Distributionen, Funktionen beschränkter Variation und Lebesguescher Inhalt nichtparametrischer Flächen.

Von KLAUS KRICKEBERG (Madison, Wisconsin und Würzburg) (*).

1. Einleitung.

Unser Gegenstand ist ein linearer Differentialoperator $\mathfrak{D}$ über R_n, der nur auf gewisse der Variablen $x_1, \ldots, x_n$, etwa die m ersten mit $m < n$, wirkt, das heisst nur Differentiationen nach x_i mit $i \leq m$ enthält. $\mathfrak{D}$ entsteht dann auf natürlichem Wege aus einem Differentialoperator $\mathfrak{D}_0$ über R_m (vgl. (3.3)), und der Hauptsatz der vorliegenden Note, das Theorem 3.1, besteht in einem mit Hilfe von $\mathfrak{D}_0$ formulierten Kriterium dafür, dass die Distribution $\mathfrak{D}f$, wobei f eine lokal summierbare Funktion auf R_n sei, ein Mass bildet. Zugleich erhalten wir eine Verallgemeinerung eines Resultats von CESARI über die Messbarkeit partieller Variationen. Der Beweis dieses Theorems beruht auf der HALMOSschen Theorie der Zerlegung von Maszen, die wir im 2. Kapitel in der hier benötigten Form darstellen. Das 4. Kapitel gibt ein analoges Kriterium dafür, dass $\mathfrak{D}f$ eine Funktion ist. Im 5. und 6. Kapitel betrachten wir den Spezialfall $\mathfrak{D} = \partial/\partial x_i$, das heisst $\mathfrak{D}_0 = d/dx_i$. Das Theorem 5.2 enthält ein Kriterium dafür, dass die Ableitung $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ einer lokal summierbaren Funktion f ein Mass ist. Die Kombination dieser Kriterien für $i = 1, \ldots, n$ (Theorem 5.5) zeigt, dass die Distributionen, deren Ableitungen erster Ordnung Masze bilden, gerade die Funktionen von lokal beschränkter Variation im Sinne von TONELLI und CESARI sind, ein Ergebnis, das auf anderem Wege auch in der nachfolgenden Arbeit von PAUC bewiesen wird. Die entsprechenden Aussagen des 6. Kapitels, die sich auf den Fall beziehen, dass $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ eine Funktion ist, sind im wesentlichen bekannt: wir geben sie hier wieder, weil wir sie im 9. Kapitel benötigen (Satz 9.2), weil sie sich in einer zum 5. Kapitel analogen Form darstellen lassen und weil die darin ausgedrückten Zusammenhänge zwischen der Theorie der Distributionen und Definitionen und Resultaten anderer Autoren [2; 8; 9; 10; 12; 20; 25; 26] noch nicht bemerkt worden zu sein scheinen.

Als Anwendung des Theorems 5.2 wird im 7. Kapitel eine einfache geometrische Bedingung (Satz 7.1, 2) über eine offene Menge G aufgestellt, die notwendig und hinreichend dafür ist, dass es auf der Begrenzung F von G ein Mass gibt, mit dem die Gauss-Greensche Formel gilt; dabei ist vorausge-

(*) This paper was written when the author held a Research Associateship of the Office of Naval Research, U.S. Navy, at the University of Wisconsin.

setzt, dass F das lebesguesche Mass Null hat. Im 8. Kapitel beweisen wir mit Hilfe des Theorems 5.5, dass die Substrate geschlossener verallgemeinerter Hyperflächen im Sinne von L. C. YOUNG identisch sind mit den Gradienten (im Sinne der Theorie der Distributionen) oder den Rändern (im Sinne von DE RHAMS Theorie der Strömungen) von Funktionen von beschränkter Variation im Sinne von TONELLI und CESARI, deren Träger kompakt sind. Dies ergibt sich auf anderem Wege auch durch eine Kombination der Ergebnisse von FLEMING und PAUC in der vorangehenden und nachfolgenden Arbeit.

Das Ziel des 9. Kapitels ist, die Theorie des lebesgueschen Inhalts nichtparametrischer Flächen mit Hilfe der Theorie der Distributionen zu vereinfachen und eine Integralformel für den Inhalt aufzustellen, die einerseits offensichtlich eine Verallgemeinerung der klassischen Integralformel bildet und andererseits auf jede nichtparametrische Fläche endlichen lebesgueschen Inhalts zutrifft. Wir bemerken zunächst, dass neben den durch das Theorem 5.5 gegebenen Bedingungen noch Bedingungen ganz anderer Art dafür, dass die Ableitungen erster Ordnung von f Masze sind, existieren. Diese Funktionen werden nämlich mit Hilfe der Theorie der Faltungsprodukte durch Lipschitzbedingungen in L_1 charakterisiert [23, II, p. 38 und 41-44], und auf gleichem Wege erhält man die folgende Beschreibung, die mit einer von DE GIORGI [5] im Falle beschränkter Funktionen gegebenen Charakterisierung verwandt ist und in der λ das n-dimensionale lebesguesche Mass bedeute: Dann und nur dann sind die Ableitungen erster Ordnung von f Masze μ_i, wenn f der Grenzwert einer Folge unendlich oft differenzierbarer Funktionen f_k ist, so dass bei jeder beschränkten borelschen Menge B die « totalen Variationen » $\int\limits_B \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\right)^2}\, d\lambda$ beschränkt bleiben; die totale Variation des Vektormaszes $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ über B ist der kleinste auf diese Weise erhältliche limes inferior der Folge der totalen Variationen der f_k über B. Dabei kann das Wort « Grenzwert » z. B. im Sinne der Topologie der Distributionen oder auch der Mittelkonvergenz (L_1) auf jeder kompakten Menge interpretiert werden. Mit Hilfe ganz ähnlicher Methoden zeigen wir nun im 9. Kapitel, ohne die Ergebnisse der vorangehenden zu benutzen, dass der lebesguesche Inhalt $\alpha(f)$ einer Hyperfläche $x_{n+1} = f(x_1, \ldots, x_n)$, wobei $(x_1, \ldots, x_n)$ in einer offenen Menge G mit $\lambda(G) < +\infty$ liegt, dann und nur dann endlich ist, wenn die Ableitungen von f erster Ordnung Masze darstellen, etwa $\mu_1, \ldots, \mu_n$, und $\alpha(f)$ ist die totale Variation des Vektormaszes $(\lambda, \mu_1, \ldots, \mu_n)$ über G. Bildet G ein offenes Quadrat, so hängt diese Formel für $\alpha(f)$, wie die hier verwendeten Methoden zeigen, eng mit der von RADÓ [21] bei stetigem f und GOFFMAN [13] bei beliebigem f gegebenen Darstellung von $\alpha(f)$ als Grenzwert der Inhalte der durch Mittelwertintegrale von f gegebenen Flächen zusammen; in der Tat sind ja die Mittelwertintegrale spezielle Faltungsprodukte. Kombinieren wir schliesslich die Methoden des 9. Kapitels mit denen des 5., so ergibt sich das im Falle eines offenen Quadrates von TONELLI [25] und CESARI [4] bewiesene klassische Theorem, wonach $\alpha(f) < +\infty$ dann und nur dann, wenn f von beschränkter Variation im Sinne von TONELLI und CESARI ist; dazu sei bemerkt, dass bereits L. C. YOUNG die stetigen Funktionen von beschränkter Variation im Sinne von TONELLI über einem Quadrat direkt mit Hilfe von Lipschitzbedingungen in L_1 charakterisierte [22, p. 182; 27]. Ferner erhalten wir aus unserer Integralformel für $\alpha(f)$ die im Falle eines Quadrates auf RADÓ [21] und GOFFMAN [12] zurückgehende Darstellung von $\alpha(f)$ als de Geöczescher Ausdruck $H(f)$. Die de Geöczeschen Ausdrüche $H_i(f)$, $i = 1, \ldots, n$ lassen sich ebenso sinnfällig interpretieren: $H_i(f)$ ist die totale Variation von μ_i über G, was sich auch aus den Ergebnissen der nachfolgenden Arbeit von PAUC, insbesondere Theorem II, ableiten lässt.

2. Eine Zerlegung von Maszen.

Es sei R_n der reelle euklidische n-dimensionale Vektorraum. Wir setzen voraus, dass $n \geq 2$ ist, betrachten R_n als Produktraum $R_m \times R_l$, wobei $m, l \geq 1$ und $m + l = n$, und schreiben Punkte von R_n als (x, y) mit $x \in R_m$ und $y \in R_l$. Ist $y \in R_l$ und $B \subseteq R_n$, so definieren wir $B_y = \{x : (x, y) \in B\}$; infolgedessen

$$B_y \times \{y\} = B \cap (R_m \times \{y\}). \tag{2.1}$$

$\mathfrak{P}$ bedeute die Projektion auf R_l, das heisst $\mathfrak{P}(x, y) = y$.

Es sei $\mathfrak{B}_n$ das System aller beschränkten borelschen Teilmengen von R_n. Mit einem *Mass* in R_n meinen wir stets ein Radonsches Mass, das heisst eine auf $\mathfrak{B}_n$ definierte, endlichwertige und abzählbar additive reelle Funktion. Ein derartiges Mass ist dann und nur dann beschränkt, wenn es sich zu einer endlichwertigen und abzählbar additiven Funktion auf dem System aller borelschen Teilmengen von R_n fortsetzen lässt; es gibt natürlich nur eine solche Fortsetzung. Es erweist sich ferner als zweckmässig, das n-dimensionale lebesguesche Mass λ_n auf dem System aller im lebesgueschen Sinne messbaren Mengen mit endlichem lebesgueschem Mass und nicht nur auf $\mathfrak{B}_n$ zu betrachten. Das Symbol $\lambda_l(\mathfrak{P}(B))$ ist dann sinnvoll, wenn $B \in \mathfrak{B}_n$, weil $\mathfrak{P}(B)$ eine analytische Menge bildet [18, p. 152]. Bezeichnungen wie « messbar », « summierbar », « lokal summierbar » und « fast überall » sind stets, soweit nicht anders vermerkt, im Sinne von LEBESGUE zu verstehen.

Wir betrachten ein Mass μ in R_n mit der folgenden Eigenschaft:

$$\text{Aus } B \in \mathfrak{B}_n \text{ und } \lambda_l(\mathfrak{P}(B)) = 0 \text{ folgt } \mu(B) = 0. \tag{2.2}$$

Ist $B \in \mathfrak{B}_n$, so stellt $\mu(B \cap (R_m \times A))$ eine abzählbar additive und λ_l-stetige

Funktion von A in $\mathfrak{B}_l$ dar. Nach dem Radon-Nikodymschen Satz gibt es also eine in R_l definierte und summierbare Funktion h_B derart, dass

$$\mu(B \cap (R_m \times A)) = \int_A h_B d\lambda_l \tag{2.3}$$

für jedes A aus $\mathfrak{B}_l$. Die Methoden der Zerlegung beschränkter Masze [14], auf jede Komponente einer Darstellung von R_n als Vereinigung abzählbar vieler paarweise fremder Mengen der Gestalt $M \times L$ mit $M \in \mathfrak{B}_m$ und $L \in \mathfrak{B}_l$ angewandt, zeigen, dass die Funktionen h_B in der folgenden Weise gewählt werden können: Ist $y \in R_l$, so bildet $h_B(y)$ als Funktion von B ein auf $R_m \times \{y\}$ konzentriertes Mass in R_n, d. h. auf Grund von (2.1) gilt

$$h_B(y) = h_{B_y \times \{y\}}(y). \tag{2.4}$$

Wir definieren zu jedem Punkt y aus R_l ein Mass μ_y in R_m durch $\mu_y(C) = h_{C \times \{y\}}(y)$. Ist $B \in \mathfrak{B}_n$, so folgt aus (2.4), dass $\mu_y(B_y) = h_B(y)$. Daher wird $\mu_y(B_y)$ eine summierbare Funktion von y, und (2.3) impliziert

$$\mu(B) = \int_{R_l} \mu_y(B_y) d\lambda_l(y). \tag{2.5}$$

Es sei φ eine in R_n definierte und μ-summierbare Funktion. Aus (2.5) und den Regeln über die Integration in bezug auf eine direkte Summe von Maszen [29, p. 73] folgt, dass $\varphi(x, y)$ für λ_l-fast alle y eine μ_y-summierbare Funktion von x darstellt, und $\int_{R_m} \varphi(x, y) d\mu_y(x)$ wird eine summierbare Funktion von y mit

$$\int_{R_n} \varphi d\mu = \int_{R_l} \left\{ \int_{R_m} \varphi(x, y) d\mu_y(x) \right\} d\lambda_l(y). \tag{2.6}$$

Das Mass μ_y in R_m ist durch (2.5) für fast alle y eindeutig bestimmt. Es sei nämlich zu jedem y aus R_l ein anderes Mass $\tilde{\mu}_y$ in R_m gegeben derart, dass $\tilde{\mu}_y(B_y)$ bei beliebigem B aus $\mathfrak{B}_n$ eine summierbare Funktion von y wird, und (2.5) mit $\tilde{\mu}_y$ anstelle von μ_y richtig bleibt. Ist nun $C \in \mathfrak{B}_m$, so gilt für jedes A aus $\mathfrak{B}_l$:

$$\int_A \mu_y(C) d\lambda_l(y) = \mu(C \times A) = \int_A \tilde{\mu}_y(C) d\lambda_l(y),$$

also $\mu_y(C) = \tilde{\mu}_y(C)$ für fast alle y. Da $\mathfrak{B}_m$ separabel ist, haben wir $\mu_y = \tilde{\mu}_y$ für fast alle y.

