



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Faculdade de Engenharia

Lucas Carvalho de Sousa

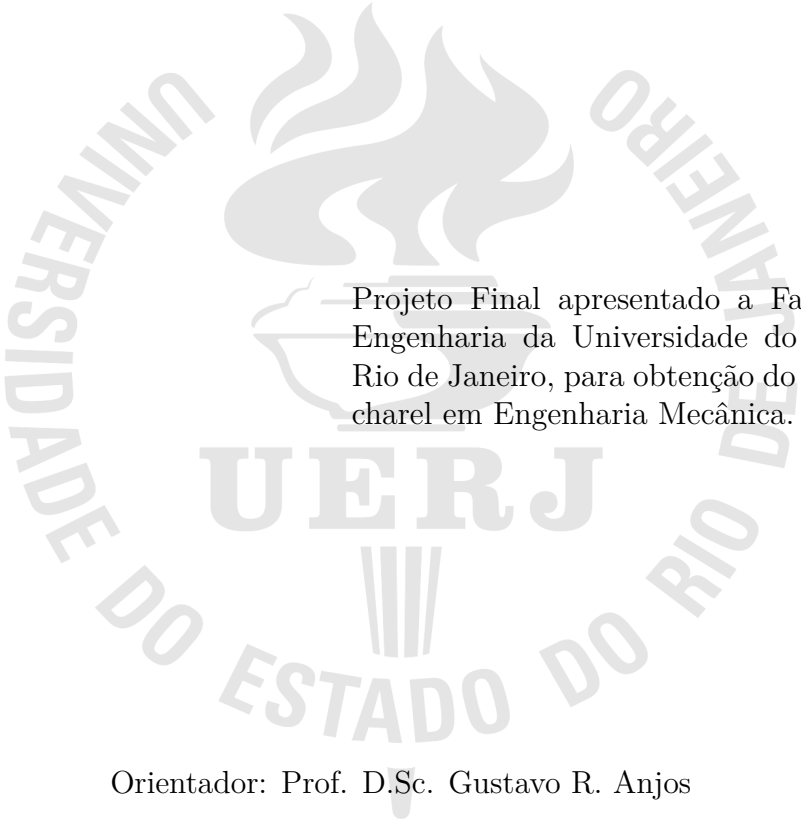
**Simulação Numérica De Escoamentos Dispersos Utilizando
Método De Elementos Finitos**

Rio de Janeiro

2019

Lucas Carvalho de Sousa

**Simulação Numérica De Escoamentos Dispersos Utilizando Método De
Elementos Finitos**



Projeto Final apresentado a Faculdade de
Engenharia da Universidade do Estado do
Rio de Janeiro, para obtenção do grau de ba-
charel em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. D.Sc. Gustavo R. Anjos

Rio de Janeiro

2019

CATALOGAÇÃO NA FONTE

S237

UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/B

Sousa, Lucas Carvalho de

Simulação Numérica De Escoamentos Dispersos Utilizando
Método De Elementos Finitos / Lucas Carvalho de Sousa. –
2019.

xx f.

Orientadores: Gustavo Rabello dos Santos;

Projeto Final (Bacharel em Engenharia Mecânica) – Uni-
versidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia.

Texto a ser informado pela biblioteca.

CDU 621:528.8

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial
deste projeto final, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Lucas Carvalho de Sousa

**Simulação Numérica De Escoamentos Dispersos Utilizando Método De
Elementos Finitos**

Projeto Final apresentado a Faculdade de
Engenharia da Universidade do Estado do
Rio de Janeiro, para obtenção do grau de
bacharel em Engenharia Mecânica.

Aprovado em: DATA

Banca Examinadora:

Prof. Dr. José da Rocha Miranda Pontes
Departamento de Engenharia Mecânica - UERJ

Prof. Dr. Nome do Professor 2
Faculdade de Engenharia da UERJ

Prof. D.Sc. Gustavo R. Anjos - Orientador
Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ - COPPE

Prof. Dr. Nome do Professor 4
Instituto de Geociências da UFF

Rio de Janeiro

2019

DEDICATÓRIA

Aqui entra sua dedicatória.

AGRADECIMENTO

Aqui entra seu agradecimento.

É importante sempre lembrar do agradecimento à instituição que financiou sua bolsa, se for o caso...

Agradeço à FAPERJ pela bolsa de Mestrado concedida.

RESUMO

SOUSA, Lucas Carvalho de. *Simulação Numérica De Escoamentos Dispersos Utilizando Método De Elementos Finitos*. xx f. Projeto Final (Bacharelado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, 2019.

Aqui entra o seu resumo organizado em um parágrafo apenas.

Palavras-chave: Método de Elementos Finitos, Formulação Corrente-Vorticidade, Escoamento Multifásico, Escoamento Particulado.

ABSTRACT

Aqui entra seu resumo em inglês também organizado em apenas um parágrafo.

