



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Faculdade de Engenharia

Lucas Carvalho de Sousa

**Simulação Numérica De Escoamentos Dispersos Utilizando
Método De Elementos Finitos**

Rio de Janeiro

2019

Lucas Carvalho de Sousa

**Simulação Numérica De Escoamentos Dispersos Utilizando Método De
Elementos Finitos**

Projeto Final apresentado a Faculdade de Engenharia da Universidade do Estado do Rio de Janeiro, para obtenção do grau de bacharel em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. D.Sc. Gustavo R. Anjos

Rio de Janeiro

2019

S237

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/B

Sousa, Lucas Carvalho de
Simulação Numérica De Escoamentos Dispersos Utilizando
Método De Elementos Finitos / Lucas Carvalho de Sousa. –
2019.
xx f.

Orientadores: Gustavo Rabello dos Santos;
Projeto Final (Bacharel em Engenharia Mecânica) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia.

Texto a ser informado pela biblioteca.

CDU 621:528.8

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial
deste projeto final, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Lucas Carvalho de Sousa

**Simulação Numérica De Escoamentos Dispersos Utilizando Método De
Elementos Finitos**

Projeto Final apresentado a Faculdade de Engenharia da Universidade do Estado do Rio de Janeiro, para obtenção do grau de bacharel em Engenharia Mecânica.

Aprovado em: DATA

Banca Examinadora:

Prof. Dr. José da Rocha Miranda Pontes
Departamento de Engenharia Mecânica - UERJ

Prof. Dr. Nome do Professor 2
Faculdade de Engenharia da UERJ

Prof. D.Sc. Gustavo R. Anjos - Orientador
Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ - COPPE

Prof. Dr. Nome do Professor 4
Instituto de Geociências da UFF

Rio de Janeiro

2019

DEDICATÓRIA

Aqui entra sua dedicatória.

AGRADECIMENTO

Aqui entra seu agradecimento.

É importante sempre lembrar do agradecimento à instituição que financiou sua bolsa, se for o caso...

Agradeço à FAPERJ pela bolsa de Mestrado concedida.

RESUMO

SOUSA, Lucas Carvalho de. *Simulação Numérica De Escoamentos Dispersos Utilizando Método De Elementos Finitos.* xx f. Projeto Final (Bacharelado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, 2019.

Aqui entra o seu resumo organizado em um parágrafo apenas.

Palavras-chave: Método de Elementos Finitos, Formulação Corrente-Vorticidade, Escoamento Multifásico, Escoamento Particulado.

ABSTRACT

Aqui entra seu resumo em inglês também organizado em apenas um parágrafo.

Keywords: Pattern Formation, Swift-Hohenberg Equation, Computacional Modeling, Word4.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 Erosão em um impelidor causada pela cavitação.....	20
Figura 2 Partícula em um escoamento com um gradiente de velocidade não nulo.....	32
Figura 3 Elemento triangular linear.	42
Figura 4 Condições de contorno da placa para o problema de Laplace 5.2.1. .	59
Figura 5 Distribuição de temperaturas na placa da solução permanente da equação de Laplace 5.2.1.....	60
Figura 6 Comparação de resultado das solução númerica e analítica do caso de transporte de temperatura em sólidos no regime permanente.	61
Figura 7 Comparação de resultado das soluções númericas e analítica de transporte em sólidos no regime transiente.	62
Figura 8 Condições de contorno da placa para o problema de Poisson 5.2.2. .	63
Figura 9 Distribuição de temperaturas na placa da solução do problema permanente de Poisson 5.2.2.	64
Figura 10 Comparação de resultado das solução númerica e analítica do problema de transporte de temperatura em sólidos no regime permanente com geração de calor.	65
Figura 11 Comparação de resultado das soluções númericas e analítica do problema de trasnporte de temperatura em sólidos no regime transiente com geração de calor.	66
Figura 12 Condições de contorno da placa para o problema de Poisson 5.2.3. .	67
Figura 13 Distribuição de temperaturas na placa da solução do problema permanente de Poisson 5.2.3.	68

Figura 14 Comparação de resultado das solução númerica e analítica do problema de transporte de temperatura em sólidos no regime permanente com geração e fluxo de calor.....	69
Figura 15 Comparação de resultado das soluções númericas e analítica do problema de transporte de temperatura em sólidos no regime permanente com geração e fluxo de calor.....	70
Figura 16 Condições de contorno de um escoamento entre placas paralelas de Poiseuille 5.3.1.....	71
Figura 17 Comparação de resultado das soluções númericas e analítica 5.10 do problema de corrente-vorticidade no regime permanente.....	72
Figura 18 Condições de contorno de um escoamento entre placas paralelas de Couette 5.3.2.	73
Figura 19 Comparação de resultado das soluções númericas e analítica 5.11 do problema de corrente-vorticidade no regime permanente.....	74
Figura 20 Condições de contorno de uma partícula isolada sob efeito de uma força.	75
Figura 21 Comparação de resultado da solução númerica e analítica 5.12 do percurso de uma partícula em queda livre.	77
Figura 22 Comparação de resultado da solução númerica e analítica 5.13 do percurso de uma partícula em movimento de arrasto em um escoamento.	79
Figura 23 Condições de contorno de uma partícula isolada sob efeito da força de sustentação.	81
Figura 24 Comparação de resultado da solução númerica e analítica 5.15 do percurso de uma partícula em movimento de sustentação em um escoamento.	82

Figura 25 Comparação de resultado da solução numérica e analítica 5.17 do percurso de uma partícula em movimento de aceleração em um escoamento.	83
Figura 26 Malha da simulação em um canal reto.	84
Figura 27 Malha da simulação em um canal com um obstáculo.	84
Figura 28 Malha da simulação em um canal com degrau.	85
Figura 29 Malha da simulação em um canal com restrição.	85
Figura 30 Malha da simulação em uma pá de um rotor.	86
Figura 31 Campo de velocidades de um escoamento em um canal reto.	87
Figura 32 Trajeto de partículas inseridas em um escoamento em um canal reto.	88
Figura 33 Campo de velocidades de um escoamento com obstáculo.	89
Figura 34 Trajeto de partículas inseridas em um escoamento com obstáculo.	89
Figura 35 Campo de velocidades de um escoamento com degrau.	90
Figura 36 Vetores de velocidades de um escoamento com degrau.	91
Figura 37 Trajeto de partículas inseridas em um escoamento com degrau.	91
Figura 38 Campo de velocidades de um escoamento com restrição.	92
Figura 39 Vetores de velocidades de um escoamento com restrição.	93
Figura 40 Trajeto de partículas inseridas em um escoamento com restrição.	93
Figura 41 Campo de velocidades de um escoamento em uma pá de um rotor.	95
Figura 42 Vetores de velocidades de um escoamento em uma pá de um rotor.	96
Figura 43 Trajeto de partículas de ouro inseridas em um escoamento em uma pá de um rotor.	96
Figura 44 Trajeto de partículas de ferro inseridas em um escoamento em uma pá de um rotor.	97
Figura 45 Trajeto de partículas de areia inseridas em um escoamento em uma pá de um rotor.	97

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

MDF	Método das Diferenças Finitas
CN	Crank-Nicolson

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	15
1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	17
1.1 Introdução	17
1.2 Método de Elementos Finitos	17
1.3 Escoamentos Multifásicos	17
1.4 Escoamentos Particulados em Turbomáquinas	19
2 EQUAÇÕES DE GOVERNO	21
2.1 Introdução	21
2.2 Conservação de Massa	21
2.3 Conservação de Quantidade de Movimento	23
2.4 Formulação Corrente-Vorticidade	27
2.5 Número de Reynolds	29
2.6 Forças Exercidas em Partículas	30
3 MODELAGEM NUMÉRICA	34
3.1 Introdução	34
3.2 Método de Elementos Finitos	34
3.2.1 Formulação Forte	34
3.2.2 Formulação Fraca	35
3.2.3 Discretização Espacial	38
3.2.4 Malha Computacional	41
3.3 Método de Diferenças Finitas	45
3.3.1 Discretização da Corrente-Vorticidade no Tempo	46
3.3.2 Discretização da Forças Aplicadas às Partículas	47

4	CÓDIGO NUMÉRICO	49
4.1	Introdução	49
4.2	Estrutura do Código.....	49
4.2.1	Importação da Malha	51
4.2.2	Definição das Condições de Contorno	51
4.2.3	Funções de Solução	52
4.2.4	Movimentação das Partículas	54
5	VALIDAÇÃO DO CÓDIGO NÚMERICO.....	56
5.1	Introdução	56
5.2	Validações de Problemas em Sólidos.....	58
5.2.1	Equação de Laplace com Condições de Contorno de Dirichlet	58
5.2.2	Equação de Poisson com Condições de Contorno de Dirichlet	62
5.2.3	Equação de Poisson com Condições de Contorno de Dirichlet e Neumann	66
5.3	Validações de Problemas em Fluídos	70
5.3.1	Escoamento de Poiseuille.....	70
5.3.2	Escoamento de Couette.....	72
5.4	Validações de Problemas em Partículas.....	74
5.4.1	Força Gravitacional	75
5.4.2	Força de Arrasto	77
5.4.3	Força de Sustentação	79
5.4.4	Força de Massa Virtual (<i>Added Mass</i>).....	82
6	RESULTADOS DE SIMULAÇÕES.....	84
6.1	Introdução	84
6.2	Simulação Em Um Canal Reto.....	87

6.3	Simulação Em Um Canal Com Obtáculo	88
6.4	Simulação Em Um Canal Com Degrau	90
6.5	Simulação Em Um Canal Com Restrição.....	92
6.6	Simulação Em Uma Pá de Rotor	94
	CONCLUSÃO	99
	REFERÊNCIAS.....	100

INTRODUÇÃO

Os problemas físicos de interesse da engenharia mecânica, muitas vezes, podem se apresentar de forma multidisciplinar e em razão disso também oferecem resultados que exigem ferramental e perspectivas oferecidos por outras disciplinas e áreas não contempladas em um curso usual de um engenheiro mecânico. Um desses problemas é o fenômeno de difusão acompanhado de reações químicas (homogêneas ou heterogêneas), em geral não lineares, que, em condições conhecidas, configuram processos de organização espacial de substâncias ou espécies. Por exemplo, reações químicas autocatalíticas ou outros tipos de interações em sistemas difusivos com mais de uma substâncias ou espécies, e.g., o caso particular de auto-organização dentro de uma classe mais ampla conhecida como estruturas dissipativas: padrões (estruturas) de turing.

As equações de reação-difusão são conhecidas por modelarem fenômenos químicos e biológicos, os quais, se originam da interação entre indivíduos, células ou espécies. A modelagem matemática desses mecanismos tem sido bem sucedida e vem se desenvolvendo em áreas como ecologia, embriologia (morfogênese), neurobiologia, **outros**, bem como cinéticas químicas no estado sólido. Este último tema é de interesse da ciência dos materiais computacional, uma vez que modelos matemáticos de problemas físicos tais como crescimento dendrítico (evolução cristalina), formação de precipitados em ligas metálicas e cerâmicas ou até mesmo transformação de fase por avanço de frente tornam-se possíveis.

Padrões espaço-temporais se apresentam em diversos âmbitos da natureza e sua descrição e compreensão ainda levantam questões importantes e básicas. Comparando com cerca de 30 anos atrás, grande progresso foi conquistado na modelagem de instabilidades, análise da dinâmica na vizinhança, formação e es-

tabilidade de padrões, análise quantitativa experimental e numérica de padrões, e assim por diante.

Modelos de Reação-Difusão podem evoluir para um padrão espacial heterogêneo e estável ao longo do tempo devido a pequenas perturbações das concentrações das substâncias químicas em relação a um estado de equilíbrio espacial homogêneo.

Posicionar histórico, experiências, resultados, modelos, referências, etc. As teorias matemáticas...

1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

1.1 Introdução

Nesta seção é apresentada a literatura utilizada, analizando-se as partes pertinentes ao trabalho realizado. Os principais tópicos de estudo foram sobre os temas de Método de Elementos Finitos, Escoamentos Multifásicos e Escoamentos Particulados em Turbomáquinas.

1.2 Método de Elementos Finitos

A representação matemática de fenômenos físicos é feita por equações, para certos casos esta representação pode ser feita por uma equação linear simples, em outros casos ela é feita por equações diferenciais.

Infelizmente, nem todas estas equações possuem soluções analíticas, isto é, soluções contínuas em formas de equações. Nestes casos, uma forma de encontrar uma solução que represente bem as observações reais realizadas é a solução numérica. A solução numérica é uma aproximação do resultado real feito solucionando o problema em trechos discretos, de forma que quanto menores forem estes trechos maior será a precisão do resultado.

Os métodos utilizados neste trabalho são conhecidos como: Método das Diferenças Finitas (**MDF**) e Método dos Elementos Finitos (**MEF**).

1.3 Escoamentos Multifásicos

Escoamentos multifásicos são utilizados largamente na área da engenharia para uma diversidade de aplicações. Estes ocorrem quando há o transporte de mais de uma substância em fases não miscigenadas. Estas fases podem estar ou

não no mesmo estado, subdividindo os tipos de escoamento multifásico no tipo de interação entre as fases, líquido-líquido, gás-líquido e sólido-líquido.

Dentro da engenharia mecânica pode-se verificar a grande importância destes escoamentos em casos como a extração de petróleo, onde é injetado um fluido e é captada uma mistura deste com o óleo bruto, e em trocadores de calor que possuem interação entre os fluidos.

Para os escoamentos particulados, sólido-líquido ou sólido-gás com pequenos sólidos chamados de partículas, pode-se notar sua importância até mesmo no transporte de dejetos, na área de saneamento. Alguns exemplos na seção de mecânica incluem o transporte de vapor com condensado, formação de bolhas em bombas e sólidos precipitados.

Um dos primeiros trabalhos sobre este tipo de escoamento foi Baker et al. (1965) [1], sobre o comportamento de escoamentos multifásicos em transportes verticais. Estes usados bastante em trocadores de calor, como forma de melhorar sua eficiência.

Elghobashi et al. (1991) [2] estuda o comportamento de escoamentos particulados demonstrando o efeito da turbulência na simulação de escoamentos multifásicos.

Como apresentado por Balachandar et al. (2010) [3], os valores da fração de volume ocupada pela fase dispersa e a razão entre a massa da fase dispersa e a massa da fase líquida servem como indicadores do nível de interação entre as fases. Para valores muito pequenos, o efeito dominante é do escoamento, portanto neste caso pode-se levar em conta apenas os efeitos do fluido sobre as partículas, chamado de *one-way flow*. Para casos com valores maiores, as partículas tomam um papel mais significativo no escoamento e é preciso fazer uma ligação recíproca entre os mesmos. Portanto, recalcula-se o escoamento levando em conta os efeitos das partículas no fluido, conhecido como de *two-way flow*. E, finalmente, quando estes valores forem mais elevados a fase particulada toma um papel importante no

comportamento e torna-se necessário considerar até os efeitos de outras partículas sobre cada uma delas, como colisão, aglomeração e quebra, denominado por Elghobashi et al. (1994) [4] de *four-way flow*.

Para a modelagem das forças atuando sobre cada partícula no escoamento foi utilizada a equação **Basset–Boussinesq–Oseen** (BBO), apresentada por Shao-Lee Soo et al. (1999) [5]. Estas equação é subdivida em várias forças atuantes, como a gravidade, arrasto, massa virtual, entre outras. Estas equações possuem uma restrição para sua validade, podendo apenas serem aplicadas para casos com baixo número de Reynolds.

1.4 Escoamentos Particulados em Turbomáquinas

Dentro do ciclo de vida de uma turbomáquina, pode-se esperar um certo desgaste devido a pequenas partículas que se chocam contra as paredes durante o movimento do rotor. Este desgaste está ligado as propriedades do escoamento assim como das partículas.

Este efeito está presente até em turbinas de aeronaves, como estudado por Hussein et al. (1973) [6]. Este tipo de escoamento sólido-gás é verificado em locais com altos níveis de poluição. Pode-se encontrar pequenas partículas sólidas presentes no ar ingerido por turbinas industriais e de aeronaves. A sua presença causa um desgaste acelerado nas regiões radiais da turbina, como verificado também por Tabakoff et al. (1986) [7], que apresentou as regiões de maior colisão das partículas. Estes trabalhos lidam diretamente com os efeitos da colisão das partículas, utilizando modelos que representam o comportamento delas após o choque.

Entrando na área de sólido-líquido, Uzol et al. (2002) [8] fez um estudo mostranto o escoamento de uma turbomáquina utilizando partículas inseridas e um velocímetro de imagem para acompanhar seu trajeto. Este trabalho não estuda o especificamente um escoamento particulado porém o utiliza como ferramenta para

visualizar seu comportamento.

Em Ghenaiet et al. (2005) [9] é estudado com mais profundidade os efeitos dos escoamentos particulados em turbomáquinas com líquidos. Neste caso, é estudado os efeitos da degradação causada por partículas de areia injeridas pelo escoamento na performance de uma turbomáquina axial. Foi criado um modelo preditivo e demonstrada uma correlação entre o tamanho das partículas e a velocidade da degradação causada.

Porém a causa mais comum de erosão em impelidores de turbomáquinas trabalhando com líquidos é a cavitação. A cavitação é a formação de bolhas de ar devido à uma queda local na pressão que logo após serem geradas implodem, gerando ondas de vibração e podendo danificar locais próximos. A Figura 1 mostra os efeitos do desgaste causado pelo efeito da cavitação em uma bomba.



Fonte: John Anspach Consulting [10].

Figura 1: Erosão em um impelidor causada pela cavitação.

Blake et al. (1987) [?] estudou o comportamento da cavitação tomando o ponto de vista das bolhas criadas como partículas no escoamento. Através desta interpretação, pode-se realizar simulações dos efeitos da cavitação com modelos de escoamentos particulados.

2 EQUAÇÕES DE GOVERNO

2.1 Introdução

Este trabalho apresenta a modelagem de fluidos e partículas em um sistema de escoamento multifásico, portanto é preciso definir o que é um escoamento e quais as suas restrições para este trabalho. Um escoamento é o movimento das moléculas de um fluido em conjunto. As moléculas são tomadas como elementos infinitesimais, porém tratados de forma que não haja espaços vazios entre elas. Isto permite que as propriedades do fluido sejam tratadas pontualmente, podendo variar por exemplo sua densidade ou velocidade de nó a nó. Pode-se então modelar o comportamento destes escoamentos seguindo as equações de conservação:

- Conservação de Massa
- Conservação de Quantidade de Movimento

2.2 Conservação de Massa

O princípio de conservação de massa sem geração descreve que, dentro de um volume de controle, a soma da **taxa de acúmulo de massa dentro do volume com o fluxo de massa que atravessa a fronteira do volume** é nula como demonstrado por Pontes e Norberto (2010) [11].

O acúmulo de massa dentro do volume de controle é definido como:

$$\int_{V_c} \frac{\partial}{\partial t} dm = \int_{V_c} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_f dV_c) \quad (2.1)$$

$$m = \rho_f V_c \quad (2.2)$$

onde V_c é o volume de controle, dm é o elemento infinitesimal de massa e ρ_f é a

massa específica do fluido.

Simplificando a equação de acúmulo de massa (Eq. 2.1), tomada para um volume de controle permanente, que não varia no tempo, tem-se:

$$\int_{V_c} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_f dV_c) = \int_{V_c} \frac{\partial \rho_f}{\partial t} dV_c + \int_{V_c} \rho_f \frac{\partial dV_c}{\partial t} = \int_{V_c} \frac{\partial \rho_f}{\partial t} dV_c \quad (2.3)$$

E o fluxo de massa que atravessa a fronteira é retratado como:

$$\oint_S \rho_f \vec{v}_f \cdot \vec{n} dA \quad (2.4)$$

onde S é a curva de contorno da fronteira do volume de controle, \vec{v}_f é o campo de velocidades do fluido, dA é o elemento infinitesimal de área da superfície de contorno do volume de controle e \vec{n} é um vetor normal unitário orientado para fora do contorno S .

A conservação de massa é então representada como:

$$\int_{V_c} \frac{\partial \rho_f}{\partial t} dV_c + \oint_S \rho_f \vec{v}_f \cdot \vec{n} dA = 0 \quad (2.5)$$

Pode-se rescrever a equação de conservação de massa aplicando-se o *Teorema de Gauss*, apresentado por Pontes e Norberto (2010) [11], na integral de superfície:

$$\int_{V_c} \frac{\partial \rho_f}{\partial t} dV_c + \int_{V_c} \vec{\nabla} \cdot (\rho_f \vec{v}_f) dV_c = \int_{V_c} \left(\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_f \vec{v}_f) \right) dV_c = 0 \quad (2.6)$$

obtendo-se a equação integral da conservação de massa, onde $\vec{\nabla}$ é o operador diferencial gradiente de componentes $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial i}, \frac{\partial}{\partial j}, \frac{\partial}{\partial k} \right) ..$

Ao considerar a conservação do ponto de vista pontual, pode-se remover o

termo integral e escrever a forma diferencial da conservação de massa:

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_f \vec{v}_f) = 0 \quad (2.7)$$

Esta equação é denominada *Equação da Continuidade*, e pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \vec{v}_f \cdot \vec{\nabla} \rho_f + \rho_f \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_f = 0 \quad (2.8)$$

Tomando-se algumas hipóteses, é possível simplificar mais a equação. Para um fluido incompressível, com massa específica invariante na posição e no tempo, a equação da continuidade pode ser escrita como:

$$\rho_f \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_f = 0 \quad (2.9)$$

Como a massa específica do fluido não pode ser nula, tem-se:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_f = 0 \quad (2.10)$$

tomada para um **fluido incompressível**.

