



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Faculdade de Engenharia

Lucas Carvalho de Sousa

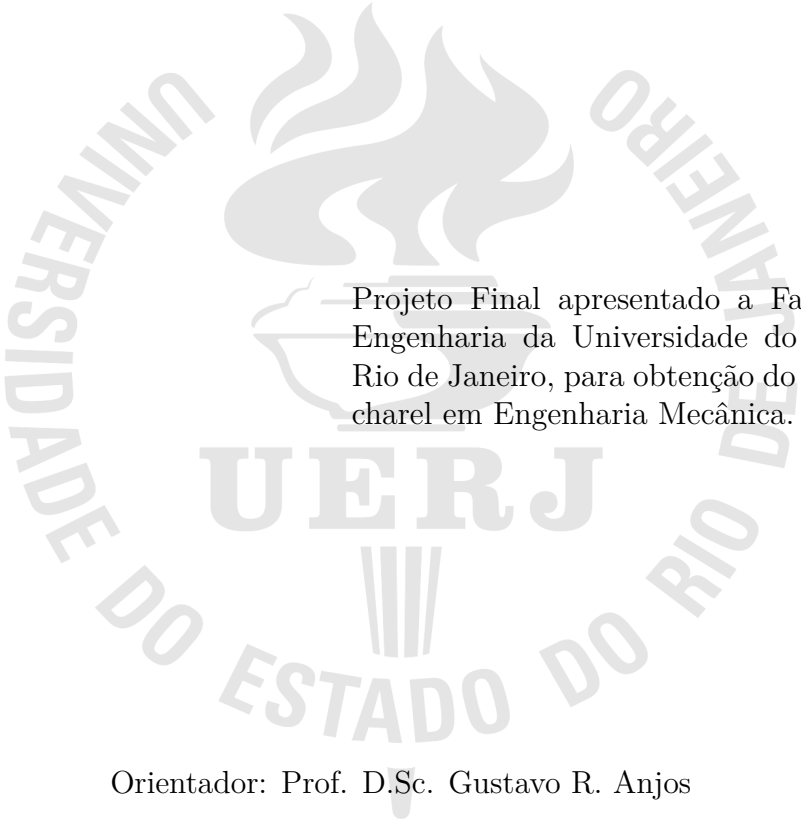
**Simulação Numérica De Escoamentos Dispersos Utilizando
Método De Elementos Finitos**

Rio de Janeiro

2019

Lucas Carvalho de Sousa

**Simulação Numérica De Escoamentos Dispersos Utilizando Método De
Elementos Finitos**



Projeto Final apresentado a Faculdade de
Engenharia da Universidade do Estado do
Rio de Janeiro, para obtenção do grau de ba-
charel em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. D.Sc. Gustavo R. Anjos

Rio de Janeiro

2019

CATALOGAÇÃO NA FONTE

S237

UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/B

Sousa, Lucas Carvalho de

Simulação Numérica De Escoamentos Dispersos Utilizando
Método De Elementos Finitos / Lucas Carvalho de Sousa. –
2019.

xx f.

Orientadores: Gustavo Rabello dos Santos;

Projeto Final (Bacharel em Engenharia Mecânica) – Uni-
versidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia.

Texto a ser informado pela biblioteca.

CDU 621:528.8

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial
deste projeto final, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Lucas Carvalho de Sousa

**Simulação Numérica De Escoamentos Dispersos Utilizando Método De
Elementos Finitos**

Projeto Final apresentado a Faculdade de
Engenharia da Universidade do Estado do
Rio de Janeiro, para obtenção do grau de
bacharel em Engenharia Mecânica.

Aprovado em: DATA

Banca Examinadora:

Prof. Dr. José da Rocha Miranda Pontes
Departamento de Engenharia Mecânica - UERJ

Prof. Dr. Nome do Professor 2
Faculdade de Engenharia da UERJ

Prof. D.Sc. Gustavo R. Anjos - Orientador
Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ - COPPE

Prof. Dr. Nome do Professor 4
Instituto de Geociências da UFF

Rio de Janeiro

2019

DEDICATÓRIA

Aqui entra sua dedicatória.

AGRADECIMENTO

Aqui entra seu agradecimento.

É importante sempre lembrar do agradecimento à instituição que financiou sua bolsa, se for o caso...

Agradeço à FAPERJ pela bolsa de Mestrado concedida.

RESUMO

SOUSA, Lucas Carvalho de. *Simulação Numérica De Escoamentos Dispersos Utilizando Método De Elementos Finitos*. xx f. Projeto Final (Bacharelado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, 2019.

Aqui entra o seu resumo organizado em um parágrafo apenas.

Palavras-chave: Método de Elementos Finitos, Formulação Corrente-Vorticidade, Escoamento Multifásico, Escoamento Particulado.

ABSTRACT

Aqui entra seu resumo em inglês também organizado em apenas um parágrafo.

Keywords: Pattern Formation, Swift-Hohenberg Equation, Computacional Modeling, Word4.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Partícula em um escoamento com um gradiente de velocidade não nulo.	28
Figura 2	Elemento triangular linear.	38
Figura 3	Condições de contorno da placa para o problema de Laplace 5.2.1. .	55
Figura 4	Distribuição de temperaturas na placa da solução permanente da equação de Laplace 5.2.1.	56
Figura 5	Comparação de resultado das solução numérica e analítica do caso de transporte de temperatura em sólidos no regime permanente. ...	57
Figura 6	Comparação de resultado das soluções numéricas e analítica de transporte em sólidos no regime transiente.	58
Figura 7	Condições de contorno da placa para o problema de Poisson 5.2.2. .	59
Figura 8	Distribuição de temperaturas na placa da solução do problema permanente de Poisson 5.2.2.	60
Figura 9	Comparação de resultado das solução numérica e analítica do problema de transporte de temperatura em sólidos no regime permanente com geração de calor.	61
Figura 10	Comparação de resultado das soluções numéricas e analítica do problema de transporte de temperatura em sólidos no regime transiente com geração de calor.	62
Figura 11	Condições de contorno da placa para o problema de Poisson 5.2.3. .	63
Figura 12	Distribuição de temperaturas na placa da solução do problema permanente de Poisson 5.2.3.	64

Figura 13 Comparação de resultado das solução numérica e analítica do problema de transporte de temperatura em sólidos no regime permanente com geração e fluxo de calor.	65
Figura 14 Comparação de resultado das soluções numéricas e analítica do problema de transporte de temperatura em sólidos no regime permanente com geração e fluxo de calor.....	66
Figura 15 Condições de contorno de um escoamento entre placas paralelas de Poiseuille 5.3.1.....	67
Figura 16 Comparação de resultado das soluções numéricas e analítica 5.10 do problema de corrente-vorticidade no regime permanente.....	68
Figura 17 Condições de contorno de um escoamento entre placas paralelas de Couette 5.3.2.	69
Figura 18 Comparação de resultado das soluções numéricas e analítica 5.11 do problema de corrente-vorticidade no regime permanente.....	70
Figura 19 Condições de contorno de uma partícula isolada sob efeito de uma força.	71
Figura 20 Comparação de resultado da solução numérica e analítica 5.12 do percurso de uma partícula em queda livre.	72
Figura 21 Comparação de resultado da solução numérica e analítica 5.13 do percurso de uma partícula em movimento de arrasto em um escoamento.	74
Figura 22 Condições de contorno de uma partícula isolada sob efeito da força de sustentação.	75
Figura 23 Comparação de resultado da solução numérica e analítica 5.15 do percurso de uma partícula em movimento de sustentação em um escoamento.	76

Figura 24 Comparação de resultado da solução numérica e analítica 5.17 do percurso de uma partícula em movimento de aceleração em um escoamento.	77
---	----

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

MDF	Método das Diferenças Finitas
CN	Crank-Nicolson

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	14
1	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	16
1.1	Introdução	16
1.2	Método de Elementos Finitos	16
2	EQUAÇÕES DE GOVERNO	17
2.1	Introdução	17
2.2	Conservação de Massa	17
2.3	Conservação de Quantidade de Movimento	19
2.4	Formulação Corrente-Vorticidade	23
2.5	Número de Reynolds	25
2.6	Forças Exercidas em Partículas	26
3	MODELAGEM NUMÉRICA	30
3.1	Introdução	30
3.2	Método de Elementos Finitos	30
3.2.1	Formulação Forte.....	30
3.2.2	Formulação Fraca	31
3.2.3	Discretização Espacial.....	34
3.2.4	Malha Computacional.....	37
3.3	Método de Diferenças Finitas	41
3.3.1	Discretização da Corrente-Vorticidade no Tempo	42
3.3.2	Discretização da Forças Aplicadas às Partículas	43

4	CÓDIGO NUMÉRICO	45
4.1	Introdução	45
4.2	Estrutura do Código.....	45
4.2.1	Importação da Malha	47
4.2.2	Definição das Condições de Contorno	47
4.2.3	Funções de Solução	48
4.2.4	Movimentação das Partículas	50
5	VALIDAÇÃO DO CÓDIGO NUMÉRICO	52
5.1	Introdução	52
5.2	Validações de Problemas em Sólidos.....	54
5.2.1	Equação de Laplace com Condições de Contorno de Dirichlet	54
5.2.2	Equação de Poisson com Condições de Contorno de Dirichlet	58
5.2.3	Equação de Poisson com Condições de Contorno de Dirichlet e Neumann	62
5.3	Validações de Problemas em Flúidos	66
5.3.1	Escoamento de Poiseuille.....	66
5.3.2	Escoamento de Couette.....	68
5.4	Validações de Problemas em Partículas.....	70
5.4.1	Força Gravitacional	71
5.4.2	Força de Arrasto	73
5.4.3	Força de Sustentação	74
5.4.4	Força de Massa Virtual (<i>Added Mass</i>).....	76
	CONCLUSÃO	78
	REFERÊNCIAS	79

INTRODUÇÃO

Os problemas físicos de interesse da engenharia mecânica, muitas vezes, podem se apresentar de forma multidisciplinar e em razão disso também oferecem resultados que exigem ferramental e perspectivas oferecidos por outras disciplinas e áreas não contempladas em um curso usual de um engenheiro mecânico. Um desses problemas é o fenômeno de difusão acompanhado de reações químicas (homogêneas ou heterogêneas), em geral não lineares, que, em condições conhecidas, configuram processos de organização espacial de substâncias ou espécies. Por exemplo, reações químicas autocatalíticas ou outros tipos de interações em sistemas difusivos com mais de uma substâncias ou espécies, e.g., o caso particular de auto-organização dentro de uma classe mais ampla conhecida como estruturas dissipativas: padrões (estruturas) de turing.

As equações de reação-difusão são conhecidas por modelarem fenômenos químicos e biológicos, os quais, se originam da interação entre indivíduos, células ou espécies. A modelagem matemática desses mecanismos tem sido bem sucedida e vem se desenvolvendo em áreas como ecologia, embriologia (morfogênese), neurobiologia, **outros**, bem como cinéticas químicas no estado sólido. Este último tema é de interesse da ciência dos materiais computacional, uma vez que modelos matemáticos de problemas físicos tais como crescimento dendrítico (evolução cristalina), formação de precipitados em ligas metálicas e cerâmicas ou até mesmo transformação de fase por avanço de frente tornam-se possíveis.

Padrões espaço-temporais se apresentam em diversos âmbitos da natureza e sua descrição e compreensão ainda levantam questões importantes e básicas. Comparando com cerca de 30 anos atrás, grande progresso foi conquistado na modelagem de instabilidades, análise da dinâmica na vizinhança, formação e es-

tabilidade de padrões, análise quantitativa experimental e numérica de padrões, e assim por diante.

Modelos de Reação-Difusão podem evoluir para um padrão espacial heterogêneo e estável ao longo do tempo devido a pequenas perturbações das concentrações das substâncias químicas em relação a um estado de equilíbrio espacial homogêneo.

Posicionar histórico, experiências, resultados, modelos, referências, etc. As teorias matemáticas...

1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

1.1 Introdução

Nesta seção é apresentada a literatura utilizada, analisando-se as partes pertinentes ao trabalho realizado. Os principais tópicos de estudo foram sobre os temas de Método de Elementos Finitos, Escoamentos Particulados e Programação Computacional.

1.2 Método de Elementos Finitos

2 EQUAÇÕES DE GOVERNO

2.1 Introdução

Este trabalho apresenta a modelagem de fluidos e partículas em um sistema de escoamento multifásico, portanto é preciso definir o que é um escoamento e quais as suas restrições para este trabalho. Um escoamento é o movimento das moléculas de um fluido em conjunto. As moléculas são tomadas como elementos infinitesimais, porém tratados de forma que não haja espaços vazios entre elas. Isto permite que as propriedades do fluido sejam tratadas pontualmente, podendo variar por exemplo sua densidade ou velocidade de nó a nó. Pode-se então modelar o comportamento destes escoamentos seguindo as equações de conservação:

- Conservação de Massa
- Conservação de Quantidade de Movimento

2.2 Conservação de Massa

O princípio de conservação de massa sem geração descreve que, dentro de um volume de controle, a soma da **taxa de acúmulo de massa dentro do volume** com **o fluxo de massa que atravessa a fronteira do volume** é nula [1].

O acúmulo de massa dentro do volume de controle é definido como:

$$\int_{V_c} \frac{\partial}{\partial t} dm = \int_{V_c} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_f dV_c) \quad (2.1)$$

$$m = \rho_f V_c \quad (2.2)$$

onde V_c é o volume de controle, dm é o elemento infinitesimal de massa e ρ_f é a

massa específica do fluido.

Simplificando a equação de acúmulo de massa (Eq. 2.1), tomada para um volume de controle permanente, que não varia no tempo, tem-se:

$$\int_{V_c} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_f dV_c) = \int_{V_c} \frac{\partial \rho_f}{\partial t} dV_c + \int_{V_c} \rho_f \frac{\partial dV_c}{\partial t} = \int_{V_c} \frac{\partial \rho_f}{\partial t} dV_c \quad (2.3)$$

E o fluxo de massa que atravessa a fronteira é retratado como:

$$\oint_S \rho_f \vec{v}_f \cdot \vec{n} dA \quad (2.4)$$

onde S é a curva de contorno da fronteira do volume de controle, \vec{v}_f é o campo de velocidades do fluido, dA é o elemento infinitesimal de área da superfície de contorno do volume de controle e \vec{n} é um vetor normal unitário orientado para fora do contorno S .

A conservação de massa é então representada como:

$$\int_{V_c} \frac{\partial \rho_f}{\partial t} dV_c + \oint_S \rho_f \vec{v}_f \cdot \vec{n} dA = 0 \quad (2.5)$$

Pode-se rescrever a equação de conservação de massa aplicando-se o *Teorema de Gauss* [1] na integral de superfície:

$$\int_{V_c} \frac{\partial \rho_f}{\partial t} dV_c + \int_{V_c} \vec{\nabla} \cdot (\rho_f \vec{v}_f) dV_c = \int_{V_c} \left(\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_f \vec{v}_f) \right) dV_c = 0 \quad (2.6)$$

obtendo-se a equação integral da conservação de massa, onde $\vec{\nabla}$ é o operador diferencial gradiente de componentes $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial i}, \frac{\partial}{\partial j}, \frac{\partial}{\partial k} \right) \cdot$.

Ao considerar a conservação do ponto de vista pontual, pode-se remover o

termo integral e escrever a forma diferencial da conservação de massa:

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_f \vec{v}_f) = 0 \quad (2.7)$$

Esta equação é denominada *Equação da Continuidade*, e pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \vec{v}_f \cdot \vec{\nabla} \rho_f + \rho_f \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_f = 0 \quad (2.8)$$

Tomando-se algumas hipóteses, é possível simplificar mais a equação. Para um fluido incompressível, com massa específica invariante na posição e no tempo, a equação da continuidade pode ser escrita como:

$$\rho_f \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_f = 0 \quad (2.9)$$

Como a massa específica do fluido não pode ser nula, tem-se:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_f = 0 \quad (2.10)$$

tomada para um **fluido incompressível**.

