(\mathcal{T})$, wobei $(\nabla_{\text{NC}} q_{\text{CR}}, \nabla p_h)_{L^2(\Omega)} = 0$ für alle $p_h \in S^1(\mathcal{T})$ ist, zu maximieren und nach unten gegen ein Vielfaches von $\|\Phi_h^n\|_{H_{\mu,\varepsilon}(\text{curl}, \Omega)}$ abzuschätzen. Mir ist nicht ersichtlich, ob dies möglich ist bzw. wie man das zeigen kann. Stattdessen wird im Folgenden versucht, den Raum \tilde{Y}_h zu vergrößern.

6.5.2. Ansatz 2

Eine Möglichkeit zur Vergrößerung von \tilde{Y}_h stellt die Zunahme von weiteren Funktionen zum Raum Y_h dar. Eine Analyse dieser Möglichkeit ist in [CDG15] nachzulesen, weswegen nicht weiter darauf eingegangen wird. Anstatt Y_h zu vergrößern, kann X_h^2 verkleinert werden. So bleibt Y_h wie im ersten Ansatz, wohingegen X_h definiert wird durch

$$X_h := \mathcal{N}d_0^1(\mathcal{T}) \times \gamma_\tau^\top \nabla S^1(\mathcal{T}).$$

Nachweis von (A3_{tr})

Gesucht ist ein Operator $\Pi_{\text{tr}} : Y \rightarrow \text{curl}_{\text{NC}}^{-1}(\nabla S^1(\mathcal{T}))$ der (A3_{tr}) erfüllt, d.h., jedes $F^{\text{pw}} \in Y$ auf ein $\text{curl}_{\text{NC}}^{-1} \nabla q_h$ mit $q_h \in S^1(\mathcal{T})$ abbildet, sodass

$$(\nabla q_h, \nabla p_h)_{L^2(\Omega)} = (\text{curl}_{\text{NC}} F^{\text{pw}}, \nabla p_h)_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } p_h \in S^1(\mathcal{T}). \quad (6.10)$$

Es genügt dabei, den Raum $\tilde{S}^1(\mathcal{T}) := \{q_h \in S^1(\mathcal{T}) \mid \int_\Omega q_h \, dx = 0\}$ zu betrachten. Ist $\|\nabla q_h\|_{L^2(\Omega)} = 0$ für $q_h \in \tilde{S}^1(\mathcal{T})$, impliziert dies $q_h = 0$. Aufgrund der endlichen Dimension von $\tilde{S}^1(\mathcal{T})$ ist daher die Norm $\|\nabla \bullet\|_{L^2(\Omega)}$ äquivalent zu $\|\bullet\|_{H^1(\Omega)}$. Somit ist $\tilde{S}^1(\mathcal{T})$ mit Skalarprodukt $(\nabla \bullet, \nabla \bullet)_{L^2(\Omega)}$ ein Hilbertraum. Nach dem Riesz'schen Darstellungssatz (Satz 2.1.8) existiert zu $F^{\text{pw}} \in Y$ ein eindeutiges $q_h \in \tilde{S}^1(\mathcal{T})$, welches (6.10) erfüllt und dessen Norm sich abschätzen lässt durch

$$\|\nabla q_h\|_{L^2(\Omega)} = \|(\text{curl}_{\text{NC}} F^{\text{pw}}, \nabla \bullet)_{L^2(\Omega)}\|_{\tilde{S}^1(\mathcal{T})^*} \leq \|\text{curl}_{\text{NC}} F^{\text{pw}}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Aus der Definition von $\text{curl}_{\text{NC}}^{-1}$ und der Lagrange-Identität (A.2) folgt

$$\begin{aligned} \|\text{curl}_{\text{NC}}^{-1} \nabla q_h\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \frac{1}{4} \|\nabla q_h \times \bullet\|_{L^2(\Omega)}^2 = \frac{1}{4} \int_\Omega (\nabla q_h \cdot \nabla q_h)(x \cdot x) - (\nabla q_h \cdot x)(x \cdot \nabla q_h) \, dx \\ &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}} (4|T|)^{-1} \|\nabla q_h\|_{L^2(T)}^2 \int_T x \cdot x \, dx \\ &\leq \max_{T \in \mathcal{T}} \int_T x \cdot x \, dx / (4|T|) \|\nabla q_h\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Da o.B.d.A. das Gebiet Ω so liegt, dass $x \cdot x \leq (\text{diam}(\Omega)/2)^2$ für alle $x \in \Omega$, ist für alle $T \in \mathcal{T}$ das Integral $\int_T x \cdot x \, dx \leq (\text{diam}(\Omega)/2)^2 |T|$. Aus

$$\|\Pi_{\text{tr}} F^{\text{pw}}\|_{H(\text{curl}, \Omega)}^2 = \|\text{curl}_{\text{NC}}^{-1} \nabla q_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla q_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq (\text{diam}(\Omega)^2/8 + 1) \|F^{\text{pw}}\|_{H(\text{curl}, \mathcal{T})}^2$$

folgt für die Operatornorm $\|\Pi_{\text{tr}}\| \leq (\text{diam}(\Omega)^2/8 + 1)^{1/2}$.

Nachweis von (A3_{vol})

Zur Konstruktion von Π_{vol} wird die inf-sup-Bedingung

$$0 < \beta_{\text{vol}} := \inf_{E_h \in \mathcal{N}d^1(\mathcal{T}) \setminus \{0\}} \sup_{\tilde{F}_h^{\text{pw}} \in \tilde{Y}_h \setminus \{0\}} \frac{|b_{\text{vol}}(E_h, \tilde{F}_h^{\text{pw}})|}{\|E_h\|_{H(\text{curl}, \Omega)} \|\tilde{F}_h^{\text{pw}}\|_{H(\text{curl}, \mathcal{T})}}$$

betrachtet. Im Gegensatz zur ersten diskreten Variationsformulierung ist durch den kleineren Raum $X_h^2 := \nabla S^1(\mathcal{T})$ der Raum $\tilde{Y}_h \subset Y_h$, welcher als Menge aller $\tilde{y}_h \in Y_h$ mit

$$(\operatorname{curl}_{\text{NC}} \tilde{y}_h, \nabla p_h)_{L^2(\Omega)} = 0 \quad \text{für alle } p_h \in S^1(\mathcal{T})$$

definiert ist, wesentlich größer. Insbesondere ist neben der Menge $\mathcal{N}d_0^1(\mathcal{T})$ der gesamte Raum der stückweise konstanten Funktionen $P_0(\mathcal{T}; \mathbb{C}^3)$ enthalten. Für $\sigma = 0$ ist nun die Idee, den Raum $\mathcal{N}d_0^1(\mathcal{T})$ in einen Raum von Funktionen mit diskreten Eigenfrequenzen $|\lambda - \omega^2| > \delta$ und einen Raum mit diskreten Eigenfrequenzen $|\lambda - \omega^2| \leq \delta$ für ein gegebenes $\delta > 0$ zu zerlegen. Mit $m = \dim X_{0,h}^\varepsilon$ und den diskreten Eigenfunktionen λ_h^n aus (5.2) ist die Indexmenge

$$\mathcal{I}_{h,\delta} := \left\{ n \in \{1, \dots, m\} \mid \delta < |\lambda_h^n - \omega^2| \right\}$$

mit Komplement $\mathcal{I}_{h,\delta}^c := \{1, \dots, m\} \setminus \mathcal{I}_{h,\delta}$. So lässt sich nach Satz 5.3.1 der Raum $\mathcal{N}d_0^1(\mathcal{T})$ mit den zu den diskreten Eigenwerten λ_h^n gehörenden Eigenfunktionen $\Phi_h^n \in X_{0,h}^\varepsilon$ zerlegen in

$$X_{h,1}^1 := \nabla S_0^1(\mathcal{T}) \oplus \operatorname{span}\{\Phi_h^n \mid n \in \mathcal{I}_{h,\delta}\}, \quad \text{und} \quad X_{h,2}^1 := \operatorname{span}\{\Phi_h^n \mid n \in \mathcal{I}_{h,\delta}^c\}.$$

Für Elemente aus $X_{h,1}^1$ soll die Sesquilinearform durch Nédélec-Elemente maximiert werden, für Elemente aus $X_{h,2}^1$ durch stückweise konstante Funktionen. Wenn auch ursprünglich für eine Zerlegung in Spur- und Volumenterme gedacht, liefert den abstrakten Rahmen zu diesem Ansatz das Splitting Lemma (Lemma 2.2.5). Die Zerlegung $\mathcal{N}d_0^1(\mathcal{T}) = X_{h,1}^1 \oplus X_{h,2}^1$ erfüllt **(S1)** und **(S2)** mit $Y_1 := X_{h,1}^1$. Ferner gilt mit den Argumenten aus Lemma 5.3.2 (bzw. Lemma 4.4.9), dass **(S3)** mit inf-sup-Konstante

$$c_{\inf}^2 \min \left\{ \omega^2, \frac{|\lambda_h^n - \omega^2|}{1 + \lambda_h^n}, n \in \mathcal{I}_{h,\delta} \right\} \leq \beta_1$$

erfüllt wird. Es bleibt nachzuweisen, dass

$$\textbf{(S4)} \quad 0 < \beta_2 := \inf_{E_h \in X_{h,2}^1 \setminus \{0\}} \sup_{\tilde{F}_h^{\text{pw}} \in \tilde{Y}_h \setminus \{0\}} \frac{|b_{\text{vol}}(E_h, \tilde{F}_h^{\text{pw}})|}{\|E_h\|_{H(\operatorname{curl}, \Omega)} \|\tilde{F}_h^{\text{pw}}\|_{H(\operatorname{curl}, \mathcal{T})}}.$$

Ein Hilfsmittel dazu ist die Abbildung $\Pi_0 : L^2(\Omega; \mathbb{C}^3) \rightarrow P_0(\mathcal{T}; \mathbb{C}^3)$ auf die Integralmittel

$$(\Pi_0 F)|_T := |T|^{-1} \int_T F \, dx =: \oint_T F \, dx \quad \text{für alle } T \in \mathcal{T}.$$

Ist $E_h \in X_{h,2}^1$, so ist $\Pi_0 \varepsilon E_h \in \tilde{Y}_h$ und unter der Annahme $\varepsilon \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R})$, folglich

$$b(E_h, -\Pi_0 E_h) = \omega^2 (\varepsilon E_h, \Pi_0 \varepsilon E_h)_{L^2(\Omega)} = \omega^2 \|\varepsilon \Pi_0 E_h\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Lemma 6.5.25. *Für eine Konstante ε und eine beliebige Nédélec-Funktion $E_h \in \mathcal{N}d^1(\mathcal{T})$ auf einem Tetraeder $T \in \mathcal{T}$ mit Durchmesser $h_T > 0$ ist*

$$\|\varepsilon E_h - \oint_T \varepsilon E_h \, dx\|_{L^2(T)}^2 \leq 0,2 \pi h_T^5 |T|^{-1} \|\varepsilon \operatorname{curl} E_h\|_{L^2(T)}^2.$$

Beweis. Per Definition lässt sich $E_h \in \mathcal{N}d^1(T)$ mittels der Vektoren $Q_0, Q_1 \in \mathbb{C}^3$ darstellen als $E_h = Q_0 + Q_1 \times \bullet$, wodurch $\oint_T E_h \, dx = Q_0 + Q_1 \times \oint_T x \, dx$ ist. Daraus folgt

$$\|E_h - \oint_T E_h \, dx\|_{L^2(T)}^2 = \int_T (Q_1 \times (y - \oint_T x \, dx)) \cdot (Q_1 \times (y - \oint_T x \, dx)) \, dy.$$

Mittels Lagrange-Identität (A.2) ergibt sich die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|E_h - \oint_T E_h \, dx\|_{L^2(T)}^2 &= \int_T (Q_1 \cdot Q_1) ((y - \oint_T x \, dx) \cdot (y - \oint_T x \, dx)) - |Q_1 \cdot (y - \oint_T x \, dx)|^2 \, dy \\ &\leq |T|^{-1} \|Q_1\|_{L^2(T)}^2 \|\bullet - \oint_T x \, dx\|_{L^2(T)}^2. \end{aligned}$$

Nach Bemerkung 5.2.2 ist $\|Q_1\|_{L^2(T)}^2 = 1/4 \|\text{curl } E_h\|_{L^2(T)}^2$. Zur Approximation der Norm $\|\bullet - \oint_T x \, dx\|_{L^2(T)}^2$ wird o.B.d.A. angenommen, dass der Schwerpunkt von T im Koordinatenursprung liegt. Dadurch verschwindet das Integralmittel. Der Wert $\oint_T x \cdot x \, dx$ ist nach oben durch das Integral von $x \cdot x$ über die Kugel K mit Radius h_T und Mittelpunkt im Koordinatenursprung beschränkt, denn $T \subset K$. Dies ergibt

$$\|\bullet - \oint_T x \, dx\|_{L^2(T)}^2 = \int_T x \cdot x \, dx \leq \int_K x \cdot x \, dx = 0,8 \pi h_T^5.$$