2.3 Conservação de Quantidade de Movimento

A conservação de quantidade de movimento é similar a conservação de massa, porém é tomada como um termo vetorial. Para o caso deste trabalho, é utilizada a versão linear da conservação de quantidade de movimento. Portanto, tem-se que a conservação da quantidade de movimento determina que a **taxa de acúmulo de quantidade de movimento linear dentro do volume de controle** mais o **fluxo de quantidade de movimento linear que atravessa a fronteira do volume de controle** é igual a **soma das forças aplicadas à**

superfície da fronteira do volume de controle e as forças do volume.

A definição da taxa de acúmulo de quantidade de movimento linear dentro do volume de controle é:

$$\int_{V_c} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_f \vec{v}_f) dV_c \quad (2.11)$$

E o fluxo de quantidade de movimento que atravessa a fronteira é retratado como:

$$\oint_S \rho_f \vec{v}_f \vec{v}_f \cdot \vec{n} dA \quad (2.12)$$

As forças aplicadas à superfície da fronteira do volume de controle é:

$$\oint_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n} dA \quad (2.13)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor de tensões.

E as forças de volume são, tomada apenas a força gravitacional:

$$\int_{V_c} \rho_f \vec{g} dV_c \quad (2.14)$$

onde \vec{g} é a aceleração gravitacional presente.

Montando-se a equação, a conservação de quantidade de movimento é representada como:

$$\int_{V_c} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_f \vec{v}_f) dV_c + \oint_S \rho_f \vec{v}_f \vec{v}_f \cdot \vec{n} dA = \oint_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n} dA + \int_{V_c} \rho_f \vec{g} dV_c \quad (2.15)$$

Novamente, aplica-se o *Teorema de Gauss* nas integrais de superfície e extrai-se a forma integral da equação da conservação de quantidade de movimento:

$$\int_{V_c} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_f \vec{v}_f) dV_c + \int_{V_c} \vec{\nabla} \cdot (\rho_f \vec{v}_f \vec{v}_f) dV_c = \int_{V_c} \vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} dV_c + \int_{V_c} \rho_f \vec{g} dV_c \quad (2.16)$$

Simplificando:

$$\int_{V_c} \left(\frac{\partial}{\partial t} (\rho_f \vec{v}_f) + \vec{\nabla} \cdot (\rho_f \vec{v}_f \cdot \vec{v}_f) - \vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \rho_f \vec{g} \right) = 0 \quad (2.17)$$

Novamente, considerando-se a conservação do ponto de vista pontual, remove-se o termo integral para escrever a forma diferencial da conservação de quantidade de movimento:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_f \vec{v}_f) + \vec{\nabla} \cdot (\rho_f \vec{v}_f \cdot \vec{v}_f) = \vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho_f \vec{g} \quad (2.18)$$

Continuando a desenvolver a equação:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_f \vec{v}_f) + \vec{\nabla} \cdot (\rho_f \vec{v}_f \cdot \vec{v}_f) = \rho_f \frac{\partial \vec{v}_f}{\partial t} + \vec{v}_f \frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \rho_f \vec{v}_f \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_f + \vec{v}_f \cdot \vec{\nabla} \cdot (\rho_f \vec{v}_f) \quad (2.19)$$

$$\rho_f \left(\frac{\partial \vec{v}_f}{\partial t} + \vec{v}_f \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_f \right) + \vec{v}_f \left(\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_f \vec{v}_f) \right) \quad (2.20)$$

Novamente, é tomada a hipótese de um fluido incompressível. Portanto, a equação pode ser simplificada para ser escrita como:

$$\rho_f \left(\frac{\partial \vec{v}_f}{\partial t} + \vec{v}_f \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_f \right) = \vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho_f \vec{g} \quad (2.21)$$

Reescrevendo o tensor de tensões como uma soma de dois tensores, e o substituindo na equação, tem-se:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \quad (2.22)$$

$$\rho_f \left(\frac{\partial \vec{v}_f}{\partial t} + \vec{v}_f \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_f \right) = -\vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho_f \vec{g} \quad (2.23)$$

onde p é o campo de pressões no fluido, \mathbf{I} é a matriz de indentidade e $\boldsymbol{\tau}$ é o tensor de tensões viscosas.

Novamente é necessário fazer uma hipótese para este escoamento, para que

seja possível definir as forças atuantes no fluido. O tensor de tensões viscosas $\boldsymbol{\tau}$ está relacionado as propriedades do fluido, podendo ser definido matematicamente para um fluido homogêneo, isotrópico e newtoniano, como:

$$\boldsymbol{\tau} = \mu_f \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_f + (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_f)^T \right) \quad (2.24)$$

onde μ_f é a viscosidade dinâmica do fluido.

Substituindo a definição de $\boldsymbol{\tau}$ na Eq. 2.23, obtem-se:

$$\rho_f \left(\frac{\partial \vec{v}_f}{\partial t} + \vec{v}_f \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_f \right) = -\vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \left(\mu_f \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_f + (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_f)^T \right) \right) + \rho_f \vec{g} \quad (2.25)$$

Assumindo-se que a viscosidade dinâmica é constante para todo o fluido:

$$\rho_f \left(\frac{\partial \vec{v}_f}{\partial t} + \vec{v}_f \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_f \right) = -\vec{\nabla} p + \mu_f \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_f + (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_f)^T \right) + \rho_f \vec{g} \quad (2.26)$$

$$\rho_f \left(\frac{\partial \vec{v}_f}{\partial t} + \vec{v}_f \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_f \right) = -\vec{\nabla} p + \mu_f \left(\nabla^2 \vec{v}_f + \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_f)^T \right) + \rho_f \vec{g} \quad (2.27)$$

Utilizando o que foi obtido na Equação de Continuidade Eq. 2.10 pode-se substituir na equação Eq. 2.27:

$$\rho_f \left(\frac{\partial \vec{v}_f}{\partial t} + \vec{v}_f \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_f \right) = -\vec{\nabla} p + \mu_f \nabla^2 \vec{v}_f + \rho_f \vec{g} \quad (2.28)$$

Dividindo-se todos os termos pela massa específica pode-se reescrever a equação Eq. 2.28, obtem-se então a forma simplificada da *Equação de Navier-Stokes* para fluidos neutonianos incompressíveis e com viscosidade constante:

$$\frac{\partial \vec{v}_f}{\partial t} + \vec{v}_f \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_f = -\frac{1}{\rho_f} \vec{\nabla} p + \frac{\mu_f}{\rho_f} \nabla^2 \vec{v}_f + \vec{g} \quad (2.29)$$

2.4 Formulação Corrente-Vorticidade

A formulação de corrente-vorticidade é um sistema de equações que provê um método alternativo de se calcular as propriedades de um escoamento sem solucionar diretamente a equação de Navier-Stokes (Eq. 2.29). Isto permite simplificar a solução do problema, pois a Equação de Navier-Stokes possui um forte acoplamento entre o campo de pressões e o campo de velocidades.

Para isso, é utilizada a seguinte identidade vetorial:

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \vec{\nabla} \frac{v^2}{2} - \vec{v} \times \vec{\nabla} \times \vec{v} \quad (2.30)$$

Substituindo na Eq. 2.29:

$$\frac{\partial \vec{v}_f}{\partial t} + \vec{\nabla} \frac{v_f^2}{2} - \vec{v}_f \times \vec{\nabla} \times \vec{v}_f = -\frac{1}{\rho_f} \vec{\nabla} p + \frac{\mu_f}{\rho_f} \nabla^2 \vec{v}_f + \vec{g} \quad (2.31)$$

Em seguida, aplica-se o operador rotacional nos dois lados da equação:

$$\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{v}_f}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \frac{v_f^2}{2} - \vec{\nabla} \times \vec{v}_f \times \vec{\nabla} \times \vec{v}_f = -\vec{\nabla} \times \frac{1}{\rho_f} \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \times \frac{\mu_f}{\rho_f} \nabla^2 \vec{v}_f + \vec{\nabla} \times \vec{g} \quad (2.32)$$

Simplifica-se então a equação, pois os termos que possuem o operador gradiente são anulados, pois o rotacional do gradiente de um escalar é zero. O termo gravitacional também é anulado já que a derivada da constante \vec{g} é zero. Fica-se com a seguinte equação:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{v}_f) - \vec{\nabla} \times \vec{v}_f \times \vec{\nabla} \times \vec{v}_f = \frac{\mu_f}{\rho_f} \nabla^2 (\vec{\nabla} \times \vec{v}_f) \quad (2.33)$$

Define-se o vetor $\vec{\omega}$ como *vorticidade*, onde $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v}_f$. Substitui-se na

equação:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} - \vec{\nabla} \times \vec{v}_f \times \vec{\omega} = \frac{\mu_f}{\rho_f} \nabla^2 \vec{\omega} \quad (2.34)$$

Rearranjando-se as operações vetoriais, tem-se:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{v}_f \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} - \vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_f = \frac{\mu_f}{\rho_f} \nabla^2 \vec{\omega} \quad (2.35)$$

Como a vorticidade é perpendicular ao vetor velocidade, para escoamentos bidimensionais pode-se anular o produto $\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_f$ como demonstrado por Pontes e Norberto (2010) [11]. Então obtem-se a *Equação da Vorticidade* para escoamentos de fluidos newtonianos incompressíveis:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{v}_f \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} = \frac{\mu_f}{\rho_f} \nabla^2 \vec{\omega} \quad (2.36)$$

Para escoamentos permanentes bidimensionais de fluidos incompressíveis, a velocidade é calculada pela vazão volumétrica. Portanto, a velocidade pode ser substituída por um escalar ψ , conhecido como *função corrente*. A relação entre a função corrente e o campo de velocidades do fluido é obtida através da manipulação da equação da continuidade (Eq. 2.8), dada como:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (2.37)$$

onde v_x é a componente do campo de velocidades do fluido no eixo x e v_y é a componente do campo de velocidades do fluido no eixo y .

E a relação entre elas é apresentada em seguida:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (2.38)$$

$$v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.39)$$

Enquanto a relação entre a função corrente e a vorticidade é:

$$(\vec{\nabla} \times \vec{v}_f)_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (2.40)$$

Substituindo os termos de velocidade pelas equações Eq. 2.38 e Eq. 2.39:

$$\omega_z = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (2.41)$$

$$\omega_z = -\nabla^2 \psi \quad (2.42)$$

Então o sistema de corrente-vorticidade é apresentado como:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{v}_f \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} = \frac{\mu_f}{\rho_f} \nabla^2 \vec{\omega} \quad (2.43)$$

$$\nabla^2 \psi = -\omega_z \quad (2.44)$$

$$\vec{v}_f = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \quad (2.45)$$

2.5 Número de Reynolds

Para analisar as características de escoamentos com diversas variáveis, utiliza-se Re , uma constante adimensional conhecida como **Número de Reynolds**.

O número de Reynolds permite reconhecer rapidamente as qualidades de um escoamento apenas por seu valor. Ele estabelece uma relação entre as forças viscósas e inerciais de um fluido. Pode-se delcarar então qual força possui maior componente no comportamento do escoamento.

O número de Reynolds de um escoamento é calculado por:

$$Re = \frac{\rho_f |\vec{v}_f|_{max} D}{\mu_f} \quad (2.46)$$

onde v_{fmax} é a maior velocidade do campo de velocidades do fluido, e D é o comprimento característico de problema.

2.6 Forças Exercidas em Partículas

A principal equação que governa o comportamento do movimento das partículas é obtida a partir da 2^a Lei de Newton como demonstrado por Crowe et al. (2011) [12].

$$\sum \vec{F}_p = \frac{d(m_p \vec{v}_p)}{dt} \quad (2.47)$$

onde $\sum \vec{F}_p$ é o somatório de forças aplicadas a partícula, m_p é a massa e \vec{v}_p a velocidade da partícula.

As forças aplicadas às partículas foram determinadas a partir da equação de **Basset–Boussinesq–Oseen** (BBO), que descreve as forças sofridas por partículas sob efeito de escoamentos com número de Reynolds 2.5 pequeno. Porém, o número de Reynolds utilizados é diferente do calculado para escoamentos, utiliza-se um valor específico para cada partícula.

$$Re_p = \frac{\rho_p |(\vec{v}_f - \vec{v}_p)|_{max} d_p}{\mu_f} \quad (2.48)$$

onde ρ_p é a densidade, d_p o diâmetro e \vec{v}_p a velocidade da partícula, e \vec{v}_f é a velocidade do escoamento na mesma posição da partícula.

Como mencionado, as forças da equação de BBO representam fielmente o comportamento real de partículas para valores de Reynolds menores que 1, ou seja, $Re_p < 1$.

Nem todas as forças apresentadas na equação BBO foram inseridas no código de simulação. Elas foram inseridas sequencialmente durante o desenvolvimento do código, seguidas de testes para verificar sua implementação. Foram

escolhidas apenas as principais forças, apresentadas a seguir, por Crowe et al. (2011) [12]:

- **Força Gravitacional:** Também conhecida como força Peso, criada pelo campo graviacinal do planeta aplicado aos corpos com massa. Seu valor é calculado através das massas dos corpos, a distância entre seus centros de massa e uma constante universal. Porém, para simplificar o problema, pode-se assumir que a distância entre eles é constante e igual ao raio do planeta Terra. Portanto, pode-se assumir que o valor da força será sempre constante e proporcional a uma aceleração constante aplicada a massa da partícula, o que torna esta a força mais simples de se calcular:

$$\vec{F}_{grav} = m_p \vec{g} \quad (2.49)$$

onde \vec{g} é tomada como a aceleração constante da gravidade na superfície terrestre com valor definido de $\vec{g} = (0, -9.80665)m/s^2$.

- **Força de Arrasto:** Força causada pelo atrito do fluido no contorno da partícula, que cria um efeito cisalhante e tende deixar a partícula com mesma velocidade que o fluido.

Sua equação é determinada como:

$$\vec{F}_{drag} = 3\pi\mu_f d_p (\vec{v}_f - \vec{v}_p) \quad (2.50)$$

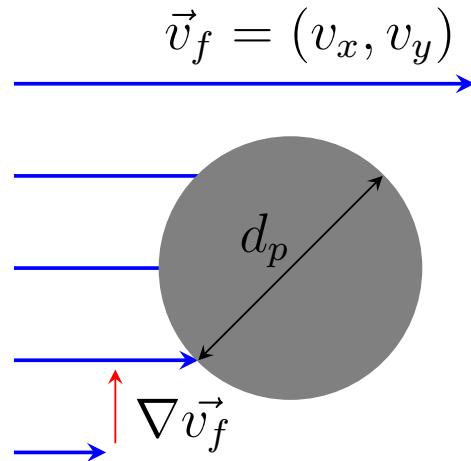
Pode-se observar seu comportamento presente no termo de velocidade relativa $(\vec{v}_f - \vec{v}_p)$ da equação Eq. 2.50. Este termo causa o efeito de aproximar a velocidade da partícula à velocidade do fluido já que torna a força proporcionalmente maior quanto mais afastadas elas se encontrarem. E o sinal permite que caso a partícula esteja mais rápida ela seja desacelerada e o

inverso se ela se encontrar mais lenta.

- **Força de Sustentação:** A força de sustentação é uma componente que tende a mover a partícula em direções perpendiculares a seu movimento principal. Ela possui várias formas de ser calculada, sendo nomeada para cada caso.

Por exemplo, a **Força de Magnus** está relacionada a rotação, ou velocidade angular, presente na partícula. Neste trabalho as partículas são assumidas como corpos rígidos sem rotação, então esta força não será levada em conta.

Porém outro tipo de força de sustentação é a **Força de Saffman** explorada por Crowe et al. (2011) [12], que é gerada a partir do gradiente de velocidades presente no escoamento. Para que haja o efeito da força de sustentação de Saffman é necessário que exista um gradiente no campo de velocidades diferente de nulo, como pode se notar na Figura 2.



Fonte: Autor.

Figura 2: Partícula em um escoamento com um gradiente de velocidade não nulo.

A força é aplicada em uma direção perpendicular ao movimento do escoa-

mento e proporcional ao crescimento da velocidade no escoamento. Ela pode ser calculada através da equação:

$$\vec{F}_{lift} = 1.61 \mu_f d_p (\vec{v}_f - \vec{v}_p) \sqrt{Re_G} \quad (2.51)$$

onde Re_G é conhecido como número de Reynolds de cisalhamento, e é calculado através da equação:

$$Re_G = \frac{d_p^2 \rho_f}{\mu_f} \nabla \vec{v}_f \quad (2.52)$$

- **Força de Massa Virtual (*Added Mass*):** A força de massa virtual está relacionada ao trabalho realizado pelo fluido para acelerar um corpo submerso. Isto pode ser interpretado como a energia que seria utilizada para mover uma mesma quantidade de fluido no lugar do corpo presente. O valor desta força pode ser calculado através da equação:

$$\vec{F}_{mass} = \frac{1}{2} \rho_f V_p \frac{d}{dt} (\vec{v}_f - \vec{v}_p) \quad (2.53)$$

onde V_p é o volume da partícula inserida no escoamento.

3 MODELAGEM NUMÉRICA

3.1 Introdução

Neste trabalho foram utilizados dois tipos de modelagem numéricas para simular o comportamento do sistema multifásico. Na fase dos fluidos, foi utilizado o *Método de Elementos Finitos* (MEF) para solucionar as equações de governo, pois ele proporciona uma forma eficiente de solucionar as equações com rápida convergência. Enquanto para a fase sólida das partículas, e o termo temporal das equações dos fluidos, foi utilizado o *Método de Diferenças Finitas* (MDF), o qual foi escolhido por sua simplicidade de implementação tomando-se cuidado com suas restrições de convergência.

3.2 Método de Elementos Finitos

3.2.1 Formulação Forte

A formulação forte são as equações de governo do problema na sua forma diferencial, com as condições de contorno definidas. As equações do fluido definidas em Eq. 2.43, Eq. 2.44 e Eq. 2.45 são tomadas no domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ com condições de contorno definidas em:

$$\omega = \omega_\Gamma \text{ em } \Gamma_1 \quad (3.1)$$

$$\psi = \psi_\Gamma \text{ em } \Gamma_2 \quad (3.2)$$

$$\vec{v}_f = \vec{v}_{f\Gamma} \text{ em } \Gamma_3 \quad (3.3)$$

3.2.2 Formulação Fraca

A formulação fraca é o resultado da ponderação da equação da forma forte integrada sobre o domínio. Para o encontrar as formas fracas das equações de governo tomadas neste trabalho, inicialmente são estabelecidos resíduos \vec{R}_i nas equações de forma forte:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{v}_f \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} - \frac{\mu_f}{\rho_f} \nabla^2 \vec{\omega} = \vec{R}_1 \quad (3.4)$$

$$\nabla^2 \psi + \omega_z = \vec{R}_2 \quad (3.5)$$

$$\vec{v}_f - \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \vec{R}_3 \quad (3.6)$$

Em seguida, busca-se impor o valor médio de cada resíduo como nulo, de forma que:

$$\int_{\Omega} \vec{R}_1 \cdot \vec{\delta} d\Omega = 0 \quad (3.7)$$

$$\int_{\Omega} \vec{R}_2 \cdot \vec{\phi} d\Omega = 0 \quad (3.8)$$

$$\int_{\Omega} \vec{R}_3 \cdot \vec{\xi} d\Omega = 0 \quad (3.9)$$

onde $\vec{\delta}$, $\vec{\phi}$ e $\vec{\xi}$ são as funções de peso de cada equação, respectivamente. As funções peso são funções arbitrárias utilizadas para obter as componentes de contribuição de cada nó.

