



**Universidade do Estado do Rio de Janeiro**

**Centro de Tecnologia e Ciências**

**Faculdade de Engenharia**

**Lucas Carvalho de Sousa**

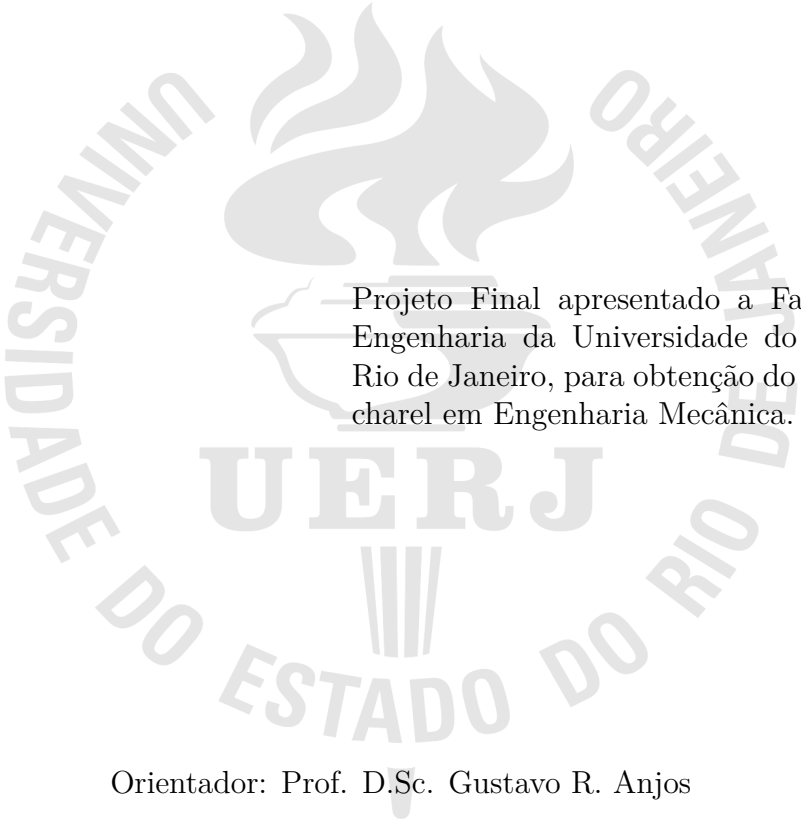
**Simulação Numérica De Escoamentos Dispersos Utilizando  
Método De Elementos Finitos**

**Rio de Janeiro**

**2019**

Lucas Carvalho de Sousa

**Simulação Numérica De Escoamentos Dispersos Utilizando Método De  
Elementos Finitos**



Projeto Final apresentado a Faculdade de  
Engenharia da Universidade do Estado do  
Rio de Janeiro, para obtenção do grau de ba-  
charel em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. D.Sc. Gustavo R. Anjos

Rio de Janeiro

2019

CATALOGAÇÃO NA FONTE

S237

UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/B

Sousa, Lucas Carvalho de

Simulação Numérica De Escoamentos Dispersos Utilizando  
Método De Elementos Finitos / Lucas Carvalho de Sousa. –  
2019.

xx f.

Orientadores: Gustavo Rabello dos Santos;

Projeto Final (Bacharel em Engenharia Mecânica) – Uni-  
versidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia.

Texto a ser informado pela biblioteca.

CDU 621:528.8

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial  
deste projeto final, desde que citada a fonte.

---

Assinatura

---

Data

Lucas Carvalho de Sousa

**Simulação Numérica De Escoamentos Dispersos Utilizando Método De  
Elementos Finitos**

Projeto Final apresentado a Faculdade de  
Engenharia da Universidade do Estado do  
Rio de Janeiro, para obtenção do grau de  
bacharel em Engenharia Mecânica.

Aprovado em: DATA

Banca Examinadora:

---

Prof. Dr. José da Rocha Miranda Pontes  
Departamento de Engenharia Mecânica - UERJ

---

Prof. Dr. Nome do Professor 2  
Faculdade de Engenharia da UERJ

---

Prof. D.Sc. Gustavo R. Anjos - Orientador  
Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ - COPPE

---

Prof. Dr. Nome do Professor 4  
Instituto de Geociências da UFF

Rio de Janeiro

2019

## DEDICATÓRIA

Aqui entra sua dedicatória.

## **AGRADECIMENTO**

Aqui entra seu agradecimento.

É importante sempre lembrar do agradecimento à instituição que financiou sua bolsa, se for o caso...

Agradeço à FAPERJ pela bolsa de Mestrado concedida.

## RESUMO

**SOUSA**, Lucas Carvalho de. *Simulação Numérica De Escoamentos Dispersos Utilizando Método De Elementos Finitos*. xx f. Projeto Final (Bacharelado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, 2019.

Aqui entra o seu resumo organizado em um parágrafo apenas.

Palavras-chave: Método de Elementos Finitos, Formulação Corrente-Vorticidade, Escoamento Multifásico, Escoamento Particulado.

## **ABSTRACT**

Aqui entra seu resumo em inglês também organizado em apenas um parágrafo.

Keywords: Pattern Formation, Swift-Hohenberg Equation, Computacional Modeling, Word4.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Condições de contorno da placa para o problema de Laplace 3.2.1. .	20
Figura 2	Distribuição de temperaturas na placa da solução permanente da equação de Laplace 3.2.1. ....	21
Figura 3	Comparação de resultado das solução numérica e analítica do caso de transporte de temperatura em sólidos no regime permanente. ...	22
Figura 4	Comparação de resultado das soluções numéricas e analítica de transporte em sólidos no regime transiente. ....	23
Figura 5	Condições de contorno da placa para o problema de Poisson 3.2.2. .	24
Figura 6	Distribuição de temperaturas na placa da solução do problema permanente de Poisson 3.2.2. ....	25
Figura 7	Comparação de resultado das solução numérica e analítica do problema de transporte de temperatura em sólidos no regime permanente com geração de calor. ....	26
Figura 8	Comparação de resultado das soluções numéricas e analítica do problema de transporte de temperatura em sólidos no regime transiente com geração de calor. ....	27
Figura 9	Condições de contorno da placa para o problema de Poisson 3.2.3. .	28
Figura 10	Distribuição de temperaturas na placa da solução do problema permanente de Poisson 3.2.3. ....	29
Figura 11	Comparação de resultado das solução numérica e analítica do problema de transporte de temperatura em sólidos no regime permanente com geração e fluxo de calor. ....	30

