Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät
Institut für Mathematik

Die Crouzeix-Raviart Finite-Elemente Methode für eine Minimierung im Raum der Funktionen von beschränkter Variation

Enrico Bergmann

Version: 26. März 2019

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

2. Theoretische Grundlagen

Dieser Abschnitt folgt Kapitel 10 von [bartels]. Dabei sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes, polygonal berandetes Lipschitz-Gebiet.

2.1. Vorbereitung

Definition 2.1 (braides)**.** Eine Funktion $\mu : \mathcal{B}(\Omega) \to \mathbb{R}^N$ heißt (Vektor-) Maß auf Ω, wenn sie abzählbar additiv ist, d.h. für alle $(B_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}(\Omega)$ mit $B_j \cap B_k = \emptyset$ für $j \neq k$ gilt

$$\mu\left(\dot{\bigcup_{j\in\mathbb{N}}} B_j\right) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(B_j).$$

Die Menge aller dieser Maße sei $\mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^N)$.

Im Fall $N = 1$ heißt μ skalares Maß. Falls μ zusätzlich nur Werte in $[0,\infty)$ annimmt, heißt es positives Maß. Die Menge aller skalaren Maße sei $\mathcal{M}(\Omega)$ und die Menge aller positiven Maße sei $\mathcal{M}_+(\Omega)$.

Bemerkung 2.2. Die übliche Anforderung $\mu(\emptyset) = 0$ an ein Maß ist äquivalent zur Bedingung, dass $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ existiert, sodass $\mu(A)$ in jeder Komponente endliche Werte annimmt.

Da in Definition 2.1 als Wertebereich $\mathbb{R}^N$ gefordert wird, ist diese äquivalente Bedingung erfüllt.

Definition 2.3. Eine Funktion $\mu : \mathcal{B}(\Omega) \to \mathbb{R}^N$ heißt Radonmaß auf Ω, wenn $\mu|_{\mathcal{B}(\Omega')}$ ein Maß auf jeder Menge $\Omega' \subset\subset \Omega$ (d.h. $\mathrm{cl}(\Omega') \subset \mathrm{int}(\Omega)$) ist.

2.2. Direkte Methode der Variationsrechnung

2.3. Subdifferential

2.4. Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen

2.5. Funktionen Beschränkter Variation

Definition 2.4 (Funktionen beschränkter Variation)**.** Eine Funktion $u \in L^1(\Omega)$ ist von beschränkter Variation, wenn ihre distributionelle Ableitung ein Radonmaß definiert, d.h. eine Konstante $c \geqslant 0$ existiert, sodass

$$\langle Du, \Phi\rangle = -\int_\Omega u \operatorname{div}(\phi)\,\mathrm{d}x \leqslant c\|\phi\|_{L^\infty(\Omega)} \tag{2.1}$$

für alle $\phi \in C^1_C(\Omega;\mathbb{R}^n)$.

Die minimale Konstante $c \geqslant 0$, die (2.1) erfüllt, heißt totale Variation von Du und besitzt die Darstellung

$$|u|_{\mathrm{BV}(\Omega)} = \sup_{\substack{\phi \in C^1_C(\Omega;\mathbb{R}^n) \\ \|\phi\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant 1}} -\int_\Omega u \operatorname{div}(\phi)\,\mathrm{d}x.$$

Der Raum aller Funktionen beschränkter Variation $\mathrm{BV}(\Omega)$ ist ausgestattet mit der Norm

$$\|u\|_{\mathrm{BV}(\Omega)} := \|u\|_{L^1(\Omega)} + |u|_{\mathrm{BV}(\Omega)}.$$

Definition 2.5. Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{BV}(\Omega)$ und sei $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$ mit $u_n \to u$ in $L^1(\Omega)$ für $n \to \infty$.

(i) Die Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert strikt gegen u, wenn $|u_n|_{\mathrm{BV}(\Omega)} \to |u|_{\mathrm{BV}(\Omega)}$ für $n \to \infty$.

(ii) Die Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert schwach gegen u, wenn $Du_n \rightharpoonup^* Du$ in $\mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ für $n \to \infty$, d.h. für alle $\phi \in C_0(\Omega;\mathbb{R}^n)$ gilt $\langle Du_n, \phi\rangle \to \langle Du, \phi\rangle$ für $n \to \infty$.