Die Multiplikation mit ε^2 resultiert in die Aussage des Lemmas. \square

Bemerkung 6.5.26. Sind alle Verfeinerungen formregulär (vgl. Definition 5.1.7) mit $\gamma := \sup_{n \in \mathbb{N}} \max_{T \in \mathcal{T}_n} \gamma(T) < \infty$, so ist $|T| \geq 4/3 \pi \gamma^{-3} h_T^3$ für jedes $T \in \mathcal{T}$. Daraus ergibt sich die Existenz einer Konstanten

$$C(\gamma) \leq (0,15\gamma^3)^{1/2},$$

sodass nach dem vorangegangenen Lemma für alle $T \in \mathcal{T}$ und Konstanten $\varepsilon \in \mathbb{R}$ gilt

$$\|\varepsilon E_h - \oint_T \varepsilon E_h \, dx\|_{L^2(T)} \leq C(\gamma) h_T \|\varepsilon \text{curl } E_h\|_{L^2(T)}.$$

Unter der Annahme, dass ε in $P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R})$ liegt, gilt für die Funktion $h_{\mathcal{T}} \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R})$ mit $(h_{\mathcal{T}})|_T = h_T$ und der größten Gitterweite der Triangulierung $h_{\max} > 0$, dass

$$\|\varepsilon E_h - \Pi_0 \varepsilon E_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\gamma) \|h_{\mathcal{T}} \varepsilon \text{curl } E_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\gamma) h_{\max} \|\varepsilon \text{curl } E_h\|_{L^2(\Omega)}.$$

Satz 6.5.27. Ist die Permittivität $\varepsilon \in P_0(\mathcal{T}; \mathbb{R})$, lässt sich die Konstante β_2 aus (S4) abschätzen durch

$$\omega^2 \frac{\varepsilon_{\inf} (1 - h_{\max}^2 C(\gamma)^2 \mu_{\sup} \varepsilon_{\sup} (\omega^2 + \delta))^{1/2}}{(1 + \omega^2 + \delta)^{1/2}} \leq \beta_2.$$

Beweis. Für $E_h \in X_{h,2}^1 \setminus \{0\}$ ist $(\Pi_0 \varepsilon E_h, \varepsilon E_h - \Pi_0 \varepsilon E_h)_{L^2(\Omega)} = 0$ und somit nach dem Satz des Pythagoras $\|\Pi_0 \varepsilon E_h\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|\varepsilon E_h\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\varepsilon E_h - \Pi_0 \varepsilon E_h\|_{L^2(\Omega)}^2$. Des Weiteren ist

$$\begin{aligned} \mu_{\sup}^{-1} \|\text{curl } E_h\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq (\mu^{-1} \text{curl } E_h, \text{curl } E_h)_{L^2(\Omega)} \leq (\omega^2 + \delta) (\varepsilon E_h, E_h)_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \varepsilon_{\sup} (\omega^2 + \delta) \|E_h\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

So folgt aus Bemerkung 6.5.26, dass

$$\begin{aligned} \|\Pi_0 \varepsilon E_h\|_{L^2(\Omega)}^2 &\geq \varepsilon_{\inf}^2 \sum_{T \in \mathcal{T}} \left(\|E_h|_T\|_{L^2(T)}^2 - h_{\max}^2 C(\gamma)^2 \|\operatorname{curl} E_h|_T\|_{L^2(T)}^2 \right) \\ &\geq \varepsilon_{\inf}^2 \left(1 - h_{\max}^2 C(\gamma)^2 \mu_{\sup} \varepsilon_{\sup} (\omega^2 + \delta) \right) \|E_h\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Insbesondere verschwindet $\|\Pi_0 \varepsilon E_h\|_{H(\operatorname{curl}, \mathcal{T})}$ für $h_{\max} < (C(\gamma)^2 \mu_{\sup} \varepsilon_{\sup} (\omega^2 + \delta))^{-1/2}$ nicht, sodass

$$\frac{|b(E_h, -\Pi_0 E_h)|}{\|E_h\|_{H(\operatorname{curl}, \Omega)} \|\Pi_0 \varepsilon E_h\|_{H(\operatorname{curl}, \mathcal{T})}} = \omega^2 \frac{\|\Pi_0 \varepsilon E_h\|_{L^2(\Omega)}}{\|E_h\|_{H(\operatorname{curl}, \Omega)}}.$$

Aus $\|E_h\|_{H(\operatorname{curl}, \Omega)}^2 \leq (1 + \omega^2 + \delta) \|E_h\|_{L^2(\Omega)}^2$ folgt

$$\omega^2 \frac{\varepsilon_{\inf} (1 - h_{\max}^2 C(\gamma)^2 \mu_{\sup} \varepsilon_{\sup} (\omega^2 + \delta))^{1/2} \|E_h\|_{L^2(\Omega)}}{(1 + \omega^2 + \delta)^{1/2} \|E_h\|_{L^2(\Omega)}} \leq \omega^2 \frac{\|\Pi_0 \varepsilon E_h\|_{L^2(\Omega)}}{\|E_h\|_{H(\operatorname{curl}, \Omega)}}$$

und somit die Abschätzung für die Konstante β_2 in **(S4)**. \square

Mit **(S1)**-**(S4)** sichert das Splitting Lemma **(A3_{vol})** und somit **(A3)** zu, wobei $\|\Pi\|$ unabhängig von der Verfeinerung nach oben beschränkt ist. Wie in Abschnitt 6.2 beschrieben, lässt sich so ein $x_h \in X_h$ berechnen, sodass der Abstand zur exakten Lösung $x = (E, \hat{h}) \in X$ der kontinuierlichen Variationsformulierung

$$\|x - x_h\|_X \leq \|b\| \|\Pi\| / \beta \inf_{\xi_h \in X} \|x - \xi_h\|_X$$

ist. Dabei ist $\inf_{\xi_h \in X} \|x - \xi_h\|_X$ nach unten durch $\inf_{p_h \in S^1(\mathcal{T})} \|\hat{h} - \gamma_{\tau}^T \nabla p_h\|_{H^{-1/2}(\operatorname{div}_{\partial \mathcal{T}}, \partial \mathcal{T})}$ beschränkt. Lässt sich die Spur \hat{h} für alle Triangulierungen als Spur eines Gradienten darstellen, geht dieser Ausdruck gegen Null. Sollte die Spur nicht als Spur eines Gradienten darstellbar sein, legen die numerischen Experimente in Kapitel 7 nahe, dass dem nicht so ist, da das Verfahren nicht konvergiert.

6.5.3. Ansatz 3

In der kontinuierlichen Variationsformulierung (6.7) wurde die Spur $\gamma_{\tau}^T \mu^{-1} \operatorname{curl} E$ durch ein Element $\hat{h} \in H^{-1/2}(\operatorname{div}_{\partial \mathcal{T}}, \partial \mathcal{T}; \mathbb{C}^3)$ ersetzt. Dies war notwendig und geht gut, sodass für die Lösung $(E, \hat{h}) \in X$ gilt $\gamma_{\tau}^T \mu^{-1} \operatorname{curl} E = \hat{h}$. Mit diesem Wissen stellt sich die Frage, ob dann nicht $\gamma_{\tau}^T \mu^{-1} \operatorname{curl} E$ durch die Rotation einer Nédélec-Funktion approximiert werden sollte, sodass

$$X_h^2 := \mu^{-1} \operatorname{curl} \mathcal{N} d^1(\mathcal{T}).$$

Dieser Ansatz resultiert in zwei Schwierigkeiten. Die erste ist die Nichtkonformität der Approximation, denn $\mu^{-1} \operatorname{curl} \mathcal{N} d^1(\mathcal{T}) \not\subset H(\operatorname{curl}, \Omega; \mathbb{C}^3)$. Auch wenn sich die aus der Nichtkonformität resultierenden Probleme umgehen lassen, scheitert der Ansatz an **(A3_{vol})**, denn die Menge \tilde{Y}_h ist mit diesem Ansatz definiert als Menge aller $\tilde{y}_h \in Y_h$ mit

$$(\mu^{-1} \operatorname{curl} H_h, \operatorname{curl}_{\operatorname{NC}} \tilde{y}_h)_{L^2(\Omega)} = 0 \quad \text{für alle } H_h \in \mathcal{N} d^1(\mathcal{T}).$$

Daher zerfällt die zu beweisende inf-sup-Bedingung zu

$$0 < \beta := \inf_{E_h \in \mathcal{N}d_0^1(\mathcal{T})} \sup_{\tilde{y}_h \in \tilde{Y}_h} \frac{|\omega^2(\kappa E_h, \tilde{y}_h)_{L^2(\Omega)}|}{\|E_h\|_{H(\text{curl}, \Omega)} \|\tilde{y}_h\|_{H(\text{curl}, \mathcal{T})}}.$$

Die Konstante β lässt sich mittels Cauchy-Schwarz-Ungleichung abschätzen durch

$$\beta \lesssim \frac{\omega^2 \|E_h\|_{L^2(\Omega)} \|\tilde{y}_h\|_{L^2(\Omega)}}{\|E_h\|_{H(\text{curl}, \Omega)} \|\tilde{y}_h\|_{H(\text{curl}, \mathcal{T})}} \leq \frac{\omega^2 \|E_h\|_{L^2(\Omega)}}{\|E_h\|_{H(\text{curl}, \Omega)}}.$$

Insbesondere gilt für die zum größten diskreten Eigenwert λ_h^{\max} gehörende Eigenfunktion Φ_h^{\max} , dass $\beta \lesssim \omega^2 (\lambda_h^{\max})^{-1}$ ist. Bei zunehmend feineren Triangulierungen geht $\lambda_h^{\max} \rightarrow \infty$ und folglich $\beta \rightarrow 0$. Der Nachweis von **(A3_{vol})** ist somit nicht möglich, was ein Scheitern dieses Ansatzes nahe legt.

7. Numerische Experimente

Auf den theoretischen Teil folgt nun die praktische Umsetzung. Diese beginnt mit einer Erläuterung meiner Implementierung der dPG-Methode mittels des ersten und zweiten Ansatzes. Anschließend wird sie in numerischen Experimenten mit der Nédélec-FEM sowie der in [CDG15] vorgestellten dPG-Methode verglichen.

7.1. Implementierung

Eine abstrakte Vorgehensweise zur Berechnung der Lösung des diskreten Sattelpunktproblems (6.5) wurde bereits in Bemerkung 6.2.4 beschrieben. Konkret handelt es sich nun beim Ansatzraum um

$$Y_h := \{F_h^{\text{pw}} \in H(\text{curl}, \mathcal{T}; \mathbb{C}^3) \mid F_h^{\text{pw}}|_T \in R_1 \text{ für alle } T \in \mathcal{T}\}$$

und beim Testraum um

$$X_h := \mathcal{N}d_0^1(\mathcal{T}) \times \gamma_\tau^T \mathcal{N}d^1(\mathcal{T}) \quad \text{bzw.} \quad X_h := \mathcal{N}d_0^1(\mathcal{T}) \times \gamma_\tau^T \nabla S^1(\mathcal{T})$$

im ersten bzw. zweiten Ansatz. Die praktische Umsetzung erfolgt in vier Schritten.