Keywords: Pattern Formation, Swift-Hohenberg Equation, Computacional Modeling, Word4.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Condições de contorno da placa para o problema de Laplace 3.2.1. .	19
Figura 2	Distribuição de temperaturas na placa da solução permanente da equação de Laplace 3.2.1.	20
Figura 3	Comparação de resultado das soluções numérica e analítica do caso de transporte de temperatura em sólidos no regime permanente. ...	21
Figura 4	Comparação de resultado das soluções numérica e analítica de transporte em sólidos no regime transiente.	22
Figura 5	Condições de contorno da placa para o problema de Poisson 3.2.2. .	23
Figura 6	Distribuição de temperaturas na placa da solução do problema permanente de Poisson 3.2.2.	24
Figura 7	Comparação de resultado das soluções numérica e analítica do problema de transporte de temperatura em sólidos no regime permanente com geração de calor.	25
Figura 8	Comparação de resultado das soluções numérica e analítica do problema de transporte de temperatura em sólidos no regime transiente com geração de calor.	26
Figura 9	Condições de contorno da placa para o problema de Poisson 3.2.3. .	27
Figura 10	Distribuição de temperaturas na placa da solução do problema permanente de Poisson 3.2.3.	28
Figura 11	Comparação de resultado das soluções numérica e analítica do problema permanente de Poisson 3.2.3.	28
Figura 12	Comparação de resultado das soluções numérica e analítica do problema transiente de Poisson 3.2.3.	29

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

MDF	Método das Diferenças Finitas
CN	Crank-Nicolson

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	12
1	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	14
1.1	Introdução	14
1.2	Método de Elementos Finitos	14
2	METODOLOGIA	15
2.1	Introdução	15
3	VALIDAÇÃO DO CÓDIGO NÚMERICO.....	16
3.1	Introdução	16
3.2	Validações de Problemas em Sólidos.....	18
3.2.1	Equação de Laplace com Condições de Contorno de Dirichlet	18
3.2.2	Equação de Poisson com Condições de Contorno de Dirichlet	22
3.2.3	Equação de Poisson com Condições de Contorno de Dirichlet e Neumann	26
3.3	Validações de Problemas em Flúidos	30
3.3.1	Escoamento de Hagen-Poiseuille.....	30
3.3.2	Escoamento de Couette.....	30
3.3.3	Escoamento de Cavidade (<i>Lid-Driven Cavity Flow</i>)	30
3.4	Validações de Problemas em Partículas.....	30
3.4.1	Força Gravitacional	30
3.4.2	Força de Arrasto	30
3.4.3	Força de Sustentação	30
3.4.4	Força de Massa Virtual (<i>Added Mass</i>).....	30

CONCLUSÃO	31
APÊNDICE A	32
REFERÊNCIAS.....	33

INTRODUÇÃO

Os problemas físicos de interesse da engenharia mecânica, muitas vezes, podem se apresentar de forma multidisciplinar e em razão disso também oferecem resultados que exigem ferramental e perspectivas oferecidos por outras disciplinas e áreas não contempladas em um curso usual de um engenheiro mecânico. Um desses problemas é o fenômeno de difusão acompanhado de reações químicas (homogêneas ou heterogêneas), em geral não lineares, que, em condições conhecidas, configuram processos de organização espacial de substâncias ou espécies. Por exemplo, reações químicas autocatalíticas ou outros tipos de interações em sistemas difusivos com mais de uma substâncias ou espécies, e.g., o caso particular de auto-organização dentro de uma classe mais ampla conhecida como estruturas dissipativas: padrões (estruturas) de turing.

As equações de reação-difusão são conhecidas por modelarem fenômenos químicos e biológicos, os quais, se originam da interação entre indivíduos, células ou espécies. A modelagem matemática desses mecanismos tem sido bem sucedida e vem se desenvolvendo em áreas como ecologia, embriologia (morfogênese), neurobiologia, **outros**, bem como cinéticas químicas no estado sólido. Este último tema é de interesse da ciência dos materiais computacional, uma vez que modelos matemáticos de problemas físicos tais como crescimento dendrítico (evolução cristalina), formação de precipitados em ligas metálicas e cerâmicas ou até mesmo transformação de fase por avanço de frente tornam-se possíveis.

Padrões espaço-temporais se apresentam em diversos âmbitos da natureza e sua descrição e compreensão ainda levantam questões importantes e básicas. Comparando com cerca de 30 anos atrás, grande progresso foi conquistado na modelagem de instabilidades, análise da dinâmica na vizinhança, formação e es-

tabilidade de padrões, análise quantitativa experimental e numérica de padrões, e assim por diante.

Modelos de Reação-Difusão podem evoluir para um padrão espacial heterogêneo e estável ao longo do tempo devido a pequenas perturbações das concentrações das substâncias químicas em relação a um estado de equilíbrio espacial homogêneo.

Posicionar histórico, experiências, resultados, modelos, referências, etc. As teorias matemáticas...

1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

1.1 Introdução

Nesta seção é apresentada a literatura utilizada, analisando-se as partes pertinentes ao trabalho realizado. Os principais tópicos de estudo foram sobre os temas de Método de Elementos Finitos, Escoamentos Particulados e Programação Computacional.