Figura 12	Comparação de resultado das soluções numéricas e analítica do problema de transporte de temperatura em sólidos no regime permanente com geração e fluxo de calor.....	31
Figura 13	Condições de contorno de um escoamento entre placas paralelas de Poiseuille 3.3.1.....	32
Figura 14	Comparação de resultado das soluções numéricas e analítica 3.10 do problema de corrente-vorticidade no regime permanente.....	33
Figura 15	Condições de contorno de um escoamento entre placas paralelas de Couette 3.3.2. ....	34
Figura 16	Comparação de resultado das soluções numéricas e analítica 3.11 do problema de corrente-vorticidade no regime permanente.....	35

## LISTA DE TABELAS

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

MDF	Método das Diferenças Finitas
CN	Crank-Nicolson

## SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO .....	13
1	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	15
1.1	Introdução .....	15
1.2	Método de Elementos Finitos .....	15
2	METODOLOGIA .....	16
2.1	Introdução .....	16
3	VALIDAÇÃO DO CÓDIGO NÚMERICO.....	17
3.1	Introdução .....	17
3.2	Validações de Problemas em Sólidos.....	19
3.2.1	Equação de Laplace com Condições de Contorno de Dirichlet	19
3.2.2	Equação de Poisson com Condições de Contorno de Dirichlet	23
3.2.3	Equação de Poisson com Condições de Contorno de Dirichlet e Neumann .....	27
3.3	Validações de Problemas em Flúidos .....	31
3.3.1	Escoamento de Poiseuille.....	31
3.3.2	Escoamento de Couette.....	33
3.4	Validações de Problemas em Partículas.....	35
3.4.1	Força Gravitacional .....	35
3.4.2	Força de Arrasto .....	35
3.4.3	Força de Sustentação .....	35
3.4.4	Força de Massa Virtual ( <i>Added Mass</i> ).....	36
	CONCLUSÃO .....	37

REFERÊNCIAS.....	38
------------------	----

## INTRODUÇÃO

Os problemas físicos de interesse da engenharia mecânica, muitas vezes, podem se apresentar de forma multidisciplinar e em razão disso também oferecem resultados que exigem ferramental e perspectivas oferecidos por outras disciplinas e áreas não contempladas em um curso usual de um engenheiro mecânico. Um desses problemas é o fenômeno de difusão acompanhado de reações químicas (homogêneas ou heterogêneas), em geral não lineares, que, em condições conhecidas, configuram processos de organização espacial de substâncias ou espécies. Por exemplo, reações químicas autocatalíticas ou outros tipos de interações em sistemas difusivos com mais de uma substâncias ou espécies, e.g., o caso particular de auto-organização dentro de uma classe mais ampla conhecida como estruturas dissipativas: padrões (estruturas) de turing.

As equações de reação-difusão são conhecidas por modelarem fenômenos químicos e biológicos, os quais, se originam da interação entre indivíduos, células ou espécies. A modelagem matemática desses mecanismos tem sido bem sucedida e vem se desenvolvendo em áreas como ecologia, embriologia (morfogênese), neurobiologia, **outros**, bem como cinéticas químicas no estado sólido. Este último tema é de interesse da ciência dos materiais computacional, uma vez que modelos matemáticos de problemas físicos tais como crescimento dendrítico (evolução cristalina), formação de precipitados em ligas metálicas e cerâmicas ou até mesmo transformação de fase por avanço de frente tornam-se possíveis.

Padrões espaço-temporais se apresentam em diversos âmbitos da natureza e sua descrição e compreensão ainda levantam questões importantes e básicas. Comparando com cerca de 30 anos atrás, grande progresso foi conquistado na modelagem de instabilidades, análise da dinâmica na vizinhança, formação e es-

tabilidade de padrões, análise quantitativa experimental e numérica de padrões, e assim por diante.

Modelos de Reação-Difusão podem evoluir para um padrão espacial heterogêneo e estável ao longo do tempo devido a pequenas perturbações das concentrações das substâncias químicas em relação a um estado de equilíbrio espacial homogêneo.

Posicionar histórico, experiências, resultados, modelos, referências, etc. As teorias matemáticas...



## **1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

### **1.1 Introdução**

Nesta seção é apresentada a literatura utilizada, analisando-se as partes pertinentes ao trabalho realizado. Os principais tópicos de estudo foram sobre os temas de Método de Elementos Finitos, Escoamentos Particulados e Programação Computacional.

### **1.2 Método de Elementos Finitos**

## 2 METODOLOGIA

### 2.1 Introdução

$$\vec{F}_{mass} = \frac{\pi}{12} \rho_f d_p^3 \frac{d}{dt} (\vec{v}_f - \vec{v}_p) \quad (2.1)$$

### 3 VALIDAÇÃO DO CÓDIGO NÚMÉRICO

#### 3.1 Introdução

Neste capítulo serão apresentados as comparações realizadas entre os resultados numéricos obtidos para  $x$  casos amplamente conhecidos na literatura e a solução analítica unidimensional dos mesmos. Como a solução numérica é obtida para problemas bidimensionais, é preciso pegar uma seção transversal do domínio e interpolar resultado, produzindo, assim, uma aproximação. Dessa forma, a quantificação do erro relativo médio se faz necessária, com o objetivo de apresentar a acurácia do código numérico. O erro relativo entre a solução numérica e a solução analítica é calculado pela equação (Eq. 3.1):

$$er_i = \frac{|(val_a)_i - (val_n)_i|}{(val_a)_i} \quad (3.1)$$

onde  $(val_a)_i$  é o valor encontrado pela solução analítica e  $(val_n)_i$  é o valor encontrado pela solução numérica, ambos encontrados no ponto  $i$ .

São calculados também a média e o desvio padrão dos erros relativos pelas equações (Eq. 3.2) e (Eq. 3.2), respectivamente:

$$er_{mean} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N er_i \quad (3.2)$$

$$er_{std} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=0}^N (er_i - er_{mean})^2} \quad (3.3)$$

As validações foram organizadas em três seções que representam diferentes etapas da implementação do modelo matemático, sendo assim espera-se mostrar a aplicabilidade do código numérico desenvolvido, além do histórico de aprendizado obtido. Na seção 3.2, os problemas de transferência de calor em sólidos com

condutividade termica constante são apresentados. Os casos propostos nesta seção buscam confirmar a importação correta da malha e a montagem das matrizes globais, como também a aplicação das condições de contorno de Dirichlet e de Neumann.