2.3 Conservação de Quantidade de Movimento

A conservação de quantidade de movimento é similar a conservação de massa, porém é tomada como um termo vetorial. Para o caso deste trabalho, é utilizada a versão linear da conservação de quantidade de movimento. Portanto, tem-se que a conservação da quantidade de movimento determina que a **taxa de acúmulo de quantidade de movimento linear dentro do volume de controle** mais **o fluxo de quantidade de movimento linear que atravessa a fronteira do volume de controle** é igual a **soma das forças aplicadas à**

superfície da fronteira do volume de controle e as forças do volume.

A definição da taxa de acúmulo de quantidade de movimento linear dentro do volume de controle é:

$$\int_{V_c} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_f \vec{v}_f) dV_c \quad (2.11)$$

E o fluxo de quantidade de movimento que atravessa a fronteira é retratado como:

$$\oint_S \rho_f \vec{v}_f \vec{v}_f \cdot \vec{n} dA \quad (2.12)$$

As forças aplicadas à superfície da fronteira do volume de controle é:

$$\oint_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n} dA \quad (2.13)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor de tensões.

E as forças de volume são, tomada apenas a força gravitacional:

$$\int_{V_c} \rho_f \vec{g} dV_c \quad (2.14)$$

onde \vec{g} é a aceleração gravitacional presente.

Montando-se a equação, a conservação de quantidade de movimento é representada como:

$$\int_{V_c} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_f \vec{v}_f) dV_c + \oint_S \rho_f \vec{v}_f \vec{v}_f \cdot \vec{n} dA = \oint_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n} dA + \int_{V_c} \rho_f \vec{g} dV_c \quad (2.15)$$

Novamente, aplica-se o *Teorema de Gauss* nas integrais de superfície e extrai-se a forma integral da equação da conservação de quantidade de movimento:

$$\int_{V_c} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_f \vec{v}_f) dV_c + \int_{V_c} \vec{\nabla} \cdot (\rho_f \vec{v}_f \vec{v}_f) dV_c = \int_{V_c} \vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} dV_c + \int_{V_c} \rho_f \vec{g} dV_c \quad (2.16)$$

Simplificando:

$$\int_{V_c} \left(\frac{\partial}{\partial t}(\rho_f \vec{v}_f) + \vec{\nabla} \cdot (\rho_f \vec{v}_f \cdot \vec{v}_f) - \vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \rho_f \vec{g} \right) = 0 \quad (2.17)$$

Novamente, considerando-se a conservação do ponto de vista pontual, remove-se o termo integral para escrever a forma diferencial da conservação de quantidade de movimento:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_f \vec{v}_f) + \vec{\nabla} \cdot (\rho_f \vec{v}_f \cdot \vec{v}_f) = \vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho_f \vec{g} \quad (2.18)$$

Continuando a desenvolver a equação:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_f \vec{v}_f) + \vec{\nabla} \cdot (\rho_f \vec{v}_f \cdot \vec{v}_f) = \rho_f \frac{\partial \vec{v}_f}{\partial t} + \vec{v}_f \frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \rho_f \vec{v}_f \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_f + \vec{v}_f \cdot \vec{\nabla} \cdot (\rho_f \vec{v}_f) \quad (2.19)$$

$$\rho_f \left(\frac{\partial \vec{v}_f}{\partial t} + \vec{v}_f \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_f \right) + \vec{v}_f \left(\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_f \vec{v}_f) \right) \quad (2.20)$$

Novamente, é tomada a hipótese de um fluido incompressível. Portanto, a equação pode ser simplificada para ser escrita como:

$$\rho_f \left(\frac{\partial \vec{v}_f}{\partial t} + \vec{v}_f \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_f \right) = \vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho_f \vec{g} \quad (2.21)$$

Reescrevendo o tensor de tensões como uma soma de dois tensores, e o substituindo na equação, tem-se:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \quad (2.22)$$

$$\rho_f \left(\frac{\partial \vec{v}_f}{\partial t} + \vec{v}_f \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_f \right) = -\vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho_f \vec{g} \quad (2.23)$$

onde p é o campo de pressões no fluido, \mathbf{I} é a matriz de identidade e $\boldsymbol{\tau}$ é o tensor de tensões viscosas.

Novamente é necessário fazer uma hipótese para este escoamento, para que

seja possível definir as forças atuantes no fluido. O tensor de tensões viscosas $\boldsymbol{\tau}$ está relacionado as propriedades do fluido, podendo ser definido matematicamente para um fluido homogêneo, isotrópico e newtoniano, como:

$$\boldsymbol{\tau} = \mu_f \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_f + \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_f \right)^T \right) \quad (2.24)$$

onde μ_f é a viscosidade dinâmica do fluido.

Substituindo a definição de $\boldsymbol{\tau}$ na Eq. 2.23, obtem-se:

$$\rho_f \left(\frac{\partial \vec{v}_f}{\partial t} + \vec{v}_f \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_f \right) = -\vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \left(\mu_f \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_f + \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_f \right)^T \right) \right) + \rho_f \vec{g} \quad (2.25)$$

Assumindo-se que a viscosidade dinâmica é constante para todo o fluido:

$$\rho_f \left(\frac{\partial \vec{v}_f}{\partial t} + \vec{v}_f \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_f \right) = -\vec{\nabla} p + \mu_f \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_f + \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_f \right)^T \right) + \rho_f \vec{g} \quad (2.26)$$

$$\rho_f \left(\frac{\partial \vec{v}_f}{\partial t} + \vec{v}_f \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_f \right) = -\vec{\nabla} p + \mu_f \left(\nabla^2 \vec{v}_f + \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_f \right)^T \right) + \rho_f \vec{g} \quad (2.27)$$

Utilizando o que foi obtido na Equação de Continuidade Eq. 2.10 pode-se substituir na equação Eq. 2.27:

$$\rho_f \left(\frac{\partial \vec{v}_f}{\partial t} + \vec{v}_f \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_f \right) = -\vec{\nabla} p + \mu_f \nabla^2 \vec{v}_f + \rho_f \vec{g} \quad (2.28)$$

Dividindo-se todos os termos pela massa específica pode-se reescrever a equação Eq. 2.28, obtem-se então a forma simplificada da *Equação de Navier-Stokes* para fluidos newtonianos incompressíveis e com viscosidade constante:

$$\frac{\partial \vec{v}_f}{\partial t} + \vec{v}_f \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_f = -\frac{1}{\rho_f} \vec{\nabla} p + \frac{\mu_f}{\rho_f} \nabla^2 \vec{v}_f + \vec{g} \quad (2.29)$$

2.4 Formulação Corrente-Vorticidade

A formulação de corrente-vorticidade é um sistema de equações que providencia um método alternativo de se calcular as propriedades de um escoamento sem solucionar diretamente a equação de Navier-Stokes (Eq. 2.29). Isto permite simplificar a solução do problema, pois a Equação de Navier-Stokes possui um forte acoplamento entre o campo de pressões e o campo de velocidades.

Para isso, é utilizada a seguinte identidade vetorial:

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \vec{\nabla} \frac{v^2}{2} - \vec{v} \times \vec{\nabla} \times \vec{v} \quad (2.30)$$

Substituindo na Eq. 2.29:

$$\frac{\partial \vec{v}_f}{\partial t} + \vec{\nabla} \frac{v_f^2}{2} - \vec{v}_f \times \vec{\nabla} \times \vec{v}_f = -\frac{1}{\rho_f} \vec{\nabla} p + \frac{\mu_f}{\rho_f} \nabla^2 \vec{v}_f + \vec{g} \quad (2.31)$$

Em seguida, aplica-se o operador rotacional nos dois lados da equação:

$$\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{v}_f}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \frac{v_f^2}{2} - \vec{\nabla} \times \vec{v}_f \times \vec{\nabla} \times \vec{v}_f = -\vec{\nabla} \times \frac{1}{\rho_f} \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \times \frac{\mu_f}{\rho_f} \nabla^2 \vec{v}_f + \vec{\nabla} \times \vec{g} \quad (2.32)$$

Simplifica-se então a equação, pois os termos que possuem o operador gradiente são anulados, pois o rotacional do gradiente de um escalar é zero. O termo gravitacional também é anulado já que a derivada da constante \vec{g} é zero. Fica-se com a seguinte equação:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{v}_f) - \vec{\nabla} \times \vec{v}_f \times \vec{\nabla} \times \vec{v}_f = \frac{\mu_f}{\rho_f} \nabla^2 (\vec{\nabla} \times \vec{v}_f) \quad (2.33)$$

Define-se o vetor $\vec{\omega}$ como *vorticidade*, onde $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v}_f$. Substitui-se na

equação:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} - \vec{\nabla} \times \vec{v}_f \times \vec{\omega} = \frac{\mu_f}{\rho_f} \nabla^2 \vec{\omega} \quad (2.34)$$

Rearranjando-se as operações vetoriais, tem-se:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{v}_f \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} - \vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_f = \frac{\mu_f}{\rho_f} \nabla^2 \vec{\omega} \quad (2.35)$$

Como a vorticidade é perpendicular ao vetor velocidade, para escoamentos bidimensionais pode-se anular o produto $\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_f$ [1]. Então obtém-se a *Equação da Vorticidade* para escoamentos de fluidos newtonianos incompressíveis:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{v}_f \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} = \frac{\mu_f}{\rho_f} \nabla^2 \vec{\omega} \quad (2.36)$$

Para escoamentos permanentes bidimensionais de fluidos incompressíveis, a velocidade é calculada pela vazão volumétrica. Portanto, a velocidade pode ser substituída por um escalar ψ , conhecido como *função corrente*. A relação entre a função corrente e o campo de velocidades do fluido é obtida através da manipulação da equação da continuidade (Eq. 2.8), dada como:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (2.37)$$

onde v_x é a componente do campo de velocidades do fluido no eixo x e v_y é a componente do campo de velocidades do fluido no eixo y .

E a relação entre elas é apresentada em seguida:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (2.38)$$

$$v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.39)$$

Enquanto a relação entre a função corrente e a vorticidade é:

$$(\vec{\nabla} \times \vec{v}_f)_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (2.40)$$

Substituindo os termos de velocidade pelas equações Eq. 2.38 e Eq. 2.39:

$$\omega_z = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (2.41)$$

$$\omega_z = -\nabla^2 \psi \quad (2.42)$$

Então o sistema de corrente-vorticidade é apresentado como:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{v}_f \cdot \vec{\nabla} \vec{\omega} = \frac{\mu_f}{\rho_f} \nabla^2 \vec{\omega} \quad (2.43)$$

$$\nabla^2 \psi = -\omega_z \quad (2.44)$$

$$\vec{v}_f = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \quad (2.45)$$

2.5 Número de Reynolds

Para analisar as características de escoamentos com diversas variáveis, utiliza-se Re , uma constante adimensional conhecida como **Número de Reynolds**.

O número de Reynolds permite reconhecer rapidamente as qualidades de um escoamento apenas por seu valor. Ele estabelece uma relação entre as forças viscosas e inerciais de um fluido. Pode-se declarar então qual força possui maior componente no comportamento do escoamento.

O número de Reynolds de um escoamento é calculado por:

$$Re = \frac{\rho_f |\vec{v}_f|_{max} D}{\mu_f} \quad (2.46)$$

onde v_{fmax} é a maior velocidade do campo de velocidades do fluido, e D é o comprimento característico de problema.

2.6 Forças Exercidas em Partículas

A principal equação que governa o comportamento do movimento das partículas é obtida a partir da 2ª Lei de Newton [2].

$$\sum \vec{F}_p = \frac{d(m_p \vec{v}_p)}{dt} \quad (2.47)$$

onde $\sum \vec{F}_p$ é o somatório de forças aplicadas a partícula, m_p é a massa e \vec{v}_p a velocidade da partícula.

As forças aplicadas às partículas foram determinadas a partir da equação de **Basset–Boussinesq–Oseen** (BBO), que descreve as forças sofridas por partículas sob efeito de escoamentos com número de Reynolds 2.5 pequeno. Porém, o número de Reynolds utilizados é diferente do calculado para escoamentos, utiliza-se um valor específico para cada partícula.

$$Re_p = \frac{\rho_p |(\vec{v}_f - \vec{v}_p)|_{max} d_p}{\mu_f} \quad (2.48)$$

onde ρ_p é a densidade, d_p o diâmetro e \vec{v}_p a velocidade da partícula, e \vec{v}_f é a velocidade do escoamento na mesma posição da partícula.

Como mencionado, as forças da equação de BBO representam fielmente o comportamento real de partículas para valores de Reynolds menores que 1, ou seja, $Re_p < 1$.

Nem todas as forças apresentadas na equação BBO foram inseridas no código de simulação. Elas foram inseridas sequencialmente durante o desenvolvimento do código, seguidas de testes para verificar sua implementação. Foram

escolhidas apenas as principais forças, apresentadas a seguir [2]:

- **Força Gravitacional:** Também conhecida como força Peso, criada pelo campo gravitacional do planeta aplicado aos corpos com massa. Seu valor é calculado através das massas dos corpos, a distância entre seus centros de massa e uma constante universal. Porém, para simplificar o problema, pode-se assumir que a distância entre eles é constante e igual ao raio do planeta Terra. Portanto, pode-se assumir que o valor da força será sempre constante e proporcional a uma aceleração constante aplicada a massa da partícula, o que torna esta a força mais simples de se calcular:

$$\vec{F}_{grav} = m_p \vec{g} \quad (2.49)$$

onde \vec{g} é tomada como a aceleração constante da gravidade na superfície terrestre com valor definido de $\vec{g} = (0, -9.80665)m/s^2$.

- **Força de Arrasto:** Força causada pelo atrito do fluido no contorno da partícula, que cria um efeito cisalhante e tende deixar a partícula com mesma velocidade que o fluido.

Sua equação é determinada como:

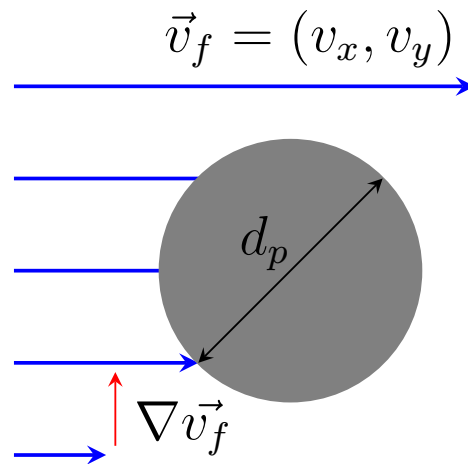
$$\vec{F}_{drag} = 3\pi\mu_f d_p (\vec{v}_f - \vec{v}_p) \quad (2.50)$$

Pode-se observar seu comportamento presente no termo de velocidade relativa $(\vec{v}_f - \vec{v}_p)$ da equação Eq. 2.50. Este termo causa o efeito de aproximar a velocidade da partícula à velocidade do fluido já que torna a força proporcionalmente maior quanto mais afastadas elas se encontrarem. E o sinal permite que caso a partícula esteja mais rápida ela seja desacelerada e o inverso se ela se encontrar mais lenta.

- **Força de Sustentação:** A força de sustentação é uma componente que tende a mover a partícula em direções perpendiculares a seu movimento principal. Ela possui várias formas de ser calculada, sendo nomeada para cada caso.