Wir bezeichnen die *positive Variation* eines Maszes μ durch μ^+, seine *negative Variation* durch μ^- und seine *totale Variation* durch μ'', so dass μ^+, μ^- und μ'' positive Masze mit $\mu = \mu^+ - \mu^-$ und $\mu'' = \mu^+ + \mu^-$ bilden. Jede Menge B aus $\mathfrak{B}_n$ lässt sich in der Gestalt $B = B^+ \cup B^-$ schreiben, wobei B^+, $B^- \in \mathfrak{B}_n$, $B^+ \cap B^- = 0$ und $\mu^-(B^+) = \mu^+(B^-) = 0$. Demnach ist $\mu(B^+ \cap (R_m \times A)) \geq 0$ und $\mu(B^- \cap (R_m \times A)) \leq 0$ für jedes A aus $\mathfrak{B}_l$, und daher gelten für fast alle y die Ungleichungen $h_{B^+}(y) \geq 0$ und $h_{B^-}(y) \leq 0$, d. h.

$$\mu_y(B_y^+) \geq 0, \quad \mu_y(B_y^-) \leq 0. \tag{2.7}$$

Die Separabilität von $\mathfrak{B}_n$ benutzend erhalten wir eine Teilmenge N von R_l mit $\lambda_l(N) = 0$ derart, dass (2.7) auf jedes B aus $\mathfrak{B}_n$ und jedes y aus R_l-N zutrifft. Es gilt also $\mu_y^+(B_y) = \mu_y(B_y^+)$ und $\mu_y^-(B_y) = -\mu_y(B_y^-)$, sobald $B \in \mathfrak{B}_n$ und $y \in R_l - N$, und daher sind $\mu_y^+(B_y)$, $\mu_y^-(B_y)$ und $\mu_y''(B_y)$ summierbare Funktionen von y, und

$$\begin{gathered} \mu^+(B) = \int_{R_l} \mu_y^+(B_y)d\lambda_l(y), \qquad \mu^-(B) = \int_{R_l} \mu_y^-(B_y)d\lambda_l(y), \\ \mu''(B) = \int_{R_l} \mu_y''(B_y)d\lambda_l(y). \end{gathered} \tag{2.8}$$

In ähnlicher Weise lässt sich zeigen, dass der Träger von μ dann und nur dann in einer kompakten Menge K enthalten ist, wenn der Träger von μ_y für fast alle y in K_y liegt. Dann und nur dann ist μ beschränkt, wenn μ_y für fast alle y beschränkt ist und $\mu_y''(R_m)$ eine summierbare Funktion von y darstellt; in diesem Falle gelten (2.5) und (2.8) mit jeder borelschen Teilmenge B von R_n.

3. Masze als Ableitungen.

Wir bezeichnen den Raum aller in R_n definierten und unendlich oft differenzierbaren reellen Funktionen durch $\mathfrak{E}_n$, und den Raum aller Funktionen aus $\mathfrak{E}_n$ mit kompaktem Träger durch $\mathfrak{D}_n$. Unter einem *Differentialoperator* über R_n verstehen wir eine lineare Kombination, mit konstanten Koeffizienten, von Produkten von Operatoren $\partial/\partial x_i$ oder $\partial/\partial y_j$ ($i=1,\dots,m$; $j=1,\dots,l$), wobei auch das leere Produkt, d. h. der Einheitsoperator $\mathfrak{E}$, zugelassen wird. Zu jedem Differentialoperator $\mathfrak{D}$ über R_n gibt es einen wohlbestimmten Differentialoperator $\mathfrak{D}^*$ über R_n, den zu $\mathfrak{D}$ *adjungierten*, so dass

$$\int_{R_n} (\mathfrak{D}f)\varphi d\lambda_n = \int_{R_n} f(\mathfrak{D}^*\varphi)d\lambda_n \tag{3.1}$$

für jedes f aus $\mathfrak{E}_n$ und jedes φ aus $\mathfrak{D}_n$. In der Tat gilt offenbar $\mathcal{E}^* = \mathcal{E}$, durch partielle Integration erhalten wir $(\partial/\partial x_i)^* = -\partial/\partial x_i$ und $(\partial/\partial y_j)^* = -\partial/\partial y_j$, und von hier aus ergibt sich die Adjungierte eines beliebigen Differentialoperators auf Grund der Tatsache, dass die Abbildung $*$ linear und produkttreu ist.

Bildet T eine *Distribution* in R_n im Sinne von L. SCHWARTZ [23] und ist $\varphi \in \mathfrak{D}_n$, so bezeichnen wir den Wert des Funktionals T für φ durch $\langle T, \varphi \rangle$. Insbesondere schreiben wir, wenn f eine lokal summierbare Funktion oder μ ein Mass in R_n darstellt, $\langle f, \varphi \rangle = \int_{R_n} f\varphi d\lambda_n$ und $\langle \mu, \varphi \rangle = \int_{R_n} \varphi d\mu$. Die Distribution $\mathfrak{D}T$, wobei $\mathfrak{D}$ ein Differentialoperator über R_n sei, werde in Übereinstimmung mit (3.1) durch $\langle \mathfrak{D}T, \varphi \rangle = \langle T, \mathfrak{D}^*\varphi \rangle$ erklärt.

Zu jeder auf R_n definierten Funktion f und jedem Punkt y aus R_l definieren wir eine Funktion f_y auf R_m durch

$$f_y(x) = f(x, y). \tag{3.2}$$

Ist $\mathfrak{D}_0$ ein Differentialoperator über R_m, so beschreibt die Gleichung

$$\mathfrak{D}\varphi(x, y) = \mathfrak{D}_0\varphi_y(x) \tag{3.3}$$

mit $\varphi \in \mathfrak{E}_n$ einen Differentialoperator $\mathfrak{D}$ über R_n, der « lediglich auf die x-Koordinaten wirkt ». In der gleichen Weise erhalten wir die Adjungierte von $\mathfrak{D}$ aus der Adjungierten von $\mathfrak{D}_0$, d. h.

$$\mathfrak{D}^*\varphi(x, y) = \mathfrak{D}_0^*\varphi_y(x). \tag{3.4}$$

Es sei nun f eine lokal summierbare Funktion auf R_n. Nach dem Fubinischen Satz ist f_y für fast alle y lokal summierbar, stellt also eine Distribution in R_m dar, und diese Distribution ist für fast alle y eindeutig durch die durch f dargestellte Distribution bestimmt.

THEOREM 3.1. – *Es sei $\mathfrak{D}_0$ ein Differentialoperator über R_m und $\mathfrak{D}$ der durch (3.3) beschriebene Differentialoperator über R_n. Ferner bedeute f eine in R_n definierte und lokal summierbare Funktion. Dann sind die folgenden Aussagen gleichwertig.*

$\mathfrak{M}$ 1. *Die Distribution $\mathfrak{D}f$ ist ein Mass μ.*

$\mathfrak{M}$ 2. *Für fast alle y ist die Distribution $\mathfrak{D}_0 f_y$ ein Mass μ_y in R_m, und bei beliebigem B aus $\mathfrak{B}_n$ bildet die totale Variation $\mu_y''(B_y)$ eine über R_l summierbare Funktion von y.*

$\mathfrak{M}$ 2'. *Für fast alle y ist die Distribution $\mathfrak{D}_0 f_y$ ein Mass μ_y in R_m, und zu jeder Menge B aus $\mathfrak{B}_n$ gibt es eine über R_l summierbare Funktion v, so dass $\mu_y''(B_y) \leq v(y)$ für jedes y.*

Sind diese Bedingungen erfüllt, so bestimmen die Masze μ und μ_y einander *vermöge* (2.5). *Insbesondere bilden auch* $\mu_y(B_y)$, $\mu_y^+(B_y)$ *und* $\mu_y^-(B_y)$ *summierbare Funktionen von* y, *und es gilt* (2.8), *wenn* $B \in \mathfrak{B}_n$.

Beweis. Offenbar zieht $\mathfrak{M}$ 2 die Bedingung $\mathfrak{M}$ 2′ nach sich. Es sei nun $\mathfrak{M}$ 2′ erfüllt, B eine kompakte Teilmenge von R_n, v gemäss $\mathfrak{M}$ 2′ bestimmt, φ eine Funktion aus $\mathfrak{D}_n$, deren Träger in B enthalten ist, und $\rho = \max\limits_{(x,y) \in B} |\varphi(x, y)|$. Nach dem Fubinischen Satz gilt

$$(3.5)\quad \langle \mathfrak{D}f, \varphi\rangle = \langle f, \mathfrak{D}^*\varphi\rangle = \int\limits_{R_n} f\mathfrak{D}^*\varphi d\lambda_n = \int\limits_{R_l}\left\{\int\limits_{R_m} f(x, y)\mathfrak{D}^*\varphi(x, y)d\lambda_m(x)\right\} d\lambda_l(y).$$

Aus (3.2)–(3.4) folgt für fast alle y:

$$(3.6)\quad \int\limits_{R_m} f(x, y)\mathfrak{D}^*\varphi(x, y)d\lambda_m(x) = \langle f_y, \mathfrak{D}_0^*\varphi_y\rangle = \langle \mathfrak{D}_0 f_y, \varphi_y\rangle,$$

also wegen $\mathfrak{D}_0 f_y = \mu_y$:

$$\left|\int\limits_{R_m} f(x, y)\mathfrak{D}^*\varphi(x, y)d\lambda_m(x)\right| = |\langle \mu_y, \varphi_y\rangle|$$

$$= \left|\int\limits_{R_m} \varphi(x, y)d\mu_y(x)\right| \leq \rho\mu_y''(B_y) \leq \rho v(y),$$

und somit nach (3.5): $|\langle \mathfrak{D}f, \varphi\rangle| \leq \rho\int\limits_{R_l} v d\lambda_l$. Daher ist $\mathfrak{D}f$ ein Mass gemäss [23, I, p. 25], d. h. $\mathfrak{M}$ 1 erfüllt.

Es sei schliesslich $\mathfrak{M}$ 1 gültig, d. h. $\mathfrak{D}f$ ein Mass μ. Wir zeigen zunächst, dass μ der Bedingung (2.2) genügt. Es reicht natürlich aus, nur den Fall einer kompakten Menge B mit $\lambda_l(\mathfrak{S}(B)) = 0$ zu betrachten. Zu gegebenem positivem ε existiert eine beschränkte offene Menge G, so dass $B \subseteq G$ und

$$(3.7)\quad \mu''(G - B) < \varepsilon.$$

Nun ist B kompakt, und daher gibt es paarweise fremde kongruente halboffene l-dimensionale Würfel $L_1', \dots, L_p'$ und zu jedem j mit $j = 1, \dots, p$ eine Menge M_j, die die Vereinigung paarweise fremder, kongruenter halboffener m-dimensionaler Würfel darstellt, so dass $B \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{p} M_j \times L_j' \subseteq G$ ist und $\bigcup\limits_{j=1}^{p} M_j \times L_j'$ einen positiven Abstand δ von R_n-G hat. Es sei ψ_j eine Funktion aus $\mathfrak{D}_m$ mit $|\psi_j(x)| \leq 1$, die auf M_j überall den Wert 1 hat und in jedem Punkt von R_m verschwindet, dessen Abstand von M_j mindestens δ beträgt. Ferner sei $\gamma > \max\limits_{j=1,\dots,p} \max\limits_{x \in R_m} |\mathfrak{D}_0^*\psi_j(x)|$. Da auch $\mathfrak{S}(B)$ kompakt und $\lambda_l(\mathfrak{S}(B)) = 0$ ist, so existiert zu jedem j eine Teilmenge L_j von L_j', die die Vereinigung paarweise fremder und kongruenter halboffener l-dimensionaler Würfel darstellt, so dass mit $F = \bigcup_{j=1}^{p} M_j \times L_j$ und $E = G \cap \left(\bigcup_{j=1}^{p} R_m \times L_j\right)$ die Relationen $B \subseteq F$ und

$$\int_E |f| \, d\lambda_n < \varepsilon/\gamma \tag{3.8}$$

gelten. Wir definieren auf R_n eine Funktion $\tilde{\varphi}$ folgendermassen: $\tilde{\varphi}(x, y) = \psi_j(x)$, wenn $y \in L_j$ mit $1 \leq j \leq p$, und sonst $\tilde{\varphi}(x, y) = 0$. Dann ist $\tilde{\varphi}$ eine im borelschen Sinne messbare Funktion mit $|\tilde{\varphi}(x, y)| \leq 1$, sie verschwindet ausserhalb von G, und sie hat auf F, also erst recht auf B, überall den Wert 1. Daher folgt aus (3.7), dass

$$\left| \mu(B) - \int_{R_m} \tilde{\varphi} d\mu \right| < \varepsilon. \tag{3.9}$$