1.2 Método de Elementos Finitos

2 METODOLOGIA

2.1 Introdução

$$\vec{F}_{mass} = \frac{\pi}{12} \rho_f d_p^3 \frac{d}{dt} (\vec{v}_f - \vec{v}_p) \quad (2.1)$$

3 VALIDAÇÃO DO CÓDIGO NÚMÉRICO

3.1 Introdução

Neste capítulo serão apresentados as comparações realizadas entre os resultados numéricos obtidos para x casos amplamente conhecidos na literatura e a solução analítica unidimensional dos mesmos. Como a solução numérica é obtida para problemas bidimensionais, é preciso pegar uma seção transversal do domínio e interpolar resultado, produzindo, assim, uma aproximação. Dessa forma, a quantificação do erro relativo médio se faz necessária, com o objetivo de apresentar a acurácia do código numérico. O erro relativo entre a solução numérica e a solução analítica é calculado pela equação (Eq. 3.1):

$$er_i = \frac{|(val_a)_i - (val_n)_i|}{(val_a)_i} \quad (3.1)$$

onde $(val_a)_i$ é o valor encontrado pela solução analítica e $(val_n)_i$ é o valor encontrado pela solução numérica, ambos encontrados no ponto i .

São calculados também a média e o desvio padrão dos erros relativos pelas equações (Eq. 3.2) e (Eq. 3.2), respectivamente:

$$er_{mean} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N er_i \quad (3.2)$$

$$er_{std} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=0}^N (er_i - er_{mean})^2} \quad (3.3)$$

As validações foram organizadas em três seções que representam diferentes etapas da implementação do modelo matemático, sendo assim espera-se mostrar a aplicabilidade do código numérico desenvolvido, além do histórico de aprendizado obtido. Na seção 3.2, os problemas de transferência de calor em sólidos com

condutividade termica constante são apresentados. Os casos propostos nesta seção buscam confirmar a importação correta da malha e a montagem das matrizes globais, como também a aplicação das condições de contorno de Dirichlet e de Neumann.

Já na seção 3.3, os problemas com o termo convectivo presente são analisados. Foi considerado o fluido como incompressível e newtoniano, dessa forma a equação de Navier-Stokes pode ser aplicada segundo a formulação corrente-vorticidade. A estrutura do algoritmo de solução nos casos propostos dessa seção é a mesma utilizada na resolução do problema proposto neste trabalho. Dessa forma, podemos confirmar a correta aplicação das condições de contorno da vorticidade que deve ser calculada em cada passo de tempo.

Finalmente, na seção 3.4, é apresentado os clássicos casos de dinâmica em partículas com o intuito de validar as forças de gravidade, arrasto e sustentação isoladamente e, com isso, possibilitar uma correção pontual no modelo quando necessário, além de permitir observar com maior precisão a influência da atuação que cada uma das forças faz sobre a partícula.

Para casos com variáveis temporais, foi utilizado um critério de parada de 10^{-5} de variação de valores entre dois intervalos de tempo consecutivos. Desta maneira espera-se que o sistema já tenha entrado na situação de convergência e esteja próximo o suficiente de seus valores finais. Isto foi feito para poupar tempo de computação, para casos que possuem um limite de tempo elevado e convergem rapidamente, fazendo com que o código continuasse desnecessariamente.

A execução do código e a computação dos resultados foram realizados em um computador de uso pessoal com as seguintes especificações:

- Dell Latitude E6410 com processador Intel® Core™ i5 CPU M 520 2.40GHz com 4 núcleos e 4Gb de memória RAM. O sistema operacional ubuntu 16.04 LTS e compilador Python 3.5.

3.2 Validações de Problemas em Sólidos

3.2.1 Equação de Laplace com Condições de Contorno de Dirichlet

O problema de troca de calor em uma placa é um dos exemplos clássicos utilizados para estudar as equações de transmissão de calor em sólidos. O mais simples destes é uma barra unidimensional com condutividade térmica constante e sem geração de calor onde a temperatura é conhecida nas extremidades. Como a malha do código foi desenvolvida para solução de problemas bidimensionais, cria-se um problema bidimensional com condições de contorno equivalentes e extrai-se uma seção para que se possa comparar os resultados.

A equação de governo deste fenômeno é conhecida como a equação de Laplace (Eq. 3.4) para sólidos em estado permanente e é apresentada a seguir:

$$\nabla^2 T = 0 \quad (3.4)$$

onde T é a temperatura na placa e ∇^2 é o operador diferencial conhecido como laplaciano.

E a solução analítica do problema unidimensional associado é:

$$T(x) = \frac{T_L - T_0}{L}x + T_0 \quad (3.5)$$

onde L é o comprimento da barra, T_0 e T_L são, respectivamente, os valores da temperatura em $x = 0$ e $x = L$.

As condições de contorno e o domínio bidimensional utilizados na simulação são apresentados na Figura 1. A condição de fluxo de calor $\frac{\partial T}{\partial n}$ nulo significa que nenhuma condição é imposta no contorno.