Por exemplo, a **Força de Magnus** está relacionada a rotação, ou velocidade angular, presente na partícula. Neste trabalho as partículas são assumidas como corpos rígidos sem rotação, então esta força não será levada em conta.

Porém outro tipo de força de sustentação é a **Força de Saffman** [2], que é gerada a partir do gradiente de velocidades presente no escoamento. Para que haja o efeito da força de sustentação de Saffman é necessário que exista um gradiente no campo de velocidades diferente de nulo, como pode se notar na Figura 1.



Fonte: Autor.

Figura 1: Partícula em um escoamento com um gradiente de velocidade não nulo.

A força é aplicada em uma direção perpendicular ao movimento do escoamento e proporcional ao crescimento da velocidade no escoamento. Ela pode

ser calculada através da equação:

$$\vec{F}_{lift} = 1.61\mu_f d_p (\vec{v}_f - \vec{v}_p) \sqrt{Re_G} \quad (2.51)$$

onde Re_G é conhecido como número de Reynolds de cisalhamento, e é calculado através da equação:

$$Re_G = \frac{d_p^2 \rho_f}{\mu_f} \nabla \vec{v}_f \quad (2.52)$$

- **Força de Massa Virtual** (*Added Mass*): A força de massa virtual está relacionada ao trabalho realizado pelo fluido para acelerar um corpo submerso. Isto pode ser interpretado como a energia que seria utilizada para mover uma mesma quantidade de fluido no lugar do corpo presente. O valor desta força pode ser calculado através da equação:

$$\vec{F}_{mass} = \frac{1}{2} \rho_f V_p \frac{d}{dt} (\vec{v}_f - \vec{v}_p) \quad (2.53)$$

onde V_p é o volume da partícula inserida no escoamento.

3 MODELAGEM NUMÉRICA

3.1 Introdução

Neste trabalho foram utilizados dois tipos de modelagem numéricas para simular o comportamento do sistema multifásico. Na fase dos fluidos, foi utilizado o *Método de Elementos Finitos* (MEF) para solucionar as equações de governo, pois ele proporciona uma forma eficiente de solucionar as equações com rápida convergência. Enquanto para a fase sólida das partículas, e o termo temporal das equações dos fluidos, foi utilizado o *Método de Diferenças Finitas* (MDF), o qual foi escolhido por sua simplicidade de implementação tomando-se cuidado com suas restrições de convergência.

3.2 Método de Elementos Finitos

3.2.1 Formulação Forte

A formulação forte são as equações de governo do problema na sua forma diferencial, com as condições de contorno definidas. As equações do fluido definidas em Eq. 2.43, Eq. 2.44 e Eq. 2.45 são tomadas no domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ com condições de contorno definidas em:

$$\omega = \omega_\Gamma \text{ em } \Gamma_1 \quad (3.1)$$

$$\psi = \psi_\Gamma \text{ em } \Gamma_2 \quad (3.2)$$

$$\vec{v}_f = \vec{v}_{f\Gamma} \text{ em } \Gamma_3 \quad (3.3)$$

3.2.2 Formulação Fraca

A formulação fraca é o resultado da ponderação da equação da forma forte integrada sobre o domínio. Para o encontrar as formas fracas das equações de governo tomadas neste trabalho, inicialmente são estabelecidos resíduos \vec{R}_i nas equações de forma forte:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{v}_f \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} - \frac{\mu_f}{\rho_f} \nabla^2 \vec{\omega} = \vec{R}_1 \quad (3.4)$$

$$\nabla^2 \psi + \omega_z = \vec{R}_2 \quad (3.5)$$

$$\vec{v}_f - \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \vec{R}_3 \quad (3.6)$$

Em seguida, busca-se impor o valor médio de cada resíduo como nulo, de forma que:

$$\int_{\Omega} \vec{R}_1 \cdot \vec{\delta} d\Omega = 0 \quad (3.7)$$

$$\int_{\Omega} \vec{R}_2 \cdot \vec{\phi} d\Omega = 0 \quad (3.8)$$

$$\int_{\Omega} \vec{R}_3 \cdot \vec{\xi} d\Omega = 0 \quad (3.9)$$

onde $\vec{\delta}$, $\vec{\phi}$ e $\vec{\xi}$ são as funções de peso de cada equação, respectivamente. As funções peso são funções arbitrárias utilizadas para obter as componentes de contribuição de cada nó.

Substituindo-se os resíduos nas integrais, tem-se:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{v}_f \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} - \frac{\mu_f}{\rho_f} \nabla^2 \vec{\omega} \right) \cdot \vec{\delta} d\Omega = 0 \quad (3.10)$$

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 \psi + \omega_z) \cdot \vec{\phi} d\Omega = 0 \quad (3.11)$$

$$\int_{\Omega} \left(\vec{v}_f - \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right) \cdot \vec{\xi} d\Omega = 0 \quad (3.12)$$

Reorganiza-se as integrais:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} \cdot \vec{\delta} d\Omega + \int_{\Omega} \vec{v}_f \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} \cdot \vec{\delta} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\mu_f}{\rho_f} \nabla^2 \vec{\omega} \cdot \vec{\delta} d\Omega = 0 \quad (3.13)$$

$$\int_{\Omega} \nabla^2 \psi \cdot \vec{\phi} d\Omega + \int_{\Omega} \omega_z \cdot \vec{\phi} d\Omega = 0 \quad (3.14)$$

$$\int_{\Omega} \vec{v}_f \cdot \vec{\xi} d\Omega - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \cdot \vec{\xi} d\Omega = 0 \quad (3.15)$$

Aplica-se agora o Teorema de Green nos termos difusivos das equações:

$$- \int_{\Omega} \frac{\mu_f}{\rho_f} \nabla^2 \vec{\omega} \cdot \vec{\delta} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\mu_f}{\rho_f} \vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{\delta} d\Omega - \int_{\Gamma} \frac{\mu_f}{\rho_f} \vec{\delta} \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} \cdot \vec{n} d\Gamma \quad (3.16)$$

$$\int_{\Omega} \nabla^2 \psi \cdot \vec{\phi} d\Omega = - \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \psi \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{\phi} d\Omega + \int_{\Gamma} \vec{\phi} \cdot \vec{\nabla} \cdot \psi \cdot \vec{n} d\Gamma \quad (3.17)$$

onde \vec{n} é um vetor normal unitário, orientado para o exterior do contorno Γ . Como as condições de contorno definidas para o problema em 3.2.1 apontam apenas condições de Dirichlet, isto é, valores fixos no contorno, pode-se assumir como hipótese que $\delta = 0$ e $\phi = 0$ em todo o contorno Γ . Assim, a integral em Γ é nula e os termos difusivos são anulados:

$$- \int_{\Omega} \frac{\mu_f}{\rho_f} \nabla^2 \vec{\omega} \cdot \vec{\delta} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\mu_f}{\rho_f} \vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{\delta} d\Omega \quad (3.18)$$

$$\int_{\Omega} \nabla^2 \psi \cdot \vec{\phi} d\Omega = - \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \psi \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{\phi} d\Omega \quad (3.19)$$

As equações ficam então como:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} \cdot \vec{\delta} d\Omega + \int_{\Omega} \vec{v}_f \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} \cdot \vec{\delta} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\mu_f}{\rho_f} \vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{\delta} d\Omega = 0 \quad (3.20)$$

$$-\int_{\Omega} \vec{\nabla}.\psi.\vec{\nabla}.\vec{\phi}d\Omega + \int_{\Omega} \omega_z.\vec{\phi}d\Omega = 0 \quad (3.21)$$

$$\int_{\Omega} \vec{v}_f.\vec{\xi}d\Omega - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}, -\frac{\partial\psi}{\partial x} \right) .\vec{\xi}d\Omega = 0 \quad (3.22)$$

Se assumir-se que:

$$m_1\left(\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t}, \vec{\delta}\right) = \int_{\Omega} \frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} .\vec{\delta}d\Omega \quad (3.23)$$

$$g_1(\vec{v}_f, \vec{\delta}) = \int_{\Omega} \vec{v}_f .\vec{\nabla}.\vec{\omega}.\vec{\delta}d\Omega \quad (3.24)$$

$$k_1(\vec{\omega}, \vec{\delta}) = \int_{\Omega} \vec{\nabla}.\vec{\omega}.\vec{\nabla}.\vec{\delta}d\Omega \quad (3.25)$$

$$k_2(\psi, \vec{\phi}) = \int_{\Omega} \vec{\nabla}.\psi.\vec{\nabla}.\vec{\phi}d\Omega \quad (3.26)$$

$$m_2(\omega_z, \vec{\phi}) = \int_{\Omega} \omega_z.\vec{\phi}d\Omega \quad (3.27)$$

$$m_3(\vec{v}_f, \vec{\xi}) = \int_{\Omega} \vec{v}_f.\vec{\xi}d\Omega \quad (3.28)$$

$$g_3(\psi, \vec{\xi}) = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}, -\frac{\partial\psi}{\partial x} \right) .\vec{\xi}d\Omega \quad (3.29)$$

então as equações na forma fraca são:

$$m_1\left(\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t}, \vec{\delta}\right) + g_1(\vec{v}_f, \vec{\delta}) + \frac{\mu_f}{\rho_f} k_1(\vec{\omega}, \vec{\delta}) = 0 \quad (3.30)$$

$$-k_2(\psi, \vec{\phi}) + m_2(\omega_z, \vec{\phi}) = 0 \quad (3.31)$$

$$m_3(\vec{v}_f, \vec{\xi}) - g_3(\psi, \vec{\xi}) = 0 \quad (3.32)$$

Para os seguintes conjuntos de funções bases:

$$\mathbb{W} = \left\{ \omega \in \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 : \int_{\Omega} \omega^2 d\Omega < \infty; \omega \in \omega_{\Gamma} \right\} \quad (3.33)$$

$$\mathbb{P} = \left\{ \psi \in \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 : \int_{\Omega} \psi^2 d\Omega < \infty; \psi \in \psi_{\Gamma} \right\} \quad (3.34)$$

$$\mathbb{V} = \left\{ v_f \in \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 : \int_{\Omega} v_f^2 d\Omega < \infty; v_f \in v_{f\Gamma} \right\} \quad (3.35)$$

3.2.3 Discretização Espacial

A escolha das funções peso pode ser realizada de várias formas, por simplicidade este trabalho utiliza a **Formulação de Galerkin**. Neste método, as funções peso são utilizadas com o mesmo valor da função interpoladora de cada variável. Substituindo-se nas equações:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial \omega}{\partial t} \delta d\Omega + \int_{\Omega} v_{fx} \frac{\partial \omega}{\partial x} \delta d\Omega + \int_{\Omega} v_{fy} \frac{\partial \omega}{\partial y} \delta d\Omega \\ + \int_{\Omega} \frac{\mu_f}{\rho_f} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \delta}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial \delta}{\partial y} \right) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$- \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \omega_z \phi d\Omega = 0 \quad (3.37)$$

$$\int_{\Omega} v_{fx} \xi d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial \psi}{\partial y} \xi d\Omega = 0 \quad (3.38)$$

$$\int_{\Omega} v_{fy} \xi d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial \psi}{\partial x} \xi d\Omega = 0 \quad (3.39)$$

As discretizações são aplicadas sobre um domínio com n_e elementos e n_p nós. Este domínio é determinado por uma malha computacional criada. As variáveis ficam então:

$$\omega(\vec{x}, t) = \sum_{i=1}^{n_p} \omega_i(t) N_i(\vec{x}) \quad (3.40)$$

$$\psi(\vec{x}, t) = \sum_{i=1}^{n_p} \psi_i(t) N_i(\vec{x}) \quad (3.41)$$

$$v_{fx}(\vec{x}, t) = \sum_{i=1}^{n_p} v_{fxi}(t) N_i(\vec{x}) \quad (3.42)$$

$$v_{fy}(\vec{x}, t) = \sum_{i=1}^{n_p} v_{fyi}(t) N_i(\vec{x}) \quad (3.43)$$

onde os valores das funções em cada ponto $\omega_i = [\omega_1, \dots, \omega_{n_p}]$, $\psi_i = [\psi_1, \dots, \psi_{n_p}]$, $v_{fxi} = [v_{fx1}, \dots, v_{fxn_p}]$ e $v_{fyi} = [v_{fy1}, \dots, v_{fyn_p}]$ são as incógnitas desejadas. Como estas funções são independentes do tempo, elas são retiradas dos termos de integração sobre o domínio Ω . Enquanto isso, as funções de aproximação $N_i = [N_1, \dots, N_{n_p}]$, também chamadas de funções base, são escolhidas arbitrariamente.

Na formulação de Galerkin, as funções de base são iguais as suas respectivas funções peso:

$$\delta(\vec{x}, t) = \sum_{j=1}^{n_p} \delta_j(t) N_j(\vec{x}) \quad (3.44)$$

$$\phi(\vec{x}, t) = \sum_{j=1}^{n_p} \phi_j(t) N_j(\vec{x}) \quad (3.45)$$

$$\xi(\vec{x}, t) = \sum_{j=1}^{n_p} \xi_j(t) N_j(\vec{x}) \quad (3.46)$$

Então as equações do sistema em suas formas variacionais discretizadas no

espaço ficam como:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n_p} \frac{\partial \omega_i}{\partial t} N_i \sum_{j=1}^{n_p} \delta_j N_j d\Omega \\
& + \int_{\Omega} v_{fx} \sum_{i=1}^{n_p} \frac{\partial \omega_i N_i}{\partial x} \sum_{j=1}^{n_p} \delta_j N_j d\Omega + \int_{\Omega} v_{fy} \sum_{i=1}^{n_p} \frac{\partial \omega_i N_i}{\partial y} \sum_{j=1}^{n_p} \delta_j N_j d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \frac{\mu_f}{\rho_f} \left(\sum_{i=1}^{n_p} \frac{\partial \omega_i N_i}{\partial x} \sum_{j=1}^{n_p} \frac{\partial \delta_j N_j}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n_p} \frac{\partial \omega_i N_i}{\partial y} \sum_{j=1}^{n_p} \frac{\partial \delta_j N_j}{\partial y} \right) d\Omega = 0 \quad (3.47)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{n_p} \frac{\partial \psi_i N_i}{\partial x} \sum_{j=1}^{n_p} \frac{\partial \phi_j N_j}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n_p} \frac{\partial \psi_i N_i}{\partial y} \sum_{j=1}^{n_p} \frac{\partial \phi_j N_j}{\partial y} \right) d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n_p} \omega_{zi} N_i \sum_{j=1}^{n_p} \phi_j N_j d\Omega = 0 \quad (3.48)
\end{aligned}$$

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n_p} v_{fxi} N_i \sum_{j=1}^{n_p} \xi_j N_j d\Omega - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n_p} \frac{\partial \psi_i N_i}{\partial y} \sum_{j=1}^{n_p} \xi_j N_j d\Omega = 0 \quad (3.49)$$

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n_p} v_{fyi} N_i \sum_{j=1}^{n_p} \xi_j N_j d\Omega + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n_p} \frac{\partial \psi_i N_i}{\partial x} \sum_{j=1}^{n_p} \xi_j N_j d\Omega = 0 \quad (3.50)$$

Pode-se remover as componentes da velocidade do fluido v_{fx} e v_{fy} da equação Eq. 3.47, pois serão utilizados os componentes da velocidade no último passo de tempo para estes valores, tornando-se a equação linear.