Já na seção 3.3, os problemas com o termo convectivo presente são analisados. Foi considerado o fluido como incompressível e newtoniano, dessa forma a equação de Navier-Stokes pode ser aplicada segundo a formulação corrente-vorticidade. A estrutura do algoritmo de solução nos casos propostos dessa seção é a mesma utilizada na resolução do problema proposto neste trabalho. Dessa forma, podemos confirmar a correta aplicação das condições de contorno da vorticidade que deve ser calculada em cada passo de tempo.

Finalmente, na seção 3.4, é apresentado os clássicos casos de dinâmica em partículas com o intuito de validar as forças de gravidade, arrasto e sustentação isoladamente e, com isso, possibilitar uma a correção pontual no modelo quando necessário, além de permitir observar com maior precisão a influência da atuação que cada uma das força faz sobre a partícula.

Para casos com variáveis temporais, foi utilizado um critério de parada de  $10^{-5}$  de variação de valores entre dois intervalos de tempo consecutivos. Desta maneira espera-se que o sistema já tenha entrado na situação de convergência e esteja próximo o suficiente de seus valores finais. Isto foi feito para poupar tempo de computação, para casos que possuem um limite de tempo elevado e convergem rapidamente, fazendo com que o código continuasse desnecessariamente.

A execução do código e a computação dos resultados foram realizados em um computador de uso pessoal com as seguintes especificações:

- Dell Latitude E6410 com processador Intel® Core™ i5 CPU M 520 2.40GHz com 4 núcleos e 4Gb de memória RAM. O sistema operacional ubuntu 16.04 LTS e compilador Python 3.5.

## 3.2 Validações de Problemas em Sólidos

### 3.2.1 Equação de Laplace com Condições de Contorno de Dirichlet

O problema de troca de calor em uma placa é um dos exemplos clássicos utilizados para estudar as equações de transmissão de calor em sólidos. O mais simples destes é uma barra unidimensional com condutividade térmica constante e sem geração de calor onde a temperatura é conhecida nas extremidades. Como a malha do código foi desenvolvida para solução de problemas bidimensionais, cria-se um problema bidimensional com condições de contorno equivalentes e extrai-se uma seção para que se possa comparar os resultados.

A equação de governo deste fenômeno é conhecida como a equação de Laplace (Eq. 3.4) para sólidos em estado permanente e é apresentada a seguir:

$$\nabla^2 T = 0 \quad (3.4)$$

onde  $T$  é a temperatura na placa e  $\nabla^2$  é o operador diferencial conhecido como laplaciano.

E a solução analítica do problema unidimensional associado é:

$$T(x) = \frac{T_L - T_0}{L}x + T_0 \quad (3.5)$$

onde  $L$  é o comprimento da barra,  $T_0$  e  $T_L$  são, respectivamente, os valores da temperatura em  $x = 0$  e  $x = L$ .

As condições de contorno e o domínio bidimensional utilizados na simulação são apresentados na Figura 1. A condição de fluxo de calor  $\frac{\partial T}{\partial n}$  nulo significa que nenhuma condição é imposta no contorno.

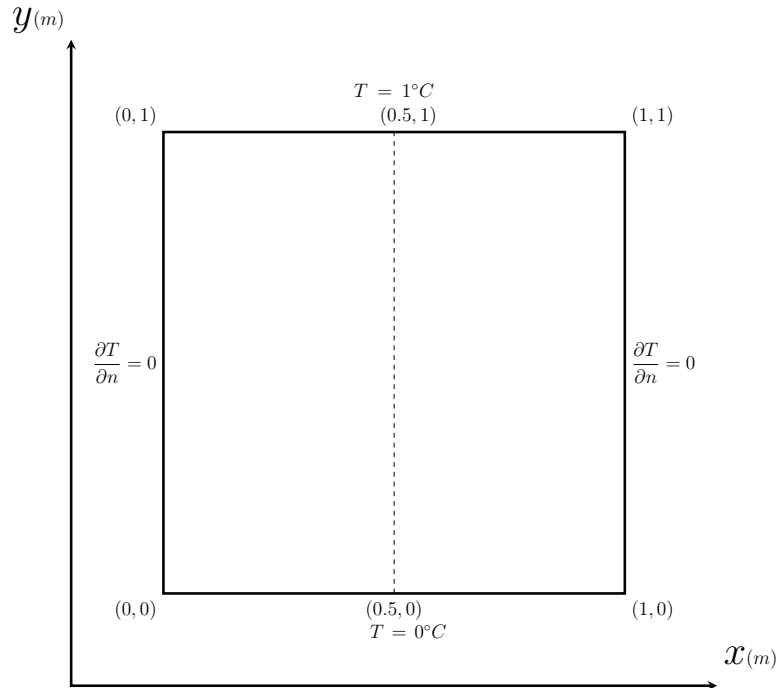


Figura 1: Condições de contorno da placa para o problema de Laplace 3.2.1.

O domínio foi discretizado utilizando uma malha triangular linear não estruturada com 768 elementos e 417 nós. A malha foi criada pelo software GMSH como proposto por [1] e importada ao código numérico. A Figura 2 apresenta o campo de temperatura, onde os eixos  $x$  e  $y$  representam o domínio e o eixo  $z$  é a distribuição de temperatura, e que é possível observar que o campo de temperatura possui um perfil linear variando de 0 (cor azul) a 1 (cor vermelha).

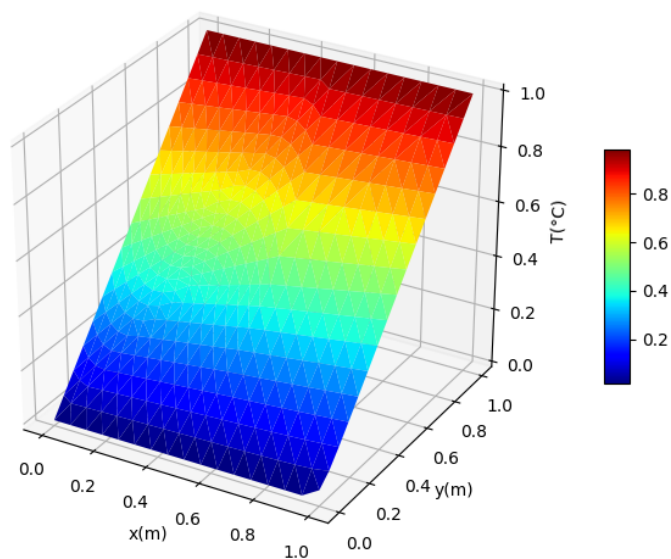


Figura 2: Distribuição de temperaturas na placa da solução permanente da equação de Laplace 3.2.1.