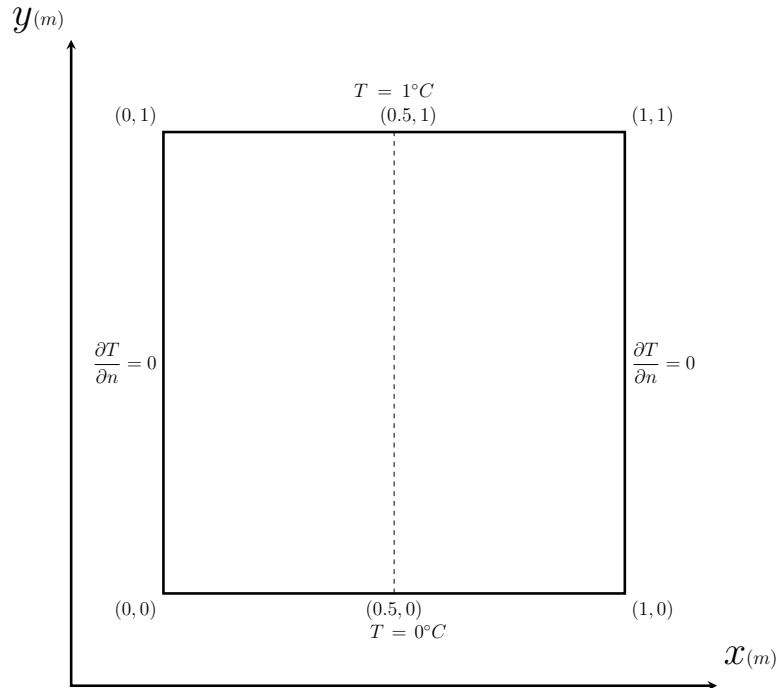


Figura 1: Condições de contorno da placa para o problema de Laplace 3.2.1.

O domínio foi discretizado utilizando uma malha triangular linear não estruturada com 768 elementos e 417 nós. A malha foi criada pelo software GMSH como proposto por [1] e importada ao código numérico. A Figura 2 apresenta o campo de temperatura, onde os eixos x e y representam o domínio e o eixo z é a distribuição de temperatura, e que é possível observar que o campo de temperatura possui um perfil linear variando de 0 (cor azul) a 1 (cor vermelha).

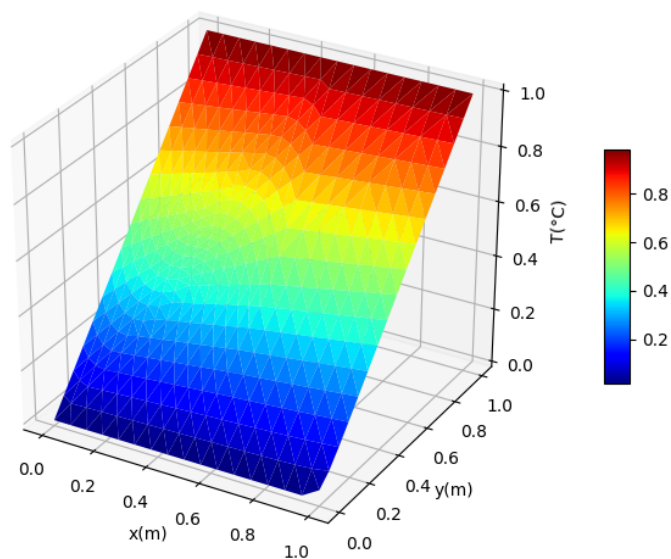


Figura 2: Distribuição de temperaturas na placa da solução permanente da equação de Laplace 3.2.1.

A comparação entre os resultados da solução analítica (Eq. 3.5) e a solução numérica, para a seção $x = 0.5\text{m}$, é apresentada na Figura 3, onde é possível observar que ambas possuem o mesmo perfil. Essa proximidade é quantificada pelo erro relativo médio que foi de 0.1136% e com desvio padrão de 0.0008%

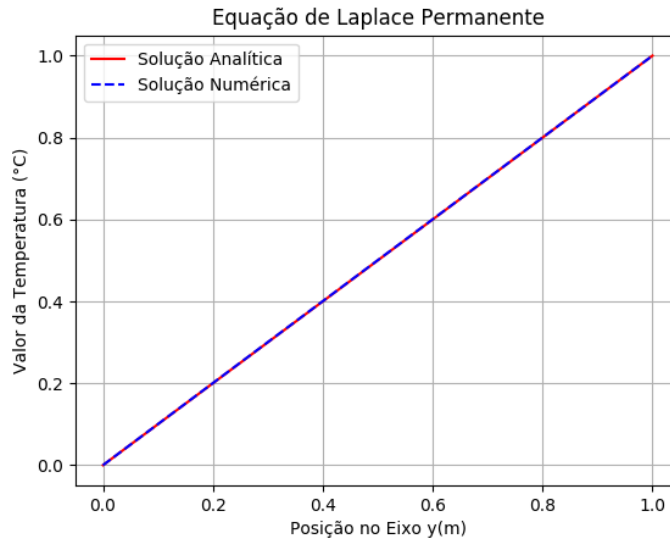


Figura 3: Comparação de resultado das soluções numérica e analítica do caso de transporte de temperatura em sólidos no regime permanente.