Theorem 2.6 (Schwache Unterhalbstetigkeit)**.** *Seien $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{BV}(\Omega)$ und $u \in L^1(\Omega)$ mit $|u_n|_{\mathrm{BV}(\Omega)} \leqslant c$ für ein $c > 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$ und $u_n \to u$ in $L^1(\Omega)$ für $n \to \infty$.*

Dann gilt $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$ und $|u|_{\mathrm{BV}(\Omega)} \leqslant \liminf_{n\to\infty} |u_n|_{\mathrm{BV}(\Omega)}$. Außerdem gilt $u_n \rightharpoonup u$ in $\mathrm{BV}(\Omega)$ für $n \to \infty$.

Theorem 2.7 (Appoximation mit glatten Funktionen)**.** *Die Räume $C^\infty(\overline{\Omega})$ und $C^\infty(\Omega) \cap \mathrm{BV}(\Omega)$ liegen dicht in $\mathrm{BV}(\Omega)$ bezüglich strikter Konvergenz.*

Theorem 2.8. *Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{BV}(\Omega)$ eine beschränkte Folge. Dann existiert eine Teilfolge $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und ein $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$, sodass $u_{n_k} \rightharpoonup u$ in $\mathrm{BV}(\Omega)$ für $k \to \infty$.*

3. Das kontinuierliche Problem

Betrachte für gegebenes $\alpha > 0$ und rechte Seite $f \in L^2(\Omega)$ das folgende Minimierungsproblem.

Problem 3.1. Finde $u \in \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$, sodass u das Funktional

$$E(v) := \frac{\alpha}{2}\|v\|_{L^2(\Omega)} + |v|_{\mathrm{BV}(\Omega)} + \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} - \int_\Omega fv\,\mathrm{d}x \tag{3.1}$$

unter allen $v \in V := \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ minimiert.

Theorem 3.2 (Existenz einer Lösung)**.** *Problem 3.1 besitzt eine Lösung* $u \in \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$.

Beweis. Das Funktional E in (3.1) ist nach unten beschränkt, denn für alle $v \in \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ gilt mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und der Youngschen Ungleichung

$$\begin{aligned} E(v) &= \frac{\alpha}{2}\|v\|_{L^2(\Omega)} + |v|_{\mathrm{BV}(\Omega)} + \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} - \int_\Omega fv\,\mathrm{d}x \\ &\geqslant \frac{\alpha}{4}\|v\|_{L^2(\Omega)} + |v|_{\mathrm{BV}(\Omega)} + \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} - \frac{1}{\alpha}\|f\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\geqslant -\|f\|^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Somit existiert eine infimierende Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ von E, d.h. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllt $\lim_{n\to\infty} E(u_n) = \inf_{v\in\mathrm{BV}(\Omega)\cap L^2(\Omega)} E(v)$.

Gleichung (3.2) impliziert außerdem, dass $E(v) \to \infty$, falls $\|v\|_{\mathrm{BV}(\Omega)} \to \infty$. Die Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ muss also insbesondere beschränkt sein.

Nun garantiert Theorem 2.8 die Existenz einer schwach konvergenten Teilfolge $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit schwachem Grenzwert $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$. O.B.d.A. ist $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Analog ist $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Gleichung (3.2) ebenfalls beschränkt bezüglich der Norm $\|\bullet\|_{L^2(\Omega)}$, besitzt also eine Teilfolge (O.B.d.A. weiterhin bezeichnet mit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$), die in $L^2(\Omega)$ schwach gegen ein $\tilde{u} \in L^2(\Omega)$ konvergiert. Da die Einbettung $L^2(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$ kompakt ist, existiert eine Teilfolge (O.B.d.A $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$), die stark gegen $\tilde{u}$ konvergiert bezüglich der Norm $\|\bullet\|_{L^1(\Omega)}$.

Allerdings bedeutet die schwache Konvergenz $u_n \rightharpoonup u$ in $\mathrm{BV}(\Omega)$ insbesondere, dass $u_n \to u$ in $L^1(\Omega)$. Es gilt also $u = \tilde{u} \in L^2(\Omega)$, d.h. $u \in \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$.