Retira-se então os somatórios das funções interpoladoras das integrais, e

como $\sum_{j=1}^{n_p} \delta_j \neq 0$, $\sum_{j=1}^{n_p} \phi_j \neq 0$ e $\sum_{j=1}^{n_p} \xi_j \neq 0$ as equações de governo serão:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n_p} \sum_{i=1}^{n_p} \frac{\partial \omega_i}{\partial t} \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega \\ & + \sum_{j=1}^{n_p} \sum_{i=1}^{n_p} \omega_i \left(v_{fx} \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j d\Omega + v_{fy} \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial y} N_j d\Omega \right. \\ & \left. + \frac{\mu_f}{\rho_f} \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} d\Omega \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\sum_{j=1}^{n_p} \sum_{i=1}^{n_p} \psi_i \left(- \int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\Omega + \omega_i \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega + \right) = 0 \quad (3.52)$$

$$\sum_{j=1}^{n_p} \sum_{i=1}^{n_p} v_{fxi} \left(\int_{\Omega} N_i N_j d\Omega - \psi_i \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial y} N_j d\Omega + \right) = 0 \quad (3.53)$$

$$\sum_{j=1}^{n_p} \sum_{i=1}^{n_p} v_{fyi} \left(\int_{\Omega} N_i N_j d\Omega + \psi_i \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j d\Omega + \right) = 0 \quad (3.54)$$

3.2.4 Malha Computacional

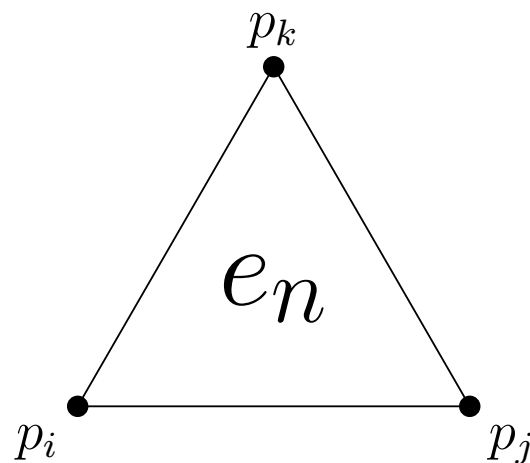
A malha utilizada pode ser estruturada, com nós equidistantes entre si, ou não estruturada, nós escolhidos a critério do criador da malha. É comum utilizar malhas não estruturadas com zonas de maior interesse com elementos menores, para se obter informações mais precisas nestes locais. Em certos casos de equações com acoplamentos fortemente ligados, se torna necessário utilizar elementos com mais informações atreladas, como elementos quadráticos ou cúbicos. Este é o caso da solução da equação de Navier-Stokes. Porém, para evitar esta restrição, este trabalho utilizou a formulação de corrente-vorticidade, que desvia deste problema. Podendo então utilizar elementos lineares e simplificando sua implementação.

Os tipos de elementos mais comuns aplicados a aos diferentes tipos de si-

mulações são [3]:

- Dimensão do problema
 - Caso unidimensional: Retas
 - Caso bidimensional: Triângulos ou Retângulos
 - Caso tridimensional: Tetraedros ou Prismas
- Ordem dos polinômios interpoladores
 - Primeiro grau: Lineares
 - Segundo grau: Quadráticos
 - Terceiro grau: Cúbicos

Para este trabalho foi escolhido o elemento do tipo triangular com interpolação linear, pois não há restrições no problema escolhido, e este é o caso mais aplicado na literatura. A Figura 2 mostra como são os elementos utilizados:



Fonte: Autor.

Figura 2: Elemento triangular linear.

Pode-se notar na Figura 2 que o elemento de índice e_n é delimitado pelos nós p_i , p_j e p_k . A função de interpolação aplicada entre os nós é uma função linear entre suas posições.

Então pode-se escrever as equações do problema em sua forma matricial como:

$$\mathbf{M} \frac{\partial \omega}{\partial t} + v_{fx} \mathbf{G}_x \omega + v_{fy} \mathbf{G}_y \omega + \frac{\mu_f}{\rho_f} (\mathbf{K}_{xx} + \mathbf{K}_{yy}) \omega = 0 \quad (3.55)$$

$$- (\mathbf{K}_{xx} + \mathbf{K}_{yy}) \psi + \mathbf{M} \omega = 0 \quad (3.56)$$

$$\mathbf{M} v_{fx} \omega - \mathbf{G}_y \psi = 0 \quad (3.57)$$

$$\mathbf{M} v_{fy} \omega + \mathbf{G}_x \psi = 0 \quad (3.58)$$

onde \mathbf{M} , \mathbf{G}_x , \mathbf{G}_y , \mathbf{K}_{xx} e \mathbf{K}_{yy} são as matrizes elementares de dimensão $n_p \times n_p$.

Estas matrizes são montadas a partir da contribuição local de cada nó em um elemento e unidas na matriz geral, onde cada posição da matriz é o valor correspondente ao nó de mesmo índice. As matrizes locais \mathbf{m}^e , \mathbf{g}_x^e , \mathbf{g}_y^e , \mathbf{k}_{xx}^e e \mathbf{k}_{yy}^e , para cada elemento e são definidas como:

$$\mathbf{m}^e = \int_{\Omega^e} N_i^e N_j^e d\Omega^e \quad (3.59)$$

$$\mathbf{g}_x^e = \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} N_j^e d\Omega^e \quad (3.60)$$

$$\mathbf{g}_y^e = \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} N_j^e d\Omega^e \quad (3.61)$$

$$\mathbf{k}_{xx}^e = \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} d\Omega^e \quad (3.62)$$

$$\mathbf{k}_{yy}^e = \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} d\Omega^e \quad (3.63)$$

Escritas em suas formas matriciais [4]:

$$\mathbf{m}^e = \frac{A^e}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

$$\mathbf{g}_x^e = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ b_i & b_j & b_k \\ b_i & b_j & b_k \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

$$\mathbf{g}_y^e = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} c_i & c_j & c_k \\ c_i & c_j & c_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

$$\mathbf{k}_{xx}^e = \frac{t_h}{4A} \begin{bmatrix} b_i b_i & b_j b_i & b_k b_i \\ b_i b_j & b_j b_j & b_k b_j \\ b_i b_k & b_j b_k & b_k b_k \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

$$\mathbf{k}_{yy}^e = \frac{t_h}{4A} \begin{bmatrix} c_i c_i & c_j c_i & c_k c_i \\ c_i c_j & c_j c_j & c_k c_j \\ c_i c_k & c_j c_k & c_k c_k \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

onde A^e é a área, t_h a espessura e $b_i, b_j, b_k, c_i, c_j, c_k$ as coordenadas relativas do elemento. Estas coordenadas relativas são definidas para os nós p_i, p_j e p_k de um elemento qualquer como:

$$b_i = y_j - y_k \quad (3.69)$$

$$b_j = y_k - y_i \quad (3.70)$$

$$b_k = y_i - y_j \quad (3.71)$$

$$c_i = x_k - x_j \quad (3.72)$$

$$c_j = x_i - x_k \quad (3.73)$$

$$c_k = x_j - x_i \quad (3.74)$$

onde x_i e y_i são as coordenadas do ponto p_i , x_j e y_j são as coordenadas do ponto p_j e x_k e y_k são as coordenadas do ponto p_k .

E a área A pode ser calculada através das coordenadas dos pontos pela equação:

$$A^e = \frac{1}{2}((x_i y_j - x_j y_i) + (x_j y_k - x_k y_j) + (x_k y_i - x_i y_k)) \quad (3.75)$$

3.3 Método de Diferenças Finitas

O Método de Diferenças Finitas é um das mais antigas e simples formas de se calcular o valor de um diferencial numericamente. A base do método é tomar diferenças pequenas o suficiente para replicar o valor tomado no meio contínuo.

Imagina-se uma função $f(x)$ tomada no domínio $x \in \mathbb{R}$ e deseja-se obter a derivada $\frac{df}{dx}(x)$. Tomando-se definição da derivada, pode-se escrever:

$$\frac{df}{dx}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (3.76)$$

onde h é a diferença entre os pontos tomados na variável x . Ou seja, caso deseja-se obter o valor da derivada desta função numericamente basta aplicar a diferença entre dois pontos com afastamento suficientemente pequeno.

Outra forma de interpretar-se o MDF seria através da aplicação da *Série de Taylor*. Tomando-se novamente a função $f(x)$ e a série de Taylor aplicada a ela

ao redor de um ponto x qualquer, tem-se:

$$f(x+h) \approx f(x) + \frac{df(x)}{dx}(x+h-x) + \frac{1}{2!} \frac{d^2f(x)}{dx^2}(x+h-x)^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3f(x)}{dx^3}(x+h-x)^3 + \dots \quad (3.77)$$

Como deseja-se obter o valor da derivada de primeira ordem, pode-se reorganizar a equação para extrair o termo $\frac{df(x)}{dx}$:

$$\frac{df(x)}{dx} \approx \frac{f(x+h) - f(x) - \frac{1}{2!} \frac{d^2f(x)}{dx^2}(h)^2 - \frac{1}{3!} \frac{d^3f(x)}{dx^3}(h)^3 - \dots}{h} \quad (3.78)$$

Em certos casos não se tem nenhuma informação sobre as derivadas de ordens superiores da função, portanto pode-se aproximar o valor da derivada ao remover os termos com ordens superiores e substituí-los por um termo de erro $O(h^2)$.

$$\frac{df(x)}{dx} \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h^2) \quad (3.79)$$

onde, novamente, quanto menor for o passo h , mais o valor da derivada numérica se aproximará do valor contínuo.

3.3.1 Discretização da Corrente-Vorticidade no Tempo

A equação de governo Eq. 3.55 do problema de corrente-vorticidade ainda possui um termo derivativo não discretizado. Este é o termo $\frac{\partial \omega}{\partial t}$, e ele é discretizado utilizando a discretização em MDF apresentada em Eq. 3.79.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} \approx \frac{\omega(t+dt) - \omega(t)}{dt} \quad (3.80)$$

onde dt é o passo de tempo da simulação.

Será utilizada a notação de índice de variáveis no tempo como sobreescrito, onde t_n é o índice do passo no tempo, $\omega^{t_{n+1}} = \omega(t+dt)$ e $\omega^{t_n} = \omega(t)$. Então a

discretização final do sistema corrente-vorticidade é:

$$\left(\mathbf{M}v_{fx}\mathbf{G}_x + v_{fy}\mathbf{G}_y + \frac{\mu_f}{\rho_f}(\mathbf{K}_{xx} + \mathbf{K}_{yy}) \right) \omega^{t_{n+1}} = \mathbf{M}\omega^{t_n} \quad (3.81)$$

$$(\mathbf{K}_{xx} + \mathbf{K}_{yy})\psi = \mathbf{M}\omega^{t_{n+1}} \quad (3.82)$$

$$\mathbf{M}v_{fx}\omega^{t_{n+1}} = \mathbf{G}_y\psi \quad (3.83)$$

$$\mathbf{M}v_{fy}\omega^{t_{n+1}} = -\mathbf{G}_x\psi \quad (3.84)$$

3.3.2 Discretização da Forças Aplicadas às Partículas

As equações das forças aplicadas descritas em 2.6 são discretizadas utilizando MDF com seus parâmetros em cada instante t_n . Suas equações discretizadas são:

- **Força Gravitacional:**

$$\vec{F}_{grav}^{t_n} = m_p \vec{g} \quad (3.85)$$

- **Força de Arrasto:**

$$\vec{F}_{drag}^{t_n} = 3\pi\mu_f d_p \left(\vec{v}_f^{t_n} - \vec{v}_p^{t_{n-1}} \right) \quad (3.86)$$

- **Força de Sustentação:**

$$\vec{F}_{lift}^{t_n} = 1.61\mu_f d_p \left(\vec{v}_f^{t_n} - \vec{v}_p^{t_{n-1}} \right) \sqrt{Re_G^{t_n}} \quad (3.87)$$

$$Re_G^{t_n} = \frac{d_p^2 \rho_f}{\mu_f} \left(\frac{d\vec{v}_f}{d\vec{r}} \right)^{t_n} \quad (3.88)$$

onde $\frac{d\vec{v}_f}{d\vec{r}}$ é a variação do valor da velocidade nas extremidades da partícula, em um eixo perpendicular ao movimento do fluido que cruza o centro de

massa da mesma.

- **Força de Massa Virtual:**

$$\vec{F}_{mass}^{t_n} = \frac{1}{2}\rho_f V_p \frac{\left(\vec{v}_f^{t_n} - \vec{v}_p^{t_{n-1}}\right) - \left(\vec{v}_f^{t_{n-1}} - \vec{v}_p^{t_{n-2}}\right)}{dt} \quad (3.89)$$

Finalmente, após calcular-se as forças aplicadas, é necessário determinar a nova velocidade e posição de cada partícula:

$$\vec{v}_p^{t_n} = \frac{dt}{m_p} \left(\vec{F}_{grav}^{t_n} + \vec{F}_{drag}^{t_n} + \vec{F}_{lift}^{t_n} + \vec{F}_{mass}^{t_n} \right) \quad (3.90)$$

$$(p_x, p_y)^{t_n} = \vec{v}_p^{t_n} dt \quad (3.91)$$

4 CÓDIGO NUMÉRICO

4.1 Introdução

O código deste trabalho foi feito completamente pelo autor na linguagem **Python 3.5** [5], com auxílio das bibliotecas: *NumPy* [6], para manipulação de dados e matrizes, *SciPy* [7] para solução de sistemas e matrizes esparsas, *Matplotlib* [8] para a visualização de gráficos e *pygmsh* para importação da malha no formato `.msh`.

Para a geração de malhas foi utilizado o *software open source Gmsh* [9]. Nele é possível desenhar o perfil do domínio e gerar os nós e elementos de acordo com o refino desejado. Também pode-se forçar diferentes tamanhos de elementos em regiões de maior interesse.

Para a visualização de resultados foi utilizado o *software open source ParaView* [10], pois este permite uma visualização da evolução dos resultados, assim como diversas ferramentas para avaliação dos dados.

Todos os softwares de terceiros foram usados com permissão e licenças apropriadas.

4.2 Estrutura do Código

O código foi planejado e estruturado com o paradigma de *Orientação em Objeto* em mente. Isto é, o código é centralizado em classes que possuem propriedades e métodos referentes a modelagem física do problema estudado. Por exemplo, as classes `TccLib.Mesh` e `TccLib.Particle` representam os conceitos físicos de malha e partícula respectivamente. Estas classes criam objetos que contêm suas propriedades individuais, como as densidades ρ_f e ρ_p , e permitem um melhor entendimento do fenômeno.

Este código foi pensado em ser utilizado como uma biblioteca pública com acesso liberado a qualquer um interessado (link do projeto no GitHub). Por isso, as funções e métodos possuem diversas opções de chamadas. Mais informações estão disponíveis através do comando interno:

```
help(arg)
```

substituindo-se o argumento `arg` pela função desejada.

Demonstra-se a seguir um exemplo de uso da biblioca:

```
# Importação da biblioteca
import TccLib

# Importação da malha ou coordenadas de uma nova
mesh = TccLib.Mesh("arquivo_da_malha.msh")
# ou mesh = TccLib.Mesh([coordenadas (x, y)]

# Definição das condições de contorno
mesh.new_boundary_condition("nome da propriedade",
                            [índices dos nós],
                            [valor da condição no nó],
                            [1 para Dirichlet ou 0 para Neumann])

# Chamada para a função de solução
v_x, v_y = TccLib.solve_velocity_field(mesh)

# Adição de partículas
mesh.add_particle(propiedades da partícula)
```



```
# Loop de movimentação das partículas
for t in time_list:
    TccLib.move_particles(mesh, (v_x, v_y))
```

Agora serão explorados cada etapa separadamente.

4.2.1 Importação da Malha

O objeto de malha `TccLib.Mesh` possui um construtor que aceita como parâmetros uma lista de coordenadas dos nós da malha ou o nome de um arquivo na extensão `.msh` para importação. Após a obtenção dos nós é utilizada a função `scipy.spatial.Delaunay()`, que retorna uma lista com os conjuntos de índices dos nós por elemento.