Ao solucionar o mesmo problema introduzindo o termo transiente na equação de governo 3.4, pode-se verificar a evolução de comportamento da temperatura ao longo do tempo. Dessa forma, a equação que representa este caso é:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + k\nabla^2 T = 0 \quad (3.6)$$

onde k é o coeficiente de condutividade térmica da placa e t é a variável temporal.

Porém, ao longo dos passos de tempo, a solução se aproxima de um problema permanente, portanto pode-se fazer a comparação dos resultados obtidos neste exemplo com os valores da solução analítica (Eq. 3.5), tomando-se que $t \rightarrow \infty$. As condições iniciais $t = 0s$ atribuídas aos nós sem condição de contorno foram de um valor inicial de $0^\circ C$. A Figura 4 apresenta a evolução do campo de temperaturas em função do tempo. É possível observar que a solução numérica converge para a solução analítica formando um perfil linear. O erro relativo médio calculado para este caso foi de 0.1092% e com desvio padrão de 0.0008%.

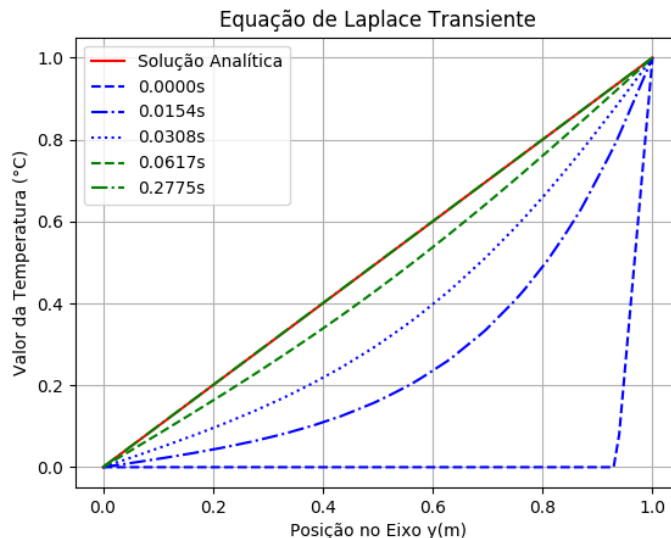


Figura 4: Comparação de resultado das soluções numérica e analítica de transporte em sólidos no regime transiente.

3.2.2 Equação de Poisson com Condições de Contorno de Dirichlet

Neste problema busca-se estudar o comportamento de uma placa com geração de calor em seu domínio e temperaturas fixas nas laterais. Novamente, para permitir a comparação de resultados, é extraída uma seção da placa para observar os resultados como um problema unidimensional.

A equação que governa este caso é denominada equação de Poisson (Eq. 3.7), tomada para um problema permanente, ou seja sem variação no tempo.

$$-k\nabla^2 T = Q \quad (3.7)$$

onde Q é a geração de calor na placa.

A solução analítica para o caso de uma barra unidimensional é apresentada embaixo:

$$T(x) = \frac{Q}{2k} (-x^2 + Lx) + \frac{T_L - T_0}{L} x + T_0 \quad (3.8)$$

As condições de contorno e o domínio bidimensional utilizados na simulação são apresentados na Figura 5. A geração de calor utilizada foi de $Q = 40W/m^3$ e a condutividade termica foi de $k = 5W/m^\circ C$.

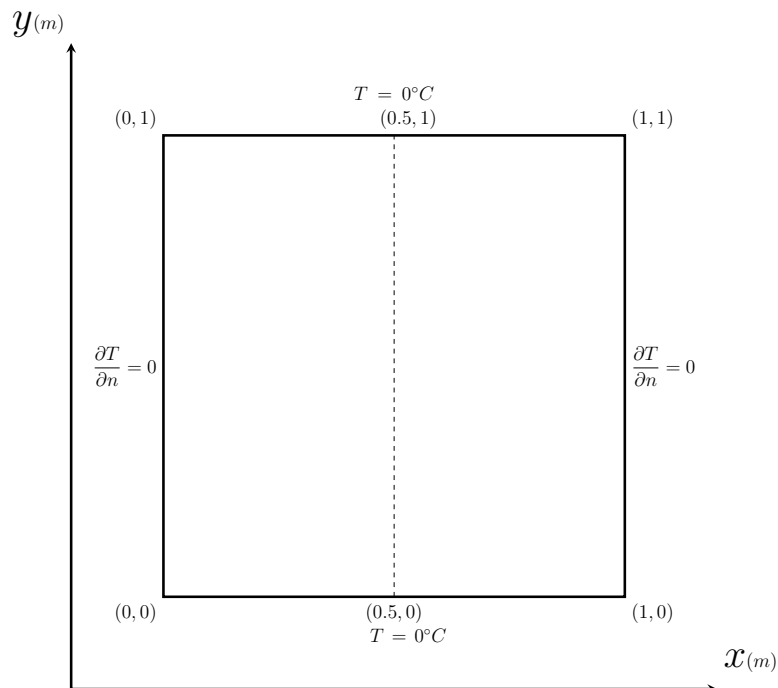


Figura 5: Condições de contorno da placa para o problema de Poisson 3.2.2.