Theorem 2.6 liefert die schwache Unterhalbstetigkeit der Seminorm $|\bullet|_{\mathrm{BV}(\Omega)}$ bezüglich schwacher Konvergenz in $\mathrm{BV}(\Omega)$.

todo: Randterm sufs? Die beiden verbleibenden Terme sind ufs, aber auch sufs?

Damit gilt insgesamt

$$\inf_{v\in \mathrm{BV}(\Omega)\cap L^2(\Omega)} E(v) \leqslant E(u) \leqslant \liminf_{n\to\infty} E(u_n) = \lim_{n\to\infty} E(u_n) = \inf_{v\in \mathrm{BV}(\Omega)\cap L^2(\Omega)} E(v),$$

d.h. $\min_{v\in \mathrm{BV}(\Omega)\cap L^2(\Omega)} E(v) = E(u)$. □

Theorem 3.3 (Stabilität und Eindeutigkeit)**.** *Seien $u_1, u_2 \in \mathrm{BV}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ die Minimierer des Problems 3.1 mit $f_1, f_2 \in L^2(\Omega)$ anstelle von f.*

Dann gilt

$$\|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \|f_1 - f_2\|_{L^2(\Omega)}.$$

Beweis. Definiere die konvexen Funktionale $F : \mathrm{BV}(\Omega) \to \mathbb{R}$ und $G_\ell : L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$, $\ell = 1, 2$, durch

$$F(u) := |u|_{\mathrm{BV}(\Omega)} + \|u\|_{L^1(\partial\Omega)}, \qquad G_\ell(u) := \frac{\alpha}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega fu \,\mathrm{d}x.$$

Bezeichne $E_\ell := F + E_\ell$ und setze F auf $L^2(\Omega)$ durch ∞ fort.

G_ℓ ist Fréchet-differenzierbar mit Fréchet-Ableitung

$$\delta G_\ell(u)[v] = \alpha(u, v)_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega fv \,\mathrm{d}x = (\alpha u - f, v)_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } v \in L^2(\Omega).$$

Das Funktional F ist konvex, deshalb (TODO quote Rf) ist das Subdifferential ∂F von F monoton, d.h. für alle $\mu_\ell \in \partial F(u_\ell)$, $\ell = 1, 2$, gilt

$$(\mu_1 - \mu_2, u_1 - u_2)_{L^2(\Omega)} \geqslant 0. \tag{3.3}$$

Für $\ell = 1, 2$ wird E_ℓ von u_ℓ minimiert, deshalb gilt $0 \in \partial E_\ell(u_\ell) = \partial F(u_\ell) + \partial G_\ell(u_\ell) = \partial F(u_\ell) + \{\delta G_\ell(u_\ell)\}$ (TODO quote) und es folgt $-\delta G_\ell(u_\ell) \in \partial F(u_\ell)$. Daraus folgt zusammen mit (3.3)

$$\big(- (\alpha u_1 - f_1) + (\alpha u_2 - f_2), u_1 - u_2\big)_{L^2(\Omega)} \geqslant 0.$$

Umformen und Anwenden der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung impliziert

$$\begin{aligned} \alpha\|u_1 - u_2\|^2_{L^2(\Omega)} &\leqslant \big(f_1 - f_2, u_1 - u_2\big)_{L^2(\Omega)} \\ &\leqslant \|f_1 - f_2\|_{L^2(\Omega)}\|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Falls $\|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega)} = 0$, gilt der Satz. Ansonsten führt Division durch $\|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega)} \neq 0$ den Beweis zum Abschluss. □

4. Das diskrete Problem

Betrachte für gegebenes $\alpha > 0$ und rechte Seite $f \in L^2(\Omega)$ folgende Diskretisierung von Problem 3.1.