Substituindo-se os resíduos nas integrais, tem-se:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{v}_f \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} - \frac{\mu_f}{\rho_f} \nabla^2 \vec{\omega} \right) \cdot \vec{\delta} d\Omega = 0 \quad (3.10)$$

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 \psi + \omega_z) \cdot \vec{\phi} d\Omega = 0 \quad (3.11)$$

$$\int_{\Omega} \left(\vec{v}_f - \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right) \cdot \vec{\xi} d\Omega = 0 \quad (3.12)$$

Reorganiza-se as integrais:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} \cdot \vec{\delta} d\Omega + \int_{\Omega} \vec{v}_f \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} \cdot \vec{\delta} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\mu_f}{\rho_f} \nabla^2 \vec{\omega} \cdot \vec{\delta} d\Omega = 0 \quad (3.13)$$

$$\int_{\Omega} \nabla^2 \psi \cdot \vec{\phi} d\Omega + \int_{\Omega} \omega_z \cdot \vec{\phi} d\Omega = 0 \quad (3.14)$$

$$\int_{\Omega} \vec{v}_f \cdot \vec{\xi} d\Omega - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \cdot \vec{\xi} d\Omega = 0 \quad (3.15)$$

Aplica-se agora o Teorema de Green nos termos difusivos das equações:

$$-\int_{\Omega} \frac{\mu_f}{\rho_f} \nabla^2 \vec{\omega} \cdot \vec{\delta} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\mu_f}{\rho_f} \vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{\delta} d\Omega - \int_{\Gamma} \frac{\mu_f}{\rho_f} \vec{\delta} \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} \cdot \vec{n} d\Gamma \quad (3.16)$$

$$\int_{\Omega} \nabla^2 \psi \cdot \vec{\phi} d\Omega = - \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \psi \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{\phi} d\Omega + \int_{\Gamma} \vec{\phi} \cdot \vec{\nabla} \cdot \psi \cdot \vec{n} d\Gamma \quad (3.17)$$

onde \vec{n} é um vetor normal unitário, orientado para o exterior do contorno Γ . Como as condições de contorno definidas para o problema em 3.2.1 apontam apenas condições de Dirichlet, isto é, valores fixos no contorno, pode-se assumir como hipótese que $\delta = 0$ e $\phi = 0$ em todo o contorno Γ . Assim, a integral em Γ é nula e os termos difusivos são anulados:

$$-\int_{\Omega} \frac{\mu_f}{\rho_f} \nabla^2 \vec{\omega} \cdot \vec{\delta} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\mu_f}{\rho_f} \vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{\delta} d\Omega \quad (3.18)$$

$$\int_{\Omega} \nabla^2 \psi \cdot \vec{\phi} d\Omega = - \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \psi \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{\phi} d\Omega \quad (3.19)$$

As equações ficam então como:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} \cdot \vec{\delta} d\Omega + \int_{\Omega} \vec{v}_f \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} \cdot \vec{\delta} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\mu_f}{\rho_f} \vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{\delta} d\Omega = 0 \quad (3.20)$$

$$-\int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \psi \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{\phi} d\Omega + \int_{\Omega} \omega_z \cdot \vec{\phi} d\Omega = 0 \quad (3.21)$$

$$\int_{\Omega} \vec{v}_f \cdot \vec{\xi} d\Omega - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \cdot \vec{\xi} d\Omega = 0 \quad (3.22)$$

Se assumir-se que:

$$m_1 \left(\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t}, \delta \right) = \int_{\Omega} \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} \cdot \vec{\delta} d\Omega \quad (3.23)$$

$$g_1(\vec{v}_f, \vec{\delta}) = \int_{\Omega} \vec{v}_f \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} \cdot \vec{\delta} d\Omega \quad (3.24)$$

$$k_1(\vec{\omega}, \vec{\delta}) = \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{\delta} d\Omega \quad (3.25)$$

$$k_2(\psi, \vec{\phi}) = \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \psi \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{\phi} d\Omega \quad (3.26)$$

$$m_2(\omega_z, \vec{\phi}) = \int_{\Omega} \omega_z \cdot \vec{\phi} d\Omega \quad (3.27)$$

$$m_3(\vec{v}_f, \vec{\xi}) = \int_{\Omega} \vec{v}_f \cdot \vec{\xi} d\Omega \quad (3.28)$$

$$g_3(\psi, \vec{\xi}) = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \cdot \vec{\xi} d\Omega \quad (3.29)$$

então as equações na forma fraca são:

$$m_1 \left(\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t}, \delta \right) + g_1(\vec{v}_f, \vec{\delta}) + \frac{\mu_f}{\rho_f} k_1(\vec{\omega}, \vec{\delta}) = 0 \quad (3.30)$$

$$-k_2(\psi, \vec{\phi}) + m_2(\omega_z, \vec{\phi}) = 0 \quad (3.31)$$

$$m_3(\vec{v}_f, \vec{\xi}) - g_3(\psi, \vec{\xi}) = 0 \quad (3.32)$$

Para os seguintes conjuntos de funções bases:

$$\mathbb{W} = \left\{ \omega \in \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 : \int_{\Omega} \omega^2 d\Omega < \infty; \omega \in \omega_{\Gamma} \right\} \quad (3.33)$$

$$\mathbb{P} = \left\{ \psi \in \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 : \int_{\Omega} \psi^2 d\Omega < \infty; \psi \in \psi_{\Gamma} \right\} \quad (3.34)$$

$$\mathbb{V} = \left\{ v_f \in \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 : \int_{\Omega} v_f^2 d\Omega < \infty; v_f \in v_{f\Gamma} \right\} \quad (3.35)$$

3.2.3 Discretização Espacial

A escolha das funções peso pode ser realizada de várias formas, por simplicidade este trabalho utiliza a **Formulação de Galerkin**. Neste método, as funções peso são utilizadas com o mesmo valor da função interpoladora de cada variável. Substituindo-se nas equações:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial \omega}{\partial t} \delta d\Omega + \int_{\Omega} v_{fx} \frac{\partial \omega}{\partial x} \delta d\Omega + \int_{\Omega} v_{fy} \frac{\partial \omega}{\partial y} \delta d\Omega \\ + \int_{\Omega} \frac{\mu_f}{\rho_f} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \delta}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial \delta}{\partial y} \right) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$- \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \omega_z \phi d\Omega = 0 \quad (3.37)$$

$$\int_{\Omega} v_{fx} \xi d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial \psi}{\partial y} \xi d\Omega = 0 \quad (3.38)$$

$$\int_{\Omega} v_{fy} \xi d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial \psi}{\partial x} \xi d\Omega = 0 \quad (3.39)$$

As discretizações são aplicadas sobre um domínio com n_e elementos e n_p nós. Este domínio é determinado por uma malha computacional criada. As variáveis ficam então:

$$\omega(\vec{x}, t) = \sum_{i=1}^{n_p} \omega_i(t) N_i(\vec{x}) \quad (3.40)$$

$$\psi(\vec{x}, t) = \sum_{i=1}^{n_p} \psi_i(t) N_i(\vec{x}) \quad (3.41)$$

$$v_{fx}(\vec{x}, t) = \sum_{i=1}^{n_p} v_{fxi}(t) N_i(\vec{x}) \quad (3.42)$$

$$v_{fy}(\vec{x}, t) = \sum_{i=1}^{n_p} v_{fyi}(t) N_i(\vec{x}) \quad (3.43)$$

onde os valores das funções em cada ponto $\omega_i = [\omega_1, \dots, \omega_{n_p}]$, $\psi_i = [\psi_1, \dots, \psi_{n_p}]$, $v_{fxi} = [v_{fx1}, \dots, v_{fxn_p}]$ e $v_{fyi} = [v_{fy1}, \dots, v_{fyn_p}]$ são as incógnitas desejadas. Como estas funções são independentes do tempo, elas são retiradas dos termos de integração sobre o domínio Ω . Enquanto isso, as funções de aproximação $N_i = [N_1, \dots, N_{n_p}]$, também chamadas de funções base, são escolhidas arbitrariamente.

Na formulação de Galerkin, as funções de base são iguais as suas respectivas funções peso:

$$\delta(\vec{x}, t) = \sum_{j=1}^{n_p} \delta_j(t) N_j(\vec{x}) \quad (3.44)$$

$$\phi(\vec{x}, t) = \sum_{j=1}^{n_p} \phi_j(t) N_j(\vec{x}) \quad (3.45)$$

$$\xi(\vec{x}, t) = \sum_{j=1}^{n_p} \xi_j(t) N_j(\vec{x}) \quad (3.46)$$

Então as equações do sistema em suas formas variacionais discretizadas no

espaço ficam como:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n_p} \frac{\partial \omega_i}{\partial t} N_i \sum_{j=1}^{n_p} \delta_j N_j d\Omega \\ & + \int_{\Omega} v_{fx} \sum_{i=1}^{n_p} \frac{\partial \omega_i N_i}{\partial x} \sum_{j=1}^{n_p} \delta_j N_j d\Omega + \int_{\Omega} v_{fy} \sum_{i=1}^{n_p} \frac{\partial \omega_i N_i}{\partial y} \sum_{j=1}^{n_p} \delta_j N_j d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \frac{\mu_f}{\rho_f} \left(\sum_{i=1}^{n_p} \frac{\partial \omega_i N_i}{\partial x} \sum_{j=1}^{n_p} \frac{\partial \delta_j N_j}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n_p} \frac{\partial \omega_i N_i}{\partial y} \sum_{j=1}^{n_p} \frac{\partial \delta_j N_j}{\partial y} \right) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{n_p} \frac{\partial \psi_i N_i}{\partial x} \sum_{j=1}^{n_p} \frac{\partial \phi_j N_j}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n_p} \frac{\partial \psi_i N_i}{\partial y} \sum_{j=1}^{n_p} \frac{\partial \phi_j N_j}{\partial y} \right) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n_p} \omega_{zi} N_i \sum_{j=1}^{n_p} \phi_j N_j d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n_p} v_{fxi} N_i \sum_{j=1}^{n_p} \xi_j N_j d\Omega - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n_p} \frac{\partial \psi_i N_i}{\partial y} \sum_{j=1}^{n_p} \xi_j N_j d\Omega = 0 \quad (3.49)$$

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n_p} v_{fyi} N_i \sum_{j=1}^{n_p} \xi_j N_j d\Omega + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n_p} \frac{\partial \psi_i N_i}{\partial x} \sum_{j=1}^{n_p} \xi_j N_j d\Omega = 0 \quad (3.50)$$

Pode-se remover as componentes da velocidade do fluido v_{fx} e v_{fy} da equação Eq. 3.47, pois serão utilizados os componentes da velocidade no último passo de tempo para estes valores, tornando-se a equação linear.

Retira-se então os somatórios das funções interpoladoras das integrais, e

como $\sum_{j=1}^{n_p} \delta_j \neq 0$, $\sum_{j=1}^{n_p} \phi_j \neq 0$ e $\sum_{j=1}^{n_p} \xi_j \neq 0$ as equações de governo serão:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n_p} \sum_{i=1}^{n_p} \frac{\partial \omega_i}{\partial t} \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega \\ & + \sum_{j=1}^{n_p} \sum_{i=1}^{n_p} \omega_i \left(v_{fx} \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j d\Omega + v_{fy} \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial y} N_j d\Omega \right. \\ & \left. + \frac{\mu_f}{\rho_f} \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} d\Omega \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\sum_{j=1}^{n_p} \sum_{i=1}^{n_p} \psi_i \left(- \int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\Omega + \omega_i \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega + \right) = 0 \quad (3.52)$$

$$\sum_{j=1}^{n_p} \sum_{i=1}^{n_p} v_{fxi} \left(\int_{\Omega} N_i N_j d\Omega - \psi_i \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial y} N_j d\Omega + \right) = 0 \quad (3.53)$$

$$\sum_{j=1}^{n_p} \sum_{i=1}^{n_p} v_{fyi} \left(\int_{\Omega} N_i N_j d\Omega + \psi_i \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j d\Omega + \right) = 0 \quad (3.54)$$

3.2.4 Malha Computacional

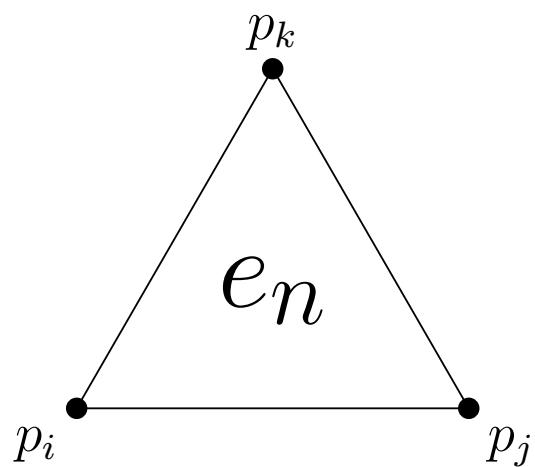
A malha utilizada pode ser estruturada, com nós equidistantes entre si, ou não estruturada, nós escolhidos a critério do criador da malha. É comum utilizar malhas não estruturadas com zonas de maior interesse com elementos menores, para se obter informações mais precisas nestes locais. Em certos casos de equações com acoplamentos fortemente ligados, se torna necessário utilizar elementos com mais informações atreladas, como elementos quadráticos ou cúbicos. Este é o caso da solução da equação de Navier-Stokes. Porém, para evitar esta restrição, este trabalho utilizou a formulação de corrente-vorticidade, que desvia deste problema. Podendo então utilizar elementos lineares e simplificando sua implementação.

Como apresentado por Anjos (2007) [13], os tipos de elementos mais comuns

aplicados a aos diferentes tipos de simulações são:

- Dimensão do problema
 - Caso unidimensional: Retas
 - Caso bidimensional: Triângulos ou Retângulos
 - Caso tridimensional: Tetraedros ou Prismas
- Ordem dos polinômios interpoladores
 - Primeiro grau: Lineares
 - Segundo grau: Quadráticos
 - Terceiro grau: Cúbicos

Para este trabalho foi escolhido o elemento do tipo triangular com interpolação linear, pois não há restrições no problema escolhido, e este é o caso mais aplicado na literatura. A Figura 3 mostra como são os elementos utilizados:



Fonte: Autor.

Figura 3: Elemento triangular linear.

Pode-se notar na Figura 3 que o elemento de índice e_n é delimitado pelos nós p_i , p_j e p_k . A função de interpolação aplicada entre os nós é uma função linear entre suas posições.

Então pode-se escrever as equações do problema em sua forma matricial como:

$$\mathbf{M} \frac{\partial \omega}{\partial t} + v_{fx} \mathbf{G_x} \omega + v_{fy} \mathbf{G_y} \omega + \frac{\mu_f}{\rho_f} (\mathbf{K}_{xx} + \mathbf{K}_{yy}) \omega = 0 \quad (3.55)$$

$$- (\mathbf{K}_{xx} + \mathbf{K}_{yy}) \psi + \mathbf{M} \omega = 0 \quad (3.56)$$

$$\mathbf{M} v_{fx} \omega - \mathbf{G}_y \psi = 0 \quad (3.57)$$

$$\mathbf{M} v_{fy} \omega + \mathbf{G}_x \psi = 0 \quad (3.58)$$

onde \mathbf{M} , \mathbf{G}_x , \mathbf{G}_y , \mathbf{K}_{xx} e \mathbf{K}_{yy} são as matrizes elementares de dimensão $n_p \times n_p$.

Estas matrizes são montadas a partir da contribuição local de cada nó em um elemento e unidas na matriz geral, onde cada posição da matriz é o valor correspondente ao nó de mesmo índice. As matrizes locais \mathbf{m}^e , \mathbf{g}_x^e , \mathbf{g}_y^e , \mathbf{k}_{xx}^e e \mathbf{k}_{yy}^e , para cada elemento e são definidas como:

$$\mathbf{m}^e = \int_{\Omega^e} N_i^e N_j^e d\Omega^e \quad (3.59)$$

$$\mathbf{g}_x^e = \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} N_j^e d\Omega^e \quad (3.60)$$

$$\mathbf{g}_y^e = \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} N_j^e d\Omega^e \quad (3.61)$$

$$\mathbf{k}_{xx}^e = \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} d\Omega^e \quad (3.62)$$

$$\mathbf{k}_{yy}^e = \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} d\Omega^e \quad (3.63)$$

As matrizes utilizadas foram obtidas por Lewis, Nithiarasu e Seetharamu

(2004) [14]. Escritas em suas formas matriciais:

$$\mathbf{m}^e = \frac{A^e}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

$$\mathbf{g}_x^e = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ b_i & b_j & b_k \\ b_i & b_j & b_k \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

$$\mathbf{g}_y^e = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} c_i & c_j & c_k \\ c_i & c_j & c_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

$$\mathbf{k}_{xx}^e = \frac{t_h}{4A} \begin{bmatrix} b_i b_i & b_j b_i & b_k b_i \\ b_i b_j & b_j b_j & b_k b_j \\ b_i b_k & b_j b_k & b_k b_k \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

$$\mathbf{k}_{yy}^e = \frac{t_h}{4A} \begin{bmatrix} c_i c_i & c_j c_i & c_k c_i \\ c_i c_j & c_j c_j & c_k c_j \\ c_i c_k & c_j c_k & c_k c_k \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

onde A^e é a área, t_h a espessura e $b_i, b_j, b_k, c_i, c_j, c_k$ as coordenadas relativas do elemento. Estas coordenadas relativas são definidas para os nós p_i, p_j e p_k de um elemento qualquer como:

$$b_i = y_j - y_k \quad (3.69)$$

$$b_j = y_k - y_i \quad (3.70)$$

$$b_k = y_i - y_j \quad (3.71)$$

$$c_i = x_k - x_j \quad (3.72)$$

$$c_j = x_i - x_k \quad (3.73)$$

$$c_k = x_j - x_i \quad (3.74)$$

onde x_i e y_i são as coordenadas do ponto p_i , x_j e y_j são as coordenadas do ponto p_j e x_k e y_k são as coordenadas do ponto p_k .

E a área A pode ser calculada através das coordenadas dos pontos pela equação:

$$A^e = \frac{1}{2}((x_i y_j - x_j y_i) + (x_j y_k - x_k y_j) + (x_k y_i - x_i y_k)) \quad (3.75)$$

3.3 Método de Diferenças Finitas

O Método de Diferenças Finitas é um das mais antigas e simples formas de se calcular o valor de um diferencial numéricamente. A base do método é tomar diferenças pequenas o suficiente para replicar o valor tomado no meio contínuo.

Imagina-se uma função $f(x)$ tomada no domínio $x \in \mathbb{R}$ e deseja-se obter a derivada $\frac{df}{dx}(x)$. Tomando-se definição da derivada, pode-se escrever:

$$\frac{df}{dx}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (3.76)$$

onde h é a diferença entre os pontos tomados na variável x . Ou seja, caso deseja-se obter o valor da derivada desta função numéricamente basta aplicar a diferença entre dois pontos com afastamento suficientemente pequeno.

Outra forma de interpretar-se o MDF seria através da aplicação da *Série de Taylor*. Tomando-se novamente a função $f(x)$ e a série de Taylor aplicada a ela

ao redor de um ponto x qualquer, tem-se:

$$f(x+h) \approx f(x) + \frac{df(x)}{dx}(x+h-x) + \frac{1}{2!} \frac{d^2 f(x)}{dx^2}(x+h-x)^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3 f(x)}{dx^3}(x+h-x)^3 + \dots \quad (3.77)$$

Como deseja-se obter o valor da derivada de primeira ordem, pode-se reorganizar a equação para extrair o termo $\frac{df(x)}{dx}$:

$$\frac{df(x)}{dx} \approx \frac{f(x+h) - f(x) - \frac{1}{2!} \frac{d^2 f(x)}{dx^2}(h)^2 - \frac{1}{3!} \frac{d^3 f(x)}{dx^3}(h)^3 - \dots}{h} \quad (3.78)$$

Em certos casos não se tem nenhuma informação sobre as derivadas de ordens superiores da função, portanto pode-se aproximar o valor da derivada ao remover os termos com ordens superiores e substituí-los por um termo de erro $O(h^2)$.

$$\frac{df(x)}{dx} \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h^2) \quad (3.79)$$

onde, novamente, quanto menor for o passo h , mais o valor da derivada numérica se aproximará do valor contínuo.

3.3.1 Discretização da Corrente-Vorticidade no Tempo

A equação de governo Eq. 3.55 do problema de corrente-vorticidade ainda possui um termo derivativo não discretizado. Este é o termo $\frac{\partial \omega}{\partial t}$, e ele é discretizado utilizando a discretização em MDF apresentada em Eq. 3.79.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} \approx \frac{\omega(t+dt) - \omega(t)}{dt} \quad (3.80)$$

onde dt é o passo de tempo da simulação.

Será utilizada a notação de índice de variáveis no tempo como sobreescrito, onde t_n é o índice do passo no tempo, $\omega^{t_{n+1}} = \omega(t+dt)$ e $\omega^{t_n} = \omega(t)$. Então a

discretização final do sistema corrente-vorticidade é:

$$\left(\mathbf{M}v_{fx}\mathbf{G_x} + v_{fy}\mathbf{G_y} + \frac{\mu_f}{\rho_f} (\mathbf{K}_{xx} + \mathbf{K}_{yy}) \right) \omega^{t_{n+1}} = \mathbf{M}\omega^{t_n} \quad (3.81)$$

$$(\mathbf{K}_{xx} + \mathbf{K}_{yy}) \psi = \mathbf{M}\omega^{t_{n+1}} \quad (3.82)$$

$$\mathbf{M}v_{fx}\omega^{t_{n+1}} = \mathbf{G_y}\psi \quad (3.83)$$

$$\mathbf{M}v_{fy}\omega^{t_{n+1}} = -\mathbf{G_x}\psi \quad (3.84)$$

3.3.2 Discretização da Forças Aplicadas às Partículas

As equações das forças aplicadas descritas em 2.6 são discretizadas utilizando MDF com seus parâmetros em cada instante t_n . Suas equações discretizadas são:

- **Força Gravitacional:**

$$\vec{F}_{grav}^{t_n} = m_p \vec{g} \quad (3.85)$$

- **Força de Arrasto:**

$$\vec{F}_{drag}^{t_n} = 3\pi\mu_f d_p \left(\vec{v}_f^{t_n} - \vec{v}_p^{t_{n-1}} \right) \quad (3.86)$$

- **Força de Sustentação:**

$$\vec{F}_{lift}^{t_n} = 1.61\mu_f d_p \left(\vec{v}_f^{t_n} - \vec{v}_p^{t_{n-1}} \right) \sqrt{Re_G^{t_n}} \quad (3.87)$$

$$Re_G^{t_n} = \frac{d_p^2 \rho_f}{\mu_f} \left(\frac{d\vec{v}_f}{d\vec{r}} \right)^{t_n} \quad (3.88)$$

onde $\frac{d\vec{v}_f}{d\vec{r}}$ é a variação do valor da velocidade nas extremidades da partícula, em um eixo perpendicular ao movimento do fluido que cruza o centro de

massa da mesma.

- **Força de Massa Virtual:**

$$\vec{F}_{mass}^{t_n} = \frac{1}{2} \rho_f V_p \frac{(\vec{v}_f^{t_n} - \vec{v}_p^{t_{n-1}}) - (\vec{v}_f^{t_{n-1}} - \vec{v}_p^{t_{n-2}})}{dt} \quad (3.89)$$

Finalmente, após calcular-se as forças aplicadas, é necessário determinar a nova velocidade e posição de cada partícula:

$$\vec{v}_p^{t_n} = \frac{dt}{m_p} \left(\vec{F}_{grav}^{t_n} + \vec{F}_{drag}^{t_n} + \vec{F}_{lift}^{t_n} + \vec{F}_{mass}^{t_n} \right) \quad (3.90)$$

$$(p_x, p_y)^{t_n} = \vec{v}_p^{t_n} dt \quad (3.91)$$

4 CÓDIGO NUMÉRICO

4.1 Introdução

O código deste trabalho foi feito completamente pelo autor na linguagem ***Python 3.5***, com auxílio das bibliotecas: *NumPy*, para manipulação de dados e matrizes, *SciPy* para solução de sistemas e matrizes esparsas, *Matplotlib* para a visualização de gráficos e *pygmsh* para importação da malha no formato `.msh`.