Schritt 1. Die Triangulierung

Neben den gegebenen Daten, wie der rechten Seite J , Randdaten für den Dirichlet-Rand $\nu \times H$ und den Materialparametern, benötigt der Algorithmus Informationen bzgl. der Triangulierung. Diese enthalten die Koordinaten für jeden Knoten in einer $\#\mathcal{N} \times 3$ Matrix `c4n` und die Knoten jedes Tetraeders der Triangulierung in einer $\#\mathcal{T} \times 4$ Matrix `n4el`, wodurch eine Nummerierung der Tetraeder gegeben ist. Zusätzlich werden die drei Knoten einer jeden Randfläche des Neumann-Randes `n4fNb` sowie des Dirichlet-Randes `n4fDb` dem Algorithmus übergeben, welcher jedoch weitere Informationen bzgl. der Kanten der Triangulierung benötigt. Diese werden in der Funktion `computeMeshData(n4el,n4fDb,n4fNb)` bestimmt.

```
function [n4ed, ed4el, ed4Db, ed4Nb, ed4fDb, ed4fNb] = ...
    computeMeshData(n4el, n4fDb, n4fNb)

nrElem = size(n4el, 1);
nrDbFaces = size(n4fDb, 1);
nrNbFaces = size(n4fNb, 1);
allEdges = [n4el(:, [1 2]); n4el(:, [2 3]); n4el(:, [3 4]); n4el(:, [4 1]); ...
    n4el(:, [1 3]); n4el(:, [2 4])];
if nrDbFaces > 0
    allEdgesDb = [n4fDb(:, [1 2]); n4fDb(:, [2 3]); n4fDb(:, [1 3])];
else
```

```

        allEdgesDb = [];
    end
    if nrNbFaces > 0
        allEdgesNb = [n4fNb(:, [1 2]); n4fNb(:, [2 3]); n4fNb(:, [1 3])];
    else
        allEdgesNb = [];
    end
    [~, ind, back] = unique([allEdges; allEdgesDb; allEdgesNb], 2, 'rows', 'first');
    [n4sInd, sortInd] = sort(ind);
    edgeNr(sortInd) = 1:length(ind);

    n4ed = allEdges(n4sInd, :);
    ed4el = reshape(edgeNr(back(1:size(allEdges, 1))), nrElem, 6);
    ed4fDb = reshape(edgeNr(back(size(allEdges, 1)+1:size(allEdges, 1)+...
        size(allEdgesDb, 1))), nrDbFaces, 3);
    ed4fNb = reshape(edgeNr(back(size(allEdges, 1)+size(allEdgesDb, 1)+1:end)), ...
        nrNbFaces, 3);
    ed4Db = unique(ed4fDb(:));
    ed4Nb = unique(ed4fNb(:));
end

```

Daraus ergeben sich die Knoten einer jeden Kante $n4ed$, die Kanten eines jeden Elements $ed4el$, die Kanten die zum Dirichlet-Rand gehören $ed4Db$, die Kanten die zum Neumann-Rand gehören $ed4Nb$, die Kanten einer jeden Dirichlet-Randfläche $ed4fDb$ und die Kanten einer jeden Neumann-Randfläche $ed4fNb$.

Schritt 2. Berechnung lokaler Komponenten

Es folgt eine parallelisierte Schleife über alle $T \in \mathcal{T}$. In der Schleife hat das aktuelle Tetraeder $T \in \mathcal{T}$ die Nummer $elem$ und den Flächeninhalt Volumen. Ferner lassen sich die Knoten des Tetraeders von 1 bis 4 sowie die Kanten von 1 bis 6 durchnummerieren. Dabei wird eine Eigenschaft der Kanten in $ed4el$ ausgenutzt, welche aus der Definition von $allEdges$ in Schritt 1 stammt. So verbindet die erste Kante aus $globalEdges = ed4el(elem,:)$ den ersten mit dem zweiten Knoten aus $globalNodes = n4el(elem,:)$, die zweite Kante den zweiten mit dem dritten, die dritte Kante den dritten mit dem vierten, die vierte Kante den vierten mit dem ersten, die fünfte Kante den ersten mit dem dritten und die sechste Kante den zweiten mit dem vierten. Um die spätere Assemblierung zu erleichtern, werden die Orientierungen der lokalen Kanten 1 bis 6, d.h. die Reihenfolge der Knoten in $localEdges$, denen der Kanten in $ed4el(elem,:)$ angepasst.

```

edgeOrientation = globalNodes([1,2,3,4,1,2])' == globalEdges(:, 1);
localEdges = [edgeOrientation edgeOrientation].*[1,2;2,3;3,4;4,1;1,3;2,4]+...
    (ones(6,2)-[edgeOrientation edgeOrientation]).*[2,1;3,2;4,3;1,4;3,1;4,2];

```

Für die lokalen Knoten P_1, \dots, P_4 bezeichnen $\varphi_1, \dots, \varphi_4$ die nodalen (lokalen) Basisfunktionen. Die n -te lokale Kante e_n für $n = 1, \dots, 6$ verläuft vom Knoten e_n^1 zum Knoten e_n^2 . So lassen sich nach Satz 5.2.7 Basisfunktionen von $\mathcal{N}d^1(T)$ darstellen durch

$$\psi_{e_n} = \varphi_{e_n^1} \nabla \varphi_{e_n^2} - \varphi_{e_n^2} \nabla \varphi_{e_n^1}, \quad \text{wobei} \quad \text{curl } \psi_{e_n} = 2 \nabla \varphi_{e_n^1} \times \nabla \varphi_{e_n^2}.$$

Mit den Koordinaten der lokalen Knoten $coords = c4n(elem,:)$ werden die Gradienten der Basisfunktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_4$ sowie der Mittelpunkt des Tetraeders berechnet.


```

grads = [ones(1,4);coords']\[zeros(1,3);eye(3)];
mid = (coords(1,:)+coords(2,:)+coords(3,:)+coords(4,:))/4;

```

So kann die Rotation jeder lokalen Basisfunktion ψ_{e_n} bestimmt werden. Das Integral $\int_T \mu^{-1} dx$ wird durch die Mittelpunktsregel approximieren, wodurch sich der Ausdruck $\int_T \mu^{-1} \text{curl} \psi_{e_n} \cdot \text{curl} \psi_{e_m} dx = \int_T \mu^{-1} dx \text{curl} \psi_{e_n} \cdot \text{curl} \psi_{e_m}$ für $n, m = 1, \dots, 6$ berechnen lässt. Die selbe Vorgehensweise ergibt $\int_T \text{curl} \psi_{e_n} \cdot \text{curl} \psi_{e_m} dx$ für $n, m = 1, \dots, 6$.

```

curl = 2*cross(grads(localEdges(:,1),:), grads(localEdges(:,2),:));
int_inv_mu = Volume*inv_mu(mid);
Curl_loc(:, :, elem) = curl*int_inv_mu*curl';
loc_scalProd_Curl = Volume*(curl*curl');

```

Für die Basisfunktionen ψ_{e_n}, ψ_{e_m} ergibt sich unter der Annahme, dass κ konstant auf dem Tetraeder T ist, dass

$$\begin{aligned}
 & \int_T (\varepsilon + i\sigma) \psi_{e_n} \cdot \psi_{e_m} dx \\
 &= (\varepsilon + i\sigma) \nabla \varphi_{e_n^2} \cdot \nabla \varphi_{e_m^2} \int_T \varphi_{e_n^1} \varphi_{e_m^1} dx + (\varepsilon + i\sigma) \nabla \varphi_{e_n^1} \cdot \nabla \varphi_{e_m^1} \int_T \varphi_{e_n^2} \varphi_{e_m^2} dx \\
 & \quad - (\varepsilon + i\sigma) \nabla \varphi_{e_n^1} \cdot \nabla \varphi_{e_m^2} \int_T \varphi_{e_n^2} \varphi_{e_m^1} dx - (\varepsilon + i\sigma) \nabla \varphi_{e_n^2} \cdot \nabla \varphi_{e_m^1} \int_T \varphi_{e_n^1} \varphi_{e_m^2} dx.
 \end{aligned}$$

Dabei ist für $k, \ell = 1, 2$ und $m, n = 1, \dots, 6$ das Integral

$$\int_T \varphi_{e_n^k} \varphi_{e_m^\ell} dx = \begin{cases} 0,1 |T| & \text{falls der Punkt } e_n^k = e_m^\ell, \\ 0,05 |T| & \text{sonst.} \end{cases}$$

Folglich muss geprüft werden, ob die Knoten der Kanten übereinstimmen.

```

compare_nodes_11 = ...
[localEdges(:,1)==localEdges(1,1), localEdges(:,1)==localEdges(2,1), ...
 localEdges(:,1)==localEdges(3,1), localEdges(:,1)==localEdges(4,1), ...
 localEdges(:,1)==localEdges(5,1), localEdges(:,1)==localEdges(6,1)];
compare_nodes_22 = ...
[localEdges(:,2)==localEdges(1,2), localEdges(:,2)==localEdges(2,2), ...
 localEdges(:,2)==localEdges(3,2), localEdges(:,2)==localEdges(4,2), ...
 localEdges(:,2)==localEdges(5,2), localEdges(:,2)==localEdges(6,2)];
compare_nodes_12 = ...
[localEdges(:,1)==localEdges(1,2), localEdges(:,1)==localEdges(2,2), ...
 localEdges(:,1)==localEdges(3,2), localEdges(:,1)==localEdges(4,2), ...
 localEdges(:,1)==localEdges(5,2), localEdges(:,1)==localEdges(6,2)];

```

Für $m, n = 1, \dots, 6$ kann nun $\int_T \kappa \psi_{e_n} \cdot \psi_{e_m} dx$ und $\int_T \psi_{e_n} \cdot \psi_{e_m} dx$ berechnet werden.

```

grad_prod = (grads*(epsilon(mid)+1i*sigma(mid))*grads')';
L2_loc(:, :, elem) = 0.05*Volume*(...
 (grad_prod(localEdges(:,2), localEdges(:,2)))*(ones(6)+compare_nodes_11)+...
 grad_prod(localEdges(:,1), localEdges(:,1)))*(ones(6)+compare_nodes_22)-...
 grad_prod(localEdges(:,2), localEdges(:,1)))*(ones(6)+compare_nodes_12)-...
 grad_prod(localEdges(:,1), localEdges(:,2)))*(ones(6)+compare_nodes_12')));
grad_prod = grads*grads';
loc_scalProd_L2 = 0.05*Volume*(...
 (grad_prod(localEdges(:,2), localEdges(:,2)))*(ones(6)+compare_nodes_11)+...
 grad_prod(localEdges(:,1), localEdges(:,1)))*(ones(6)+compare_nodes_22)-...
 grad_prod(localEdges(:,2), localEdges(:,1)))*(ones(6)+compare_nodes_12)-...
 grad_prod(localEdges(:,1), localEdges(:,2)))*(ones(6)+compare_nodes_12')));

```

So ergibt sich die Matrix $\mathbf{G}_T \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ mit $(\mathbf{G}_T)_{m,n} = (\psi_{e_m}, \psi_{e_n})_{L^2(T)} + (\text{curl } \psi_{e_m}, \text{curl } \psi_{e_n})_{L^2(T)}$ für alle $m, n = 1, \dots, 6$ und deren Inverse.

```
G_inv_local(:, :, elem) = inv(loc_scalProd_Curl + loc_scalProd_L2);
G_local(:, :, elem) = loc_scalProd_Curl + loc_scalProd_L2;
```

Im ersten Ansatz wird zum Abschluss die Spur $\langle \pi_\tau^T \psi_{e_m}, \gamma_\tau^T \psi_{e_n} \rangle_{\partial T} = (\text{curl } \psi_{e_n}, \psi_{e_m})_{L^2(T)} - (\psi_{e_n}, \text{curl } \psi_{e_m})_{L^2(T)}$ für $m, n = 1, \dots, 6$ bestimmt. Dabei ist

$$\begin{aligned} (\text{curl } \psi_{e_n}, \psi_{e_m})_{L^2(T)} &= \text{curl } \psi_{e_n} \cdot \nabla \varphi_{e_m^2} \int_T \varphi_{e_m^1} dx - \text{curl } \psi_{e_n} \cdot \nabla \varphi_{e_m^1} \int_T \varphi_{e_m^2} dx \\ &= 0,25 |T| \text{curl } \psi_{e_n} \cdot (\nabla \varphi_{e_m^2} - \nabla \varphi_{e_m^1}), \end{aligned}$$

wodurch sich der Ausdruck exakt berechnen lässt.

```
loc_curl_psi_psi = 0.25*Volume*(curl*(grads(localEdges(:,2),:)-...
                                grads(localEdges(:,1),:))');
BoundVal_DPG(:, :, elem) = loc_curl_psi_psi-loc_curl_psi_psi';
```

Im zweiten Ansatz wird die Spur $\langle \pi_\tau^T \nabla \varphi_m, \gamma_\tau^T \psi_{e_n} \rangle_{\partial T} = (\text{curl } \psi_{e_n}, \nabla \varphi_m)_{L^2(T)}$ für $n = 1, \dots, 6$ und $m = 1, \dots, 4$ bestimmt.

```
BoundVal_DPG(:, :, elem) = Volume*(grads*curl');
```

Schritt 3. Assemblieren der lokalen Komponenten

Die Beiträge der lokalen Basisfunktionen werden nun den globalen Basisfunktionen zugeordnet. Die Basis von Y_h ist gegeben durch ψ_n^{pw} für $n = 1, \dots, 6\#\mathcal{T}$, wobei für $n = 6k + \ell$ mit $k \in \{0, \dots, \#\mathcal{T} - 1\}$ und $\ell \in \{1, \dots, 6\}$ die Funktion ψ_n^{pw} auf dem k -ten Tetraeder der ℓ -ten lokalen Basisfunktion entspricht und auf jedem anderen Tetraeder $T \in \mathcal{T}$ verschwindet. So lässt sich die Matrix \mathbf{G} mit $(\mathbf{G})_{m,n} = (\psi_m^{\text{pw}}, \psi_n^{\text{pw}})_Y$ für alle $m, n = 1, \dots, 6\#\mathcal{T}$ und deren Inverse \mathbf{G}^{-1} assemblieren.

```
tempI = [ones(6*nrElem,1), 2*ones(6*nrElem,1), 3*ones(6*nrElem,1), ...
         4*ones(6*nrElem,1), 5*ones(6*nrElem,1), 6*ones(6*nrElem,1)]';
tempII = 6*ones(36,1)*(0:(nrElem-1));
tempI = tempI(:) + tempII(:);
tempII = [1:6*nrElem; 1:6*nrElem; 1:6*nrElem; 1:6*nrElem; 1:6*nrElem; 1:6*nrElem];
G_DPG = sparse(tempII(:), tempI(:), G_local(:));
G_inv_DPG = sparse(tempII(:), tempI(:), G_inv_local(:));
```