Novamente, foi utilizada uma malha triangular linear não estruturada com 768 elementos e 417 nós. A Figura 6 apresenta o campo de temperatura, onde os eixos x e y representam o domínio e o eixo z é a distribuição de temperatura, onde é possível observar que o campo de temperatura possui um perfil parabólico variando de 0 (cor azul) a 1 (cor vermelha).

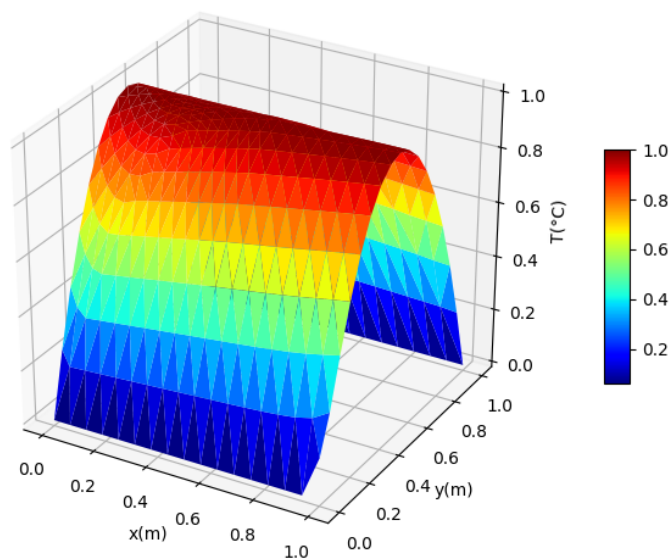


Figura 6: Distribuição de temperaturas na placa da solução do problema permanente de Poisson 3.2.2.

A comparação entre os resultados da solução analítica (Eq. 3.8) e a solução numérica, para a seção $x = 0.5\text{m}$, é apresentada na Figura 7, onde é possível observar que ambas possuem o mesmo perfil. Essa proximidade é quantificada pelo erro relativo médio que foi de 0.323% e com desvio padrão de 0.0101%.

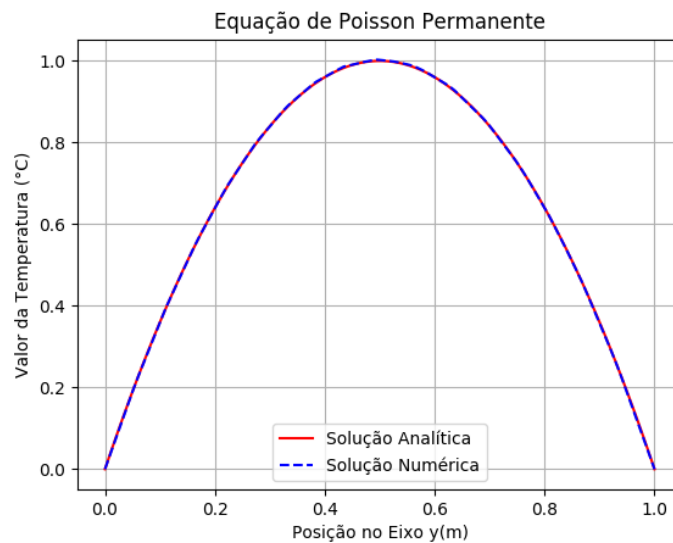


Figura 7: Comparação de resultado das soluções numérica e analítica do problema de transporte de temperatura em sólidos no regime permanente com geração de calor.

A seguir, é apresentado o resultado com termo transiente $\frac{\partial T}{\partial t}$ tendendo a um estado permanente. As condições iniciais $t = 0s$ atribuídas aos pontos sem condição de contorno foram de um valor inicial de $0^{\circ}C$. A Figura 8 apresenta a evolução do campo de temperaturas em função do tempo. É possível observar que a solução numérica converge para a solução analítica formando um perfil parabólico. O erro relativo médio calculado para este caso foi de 0.325% e com desvio padrão de 0.0101%.

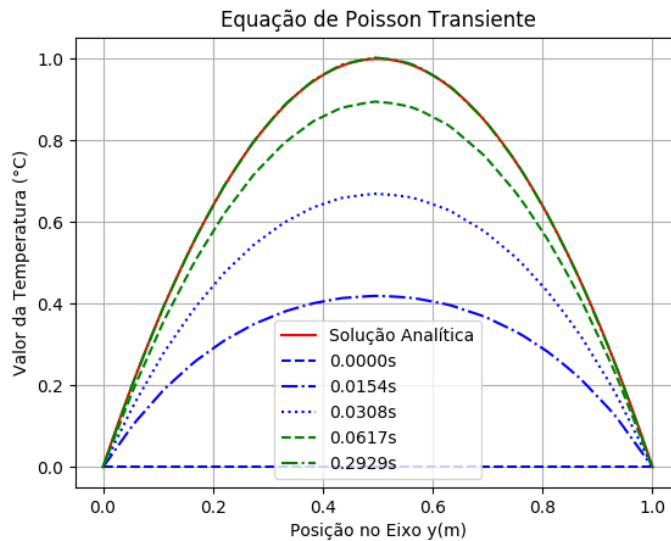


Figura 8: Comparação de resultado das soluções numérica e analítica do problema de transporte de temperatura em sólidos no regime transiente com geração de calor.