A comparação entre os resultados da solução analítica (Eq. 3.5) e a solução numérica, para a seção  $x = 0.5\text{m}$ , é apresentada na Figura 3, onde é possível observar que ambas possuem o mesmo perfil. Essa proximidade é quantificada pelo erro relativo médio que foi de 0.1136% e com desvio padrão de 0.0008%

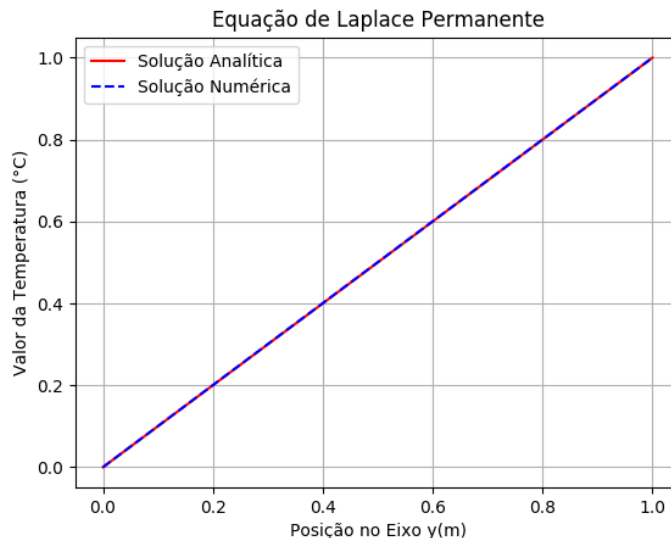


Figura 3: Comparação de resultado das solução numérica e analítica do caso de transporte de temperatura em sólidos no regime permanente.

Ao solucionar o mesmo problema introduzindo o termo transiente na equação de governo 3.4, pode-se verificar a evolução de comportamento da temperatura ao longo do tempo. Dessa forma, a equação que representa este caso é:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + k\nabla^2 T = 0 \quad (3.6)$$

onde  $k$  é o coeficiente de condutividade térmica da placa e  $t$  é a variável temporal.

Porém, ao longo dos passos de tempo, a solução se aproxima de um problema permanente, portanto pode-se fazer a comparação dos resultados obtidos neste exemplo com os valores da solução analítica (Eq. 3.5), tomando-se que  $t \rightarrow \infty$ . As condições iniciais  $t = 0s$  atribuídas aos nós sem condição de contorno foram de um valor inicial de  $0^\circ C$ . A Figura 4 apresenta a evolução do campo de temperaturas em função do tempo. É possível observar que a solução numérica converge para a solução analítica formando um perfil linear. O erro relativo médio calculado para este caso foi de 0.1092% e com desvio padrão de 0.0008%.



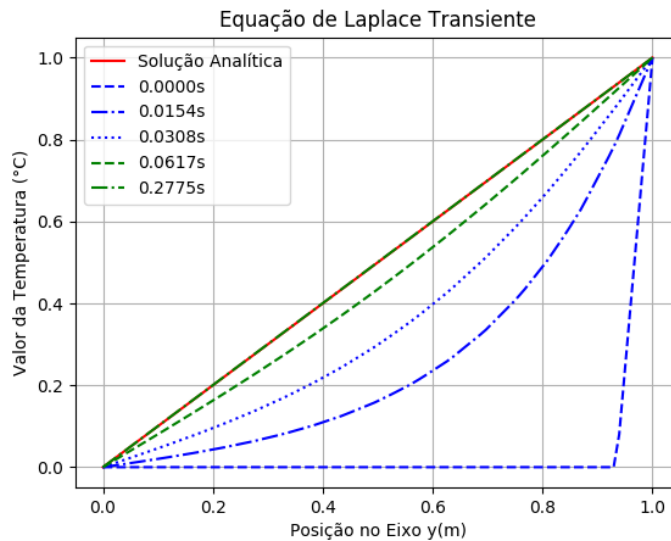


Figura 4: Comparação de resultado das soluções numéricas e analítica de transporte em sólidos no regime transiente.

### 3.2.2 Equação de Poisson com Condições de Contorno de Dirichlet

Neste problema busca-se estudar o comportamento de uma placa com geração de calor em seu domínio e temperaturas fixas nas laterais. Novamente, para permitir a comparação de resultados, é extraída uma seção da placa para observar os resultados como um problema unidimensional.

A equação que governa este caso é denominada equação de Poisson (Eq. 3.7), tomada para um problema permanente, ou seja sem variação no tempo.

$$-k\nabla^2 T = Q \quad (3.7)$$

onde  $Q$  é a geração de calor na placa.

A solução analítica para o caso de uma barra unidimensional é apresentada embaixo:

$$T(x) = \frac{Q}{2k} (-x^2 + Lx) + \frac{T_L - T_0}{L} x + T_0 \quad (3.8)$$

As condições de contorno e o domínio bidimensional utilizados na simulação são apresentados na Figura 5. A geração de calor utilizada foi de  $Q = 40W/m^3$  e a condutividade termica foi de  $k = 5W/m^\circ C$ .