Mit e_n wird für $n = 1, \dots, \#\mathcal{E}$ die n -te Kante in `n4ed` bezeichnet. Für diese Kante ist die Basisfunktion ψ_{e_n} von $\mathcal{N}d^1(\mathcal{T})$ definiert wie in Satz 5.2.7. Ist die Kante e_n an m -ter Stelle in `ed4el(elem,:)`, so entspricht sie im Tetraeder $T \in \mathcal{T}$ mit Nummer `elem` der m -ten lokalen Basisfunktion. Dank dieser Eigenschaft lässt sich die Matrix \mathbf{B} assemblieren, wobei die Werte $(\mu^{-1} \text{curl } \psi_{e_n}, \text{curl}_{\text{NC}} \psi_m^{\text{pw}})_{L^2(\Omega)}$ in `Curl_DPG(n,m)` und $((\varepsilon + i\sigma)\psi_{e_n}, \psi_m^{\text{pw}})_{L^2(\Omega)}$ in `L2_DPG(n,m)` für $n = 1, \dots, \#\mathcal{E}$ und $m = 1, \dots, 6\#\mathcal{T}$ gespeichert werden.

```
tempEd4el = ed4el';
tempI = [tempEd4el; tempEd4el; tempEd4el; tempEd4el; tempEd4el; tempEd4el];
tempII = [1:6*nrElem; 1:6*nrElem; 1:6*nrElem; 1:6*nrElem; 1:6*nrElem; 1:6*nrElem];
Curl_DPG = sparse(tempI(:), tempII(:), Curl_loc(:));
L2_DPG = sparse(tempI(:), tempII(:), L2_loc(:));
```

Für die Spur wird im ersten Ansatz die selbe Nummerierung der Basisfunktionen wie für die Basis von $\mathcal{N}d^1(\mathcal{T})$ verwendet.

```
BoundVal_DPG = sparse(tempI(:), tempII(:), BoundVal_loc(:));
```

Im zweiten Ansatz lässt sich die Basisfunktion $\gamma_\tau^T \nabla \varphi_n$ der diskreten Spur $\gamma_\tau^T \nabla S^1(\mathcal{T})$ mit dem n -ten Knoten in $c4n$ identifizieren.

```
tempn4el = n4el(:, 1:4);
tempn4el = tempn4el';
tempI = [tempn4el; tempn4el; tempn4el; tempn4el; tempn4el; tempn4el];
tempII = [1:6*nrElem; 1:6*nrElem; 1:6*nrElem; 1:6*nrElem];
BoundVal_DPG = sparse(tempI(:), tempII(:), BoundVal_loc(:));
```

Um in den numerischen Experimenten mit verschiedenen Frequenzen ω zu arbeiten, ohne die lokalen Komponenten neu zu berechnen, wird sie erst am Ende der Assemblierung von \mathbf{B} , im Code als `A_DPG` bezeichnet, berücksichtigt.

```
A_DPG = [Curl_DPG-omega^2*real(L2_DPG)-1i*omega*imag(L2_DPG);
         BoundVal_DPG];
```

Die rechte Seite $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{6\#\mathcal{T}}$ mit $F_n = i\omega(J, \psi_n^{\text{pw}})_{L^2(\Omega)}$ wird abschließend mittels der auf Gauß-Quadratur basierenden Funktion `integrate3d` des `afem-3d`-Pakets der Arbeitsgruppe von Prof. Carstensen in der Unterfunktion `computeRhsDPG` bestimmt.

```
RhsDPG = computeRhsDPG(J, volume4e, grad4e, c4n, n4el, localEdges, degreeRHS);
```

Schritt 4. Lösen

Das Programm bietet die Möglichkeit, Probleme mit inhomogene Dirichlet-Randbedingungen $\gamma_\tau E = \gamma_\tau H$ für ein gegebenes $H \in H(\text{curl}, \Omega; \mathbb{C}^3)$ zu berechnen. Im Code wird H durch `Eimp` repräsentiert und auf jeder Kante $e_n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}(\Omega)$ approximiert durch eine stückweise konstante Funktion, die dem Integralmittel $f_{e_n} \nu \times H$ bis auf Quadraturfehler der Mittelpunktsregel entspricht. Die erste Komponente $E_h \in \mathcal{N}d^1(\mathcal{T})$ der Lösung $(E_h, \hat{h}_h) \in \mathcal{N}d^1(\mathcal{T}) \times \gamma_\tau \mathcal{N}d^1(\mathcal{T})$ wird in einen Teil mit Nullrand und einen, der die approximierten Randbedingung erfüllt, zerlegt. Genauer gesagt ist $E_h = E_h^0 + E_h^H$ mit $E_h^0 = \sum_{n=1}^{\#\mathcal{E}} E_n^0 \psi_{e_n} \in \mathcal{N}d_0^1(\mathcal{T})$ und $E_h^H = \sum_{n=1}^{\#\mathcal{E}} E_n^H \psi_{e_n} \in \mathcal{N}d^1(\mathcal{T})$ mit $E_n^H = 0$ für alle $e_n \in \mathcal{E}(\Omega)$.

```
BC_Gamma1 = zeros(nrEdges, 1);
for e=1:size(ed4Db, 1);
    edge = ed4Db(e);
    coords = c4n(n4ed(edge, :), :);
    tangent = coords(2, :) - coords(1, :);
    BC_Gamma1(edge) = tangent * Eimp(0.5 * (coords(2, :) + coords(1, :)));
end
EhDPG = BC_Gamma1;
```

Mit einem Nullvektor \hat{h}^H , welcher im ersten Ansatz `hDPG=zeros(nrEdges,1)` und im zweiten `hDPG=zeros(nrNodes,1)` entspricht, lässt sich das inhomogene Sattelpunktproblem (6.6) umformulieren zum homogenen Problem

$$\mathbf{B}^\top \mathbf{G}^{-1} \mathbf{B} \begin{pmatrix} E^0 \\ \hat{h}^0 \end{pmatrix} = \mathbf{B}^\top \mathbf{G}^{-1} \left(\mathbf{F} - \mathbf{B} \begin{pmatrix} E^H \\ \hat{h}^H \end{pmatrix} \right).$$

Zum Lösen werden die Kanten des Dirichlet-Rands `ed4Db` entfernt. Die Freiheitsgrade ergeben sich im ersten Ansatz aus `dof_DPG = [setdiff(1:nrEdges,ed4Db), nrEdges+1:2*nrEdges]`. Im zweiten Ansatz wird zusätzlich der erste Koeffizient p_1 der Spur $\gamma_\tau^T \nabla p_h = \gamma_\tau^T \sum_{n=1}^{\#\mathcal{N}} p_n \varphi_n$ auf null gesetzt, da die Spur $\gamma_\tau^T \hat{h}_h \subset \gamma_\tau^T \nabla S^1(\mathcal{T})$ sonst nicht eindeutig darstellbar wäre. Somit ist im zweiten Ansatz `dof_DPG = [setdiff(1:nrEdges,ed4Db), nrEdges+2:nrNodes+nrEdges]`.

```
RhsResiduum = 1i*omega*RhsDPG;
Eh_hh = [EhDPG;hDPG];
RhsDPG = RhsResiduum-A_DPG.'*Eh_hh;
Eh_hh(dof_DPG) = (A_DPG(dof_DPG,:) * G_inv_DPG*A_DPG(dof_DPG,:).') \ ...
    (A_DPG(dof_DPG,:) * G_inv_DPG*RhsDPG);
EhDPG = Eh_hh(1:nrEdges);
```

Im ersten Ansatz entspricht `hDPG = Eh_hh(nrEdges+1:2*nrEdges)` dem Koeffizientenvektor der Spur und im zweiten `hDPG = Eh_hh(nrEdges+1:nrEdges+nrNodes)`. In beiden Ansätzen wird als letzter Schritt die Norm des Residuums bestimmt.

```
Residuum_temp = A_DPG.'*Eh_hh-RhsResiduum;
Residuum_DPG = G_inv_DPG * Residuum_temp;
NormResiduum_DPG = sqrt(Residuum_temp'*Residuum_DPG);
```

7.2. Experimente

Anhand von Beispielen wird nun die Funktionalität des Codes demonstriert. Dabei werden Unterschiede des ersten, zweiten sowie eines neu eingeführten dritten Ansatzes aufgedeckt und diskutiert.

Experiment 1. Codevalidierung und Performance

Das erste Beispiel stammt aus [CDG15]. Die Materialparameter sind definiert als $\varepsilon = \mu = 1$ und $\sigma = 0$. Die Frequenz beträgt $\omega = 1$ und beim Gebiet handelt es sich um den Einheitswürfel $\Omega = (0, 1)^3$. Wie so häufig in der Literatur wird eine Lösung $E \in H(\text{curl}, \Omega; \mathbb{C}^3)$ vorgegeben und die rechte Seite $J \in L^2(\Omega; \mathbb{C}^3)$ sowie die Randbedingung entsprechend angepasst. Die Lösung ist

$$E(x, y, z) = \begin{pmatrix} \sin \pi x \sin \pi y \sin \pi z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \text{curl curl } E(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2\pi^2 \sin \pi x \sin \pi y \sin \pi z \\ \pi^2 \cos \pi x \cos \pi y \cos \pi z \\ \pi^2 \cos \pi x \sin \pi y \cos \pi z \end{pmatrix}.$$

Die rechte Seite ist $J = (i\omega)^{-1}(\text{curl curl } E - E)$ und die Dirichlet-Randbedingung lautet $\nu \times E \equiv 0$. Die Lösung wird sowohl mit der Nédélec-FEM als auch mit dPG-Methode mit Test- und Ansatzräumen des ersten und zweiten Ansatzes berechnet. Die Triangulierungen sind für alle Methoden die selben. Anders als im zweidimensionalen Fall ist eine uniforme Verfeinerung der Triangulierung ohne Weiteres nicht möglich. Der Verfeinerungsalgorithmus `refineUniform3D` des `afem-3d`-Pakets verwendet daher den adaptiven Verfeinerungsalgorithmus `refine3D`, wobei alle Elemente der Triangulierung zum Verfeinern markiert werden. Wie sich in Experimenten heraus stellte, reduzierte sich mit dieser Verfeinerungsstrategie der Fehler nur bei jeder dritten Iteration signifikant. Als Konsequenz wird die aus fünf

Tetraedern bestehende Ausgangstriangulierung zweimal mit `refineUniform3D` verfeinert, bevor die erste Berechnung durchgeführt wird. Jede weitere Verfeinerung der Triangulierung wird durch dreimaliges Anwenden von `refineUniform3D` generiert.

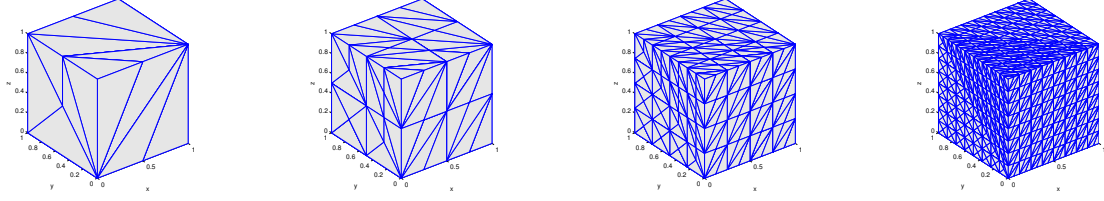


Abbildung 7.1.: Die Triangulierung des Gebiets Ω und die ersten drei Verfeinerungen.