3.2.3 Equação de Poisson com Condições de Contorno de Dirichlet e Neumann

Este caso foi escolhido para validar a solução de problemas com condições de contorno de Neumann. Trata-se de uma placa com temperatura fixa em uma das paredes e no lado oposto é definido um valor para o fluxo de calor presente. Toma-se uma seção da placa para observar os resultados e compará-los com um problema unidimensional de uma barra com as mesmas condições presentes.

A equação de governo é novamente a equação de Poisson (Eq. 3.7), e sua solução analítica para uma barra unidimensional é dada por:

$$T(x) = \frac{Q}{k} \left(\frac{-x^2}{2} + Lx \right) - \frac{q}{k}x + T_0 \quad (3.9)$$

onde q é o fluxo de calor na extremidade $x = L$.

As condições de contorno e o domínio bidimensional utilizados na simulação

são apresentados na Figura 9. A geração de calor utilizada foi de $Q = -7W/m^3$, a condutividade termica foi de $k = 5W/m^\circ C$ e o fluxo de calor foi de $q = -5W/m^2$.

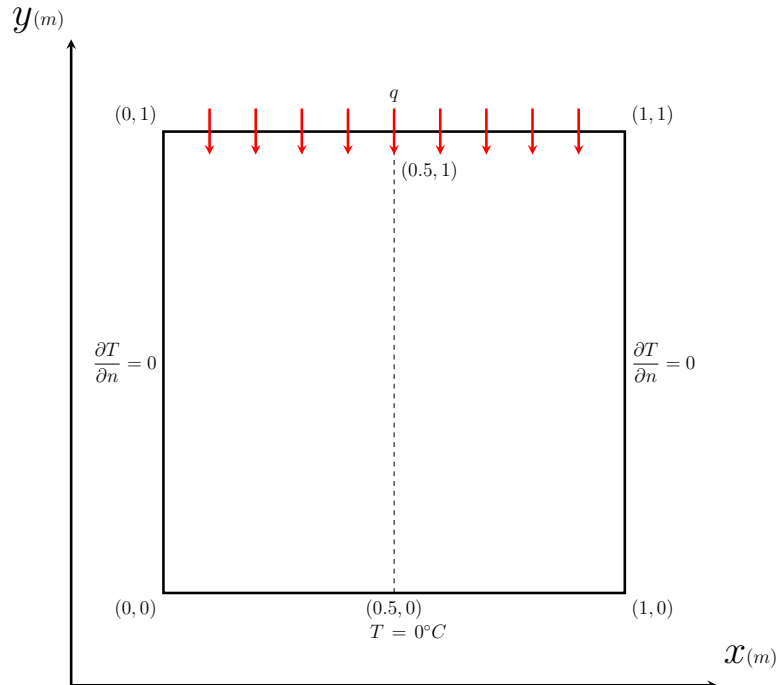


Figura 9: Condições de contorno da placa para o problema de Poisson 3.2.3.

Mais uma vez foi utilizada uma malha com 768 elementos e 417 nós.

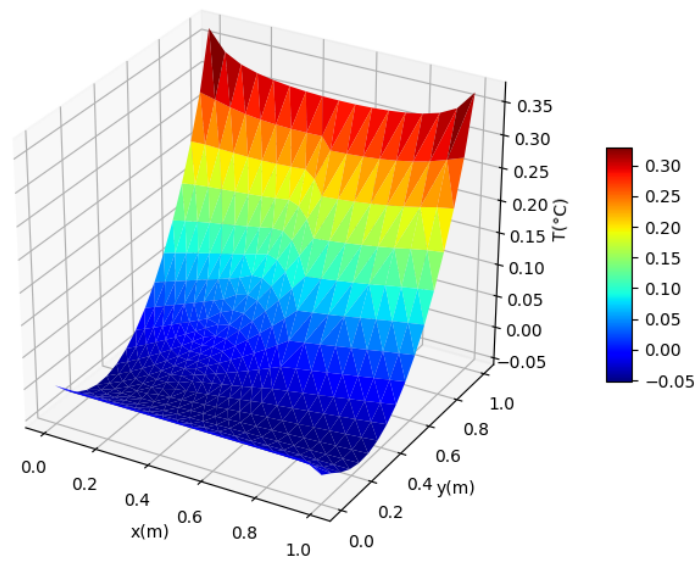


Figura 10: Distribuição de temperaturas na placa da solução do problema permanente de Poisson 3.2.3.