Die vermöge (3.4) erklärte Funktion $\mathfrak{D}^*\tilde{\varphi}$ ist ebenfalls im borelschen Sinne messbar mit $|\mathfrak{D}^*\tilde{\varphi}(x, y)| \leq \gamma$ und verschwindet ausserhalb von E. In der Tat gilt $\tilde{\varphi}_y = \psi_j$, d. h. $\mathfrak{D}^*\tilde{\varphi}(x, y) = \mathfrak{D}_0^*\psi_j(x)$, wenn $y \in L_j$, und sonst $\tilde{\varphi}_y = 0$, d. h. $\mathfrak{D}^*\tilde{\varphi}(x, y) = 0$. Somit folgt aus (3.8):

$$\left| \int_{R_n} f \mathfrak{D}^*\tilde{\varphi} d\lambda_n \right| < \varepsilon. \tag{3.10}$$

Gehört eine Funktion φ zu $\mathfrak{D}_n$, so haben wir wegen $\mathfrak{D}f = \mu$ die Gleichung

$$\int_{R_n} \varphi d\mu = \langle \mu, \varphi \rangle = \langle \mathfrak{D}f, \varphi \rangle = \langle f, \mathfrak{D}^*\varphi \rangle = \int_{R_n} f \mathfrak{D}^*\varphi d\lambda_n . \tag{3.11}$$

Wir werden jedoch zeigen, dass

$$\int_{R_n} \tilde{\varphi} d\mu = \int_{R_n} f \mathfrak{D}^*\tilde{\varphi} d\lambda_n \tag{3.12}$$

auch noch mit der oben konstruierten Funktion $\tilde{\varphi}$ gilt, was offenbar wegen (3.9) und (3.10) die Ungleichung $|\mu(B)| < 2\varepsilon$ und damit unsere Behauptung $\mu(B) = 0$ nach sich zieht. Hierzu sei j eine der Zahlen $1, \dots, p$, und $(\chi_j^{(k)};\ k = 1, 2, \dots)$ eine Folge von Funktionen aus $\mathfrak{D}_l$, deren Träger alle in einer festen kompakten Menge enthalten sind, so dass $|\chi_j^{(k)}(y)| \leq 1$ und $\lim_k \chi_j^{(k)}$ die charakteristische Funktion von L_j wird. Die Funktionenfolge $\varphi_j^{(k)}(x, y) = \psi_j(x)\chi_j^{(k)}(y)$ hat dann die folgenden Eigenschaften: $\varphi_j^{(k)} \in \mathfrak{D}_n$; die Träger aller $\varphi_j^{(k)}$ liegen in einer festen kompakten Menge; $|\varphi_j^{(k)}(x, y)| \leq 1$; $\lim_k \varphi_j^{(k)}(x, y) = \tilde{\varphi}(x, y)$, wenn $y \in L_j$, und sonst $\lim_k \varphi_j^{(k)}(x, y) = 0$;

$|\mathfrak{D}^*\varphi_j^{(k)}(x, y)| \leq \gamma$; $\lim_k \mathfrak{D}^*\varphi_j^{(k)}(x, y) = \mathfrak{D}^*\tilde{\varphi}(x, y)$, wenn $y \in L_j$, und sonst $\lim_k \mathfrak{D}^*\varphi_j^{(k)}(x, y) = 0$. Daher hat die Funktionenfolge $\varphi^{(k)} = \sum_{j=1}^{p} \varphi_j^{(k)}$ die folgenden Eigenschaften: $\varphi^{(k)} \in \mathfrak{D}_n$; die Träger aller $\varphi^{(k)}$ liegen in einer festen kompakten Menge; $|\varphi^{(k)}(x, y)| \leq p$; $\lim_k \varphi^{(k)}(x, y) = \tilde{\varphi}(x, y)$; $|\mathfrak{D}^*\varphi^{(k)}(x, y)| \leq p\gamma$; $\lim_k \mathfrak{D}^*\varphi^{(k)}(x, y) = \mathfrak{D}^*\tilde{\varphi}(x, y)$. Somit wird $\lim_k \int_{R_n} \varphi^{(k)} d\mu = \int_{R_n} \tilde{\varphi} d\mu$ und $\lim_k \int_{R_n} f\mathfrak{D}^*\varphi^{(k)} d\lambda_n = \int_{R_n} f\mathfrak{D}^*\tilde{\varphi} d\lambda_n$. Da (3.11) mit jedem $\varphi^{(k)}$ anstelle von φ gilt, so erhalten wir in der Tat (3.12).

Nachdem (2.2) bewiesen ist, liefern die Betrachtungen des 2. Kapitels eine Zerlegung von μ in der Form (2.5), und bei beliebigem B aus $\mathfrak{B}_n$ stellt $\mu_y''(B_y)$ eine summierbare Funktion von y dar. Es sei schliesslich $\psi \in \mathfrak{D}_m$, $\chi \in \mathfrak{D}_l$ und $\varphi(x, y) = \psi(x)\chi(y)$. Aus $\mathfrak{D}f \doteq \mu$ und (2.6) folgt

$$\langle \mathfrak{D}f, \varphi \rangle = \langle \mu, \varphi \rangle = \int_{R_n} \varphi d\mu = \int_{R_l} \chi(y) \left\{ \int_{R_m} \psi(x) d\mu_y(x) \right\} d\lambda_l(y).$$

Andererseits zeigt der Fubinische Satz, dass

$$\tag{3.13} \begin{aligned} \langle \mathfrak{D}f, \varphi \rangle &= \langle f, \mathfrak{D}^*\varphi \rangle = \int_{R_n} f\mathfrak{D}^*\varphi d\lambda_n \\ &= \int_{R_l} \chi(y) \left\{ \int_{R_m} f(x, y)\mathfrak{D}_0{}^*\psi(x) d\lambda_m(x) \right\} d\lambda_l(y). \end{aligned}$$

Bei festem ψ aus $\mathfrak{D}_m$ gelten beide Gleichungen für jedes χ aus $\mathfrak{D}_l$ und daher $\int_{R_m} \psi(x) d\mu_y(x) = \int_{R_m} f(x, y)\mathfrak{D}_0{}^*\psi(x) d\lambda_m(x)$, das heisst

$$\tag{3.14} \langle \mu_y, \psi \rangle = \langle \mathfrak{D}_0 f_y, \psi \rangle$$

für fast alle y. Da $\mathfrak{D}_m$ eine in bezug auf die in der Theorie der Distributionen betrachtete Pseudotopologie dichte abzählbare Menge enthält, so existiert eine Teilmenge N von R_l mit $\lambda_l(N) = 0$ derart, dass (3.14) auf jedes ψ aus $\mathfrak{D}_m$ und jedes y aus $R_l - N$ zutrifft. Also gilt $\mu_y = \mathfrak{D}_0 f_y$, wenn $y \in R_l - N$, und damit ist das Theorem bewiesen.

Die Äquivalenz von $\mathfrak{M}\,2$ und $\mathfrak{M}\,2'$ bedeutet insbesondere, dass unter der Annahme $\mathfrak{M}\,2'$ die Masze $\mu_y(B_y)$, $\mu_y^+(B_y)$, $\mu_y^-(B_y)$ und $\mu_y''(B_y)$ bei beliebigem B aus $\mathfrak{B}_n$ messbare Funktionen von y darstellen. Dies ist eine Verallgemeinerung eines Satzes von CESARI [4, p. 302], der sich auf den Fall $n = 2$, $m = l = 1$, $\mathfrak{D} = \partial/\partial x$ bezieht; man vergleiche auch [19, p. 579]. Mit Hilfe der Betrachtungen am Ende des 2. Kapitels erhalten wir ferner die folgenden Corollare zum Theorem 3.1.

SATZ 3.2. - *Unter den Annahmen des Theorems* 3.1 *sind die folgenden Aussagen gleichwertig.*

$\mathfrak{M}\mathfrak{B}$ 1. *Die Distribution* $\mathfrak{D}f$ *ist ein beschränktes Mass.*

$\mathfrak{M}\mathfrak{B}$ 2. *Für fast alle* y *ist die Distribution* $\mathfrak{D}_0 f_y$ *ein beschränktes Mass* μ_y *in* R_m, *und* $\mu_y''(R_m)$ *bildet eine summierbare Funktion von* y.

Bedeutet K *eine kompakte Teilmenge von* R_n, *so sind auch die folgenden Aussagen gleichwertig.*

$\mathfrak{M}\mathfrak{C}$ 1. *Die Distribution* $\mathfrak{D}f$ *ist ein Mass, dessen Träger in* K *liegt.*

$\mathfrak{M}\mathfrak{C}$ 2. *Für fast alle* y *ist die Distribution* $\mathfrak{D}_0 f_y$ *ein Mass* μ_y *in* R_m, *dessen Träger in* K_y *liegt, und* $\mu_y''(K_y)$ *bildet eine summierbare Funktion von* y.

Es würde wiederum ausreichen, in $\mathfrak{M}\mathfrak{B}$ 2 oder $\mathfrak{M}\mathfrak{C}$ 2 nur zu verlangen, dass $\mu_y''(R_m)$ oder $\mu_y''(K_y)$ von einer summierbaren Funktion majorisiert wird.

4. Funktionen als Ableitungen.

Wir bedienen uns der gleichen Bezeichnungen wie in den Kapiteln 2 und 3. Man beachte, dass eine Distribution, die «eine Funktion ist», diese Funktion nur fast überall eindeutig bestimmt. Wir sprechen daher immer dann, wenn Änderungen in einer Nullmenge eine Rolle spielen können, von der durch eine Funktion dargestellten Distribution, statt beide einfach zu identifizieren.

THEOREM 4.1. - *Unter den Annahmen des Theorems* 3.1 *sind die folgenden Aussagen gleichwertig.*

$\mathfrak{F}$ 1. *Die Distribution* $\mathfrak{D}f$ *ist eine Funktion* g.

$\mathfrak{F}$ 2. *Für fast alle* y *wird die Distribution* $\mathfrak{D}_0 f_y$ *durch eine Funktion* $\tilde{g}_y$ *auf* R_m *dargestellt, und diese Funktionen* $\tilde{g}_y$ *können so gewählt werden, dass* $\tilde{g}_y(x)$ *als Funktion von* (x, y) *lokal summierbar auf* R_n *ist.*

$\mathfrak{F}$ 2'. *Für fast alle* y *wird die Distribution* $\mathfrak{D}_0 f_y$ *durch eine Funktion* g_y *auf* R_m *dargestellt, und zu jeder Menge* B *aus* $\mathfrak{B}_n$ *gibt es eine über* R_l *summierbare Funktion* v, *so dass* $\int\limits_{R_m} |\widehat{g}_y| \, d\lambda_m \leq v(y)$ *für jedes* y.

Sind diese Bedingungen erfüllt, so ist $\tilde{g}_y(x) = g(x, y)$ *für* λ_n*-fast alle* (x, y), *und für* λ_l*-fast alle* y *gilt* $\widehat{g}_y(x) = \tilde{g}_y(x) = g_y(x)$ *für* λ_m*-fast alle* x.

Beweis. Es sei zunächst $\mathfrak{F}$ 1 erfüllt. Ist $\psi \in \mathfrak{D}_m$, $\chi \in \mathfrak{D}_l$ und $\varphi(x, y) = \psi(x)\chi(y)$, so haben wir einerseits wegen $\mathfrak{D}f = g$ die Gleichung

$$\langle \mathfrak{D}f, \varphi \rangle = \langle g, \varphi \rangle = \int\limits_{R_n} g\varphi \, d\lambda_n = \int\limits_{R_l} \chi(y) \left\{ \int\limits_{R_m} \psi(x) g(x, y) d\lambda_m(x) \right\} d\lambda_l(y)$$

und andererseits (3.13). Wie beim Beweis von (3.14) schliessen wir, dass $\langle g_y, \psi \rangle = \langle \mathfrak{D}_0 f_y, \psi \rangle$ für fast alle y, und hieraus folgt mit Hilfe der gleichen

Überlegung wie dort, dass $g_y = \mathfrak{D}_0 f_y$ für fast alle y, so dass wir also $\mathfrak{F}$ 2 mit $\tilde{g}_y = g_y$ erhalten.

Ist andererseits $\mathfrak{F}$ 2 erfüllt, so definieren wir $g(x, y) = \tilde{g}_y(x)$. Gehört φ zu $\mathfrak{D}_n$, so haben wir (3.5), ferner gilt (3.6) für fast alle y, und hieraus, aus $(\mathfrak{D}_0 f_y, \varphi_y) = \int_{R_m} \tilde{g}_y \varphi_y d\lambda_m = \int_{R_m} g(x, y)\varphi(x, y) d\lambda_m(x)$ und dem Fubinischen Satz folgt $\mathfrak{D}f = g$.