São cadastradas as informações da malha criada no objeto, como as coordenadas dos nós nos eixos x e y , o número de elementos e o número de nós da malha. É criado um dicionário vazio para receber as condições de contorno, onde suas chaves são nomes fixos para cada problema.

4.2.2 Definição das Condições de Contorno

A classe de condições de contorno `TccLib.BoundaryConditions` é uma classe privada, ou seja, o usuário não interage com ela diretamente. Para cadastrar novas condições de contorno é preciso utilizar o método dentro da classe `TccLib.Mesh.new_boundary_condition()`.

O nome da propriedade varia de acordo com a função de solução. Para o propósito deste trabalho, a solução do sistema corrente-vorticidade, são registradas as condições de contorno com nomes: `"psi"` para os valores da corrente, `"vel_x"` para os valores da velocidade do fluido no eixo x e `"vel_y"` para os valores da velocidade do fluido no eixo y .

Os valores da condição de contorno são passados em três listas de mesmo tamanho, onde a primeira contém os índices dos elementos, a segunda contém os valores da condição correspondentes ao índice associado e a terceira contém um valor lógico para a condição correspondentes ao índice, onde verdadeiro representa uma condição do tipo Dirichlet e falso representa o tipo Neumann. Caso seja fornecido um valor numérico, ou booleano, ao invés da segunda e terceira lista respectivamente, será interpretado que todos os valores da lista substituída possuem este valor.

4.2.3 Funções de Solução

Esta biblioteca foi projetada para adaptar diversas funções de solução para cada modelo físico desejado. No momento da escrita, há duas funções de soluções implementadas no código:

- Equação de Poisson (MEF) - `TccLib.solve_poisson()`
- Sistema Corrente-Vorticidade (MEF) - `TccLib.solve_velocity_field()`

A solução dos problemas é realizada de forma semelhante. Primeiramente são geradas as malhas globais do domínio da malha em uma função auxiliar `TccLib.get_matrizes()`:

```
# Loop em cada elemento na lista da malha
for elem in mesh.iem:
    x = mesh.x[elem] # = [x_i, x_j, x_k]
    y = mesh.y[elem] # = [y_i, y_j, y_k]

    # Criação das matrizes locais
    ...
```

```

# Registro das matrizes locais nas matrizes globais
for i in range(3):
    for j in range(3):
        kx_global[elem[i], elem[j]] += k_x[i][j]
        ky_global[elem[i], elem[j]] += k_y[i][j]
        m_global[elem[i], elem[j]] += m[i][j]
        gx_global[elem[i], elem[j]] += g_x[i][j]
        gy_global[elem[i], elem[j]] += g_y[i][j]

```

que retorna as matrizes globais na ordem apresentada.

Em seguida, são montadas as matrizes principais para a solução algébrica:

$$A_{n \times n} \cdot x_n = b_n \quad (4.1)$$

onde n é o número de nós da malha.

Então são aplicadas as condições de contorno, utilizando a função privada

`TccLib.apply_boundary_conditions()`:

```

# Iteração sobre a lista de nós com condição de contorno
for coluna in no_list:
    if condição é Dirichlet:
        # Dirichlet
        for linha in lista_de_linhas:
            # Compensar linhas anuladas
            b[linha] -= A[linha, coluna] * condicao[coluna]
            # Zerar termos na matriz principal
            A[linha, coluna] = 0.
            A[coluna, linha] = 0.

```

```

        # Igualar valor da condição no nó a ela mesma
        A[coluna, coluna] = 1.
        b[coluna, 0] = condicao[coluna]

    else:
        # Neumann Treatment
        b[coluna, 0] += condicao[coluna]

```

Finalmente, o sistema algébrico é solucionado pela função terceirizada da biblioteca de álgebra linear, otimizada, `scipy.sparse.linalg.spsolve()`.

As funções de solução retornam listas com o valor da solução calculada para cada nó na ordem de índices registrada no objeto de malha. Há métodos criados para auxiliar a visualização dos resultados no objeto de malha, como o método `TccLib.Mesh.show_velocity_quiver()` que apresenta um gráfico com flechas apontando a direção do fluxo em cada nó e com tamanho proporcional a seu módulo.

4.2.4 Movimentação das Partículas

No caso do problema multifásico de partículas inseridas em um fluido em movimento, há uma etapa de movimentação das partículas separada da função de solução principal. Isto é devido ao fato do método de solução escolhido utilizar a implementação *one-way* [2]. Neste tipo de solução o movimento do fluido, meio principal, afeta as partículas, meio secundário, porém elas não causam reflexos no fluido. Esta implementação foi escolhida devida a demanda computacional elevada da implementação *two-way*, que requeriria solucionar o campo de velocidades (MEF) mais vezes por iteração. Então as partículas são simuladas percorrendo um escoamento permanente, com o valor do campo de velocidades sido calculado anteriormente.

As partículas são adicionadas a malha através de um método próprio, que leva como parâmetros as propriedades físicas da partícula, sua posição e condições iniciais e um nome para registro, `TccLib.Mesh.add_particle()`.

Em cada chamada da função `TccLib.move_particles()` são calculadas as forças aplicadas a cada partícula presente na malha e as forças são adicionadas a um dicionário com seus respectivos nomes como chaves. Para se calcular as forças, são necessárias diversas informações, cujas são captadas nesta função, como a velocidade do escoamento na posição da partícula. E o valor do número de Reynolds (Eq. 2.48) é calculado em cada chamada, para verificar se a simulação respeita a restrição apresentada em 2.6. Em seguida é chamada uma função interna da classe `TccLib.Particle` para executar o reposicionamento das partículas, esta calcula as novas posições das partículas e as move, caso respeitem as condições de colisão.

Portanto, a função de movimentação das partículas é aplicada depois da solução do sistema. A função de movimentação `TccLib.move_particles()` não possui retorno, porém pode-se analisar seu resultado observando-se a propriedade `TccLib.Particle.position_history` das partículas presentes na malha. Esta propriedade é uma lista que contém as posições percorridas pela partícula, o que permite a visualização gráfica do percurso da mesma.

5 VALIDAÇÃO DO CÓDIGO NÚMÉRICO

5.1 Introdução

Neste capítulo serão apresentadas as comparações realizadas entre os resultados numéricos obtidos para x casos amplamente conhecidos na literatura e a solução analítica unidimensional dos mesmos. Como a solução numérica é obtida para problemas bidimensionais, é preciso pegar uma seção transversal do domínio e interpolar resultado, produzindo, assim, uma aproximação. Dessa forma, a quantificação do erro relativo médio se faz necessária, com o objetivo de apresentar a acurácia do código numérico. O erro relativo entre a solução numérica e a solução analítica é calculado pela equação (Eq. 5.1):

$$er_i = \frac{|(val_a)_i - (val_n)_i|}{(val_a)_i} \quad (5.1)$$

onde $(val_a)_i$ é o valor encontrado pela solução analítica e $(val_n)_i$ é o valor encontrado pela solução numérica, ambos encontrados no nó i .

São calculados também a média e o desvio padrão dos erros relativos pelas equações (Eq. 5.2) e (Eq. 5.2), respectivamente:

$$er_{mean} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N er_i \quad (5.2)$$

$$er_{std} = \left\| \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N er_i - er_{mean} \right\|_2 \quad (5.3)$$

As validações foram organizadas em três seções que representam diferentes etapas da implementação do modelo matemático, sendo assim espera-se mostrar a aplicabilidade do código numérico desenvolvido, além do histórico de aprendizado obtido. Na seção 5.2, os problemas de transferência de calor em sólidos com

condutividade termica constante são apresentados. Os casos propostos nesta seção buscam confirmar a importação correta da malha e a montagem das matrizes globais, como também a aplicação das condições de contorno de Dirichlet e de Neumann.

Já na seção 5.3, os problemas com o termo convectivo presente são analisados. Foi considerado o fluido como incompressível e newtoniano, dessa forma a equação de Navier-Stokes pode ser aplicada segundo a formulação corrente-vorticidade. A estrutura do algoritmo de solução nos casos propostos dessa seção é a mesma utilizada na resolução do problema proposto neste trabalho. Dessa forma, podemos confirmar a correta aplicação das condições de contorno da vorticidade que deve ser calculada em cada passo de tempo.

Finalmente, na seção 5.4, é apresentado os clássicos casos de dinâmica em partículas com o intuito de validar as forças de gravidade, arrasto e sustentação isoladamente e, com isso, possibilitar uma a correção pontual no modelo quando necessário, além de permitir observar com maior precisão a influência da atuação que cada uma das força faz sobre a partícula.

Para casos com variáveis temporais, foi utilizado um critério de parada de 10^{-5} de variação de valores entre dois intervalos de tempo consecutivos. Desta maneira espera-se que o sistema já tenha entrado na situação de convergência e esteja próximo o suficiente de seus valores finais. Isto foi feito para poupar tempo de computação, para casos que possuem um limite de tempo elevado e convergem rapidamente, fazendo com que o código continuasse desnecessariamente.

A execução do código e a computação dos resultados foram realizados em um computador de uso pessoal com as seguintes especificações:

- Dell Latitude E6410 com processador Intel® Core™ i5 CPU M 520 2.40GHz com 4 núcleos e 4Gb de memória RAM. O sistema operacional ubuntu 16.04 LTS e compilador Python 3.5.

5.2 Validações de Problemas em Sólidos

5.2.1 Equação de Laplace com Condições de Contorno de Dirichlet

O problema de troca de calor em uma placa é um dos exemplos clássicos utilizados para estudar as equações de transmissão de calor em sólidos. O mais simples destes é uma barra unidimensional com condutividade térmica constante e sem geração de calor onde a temperatura é conhecida nas extremidades. Como a malha do código foi desenvolvida para solução de problemas bidimensionais, cria-se um problema bidimensional com condições de contorno equivalentes e extrai-se uma seção para que se possa comparar os resultados.

A equação de governo deste fenômeno é conhecida como a equação de Laplace (Eq. 5.4) para sólidos em estado permanente e é apresentada a seguir:

$$\nabla^2 T = 0 \quad (5.4)$$

onde T é a temperatura na placa e ∇^2 é o operador diferencial conhecido como laplaciano.

E a solução analítica do problema unidimensional associado é:

$$T(x) = \frac{T_L - T_0}{L}x + T_0 \quad (5.5)$$

onde L é o comprimento da barra, T_0 e T_L são, respectivamente, os valores da temperatura em $x = 0$ e $x = L$.

As condições de contorno e o domínio bidimensional utilizados na simulação são apresentados na Figura 3. A condição de fluxo de calor $\frac{\partial T}{\partial n}$ nulo significa que nenhuma condição é imposta no contorno.

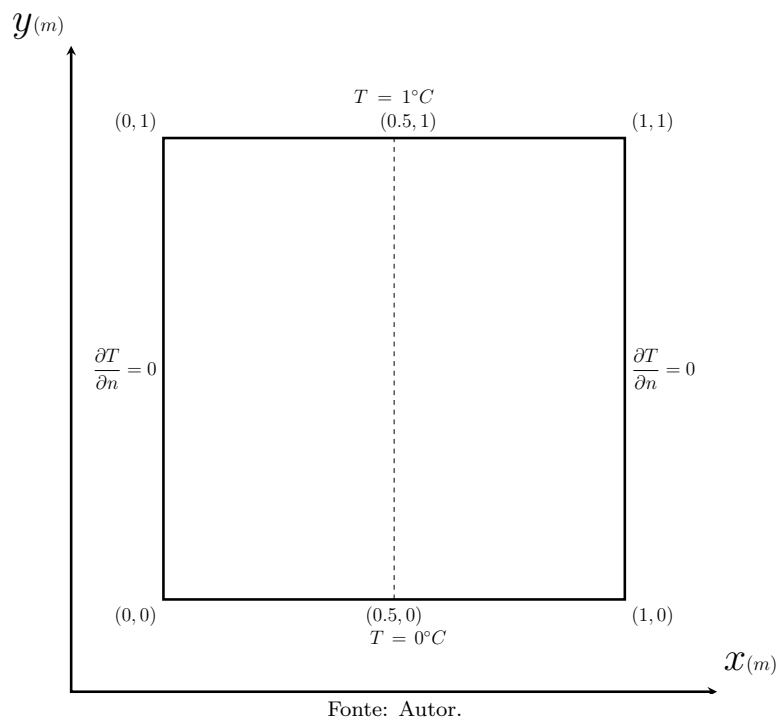


Figura 3: Condições de contorno da placa para o problema de Laplace 5.2.1.

O domínio foi discretizado utilizando uma malha triangular linear não estruturada com 768 elementos e 417 nós. A malha foi criada pelo o software GMSH como proposto por [9] e importada ao código numérico. A Figura 4 apresenta o campo de temperatura, onde os eixos x e y representam o domínio e o eixo z é a distribuição de temperatura, e que é possível observar que o campo de temperatura possui um perfil linear variando de 0 (cor azul) a 1 (cor vermelha).

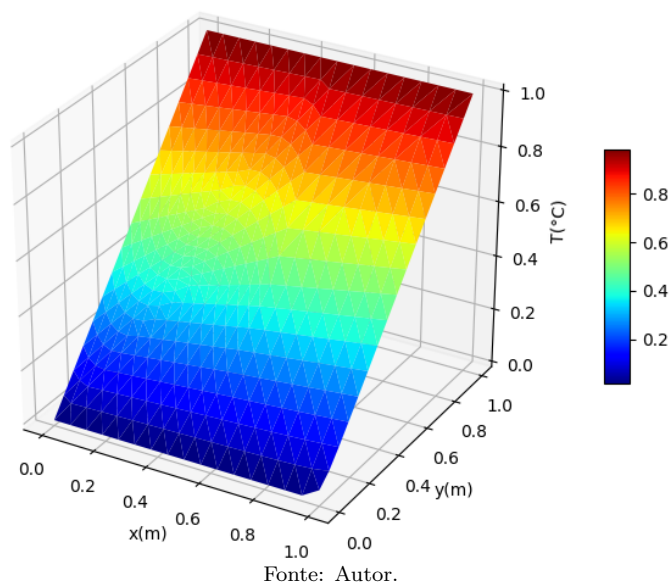
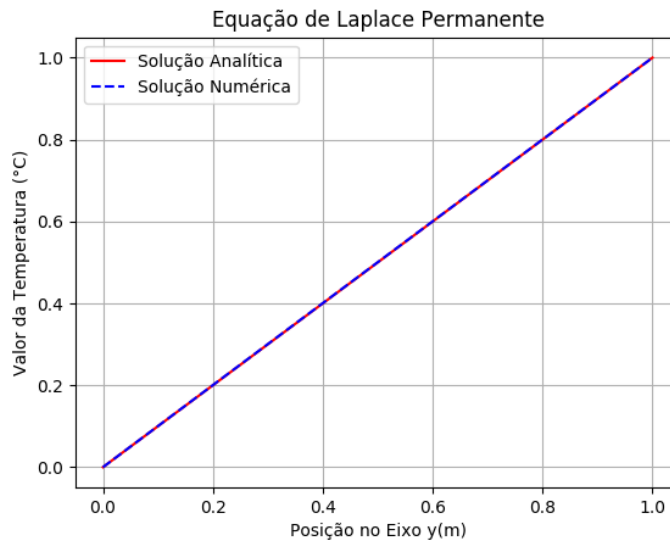


Figura 4: Distribuição de temperaturas na placa da solução permanente da equação de Laplace 5.2.1.