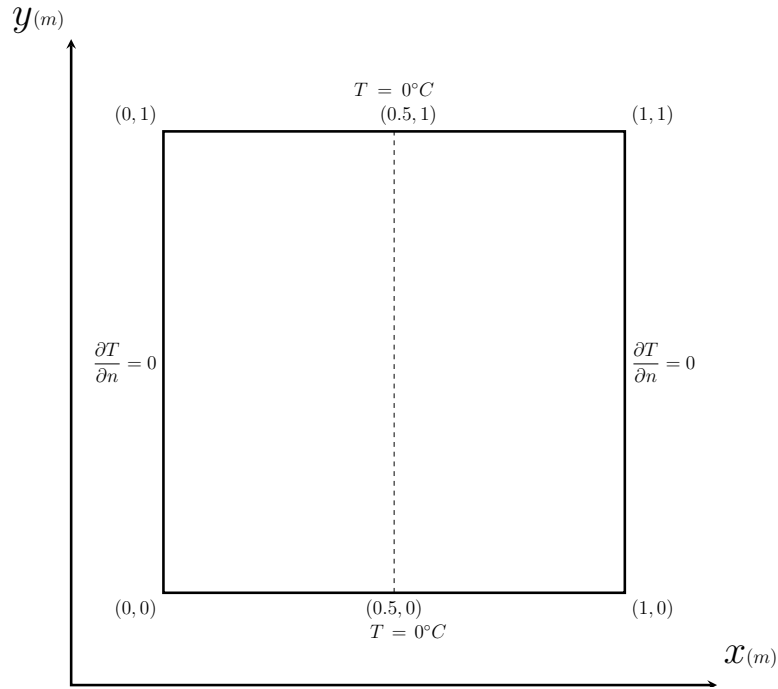


Figura 5: Condições de contorno da placa para o problema de Poisson 3.2.2.

Novamente, foi utilizada uma malha triangular linear não estruturada com 768 elementos e 417 nós. A Figura 6 apresenta o campo de temperatura, onde os eixos  $x$  e  $y$  representam o domínio e o eixo  $z$  é a distribuição de temperatura, onde é possível observar que o campo de temperatura possui um perfil parabólico variando de 0 (cor azul) a 1 (cor vermelha).

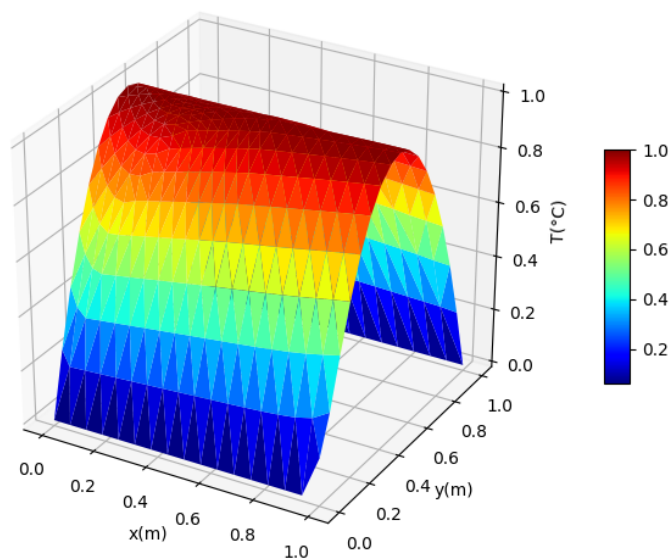


Figura 6: Distribuição de temperaturas na placa da solução do problema permanente de Poisson 3.2.2.

A comparação entre os resultados da solução analítica (Eq. 3.8) e a solução numérica, para a seção  $x = 0.5m$ , é apresentada na Figura 7, onde é possível observar que ambas possuem o mesmo perfil. Essa proximidade é quantificada pelo erro relativo médio que foi de 0.323% e com desvio padrão de 0.0101%.

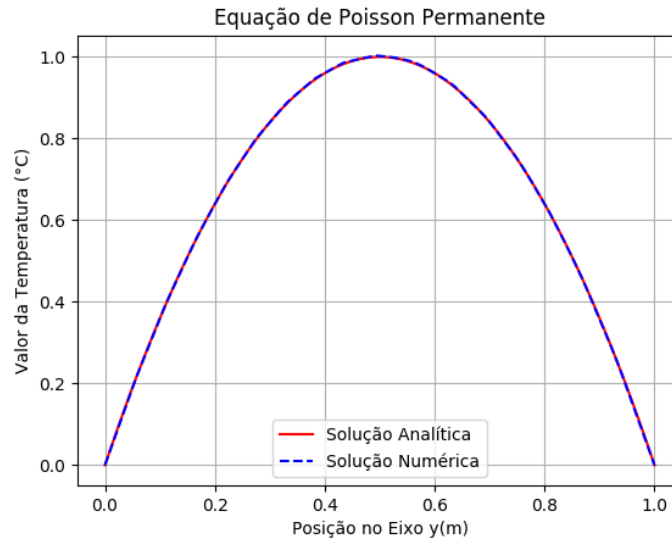


Figura 7: Comparação de resultado das solução numérica e analítica do problema de transporte de temperatura em sólidos no regime permanente com geração de calor.

A seguir, é apresentado o resultado com termo transiente  $\frac{\partial T}{\partial t}$  tendendo a um estado permanente. As condições iniciais  $t = 0s$  atribuídas aos pontos sem condição de contorno foram de um valor inicial de  $0^{\circ}C$ . A Figura 8 apresenta a evolução do campo de temperaturas em função do tempo. É possível observar que a solução numérica converge para a solução analítica formando um perfil parabólico. O erro relativo médio calculado para este caso foi de 0.325% e com desvio padrão de 0.0101%.

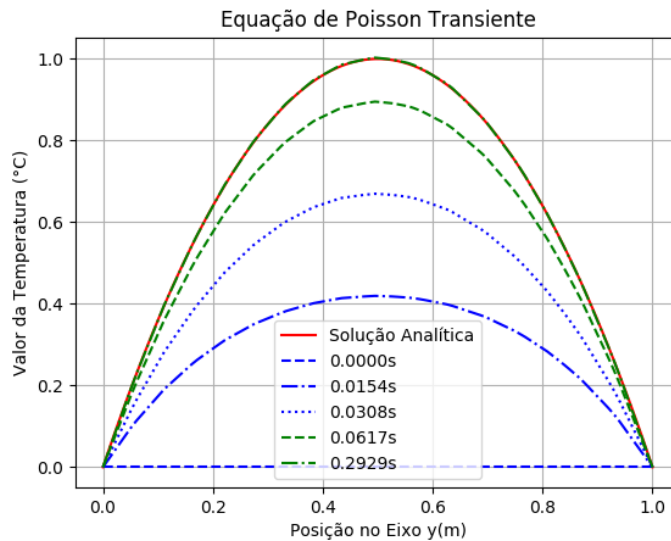


Figura 8: Comparação de resultado das soluções numéricas e analítica do problema de transporte de temperatura em sólidos no regime transiente com geração de calor.