Para a geração de malhas foi utilizado o *software open source Gmsh*. Nele é possível desenhar o perfil do domínio e gerar os nós e elementos de acordo com o refino desejado. Também pode-se forçar diferentes tamanhos de elementos em regiões de maior interesse.

Para a vizualização de resultados foi utilizado o *software open source Paraview*, pois este permite uma vizualização da evolução dos resultados, assim como diversas ferramentas para avaliação dos dados.

Todos os softwares de terceiros foram usados com permissão e licensas apropriadas.

4.2 Estrutura do Código

O código foi planejado e estruturado com o paradigma de *Orientação em Objeto* em mente. Isto é, o código é centralizado em classes que possuem propriedades e métodos referentes a modelagem física do problema estudado. Por exemplo, as classes `TccLib.Mesh` e `TccLib.Particle` representam os conceitos físicos de malha e partícula respectivamente. Estas classes criam objetos que contém suas propriedades individuais, como as densidades ρ_f e ρ_p , e permitem um melhor entendimento do fenômeno.

Este código foi pensado em ser utilizado como uma biblioteca pública com

acesso liberado a qualquer um interessado (link do projeto no GitHub). Por isso, as funções e métodos possuem diversas opções de chamadas. Mais informações estão disponíveis através do comando interno:

```
help(arg)
```

substituindo-se o argumento arg pela função desejada.

Demonstra-se a seguir um exemplo de uso da biblioteca:

```
# Importação da biblioteca
import TccLib

# Importação da malha ou coordenadas de uma nova
mesh = TccLib.Mesh("arquivo_da_malha.msh")
# ou mesh = TccLib.Mesh([coordenadas (x, y)])

# Definição das condições de contorno
mesh.new_boundary_condition("nome da propriedade",
                             [índices dos nós],
                             [valor da condição no nó],
                             [1 para Dirichlet ou 0 para Neumann])

# Chamada para a função de solução
v_x, v_y = TccLib.solve_velocity_field(mesh)

# Adição de partículas
mesh.add_particle(propriedades da partícula)
# Loop de movimentação das partículas
```

```
for t in time_list:
    TccLib.move_particles(mesh, (v_x, v_y))
```

Agora serão explorados cada etapa separadamente.

4.2.1 Importação da Malha

O objeto de malha `TccLib.Mesh` possui um construtor que aceita como parâmetros uma lista de coordenadas dos nós da malha ou o nome de um arquivo na extensão `.msh` para importação. Após a obtenção dos nós é utilizada a função `scipy.spatial.Delaunay()`, que retorna uma lista com os conjuntos de índices dos nós por elemento.

São cadastradas as informações da malha criada no objeto, como as coordenadas dos nós nos eixos x e y , o número de elementos e o número de nós da malha. É criado um dicionário vazio para receber as condições de contorno, onde suas chaves são nomes fixos para cada problema.

4.2.2 Definição das Condições de Contorno

A classe de condições de contorno `TccLib.BoundaryConditions` é uma classe privada, ou seja, o usuário não interage com ela diretamente. Para cadastrar novas condições de contorno é preciso utilizar o método dentro da classe `TccLib.Mesh.new_boundary_condition()`.

O nome da propriedade varia de acordo com a função de solução. Para o propósito deste trabalho, a solução do sistema corrente-vorticidade, são registradas as condições de contorno com nomes: "`psi`" para os valores da corrente, "`vel_x`" para os valores da velocidade do fluido no eixo x e "`vel_y`" para os valores da velocidade do fluido no eixo y.

Os valores da condição de contorno são passados em três listas de mesmo

tamanho, onde a primeira contém os índices dos elementos, a segunda contém os valores da condição correspondentes ao índice associado e a terceira contém um valor lógico para a condição correspondentes ao índice, onde verdadeiro representa uma condição do tipo Dirichlet e falso representa o tipo Neumann. Caso seja fornecido um valor numérico, ou booleano, ao invés da segunda e terceira lista respectivamente, será interpretado que todos os valores da lista substituída possuem este valor.

4.2.3 Funções de Solução

Esta biblioteca foi projetada para adaptar diversas funções de solução para cada modelo físico desejado. No momento da escrita, há duas funções de soluções implementadas no código:

- Equação de Poisson (MEF) - `TccLib.solve_poisson()`
- Sistema Corrente-Vorticidade (MEF) - `TccLib.solve_velocity_field()`

A solução dos problemas é realizada de forma semelhante. Primeiramente são geradas as malhas globais do domínio da malha em uma função auxiliar `TccLib.get_matrices()`:

```
# Loop em cada elemento na lista da malha
for elem in mesh.iens:
    x = mesh.x[elem] # = [x_i, x_j, x_k]
    y = mesh.y[elem] # = [y_i, y_j, y_k]

    # Criação das matrizes locais
    ...
    ...
```

```

# Registro das matrizes locais nas matrizes globais
for i in range(3):
    for j in range(3):
        kx_global[elem[i], elem[j]] += k_x[i][j]
        ky_global[elem[i], elem[j]] += k_y[i][j]
        m_global[elem[i], elem[j]] += m[i][j]
        gx_global[elem[i], elem[j]] += g_x[i][j]
        gy_global[elem[i], elem[j]] += g_y[i][j]

```

que retorna as matrizes globais na ordem apresentada.

Em seguida, são montadas as matrizes principais para a solução algébrica:

$$A_{n \times n} \cdot x_n = b_n \quad (4.1)$$

onde n é o número de nós da malha.

Então são aplicadas as condições de contorno, utilizando a função privada `TccLib.apply_boundary_conditions()`:

```

# Iteração sobre a lista de nós com condição de contorno
for coluna in no_list:
    if condição é Dirichlet:
        # Dirichlet
        for linha in lista_de_linhas:
            # Compensar linhas anuladas
            b[linha] -= A[linha, coluna] * condicao[coluna]
        # Zerar termos na matriz principal
        A[linha, coluna] = 0.
        A[coluna, linha] = 0.

    # Igualar valor da condição no nó a ela mesma

```

```

A[coluna, coluna] = 1.

b[coluna, 0] = condicao[coluna]

else:

    # Neumann Treatment

    b[coluna, 0] += condicao[coluna]

```

Finalmente, o sistema algébrico é solucionado pela função terceirizada da biblioteca de álgebra linear, otimizada, `scipy.sparse.linalg.spsolve()`.

As funções de solução retornam listas com o valor da solução calculada para cada nó na ordem de índices registrada no objeto de malha. Há métodos criados para auxiliar a visualização dos resultados no objeto de malha, como o método `TccLib.Mesh.show_velocity_quiver()` que apresenta um gráfico com flechas apontando a direção do fluxo em cada nó e com tamanho proporcional a seu módulo.

4.2.4 Movimentação das Partículas

No caso do problema multifásico de partículas inseridas em um fluido em movimento, há uma etapa de movimentação das partículas separada da função de solução principal. Isto é devido ao fato do método de solução escolhido utilizar a implementação *one-way* como apresentado por Crowe et al. (2011) [12]. Neste tipo de solução o movimento do fluido, meio principal, afeta as partículas, meio secundário, porém elas não causam reflexos no fluido. Esta implementação foi escolhida devida a demanda computacional elevada da implementação *two-way*, que requeria solucionar o campo de velocidades (MEF) mais vezes por iteração. Então as partículas são simuladas percorrendo um escoamento permanente, com o valor do campo de velocidades sido calculado anteriormente.

As partículas são adicionadas a malha através de um método próprio, que leva como parâmetros as propriedades físicas da partícula, sua posição e condições iniciais e um nome para registro, `TccLib.Mesh.add_particle()`.

Em cada chamada da função `TccLib.move_particles()` são calculadas as forças aplicadas a cada partícula presente na malha e as forças são adicionadas a um dicionário com seus respectivos nomes como chaves. Para se calcular as forças, são necessárias diversas informações, cujas são captadas nesta função, como a velocidade do escoamento na posição da partícula. E o valor do número de Reynolds (Eq. 2.48) é calculado em cada chamada, para verificar se a simulação respeita a restrição apresentada em 2.6. Em seguida é chamada uma função interna da classe `TccLib.Particle` para executar o reposicionamento das partículas, esta calcula as novas posições das partículas e as move, caso respeitem as condições de colisão.

Portanto, a função de movimentação das partículas é aplicada depois da solução do sistema. A função de movimentação `TccLib.move_particles()` não possui retorno, porém pode-se analisar seu resultado observando-se a propriedade `TccLib.Particle.position_history` das partículas presentes na malha. Esta propriedade é uma lista que contém as posições percorridas pela partícula, o que permite a visualização gráfica do percurso da mesma.

5 VALIDAÇÃO DO CÓDIGO NÚMERO

5.1 Introdução

Neste capítulo serão apresentados as comparações realizadas entre os resultados numéricos obtidos para x casos amplamente conhecidos na literatura e a solução analítica unidimensional dos mesmos. Como a solução numérica é obtida para problemas bidimensionais, é preciso pegar uma seção transversal do domínio e interpolar resultado, produzindo, assim, uma aproximação. Dessa forma, a quantificação do erro relativo médio se faz necessária, com o objetivo de apresentar a acurácia do código numérico. O erro relativo entre a solução numérica e a solução analítica é calculado pela equação (Eq. 5.1):

$$er_i = \frac{|(val_a)_i - (val_n)_i|}{(val_a)_i} \quad (5.1)$$

onde $(val_a)_i$ é o valor encontrado pela solução analítica e $(val_n)_i$ é o valor encontrado pela solução numérica, ambos encontrados no nó i .

São calculados também a média e o desvio padrão dos erros relativos pelas equações (Eq. 5.2) e (Eq. 5.2), respectivamente:

$$er_{mean} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N er_i \quad (5.2)$$

$$er_{std} = \left\| \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N er_i - er_{mean} \right\|_2 \quad (5.3)$$

As validações foram organizadas em três seções que representam diferentes etapas da implementação do modelo matemático, sendo assim espera-se mostrar a aplicabilidade do código numérico desenvolvido, além do histórico de aprendizado obtido. Na seção 5.2, os problemas de transferência de calor em sólidos com

condutividade termica constante são apresentados. Os casos propostos nesta seção buscam confirmar a importação correta da malha e a montagem das matrizes globais, como também a aplicação das condições de contorno de Dirichlet e de Neumann.

Já na seção 5.3, os problemas com o termo convectivo presente são analisados. Foi considerado o fluido como incompressível e newtoniano, dessa forma a equação de Navier-Stokes pode ser aplicada segundo a formulação corrente-vorticidade. A estrutura do algoritmo de solução nos casos propostos dessa seção é a mesma utilizada na resolução do problema proposto neste trabalho. Dessa forma, podemos confirmar a correta aplicação das condições de contorno da vorticidade que deve ser calculada em cada passo de tempo.

Finalmente, na seção 5.4, é apresentado os clássicos casos de dinâmica em partículas com o intuito de validar as forças de gravidade, arrasto e sustentação isoladamente e, com isso, possibilitar uma correção pontual no modelo quando necessário, além de permitir observar com maior precisão a influência da atuação que cada uma das forças faz sobre a partícula.

Para casos com variáveis temporais, foi utilizado um critério de parada de 10^{-5} de variação de valores entre dois intervalos de tempo consecutivos. Desta maneira espera-se que o sistema já tenha entrado na situação de convergência e esteja próximo o suficiente de seus valores finais. Isto foi feito para poupar tempo de computação, para casos que possuem um limite de tempo elevado e convergem rapidamente, fazendo com que o código continuasse desnecessariamente.

A execução do código e a computação dos resultados foram realizados em um computador de uso pessoal com as seguintes especificações:

- Dell Latitude E6410 com processador Intel® Core™ i5 CPU M 520 2.40GHz com 4 núcleos e 4Gb de memória RAM. O sistema operacional ubuntu 16.04 LTS e compilador Python 3.5.

5.2 Validações de Problemas em Sólidos

5.2.1 Equação de Laplace com Condições de Contorno de Dirichlet

O problema de troca de calor em uma placa é um dos exemplos clássicos utilizados para estudar as equações de transmissão de calor em sólidos. O mais simples destes é uma barra unidimensional com condutividade térmica constante e sem geração de calor onde a temperatura é conhecida nas extremidades. Como a malha do código foi desenvolvida para solução de problemas bidimensionais, crie-se um problema bidimensional com condições de contorno equivalentes e extraí-se uma seção para que se possa comparar os resultados.

Para a solução dos problemas em sólidos e fluidos no espaço foi utilizado o Método de Elementos Finitos, apresentado na seção 3.2. Enquanto para a aproximação da dinâmica das partículas e solução dos sólidos e fluidos no tempo utilizou-se o Método de Diferenças Finitas, explicado na seção 3.3.

A equação de governo deste fenômeno é conhecida como a equação de Laplace (Eq. 5.4) para sólidos em estado permanente e é apresentada a seguir:

$$\nabla^2 T = 0 \quad (5.4)$$

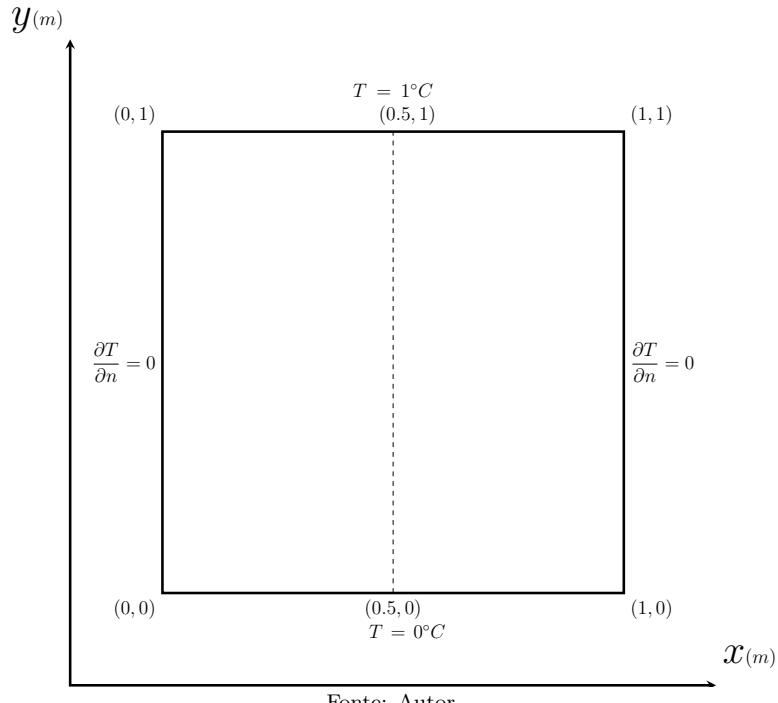
onde T é a temperatura na placa e ∇^2 é o operador diferencial conhecido como laplaciano.

E a solução analítica do problema unidimensional associado foi obtida pelo método dos coeficientes a determinar e é igual a:

$$T(x) = \frac{T_L - T_0}{L}x + T_0 \quad (5.5)$$

onde L é o comprimento da barra, T_0 e T_L são, respectivamente, os valores da temperatura em $x = 0$ e $x = L$.

As condições de contorno e o domínio bidimensional utilizados na simulação são apresentados na Figura 4. A condição de fluxo de calor $\frac{\partial T}{\partial n}$ nulo significa que nenhuma condição é imposta no contorno.



Fonte: Autor.

Figura 4: Condições de contorno da placa para o problema de Laplace 5.2.1.

O domínio foi discretizado utilizando uma malha triangular linear não estruturada com 3162 elementos e 568 nós. A malha foi criada pelo software GMSH como proposto por Geuzaine e Remacle (2009) [15] e importada ao código numérico. A Figura 5 apresenta o campo de temperatura, onde os eixos x e y representam o domínio e o eixo z é a distribuição de temperatura, e que é possível observar que o campo de temperatura possui um perfil linear variando de 0 (cor azul) a 1 (cor vermelha).

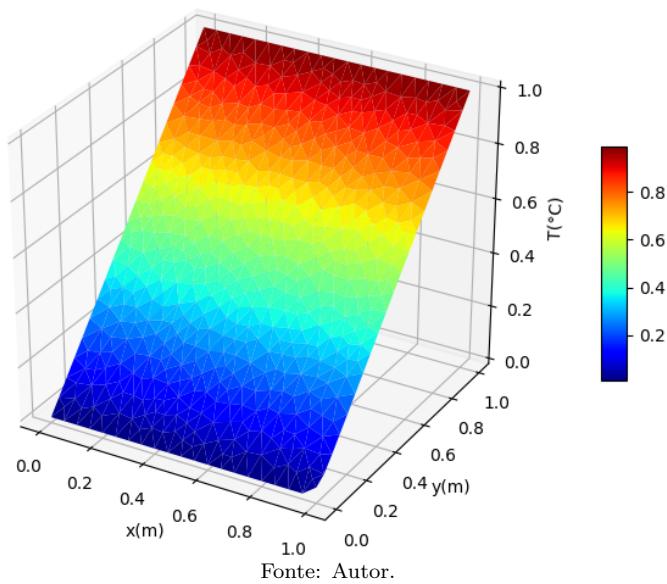
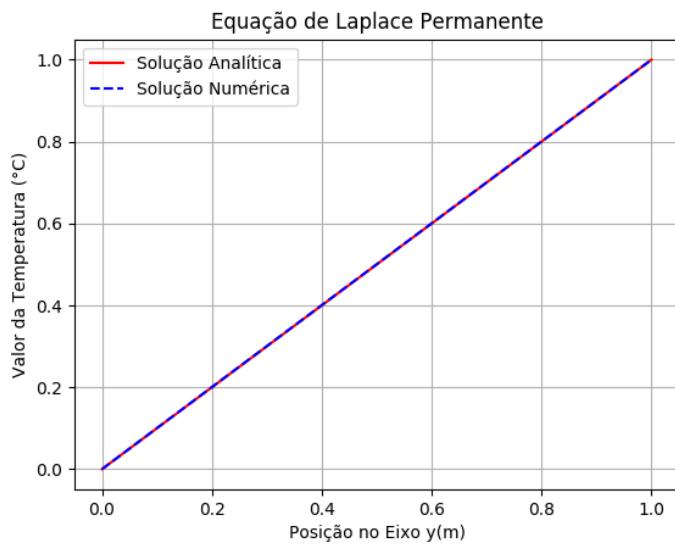


Figura 5: Distribuição de temperaturas na placa da solução permanente da equação de Laplace 5.2.1.

A comparação entre os resultados da solução analítica (Eq. 5.5) e a solução numérica, para a seção $x = 0.5m$, é apresentada na Figura 6, onde é possível observar que ambas possuem o mesmo perfil. Essa proximidade é quantificada pelo erro relativo médio que foi de 0.08929% e com desvio padrão de 0.06698%



Fonte: Autor.

Figura 6: Comparação de resultado das solução numérica e analítica do caso de transporte de temperatura em sólidos no regime permanente.

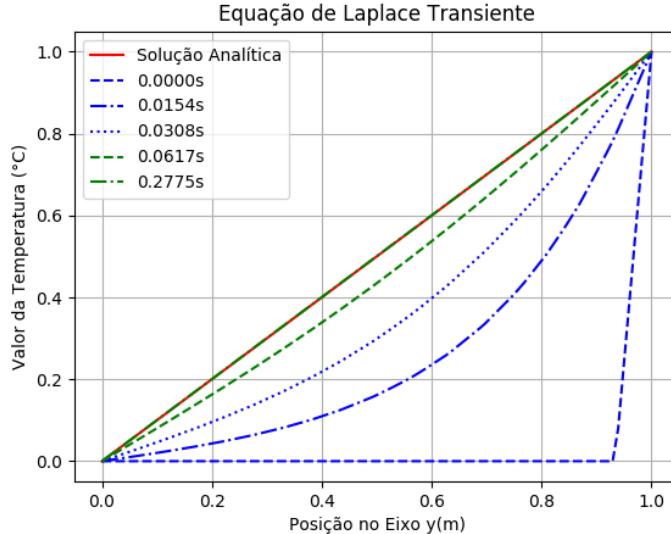
Ao solucionar o mesmo problema introduzindo o termo transiente na equação de governo 5.4, pode-se verificar a evolução de comportamento da temperatura ao longo do tempo. Dessa forma, a equação que representa este caso é:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + k\nabla^2 T = 0 \quad (5.6)$$

onde k é o coeficiente de condutividade térmica da placa e t é a variável temporal.

Porém, ao longo dos passos de tempo, a solução se aproxima de um problema permanente, portanto pode-se fazer a comparação dos resultados obtidos neste exemplo com os valores da solução analítica (Eq. 5.5), tomando-se que $t \rightarrow \infty$. As condições iniciais $t = 0s$ atribuídas aos nós sem condição de contorno foram de um valor inicial de $0^\circ C$. A Figura 7 apresenta a evolução do campo de temperaturas em função do tempo. É possível observar que a solução numérica converge para a solução analítica formando um perfil linear. O erro relativo médio

calculado para este caso foi de 0.08276% e com desvio padrão de 0.06340%.



Fonte: Autor.

Figura 7: Comparação de resultado das soluções númericas e analítica de transporte em sólidos no regime transiente.

5.2.2 Equação de Poisson com Condições de Contorno de Dirichlet

Neste problema busca-se estudar o comportamento de uma placa com geração de calor em seu domínio e temperaturas fixas nas laterais. Novamente, para permitir a comparação de resultados, é extraída uma seção da placa para observar os resultados como um problema unidimensional.