Die Lösung der Nédélec-FEM wird mit E^{Ned} , die des ersten Ansatzes der dPG-Methode mit E^{dPG1} und die des zweiten mit E^{dPG2} bezeichnet. Für ein $E_h \in \mathcal{N}d^1(\mathcal{T})$ approximiert die Funktion `error4eNedL2` den Fehler $\|E - E_h\|_{L^2(T)}^2$ und `error4eNedCurl` den Fehler $\|\text{curl}(E - E_h)\|_{L^2(T)}^2$ auf jedem Tetraeder $T \in \mathcal{T}$ mittels der Funktion `integrate3d`. Des Weiteren lässt sich die berechnete Spur der dPG-Methode eindeutig mit einer Funktion $H^{\text{dPG1}} \in \mathcal{N}d^1(\mathcal{T})$ im ersten Ansatz und $\nabla p^{\text{dPG2}} \in \nabla S^1(\mathcal{T})$ im zweiten identifizieren, sodass der Fehler zur exakten Spur $\gamma_\tau^\mathcal{T} \text{curl } E$ in der $\|\bullet\|_{H^{-1/2}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)}$ -Norm nach oben durch $\|\text{curl } E - H^{\text{dPG1}}\|_{H(\text{curl}, \Omega)}$ bzw. $\|\text{curl } E - \nabla p^{\text{dPG2}}\|_{H(\text{curl}, \Omega)}$ abgeschätzt werden kann. Neben der Spur liefert die dPG-Methode ein Residuum, welches im ersten Ansatzes als η^{dPG1} und im zweiten als η^{dPG2} bezeichnet wird. Die Anzahl der Freiheitsgrade wird `ndof` genannt, wobei mit der Anzahl der Freiheitsgrade die Anzahl der inneren Kanten gemeint ist, was den Freiheitsgraden von $E_h \in \mathcal{N}d_0^1(\mathcal{T})$ entspricht. Nimmt man bei der dPG-Methode die Komponenten der Spur hinzu, so erhöht sich die Anzahl der Freiheitsgrade um $\#\mathcal{E}$ im ersten und um $\#\mathcal{N} - 1$ im zweiten Ansatz.

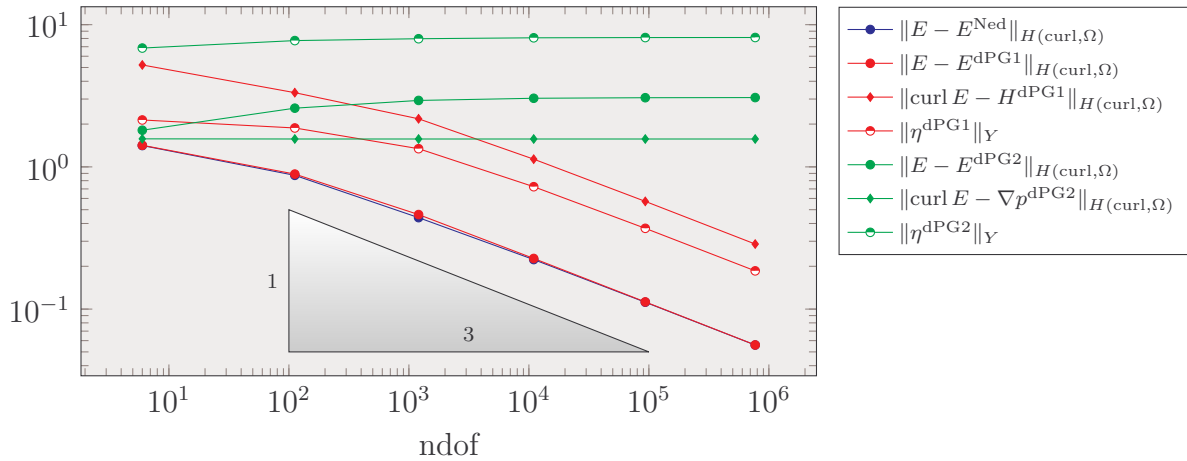


Abbildung 7.2.: Konvergenzplot des ersten Experiments.

Wie Abbildung 7.2 zu entnehmen ist, entspricht der Fehler der diskreten Lösung E^{Ned} in etwa dem der Lösung E^{dPG1} . Auch das Residuum und die obere Schranke des Fehlers

der Spur für die erste dPG-Methode haben ab der dritten Iteration die theoretisch optimale Konvergenzrate. Zuvor konvergieren beide Verfahren langsamer. Dieser Effekt lässt sich, wie [CDG15, Figure 3] zu entnehmen ist, auch nicht durch die Vergrößerung des Testraums Y_h vermeiden. Der zweite Ansatz konvergiert anscheinend nicht gegen die exakte Lösung, was den Vorüberlegungen entspricht. Die Leistung des Programms betreffende In-

Iteration	ndof	cNed	cDPG1	cDPG2	tgetDPG1	tsolveNed	tsolveDPG1	tsolveDPG2
1	6	8	1381	481	0,3s	0,24s	0,24s	0,27s
2	112	1016	11569	27551	0,13s	0,10s	0,10s	0,27s
3	1204	23312	55457	804581	0,22s	0,48s	0,64s	0,71s
4	10968	131472	262470	21922485	0,94s	2,13s	2,85s	2,09s
5	93296	874100	1267596	643739633	6,19s	20,88s	48,70s	29,91s
6	768992	-	-	-	48,25s	317,95s	1151,94s	613,73s

Tabelle 7.1.: Technische Daten des ersten Experiments.

formationen sind in Tabelle 7.1 aufgelistet. Neben den Freiheitsgraden der Nédélec-FEM ndof ist die auf ganze Zahlen gerundete Kondition cNed, cDPG1 und cDPG2 der Matrizen aus den zu lösenden Gleichungssystemen der Nédélec-FEM sowie der ersten und zweiten dPG-Methode angegeben. Bei der sechsten Iteration konnte diese von Matlab nicht mehr berechnet werden. Ferner ist die benötigte Zeit tgetDPG1 zur Berechnung der Matrix $\mathbf{B}^\top \mathbf{G}^{-1} \mathbf{B}$ mit der ersten dPG-Methode angegeben. Durch das parallelisierte Arbeiten ist sie bei vielen Freiheitsgraden wesentlich kleiner als die benötigte Zeit tsolveNed, tsolveDPG1 und tsolveDPG2 zum Lösen der Gleichungssysteme mit dem Backslash-Operator in Matlab. Ein weiterer Nachteil des Backslash-Operators ist, dass aufgrund von fehlendem Speicher die siebte Iteration der ersten dPG-Methode nicht ausgerechnet werden kann.

Experiment 2. Große Frequenzen

Das zweite Experiment stammt aus [FW14]. Die Arbeit untersucht den sogenannten *pollution*-Effekt, welcher ausführlich in [BS00] für die Helmholtz-Gleichung beschrieben und analysiert ist. Neben der in dieser Masterarbeit geschilderten Indefinitheit der Maxwell-Gleichungen ist dies ein weiterer vorasymptotischer Effekt, der das numerische Lösen der Gleichungen erschwert. Zum Testen dieses Effekts wird die Funktion

$$E(x, y, z) := \begin{pmatrix} e^{i\omega z} \\ e^{i\omega x} \\ e^{i\omega y} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \text{curl curl } E(x, y, z) = \omega^2 \begin{pmatrix} e^{i\omega z} \\ e^{i\omega x} \\ e^{i\omega y} \end{pmatrix}$$

definiert. Mit den Materialparametern $\varepsilon = \mu = 1$ und $\sigma = 0$ löst sie für beliebige Frequenzen $\omega > 0$ die Maxwell-Gleichung $\text{curl curl } E - \omega^2 E = i\omega J$ mit rechter Seite $J \equiv 0$. Die Dirichlet-Randbedingungen werden entsprechend angepasst. Beim Gebiet handelt es sich erneut um das Einheitsquadrat $\Omega = (0, 1)^3$. Abbildung 7.3 zeigt die Größe des relativen Fehlers in Abhängigkeit von der Frequenz ω . Neben dem ersten Ansatz der dPG-Methode wird eine weitere dPG-Methode verwendet, welche im Folgenden als dritte dPG-Methode bezeichnet wird. In ihr ist die Herleitung der dPG-Variationsformulierung (vgl. Kapitel 6.4 bzw. [CDG15, Abschnitt 7.2]) etwas anders. So ersetzt $\hat{h} \in H^{-1/2}(\text{div}_{\partial\mathcal{T}}, \partial\mathcal{T}; \mathbb{C}^3)$ nicht die Spur $\gamma_\tau^\mathcal{T} \mu^{-1} \text{curl } E$, sondern die Spur $(i\omega)^{-1} \gamma_\tau^\mathcal{T} \mu^{-1} \text{curl } E$. Mit diesem Ansatz entspricht \hat{h}

der Spur des Magnetfeldes H aus (4.4), denn $(i\omega)^{-1}\mu^{-1}\operatorname{curl} E = H$. Dies resultiert in die Sesquilinearform

$$b^{\text{DPG3}}((E, \hat{h}), F^{\text{pw}}) = (\mu^{-1}\operatorname{curl} E, \operatorname{curl}_{\text{NC}} F^{\text{pw}})_{L^2(\Omega)} - \omega^2(\kappa E, F^{\text{pw}})_{L^2(\Omega)} + i\omega\langle \pi_{\tau}^T F^{\text{pw}}, \hat{h} \rangle_{\partial\mathcal{T}}$$

für $(E, \hat{h}) \in X = H_0(\operatorname{curl}, \Omega; \mathbb{C}^3) \times \gamma_{\tau}^T H(\operatorname{curl}, \Omega; \mathbb{C}^3)$ und $F^{\text{pw}} \in H(\operatorname{curl}, \mathcal{T}; \mathbb{C}^3)$. Ferner wird die Norm im Raum $Y^{\text{DPG3}} := H(\operatorname{curl}, \mathcal{T}; \mathbb{C}^3)$ definiert durch

$$\|F^{\text{pw}}\|_{Y^{\text{DPG3}}}^2 := \sum_{T \in \mathcal{T}} h_T^{-2} \|F^{\text{pw}}|_T\|_{L^2(T)}^2 + \|\operatorname{curl} F^{\text{pw}}|_T\|_{L^2(T)}^2. \quad (7.1)$$

Dies soll die Probleme der Skalierung im Beweis von Satz 6.5.11 umgehen. Das Programm ließ sich durch die Multiplikation von h_T^2 mit `loc_scalProd_L2` und einer entsprechenden Definition von `A_DPG` modifizieren, sodass es auch mit diesem Ansatz lösen kann.

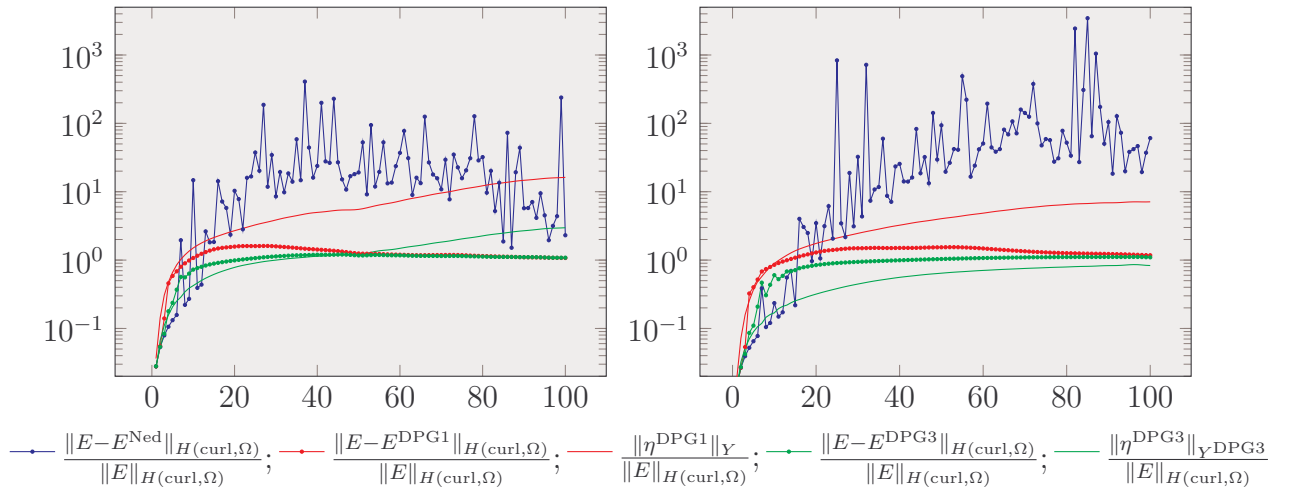
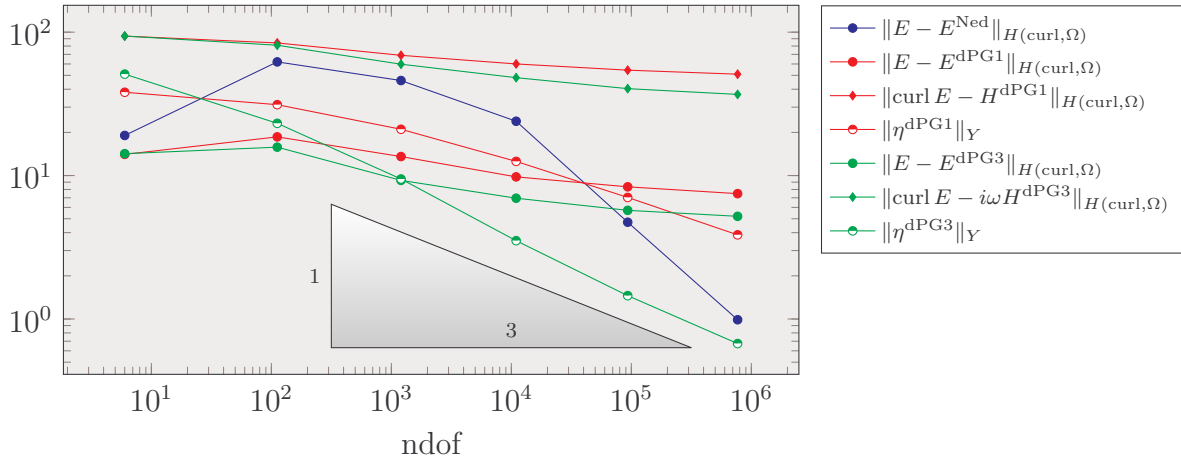