A comparação entre os resultados da solução analítica (Eq. 5.5) e a solução numérica, para a seção $x = 0.5\text{m}$, é apresentada na Figura 5, onde é possível observar que ambas possuem o mesmo perfil. Essa proximidade é quantificada pelo erro relativo médio que foi de 0.1136% e com desvio padrão de 0.0801%



Fonte: Autor.

Figura 5: Comparação de resultado das solução numérica e analítica do caso de transporte de temperatura em sólidos no regime permanente.

Ao solucionar o mesmo problema introduzindo o termo transiente na equação de governo 5.4, pode-se verificar a evolução de comportamento da temperatura ao longo do tempo. Dessa forma, a equação que representa este caso é:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + k \nabla^2 T = 0 \quad (5.6)$$

onde k é o coeficiente de condutividade térmica da placa e t é a variável temporal.

Porém, ao longo dos passos de tempo, a solução se aproxima de um problema permanente, portanto pode-se fazer a comparação dos resultados obtidos neste exemplo com os valores da solução analítica (Eq. 5.5), tomando-se que $t \rightarrow \infty$. As condições iniciais $t = 0s$ atribuídas aos nós sem condição de contorno foram de um valor inicial de $0^\circ C$. A Figura 6 apresenta a evolução do campo de temperaturas em função do tempo. É possível observar que a solução numérica converge para a solução analítica formando um perfil linear. O erro relativo médio

calculado para este caso foi de 0.1092% e com desvio padrão de 0.0801%.

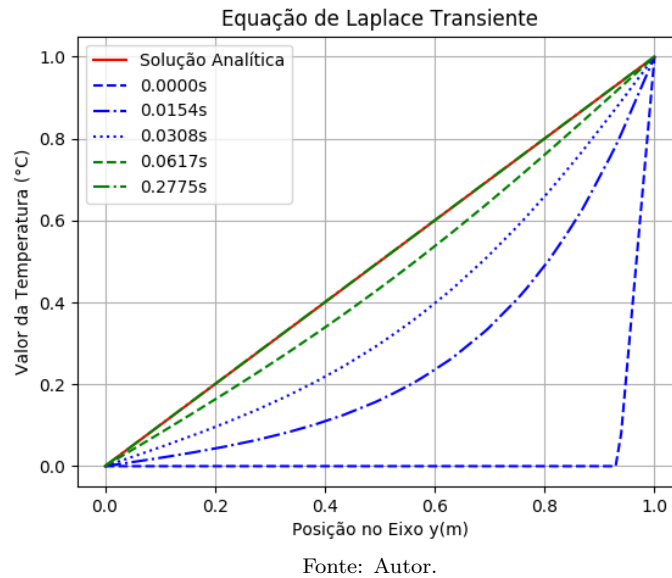


Figura 6: Comparação de resultado das soluções numéricas e analítica de transporte em sólidos no regime transiente.

5.2.2 Equação de Poisson com Condições de Contorno de Dirichlet

Neste problema busca-se estudar o comportamento de uma placa com geração de calor em seu domínio e temperaturas fixas nas laterais. Novamente, para permitir a comparação de resultados, é extraída uma seção da placa para observar os resultados como um problema unidimensional.

A equação que governa este caso é denominada equação de Poisson (Eq. 5.7), tomada para um problema permanente, ou seja sem variação no tempo.

$$-k\nabla^2 T = Q \quad (5.7)$$

onde Q é a geração de calor na placa.

A solução analítica para o caso de uma barra unidimensional é apresentada

embaixo:

$$T(x) = \frac{Q}{2k}(-x^2 + Lx) + \frac{T_L - T_0}{L}x + T_0 \quad (5.8)$$

As condições de contorno e o domínio bidimensional utilizados na simulação são apresentados na Figura 7. A geração de calor utilizada foi de $Q = 40W/m^3$ e a condutividade termica foi de $k = 5W/m^\circ C$.

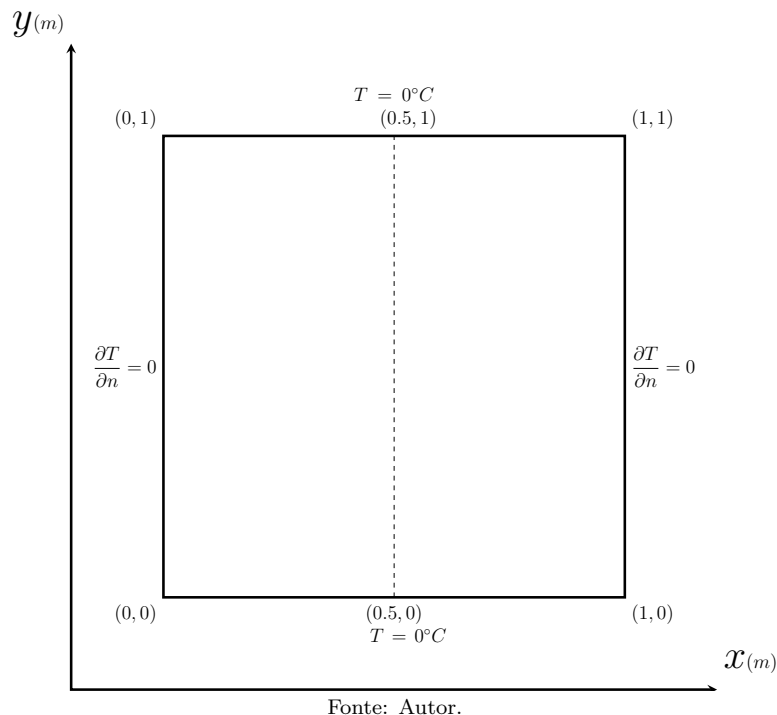


Figura 7: Condições de contorno da placa para o problema de Poisson 5.2.2.

Novamente, foi utilizada uma malha triangular linear não estruturada com 768 elementos e 417 nós. A Figura 8 apresenta o campo de temperatura, onde os eixos x e y representam o domínio e o eixo z é a distribuição de temperatura, onde é possível observar que o campo de temperatura possui um perfil parabólico variando de 0 (cor azul) a 1 (cor vermelha).

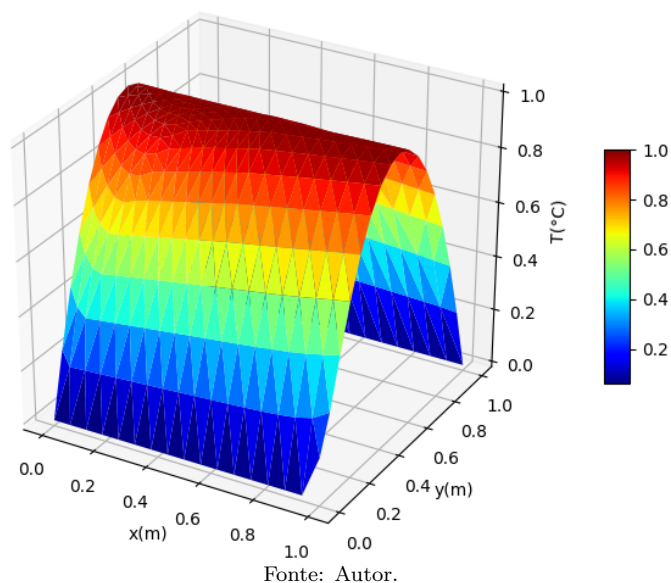
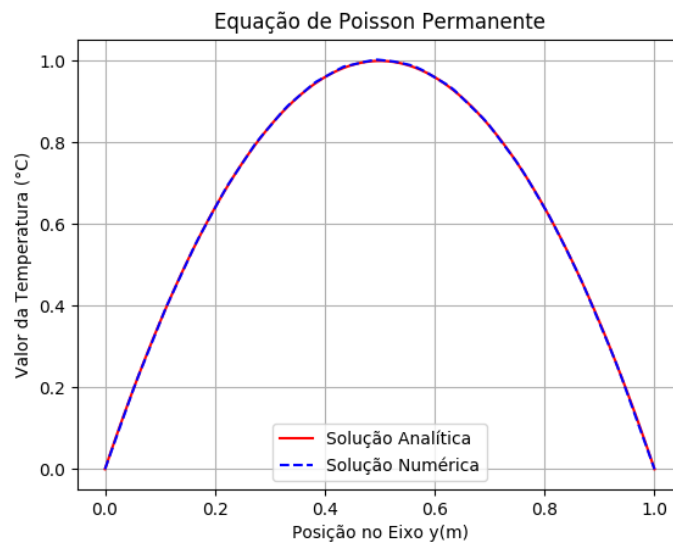


Figura 8: Distribuição de temperaturas na placa da solução do problema permanente de Poisson 5.2.2.

A comparação entre os resultados da solução analítica (Eq. 5.8) e a solução numérica, para a seção $x = 0.5\text{m}$, é apresentada na Figura 9, onde é possível observar que ambas possuem o mesmo perfil. Essa proximidade é quantificada pelo erro relativo médio que foi de 0.323% e com desvio padrão de 1.0101%.



Fonte: Autor.

Figura 9: Comparação de resultado das solução numérica e analítica do problema de transporte de temperatura em sólidos no regime permanente com geração de calor.

A seguir, é apresentado o resultado com termo transiente $\frac{\partial T}{\partial t}$ tendendo a um estado permanente. As condições iniciais $t = 0s$ atribuídas aos nós sem condição de contorno foram de um valor inicial de $0^{\circ}C$. A Figura 10 apresenta a evolução do campo de temperaturas em função do tempo. É possível observar que a solução numérica converge para a solução analítica formando um perfil parabólico. O erro relativo médio calculado para este caso foi de 0.325% e com desvio padrão de 1.0101%.

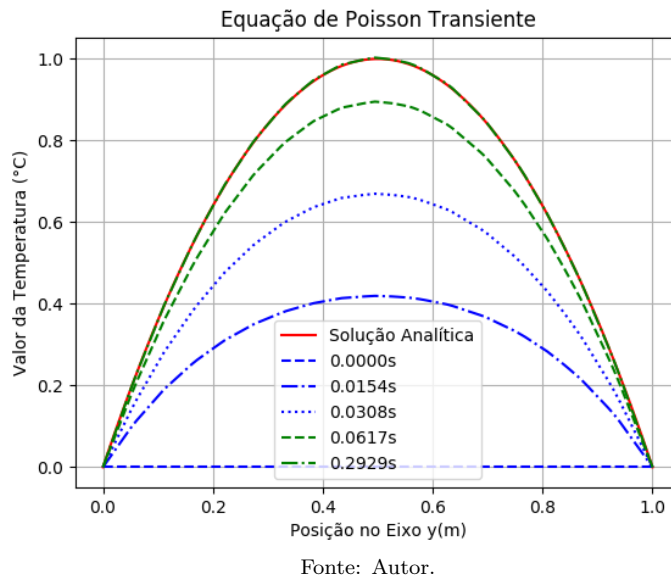


Figura 10: Comparação de resultado das soluções numéricas e analítica do problema de transporte de temperatura em sólidos no regime transiente com geração de calor.

5.2.3 Equação de Poisson com Condições de Contorno de Dirichlet e Neumann

Este caso foi escolhido para validar a solução de problemas com condições de contorno de Neumann. Trata-se de uma placa com temperatura fixa em uma das paredes e no lado oposto é definido um valor para o fluxo de calor presente. Toma-se uma seção da placa para observar os resultados e compará-los com um problema unidimensional de uma barra com as mesmas condições presentes.

A equação de governo é novamente a equação de Poisson (Eq. 5.7), e sua solução analítica para uma barra unidimensional é dada por:

$$T(x) = \frac{Q}{k} \left(\frac{-x^2}{2} + Lx \right) - \frac{q}{k}x + T_0 \quad (5.9)$$

onde q é o fluxo de calor na extremidade $x = L$.

As condições de contorno e o domínio bidimensional utilizados na simulação são apresentados na Figura 11. A geração de calor utilizada foi de $Q = -7W/m^3$, a condutividade termica foi de $k = 5W/m^\circ C$ e o fluxo de calor foi de $q = -5W/m^2$.

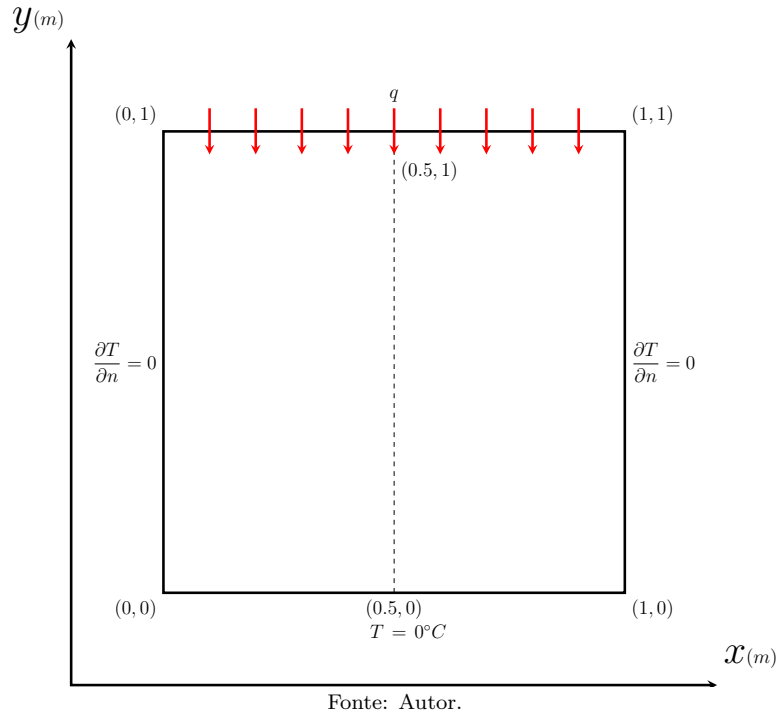


Figura 11: Condições de contorno da placa para o problema de Poisson 5.2.3.

Novamente, foi utilizada uma malha triangular linear não estruturada com 768 elementos e 417 nós. A Figura 12 apresenta o campo de temperatura, onde os eixos x e y representam o domínio e o eixo z é a distribuição de temperatura variando de 0 (cor azul) a 0.35 (vermelha).

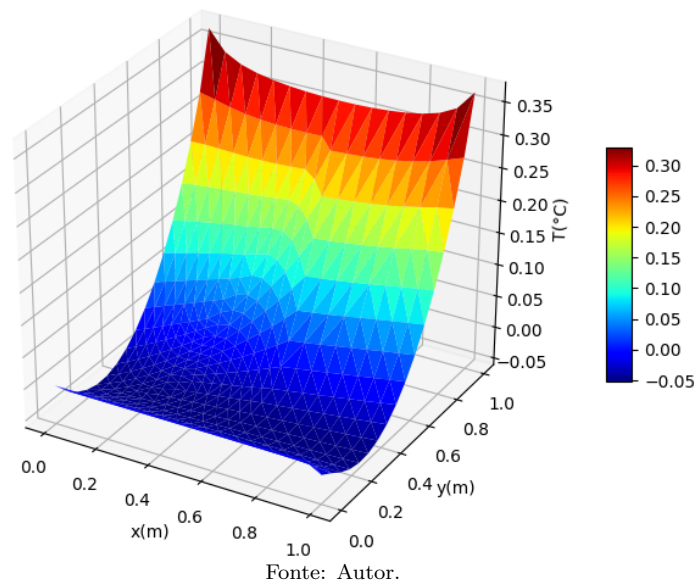


Figura 12: Distribuição de temperaturas na placa da solução do problema permanente de Poisson 5.2.3.