### 3.2.3 Equação de Poisson com Condições de Contorno de Dirichlet e Neumann

Este caso foi escolhido para validar a solução de problemas com condições de contorno de Neumann. Trata-se de uma placa com temperatura fixa em uma das paredes e no lado oposto é definido um valor para o fluxo de calor presente. Toma-se uma seção da placa para observar os resultados e compará-los com um problema unidimensional de uma barra com as mesmas condições presentes.

A equação de governo é novamente a equação de Poisson (Eq. 3.7), e sua solução analítica para uma barra unidimensional é dada por:

$$T(x) = \frac{Q}{k} \left( \frac{-x^2}{2} + Lx \right) - \frac{q}{k}x + T_0 \quad (3.9)$$

onde  $q$  é o fluxo de calor na extremidade  $x = L$ .

As condições de contorno e o domínio bidimensional utilizados na simulação

são apresentados na Figura 9. A geração de calor utilizada foi de  $Q = -7W/m^3$ , a condutividade termica foi de  $k = 5W/m^\circ C$  e o fluxo de calor foi de  $q = -5W/m^2$ .

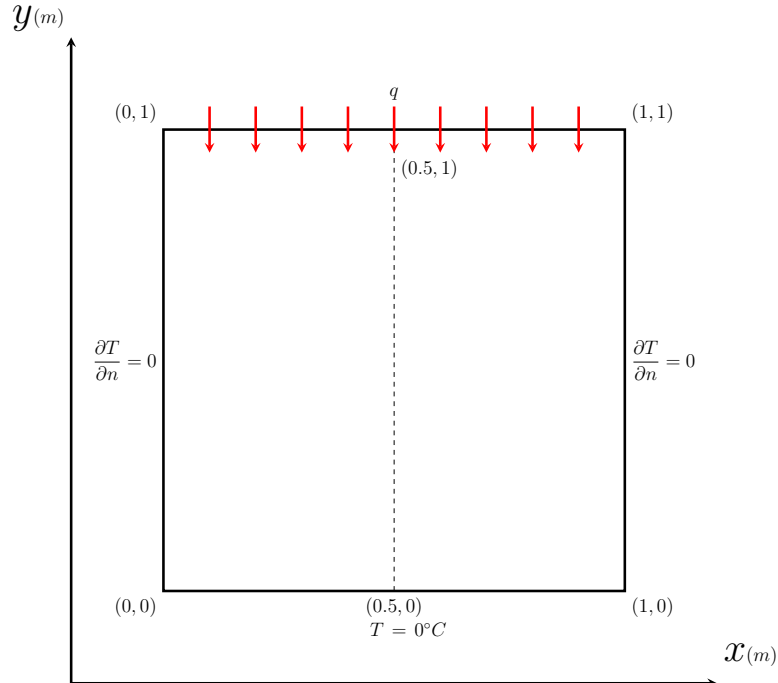


Figura 9: Condições de contorno da placa para o problema de Poisson 3.2.3.

Novamente, foi utilizada uma malha triangular linear não estruturada com 768 elementos e 417 nós. A Figura 10 apresenta o campo de temperatura, onde os eixos  $x$  e  $y$  representam o domínio e o eixo  $z$  é a distribuição de temperatura variando de 0 (cor azul) a 0.35 (vermelha).

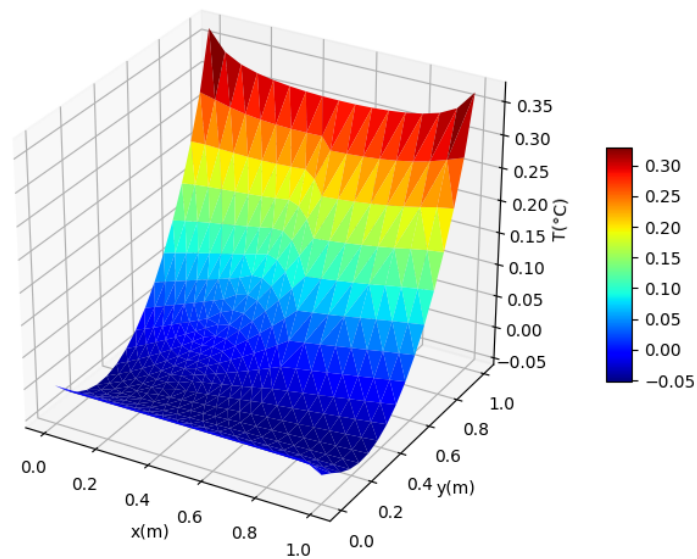


Figura 10: Distribuição de temperaturas na placa da solução do problema permanente de Poisson 3.2.3.

A comparação entre os resultados da solução analítica (Eq. 3.9) e a solução numérica, para a seção  $x = 0.5m$ , é apresentada na Figura 11, onde pode-se observar que ambas possuem o mesmo perfil. A semelhança entre elas é quantificada pelo erro relativo médio que foi de 0.427% e com desvio padrão de 0.8414%:

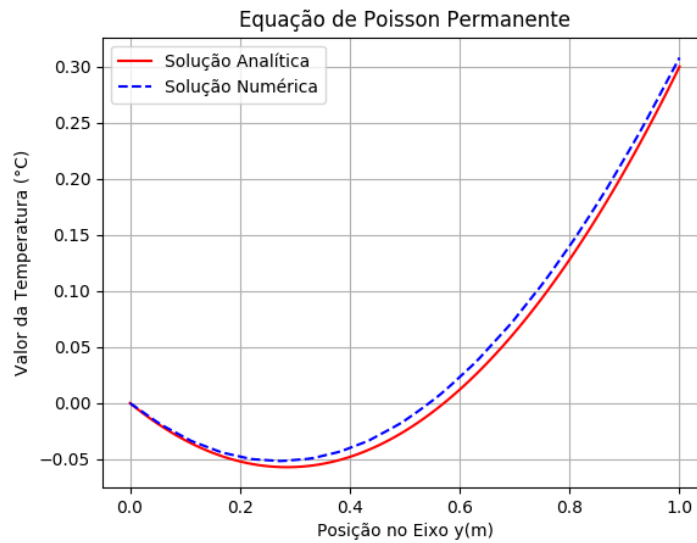


Figura 11: Comparação de resultado das solução numérica e analítica do problema de transporte de temperatura em sólidos no regime permanente com geração e fluxo de calor.