A equação que governa este caso é denominada equação de Poisson (Eq. 5.7), tomada para um problema permanente, ou seja sem variação no tempo.

$$-k\nabla^2T = Q \quad (5.7)$$

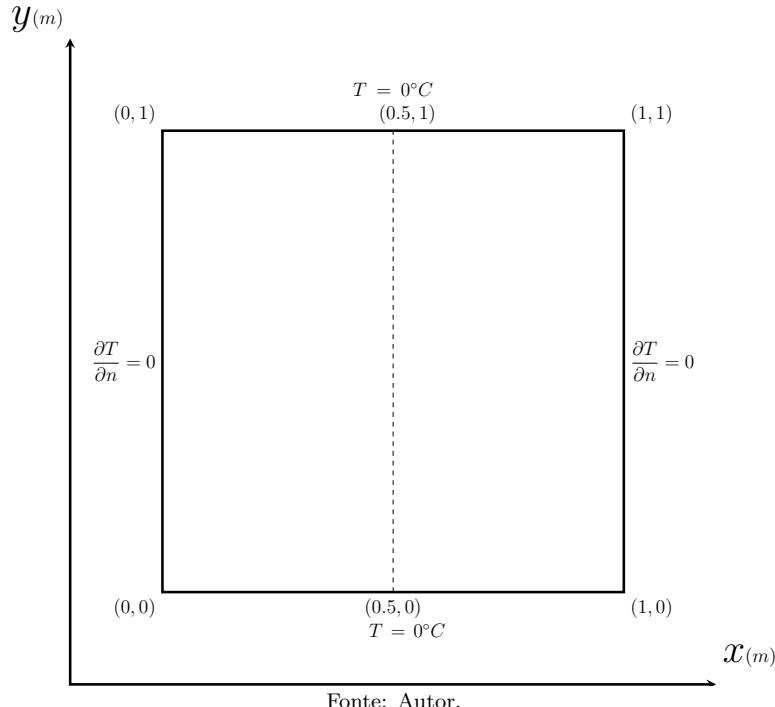
onde Q é a geração de calor na placa.

A solução analítica para o caso de uma barra unidimensional é apresentada

embaixo, obtida novamente pelo método de coeficientes a determinar:

$$T(x) = \frac{Q}{2k} (-x^2 + Lx) + \frac{T_L - T_0}{L} x + T_0 \quad (5.8)$$

As condições de contorno e o domínio bidimensional utilizados na simulação são apresentados na Figura 8. A geração de calor utilizada foi de $Q = 40W/m^3$ e a condutividade térmica foi de $k = 5W/m^{\circ}C$.



Fonte: Autor.

Figura 8: Condições de contorno da placa para o problema de Poisson 5.2.2.

Novamente, foi utilizada uma malha triangular linear não estruturada com 3162 elementos e 568 nós. A Figura 9 apresenta o campo de temperatura, onde os eixos x e y representam o domínio e o eixo z é a distribuição de temperatura, onde é possível observar que o campo de temperatura possui um perfil parabólico variando de 0 (cor azul) a 1 (cor vermelha).

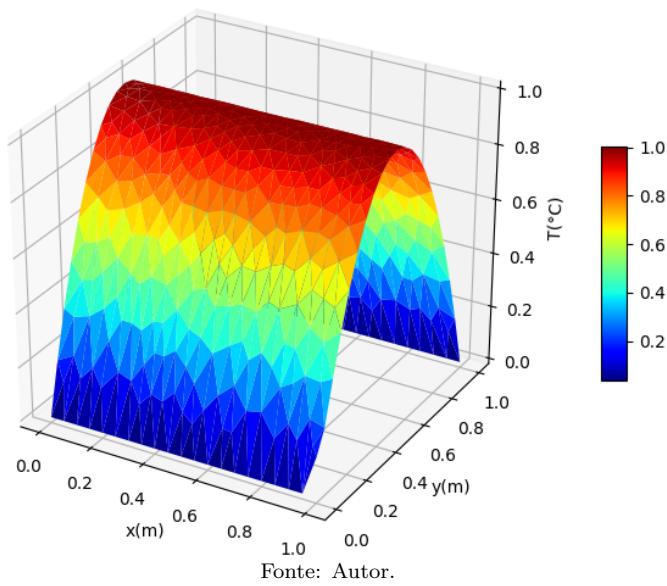
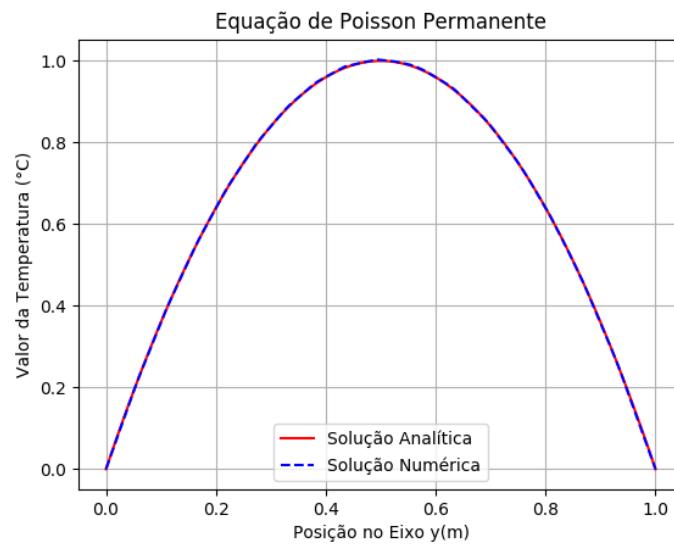


Figura 9: Distribuição de temperaturas na placa da solução do problema permanente de Poisson 5.2.2.

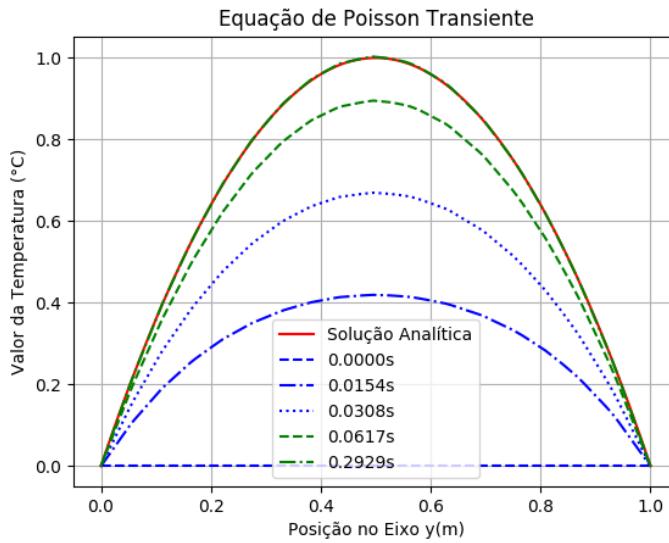
A comparação entre os resultados da solução analítica (Eq. 5.8) e a solução numérica, para a seção $x = 0.5m$, é apresentada na Figura 10, onde é possível observar que ambas possuem o mesmo perfil. Essa proximidade é quantificada pelo erro relativo médio que foi de 0.21048% e com desvio padrão de 0.40921%.



Fonte: Autor.

Figura 10: Comparação de resultado das solução numérica e analítica do problema de transporte de temperatura em sólidos no regime permanente com geração de calor.

A seguir, é apresentado o resultado com termo transiente $\frac{\partial T}{\partial t}$ tendendo a um estado permanente. As condições iniciais $t = 0s$ atribuídas aos nós sem condição de contorno foram de um valor inicial de $0^{\circ}C$. A Figura 11 apresenta a evolução do campo de temperaturas em função do tempo. É possível observar que a solução numérica converge para a solução analítica formando um perfil parabólico. O erro relativo médio calculado para este caso foi de 0.21101% e com desvio padrão de 0.40994%.



Fonte: Autor.

Figura 11: Comparação de resultado das soluções numéricas e analítica do problema de trasnporte de temperatura em sólidos no regime transiente com geração de calor.

5.2.3 Equação de Poisson com Condições de Contorno de Dirichlet e Neumann

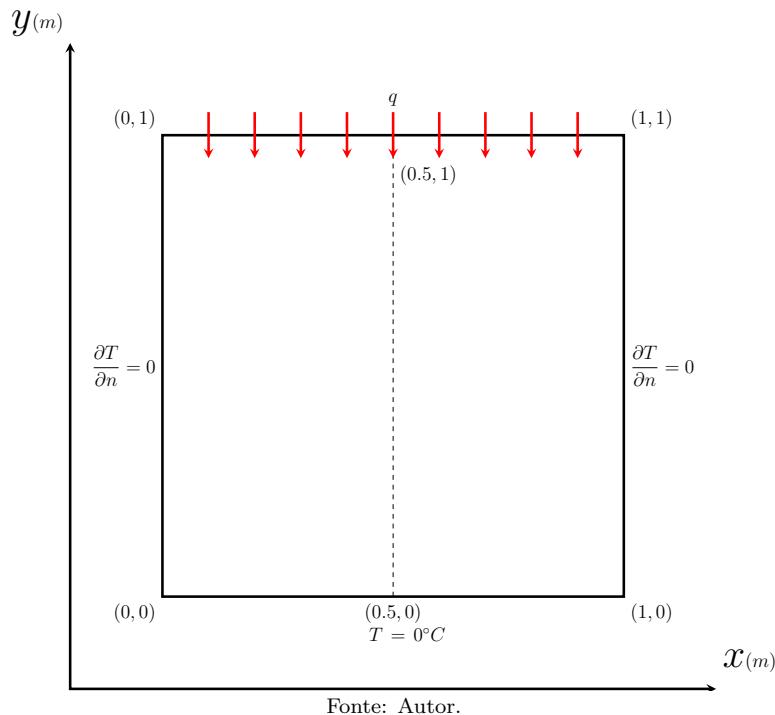
Este caso foi escolhido para validar a solução de problemas com condições de contorno de Neumann. Trata-se de uma placa com temperatura fixa em uma das paredes e no lado oposto é definido um valor para o fluxo de calor presente. Toma-se uma seção da placa para observar os resultados e compará-los com um problema unidimensional de uma barra com as mesmas condições presentes.

A equação de governo é novamente a equação de Poisson (Eq. 5.7), e sua solução analítica para uma barra unidimensional foi calculada pelo método de coeficientes a determinar e é dada por:

$$T(x) = \frac{Q}{k} \left(\frac{-x^2}{2} + Lx \right) - \frac{q}{k}x + T_0 \quad (5.9)$$

onde q é o fluxo de calor na extremidade $x = L$.

As condições de contorno e o domínio bidimensional utilizados na simulação são apresentados na Figura 12. A geração de calor utilizada foi de $Q = -7W/m^3$, a condutividade térmica foi de $k = 5W/m^{\circ}C$ e o fluxo de calor foi de $q = -5W/m^2$.



Fonte: Autor.

Figura 12: Condições de contorno da placa para o problema de Poisson 5.2.3.

Novamente, foi utilizada uma malha triangular linear não estruturada com 3162 elementos e 568 nós. A Figura 13 apresenta o campo de temperatura, onde os eixos x e y representam o domínio e o eixo z é a distribuição de temperatura variando de 0 (cor azul) a 0.35 (vermelha).

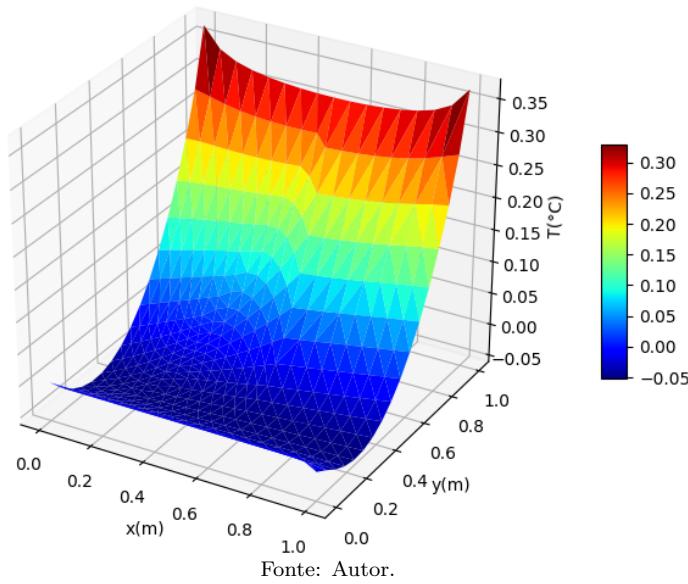
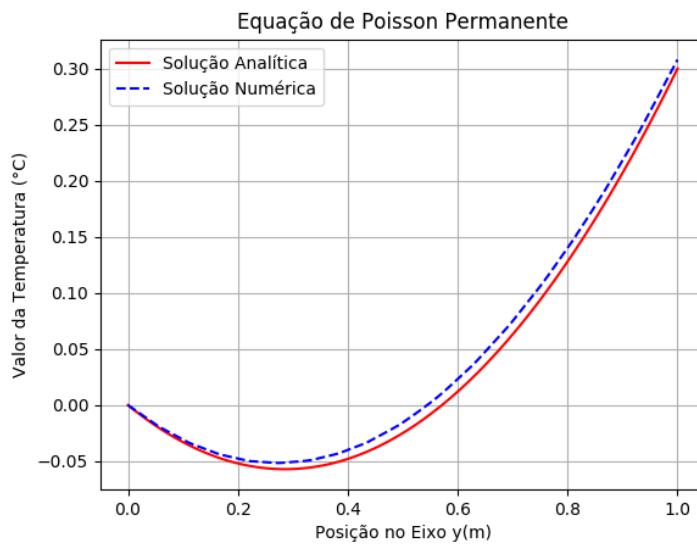


Figura 13: Distribuição de temperaturas na placa da solução do problema permanente de Poisson 5.2.3.

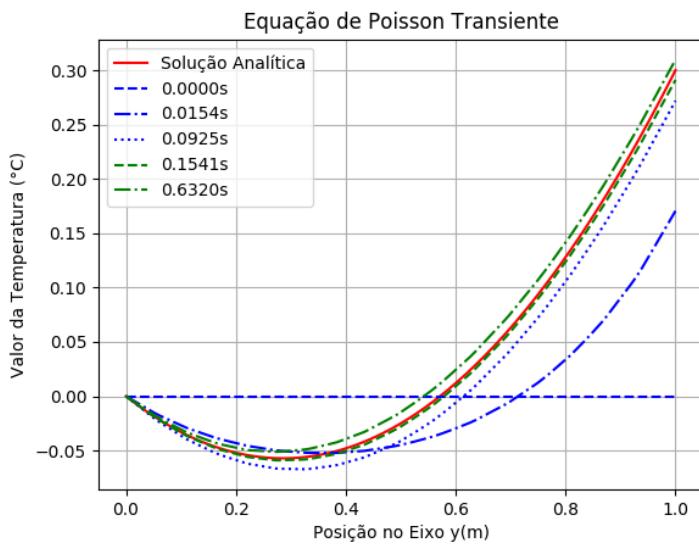
A comparação entre os resultados da solução analítica (Eq. 5.9) e a solução numérica, para a seção $x = 0.5m$, é apresentada na Figura 14, onde pode-se observar que ambas possuem o mesmo perfil. A semelhança entre elas é quantificada pelo erro relativo médio que foi de 0.427% e com desvio padrão de 0.8414%:



Fonte: Autor.

Figura 14: Comparação de resultado das solução numérica e analítica do problema de transporte de temperatura em sólidos no regime permanente com geração e fluxo de calor.

As condições iniciais $t = 0\text{s}$ atribuídas aos nós sem condição de contorno foram de um valor inicial de 0°C . A Figura 15 apresenta a evolução do campo de temperaturas em função do tempo. É possível observar que a solução numérica converge para a solução analítica. O erro relativo médio calculado para este caso foi de 0.31% e com desvio padrão de 0.9205%.



Fonte: Autor.

Figura 15: Comparação de resultado das soluções numéricas e analítica do problema de transporte de temperatura em sólidos no regime permanente com geração e fluxo de calor.

5.3 Validações de Problemas em Fluídos

5.3.1 Escoamento de Poiseuille

Como indicado anteriormente, foi utilizado o Método de Elementos Finitos para a solução do campo de velocidades no espaço, e o Método de Diferenças Finitas no tempo.

Este é um dos primeiros exemplos dados ao estudar-se a mecanica dos fluidos e a equação de Navier-Stokes(Eq. 2.29), pois trata-se de uma configuração geométrica muito simples. O escoamento de Poiseuille também é conhecido como escoamento entre placas paralelas, já que essa é exatamente a descrição de sua forma e as placas são tomadas como estacionárias em relação ao fluido.

O escoamento ocorre entre duas placas paralelas de comprimento infinito com uma distância constante entre elas. É tomado um fluído ideal, isto é, newtoni-

ano, incompressível e em estado permanente com seu perfil plenamente desenvolvido. As condições de contorno são definidas para a função corrente e a velocidade. Para os valores iniciais nos nós sem condição de contorno foram arbitrados como nulos.

Como apresentado por Pontes e Norberto (2010) [11], o sistema de equações de governo deste escoamento é o sistema corrente-vorticidade 2.42, e a solução analítica do perfil de velocidades é dada por:

$$v_x(y) = \frac{4U_{max}}{L^2}y(L-y) \quad (5.10)$$

onde v_x é velocidade do fluido na direção do eixo x , L é o comprimento das placas e U_{max} é a velocidade máxima do escoamento.

Para esta simulação foram usadas as condições de contorno e o domínio bidimensional apresentados na Figura 16. A velocidade máxima U_{max} é tomada em função da velocidade de entrada U na relação $U_{max} = 1.5U$. Foi escolhido um valor para o número de Reynolds(Eq. 2.46) de $Re = 1$ e um intervalo de tempo $dt = 0.1s$.

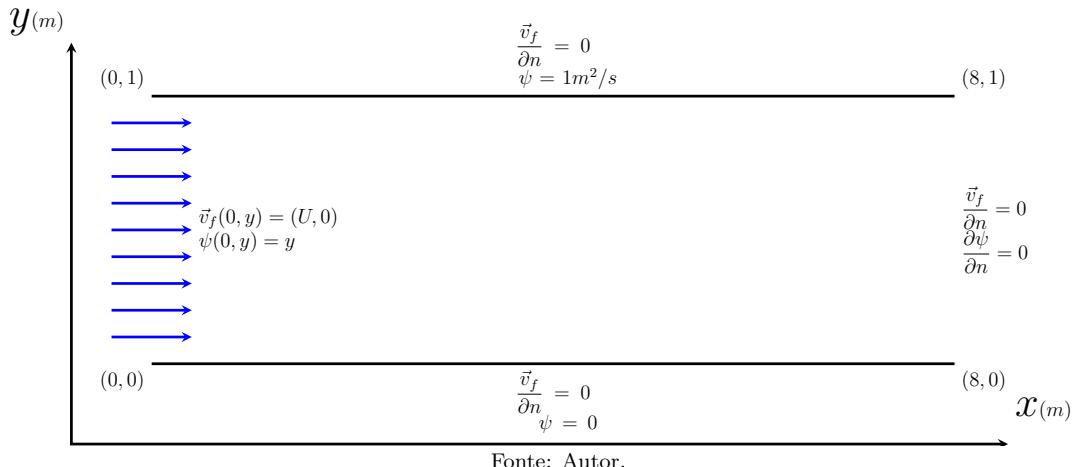
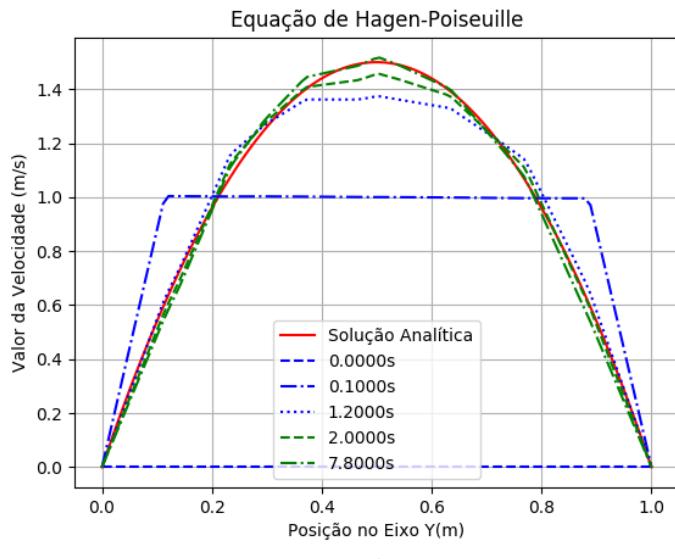


Figura 16: Condições de contorno de um escoamento entre placas paralelas de Poiseuille 5.3.1.

A Figura 17 apresenta a evolução do perfil de velocidades de uma seção tomada em $x = 0.75L = 6.0m$ em função do tempo. Foi utilizada uma malha triangular linear não estruturada com 4200 elementos e 781 nós. Nota-se que a solução numérica converge para a solução analítica ao se aproximar do estado permanente. O erro relativo médio calculado para este caso foi de 4.587% e com desvio padrão de 5.3501%.



Fonte: Autor.

Figura 17: Comparação de resultado das soluções númericas e analítica 5.10 do problema de corrente-vorticidade no regime permanente.