A comparação entre os resultados da solução analítica (Eq. 5.9) e a solução numérica, para a seção $x = 0.5m$, é apresentada na Figura 13, onde pode-se observar que ambas possuem o mesmo perfil. A semelhança entre elas é quantificada pelo erro relativo médio que foi de 0.427% e com desvio padrão de 0.8414%:

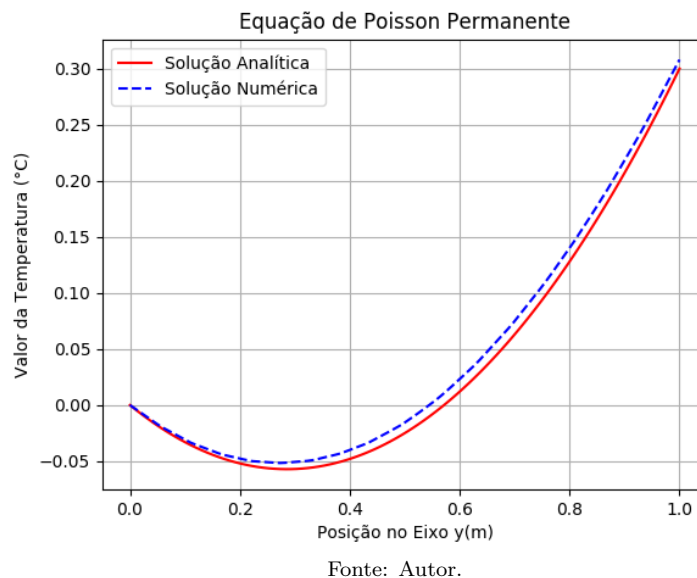


Figura 13: Comparação de resultado das solução numérica e analítica do problema de transporte de temperatura em sólidos no regime permanente com geração e fluxo de calor.

As condições iniciais $t = 0s$ atribuídas aos nós sem condição de contorno foram de um valor inicial de $0^{\circ}C$. A Figura 14 apresenta a evolução do campo de temperaturas em função do tempo. É possível observar que a solução numérica converge para a solução analítica. O erro relativo médio calculado para este caso foi de 0.31% e com desvio padrão de 0.9205%.

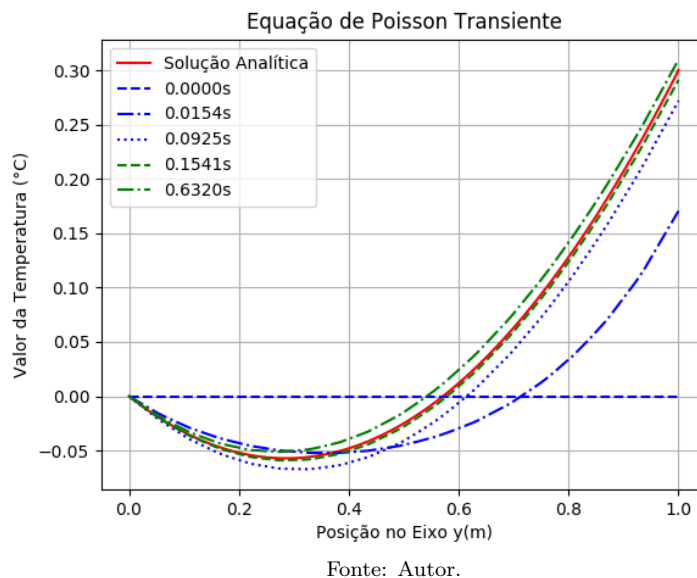


Figura 14: Comparação de resultado das soluções numéricas e analítica do problema de transporte de temperatura em sólidos no regime permanente com geração e fluxo de calor.

5.3 Validações de Problemas em Flúidos

5.3.1 Escoamento de Poiseuille

Este é um dos primeiros exemplos dados ao estudar-se a mecânica dos fluidos e a equação de Navier-Stokes (Eq. 2.29), pois trata-se de uma configuração geométrica muito simples. O escoamento de Poiseuille também é conhecido como escoamento entre placas paralelas, já que essa é exatamente a descrição de sua forma e as placas são tomadas como estacionárias em relação ao fluido.

O escoamento ocorre entre duas placas paralelas de comprimento infinito com uma distância constante entre elas. É tomado um fluido ideal, isto é, newtoniano, incompressível e em estado permanente com seu perfil plenamente desenvolvido. As condições de contorno são definidas para a função corrente e a velocidade. Para os valores iniciais nos nós sem condição de contorno foram arbitrados como

nulos.

O sistema de equações de governo deste escoamento é o sistema corrente-vorticidade 2.42, e a solução analítica do perfil de velocidades é dada por [1]:

$$v_x(y) = \frac{4U_{max}}{L^2}y(L-y) \quad (5.10)$$

onde v_x é velocidade do fluido na direção do eixo x , L é o comprimento das placas e U_{max} é a velocidade máxima do escoamento.

Para esta simulação foram usadas as condições de contorno e o domínio bidimensional apresentados na Figura 15. A velocidade máxima U_{max} é tomada em função da velocidade de entrada U na relação $U_{max} = 1.5U$. Foi escolhido um valor para o número de Reynolds(Eq. 2.46) de $Re = 1$ e um intervalo de tempo $dt = 0.1s$.

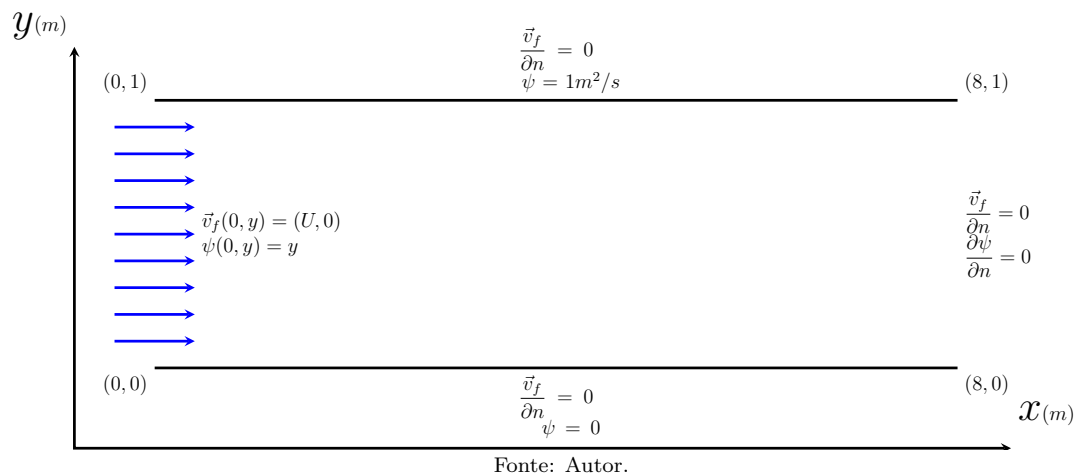
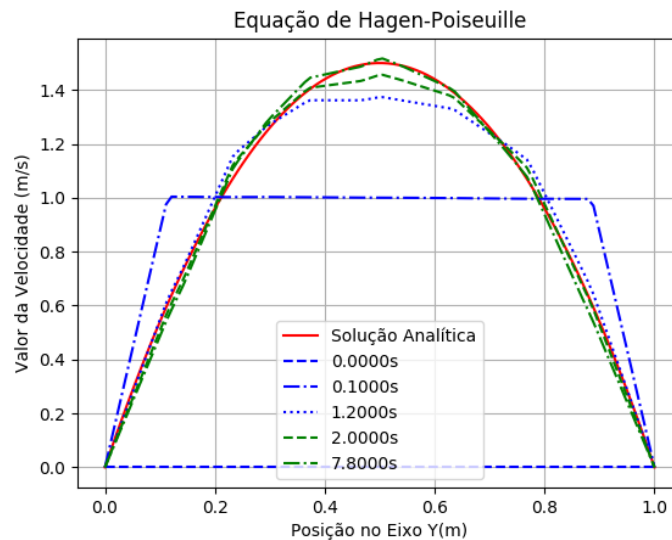


Figura 15: Condições de contorno de um escoamento entre placas paralelas de Poiseuille 5.3.1.

A Figura 16 apresenta a evolução do perfil de velocidades de uma seção tomada em $x = 0.75L = 6.0m$ em função do tempo. Foi utilizada uma malha triangular linear não estruturada com 4200 elementos e 781 nós. Nota-se que a solução numérica converge para a solução analítica ao se aproximar do estado

permanente. O erro relativo médio calculado para este caso foi de 4.587% e com desvio padrão de 5.3501%.



Fonte: Autor.

Figura 16: Comparação de resultado das soluções numéricas e analítica 5.10 do problema de corrente-vorticidade no regime permanente.

5.3.2 Escoamento de Couette

Similar ao escoamento de Poiseuille 5.3.1, entre duas placas paralelas de comprimento infinito separadas por uma distância constante. Porém, neste caso, as placas possuem uma velocidade relativa entre si, ou seja, estão em movimento. Novamente, utiliza-se a aproximação do escoamento para um fluido newtoniano, incompressível e em estado permanente com seu perfil plenamente desenvolvido. As condições de contorno são definidas para a função corrente e a velocidade, com os valores iniciais nos nós sem condição de contorno arbitrados como nulos.

Novamente trabalha-se com o sistema corrente-vorticidade 2.42 e a solução

analítica do perfil de velocidades é dada por [1]:

$$v_x(y) = \frac{U_{sup} - U_{inf}}{L}y + U_{inf} \quad (5.11)$$

onde U_{sup} e U_{inf} são as velocidades das placas superior e inferior, respectivamente.

Para esta simulação foram usadas as condições de contorno e o domínio bidimensional apresentados na Figura 17. Foram tomadas as velocidade superior como $U_{sup} = 1m/s$ e $U_{inf} = -1m/s$ para um escoamento com número de Reynolds de $Re = 1$ e um intervalo de tempo $dt = 1.0s$.

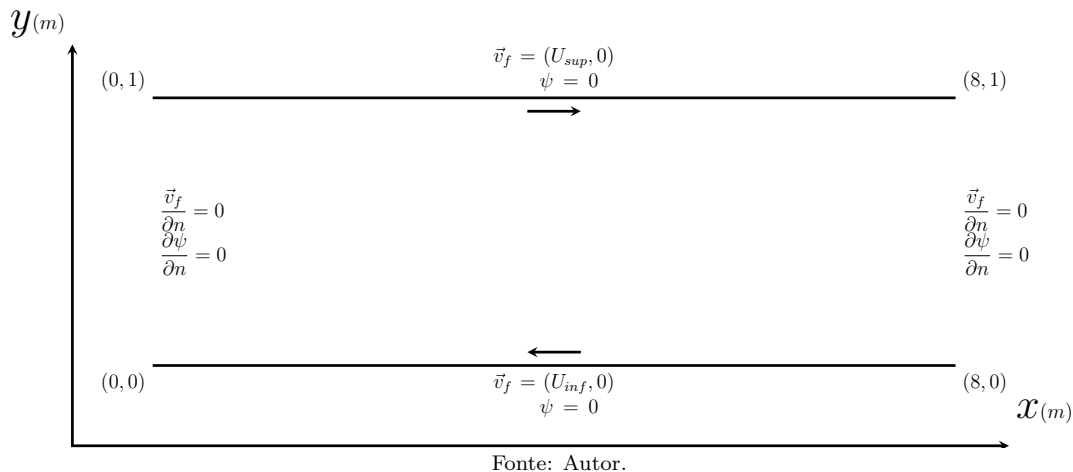


Figura 17: Condições de contorno de um escoamento entre placas paralelas de Couette 5.3.2.

A Figura 18 apresenta a evolução do perfil de velocidades de uma seção tomada em $x = 0.5L = 4.0m$ em função do tempo. Novamente utilizou-se uma malha triangular linear não estruturada com 4200 elementos e 781 nós. Pode-se observar que a solução numérica converge para a solução analítica ao se aproximar do estado permanente. O erro relativo médio calculado para este caso foi de 1.4251% e com desvio padrão de 27.934%.

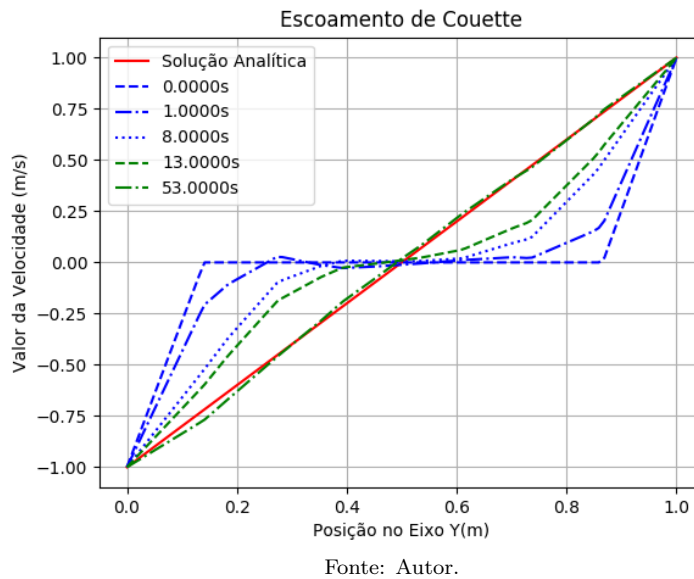


Figura 18: Comparação de resultado das soluções numéricas e analítica 5.11 do problema de corrente-vorticidade no regime permanente.

5.4 Validações de Problemas em Partículas

A simulação das forças é realizada sobre uma partícula isolada inserida em um malha com um escoamento com campo de velocidades constante em função da posição da partícula no eixo y , para facilitar os cálculos das soluções analíticas. O campo de velocidades é arbitrado e não calculado como anteriormente.

Para a simulação de cada força foi utilizada uma malha triangular linear não estruturada com 2304 elementos e 417 nós. Pode-se observar os parâmetros padrão, a menos que especificado o contrário, utilizados a seguir:

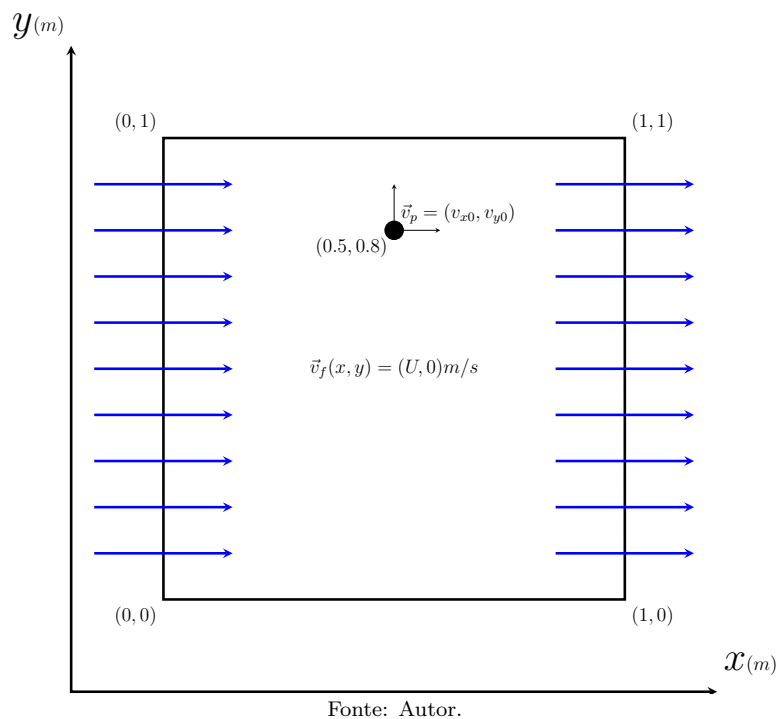


Figura 19: Condições de contorno de uma partícula isolada sob efeito de uma força.