As condições iniciais  $t = 0s$  atribuídas aos pontos sem condição de contorno foram de um valor inicial de  $0^{\circ}C$ . A Figura 12 apresenta a evolução do campo de temperaturas em função do tempo. É possível observar que a solução numérica converge para a solução analítica. O erro relativo médio calculado para este caso foi de 0.31% e com desvio padrão de 0.9205%.



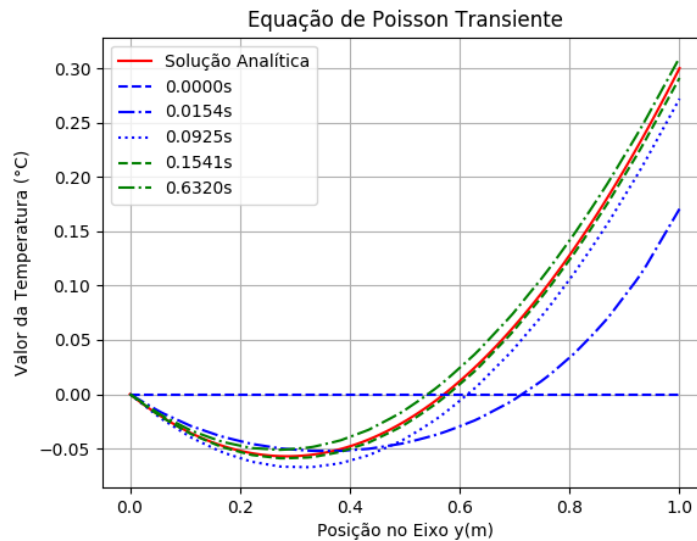


Figura 12: Comparação de resultado das soluções numéricas e analítica do problema de transporte de temperatura em sólidos no regime permanente com geração e fluxo de calor.

### 3.3 Validações de Problemas em Flúidos

#### 3.3.1 Escoamento de Poiseuille

Este é um dos primeiros exemplos dados ao estudar-se a mecânica dos fluidos e a equação de Navier-Stokes (Eq. ??), pois trata-se de uma configuração geométrica muito simples. O escoamento de Poiseuille também é conhecido como escoamento entre placas paralelas, já que essa é exatamente a descrição de sua forma e as placas são tomadas como estacionárias em relação ao fluido.

O escoamento ocorre entre duas placas paralelas de comprimento infinito com uma distância constante entre elas. É tomado um fluido ideal, isto é, newtoniano, incompressível e em estado permanente com seu perfil plenamente desenvolvido. As condições de contorno são definidas para a função corrente e a velocidade. Para os valores iniciais nos pontos sem condição de contorno foram

arbitrados como nulos.

O sistema de equações de governo deste escoamento é o sistema corrente-vorticidade ??, e a solução analítica do perfil de velocidades é dada por [2]:

$$v_x(y) = \frac{4U_{max}}{L^2}y(L-y) \quad (3.10)$$

onde  $v_x$  é velocidade do fluido na direção do eixo  $x$ ,  $L$  é o comprimento das placas e  $U_{max}$  é a velocidade máxima do escoamento.

Para esta simulação foram usadas as condições de contorno e o domínio bidimensional apresentados na Figura 13. A velocidade máxima  $U_{max}$  é tomada em função da velocidade de entrada  $U$  na relação  $U_{max} = 1.5U$ . Foi escolhido um valor para o número de Reynolds(Eq. ??) de  $Re = 100$  e um intervalo de tempo  $dt = 0.1s$ .

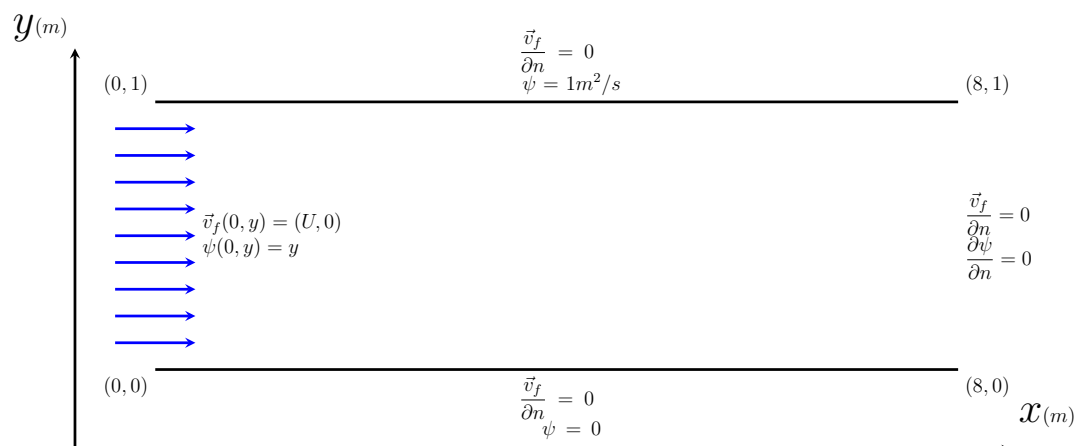


Figura 13: Condições de contorno de um escoamento entre placas paralelas de Poiseuille 3.3.1.

A Figura 14 apresenta a evolução do perfil de velocidades de uma seção tomada em  $x = 0.75L = 6.0m$  em função do tempo. Foi utilizada uma malha triangular linear não estruturada com 4200 elementos e 781 nós. Nota-se que a solução numérica converge para a solução analítica ao se aproximar do estado

permanente. O erro relativo médio calculado para este caso foi de 4.587% e com desvio padrão de 0.0535%.

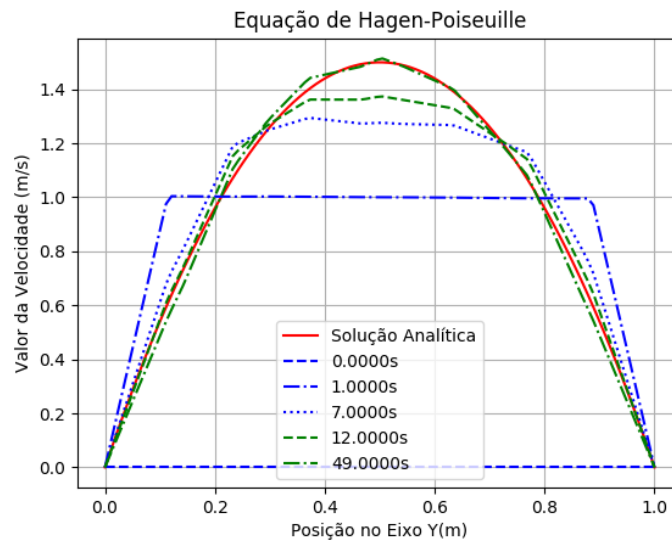


Figura 14: Comparação de resultado das soluções numéricas e analítica 3.10 do problema de corrente-vorticidade no regime permanente.