Dass $\mathfrak{F}$ 2 die Bedingung $\mathfrak{F}$ 2′ nach sich zieht, ist wiederum eine Folge des Fubinischen Satzes, und auf Grund des gleichen Satzes brauchen wir, um $\mathfrak{F}$ 2 aus $\mathfrak{F}$ 2′ abzuleiten, nur zu zeigen, dass $\widehat{g}_y(x)$ bei geeigneter Wahl der Funktionen $\widehat{g}_y$ eine λ_n-messbare Funktion von (x, y) wird. Um unsere Bezeichnungen zu vereinfachen, setzen wir zunächst $\widehat{g}_y = 0$, wenn $\mathfrak{D}_0 f_y$ keine Funktion ist. Nach dem Theorem 3.1 wird $\int_{B_y} \widehat{g}_y d\lambda_m$ eine messbare Funktion von y, sobald $B \in \mathfrak{B}_n$. Es sei $K(x, k)$ die abgeschlossene m-dimensionale Kugel mit dem Mittelpunkt x und dem Radius k^{-1}, wobei $k = 1, 2, \ldots$ Dann stellt

$$g_k(x, y) = \frac{1}{\lambda_m(K(x, k))} \int_{K(x,k)} \widehat{g}_y d\lambda_m$$

bei festem y eine stetige Funktion von x und bei festem x eine messbare Funktion von y dar. Infolgedessen ist $g_k(x, y)$ eine messbare Funktion von (x, y) (1). Insbesondere ist die Menge H aller Punkte (x, y), in denen $\lim_k g_k(x, y)$ nicht existiert, messbar. Da dieser Grenzwert bei festem y für fast alle x vorhanden ist, so wird $\lambda_n(H) = 0$, das heisst $g(x, y) = \lim_k g_k(x, y)$ bildet eine messbare, fast überall in R_n erklärte Funktion, und bei beliebigem y gilt $\widehat{g}_y(x) = g(x, y)$ für fast alle x. Daher haben die Funktionen g_y anstelle der $\widehat{g}_y$ die gewünschten Eigenschaften, und das Theorem ist vollständig bewiesen.

Es sei bemerkt, dass wir die Funktionen g_y in $\mathfrak{F}$ 2′ durchaus so wählen können, dass $\widehat{g}_y(x)$ keine messbare Funktion von (x, y) darstellt. Wir brauchen nur eine nichtmessbare Teilmenge W von R_n derart zu bestimmen, dass $\lambda_m(W_y) = 0$ für fast alle y gilt [24], und zu definieren $\widehat{g}_y(x) = g(x, y)$, wenn $(x, y) \in R_n - W$, und $\widehat{g}_y(x) = g(x, y) + 1$, wenn $(x, y) \in W$, wobei g durch $\mathfrak{F}$ 1 gegeben sei.

Auf Grund der Theoreme 3.1 und 4.1 sind die Bedingungen $\mathfrak{F}$ 2 und $\mathfrak{F}$ 2′ stärker als $\mathfrak{M}$ 2 und $\mathfrak{M}$ 2′. Es ist manchmal zweckmässig, dies direkt

---

(1) Cf. [17, p. 255]; der dort gegebene Beweis, der sich auf den Fall bezieht, dass $g_k(x, y)$ als Funktion von x stetig ist und als Funktion von y einer festen, von x unabhängigen baireschen Klasse angehört, bleibt im vorliegenden Fall unverändert.

in der Formulierung von $\mathfrak{F}$ 2 und $\mathfrak{F}$ 2′ zum Ausdruck zu bringen. Mit Hilfe der im letzen Teil des Beweises des Theorems 4.1 ausgeführten Messbarkeitsüberlegung ergibt sich leicht, dass $\mathfrak{F}$ 2 auch folgendermassen formuliert werden kann:

$\mathfrak{F}$ 2. *f erfüllt* $\mathfrak{M}$ 2, *und* $\mathfrak{D}_0 f_y$ *ist eine Funktion für fast alle* y.

Ferner können wir $\mathfrak{F}$ 2′ offenbar die folgende Form geben:

$\mathfrak{F}$ 2′. *f erfüllt* $\mathfrak{M}$ 2′, *und* $\mathfrak{D}_0 f_y$ *ist eine Funktion für fast alle* y.

5. Funktionen von beschränkter Variation im Sinne von TONELLI und CESARI.

Es sei f eine auf R_1 erklärte reelle Funktion. Die *totale Variation* von f in einem abgeschlossenen Intervall J werde durch $V(f;\,J)$ bezeichnet, wenn f dort von beschränkter Variation ist; die totale Variation von f auf der leeren Menge sei 0. Wir sagen, f sei *lokal von beschränkter Variation*, wenn f von beschränkter Variation auf jedem abgeschlossenen Intervall ist. Bekanntlich bildet die Ableitung $\dfrac{df}{dx}$ im Sinne der Theorie der Distributionen einer lokal summierbaren Funktion f dann und nur dann ein Mass μ, wenn f fast überall mit einer Funktion f^0 zusammenfällt, die lokal von beschränkter Variation ist [23, I, p. 54], und es gilt dann $\mu''(B) \leq V(f^0,\, J)$ für jede im Innern des abgeschlossenen Intervalls J gelegene borelsche Menge B. Wir können f^0 stets als rechtsseitig stetige Funktion wählen, und in diesem Falle gilt $\mu''(\rceil a,\, b\,\rceil) = V(f^0;\, \lceil a,\, b\,\rceil)$ für jedes links offene Intervall $\rceil a,\, b\,\rceil$. Schliesslich heisse f *von beschränkter Variation* auf R_1, wenn f lokal von beschränkter Variation ist und μ ein beschränktes Mass darstellt; wir setzen dann $V(f;\, R_1) = \mu''(R_1)$.

Wir behandeln im folgenden den Fall $m = 1$, $l = n - 1$, $\mathfrak{D} = \partial/\partial x_i$. Wir schreiben Punkte von R_n als $x = (x_1, \dots, x_n)$, und bei festem i benutzen wir y als Abkürzung für $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$. Ist y ein derartiger Punkt aus R_{n-1}, B eine Teilmenge von R_n und f eine auf R_n erklärte Funktion, so definieren wir $B_{(i)y}$ als Teilmenge von R_1 durch $B_{(i)y} = \{x_i\colon (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \in B\}$ und $f_{(i)y}$ als Funktion auf R_1 durch $f_{(i)y}(x_i) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$. Es sei $\mathfrak{F}_i$ die Projektion $\mathfrak{F}_i(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$. Unter einem n-dimensionalen abgeschlossenen Intervall $J = \lceil a_1, \dots, a_n;\, b_1, \dots, b_n\rceil$, wobei $a_j < b_j$, verstehen wir die Menge aller x mit $a_j \leq x_j \leq a_j$, $j = 1, \dots, n$.

Es bedeute jetzt f eine messbare Funktion auf R_n. Wir betrachten die folgenden Bedingungen über f.

$\mathfrak{T}_i^0$. *Für fast alle y aus R_{n-1} ist $f_{(i)y}$ lokal von beschränkter Variation und rechtsseitig stetig, und ist J ein n-dimensionales abgeschlossenes Intervall, so wird $V(f_{(i)y};\ J_{(i)y})$ eine summierbare Funktion von y.*

$\mathfrak{T}_i^{0\prime}$. *Für fast alle y aus R_{n-1} ist $f_{(i)y}$ lokal von beschränkter Variation, und zu jedem n-dimensionalen abgeschlossenen Intervall J gibt es eine über R_{n-1} summierbare Funktion v, so dass $V(f_{(i)y};\ J_{(i)y}) \leq v(y)$ für jedes y.*

Offenbar folgt $\mathfrak{T}_i^{0\prime}$ aus $\mathfrak{T}_i^0$.

SATZ 5.1. – *Eine messbare Funktion f, die einer der Bedingungen $\mathfrak{T}_i^0$ und $\mathfrak{T}_i^{0\prime}$ genügt, ist dann und nur dann summierbar über ein n-dimensionales abgeschlossenes Intervall $J = [\,a_1, \dots, a_n;\ b_1, \dots, b_n\,]$, wenn es eine Zahl c mit $a_i \leq c \leq b_i$ gibt, so dass $f_{(i)y}(c)$ eine über $\mathfrak{S}_i(J)$ summierbare Funktion von y darstellt.*

Beweis. Die Bedingung ist notwendig, denn ist f summierbar über J, so haben nach dem Fubinischen Satz fast alle c in $[\,a_i,\ b_i\,]$ die verlangte Eigenschaft. Im Beweis dafür, dass die Bedingung hinreicht, können wir von $\mathfrak{T}_i^{0\prime}$ ausgehen und v und c dementsprechend bestimmen. Für fast alle y aus $\mathfrak{S}_i(J)$ wird

$$\int_{a_i}^{b_i} |\, f_{(i)y}(x_i) - f_{(i)y}(c) \,|\, dx_i \leq (b_i - a_i)\, V(f_{(i)y};\ [\,a_i,\ b_i\,]) \leq (b_i - a_i) v(y).$$

Da die rechte Seite dieser Ungleichung eine über $\mathfrak{S}_i(J)$ summierbare Funktion von y bildet, so ist $f_{(i)y}(x_i) - f_{(i)y}(c)$ nach dem Fubinischen Satz summierbar über J als Funktion von $x = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$. Ferner ist natürlich $f_{(i)y}(c)$, als Funktion von x betrachtet, summierbar über J, also auch $f(x) = f_{(i)y}(x_i)$.

Sodann betrachten wir die folgenden Bedingungen über f.

$\mathfrak{T}_i$. *Es gibt eine Funktion f^0, die fast überall mit f übereinstimmt und $\mathfrak{T}_i^0$ erfüllt.*

$\mathfrak{T}_i'$. *Es gibt eine Funktion f^0, die fast überall mit f übereinstimmt und $\mathfrak{T}_i^{0\prime}$ erfüllt.*

THEOREM 5.2 – *Eine in R_n messbare Funktion f erfüllt $\mathfrak{T}_i$ dann und nur dann, wenn sie $\mathfrak{T}_i'$ erfüllt. Ist f lokal summierbar, so genügt sie diesen Bedingungen dann und nur dann, wenn die Ableitung $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ im Sinne der Theorie der Distributionen ein Mass ist.*

Beweis. Wir nehmen zunächst an, f sei lokal summierbar. Offenbar folgt $\mathfrak{T}_i'$ aus $\mathfrak{T}_i$. Ist $\mathfrak{T}_i'$ erfüllt, so gibt es eine fast überall mit f zusammenfallende

Funktion f^0, die der Bedingung $\mathfrak{T}_i^{0\prime}$ genügt. Für fast alle y ist also $f^0_{(i)y}$ ein Mass μ_y in R_1. Zu jeder Menge B aus $\mathfrak{B}_n$ existiert ein n-dimensionales abgeschlossenes Intervall J, das B im Innern enthält, und es gilt dann $\mu_y''(B_{(i)y}) \leq V(f^0_{(i)y};\ J_{(i)y}) \leq v(y)$ für jedes y. Somit erfüllt f^0 die Bedingung $\mathfrak{M}\mathfrak{L}2'$ mit $\mathfrak{D} = \partial/\partial x_i$, und das Theorem 3.1 lehrt, dass $\dfrac{\partial f^0}{\partial x_i}$ ein Mass ist, also auch $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$.

Es sei schliesslich $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ ein Mass. Nach dem Theorem 3.1 gibt es eine Teilmenge N von R_{n-1} mit $\lambda_{n-1}(N) = 0$, so dass $\dfrac{df_{(i)y}}{dx_i}$ für jedes y aus $R_{n-1} - N$ ein Mass μ_y darstellt, und bei beliebigem B aus $\mathfrak{B}_n$ wird $\mu_y''(B_{(i)y})$ eine summierbare Funktion von y. Wir definieren f^0 folgendermassen: Ist $y \in N$, so sei $f^0_{(i)y} = 0$; ist $y \in R_{n-1} - N$, so sei $f^0_{(i)y}$ diejenige Funktion, die rechtsseitig stetig und lokal von beschränkter Variation ist und fast überall mit $f_{(i)y}$ übereinstimmt. Zum Beweis der Messbarkeit von f^0 betrachten wir eine feste Zahl a und setzen $h(x_i,\ y) = \int_a^{x_i} f^0_{(i)y}(\xi_i)d\xi_i$. Bei beliebigem y ist $h(x_i,\ y)$ eine stetige Funktion von x_i. Ferner gilt $h(x_i,\ y) = \int_a^{x_i} f_{(i)y}(\xi_i)d\xi_i$, und da f lokal summierbar ist, so wird das letztere Integral nach dem Fubinischen Satz bei festem x_i eine messbare Funktion von y. Somit ist $h(x_i,\ y)$ eine messbare Funktion beider Variabler, also auch die rechtsseitige Ableitung von $h(x_i,\ y)$ nach x_i [3, p. 642]. Diese rechtsseitige Ableitung existiert aber überall und ist gleich f^0, woraus die Messbarkeit von f^0 folgt. Zugleich zeigt der Fubinische Satz, dass f und f^0 fast überall zusammenfallen. Ist schliesslich $J = [\![a_1, \ldots, a_n;\ b_1, \ldots, b_n]\!]$, so gehört die Menge B aller Punkte x mit $a_i < x_i \leq b_i$ und $a_j \leq x_j \leq b_j$ $(j = 1, \ldots, i-1,\ i+1, \ldots, n)$ zu $\mathfrak{B}_n$, und es ist $V(f^0_{(i)y};\ J_{(i)y}) = \mu_y''(B_{(i)y})$ für jedes y. Daher wird $V(f^0_{(i)y};\ J_{(i)y})$ eine summierbare Funktion von y, das heisst f^0 erfüllt $\mathfrak{T}_i^0$.