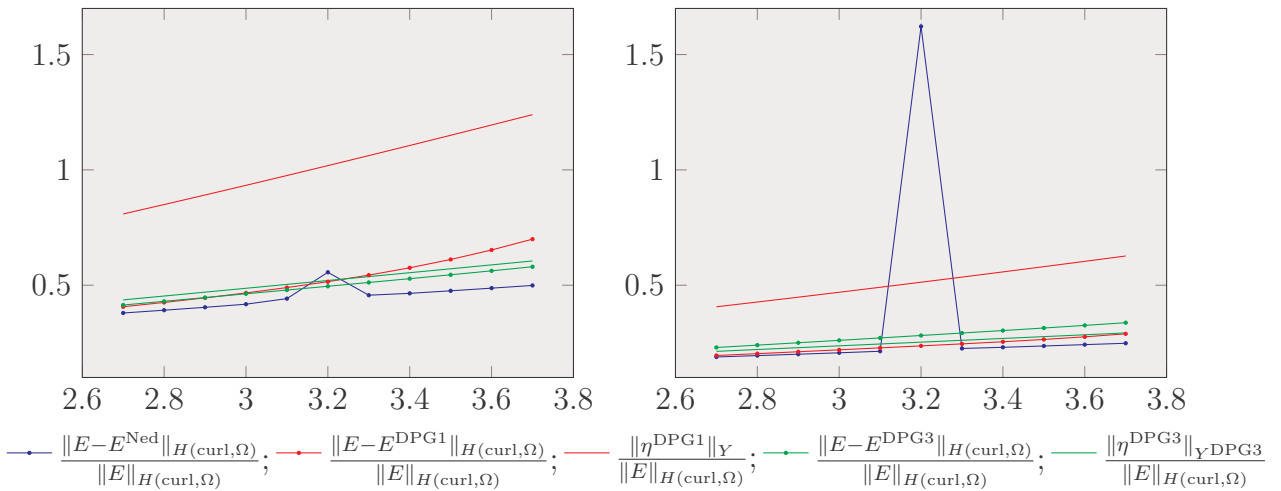
Abbildung 7.3.: Fehler im zweiten Experiment in Abhängigkeit von der Frequenz ω , wobei links $\text{ndof} = 10968$ und rechts $\text{ndof} = 93296$.

Die Ergebnisse des Experiments sind in Abbildung 7.3 und 7.4 zu sehen. Der Fehler jeder Methode wächst bei größer werdender Frequenz ω stark an. Dabei überlagern sich zwei Phänomene. Zum einen ist es der *pollution*-Effekt. Dieser macht sich in jeder Methode bemerkbar, denn trotz der hohen Anzahl von 93296 Freiheitsgrade ist der Fehler bereits bei moderat hohen Frequenzen sehr groß. Der zweite Effekt wird durch Eigenfunktionen nahe diskreter Eigenwerte bedingt. Dies führt zu sich stark unterscheidenden Fehlern in der Nédélec-FEM, wohingegen die dPG-Methoden anscheinend nicht davon beeinflusst werden. Eine genauere Untersuchung dieses Effekts erfolgt im dritten Experiment. Abbildung 7.6 zeigt ebenfalls die Probleme der Nédélec-FEM in einem vorasymptotischen Bereich. Gleichzeitig offenbart sie, dass die dPG-Methode nicht mit der optimalen Geschwindigkeit konvergiert. Dies liegt vermutlich an der verschwindenden rechten Seite, da sie bei anderen Experimenten auch bei moderat hohe Frequenzen optimal konvergierte, und wird im sechsten Experiment genauer geschildert.

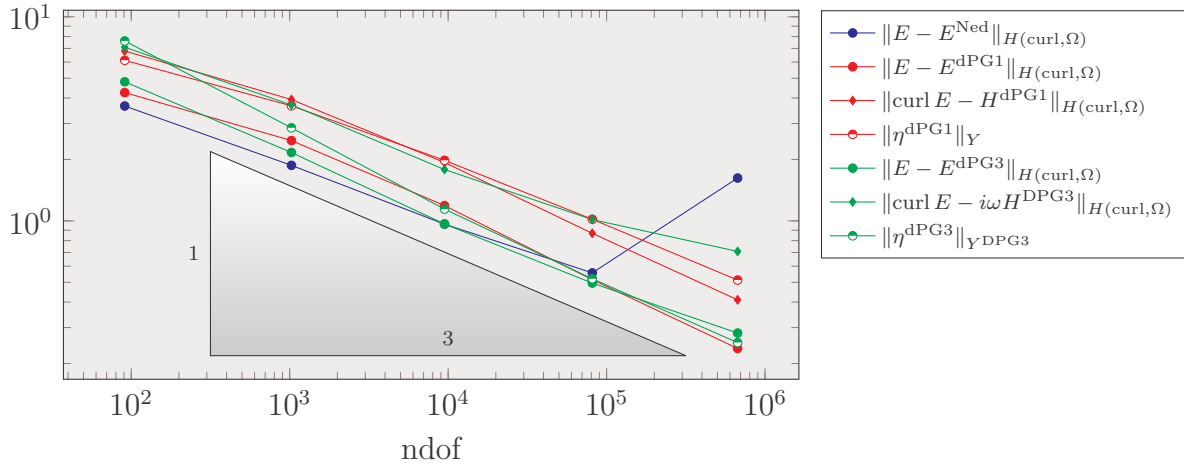

 Abbildung 7.4.: Fehler im zweiten Experiment mit $\omega = 7$.

Experiment 3. Frequenzen nahe eines Eigenwerts

Da im vorangegangenen Experiment der *pollution*-Effekt stark dominiert hat, wird das Experiment mit kleineren Frequenzen wiederholt. Um trotzdem die Stabilität der dPG-Methode nahe eines Eigenwerts zu untersuchen, wird anstelle des Einheitswürfel die *Fichera's corner domain* $\Omega = (-1, 1)^3 \setminus [0, 1]^3$ betrachtet. Die rechte Seite J verschwindet erneut und die Randbedingungen sind so angepasst, dass die Funktion E aus dem vorherigen Experiment die Lösung ist. Für dieses Gebiet sind keine exakten Eigenwerte der Maxwell-Eigenwertprobleme bekannt. Numerische Experimente mit meinem Programm legen nahe, dass der kleinste nicht verschwindende Eigenwert λ in etwa den Wert 3,2 annimmt und einfach ist. Dies wird durch die Benchmark-Berechnungen in [Dau04] untermauert.


 Abbildung 7.5.: Fehler im dritten Experiment in Abhängigkeit von der quadrierten Frequenz ω^2 , wobei links $\text{ndof} = 81200$ und rechts $\text{ndof} = 671136$.

Abbildungen 7.5 und 7.6 bestätigt die Vermutung des zweiten Experiments. Während der Fehler der Nédélec-FEM mit $\omega^2 = 3,2$ groß wird, wirkt sich der nahe Eigenwert nicht


 Abbildung 7.6.: Fehler im dritten Experiment mit $\omega^2 = 3,2$.

sichtbar auf der Fehler der dPG-Methoden aus. Der Effekt kann für jede beliebige Iteration noch deutlicher gemacht werden, indem ω^2 als diskreter Eigenwert gewählt wird. Des Weiteren lässt sich vermuten, dass die erste dPG-Methode etwas anfälliger gegenüber dem *pollution*-Effekt ist als der dritte Ansatz ist, da sowohl der Fehler als auch das Residuum in Abhängigkeit von der steigenden Frequenz schneller anwachsen. Dies fiel bereits im zweiten Experiment auf. Im Gegensatz zum zweiten Experiment ist die Konvergenzrate beider dPG-Methoden von Anfang an optimal.

Experiment 4. Ein adaptives Verfahren mit bekannter Lösung

Um effizient singuläre Lösungen, wie sie bei der einspringenden Ecke der *Fichera's corner domain* oder bei unstetigen Materialparametern auftreten, zu approximieren, werden häufig adaptive Verfahren angewandt. Standardmäßig beinhalten sie die sich wiederholenden Schritte

$$\text{LÖSEN} \longrightarrow \text{SCHÄTZEN} \longrightarrow \text{MARKIEREN} \longrightarrow \text{VERFEINERN}. \quad (7.2)$$

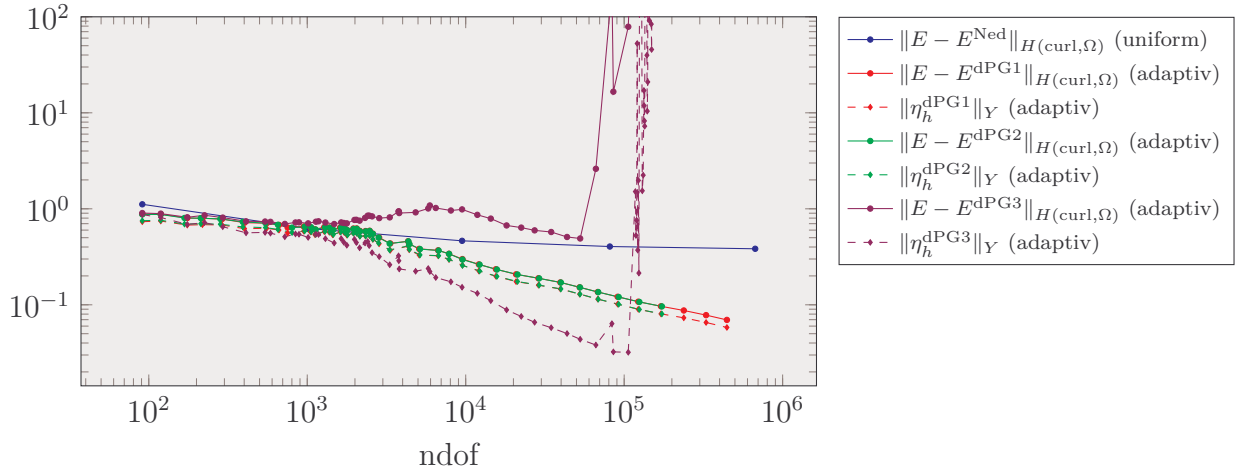
In [JZZ13] wird zur Demonstration eines solchen adaptiven Algorithmus die Funktion

$$E(x, y, z) := \nabla p(x, y, z) \quad \text{mit} \quad p(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 + 10^{-6})^{1/4}$$

betrachtet. Durch die Wahl von $\varepsilon = \mu = 1, \sigma = 0$ und $\omega = 1$ löst sie die Maxwell-Gleichung

$$\text{curl curl } E - E = i\omega J$$

mit rechter Seite $J = iE$ und angepassten Randbedingungen. Beim Gebiet handelt es sich erneut um die *Fichera's corner domain*. Um mit der dPG-Methode singuläre Lösungen zu approximieren, lassen sich, motiviert durch die a posteriori Fehleranalyse im Satz 6.2.3, die lokalen Beiträge $(\text{curl } \eta_h|_T, \text{curl } \eta_h|_T)_{L^2(T)} + (\eta_h|_T, \eta_h|_T)_{L^2(T)}$ des Residuums $\eta_h \in Y_h$ auf jedem Tetraeder als Fehlerindikator nutzen. Diese Werte ermöglichen das Markieren von Tetraedern $T \in \mathcal{T}$ mittels *Dörfler marking strategy* mit *bulk parameter* $\Theta = 0,3$ (vgl.


 Abbildung 7.7.: Fehler im vierten Experiment mit $\omega = 1$.

[Dör96]). Die markierten Tetraeder werden anschließend mit der `refine3d`-Funktion des `afem-3d`-Pakets verfeinert. Daraus ergibt sich eine neue Triangulierung und die Schleife (7.2) beginnt von vorn.