5.3.2 Escoamento de Couette

Similar ao escoamento de Poiseuille 5.3.1, entre duas placas paralelas de comprimento infinito separadas por uma distância constante. Porém, neste caso, as placas possuem uma velocidade relativa entre si, ou seja, estão em movimento. Novamente, utiliza-se a aproximação do escoamento para um fluido newtoniano, incompressível e em estado permanente com seu perfil plenamente desenvolvido. As condições de contorno são definidas para a função corrente e a velocidade, com

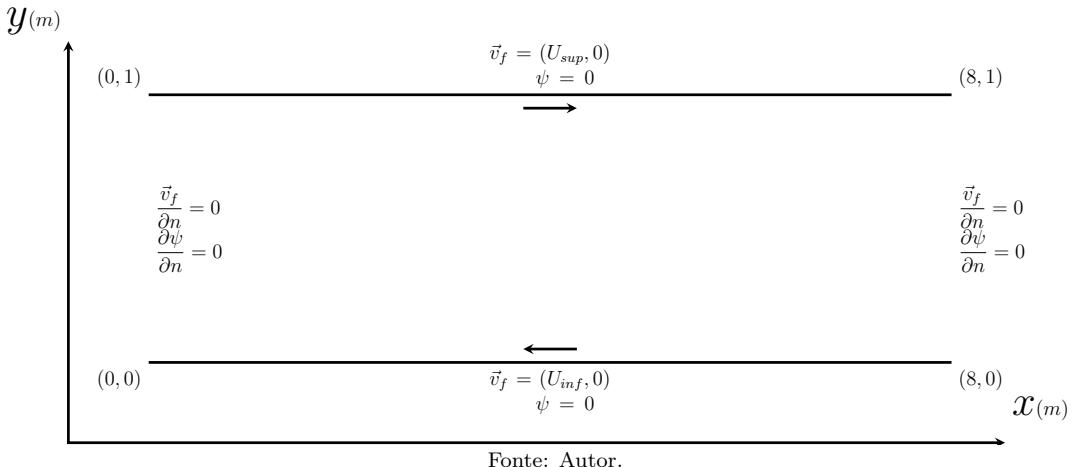
os valores iniciais nos nós sem condição de contorno arbitrados como nulos.

Novamente trabalha-se com o sistema corrente-vorticidade 2.42 e a solução analítica do perfil de velocidades é apresentada por Pontes e Norberto (2010) [11]:

$$v_x(y) = \frac{U_{sup} - U_{inf}}{L} y + U_{inf} \quad (5.11)$$

onde U_{sup} e U_{inf} são as velocidades das placas superior e inferior, respectivamente.

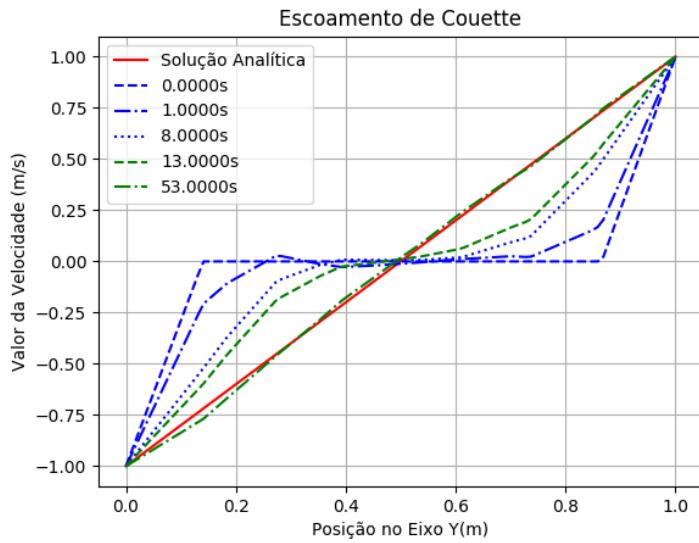
Para esta simulação foram usadas as condições de contorno e o domínio bidimensional apresentados na Figura 18. Foram tomadas as velocidade superior como $U_{sup} = 1m/s$ e $U_{inf} = -1m/s$ para um escoamento com número de Reynolds de $Re = 1$ e um intervalo de tempo $dt = 1.0s$.



Fonte: Autor.

Figura 18: Condições de contorno de um escoamento entre placas paralelas de Couette 5.3.2.

A Figura 19 apresenta a evolução do perfil de velocidades de uma seção tomada em $x = 0.5L = 4.0m$ em função do tempo. Novamente utilizou-se uma malha triangular linear não estruturada com 4200 elementos e 781 nós. Pode-se observar que a solução numérica converge para a solução analítica ao se aproximar do estado permanente. O erro relativo médio calculado para este caso foi de 1.4251% e com desvio padrão de 27.934%.



Fonte: Autor.

Figura 19: Comparação de resultado das soluções numéricas e analítica 5.11 do problema de corrente-vorticidade no regime permanente.

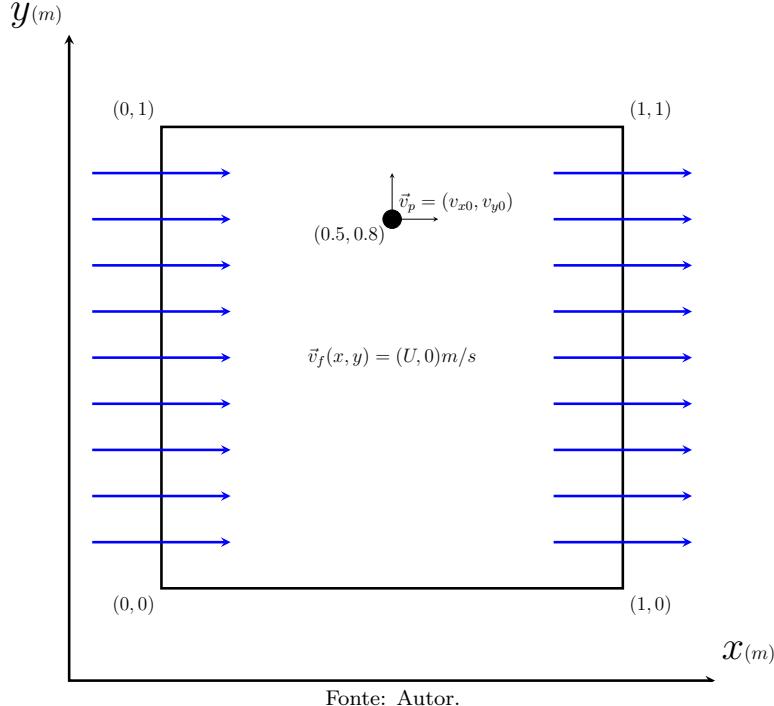
5.4 Validações de Problemas em Partículas

A simulação das forças é realizada sobre uma partícula isolada inserida em um malha com um escoamento com campo de velocidades constante em função da posição da partícula no eixo y , para facilitar os cálculos das soluções analíticas. O campo de velocidades é arbitrado e não calculado como anteriormente.

Conforme indicado, foi utilizado o Método de Diferenças Finitas para discretização e solução da dinâmica das partículas.

Na Figura 20, é apresentado o domínio utilizado para os casos de validação das forças que atuam sobre a partícula, como também o campo de velocidade do fluido e a velocidade da partícula, além da sua posição inicial. Para o caso da força de sustentação, foi necessário a utilização de um outro campo de velocidade conforme será apresentado mais a frente. Enquanto que para o caso da força virtual, foi necessário assumir que o campo de velocidade do fluido dependesse da

variável temporal. O domínio foi discretizado utilizando uma malha triangular linear não estruturada com 2304 elementos e 417 nós.



Fonte: Autor.

Figura 20: Condições de contorno de uma partícula isolada sob efeito de uma força.

A validação das forças é feita individualmente, para que se possa comparar os valores do movimento simulado da partícula com a curva da solução analítica esperada. Os parâmetros definidos para as simulações foram: uma partícula com diâmetro $d_p = 0.001\text{m}$, densidade $\rho_p = 30000\text{Kg/m}^3$, variação de tempo $dt = 1.5625e^{-6}\text{s}$, tempo total $t_{max} = 0.4\text{s}$, em um fluido com densidade $\rho_f = 1000\text{Kg/m}^3$ e viscosidade dinâmica $0.89e^{-3}\text{Pa.s}$.

5.4.1 Força Gravitacional

A força gravitacional é a primeira e mais simples implementação de uma força. A partícula é acelerada pela constante de aceleração gravitacional. A

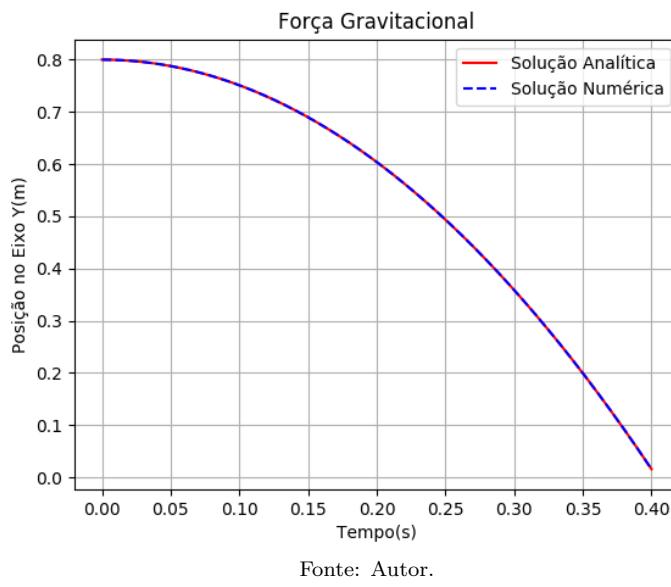
validação deste caso permite verificar a base da estrutura de movimentação de partículas do código.

Para o caso de uma partícula isolada sob efeito da força gravitacional, a solução analítica para a posição da partícula no eixo y foi encontrada pelo método de coeficientes a determinar, e está apresentada a seguir:

$$y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_{y0}t + p_{y0} \quad (5.12)$$

onde g é a aceleração da gravidade, tomada como $g = 9.80665m/s^2$, v_{y0} é a velocidade e p_{y0} a posição inicial da partícula no eixo y .

Para a força gravitacional, utilizou-se uma malha com as condições e posição inicial apresentadas na Figura 20. A velocidade inicial tomada foi $v_{y0} = 0$. Na Figura 21 pode-se observar a evolução da posição da partícula no eixo y em função do tempo. Foi utilizado um campo de velocidades com valor constante de $U = 2m/s$. O erro relativo médio calculado para este caso foi de $7.706e^{-4}\%$ e com desvio padrão de $1.753e^{-3}\%$.



Fonte: Autor.

Figura 21: Comparação de resultado da solução numérica e analítica 5.12 do percurso de uma partícula em queda livre.

5.4.2 Força de Arrasto

A força de arrasto é a principal fonte de movimentação de uma partícula quando submersa em um fluido em movimento. A partícula é movimentada pela força de cisalhamento do fluido em transito que exerce atrito sobre sua superfície. Isto causa um efeito de arrasto, ou carregamento, devido a condição de não escorregamento da superfície da partícula.

Como pode-se analisar pela equação da força (Eq. 5.13), quanto maior for a diferença entre os vetores de velocidade da partícula e do fluido maior será a força exercida sobre ela. E ao se aproximarem da mesma velocidade, a força é reduzida até o ponto de se tornar nula quando a partícula se encontrar com a mesma velocidade do escoamento no mesmo ponto.

Neste caso, a validação é feita para analisar o comportamento da força em relação as propriedades da partícula.

A solução analítica para a posição da partícula sob efeito da força de arrasto no eixo x foi obtida através do método da variação de parâmetros, com auxílio da ferramenta *WolframAlpha*, mostrada a seguir:

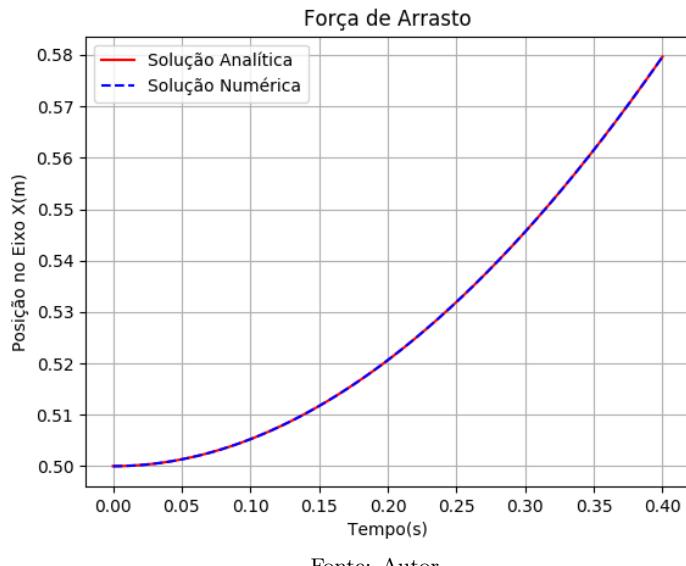
$$x(t) = \frac{m_p}{c_d} (U - v_{x0}) \left(1 - e^{-\frac{c_d}{m_p} t} \right) + v_{x0}t + p_{x0} \quad (5.13)$$

define-se c_d como:

$$c_d = 3\pi\mu_f d_p \quad (5.14)$$

onde m_p é a massa da partícula, μ_f é a viscosidade dinâmica do fluido, d_p é o diâmetro da partícula, v_{x0} é a velocidade e p_{x0} a posição inicial da partícula no eixo x .

Foi utilizada a malha padrão com as condições e posição inicial apresentadas na Figura 20, com velocidade inicial $v_{x0} = 0$. Demonstra-se na Figura 22 a evolução da posição da partícula no eixo x em função do tempo. Foi utilizado um campo de velocidades com valor constante de $U = 2m/s$. Pode-se observar que a partícula é acelerada até atingir a velocidade do fluído, como se era esperado. O erro relativo médio calculado para este caso foi de $3.083e^{-5}\%$ e com desvio padrão de $1.6723e^{-5}\%$.



Fonte: Autor.

Figura 22: Comparação de resultado da solução numérica e analítica 5.13 do percurso de uma partícula em movimento de arrasto em um escoamento.

5.4.3 Força de Sustentação

A força de sustentação é a força que permite que a partícula se mantenha elevada quando está sob efeito de um fluido em movimento. Ela é causada por um efeito de queda de pressão em uma região com maior velocidade, o que gera um gradiente de pressão e enfim a força.

Portanto esta força afeta a partícula somente quando há um gradiente de velocidade ao longo dos contornos da partícula, portanto ela só ocorre quando o campo de velocidades não for constante em volta da partícula. Esta é a mesma força que possibilita o voo dos aviões, pois os perfis de suas asas geram o gradiente de velocidades necessário.

A força de sustentação possui a seguinte solução analítica para a posição da partícula no eixo y semelhante a força de arrasto (Eq. 5.15), porém com constantes diferentes. Esta solução foi obtida através do método de variação de parâmetros,

realizado com a ferramenta *WolframAlpha*, resultando em:

$$y(t) = \frac{m_p}{c_l} (0 - v_{y0}) \left(1 - e^{-\frac{c_l}{m_p} t} \right) + v_{y0}t + p_{y0} \quad (5.15)$$

define-se c_l como:

$$c_l = 1.61 \mu_f d_p \sqrt{Re_G} \quad (5.16)$$

onde Re_G é o número de Reynolds de cisalhamento(Eq. 2.52) ρ_f é a densidade do fluido e $\frac{dv_x}{dy}$ é a variação da velocidade na partícula sobre o eixo perpendicular ao movimento.

Como é apresentado na Figura 23, foi utilizado a mesma malha que nos casos anteriores, porém o campo de velocidade do fluido foi alterado, para que fosse possível observar os efeitos da força de sustentação com mais clareza. As condições utilizadas são:

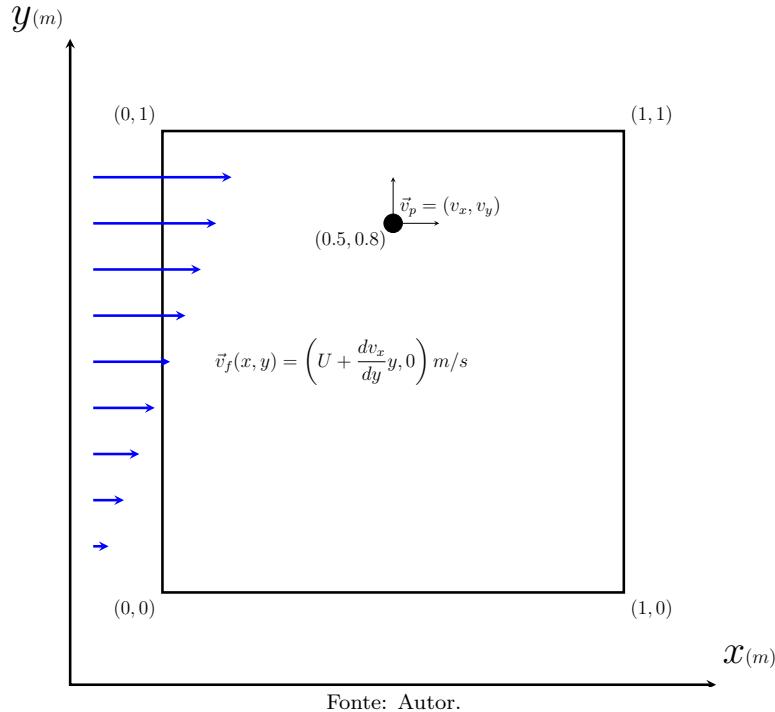
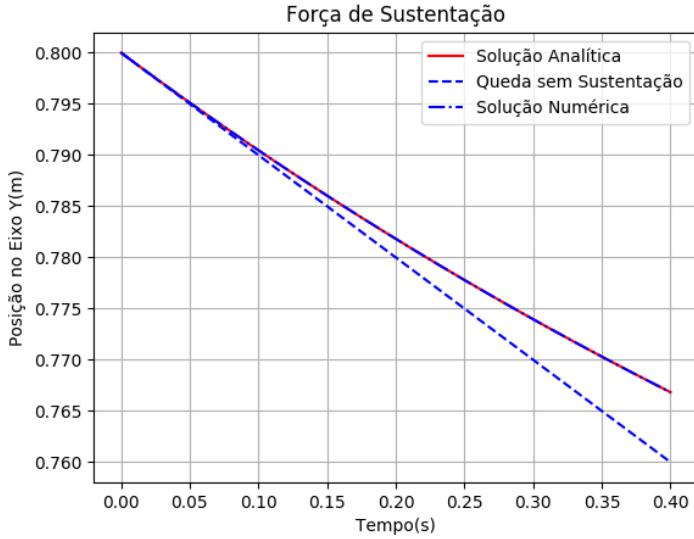


Figura 23: Condições de contorno de uma partícula isolada sob efeito da força de sustentação.

Demonstra-se na Figura 24 a evolução da posição da partícula no eixo x em função do tempo. Foi utilizado um valor base para o campo de velocidades de $U = 2m/s$, uma velocidade inicial $v_{y0} = -0.1m/s$, e um gradiente de velocidades no eixo y de $\frac{dv_x}{dy} = 100m/m.s$ para auxiliar a comparação. Também foi incluída uma curva que demonstra a trajetória da partícula sem o efeito da força de sustentação, para que se possa notar que a partícula é desacelerada e não acompanha esta curva. O erro relativo médio calculado para este caso foi de $1.9241e^{-6}\%$ e com desvio padrão de $1.1167e^{-6}\%$.



Fonte: Autor.

Figura 24: Comparação de resultado da solução numérica e analítica 5.15 do percurso de uma partícula em movimento de sustentação em um escoamento.

5.4.4 Força de Massa Virtual (*Added Mass*)

A força de massa virtual é uma força de reação entre o fluido e a movimentação da partícula durante o escoamento. O valor dessa força está relacionado a massa de fluido que estaria se deslocando na posição da partícula.

Para encontrar-se a solução analítica da força de massa virtual que pudesse ser observada e comparada com os resultados das simulações, ou seja não sendo nula, foi preciso assumir um campo de velocidades que variasse no tempo. Para isso, define-se que a aceleração do campo de velocidades do escoamento é constante $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} = \text{const.}$. Portanto, obtem-se a solução analítica da força de massa virtual para a posição da partícula no eixo x , com o método de variação de parâmetros, feito com a ferramenta *WolframAlpha*, com o seguinte resultado:

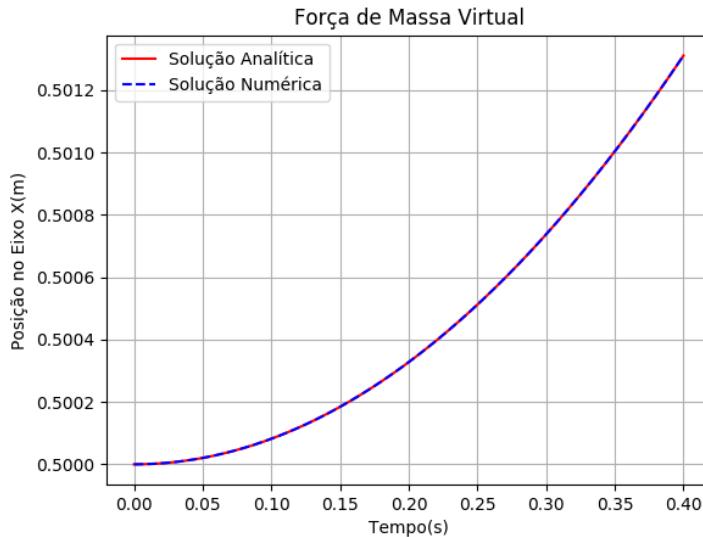
$$x(t) = \frac{a_x c_m}{2(c_m + m)} t^2 + v_{x0} t + p_{x0} \quad (5.17)$$

define-se c_m como:

$$c_m = \frac{1}{2} \rho_f V_p \quad (5.18)$$

onde a_x é a aceleração, ou variação da velocidade no tempo, do campo de velocidades do fluido no eixo x e V_p é o volume da partícula.

Novamente, foi utilizado a mesma malha e condições dos casos anteriores conforme apresentado na Figura 20, além disso a condição inicial da componente tangencial da velocidade foi $v_{x0} = 0$. Revela-se na Figura 25 a evolução da posição da partícula no eixo x em função do tempo. Foi utilizado um campo de velocidades que varia no tempo com valor constante, como explicado anteriormente, na forma de $U = 2m/s + a_x t$, onde $a_x = 1m/s^2$. Pode-se observar que a partícula é acelerada até atingir a velocidade do fluido, como se era esperado. O erro relativo médio calculado para este caso foi de $6.6574e^{-3}\%$ e com desvio padrão de $1.1362e^{-3}\%$.



Fonte: Autor.

Figura 25: Comparaçāo de resultado da solução númerica e analítica 5.17 do percurso de uma partícula em movimento de aceleração em um escoamento.