Es bleibt zu zeigen, dass $\mathfrak{T}_i$ auch dann noch aus $\mathfrak{T}_i'$ folgt, wenn f zwar messbar, aber nicht notwendig lokal summierbar ist. Bildet f^0 eine fast überall mit f zusammenfallende Funktion, die $\mathfrak{T}_i^{0\prime}$ erfüllt, so existiert jedenfalls eine Zahl c derart, dass $f^0_{(i)y}(c)$ eine λ_{n-1}-messbare Funktion von y wird. Die Funktion $h(x) = f^0(x) - f^0_{(i)y}(c)$ erfüllt ebenfalls $\mathfrak{T}_i^{0\prime}$ und ist daher lokal summierbar nach Satz 5.1. Folglich genügt h, wie eben bewiesen, der Bedingung $\mathfrak{T}_i$. Mithin hat f^0 und damit auch f die gleiche Eigenschaft.

Die Äquivalenz von $\mathfrak{T}_i$ und $\mathfrak{T}_i'$ wurde im Falle $n = 2$ bereits von CESARI [4, p. 302] bewiesen.

Der Zusammenhang zwischen dem Mass $\mu = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ und den Maszen $\mu_y = \dfrac{df_{(i)y}}{dx_i}$ wird vollständig durch den letzten Teil des Theorems 3.1, das heisst durch die Formeln (2.5) und (2.8) mit $l = n - 1$ beschrieben, wenn f lokal summierbar ist und der Bedingung $\mathfrak{T}_i$ genügt. Erfüllt f sogar $\mathfrak{T}_i^0$, so erhalten wir μ und μ'' direkt mit Hilfe der Funktionen $f_{(i)y}$ und ihrer totalen Variationen. Es sei zum Beispiel B eine Menge aus $\mathfrak{B}_n$ derart, dass $B_{(i)y}$ für fast alle y entweder ein links offenes Intervall $\rceil a_y, b_y \rceil$ oder die leere Menge darstellt. Dann gilt

$$
(5.1) \qquad
\begin{aligned}
\mu(B) &= \int\limits_{\mathfrak{P}_i(B)} (f_{(i)y}(b_y) - f_{(i)y}(a_y))\,d\lambda_{n-1}(y),\\
\mu''(B) &= \int\limits_{\mathfrak{P}_i(B)} V(f_{(i)y};\ [a_y, b_y \rceil)\,d\lambda_{n-1}(y).
\end{aligned}
$$

Als Corollar des Theorems 5.2 erhalten wir unmittelbar den

SATZ 5.3. – *Es sei f lokal summierbar auf R_n. Dann und nur dann ist $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ ein beschränktes Mass, wenn f fast überall mit einer Funktion f^0 der folgenden Eigenschaft übereinstimmt:*

$f^0_{(i)y}$ ist für fast alle y von beschränkter Variation auf R_1, und $V(f^0_{(i)y};\ R_1)$ bildet eine summierbare Funktion von y.

Dann und nur dann ist $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ ein Mass, dessen Träger in einem n-dimensionalen abgeschlossenen Intervall J liegt, wenn f fast überall mit einer Fuktion f^0 der folgenden Eigenschaft übereinstimmt:

$f^0_{(i)y}$ ist für fast alle y aus $\mathfrak{P}_i(J)$ von beschränkter Variation auf $J_{(i)y}$ und konstant auf den beiden offenen Halbgeraden, aus denen sich $R_1 - J_{(i)y}$ zusammensetzt; $f^0_{(i)y}$ ist für fast alle y aus $R_{n-1} - \mathfrak{P}_i(J)$ konstant auf R_1; die Variation $V(f^0_{(i)y};\ J_{(i)y})$ bildet eine summierbare Funktion von y.

Es würde natürlich wieder genügen, nur vorauszusetzen, dass $V(f^0_{(i)y};\ R_1)$ oder $V(f^0_{(i)y};\ J_{(i)y})$ von einer summierbaren Funktion majorisiert werde, und andererseits lässt sich f^0 stets so bestimmen, dass $f^0_{(i)y}$ für fast alle y rechtsseitig stetig wird.

Eine messbare Funktion f auf R_n heisst *lokal von beschränkter Variation im Sinne von* TONELLI *und* CESARI, wenn sie $\mathfrak{T}_1, \dots, \mathfrak{T}_n$ erfüllt [4; 25].

SATZ 5.4. – *Ist eine messbare Funktion f lokal von beschränkter Variation im Sinne von* TONELLI *und* CESARI, *so ist sie lokal summierbar.*

Beweis. Es sei $J = [a_1, \dots, a_n;\ b_1, \dots, b_n \rceil$. Da f den Bedingungen $\mathfrak{T}_1, \dots, \mathfrak{T}_n$ genügt, so gibt es Funktionen $f^1, \dots, f^n$, die der Reihe nach $\mathfrak{T}_1^0, \dots, \mathfrak{T}_n^0$ erfüllen und fast überall gleich f sind. Wir zeigen induktiv, dass $f^k(x_1, \dots, x_k, c_{k+1}, \dots, c_n)$ für λ_{n-k}-fast alle $(c_{k+1}, \dots, c_n)$ eine λ_k-summierbare

Funktion von $(x_1, \dots, x_k)$ über $[\![a_1, \dots, a_k; b_1, \dots, b_k]\!]$ darstellt. Dies ist trivial im Falle $k = 1$, da f^1 der Bedingung $\mathcal{C}_1^0$ genügt. Sodann sei $k > 1$, und c_{k+1} bedeute eine beliebige Zahl in $[\![a_{k+1}; b_{k+1}]\!]$. Für λ_{n-1}-fast alle $(x_1, \dots, x_k, c_{k+2}, \dots, c_n)$ ist $f^{k+1}(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, c_{k+2}, \dots, c_n)$ eine über $[\![a_{k+1}, b_{k+1}]\!]$ summierbare Funktion von x_{k+1} und

$$\int_{a_{k+1}}^{b_{k+1}} | f^{k+1}(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, c_{k+2}, \dots, c_n) - f^{k+1}(x_1, \dots, x_k, c_{k+1}, c_{k+2}, \dots, c_n) | \, dx_{k+1}$$
$$\leq (b_{k+1} - a_{k+1}) V(f^{k+1}_{(k+1)(x_1, \dots, x_k, c_{k+2}, \dots, c_n)}; [\![a_{k+1}, b_{k+1}]\!]).$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung ist für λ_{n-k-1}-fast alle $(c_{k+2}, \dots, c_n)$ eine λ_k-summierbare Funktion von $(x_1, \dots, x_k)$ über $[\![a_1, \dots, a_k; b_1, \dots, b_k]\!]$, und somit wird

$$f^{k+1}(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, c_{k+2}, \dots, c_n) - f^{k+1}(x_1, \dots, x_k, c_{k+1}, c_{k+2}, \dots, c_n) \tag{5.2}$$

für λ_{n-k-1}-fast alle $(c_{k+2}, \dots, c_n)$ eine λ_{k+1}-summierbare Funktion von $(x_1, \dots, x_k, x_{k+1})$ über $[\![a_1, \dots, a_{k+1}; b_1, \dots, b_{k+1}]\!]$.

Wir nehmen nun an, unsere Behauptung treffe auf k zu. Dann ist $f^{k+1}(x_1, \dots, x_k, c_{k+1}, \dots, c_n)$ ebenfalls für λ_{n-k}-fast alle $(c_{k+1}, \dots, c_n)$ eine λ_k-summierbare Funktion von $(x_1, \dots, x_k)$ über $[\![a_1, \dots, a_k; b_1, \dots b_k]\!]$, denn für λ_{n-k}-fast alle $(c_{k+1}, \dots, c_n)$ gilt $f^{k+1}(x_1, \dots, x_k, c_{k+1}, \dots, c_n) = f^k(x_1 \dots, x_k, c_{k+1}, \dots, c_n)$ für λ_k-fast alle $(x_1, \dots, x_k)$. Daher können wir die Zahl c_{k+1} in $[\![a_{k+1}; b_{k+1}]\!]$ so wählen, dass $f^{k+1}(x_1, \dots, x_k, c_{k+1}, c_{k+2}, \dots, c_n)$ für λ_{n-k-1}-fast alle $(c_{k+2}, \dots, c_n)$ eine λ_k-summierbare Funktion von $(x_1, \dots, x_k)$ über $[\![a_1, \dots, a_k; b_1, \dots, b_k]\!]$ und das heisst eine λ_{k+1}-summierbare Funktion von $(x_1, \dots, x_{k+1})$ über $[\![a_1, \dots, a_{k+1}; b_1, \dots, b_{k+1}]\!]$ wird. Da die Funktion (5.2), wie oben gezeigt, die gleiche Eigenschaft hat, so bildet also auch $f^{k+1}(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, c_{k+2}, \dots, c_n)$ für λ_{n-k-1}-fast alle $(c_{k+2}, \dots, c_n)$ eine λ_{k+1}-summierbare Funktion von $(x_1, \dots, x_{k+1})$ über $[\![a_1, \dots, a_{k+1}; b_1, \dots, b_{k+1}]\!]$. Ist $k = n - 1$, so erhalten wir auf diese Weise die λ_n-Summierbarkeit von f^n und damit die von f.

Aus Theorem 5.2 und Satz 5.4 und der wohlbekannten Tatsache, dass eine Distribution, deren Ableitungen erster Ordnung Masze sind, eine Funktion darstellt [23, II, p. 37-38], folgt nun unmittelbar das

THEOREM 5.5 - *Ist eine messbare Funktion lokal von beschränkter Variation im Sinne von* TONELLI *und* CESARI, *so ist sie lokal summierbar, und ihre Ableitungen erster Ordnung im Sinne der Theorie der Distributionen sind Masze. Sind andererseits die Ableitungen erster Ordnung einer Distribution Masze, so bildet diese Distribution eine Funktion, die lokal von beschränkter Variation im Sinne von* TONELLI *und* CESARI *ist.*

Als Corollar erhalten wir das von CESARI [4, p. 300] bewiesene Ergebnis, wonach der Begriff « lokal von beschränkter Variation im Sinne von TONELLI und CESARI » nicht vom Koordinatensystem $x_1, \ldots, x_n$ abhängt. In der Tat ist dieser Begriff invariant gegenüber jeder Transformation von R_n, die alle Funktionen, deren Ableitungen Masze sind, in ebensolche Funktionen überführt.

Auf das Theorem 5.5 gestützt sagen wir, eine Funktion f sei *von beschränkter Variation im Sinne von* TONELLI *und* CESARI, wenn sie lokal von beschränkter Variation im Sinne von TONELLI und CESARI ist und wenn ihre Ableitungen erster Ordnung beschränkte Masze sind. Der Satz 5.3 gibt eine direkte Definition dieses Begriffs. Ist f von beschränkter Variation im Sinne von TONELLI und CESARI und μ_i das Mass $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, so bezeichnen wir die totale Variation des Vektormaszes $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$, das heisst die Zahl $\int\limits_{R_n} ((d\mu_1)^2 + \ldots + (d\mu_n)^2)^{-1/2}$, als die *totale Variation* von f. Diese Zahl kann auch direkt mit Hilfe von Approximationen von f durch regulärere Funktionen, etwa Faltungsprodukte oder stückweise lineare Funktionen, deren Ableitungen Funktionen sind, definiert werden; man vergleiche die für beschränktes f von de Giorgi [5] gegebene Definition sowie die Betrachtungen über den lebesgueschen Inhalt im 9. Kapitel und die Bemerkungen in der Einleitung der vorliegenden Note. Die totale Variation von f über einer beliebigen borelschen Teilmenge B von R_n werde analog durch $\int\limits_B ((d\mu_1)^2 + \ldots + (d\mu_n)^2)^{-1/2}$ erklärt; ist f nur lokal von beschränkter Variation im Sinne von TONELLI und CESARI, so hat dies zumindest dann einen Sinn, wenn $B \in \mathfrak{B}_n$.