A comparação entre os resultados da solução analítica 3.9 e a solução numérica Figura 10:

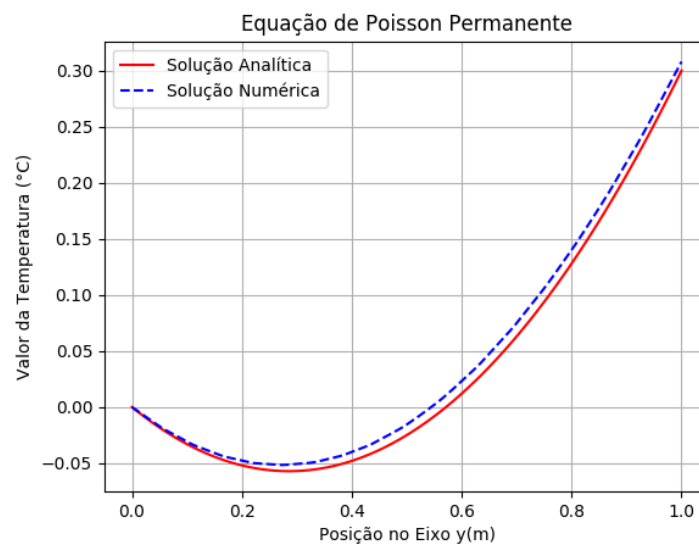


Figura 11: Comparação de resultado das soluções numérica e analítica do problema permanente de Poisson 3.2.3.

Onde o erro relativo médio encontrado foi de -0.427% e com desvio padrão de 0.8414% .

Para o resultado transiente foi utilizado um critério de parada de 10^{-5} . As condições iniciais $t = 0s$ atribuídas aos pontos sem condição de contorno foram de um valor inicial de $0^\circ C$.

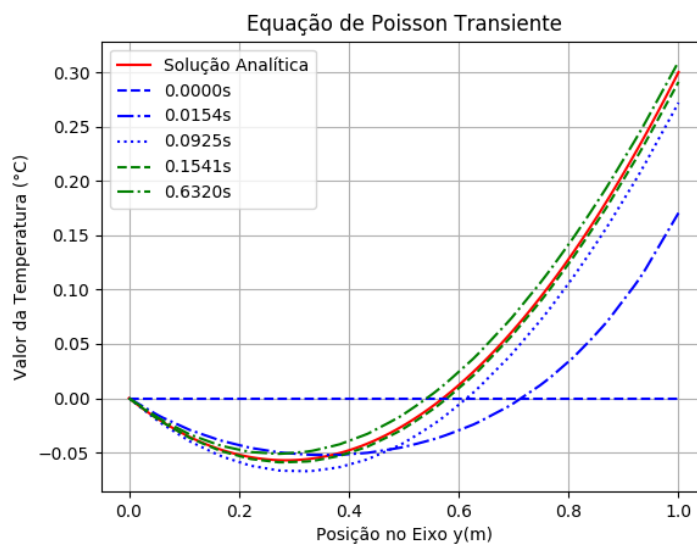


Figura 12: Comparação de resultado das soluções numérica e analítica do problema transiente de Poisson 3.2.3.

Onde o erro relativo médio encontrado foi de -0.31% e com desvio padrão de 0.9205% .

3.3 Validações de Problemas em Flúidos

3.3.1 Escoamento de Hagen-Poiseuille

3.3.2 Escoamento de Couette

3.3.3 Escoamento de Cavidade (*Lid-Driven Cavity Flow*)

3.4 Validações de Problemas em Partículas

3.4.1 Força Gravitacional

Mean Error: -7.706324287531013e-06 Standard Error: 1.7532532539087766e-05

3.4.2 Força de Arrasto

Mean Error: 3.083075647620123e-07 Standard Error: 1.6723400282002147e-07

3.4.3 Força de Sustentação

Mean Error: 6.52554446290127e-08 Standard Error: 3.79349081853567e-08

3.4.4 Força de Massa Virtual (*Added Mass*)

Mean Error: -6.657465890493951e-05 Standard Error: 1.1362509215219308e-05

CONCLUSÃO

Aqui entra sua conclusão!!

APÊNDICE A - SOLUÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DO CALOR BIDIMENSIONAL E VALIDAÇÃO DO CÓDIGO

O estudo das soluções numérica e analítica de equações diferenciais parciais foi essencial para o desenvolvimento do presente trabalho. O método adotado foi o segundo esquema de Douglas [?] (também conhecido por *Stabilizing Correction*) para solução das EDP's que modelam os mecanismos de reação-difusão presentes no capítulo [4]. Como motivação, foi considerada a equação de calor bidimensional, uma vez que ela configura uma equação parabólica utilizada para modelar problemas com dependência espacial através do termo difusivo (∇^2), presente nas dinâmicas estudadas neste projeto. O desenvolvimento do código foi em *python*. A equação da temperatura, com as hipóteses abaixo:

REFERÊNCIAS

- [1] GEUZAINÉ, C.; REMACLE, J.-F. Gmsh: A 3-d finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, John Wiley and Sons, v. 79, 2009.