Problem 4.1. Finde $u_{\mathrm{CR}} \in V_{\mathrm{NC}}(\mathcal{T}) := \mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T})$, sodass u_{CR} das Funktional

$$E_{\mathrm{NC}}(v_{\mathrm{CR}}) := \frac{\alpha}{2}\|v_{\mathrm{CR}}\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla_{\mathrm{NC}} v_{\mathrm{CR}}\|_{L^1(\Omega)} - \int_\Omega f v_{\mathrm{CR}}\,\mathrm{d}x \tag{4.1}$$

unter allen $v_{\mathrm{CR}} \in V_{\mathrm{NC}}(\mathcal{T})$ minimiert.

Für $v_{\mathrm{CR}} \in V_{\mathrm{NC}}(\mathcal{T})$, $\Lambda \in \mathbb{P}_0(\mathcal{T};\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned} K_1(0) &:= \{\Lambda \in L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^n) \mid |\Lambda(\bullet)| \leqslant 1 \text{ fast überall in } \Omega\},\\ I_{K_1(0)}(\Lambda) &:= \begin{cases} -\infty, & \text{falls } \Lambda \notin K_1(0) \text{ und}\\ 0, & \text{falls } \Lambda \in K_1(0),\end{cases}\end{aligned}$$

ist das dazugehörige Lagrange-Funktional definert als

$$\mathcal{L}_h(v_{\mathrm{CR}},\Lambda) := \int_\Omega \Lambda\cdot\nabla_{\mathrm{NC}} v_{\mathrm{CR}}\,\mathrm{d}x + \frac{\alpha}{2}\|v_{\mathrm{CR}}\|^2_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega f v_{\mathrm{CR}}\,\mathrm{d}x - I_{K_1(0)}(\Lambda) \tag{4.2}$$

und das Sattelpunktsproblem dem entsprechend wie folgt.

Problem 4.2. Löse

$$\inf_{v_{\mathrm{CR}}\in V_{\mathrm{NC}}(\mathcal{T})}\ \sup_{\Lambda\in\mathbb{P}_0(\mathcal{T};\mathbb{R}^n)} \mathcal{L}_h(v_{\mathrm{CR}},\Lambda).$$

Theorem 4.3 (Charakterisierung diskreter Lösungen)**.** *Es existiert eine eindeutiges Lösung $u_{\mathrm{CR}} \in V_{\mathrm{NC}}(\mathcal{T})$ von Problem 4.1. Außerdem gelten folgende äquivalente Charakterisierungen von u_{CR}.*

(i) Es existiert ein $\Lambda \in \mathbb{P}_0(\mathcal{T};\mathbb{R}^n)$ mit $|\Lambda(\bullet)| \leqslant 1$ fast überall in Ω, sodass

$$\begin{aligned} \Lambda(\bullet)\cdot\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}(\bullet) &= |\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}(\bullet)| \qquad \textit{fast überall in } \Omega \textit{ und}\\ (\Lambda, \nabla_{\mathrm{NC}} v_{\mathrm{CR}})_{L^2(\Omega)} &= (f - \alpha u_{\mathrm{CR}}, v_{\mathrm{CR}})_{L^2(\Omega)} \qquad \textit{für alle } v_{\mathrm{CR}} \in V_{\mathrm{NC}}(\mathcal{T}).\end{aligned}$$

(ii) Für alle $v_{\mathrm{CR}} \in V_{\mathrm{NC}}$ gilt die Variationsungleichung

$$(f - \alpha u_{\mathrm{CR}}, v_{\mathrm{CR}} - u_{\mathrm{CR}})_{L^2(\Omega)} \leqslant \|\nabla_{\mathrm{NC}} v_{\mathrm{CR}}\|_{L^1(\Omega)} - \|\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}\|_{L^1(\Omega)}.$$

Beweis. In der ersten Komponente ist das Lagrange-Funktional Fréchet-differenzierbar mit

$$\delta_{u_{\mathrm{CR}}}\mathcal{L}_h(u_{\mathrm{CR}},\Lambda)[v_{\mathrm{CR}}] = \int_\Omega \Lambda\cdot\nabla_{\mathrm{NC}} v_{\mathrm{CR}}\,\mathrm{d}x + \alpha(u_{\mathrm{CR}}, v_{\mathrm{CR}})_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega f v_{\mathrm{CR}}\,\mathrm{d}x.$$