6. Totalstetige Funktionen im Sinne von TONELLI und EVANS.

Bekanntlich bildet in der Theorie der Distributionen die Ableitung einer auf R_1 lokal summierbaren Funktion f dann und nur dann eine Funktion g, wenn f fast überall mit einer totalstetigen Funktion f^0 zusammenfällt, und g ist dann gleich der klassischen Ableitung von f^0, die wir, dem Vorbilde L. SCHWARTZ folgend, durch $\left[\frac{df^0}{dx}\right]$ bezeichnen wollen [23, I, p. 55]. Ist f lokal summierbar über R_n, so existiert ein ähnliches Kriterium dafür, dass $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ eine Funktion darstellt [23, I, p. 58]. Wir wollen dieses Kriterium als Spezialfall des Theorems 4.1 ableiten und zugleich versuchen, seinen Zusammenhang mit schon früher von anderen Autoren untersuchten Begriffen klar zu machen. Hierzu betrachten wir die folgende Bedingung über f.

$\mathfrak{S}_i^0$. *Für fast alle y aus R_{n-1} ist $f_{(i)y}$ totalstetig, und die klassische partielle Ableitung $\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]$ ist lokal summierbar.*

Es sei bemerkt, dass die klassische Ableitung $\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]$ einer messbaren Funktion f fast überall in R_n existiert und messbar ist, wenn $f_{(i)y}$ für fast alle y totalstetig ist [3, p. 642]. Infolgedessen zeigt uns der Fubinische Satz, dass wir $\mathfrak{S}_i^0$ auch folgendermassen formulieren können.

$\mathfrak{S}_i^0$. *f erfüllt $\mathfrak{T}_i^0$, und für fast alle y ist $f_{(i)y}$ totalstetig.*

Sodann betrachten wir die folgende Bedingung über f.

$\mathfrak{S}_i$. *Es gibt eine Funktion f^0, die fast überall mit f übereinstimmt und $\mathfrak{S}_i^0$ erfüllt.*

THEOREM 6.1. – *Eine lokal summierbare Funktion f aus R_n erfüllt dann und nur dann $\mathfrak{S}_i$, wenn die Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ im Sinne der Theorie der Distributionen eine Funktion g bildet. Genügt f der Bedingung $\mathfrak{S}_i^0$, so ist g die klassische partielle Ableitung $\left[\frac{\partial f^0}{\partial x_i}\right]$.*

Beweis. Erfüllt f die Bedingung $\mathfrak{S}_i$, so gibt es eine Funktion f^0, die fast überall mit f zusammenfällt und $\mathfrak{S}_i^0$ erfüllt. Aus dem Theorem 4.1 folgt, dass $\frac{\partial f^0}{\partial x_i}$ eine Funktion, nämlich $\left[\frac{\partial f^0}{\partial x_i}\right]$, ist.

Es sei nun andererseits $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ eine Funktion. Nach dem Theorem 5.2 gibt es eine Funktion f^0, die fast überall mit f zusammenfällt und $\mathfrak{T}_i^0$ erfüllt. Insbesondere ist $f^0_{(i)y}$ rechtsseitig stetig für fast alle y. Ferner stimmt $f^0_{(i)y}$ nach dem Theorem 4.1 für fast alle y fast überall mit einer totalstetigen Funktion überein. Da eine auf R_1 erklärte Funktion, die rechtsseitig stetig und fast überall gleich einer totalstetigen Funktion ist, selbst totalstetig sein muss, so ist also $f^0_{(i)y}$ für fast alle y totalstetig, d. h. f^0 erfüllt $\mathfrak{S}_i^0$, womit das Theorem bewiesen ist.

Eine messbare Funktion f auf R_n heisst *totalstetig im Sinne von* TONELLI *und* EVANS, wenn sie $\mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_n$ erfüllt [8, p. 274-285; 9; 10, p. 42-46; 25, p. 633-638; 26]. Aus den Theoremen 5.5 und 6.1 folgt unmittelbar das

THEOREM 6.2. – *Eine totalstetige Funktion im Sinne von* TONELLI *und* EVANS *ist lokal summierbar, und ihre Ableitungen erster Ordnung im Sinne der Theorie der Distributionen sind Funktionen. Sind andererseits die Ableitungen erster Ordnung einer Distribution Funktionen, so bildet diese Distribution eine totalstetige Funktion im Sinne von* TONELLI *und* EVANS.

Lokal summierbare Funktionen, die $\mathfrak{S}_i^0$ oder $\mathfrak{S}_i$ erfüllen, wurden ausser von EVANS auch von CALKIN untersucht, der unter anderem eine etwas abweichende Definition von $\mathfrak{S}_i$ gab [2, p. 173]. Ist f lokal summierbar und genügt es der Bedingung $\mathfrak{S}_i$, so lässt sich, wie CALKIN zeigte [2, p. 176], eine Funktion f°, die fast überall gleich f ist und $\mathfrak{S}_i^0$ erfüllt, als Grenzwert für $\delta \to 0$ der Mittelwerte

$$(2\delta)^{-n}\int\limits_{J(x,\,\delta)} f d\lambda_n \quad \text{mit } J(x,\,\delta) = \{\,\xi : x_i - \delta \leq \xi_i \leq x_i + \delta;\ i = 1, \ldots, n\,\}$$

gewinnen. Hieraus ergibt sich zugleich [2, p. 179; vgl. auch 8, p. 277-279], dass zu jeder totalstetigen Funktion f im Sinne von TONELLI und EVANS eine Funktion f^0 existiert, die fast überall mit f zusammenfällt und $\mathfrak{S}_1^0, \ldots \mathfrak{S}_n^0$ erfüllt.

Aus dem Theorem 6.2 folgt insbesondere, dass der Begriff « totalstetig im Sinne von TONELLI und EVANS » nicht vom Koordinatensystem $x_1, \ldots, x_n$ abhängt. Allgemeinere Transformationen von R_n, gegenüber denen dieser Begriff invariant bleibt, wurden von EVANS [8, p. 282] und MORREY [20, p. 189-195] untersucht.

7. Die Gauss-Greensche Formel.

Zur Abkürzung bezeichnen wir im folgenden das n-dimensionale lebesguesche Mass λ_n durch λ. Es sei G eine offene Teilmenge von R_n, F die Begrenzung von G und $E = R_n - (G \cup F)$ das Äussere von G. Bedeutet χ die charakteristische Funktion von G, so gilt für jede Funktion φ aus $\mathfrak{D}_n$:

$$\int\limits_G \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} d\lambda = \int\limits_{R_n} \chi \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} d\lambda = \left\langle \chi, \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \right\rangle = -\left\langle \frac{\partial\chi}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle.$$

Da χ in G und in E konstant bleibt, so ist der Träger von $\dfrac{\partial\chi}{\partial x_i}$ in F enthalten. Nach Theorem 5.2 bildet $\dfrac{\partial\chi}{\partial x_i}$ dann und nur dann ein Mass, wenn χ der Bedingung $\mathfrak{T}_i$ genügt. Infolgedessen ist die Bedingung $\mathfrak{T}_i$ über χ notwendig und hinreichend dafür, dass es ein Mass μ_i in R_n gibt, dessen Träger in F enthalten ist, so dass die Gauss-Greensche Formel

$$(7.1) \qquad \int\limits_G \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} d\lambda = -\int\limits_F \varphi d\mu_i$$

Um der Bedingung $\mathfrak{C}_i$ über χ eine einfache geometrische Interpretation zu geben, setzen wie $\lambda(F)=0$ voraus und bedienen uns bei festgehaltenem i der folgenden Bezeichnungen. Eine reelle Zahl z heisse ein *Wechselpunkt* über einem Punkt y aus R_{n-1}, wenn z ein Häufungspunkt sowohl von $G_{(i)y}$ als auch von $E_{(i)y}$ ist. Ein solcher Wechselpunkt gehört natürlich zu $F_{(i)y}$. Ist J ein n-dimensionales abgeschlossenes Intervall, so bedeute $\eta_i(y,\ J)$ die Anzahl der in $J_{(i)y}$ gelegenen Wechselpunkte über y; diese Anzahl kann endlich oder $+\infty$ sein.

SATZ 7.1. - *Die folgenden Aussagen sind gleichwertig.*

1. χ *erfüllt die Bedingung* $\mathfrak{C}_i$.

2. *Ist J ein beliebiges n-dimensionales abgeschlossenes Intervall, so wird $\eta_i(y,\ J)$ eine summierbare Funktion von y.*

3. *Zu jedem n-dimensionalen abgeschlossenen Intervall J gibt es eine über R_{n-1} summierbare Funktion v, so dass $\eta_i(y,\ J)\leq v(y)$ für jedes y.*

Beweis. Da der Index i stets festgehalten bleibt, so können wir zur Abkürzung B_y statt $B_{(i)y}$ und f_y statt $f_{(i)y}$ schreiben, wenn $B\subseteq R_n$, f auf R_n definiert und $y\in R_{n-1}$ ist. Es sei y ein Punkt aus R_{n-1} derart, dass $\eta_i(y,\ J)$ bei beliebigem J endlich ist und F_y keine inneren Punkte hat. Wir definieren eine Funktion $\tilde{\chi}_y^0$ auf R_1 folgendermassen. Ist z kein Häufungspunkt von G_y, so sei $\tilde{\chi}_y^0(z)=0$, und ist z kein Häufungspunkt von E_y, so sei $\tilde{\chi}_y^0(z)=1$. Damit ist $\tilde{\chi}_y^0$ überall auf R_1 ausser in den Wechselpunkten über y erklärt. $\tilde{\chi}_y^0$ bleibt konstant in jedem offenen Intervall zwischen zwei Wechselpunkten und hat einen Sprung der Grösse 1 in jedem Wechselpunkt. Wir vervollständigen die Definition von $\tilde{\chi}_y^0$, indem wir verlangen, $\tilde{\chi}_y^0$ sei rechtsseitig stetig. Mit $J=\lfloor\!\!\lceil a_1,\dots,a_n;\ b_1,\dots,b_n\rceil\!\!\rfloor$ und $J^k=\lfloor\!\!\lceil a_1,\dots,\ a_{i-1},\ a_i-\frac{1}{k},\ a_{i+1},\dots,a_n;\ b_1,\dots,b_n\rceil\!\!\rfloor$, wobei $k=1,\ 2,\dots$, gilt dann

$$V(\tilde{\chi}_y^0;\ J_y)\leq\eta_i(y,\ J)=\inf_k V(\tilde{\chi}_y^0;\ J_y^k). \tag{7.2}$$

Zum Beweis des Satzes bemerken wir nun zunächst, dass offenbar 3 aus 2 folgt. Sodann sei 3 erfüllt. Für fast alle y ist $\eta^i(y,\ J)$ bei beliebigem J endlich, und wegen $\lambda(F)=0$ hat F_y für fast alle y keine inneren Punkte, d.h. die Voraussetzungen der Konstruktion von $\tilde{\chi}_y^0$ sind für fast alle y erfüllt. Wir definieren eine Funktion χ^0 auf R_n durch $\chi_y^0=\tilde{\chi}_y^0$, falls $\tilde{\chi}_y^0$ erklärt ist, und $\chi_y^0=\chi_y$ sonst. χ^0 und χ unterscheiden sich nur in einer Teilmenge von F, d.h. einer λ-Nullmenge. Auf Grund der ersten der Relationen (7.2) hat χ^0 die Eigenschaft $\mathfrak{C}_i^{0\prime}$, und somit genügt χ der Bedingung $\mathfrak{C}_i$.

Wir nehmen schliesslich an, es gelte 1. Dementsprechend sei χ^0 eine fast überall mit χ übereinstimmende Funktion, die $\mathfrak{T}_i^0$ erfüllt. Wir betrachten einen Punkt y aus R_{n-1} derart, dass χ_y und χ_y^0 fast überall gleich sind und χ_y^0 lokal von beschränkter Variation und rechtsseitig stetig ist. Da die Punkte von R_1, in denen χ_y und χ_y^0 zusammenfallen, in den offenen Mengen G_y und E_y dicht liegen und χ_y^0 rechtsseitig stetig ist, so haben wir $\chi_y^0(t) = 1$ in G_y und $\chi_y^0(t) = 0$ in E_y. Bildet nun z einen Wechselpunkt, so gibt es also in jeder Umgebung von y sowohl Punkte t mit $\chi_y^0(t) = 1$ als auch Punkte t mit $\chi_y^0(t) = 0$. Dies gilt für jeden Wechselpunkt, und daher wird $\eta_i(y, J) \leq V(\chi_y^0; J_y')$, wenn J im Innern von J' liegt. Wegen der Summierbarkeit von $V(\chi_y^0, J_y')$ ist also $\eta_i(y, J) < +\infty$ für fast alle y. Mithin sind wieder für fast alle y die Voraussetzungen der obigen Konstruktion von $\tilde{\chi}_y^0$ gegeben und $\tilde{\chi}_y^0(t) = \chi_y(t) = \chi_y^0(t)$ für fast alle t. Da $\tilde{\chi}_y^0$ und χ_y^0 für fast alle y rechtsseitig stetig sind, so haben wir sogar $\tilde{\chi}_y^0 = \chi_y^0$ für fast alle y, so dass aus der zweiten der Relationen (7.2) die Summierbarkeit von $\eta_i(y, J)$ bei beliebigem J folgt. Damit ist der Satz bewiesen.