### 3.3.2 Escoamento de Couette

Similar ao escoamento de Poiseuille 3.3.1, entre duas placas paralelas de comprimento infinito separadas por uma distância constante. Porém, neste caso, as placas possuem uma velocidade relativa entre si, ou seja, estão em movimento. Novamente, utiliza-se a aproximação do escoamento para um fluido newtoniano, incompressível e em estado permanente com seu perfil plenamente desenvolvido. As condições de contorno são definidas para a função corrente e a velocidade, com os valores iniciais nos pontos sem condição de contorno arbitrados como nulos.

Novamente trabalha-se com o sistema corrente-vorticidade ?? e a solução

analítica do perfil de velocidades é dada por [2]:

$$v_x(y) = \frac{U_{sup} - U_{inf}}{L}y + U_{inf} \quad (3.11)$$

onde  $U_{sup}$  e  $U_{inf}$  são as velocidades das placas superior e inferior, respectivamente.

Para esta simulação foram usadas as condições de contorno e o domínio bidimensional apresentados na Figura 15. Foram tomadas as velocidade superior como  $U_{sup} = 1m/s$  e  $U_{inf} = -1m/s$  para um escoamento com número de Reynolds de  $Re = 1$  e um intervalo de tempo  $dt = 1.0s$ .

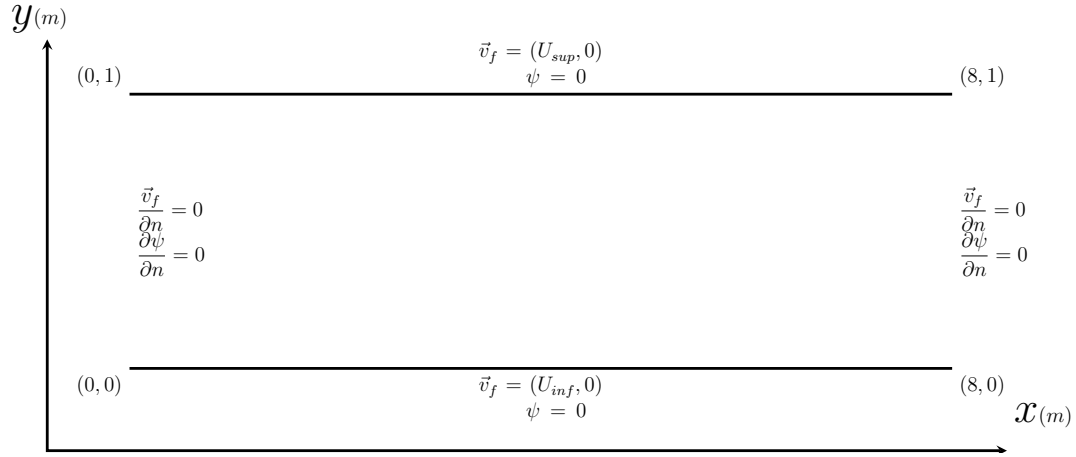


Figura 15: Condições de contorno de um escoamento entre placas paralelas de Couette 3.3.2.

A Figura 16 apresenta a evolução do perfil de velocidades de uma seção tomada em  $x = 0.75L = 6.0m$  em função do tempo. Novamente utilizou-se uma malha triangular linear não estruturada com 4200 elementos e 781 nós. Pode-se observar que a solução numérica converge para a solução analítica ao se aproximar do estado permanente. O erro relativo médio calculado para este caso foi de 0.2920% e com desvio padrão de 0.3371%.

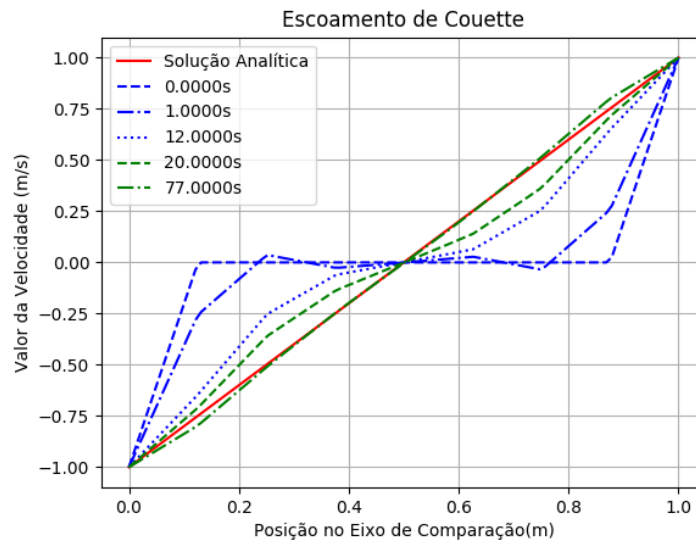


Figura 16: Comparação de resultado das soluções numéricas e analítica 3.11 do problema de corrente-vorticidade no regime permanente.

### 3.4 Validações de Problemas em Partículas

#### 3.4.1 Força Gravitacional

Mean Error:  $-7.706324287531013\text{e-}06$  Standard Error:  $1.7532532539087766\text{e-}05$

#### 3.4.2 Força de Arrasto

Mean Error:  $3.083075647620123\text{e-}07$  Standard Error:  $1.6723400282002147\text{e-}07$

#### 3.4.3 Força de Sustentação

Mean Error:  $6.52554446290127\text{e-}08$  Standard Error:  $3.79349081853567\text{e-}08$

#### 3.4.4 Força de Massa Virtual (*Added Mass*)

Mean Error: -6.657465890493951e-05 Standard Error: 1.1362509215219308e-05

## CONCLUSÃO

Aqui entra sua conclusão!!

## REFERÊNCIAS

- [1] GEUZAINÉ, C.; REMACLE, J.-F. Gmsh: A 3-d finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, John Wiley and Sons, v. 79, 2009.
- [2] PONTES, J. da R. M.; MANGIAVACCHI, N. *Fenômenos de Transferência*. [S.l.]: SBM, 2010.