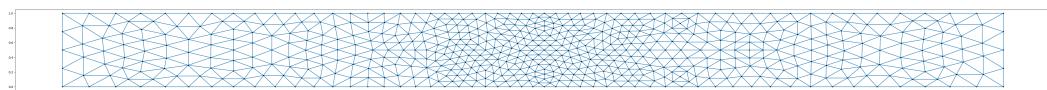
6 RESULTADOS DE SIMULAÇÕES

6.1 Introdução

Neste capítulo serão apresentadas as simulações realizadas para analisar o comportamento de partículas presentes em turbomáquinas em ação. Foram escolhidos cinco tipos de geometria para serem simulados:

- **Canal reto.**

Uma geometria simples, que busca simular o comportamento básico das partículas sobre efeito de um escoamento. A malha utilizada tem 1072 elementos definidos sobre 593 nós, exposta na Figura 26.

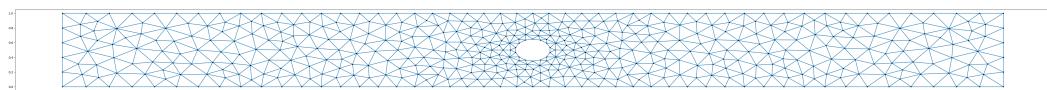


Fonte: Autor.

Figura 26: Malha da simulação em um canal reto.

- **Canal com um obstáculo circular no centro.**

Esta geometria visa simular o efeito de obstáculos, ou até mesmo as próprias partículas no escoamento. Porém, não é utilizada neste trabalho a implementação *two-way*, que levaria em conta os efeitos das partículas no escoamento. Neste caso a simulação foi aplicada a uma malha de 868 elementos e 494 nós.

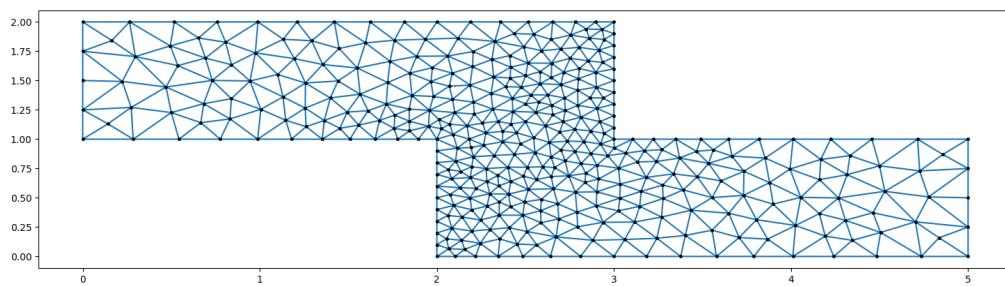


Fonte: Autor.

Figura 27: Malha da simulação em um canal com um obstáculo.

- **Canal com degrau.**

O escoamento em um canal com um degrau, ou uma diferença brusca de percurso, possui diversos efeitos interessantes para serem observados. Como por exemplo nas regiões de curva, pode fazer-se observações sobre o comportamento em conexões de tubulações reais. Com uma malha de 676 elementos definidos sobre 380 nós.

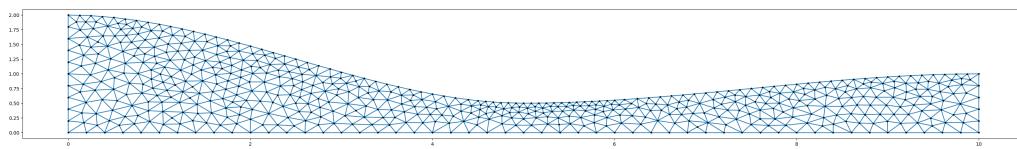


Fonte: Autor.

Figura 28: Malha da simulação em um canal com degrau.

- **Canal com restrição.**

O escoamento em um canal com restrição demonstra os efeitos da redução de seção transversal. Um exemplo deste tipo de escoamento seria em medidores de vazão, como o Tubo de Venturi. Sua malha foi criada com 1047 elementos definido distribuidos sobre 600 nós:

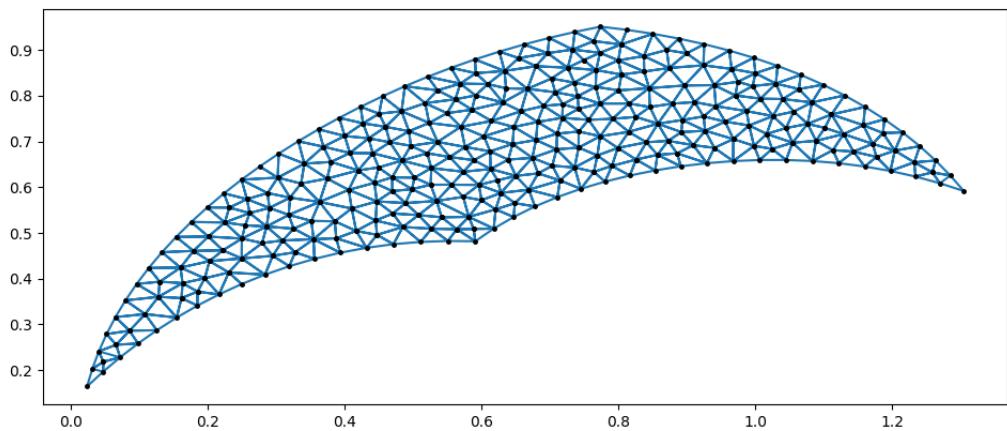


Fonte: Autor.

Figura 29: Malha da simulação em um canal com restrição.

- **Pá de um rotor.**

Finalmente, será analizado o comportamento de partículas em um escoamento presente em uma seção de um rotor de uma turbomáquina. Neste trabalho, foi tomado um referencial estacionário na pá, sem efeito da rotação do rotor no escoamento. Foi utilizada uma malha de 1058 elementos definidos sobre 531 nós.



Fonte: Autor.

Figura 30: Malha da simulação em uma pá de um rotor.

Foi utilizado o software ParaView para exibição dos gráficos de resultados. A escala das figuras mostra o valor da magnitude da velocidade em cada nó.

Em cada simulação, com exceção das simulações na palheta de um rotor, são inseridas cinco partículas de ouro perfeitamente rígidas, igualmente espalhadas, com $d_p = 1mm = 1.10^{-3}m$ de diâmetro e densidade de $\rho_p = 20000kg/m^3$. Estas partículas estão submersas em um fluido ideal com características: $\mu_f = 50kg/m.s$ de viscosidade dinâmica e densidade de $\rho_f = 50kg/m^3$, para que trabalhe em uma situação com número de Reynolds reduzido, e menor que a restrição da equação BBO2.6.

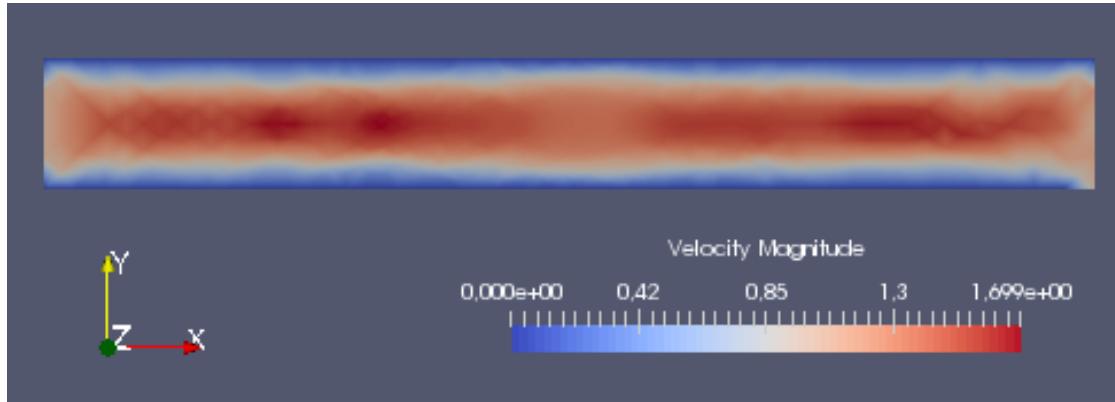
As partículas são iniciadas com velocidade nula e em posições próximas à entrada do escoamento, porém fora de sua região de transição. As simulações

foram executadas para um tempo total de $5s$ com um tempo entre cálculos de $dt = 3.33e^{-5}s$. O trajeto de cada partícula é exibido com uma cor diferente para auxiliar a interpretação.

6.2 Simulação Em Um Canal Reto

O escoamento em um canal reto permite vizualizar o movimento livre das partículas sob efeito do fluido. A sua configuração é similar ao exemplo de Poiseuille 5.3.1. As condições do escoamento são de um comprimento $L = 8m$ com altura constante de $D = 1m$, o fluido entra com velocidade constante pela região da esquerda com velocidade $\vec{v}_{ent} = (1, 0)m/s$. Nas paredes há a condição de não escorregamento, portanto a velocidade nas paredes inferior e superior são nulas, $\vec{v}_{sup} = \vec{v}_{inf} = 0$. A corrente possui uma condição de contorno variando de 0 a 1 nas bordas de acordo com sua posição, equivalente a $\psi_{cc} = y$.

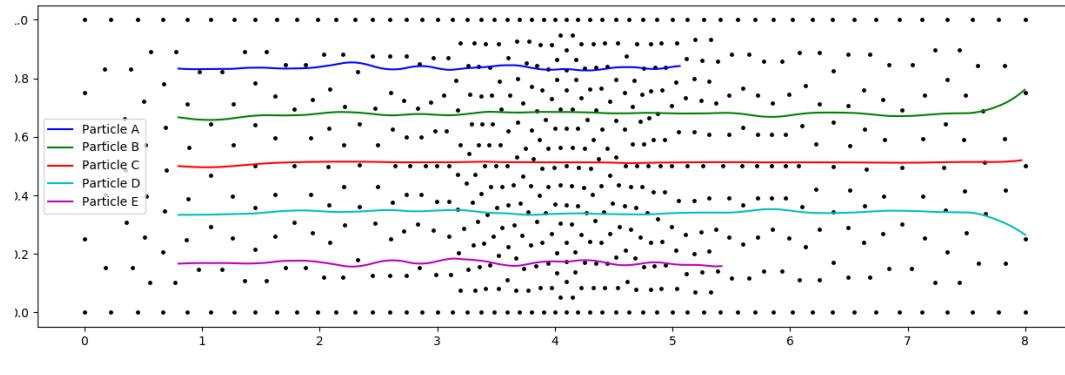
Seu campo de velocidades é apresentado na Figura 31:



Fonte: Autor.

Figura 31: Campo de velocidades de um escoamento em um canal reto.

A trajetória das partículas pode ser analizada na Figura 32:



Fonte: Autor.

Figura 32: Trajeto de partículas inseridas em um escoamento em um canal reto.

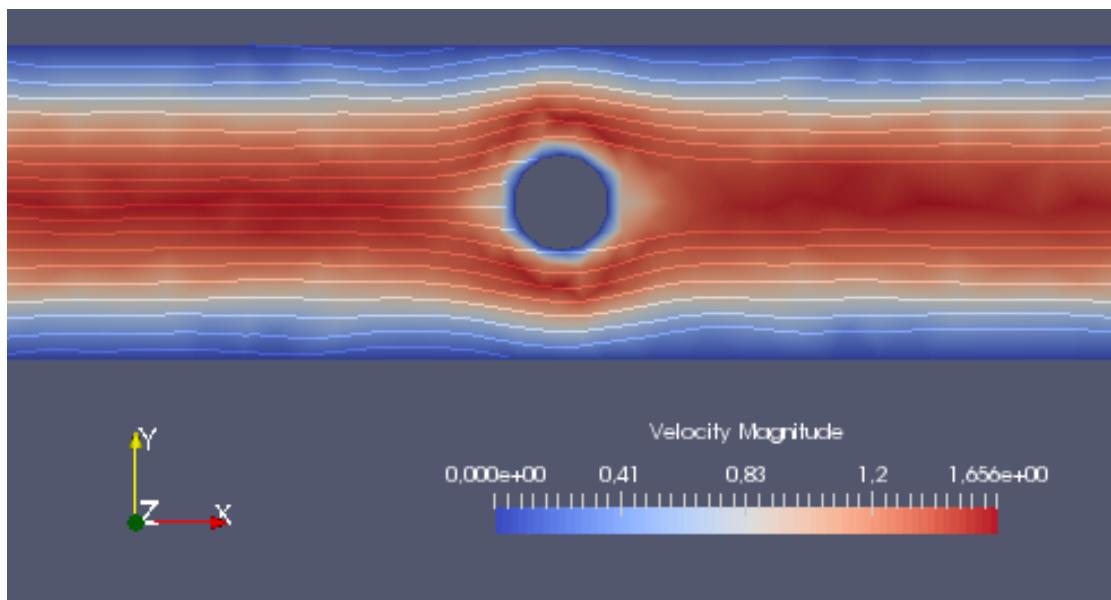
Pode-se observar que as partículas seguem o escoamento como esperado, com uma diferença de distância no percurso causado pelo perfil de velocidades. Na região de saída, as partículas tendem a se espalhar devido às condições de contorno na região.

6.3 Simulação Em Um Canal Com Obtáculo

Em um escoamento com obtáculo, pode-se observar o efeito do obstáculo no campo de velocidades do escoamento, assim como o comportamento das partículas ao interagir com este obstáculo.

Novamente, as condições do escoamento são iguais a simulação anterior 6.2, porém com as condições de contorno aplicadas também a região do obstáculo. Onde $\vec{v}_{obstaculo} = 0$ e $\psi_{obstaculo} = y$.

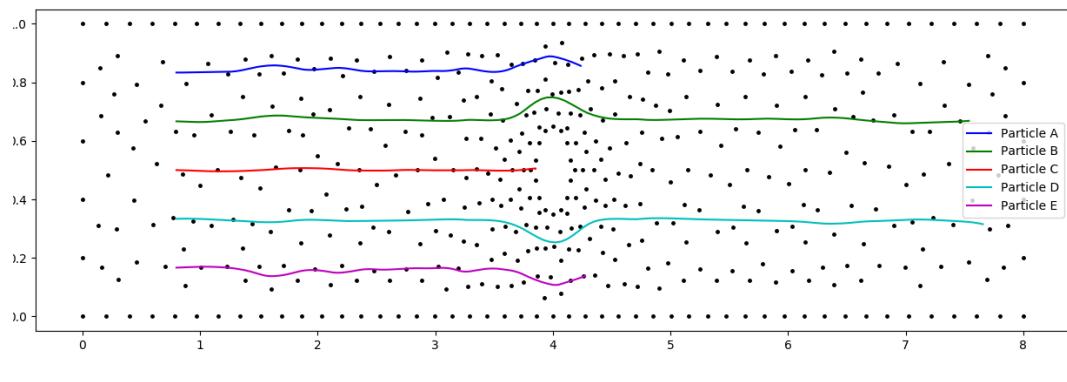
Para auxiliar na visualização do resultado, é exibido em conjunto da velocidade as linhas de corrente do campo, desenhadas com o auxílio de uma ferramenta de desenho das curvas de nível. Observa-se a distorção no campo de velocidades causada pelo obstáculo na Figura 33:



Fonte: Autor.

Figura 33: Campo de velocidades de um escoamento com obstáculo.

E as partículas realizam percursos apresentados na Figura 34:



Fonte: Autor.

Figura 34: Trajeto de partículas inseridas em um escoamento com obstáculo.

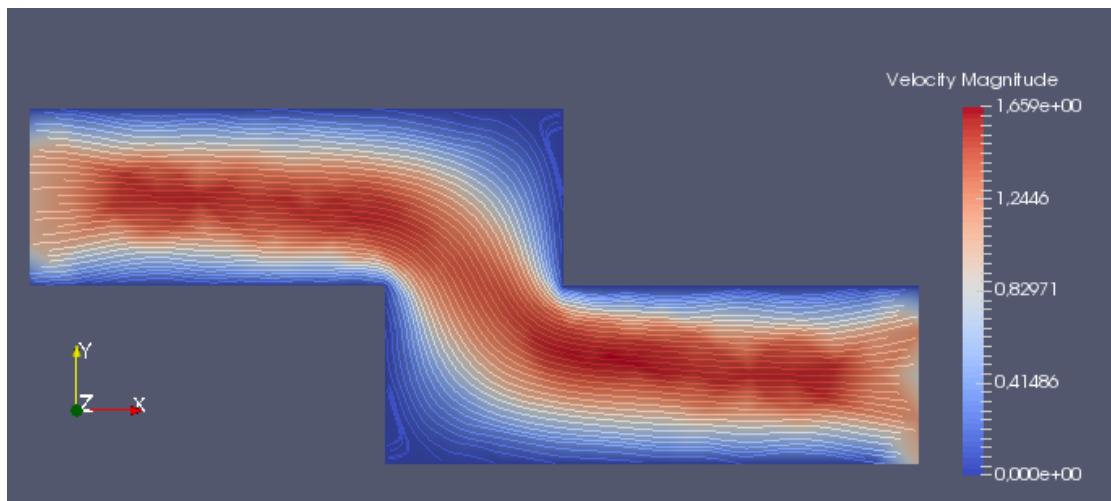
Nesta simulação pode-se observar o efeito do obstáculo que desvia o trajeto das partículas e a colisão de uma delas, que fica retida devido as correntes de velocidade nulas na condição de contorno das paredes.

6.4 Simulação Em Um Canal Com Degrau

No escoamento com degrau há um desvio no trajeto que tende a causar colisões das partículas devio a inércia de seu movimento. Dependendo de suas características, as partículas estão mais propensas a colidirem com a parede direita superior ou serão mais influenciadas pelo fluido e terão sua trajetória alterada.

Para este escoamento são adaptadas as condições anteriores para a geometria de um comprimento $L = 5m$ com altura de entrada e saída de $D = 1m$, o fluido entra com velocidade constante pela região da esquerda com velocidade $\vec{v}_{ent} = (1,0)m/s$. Nas paredes há a condição de não escorregamento, portanto a velocidade nas paredes são nulas, $\vec{v}_{parede} = 0$. A corrente possui uma condição de contorno variando de 0 a 1 onde ela é 0 para as paredes inferiores e 1 para as superiores. E na região vertical esquerda de entrada toma-se a corrente como $\psi_{cc} = y - 1$, e $\psi_{cc} = y$ na região vertical direita de saída.

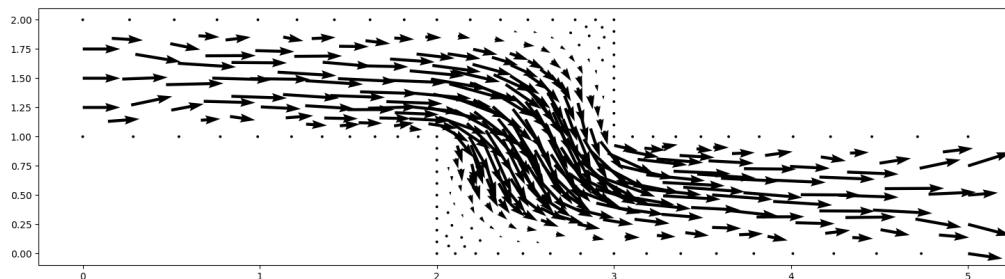
Novamente, são incluídas as curvas de nível da velocidade na exibição do campo de velocidades na Figura 35:



Fonte: Autor.

Figura 35: Campo de velocidades de um escoamento com degrau.

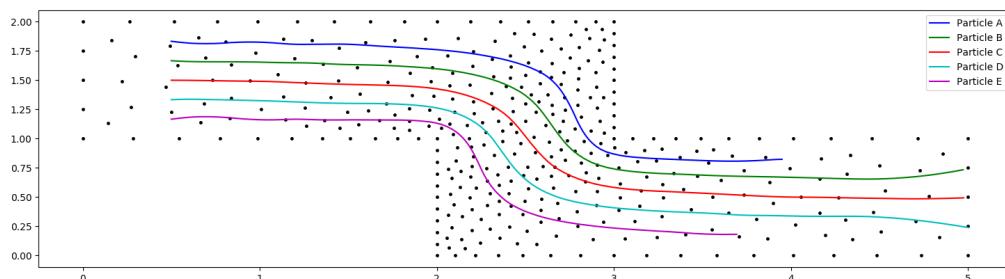
Como outra forma de visualizar o campo de velocidades, são exibidas as velocidades nos nós como vetores em um diagrama de flechas ou *quiver plot*:



Fonte: Autor.

Figura 36: Vetores de velocidades de um escoamento com degrau.

As curvas dos trajetos percorridos pelas partículas nesta simulação são apresentados na Figura 37:



Fonte: Autor.

Figura 37: Trajeto de partículas inseridas em um escoamento com degrau.

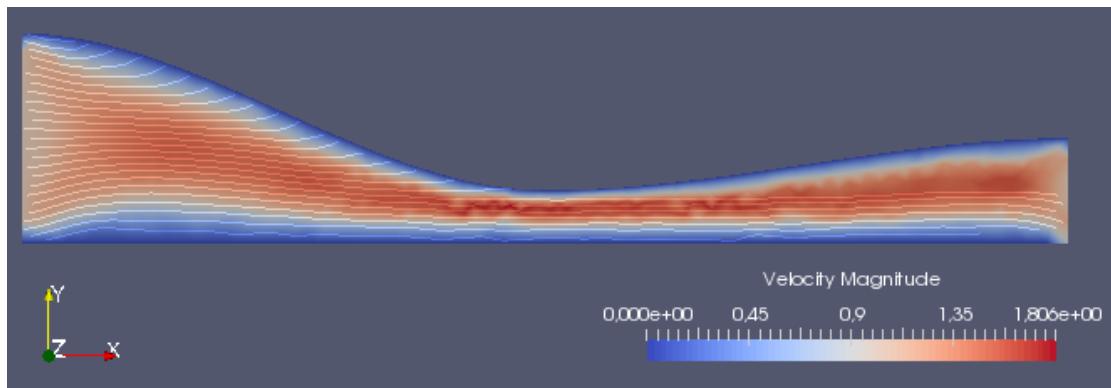
Neste caso, pode-se notar que as partículas seguem a curva realizada pelo escoamento fielmente. Caso as propriedades das partículas fossem alteradas poderia-se encontrar uma situação em que sua inércia fosse grande demais para fazer a curva a tempo e algumas colidiriam na parede.