Ganz analoge Kriterien ergeben sich dafür, dass $\dfrac{\partial \chi}{\partial x_i}$ ein beschränktes Mass oder ein Mass mit kompaktem Träger ist (vgl. Satz 5.3).

Es ist leicht zu sehen (cf. [16, I, p. 268] und die in [16, III] beschriebenen Arbeiten von WILKOSZ, SCHAUDER und RANDOLPH), dass die Formel (7.1) unter der Annahme $\mathfrak{T}_i$ nicht nur auf alle stetig differenzierbaren Funktionen φ mit kompaktem Träger zutrifft, sondern auch auf alle der Bedingung $\mathfrak{S}_i^0$ genügenden Funktionen mit kompaktem Träger; bei beschränktem G braucht φ natürlich keinen kompakten Träger zu haben.

Die Bedingungen 2 oder 3 sind verwandt mit den in [16, I, p. 264] aufgestellten Bedingungen dafür, dass auf F ein Mass μ_i existiert, so dass (7.1) gilt. Insbesondere impliziert 2 oder 3, dass $\eta_i(y, J)$ für fast alle y bei beliebigem J endlich ist. Diese Aussage ist eine Abschwächung der Bedingung G 3 in [16, I, p. 264]. Auf Grund eines Beispiels von CACCIOPPOLI [1, p. 11] ist G 3 keine Folge von $\mathfrak{T}_i$. Die in [16, I] betrachtete Situation ist jedoch andererseits insofern viel allgemeiner, als μ_i nicht als endlich, sondern nur als sigma-endlich auf jeder kompakten Menge vorausgesetzt wird, also kein Radonsches Mass zu sein braucht. Ferner ist die Bedingung G 2, wie in [16, I, p. 281-283] gezeigt, eine Folge der Forderung, (7.1) gelte auch für Funktionen φ mit über G summierbarer Ableitung $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}$, die keinen kompakten Träger haben.

Es sei schliesslich bemerkt, dass die Bedingungen 2 oder 3 mit $i = 1, \dots, n$ im Fall $\lambda(F) = 0$ nach Satz 7.1 notwendig und hinreichend dafür sind, dass χ lokal von beschränkter Variation im Sinne von TONELLI und CESARI ist. Insbesondere ist dann die Konjunktion dieser Bedingungen unabhängig vom Koordinatensystem $x_1, \dots, x_n$.

8. Substrate geschlossener verallgemeinerter Hyperflächen.

In der Theorie der verallgemeinerten Flächen von L. C. YOUNG lässt sich das *Substrat einer verallgemeinerten Hyperfläche* [28, p. 257; 11, p. 120 und die vorangehende Arbeit von FLEMING] durch ein Vektormass $M = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ darstellen, wobei $\mu_1, \dots, \mu_n$ Radonsche Masse in R_n mit kompaktem Träger sind [2]. Ist $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ eine Vektorfunktion mit $\varphi_i \in \mathbf{E}_n$, so schreiben wir $\langle M, \Phi \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \mu_i, \varphi_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \int_{R_n} \varphi_i d\mu_i$ und $\operatorname{div} \Phi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}$. Wir sagen, M sei das Substrat einer *geschlossenen* verallgemeinerten Hyperfläche, wenn $\langle M, \Phi \rangle = 0$ ist für jedes Φ mit $\operatorname{div} \Phi = 0$.

Es sei f eine lokal summierbare Funktion auf R_n. Sind die Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ Masze μ_i, so heisst das Vektormass $\operatorname{grad} f = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ der *Gradient* von f. Bekanntlich gilt $\operatorname{grad} f_1 = \operatorname{grad} f_2$ in einer offenen zusammenhängenden Menge G dann und nur dann, wenn eine Konstante c existiert, so $f_1(x) = f_2(x) + c$ für fast alle x in G [23, I, p. 55]. Wie wir sehen werden, folgt aus der Theorie der Distributionen unmittelbar, dass die Begriffe « Substrat einer geschlossenen verallgemeinerten Hyperfläche » und « Gradient einer Funktion mit kompaktem Träger » übereinstimmen. Dieses Resultat wird auch von FLEMING in der vorangehenden Arbeit mit Hilfe des Approximationssatzes über geschlossene verallgemeinerte Hyperflächen bewiesen. Kombinieren wir es mit dem Theorem 5.5, so erhalten wir das folgende

THEOREM 8.1. - *Der Gradient einer jeden Funktion von beschränkter Variation im Sinne von* TONELLI *und* CESARI *und mit kompaktem Träger existiert und ist das Substrat einer geschlossenen verallgemeinerten Hyperfläche, und jedes Substrat einer geschlossenen verallgemeinerten Hyperfläche kann auf diese Weise erhalten werden.*

Beweis. Der Gradient M einer Funktion f von beschränkter Variation im Sinne von TONELLI und CESARI und mit kompakten Träger existiert nach Theorem 5.5 und hat ebenfalls einen kompakten Träger. Aus $\operatorname{div} \Phi = 0$ folgt

$$\langle M, \Phi \rangle = \sum_{i=1}^{n} \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi_i \right\rangle = - \sum_{i=1}^{n} \left\langle f, \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} \right\rangle = - \langle f, \operatorname{div} \Phi \rangle = 0,$$

d.h. M ist das Substrat einer geschlossenen verallgemeinerten Hyperfläche.

(2) M ist, in anderen Worten, eine $(n-1)$-dimensionale Strömung in R_n der Ordnung 0 mit kompaktem Träger [7].

Es sei nun andererseits $\mathrm{M} = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ das Substrat einer geschlossenen verallgemeinerten Hyperfläche. Auf Grund der Theorie der Distributionen [23, I, p. 60 und II, p. 37-38] sind die folgenden Bedingungen hinreichend für die Existenz einer lokal summierbaren Funktion f mit $\mu_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$:

$$\frac{\partial \mu_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \mu_j}{\partial x_i} \qquad (i < j;\ i, j = 1, \dots, n). \tag{8.1}$$

Um (8.1) zu verifizieren, betrachten wir eine Funktion φ aus $\mathfrak{E}_n$ und diejenige Vektorfunktion Φ, deren i-te Komponente gleich $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$, deren j-te Komponente gleich $-\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$ und deren übrige Komponenten gleich 0 sind. Dann ist $\operatorname{div} \Phi = 0$, folglich $\langle \mathrm{M}, \Phi \rangle = 0$, das heisst $\left\langle \mu_i, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle = \left\langle \mu_j, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle$, also $\left\langle \frac{\partial \mu_i}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \mu_j}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle$, womit (8.1) bewiesen ist. Wir zeigen schliesslich, dass f als Funktion mit kompaktem Träger gewählt werden kann. Es sei K eine abgeschlossene n-dimensionale Kugel, die den Träger von M enthält. Da $R_n - K$ zusammenhängt und $\operatorname{grad} f$ in $R_n - K$ verschwindet, so gibt es eine Konstante c derart, dass $f(x) = c$ fast überall in $R_n - K$. Ersetzen wir $f(x)$ durch $f(x) - c$, wenn $x \in K$, und durch 0, wenn $x \in R_n - K$, so hat die neue Funktion die verlangten Eigenschaften.

Während wir hier die Theorie der Distributionen zur Untersuchung von Substraten geschlossener verallgemeinerter Hyperflächen verwendet haben, so können wir andererseits die Ergebnisse der Theorie der verallgemeinerten Flächen aus [11] (vgl. auch [6]) benutzen, um die Struktur von Vektormaszen, die Gradienten von Funktionen beschränkter Variation im Sinne von TONELLI und CESARI mit kompaktem Träger sind, zu beschreiben. Auf diese Weise ergibt sich auch der Mischungssatz [Satz 5] in der vorangehenden Arbeit von FLEMING, der sich auf diese Funktionen selbst bezient.

9. Lebesguescher Inhalt unstetiger nichtparametrischer Hyperflächen.

Es sei G eine beliebige offene Teilmenge von R_n. Die Methoden und Ergebnisse der vorangegangenen Kapitel bleiben offenbar unverändert, wenn wir Distributionen in G statt in R_n betrachten und die Formulierungen passend modifizieren. $\mathfrak{D}(G)$ bedeute den Raum aller in G definierten unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger und λ wiederum das n-dimensionale lebesguesche Mass.

Unter einer *Figur* F verstehen wir eine Teilmenge von G, die Vereinigung endlich vieler n-dimensionaler abgeschlossener Simplizes ist, die paarweise keine inneren Punkte gemeinsam haben. Jedes derartige System von Simplizes werde eine *Zerlegung* von F genannt. F^I bezeichne das Innere von F. Wir sagen, eine auf F erklärte reelle Funktion p sei *stückweise linear*, wenn es eine Zerlegung Ξ von F gibt, so dass p auf jeder Komponente von Ξ linear ist. In diesem Falle definieren wir

$$\beta(p) = \int_F \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial p}{\partial x_i}\right)^2}\, d\lambda.$$

Es sei f eine auf G lokal summierbare Funktion. Mit $\mathfrak{M}$ bezeichnen wir das System aller Folgen $(p_k, F_k;\ k = 1, 2, \dots)$, wobei F_k eine Figur, $F_k \subseteq F_{k+1}$, $\bigcup_k F_k^I = G$, p_k stückweise linear auf F_k und $\lim_k \int_{F_k} |\, p_k - f \,|\, d\lambda = 0$ ist. $\mathfrak{M}$ ist nicht leer, weil f lokal summierbar ist. Die Zahl

$$\alpha(f) = \inf_{(p_k, F_k) \in \mathfrak{M}} \ \liminf_k \beta(p_k),$$

die endlich oder gleich $+\infty$ sein kann, heisse der *lebesguesche Inhalt* der durch die Gleichung $x_{n+1} = f(x)$ mit $x \in G$ in R_{n+1} gegebenen Hyperfläche.

THEOREM 9.1. - *Dann und nur dann ist f lokal summierbar über G und $\alpha(f) < +\infty$, wenn $\lambda(G) < +\infty$ und f von beschränkter Variation im Sinne von* TONELLI *und* CESARI *ist. In diesem Falle wird $\alpha(f)$ die totale Variation über G des Vektormaszes $(\lambda, \mu_1, \dots, \mu_n)$ mit $\mu_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, symbolisch*

$$\alpha(f) = \int_G \sqrt{(d\lambda)^2 + (d\mu_1)^2 + \dots + (d\mu_n)^2}\,.$$

Beweis. Es sei zunächst f lokal summierbar mit $\alpha(f) < +\infty$ und dementsprechend (p_k, F_k) eine Folge aus $\mathfrak{M}$ derart, dass die Zahlenfolge $(\beta(p_k))$ nach oben durch eine Zahl c beschränkt ist. Aus der Definition von $\beta(p_k)$ folgt unmittelbar $\lambda(G) = \lim_k \lambda(F_k) \leq c$. Ferner sei $\varphi \in \mathfrak{D}(G)$ und $\rho = \max_{x \in G} |\, \varphi(x) \,|$. Dann gilt

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = -\left\langle f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle = -\int_G f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, d\lambda = -\lim_k \int_{F_k} p_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, d\lambda. \tag{9.1}$$

Für hinreichend grosses k enthält F_k^I den Träger von φ, so dass sich durch partielle Integration ergibt

$$\left| \int_{F_k} p_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, d\lambda \right| = \left| \int_{F_k} \varphi \frac{\partial p_k}{\partial x_i}\, d\lambda \right| \leq \rho \int_{F_k} \left| \frac{\partial p_k}{\partial x_i} \right| d\lambda \leq \rho\beta(p_k) \leq \rho c,$$

also nach (9.1): $\left| \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle \right| \leq \rho c$. Demnach sind die Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ beschränkte Masze, d. h. f ist von beschränkter Variation im Sinne von TONELLI und CESARI.