Zum Vergleich lässt sich das selbe Problem mit uniformer Verfeinerung lösen. In Abbildung 7.7 ist dazu der Fehler der Nédélec-FEM dargestellt. Der Fehler der ersten bis dritten dPG-Methode mit uniformer Verfeinerung ist nahezu identisch. Unabhängig von der Wahl der dPG-Methode wird am Anfang mit der beschriebenen adaptiven Verfeinerungsstrategie das gesamte Gebiet fast gleichmäßig verfeinert, sodass sich auch hier die Ergebnisse der drei Methoden nicht signifikant unterscheiden. Ab einer Anzahl von ca. 10^3 Freiheitsgraden kommt es zu einer konzentrieren Verfeinerung nahe der Singularität im Koordinatenursprung. Infolgedessen beginnen die adaptiven ersten und zweiten dPG-Methoden wesentlich schneller zu konvergieren als der uniforme Ansatz. Gleichzeitig wächst der Fehler der dritten Methode. Zwar scheint dieser ab einer Anzahl von 10^4 Freiheitsgraden wieder zu konvergieren, wächst jedoch ab einer Anzahl von 66301 Freiheitsgraden schlagartig an.

Das Ergebnis des Experiments ist in zweierlei Hinsicht interessant. Während der zweite Ansatz der dPG-Methode im ersten Experiment versagte, liefert er in diesem Experiment ähnlich gute Ergebnisse wie der erste Ansatz. Dies deckt sich mit den theoretischen Überlegungen, denn da die Rotation der Lösung verschwindet, lässt sich deren Spur als Gradient der Nullfunktion darstellen. Diese kann durch den Raum $\gamma_\tau^T \nabla S^1(\mathcal{T})$ exakt approximiert werden. Wesentlich überraschender ist das Versagen des dritten Ansatzes. Zwar war der dritte Ansatz stellenweise besser als der erste bei uniformen Verfeinerungen, für adaptive Verfahren scheint er sich jedoch nicht zu eignen. Dies steht nicht im Widerspruch zu [CDG15]. Dort wird die gewichtete Norm (7.1) zwar eingeführt, jedoch lediglich zum Abschätzen der nicht gewichteten Norm genutzt, da sich das Gewicht h_T herauskürzen bzw. durch die größte Gitterweite der Ausgangstriangulierung beschränken lässt.

Experiment 5. Ein adaptives Verfahren ohne bekannte Lösung

Das fünfte Experiment stammt aus [CDG15]. Dabei wird die (verschobene) *Fichera's corner domain* um einen weiteren Würfel ergänzt, sodass das als *Fichera oven* bezeichnete Gebiet $\Omega = (0, 2)^3 \setminus [1, 2]^3 \cup (0, 1) \times (0, 1) \times [2, 3)$ ist. Die Materialparameter betragen $\varepsilon = \mu = 1$ und $\sigma = 0$. Die Wellenlänge entspricht $\omega = 5$. Auf dem Rand Γ ist die Dirichlet-Randbedingung

$$\nu \times E(x, y, z) = \begin{cases} \nu \times (\sin \pi y, 0, 0)^\top & \text{für } z = 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben und für die rechte Seite gilt $J \equiv 0$. Die exakte Lösung dieses Problems ist unbekannt, sodass lediglich das Residuum als Fehlerindikator genutzt wird. Die Verfeinerung erfolgt wie im vierten Experiment mit *bulk parameter* $\Theta = 0,3$. Zur Veranschaulichung der Verfeinerung sind die Mittelpunkte aller in vorangegangenen Verfeinerungsschritten markierten Tetraeder in Abbildung 7.8 durch rote Punkte gekennzeichnet. Auffällig ist, dass lediglich Tetraeder mit Mittelpunkt in $(0, 1) \times (0, 1) \times [2, 3)$ verfeinert werden. Im Gegensatz dazu verfeinert der in [CDG15] getestete Algorithmus ab der fünften Iteration auch anderer Bereiche in Ω stark. Die Lösung der ersten dPG-Methode und der Konvergenzplot sind

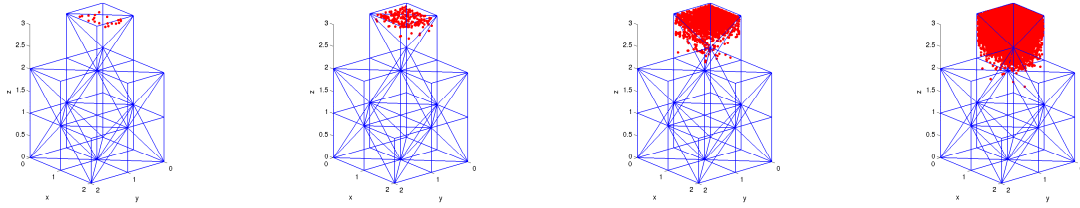


Abbildung 7.8.: Mittelpunkte aller markierten Tetraeder bis zur 5., 10., 15. und 20. Verfeinerung.

in Abbildung 7.9 zu sehen. Die Lösung suggeriert, dass das Feld am oberen Rand groß ist und nach unten hin schnell verschwindet. Dies ist erneut ein Unterschied zu dem Ergebnis [CDG15]. Die in Figure 5 visualisierte Lösung verschwindet auch an weiteren Stellen nicht. Mögliche Gründe für die Unterschiede gibt es viele. Zum einen ist die rechte Seite des Experiments in [CDG15] nicht angegeben. Dass es sich dabei um $J \equiv 0$ handelt, basiert lediglich auf Beobachtungen beim Experimentieren. Ein weiterer Grund ist eine mögliche fehlerhafte Implementierung. Jedoch scheint der Algorithmus in allen Experimenten mit bekannter Lösung zu funktionieren. Die wahrscheinlichste Ursache für das (vermutlich) schlechte Ergebnis ist der zu kleine Testraum, welcher in [CDG15] um drei Polynomgrade größer ist.

Experiment 6. Probleme bei verschwindender rechter Seite

Alarmiert durch die Probleme beim zweiten und fünften Experiment wird nun erneut eine verschwindende rechte Seite J betrachtet. Das Gebiet ist das Einheitsquadrat und auf dem

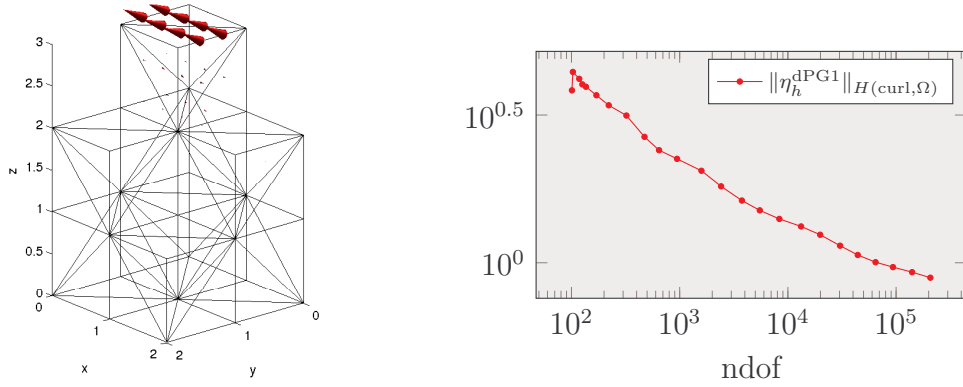


Abbildung 7.9.: Lösung der 23. Verfeinerung und Konvergenzplot.

Rand gilt

$$\nu \times E(x, y, z) = \begin{cases} (0, 1, 0)^\top & \text{für } z = 1, \\ (0, 0, 0)^\top & \text{sonst,} \end{cases}$$

die Materialparameter sind $\varepsilon = \mu = 1$ und $\sigma = 0$. Ferner beträgt die Frequenz $\omega = 5$. Wie in Abbildung 7.10 zu sehen ist, ähneln sich die Lösungen im oberen Teil des Würfels

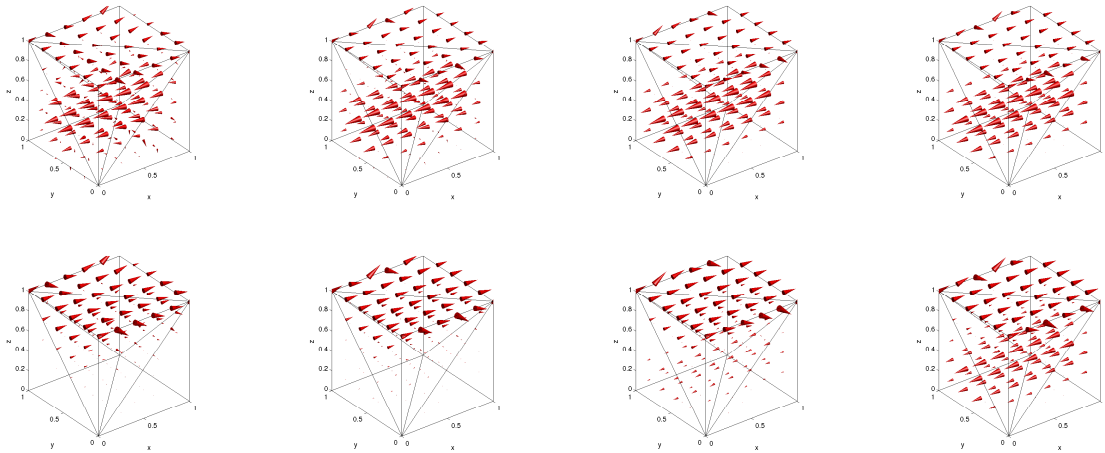


Abbildung 7.10.: Lösungen der Nédélec-FEM (oben) und der ersten dPG-Methode (unten) in der dritten (links) bis sechsten (rechts) Iteration.

sehr. Nach unten hin scheint die dPG-Lösung jedoch zu verschwinden, wohingegen die Nédélec-FEM suggeriert, dass die Feldlinien entgegen der x -Richtung verlaufen. Erst ab der fünften Iteration ist dieser Effekt auch bei der dPG-Methode zu erkennen und wird durch die sechste Iteration bestätigt. Auch weitere Experimente (wie das zweite) haben gezeigt, dass die dPG-Lösung bei verschwindender rechter Seite in den ersten Iterationen fern vom Rand nahezu verschwindet. Die Ursache darin liegt vermutlich in der lokalen Definition der Testfunktionen, bedarf allerdings weiterer Untersuchung.

8. Zusammenfassung und Ausblick

Die Maxwell-Gleichungen sind sowohl von großer theoretischer als auch praktischer Bedeutung. Standardmäßig werden sie mit der Nédélec-FEM gelöst. Jedoch versagt diese Methode bei Frequenzen nahe diskreter Eigenwerte. Ziel war es daher, die dPG-Methode auf die Maxwell-Gleichungen anzuwenden und ihre Stabilität zu überprüfen. Um dies zu tun, wurde der Grund der Instabilität in Abschnitt 5.3 untersucht. Die Analyse mündete in einer expliziten inf-sup-Konstanten bei verschwindender Konduktivität $\sigma = 0$. Auch wenn die angewandte Beweistechnik nicht neu war, gibt es meines Wissens nach in der Literatur keine Angabe dieser Konstanten. Nachdem das Problem der Nédélec-FEM offenbart wurde, ging es an die Lösung der Maxwell-Gleichungen mittels der dPG-Methode. Diese wurde zunächst abstrakt eingeführt. Dabei wurde die Verwendung gebrochener Testräume motiviert und anschließend eine entsprechende Variationsformulierung für die Maxwell-Gleichungen hergeleitet. Zum Beweis der Wohlgestelltheit des daraus resultierenden Variationsproblems wurden zwei Hilfsmittel aus [CDG15] benötigt. Das erste war das Splitting Lemma (Lemma 2.2.5). Dank eines überarbeiteten Beweises konnte die darin auftretende Abschätzung sogar verbessert werden. Das zweite war das Dualitätslemma (Lemma 6.3.7). Dieses wurde im Abschnitt 3.3 genutzt, um die Spuren von $H(\text{curl})$ -Funktionen wesentlich einfacher herzuleiten als in den Standardreferenzen [BC01] und [BCS02]. Zusammen ergaben sie eine berechenbare inf-sup-Konstante und die Existenz einer eindeutigen Lösung. Zur Berechnung der Lösung musste der Ansatz- und Testraum diskretisiert werden. Anders als in [CDG15] wurde dabei probiert, mit verschiedenen Testräumen niedriger Ordnung zu arbeiten. Der Nachweis der Existenz eines Fortin-Operators ist dabei im ersten und dritten Ansatz gescheitert. Im zweiten Ansatz gelang er, jedoch scheitert die a priori Abschätzung, falls die Spur \hat{h} nicht als Gradient eine $H^1(\Omega; \mathbb{C}^3)$ -Funktion ausgedrückt werden kann. Numerisch verhielt sich der erste Ansatz jedoch gut und die vermutete Stabilität nahe eines diskreten Eigenwerts konnte gezeigt werden. Dabei offenbarten sich, dass die dPG-Methode (wie auch die Nédélec-FEM) anfällig gegenüber dem *pollution*-Effekt zu sein scheint. Zum anderen gab es Probleme bei inhomogenen Randbedingungen und der adaptiven Verfeinerung mit dem Residuum als Fehlerindikator.