6.5 Simulação Em Um Canal Com Restrição

No escoamento com restrição há um aumento de velocidade na região restringida. Isto ocorre devido à necessidade de aumentar o fluxo de fluido na região, de maneira a respeitar a Lei da Continuidade (Eq. 2.10).

As condições do escoamento são de um comprimento $L = 10m$ com altura de entrada de $D_{entrada} = 2m$ e uma entrada de saída de $D_{saída} = 1m$. O fluido entra com velocidade constante pela região da esquerda com velocidade $\vec{v}_{ent} = (1, 0)m/s$. Nas paredes há a condição de não escorregamento, portanto a velocidade nas paredes inferior e superior são nulas, $\vec{v}_{sup} = \vec{v}_{inf} = 0$. Novamente a corrente possui uma condição de contorno variando de 0 a 1 nas bordas de acordo com sua posição, equivalente a $\psi_{cc} = y$.

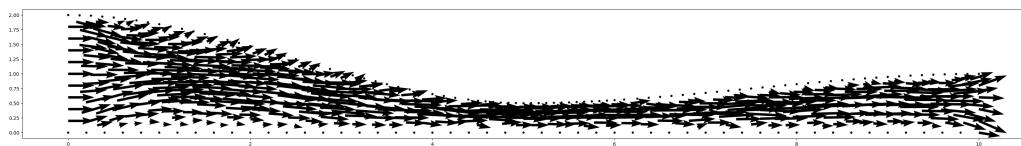
Novamente, são incluídas as curvas de nível da velocidade na exibição do campo de velocidades na Figura 38:



Fonte: Autor.

Figura 38: Campo de velocidades de um escoamento com restrição.

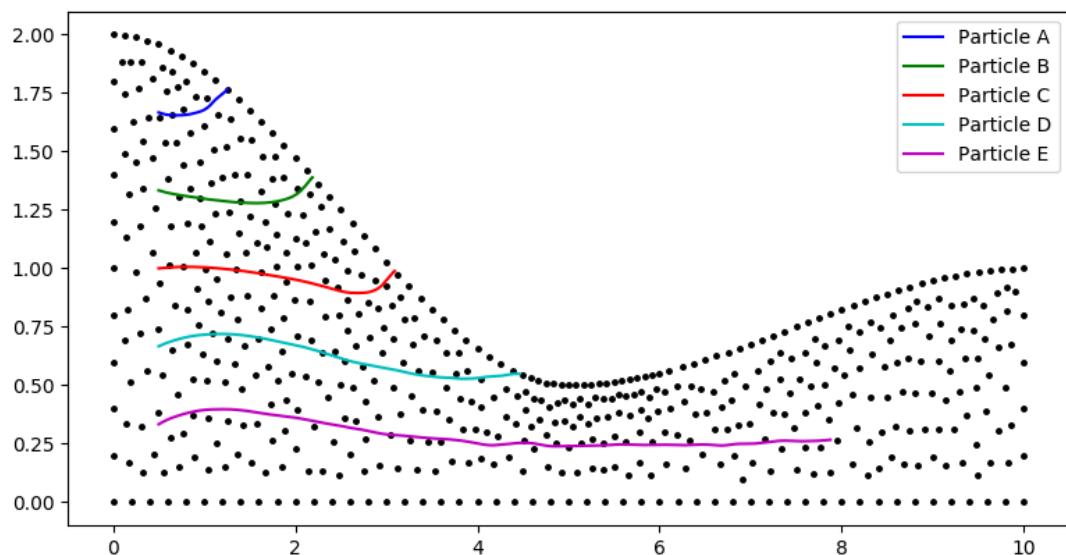
Vizualizando-se os vetores do campo de velocidades, pode-se observar o aumento da velocidade na região restrita e uma componente vertical na velocidade elevado na região inicial do escoamento:



Fonte: Autor.

Figura 39: Vetores de velocidades de um escoamento com restrição.

O trajeto das partículas realizado neste caso é demonstrado na Figura 40:



Fonte: Autor.

Figura 40: Trajeto de partículas inseridas em um escoamento com restrição.

Neste caso pode-se observar a colisão das partículas na extremidade superior logo após a entrada devido a uma corrente criada na região de entrada do escoamento. Ao longo do canal, pode se observar que a partícula sofre uma aceleração ao atravessar a região restringida.

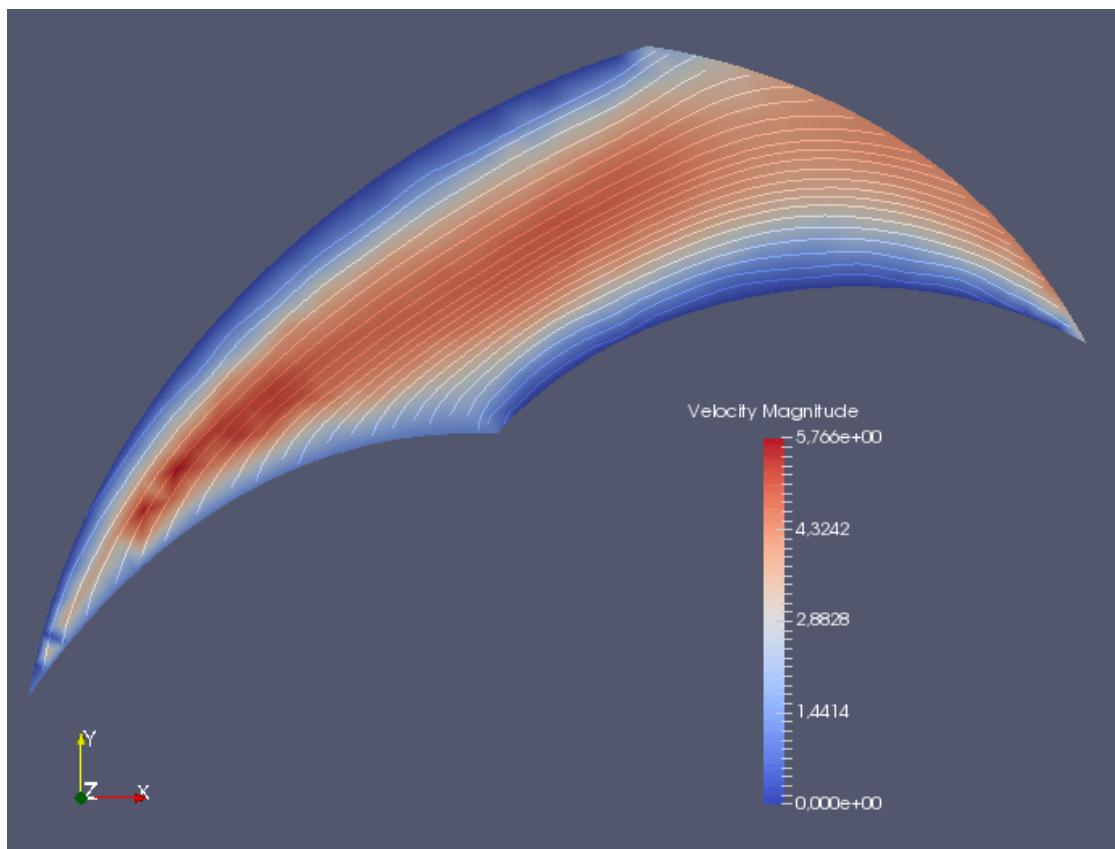
6.6 Simulação Em Uma Pá de Rotor

Finalmente, a simulação em uma pá de rotor visa representar o comportamento das partículas em uma situação real de trabalho de uma turbomáquina. Foram feitas simulações para três tipos de partículas com diferentes materiais e diâmetros. Foram utilizadas partículas de ouro com $\rho_{p,Au} = 20000\text{kg/m}^3$ de densidade e $d_{p,Au} = 1\text{mm} = 1.10^{-3}\text{m}$ de diâmetro, de ferro, com $\rho_{p,Fe} = 7300\text{kg/m}^3$ de densidade e $d_{p,Fe} = 1\text{mm} = 1.10^{-3}\text{m}$ de diâmetro, e de areia com $\rho_{p,Areia} = 1600\text{kg/m}^3$ de densidade e $d_{p,Au} = 0.5\text{mm} = 5.10^{-4}\text{m}$ de diâmetro. Com respeito ao tempo entre instantes, foram utilizados os intervalos de $dt = 3.33e^{-5}\text{s}$ para a simulação com partículas de ouro, $dt = 8.11e^{-6}\text{s}$, para a de ferro e $dt = 4.44e^{-7}\text{s}$ para a de areia. Já que quanto menor forem o tamanho e densidade das partículas torna-se necessário um intervalo para garantir a convergência.

A geometria pá foi extraída de um contorno de uma pá real de uma bomba exemplo, porém feitas em escala. Foi tomado um arco na seção de entrada gerado com raio de $R_{ent} = 0.5\text{m}$, e a saída com um arco de $R_{sai} = 1.0\text{m}$. A velocidade de entrada do fluido foi atribuída como $\vec{v}_{ent} = (0, 1)\text{m/s}$, no arco de entrada na região inferior. Novamente, utiliza-se a condição de não escorregamento das paredes laterais, portanto na parede esquerda e direita tem-se $\vec{v}_{parede} = 0$. A função de corrente na parede esquerda é aplicada como 1 e na direita como 0. Para a região de entrada, a corrente é tomada com valor crescente começando por 0 no ponto coincidente com a parede direita até 1 com o ponto presente na parede esquerda, similarmente é realizado o reciproco para a região de saída.

Neste trabalho, não serão levadas em conta as forças provenientes da rotação da máquina. Portanto, é assumido que o domínio presente da pá é estacionário e é tomado como referência.

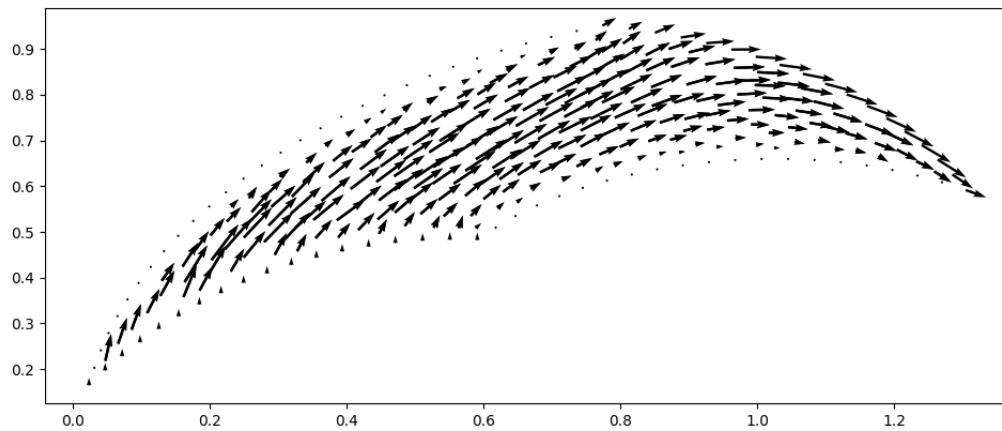
Novamente, são incluidas as curvas de nível da velocidade na exibição do campo de velocidades na Figura 41:



Fonte: Autor.

Figura 41: Campo de velocidades de um escoamento em uma pá de um rotor.

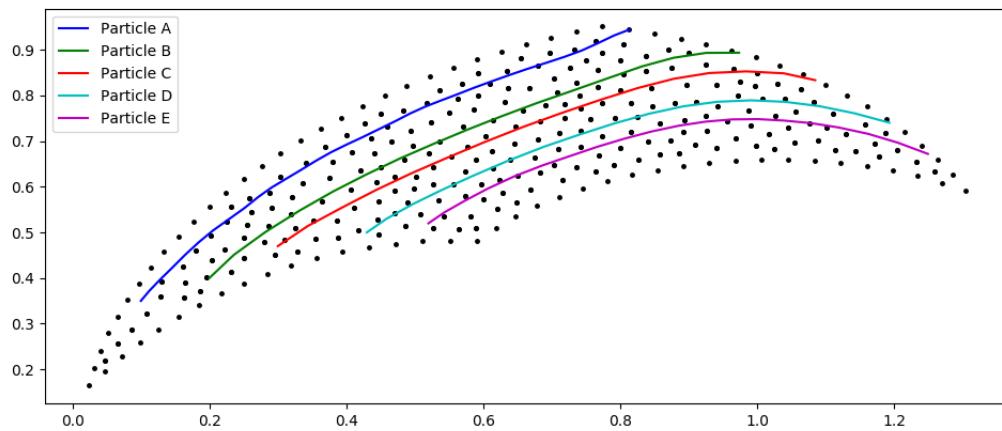
E os vetores das velocidades nos nós:



Fonte: Autor.

Figura 42: Vetores de velocidades de um escoamento em uma pá de um rotor.

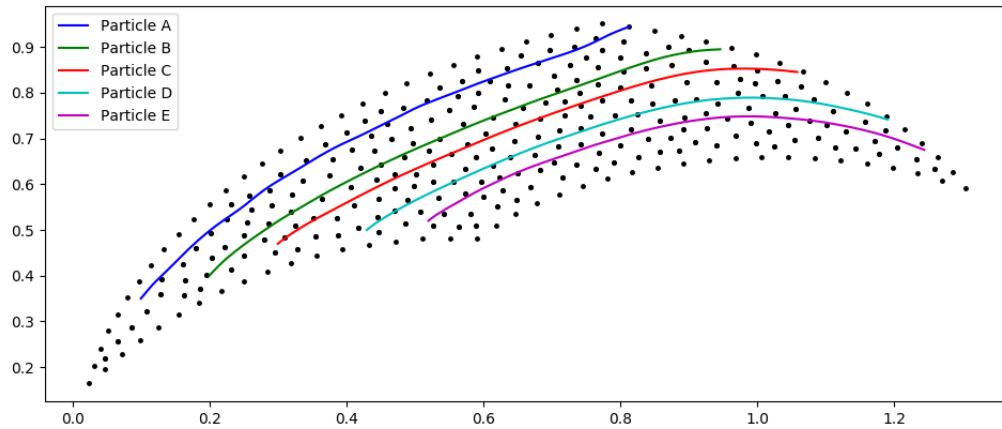
O resultado da simulação com as partículas de ouro na pá do rotor resultou no trajeto exibido na Figura 43:



Fonte: Autor.

Figura 43: Trajeto de partículas de ouro inseridas em um escoamento em uma pá de um rotor.

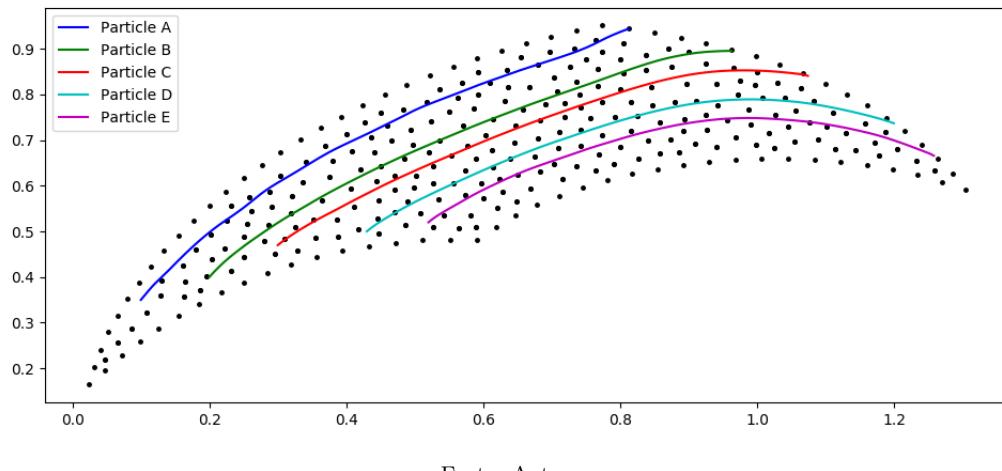
Na simulação de partículas de ferro foi verificado o comportamento demonstrado na Figura 44:



Fonte: Autor.

Figura 44: Trajeto de partículas de ferro inseridas em um escoamento em uma pá de um rotor.

E, finalmente, as partículas de areia realizaram a trajetória apresentada na Figura 45:



Fonte: Autor.

Figura 45: Trajeto de partículas de areia inseridas em um escoamento em uma pá de um rotor.

Pode-se observar que as partículas seguem ao longo geometria da pá, até

mesmo a partícula mais distante acompanha as demais devido a uma região de velocidade elevada presente no canto esquerdo inferior.

As simulações com partículas mais leves levaram um tempo elevado para serem concluídas, devido a sua restrição no intervalo de cálculos. Isto causou uma variação grande no tempo de cálculo das simulações, onde a simulação com partículas de ouro demorou em torno de 2h para ser completada, e as de ferro e areia demoraram em torno de 6h e 12h horas, respectivamente.

CONCLUSÃO

Aqui entra sua conclusão!!

REFERÊNCIAS

- [1] BAKER, J. Flow-regime transitions at elevated pressures in vertical two-phase flow.
- [2] ELGHOBASHI, S. Particle-laden turbulent flows: direct simulation and closure models. *Flow, Turbulence and Combustion*, Springer, v. 48, p. 301–314, 1991. ISSN 1386-6184,1573-1987. Disponível em: <[/scimag/10.1007%2Fbf02008202](https://doi.org/10.1007%2Fbf02008202)>.
- [3] BALACHANDAR S.; EATON, J. K. Turbulent dispersed multiphase flow. *Annual Review of Fluid Mechanics*, Annual Reviews, v. 42, p. 111–133, 2010. ISSN 0066-4189,1545-4479. Disponível em: <[/scimag/10.1146%2Fannurev.fluid.010908.165243](https://doi.org/10.1146%2Fannurev.fluid.010908.165243)>.
- [4] ELGHOBASHI, S. On predicting particle-laden turbulent flows. *Flow, Turbulence and Combustion*, Springer, v. 52, p. 309–329, 1994. ISSN 1386-6184,1573-1987. Disponível em: <[/scimag/10.1007%2Fbf00936835](https://doi.org/10.1007%2Fbf00936835)>.
- [5] SO, S. L. *Instrumentation for Fluid-Particle Flow*. [S.l.]: Noyes Publications, 1999. ISBN 0-8155-1433-6.
- [6] HUSSEIN M. FATHY; TABAKOFF, W. Dynamic behavior of solid particles suspended by polluted flow in a turbine stage. *Journal of Aircraft*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, v. 10, p. 434–440, 1973. ISSN 0021-8669,1533-3868.
- [7] TABAKOFF W.; HAMED, A. The dynamics of suspended solid particles in a two-stage gas turbine. *Journal of Turbomachinery*, The American Society of Mechanical Engineers, v. 108, p. 298, 1986. ISSN 0889-504X.

- [8] UZOL, O. et al. Experimental investigation of unsteady flow field within a two stage axial turbomachine using particle image velocimetry. *ASME Turbo Expo 2002: Power for Land, Sea, and Air*.
- [9] GHENAIET, A.; TAN, S. C.; ELDER, R. L. Prediction of an axial turbomachine performance degradation due to sand ingestion. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part A: Journal of Power and Energy*, v. 219, n. 4, p. 273–287, 6 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1243/095765005X7592>>.
- [10] CENTRIFUGAL Pump Help-John Anspach Consulting. <http://jacpump.files.wordpress.com/2011/04/thermalchgo-017w2.jpg>. Acessado: 2019-05-15. Disponível em: <<http://jacpump.files.wordpress.com/2011/04/thermalchgo-017w2.jpg>>.
- [11] PONTES, J. da R. M.; MANGIAVACCHI, N. *Fenômenos de Transferência*. [S.l.]: SBM, 2010.
- [12] CROWE, C. T. *Multiphase Flows with Droplets and Particles*. [S.l.]: CRC Press, 2011. ISBN 978-1-4398-4050-4,978-1-4398-4051-1.
- [13] ANJOS, G. R. dos. *Hydrodynamics Field Solution of electrochemical Cells Through Finite Element Method*. Tese (Doutorado) — Federal University of Rio de Janeiro, Brazil.
- [14] LEWIS, R. W.; NITHIARASU, P.; SEETHARAMU, K. *Fundamentals Of The Finite Element Method For Heat And Fluid Flow*. [S.l.]: Wiley, 2004. ISBN 9780470847886,0-470-84788-3,0-470-84789-1.
- [15] GEUZAIN, C.; REMACLE, J.-F. Gmsh: A 3-d finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, John Wiley and Sons, v. 79, 2009.

- [16] WALT, S. van der; COLBERT, S. C.; VAROQUAUX, G. The numpy array: A structure for efficient numerical computation. *Computing in Science & Engineering*, AIP, 2011. Disponível em: <<https://www.numpy.org/>>.
- [17] HUNTER, J. D. Matplotlib: A 2d graphics environment. *Computing in Science & Engineering*, AIP, 2007. Disponível em: <<https://matplotlib.org/>>.
- [18] AHRENS, J.; GEVECI, B.; LAW, C. *ParaView: An End-User Tool for Large Data Visualization*. [S.l.]: Elsevier, 2005. ISBN 978-0123875822.
- [19] ROSSUM, G. van. *Python Language Reference*. version 3.5. [S.l.], 1995–. Disponível em: <<https://www.python.org>>.
- [20] JONES, E. et al. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. 2001–. Disponível em: <<https://www.scipy.org/>>.