Wir nehmen nun andererseits an, es sei $\lambda(G) < +\infty$ und f sei von beschränkter Variation im Sinne von TONELLI und CESARI. Nach Satz 5.4 ist f lokal summierbar, und nach Theorem 5.5 bildet $\mu_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ ein beschränktes Mass für $i = 1, \dots, n$. Daher ist die totale Variation ν des Vektormaszes $(\lambda, \mu_1, \dots, \mu_n)$ ein beschränktes Radonsches Mass in G. Um das Theorem vollständig zu beweisen, brauchen wir nur noch $\alpha(f) = \nu(G)$ abzuleiten. Es sei G' eine beschränkte offene Menge, deren abgeschlossene Hülle in G liegt, und (p_k, F_k) eine Folge aus $\mathfrak{M}$ derart, dass $G' \subseteq F_k{}^I$ und $\lim_k \beta(p_k) = \alpha(f)$. Ferner bedeute Λ das auf G' eingeschränkte Vektormass $(\lambda, \mu_1, \dots, \mu_n)$ und Λ_k das auf G' eingeschränkte Vektormass $(\lambda, \mu_1{}^{(k)}, \dots, \mu_n{}^{(k)})$, wobei $\mu_i{}^{(k)}$ die als Mass in $F_k{}^I$ betrachtete Ableitung $\frac{\partial p_k}{\partial x_i}$ sei. Dann wird $\nu(G')$ die totale Variation von Λ und

$$\nu_k(G') = \int_{G'} \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial p_k}{\partial x_i}\right)^2}\, d\lambda$$

die totale Variation von Λ_k. Wegen $\lim_k \int_{G'} | p_k - f \mid d\lambda = 0$ konvergiert die Folge (Λ_k) gegen Λ in der Topologie der Distributionen [23, I, p. 72 und 80]. Nach dem Hellyschen Satz ist die totale Variation (Norm) eines Vektormaszes in G' eine unterhalb stetige Funktion dieses Maszes in bezug auf die Topologie der Distributionen, also

$$\nu(G') \leq \liminf_k \nu_k(G') \leq \liminf_k \beta(p_k) = \alpha(f).$$

Da ν ein Radonsches Mass bildet, so ist $\nu(G)$ das Supremum aller $\nu(G')$, genommen über alle beschränkten offenen Mengen G', deren abgeschlossene Hülle in G liegt, und daher $\nu(G) \leq \alpha(f)$.

Um die entgegengesetzte Ungleichung $\alpha(f) \leq \nu(G)$ zu beweisen, brauchen wir nur zu zeigen, dass es zu jeder Figur F und jeder positiven Zahl ε eine stückweise lineare Funktion p auf F mit

$$(9.2) \qquad \int_F |p - f| \, d\lambda < \varepsilon, \quad \beta(p) \leq \nu(G) + \varepsilon$$

gibt. Der erste Schritt des folgenden Beweises stützt sich im wesentlichen auf eine von de Giorgi [5, p. 197] verwendete Methode. Es sei G' eine F enthaltende beschränkte offene Menge, deren abgeschlossene Hülle in G liegt, δ der Abstand der Figur F von $R_n - G'$ und (g_k) eine Folge nichtnegativer Funktionen aus $\mathfrak{D}_n$ mit $\int_{R_n} g_k d\lambda = 1$ derart, dass der Träger von g_k in der offenen Kugel vom Radius δk^{-1} mit dem Ursprung als Mittelpunkt enthalten ist. $\tilde{f}$ sei diejenige Funktion auf R_n, die ausserhalb von G' verschwindet und in G' mit f übereinstimmt, und $f_k = \tilde{f} * g_k$ die Faltung von $\tilde{f}$ und g_k, d. h.

$$f_k(x) = \int_{R_n} \tilde{f}(t) g_k(x-t) d\lambda(t) = \int_{G'} f(t) g_k(x-t) d\lambda(t).$$

Jedes f_k stellt eine unendlich oft differenzierbare und summierbare Funktion dar, und es ist $\lim_k \int_{R_n} |\tilde{f} - f_k| \, d\lambda = 0$ [23, II, p. 23]. Daher lässt sich k so wählen, dass

$$\int_F |f - f_k| \, d\lambda < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{9.3}$$

Ferner gilt [23, II, p. 16]:

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_i} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i} * g_k. \tag{9.4}$$

Liegt x in F, so ist der Träger von $g_k(x-t)$ als Funktion von t betrachtet in G' enthalten. Da $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}$ und $\mu_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ in G' zusammenfallen, so folgt in diesem Fall aus (9.4) die Gleichung $\frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x) = \int_{G'} g_k(x-t) d\mu_i(t)$. Ausserdem ist $1 = \int_{G'} g_k(x-t) d\lambda(t)$, also

$$\sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x)\right)^2} = \sqrt{\left(\int_{G'} g_k(x-t) d\lambda(t)\right)^2 + \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{G'} g_k(x-t) d\mu_i(t)\right)^2}$$

$$\leq \int_{G'} g_k(x-t) d\nu(t)$$

und somit

$$\int_F \sqrt{1+\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\right)^2}\,d\lambda \leq \int_F \int_{G'} g_k(x-t)d\nu(t)d\lambda(x)$$

$$(9.5)\qquad \leq \int_{R_n}\int_G g_k(x-t)d\nu(t)d\lambda(x) = \int_G \int_{R_n} g_k(x-t)d\lambda(x)d\nu(t)$$

$$= \int_G d\nu = \nu(G).$$

Da f_k unendlich oft differenzierbar in R_n ist, so existiert eine stückweise lineare Funktion p auf F mit $\int_F |p-f_k|\,d\lambda < \varepsilon/2$ und $\beta(p) \leq \int_F \sqrt{1+\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\right)^2}\,d\lambda + \varepsilon$ [15, p. 290-294]. Hieraus und aus (9.3) und (9.5) folgt (9.2) und damit der Beweis des Theorems.

Als Corollar des Theorems 9.1 ergibt sich die im Falle eines Quadrates G wohlbekannte Tatsache [12, p. 229], dass der als Funktion einer variablen in G enthaltenen offenen Menge G' aufgefasste lebesguesche Inhalt der Fläche $x_{n+1} = f(x)$ mit $x \in G'$ zu einem beschränkten Radonschen Mass in G, nämlich ν, erweitert werden kann, wenn $\alpha(f) < +\infty$.

Einfache Beispiele zeigen, dass die Summierbarkeit von f selbst dann nicht aus $\alpha(f) < +\infty$ folgt, wenn G eine beschränkte und zusammenhängende Menge bildet und f unendlich oft differenzierbar in G ist. Stellt G jedoch das Innere eines n-dimensionalen Intervalls dar, so ergibt sich mit Hilfe der im Beweis des Satzes 5.4 angestellten Überlegungen, dass jede in G lokal summierbare Funktion f mit $\alpha(f) < +\infty$ auch summierbar ist.

Wir betrachten nun insbesondere den Fall, dass G das Innere eines abgeschlossenen Quadrats Q in R_2 ist. Infolge der eben gemachten Bemerkung bedeutet es keine Einschränkung, f als summierbar anzunehmen, so wie es in der Arbeit [12] von GOFFMAN von vornherein geschieht. Mit Hilfe der dort entwickelten Methoden lässt sich leicht beweisen, dass der von CESARI [4] definierte verallgemeinerte lebesguesche Inhalt der Fläche $x_3 = f(x_1, x_2)$ mit $(x_1, x_2) \in Q$ gleich dem in der vorliegenden Note erklärten lebesgueschen Inhalt der Fläche $x_3 = f(x_1, x_2)$ mit $(x_1, x_2) \in G$ ist, und ist f stetig auf Q, so haben wir den klassischen lebesgueschen Inhalt. Das Theorem 9.1 lässt sich im vorliegenden Spezialfall auch durch eine Kombination der Sätze des 5. Kapitels mit Methoden von GOFFMAN aus [12] herleiten. Es folgt nämlich aus Lemma 4, p. 212 in [12] und aus den Formeln (5.1) der vorliegenden Arbeit, dass die de Geöczeschen Ausdrücke $H_1(f)$ und $H_2(f)$ die totalen Variationen $\mu_1''(G)$ und $\mu_2''(G)$ der partiellen Ableitungen $\mu_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ sind, und es ist nicht schwer, mit Hilfe dieser Feststellung zu zeigen, dass der de Geöczesche Ausdruck $H(f)$ die totale Variation $\nu(G)$ des Vektormasses (λ, μ_1, μ_2) darstellt. Da GOFFMAN $\alpha(f) = H(f)$ bewies [12, p. 214], so haben wir in der Tat $\alpha(f) = \nu(G)$.

Es sei bemerkt, dass die Formel für $\alpha(f)$ im Theorem 9.1 immer dann richtig ist, wenn die rechte Seite einen Sinn hat, d. h. wenn f lokal von beschränkter Variation im Sinne von TONELLI und CESARI ist, denn stellt λ oder eines der μ_i kein beschränktes Mass in G dar, so sind beide Seiten der Formel gleich $+\infty$. Aus den Theoremen 6.2 und 9.1 ergibt sich schliesslich der folgende Satz, der von GOFFMAN [12, p. 231] in dem Falle, dass G das Innere eines Quadrates bedeutet, bewiesen wurde:

SATZ. 9.2. – *Ist f in G totalstetig im Sinne von* TONELLI *und* EVANS, *so gilt*

$$\alpha(f) = \int_{G} \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2} \, d\lambda.$$

LITERATUR

[1] CACCIOPPOLI, R., *Misura e integrazione sugli insiemi dimensionalmente orientati*, I, II, « Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur. », VIII, Ser. 12, 3-11, 137-146 (1952).

[2] CALKIN, J. W., *Functions of real variables and absolute continuity*, I, « Duke Math. J. », **6**, 170-186 (1940).

[3] CARATHÉODORY, C., *Vorlesungen über reelle Funktionen*, 2. Aufl., Leipzig und Berlin 1927.

[4] CESARI, L., *Sulle funzioni a variazione limitata*, « Ann. R. Scuola Norm. Sup. Pisa. Sc. fis. mat. », II. Ser. **5**, 299-313 (1936).

[5] DE GIORGI, E., *Su una teoria generale della misura $(r-1)$-dimensionale in uno spazio ad r dimensioni*, « Ann. Mat. pura appl. », IV. Ser. **36**, 191-213 (1954).

[6] DE GIORGI, E., *Nuovi teoremi relativi alle misure $(r-1)$-dimensionali in uno spazio ad r dimensioni*, « Ricerche Mat. », **4**, 95-113 (1955).

[7] DE RHAM, G., *Variétés différentiables*, « Actual. sc. ind. », 1222, Paris 1955.

[8] EVANS, G. C., *Fundamental points of potential theory*, « Rice Institute Pamphlet », **7**, 252-329 (1920).

[9] EVANS, G. C., *Note on a theorem of Bôcher*, « Amer. J. Math. », **50**, 123-126 (1928).

[10] EVANS, G. C., *Complements of potential theory*, II, « Amer. J. Math. », **55**, 29-49 (1933).

[11] FLEMING, W. H., and L. C. YOUNG, *Representations of generalized surfaces as mixtures*, « Rend. Circ. mat. Palermo », II. Ser. **5**, 117-144 (1956).

[12] GOFFMAN, C., *Lower-semi-continuity and area functionals*, I, « Rend. Circ. mat. Palermo », II. Ser. **2**, 203-235 (1953).

[13] GOFFMAN, C., *Convergence in area of integral means*, « Amer. J. Math. », **77**, 563-574 (1955).

[14] HALMOS, P. R., *The decomposition of measures*, « Duke Math. J. », **8**, 386-392 (1941).

[15] HAUPT-AUMANN-PAUC, *Differential- und Integralrechnung*, III, 2. Aufl. Berlin 1955.

[16] KRICKEBERG, K., *Über den Gausschen und den Stokesschen Integralsatz*, I, II, III, « Math. Nachr. », **10**, 261-314 (1953), **11**, 35-60 (1954), **12**, 341-365 (1954).

[17] KURATOWSKI, C., *Topologie*, I, 2. éd. Warszawa 1948.

[18] LUSIN, N., *Leçons sur les ensembles analytiques*, Paris 1930.

[19] MONTGOMERY, D., *Properties of plane sets and functions of two variables*, « Am. J. Math. », **56**, 569-586 (1934).

[20] MORREY, C. B., Jr., *Functions of several variables and absolute continuity*, II, « Duke Math. J. », **6**, 187-215 (1940).

[21] RADÓ, T., *Sur le calcul des surfaces courbes*, « Fundamenta Math. », **10**, 197-210 (1927).

[22] SAKS, St., *Theory of the integral*, 2nd. ed. Warszawa 1937.

[23] SCHWARTZ, L., *Théorie des distributions*, I, II, « Actual. sc. ind. », 1091, Paris 1950, 1122, Paris 1951.

[24] SIERPINSKI, W., *Sur un problème concernant les ensembles mesurables superficiellement*, « Fundamenta Math. », **1**, 112-115 (1920).

[25] TONELLI, L., *Sulla quadratura delle superficie*, « Atti R. Accad. naz. Lincei », VI Ser. **3**, 357-362, 445-450, 633-638 (1926).

[26] TONELLI, L., *Sulle funzioni di due variabili assolutamente continue*, « Mem. R. Accad. Sc. Ist. Bologna, Sc. fis. », VIII. Ser. **6**, 81-88 (1928-29).

[27] YOUNG, L. C., *An expression connected with the area of a surface* $z = F(x, y)$, « Duke Math. J. », **11**, 43-57 (1944).

[28] YOUNG, L. C., *A variational Algorithm*, « Rivista Mat. Univ. Parma », **5**, 255-268 (1954).

[29] ZINK, R., *Direct unions of measure spaces*, « Duke Math. J. », **22**, 57-74 (1955).