Um die dPG-Methode folglich praktikabel zu machen, müssen drei Aspekte genauer untersucht werden. Der erste beinhaltet den Nachweis einer diskreten inf-sup-Bedingung oder die Konstruktion eines Fortin-Operators für Testräume niedriger Ordnung. Ein Ansatz dazu befindet sich in der Analyse der zweiten dPG-Methode. Dieser nutzt das Splitting Lemma, um den Raum der Nédélec-Funktionen in Funktionen mit Eigenwerten nahe der Frequenz ω und welche fern der Frequenz ω aufzuspalten. Während für den ersten Raum Nédélec-Funktionen ausreichend für das Bestimmen einer guten inf-sup-Konstante sind, müsste für den zweiten mit einem passenden Testraum zumindest der L^2 -Anteil abgeschätzt werden. Der zweite Aspekt ist die Untersuchung des Problems mit inhomogenen Neumann- bzw. Dirichlet-Randbedingungen. Da die numerischen Experimente keine guten Resultate liefern, muss dabei die Methode vermutlich modifiziert werden. Der letzte

Aspekt beinhaltet die Anwendung eines adaptiven Verfahrens. Unabhängig vom Problem gibt es noch keine Ergebnisse bzgl. der Konvergenz von adaptiven dPG-Methoden und macht den Aspekt somit nicht nur für die Maxwell-Gleichungen relevant.

Anhang A.

Das Kreuzprodukt

Das Kreuzprodukt zweier Vektoren $A, B \in \mathbb{C}^3$ beträgt

$$A \times B = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} A_2 \bar{B}_3 - A_3 \bar{B}_2 \\ A_3 \bar{B}_1 - A_1 \bar{B}_3 \\ A_1 \bar{B}_2 - A_2 \bar{B}_1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Für die Vektoren $A, B, C, D \in \mathbb{C}^3$ gilt die Lagrange-Identität

$$(A \times B) \cdot (C \times D) = (A \cdot C)(B \cdot D) - (A \cdot D)(B \cdot C), \quad (\text{A.2})$$

denn

$$\begin{aligned} (A \times B) \cdot (C \times D) &= \begin{pmatrix} A_2 \bar{B}_3 - A_3 \bar{B}_2 \\ A_3 \bar{B}_1 - A_1 \bar{B}_3 \\ A_1 \bar{B}_2 - A_2 \bar{B}_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_2 \bar{D}_3 - C_3 \bar{D}_2 \\ C_3 \bar{D}_1 - C_1 \bar{D}_3 \\ C_1 \bar{D}_2 - C_2 \bar{D}_1 \end{pmatrix} \\ &= (A_2 \bar{B}_3 - A_3 \bar{B}_2)(\bar{C}_2 D_3 - \bar{C}_3 D_2) + (A_3 \bar{B}_1 - A_1 \bar{B}_3)(\bar{C}_3 D_1 - \bar{C}_1 D_3) \\ &\quad + (A_1 \bar{B}_2 - A_2 \bar{B}_1)(\bar{C}_1 D_2 - \bar{C}_2 D_1) \\ &= (A_1 \bar{C}_1 + A_2 \bar{C}_2 + A_3 \bar{C}_3)(B_1 \bar{D}_1 + B_2 \bar{D}_2 + B_3 \bar{D}_3) \\ &\quad - (A_1 \bar{D}_1 + A_2 \bar{D}_2 + A_3 \bar{D}_3)(B_1 \bar{C}_1 + B_2 \bar{C}_2 + B_3 \bar{C}_3) \end{aligned}$$

Des Weiteren ist

$$\begin{aligned} A \cdot (B \times C) &= A_1(\bar{B}_2 C_3 - \bar{B}_3 C_2) + A_2(\bar{B}_3 C_1 - \bar{B}_1 C_3) + A_3(\bar{B}_1 C_2 - \bar{B}_2 C_1) \\ &= A_1 \bar{B}_2 C_3 + A_2 \bar{B}_3 C_1 + A_3 \bar{B}_1 C_2 - A_1 \bar{B}_2 C_2 - A_2 \bar{B}_1 C_3 - A_3 \bar{B}_1 C_2. \end{aligned}$$

und somit

$$A \cdot (B \times C) = \det(A, \bar{B}, C). \quad (\text{A.3})$$

Literaturverzeichnis

- [Alt12] Hans Wilhelm Alt, *Lineare Funktionalanalysis: Eine anwendungsorientierte Einführung*, vol. 6, Springer-Verlag, 2012.
- [Bab71] Ivo Babuška, *Error-bounds for finite element method*, Numer. Math. **16** (1970/1971), 322–333.
- [BC01] A. Buffa and P. Ciarlet, Jr., *On traces for functional spaces related to Maxwell's equations. I. An integration by parts formula in Lipschitz polyhedra*, Math. Methods Appl. Sci. **24** (2001), no. 1, 9–30.
- [BCS02] A. Buffa, M. Costabel, and D. Sheen, *On traces for $H(\text{curl}, \Omega)$ in Lipschitz domains*, J. Math. Anal. Appl. **276** (2002), no. 2, 845–867.
- [Bof01] D. Boffi, *A note on the de Rham complex and a discrete compactness property*, Appl. Math. Lett. **14** (2001), no. 1, 33–38.
- [BS00] Ivo M. Babuška and Stefan A. Sauter, *Is the pollution effect of the FEM avoidable for the Helmholtz equation considering high wave numbers?*, SIAM Rev. **42** (2000), no. 3, 451–484 (electronic), Reprint of SIAM J. Numer. Anal. **34** (1997), no. 6, 2392–2423 [MR1480387 (99b:65135)].
- [Buf03] Annalisa Buffa, *Trace theorems on non-smooth boundaries for functional spaces related to Maxwell equations: an overview*, Computational electromagnetics (Kiel, 2001), Lect. Notes Comput. Sci. Eng., vol. 28, Springer, Berlin, 2003, pp. 23–34.
- [CDG14] Carsten Carstensen, Leszek Demkowicz, and Jay Gopalakrishnan, *A posteriori error control for DPG methods*, SIAM J. Numer. Anal. **52** (2014), no. 3, 1335–1353.
- [CDG15] ———, *Breaking spaces and forms for the dPG method and applications including Maxwell equations*, submitted, 2015.
- [Ces96] Michel Cessenat, *Mathematical methods in electromagnetism*, Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences, vol. 41, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1996, Linear theory and applications.
- [CGHW14] C. Carstensen, D. Gallistl, F. Hellwig, and L. Weggler, *Low-order dPG-FEM for an elliptic PDE*, Comput. Math. Appl. **68** (2014), no. 11, 1503–1512.
- [Cia78] Philippe G. Ciarlet, *The finite element method for elliptic problems*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York-Oxford, 1978, Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 4.

- [Dau04] Monique Dauge, *Benchmark computations for Maxwell equations for the approximation of highly singular solutions.*, <https://perso.univ-rennes1.fr/monique.dauge/benchmax.html>, 2004.
- [Dem01] L. Demkowicz, *Edge finite elements of variable order for Maxwell's equations*, Scientific computing in electrical engineering (Warnemünde, 2000), Lect. Notes Comput. Sci. Eng., vol. 18, Springer, Berlin, 2001, pp. 15–34.
- [DG10] L. Demkowicz and J. Gopalakrishnan, *A class of discontinuous Petrov-Galerkin methods. Part I: the transport equation*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **199** (2010), no. 23-24, 1558–1572.
- [DG11] ———, *A class of discontinuous Petrov-Galerkin methods. II. Optimal test functions*, Numer. Methods Partial Differential Equations **27** (2011), no. 1, 70–105.
- [DGN12] Leszek Demkowicz, Jay Gopalakrishnan, and Antti H. Niemi, *A class of discontinuous Petrov-Galerkin methods. Part III: Adaptivity*, Appl. Numer. Math. **62** (2012), no. 4, 396–427.
- [Dör96] Willy Dörfler, *A convergent adaptive algorithm for Poisson's equation*, SIAM J. Numer. Anal. **33** (1996), no. 3, 1106–1124.
- [DV98] L. Demkowicz and L. Vardapetyan, *Modeling of electromagnetic absorption/scattering problems using hp-adaptive finite elements*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **152** (1998), no. 1-2, 103–124, Symposium on Advances in Computational Mechanics, Vol. 5 (Austin, TX, 1997).
- [For12] Otto Forster, *Analysis. 3*, Vieweg Studium: Aufbaukurs Mathematik., Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 2012, Maß- und Integrationstheorie, Integralsätze im \mathbb{R}^n und Anwendungen.
- [FW14] Xiaobing Feng and Haijun Wu, *An absolutely stable discontinuous Galerkin method for the indefinite time-harmonic Maxwell equations with large wave number*, SIAM J. Numer. Anal. **52** (2014), no. 5, 2356–2380.
- [GR86] Vivette Girault and Pierre-Arnaud Raviart, *Finite element methods for Navier-Stokes equations*, Springer Series in Computational Mathematics, vol. 5, Springer-Verlag, Berlin, 1986, Theory and algorithms.
- [Hip99] R. Hiptmair, *Canonical construction of finite elements*, Math. Comp. **68** (1999), no. 228, 1325–1346.
- [Hip01] Ralf Hiptmair, *Higher order Whitney forms*, Progress in Electromagnetics Research **32** (2001), 271–299.
- [JVN35] P. Jordan and J. Von Neumann, *On inner products in linear, metric spaces*, Ann. of Math. (2) **36** (1935), no. 3, 719–723.

- [JZZ13] Xue Jiang, Linbo Zhang, and Weiyang Zheng, *Adaptive hp-finite element computations for time-harmonic Maxwell's equations*, Commun. Comput. Phys. **13** (2013), no. 2, 559–582.
- [Kat60] Tosio Kato, *Estimation of iterated matrices, with application to the von Neumann condition*, Numer. Math. **2** (1960), 22–29.
- [McL00] William McLean, *Strongly elliptic systems and boundary integral equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [Mon03] Peter Monk, *Finite element methods for Maxwell's equations*, Numerical Mathematics and Scientific Computation, Oxford University Press, New York, 2003.
- [Neč67] Jindřich Nečas, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson et Cie, Éditeurs, Paris; Academia, Éditeurs, Prague, 1967.
- [Néd80] J.-C. Nédélec, *Mixed finite elements in \mathbf{R}^3* , Numer. Math. **35** (1980), no. 3, 315–341.
- [Néd86] ———, *A new family of mixed finite elements in \mathbf{R}^3* , Numer. Math. **50** (1986), no. 1, 57–81.
- [NS00] Helmut Neunzert and Abul Hasan Siddiqi, *Topics in industrial mathematics*, Applied Optimization, vol. 42, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000, Case studies and related mathematical methods.
- [Pop14] M. Poppe, *Die Maxwell'sche Theorie: Für Ingenieure und Master-Studenten*, essentials, Springer Berlin Heidelberg, 2014.
- [RHV04] Ana Alonso Rodríguez, Ralf Hiptmair, and Alberto Valli, *Mixed finite element approximation of eddy current problems*, IMA J. Numer. Anal. **24** (2004), no. 2, 255–271.
- [Roc70] R. Tyrrell Rockafellar, *Convex analysis*, Princeton Mathematical Series, No. 28, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.
- [RR04] Michael Renardy and Robert C. Rogers, *An introduction to partial differential equations*, second ed., Texts in Applied Mathematics, vol. 13, Springer-Verlag, New York, 2004.
- [SB05] Josef Stoer and Roland Bulirsch, *Numerische Mathematik. 2*, third ed., Springer-Lehrbuch., Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005, Eine Einführung—unter Berücksichtigung von Vorlesungen von F. L. Bauer.
- [Sch09] Joachim Schöberl, *Numerical methods for Maxwell equations*, Vorlesungsskript, 2009.
- [Wer11] Dirk Werner, *Funktionalanalysis*, 7 ed., Springer-Verlag, Berlin, 2011.

- [Whi57] Hassler Whitney, *Geometric integration theory*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1957.
- [XZ03] Jinchao Xu and Ludmil Zikatanov, *Some observations on Babuška and Brezzi theories*, Numer. Math. **94** (2003), no. 1, 195–202.
- [ZMD⁺11] J. Zitelli, I. Muga, L. Demkowicz, J. Gopalakrishnan, D. Pardo, and V. M. Calo, *A class of discontinuous Petrov-Galerkin methods. Part IV: the optimal test norm and time-harmonic wave propagation in 1D*, J. Comput. Phys. **230** (2011), no. 7, 2406–2432.

Selbstständigkeitserklärung

Ich erkläre, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe und ich zum ersten Mal eine Masterarbeit in diesem Studiengang einreiche.

Berlin, den 1. Oktober 2015

Diese Arbeit wurde mit Hilfe von KOMA-Script und L^AT_EX gesetzt. Die Grafiken sind mit *MATLAB* sowie den L^AT_EX Paketen *TikZ* und *PGFPLOTS* erstellt.