Die Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen für eine Lösung
$(u_{\mathrm{CR}}, \Lambda) \in V_{\mathrm{NC}} \times (\mathbb{P}_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^n) \cap K_1(0))$ des Sattelpunktsproblems 4.2 lauten damit

$$\begin{aligned}0 &= \delta_{u_{\mathrm{CR}}} \mathcal{L}_h(u_{\mathrm{CR}}, \Lambda)[v_{\mathrm{CR}}] \\ &= \int_\Omega \Lambda \cdot \nabla_{\mathrm{NC}} v_{\mathrm{CR}} \,\mathrm{d}x + \alpha(u_{\mathrm{CR}}, v_{\mathrm{CR}})_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega f v_{\mathrm{CR}} \,\mathrm{d}x \quad \text{für alle } v_{\mathrm{CR}} \in V_{\mathrm{NC}} \quad \text{und} \\ 0 &\in \partial_\Lambda \mathcal{L}_h(u_{\mathrm{CR}}, \Lambda) = \{(\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}, \bullet)_{L^2(\Omega)}\} - \partial I_{K_1(0)}(\Lambda).\end{aligned}$$

Die erste Bedingung ist für alle $v_{\mathrm{CR}} \in V_{\mathrm{NC}}(\mathcal{T})$ äquivalent zu

$$(\Lambda, \nabla_{\mathrm{NC}} v_{\mathrm{CR}})_{L^2(\Omega)} = (f - \alpha u_{\mathrm{CR}}, v_{\mathrm{CR}})_{L^2(\Omega)}.$$

Die zweite Bedingung bedeutet, dass $(\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}, \bullet)_{L^2(\Omega)} \in -\partial I_{K_1(0)}(\Lambda)$, d.h. für alle $q_0 \in \mathbb{P}_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^n)$ gilt

$$(\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}, q_0 - \Lambda)_{L^2(\Omega)} \leqslant I_{K_1(0)}(q_0) - I_{K_1(0)}(\Lambda) = I_{K_1(0)}(q_0).$$

Für $q_0 \in \mathbb{P}_0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^n) \cap K_1(0)$ folgt insbesondere

$$\begin{aligned}(\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}, q_0 - \Lambda)_{L^2(\Omega)} \leqslant 0, \quad &\text{also} \\ (\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}, q_0)_{L^2(\Omega)} \leqslant (\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}, \Lambda)_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Mit der Wahl $q_0 := \operatorname{sign} \nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}$, der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und $\Lambda \in K_1(0)$ impliziert das

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}| \,\mathrm{d}x &\leqslant (\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}, \Lambda)_{L^2(\Omega)} \\ &\leqslant \int_\Omega |\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}|\,|\Lambda| \,\mathrm{d}x \leqslant \int_\Omega |\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}| \,\mathrm{d}x \quad \text{bzw.} \\ \sum_{T \in \mathcal{T}} |T| \left|(\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}})_{|T}\right| &= \sum_{T \in \mathcal{T}} |T| \, (\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}} \cdot \Lambda)_{|T}\end{aligned}$$

Außerdem gilt mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung auf allen $T \in \mathcal{T}$, dass $(\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}} \cdot \Lambda)_{|T} \leqslant (\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}})_{|T}$. Dementsprechend muss sogar für alle $T \in \mathcal{T}$ gelten, dass $(\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}} \cdot \Lambda)_{|T} = (\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}})_{|T}$, d.h. fast überall in Ω gilt $\Lambda(\bullet) \cdot \nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}(\bullet) = |\nabla_{\mathrm{NC}} u_{\mathrm{CR}}(\bullet)|$. $\square$

5. Numerische Realisierung

A. Appendix

Selbständigkeitserklärung

Ich erkläre, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und noch nicht für andere Prüfungen eingereicht habe. Sämtliche Quellen, einschließlich Internetquellen, die unverändert oder abgewandelt wiedergegeben werden, insbesondere Quellen für Texte, Grafiken, Tabellen und Bilder, sind als solche kenntlich gemacht. Mir ist bekannt, dass bei Verstößen gegen diese Grundsätze ein Verfahren wegen Täuschungsversuchs bzw. Täuschung eingeleitet wird.

Berlin, den 26. März 2019,