A validação das forças é feita individualmente, para que se possa comparar os valores do movimento simulado da partícula com a curva da solução analítica esperada. Os parâmetros definidos para as simulações foram: uma partícula com diâmetro $d_p = 0.001m$, densidade $\rho_p = 30000Kg/m^3$, variação de tempo $dt = 1.5625e^{-6}s$, tempo total $t_{max} = 0.4s$, em um fluido com densidade $\rho_f = 1000Kg/m^3$ e viscosidade dinâmica $0.89e^{-3}Pa.s$.

5.4.1 Força Gravitacional

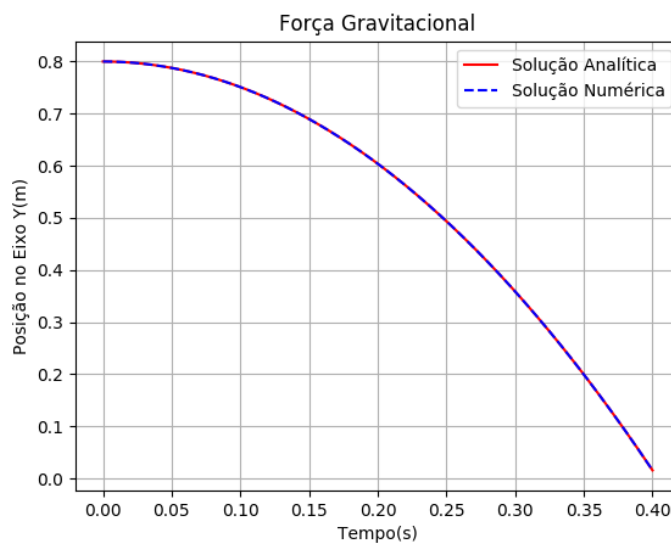
A força gravitacional é a primeira e mais simples implementação de uma força. A partícula é acelerada pela constante de aceleração gravitacional. A validação deste caso permite verificar a base da estrutura de movimentação de partículas do código.

Para o caso de uma partícula isolada sob efeito da força gravitacional, a solução analítica para a posição da partícula no eixo y é:

$$y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_{y0}t + p_{y0} \quad (5.12)$$

onde g é a aceleração da gravidade, tomada como $g = 9.80665m/s^2$, v_{y0} é a velocidade e p_{y0} a posição inicial da partícula no eixo y .

Para a força gravitacional, utilizou-se uma malha com as condições e posição inicial apresentadas na Figura 19. A velocidade inicial tomada foi $v_{y0} = 0$. Na Figura 20 pode-se observar a evolução da posição da partícula no eixo y em função do tempo. Foi utilizado um campo de velocidades com valor constante de $U = 2m/s$. O erro relativo médio calculado para este caso foi de $7.706e^{-4}\%$ e com desvio padrão de $1.753e^{-3}\%$.



Fonte: Autor.

Figura 20: Comparação de resultado da solução numérica e analítica 5.12 do percurso de uma partícula em queda livre.

5.4.2 Força de Arrasto

A força de arrasto é a principal fonte de movimentação da partícula. A partícula é movimentada pela força de cisalhamento do fluido que exerce atrito sobre sua superfície. Neste caso, a validação é feita para analisar o comportamento da força em relação as propriedades da partícula e avaliar a convergência em função do valor de dt .

A solução analítica para a posição da partícula sob efeito da força de arrasto no eixo x é:

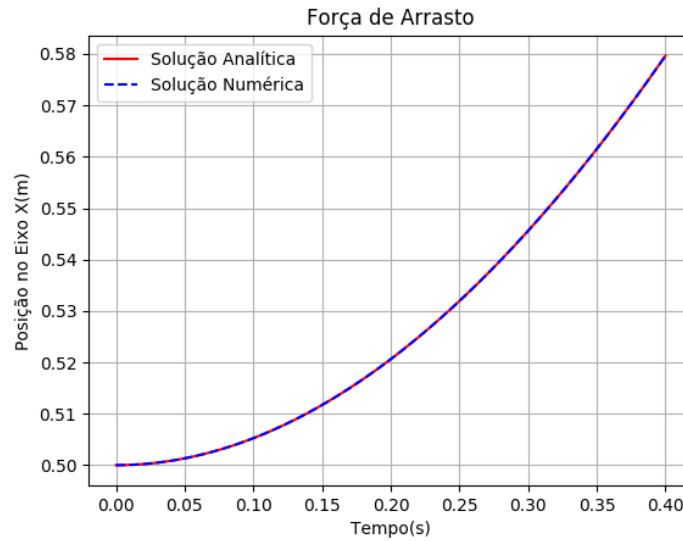
$$x(t) = \frac{m_p}{c_d}(U - v_{x0}) \left(1 - e^{-\frac{c_d}{m_p}t}\right) + v_{x0}t + p_{x0} \quad (5.13)$$

define-se c_d como:

$$c_d = 3\pi\mu_f d_p \quad (5.14)$$

onde m_p é a massa da partícula, μ_f é a viscosidade dinâmica do fluido, d_p é o diâmetro da partícula, v_{x0} é a velocidade e p_{x0} a posição inicial da partícula no eixo x .

Foi utilizada a malha padrão com as condições e posição inicial apresentadas na Figura 19, com velocidade inicial $v_{x0} = 0$. Demonstra-se na Figura 21 a evolução da posição da partícula no eixo x em função do tempo. Foi utilizado um campo de velocidades com valor constante de $U = 2m/s$. Pode-se observar que a partícula é acelerada até atingir a velocidade do fluido, como se era esperado. O erro relativo médio calculado para este caso foi de $3.083e^{-5}\%$ e com desvio padrão de $1.6723e^{-5}\%$.



Fonte: Autor.

Figura 21: Comparação de resultado da solução numérica e analítica 5.13 do percurso de uma partícula em movimento de arrasto em um escoamento.

5.4.3 Força de Sustentação

A força de sustentação é a força que permite que a partícula se mantenha elevada. Essa força afeta a partícula quando há uma variação entre as velocidades no topo e fundo da partícula, portanto ela só ocorre quando o campo de velocidades não for constante em relação ao eixo perpendicular ao movimento da partícula.

A força de sustentação possui a seguinte solução analítica para a posição da partícula no eixo y semelhante a força de arrasto (Eq. 5.15), porém com constantes diferentes:

$$y(t) = \frac{m_p}{c_l}(0 - v_{y0}) \left(1 - e^{-\frac{c_l}{m_p}t}\right) + v_{y0}t + p_{y0} \quad (5.15)$$

define-se c_l como:

$$c_l = 1.61\mu_f d_p \sqrt{Re_G} \quad (5.16)$$

onde Re_G é o número de Reynolds de cisalhamento (Eq. 2.52) ρ_f é a densidade do

fluido e $\frac{dv_x}{dy}$ é a variação da velocidade na partícula sobre o eixo perpendicular ao movimento.

Para este caso, foi preciso utilizar a malha padrão com condições diferentes do padrão, para que fosse possível observar os efeitos da força de sustentação com mais clareza. As condições utilizadas são:

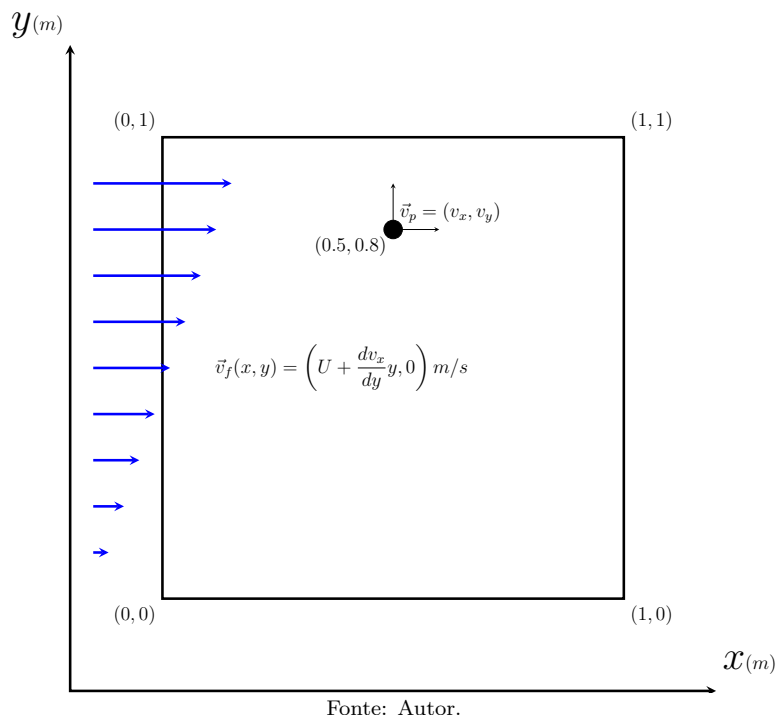
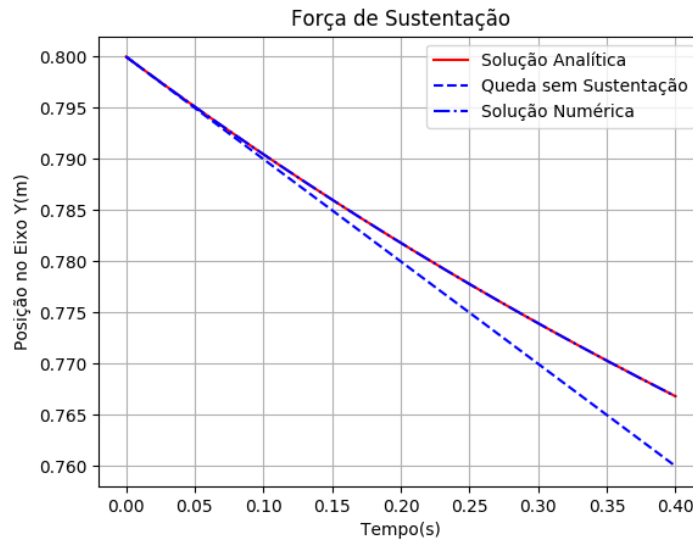


Figura 22: Condições de contorno de uma partícula isolada sob efeito da força de sustentação.

Demonstra-se na Figura 23 a evolução da posição da partícula no eixo x em função do tempo. Foi utilizado um valor base para o campo de velocidades de $U = 2m/s$, uma velocidade inicial $v_{y0} = -0.1m/s$, e um gradiente de velocidades no eixo y de $\frac{dv_x}{dy} = 100m/m.s$ para auxiliar a comparação. Também foi incluída uma curva que demonstra a trajetória da partícula sem o efeito da força de sustentação, para que se possa notar que a partícula é desacelerada e não acompanha esta curva. O erro relativo médio calculado para este caso foi de $1.9241e^{-6}\%$ e com

desvio padrão de $1.1167e^{-6}\%$.



Fonte: Autor.

Figura 23: Comparação de resultado da solução numérica e analítica 5.15 do percurso de uma partícula em movimento de sustentação em um escoamento.

5.4.4 Força de Massa Virtual (*Added Mass*)

A força de massa virtual é uma força de reação do fluido presente devido ao movimento da partícula presente. O valor dessa força está relacionado a massa de fluido que estaria se deslocando na posição da partícula.

Para encontrar-se a solução analítica da força de massa virtual que pudesse ser observada e comparada com os resultados das simulações, ou seja não sendo nula, foi preciso assumir um campo de velocidades que variasse no tempo. Para isso, define-se que a aceleração do campo de velocidades do escoamento é constante $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} = const$. Portanto, obtem-se a solução analítica da força de massa virtual para a posição da partícula no eixo x .

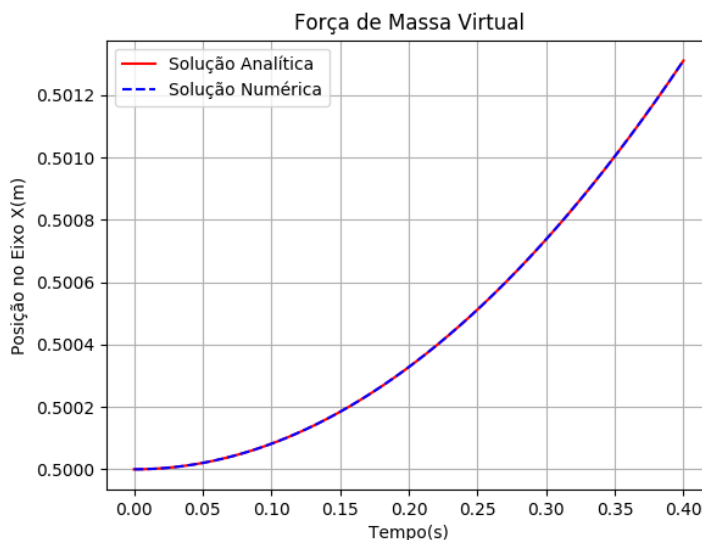
$$x(t) = \frac{a_x c_m}{2(c_m + m)} t^2 + v_{x0} t + p_{x0} \quad (5.17)$$

define-se c_m como:

$$c_m = \frac{1}{2} \rho_f V_p \quad (5.18)$$

onde a_x é a aceleração, ou variação da velocidade no tempo, do campo de velocidades do fluido no eixo x e V_p é o volume da partícula.

Novamente utilizou-se a malha padrão com condições e posição inicial apresentadas na Figura 19, com velocidade inicial $v_{x0} = 0$. Revela-se na Figura 24 a evolução da posição da partícula no eixo x em função do tempo. Foi utilizado um campo de velocidades que varia no tempo com valor constante, como explicado anteriormente, na forma de $U = 2m/s + a_x t$, onde $a_x = 1m/s^2$. Pode-se observar que a partícula é acelerada até atingir a velocidade do fluido, como se era esperado. O erro relativo médio calculado para este caso foi de $6.6574e^{-3}\%$ e com desvio padrão de $1.1362e^{-3}\%$.



Fonte: Autor.

Figura 24: Comparação de resultado da solução numérica e analítica 5.17 do percurso de uma partícula em movimento de aceleração em um escoamento.

CONCLUSÃO

Aqui entra sua conclusão!!

REFERÊNCIAS

- [1] PONTES, J. da R. M.; MANGIAVACCHI, N. *Fenômenos de Transferência*. [S.l.]: SBM, 2010.
- [2] CROWE, C. T. *Multiphase Flows with Droplets and Particles*. [S.l.]: CRC Press, 2011. ISBN 978-1-4398-4050-4, 978-1-4398-4051-1.
- [3] ANJOS, G. R. dos. *Hydrodynamics Field Solution of electrochemical Cells Through Finite Element Method*. Tese (Doutorado) — Federal University of Rio de Janeiro, Brazil.
- [4] LEWIS, R. W.; NITHIARASU, P.; SEETHARAMU, K. *Fundamentals Of The Finite Element Method For Heat And Fluid Flow*. [S.l.]: Wiley, 2004. ISBN 9780470847886, 0-470-84788-3, 0-470-84789-1.
- [5] ROSSUM, G. van. *Python Language Reference*. version 3.5. [S.l.], 1995—. Disponível em: <<https://www.python.org/>>.
- [6] WALT, S. van der; COLBERT, S. C.; VAROQUAUX, G. The numpy array: A structure for efficient numerical computation. *Computing in Science & Engineering*, AIP, 2011. Disponível em: <<https://www.numpy.org/>>.
- [7] JONES, E. et al. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. 2001—. Disponível em: <<https://www.scipy.org/>>.
- [8] HUNTER, J. D. Matplotlib: A 2d graphics environment. *Computing in Science & Engineering*, AIP, 2007. Disponível em: <<https://matplotlib.org/>>.

- [9] GEUZAINÉ, C.; REMACLE, J.-F. Gmsh: A 3-d finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, John Wiley and Sons, v. 79, 2009.
- [10] AHRENS, J.; GEVECI, B.; LAW, C. *ParaView: An End-User Tool for Large Data Visualization*. [S.l.]: Elsevier, 2005. ISBN 978-0123875822.