Simulação Numérica De Escoamentos Dispersos Em Turbomáquinas Utilizando Método De Elementos Finitos

Lucas Carvalho De Sousa
Gustavo Rabello Dos Anjos

Universidade do Estado do Rio de Janeiro

encarvlucas@hotmail.com

25 de Junho de 2019

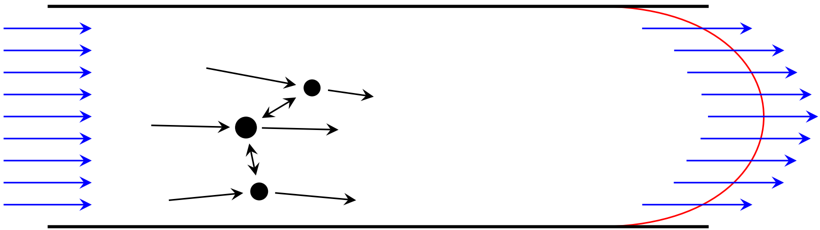
Sumário

Introdução

Simulação de Escoamentos Bidimensionais com Partículas

Objetivos deste trabalho:

Desenvolver uma biblioteca de Python para a simulação de escoamentos particulados.

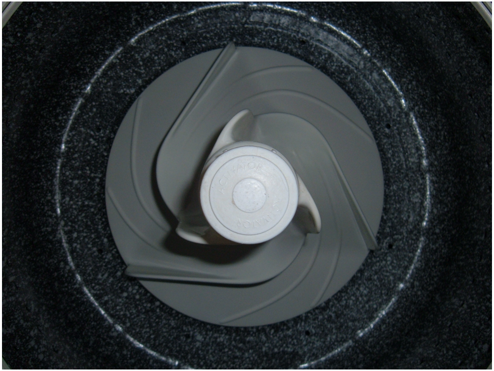


Escoamento entre placas, Hagen-Poiseuille.

Escoamentos em Turbomáquinas

Objetivos deste trabalho:

Estudar como partículas se comportam dentro de uma turbomáquina em funcionamento.



Fonte:© BrokenSphere / Wikimedia Commons.

Equações de Governo

Formulação Corrente-Vorticidade

Hipóteses tomadas

- Fluído incompressível
- Fluído newtoniano

Equação de Navier-Stoakes

$$\frac{\partial \vec{v}_f}{\partial t} + \vec{v}_f . \vec{\nabla} \vec{v}_f = -\frac{1}{\rho_f} \vec{\nabla} p + \frac{\mu_f}{\rho_f} \nabla^2 \vec{v}_f + \vec{g}$$

Desvantagens

- Acoplamento da pressão e velocidade
- Exige elementos de ordem elevada

Formulação Corrente-Vorticidade

Equação da Vorticidade

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{v}_f . \vec{\nabla} \vec{\omega} = \frac{\mu_f}{\rho_f} \nabla^2 \vec{\omega}$$

Equação da Corrente

$$\nabla^2 \psi = -\omega_z$$

Equações Auxiliares

$$\vec{v}_f = (v_{f,x} \, , v_{f,y})$$

$$v_{f,x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$v_{f,y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\omega_z = \frac{\partial v_{f,x}}{\partial y} - \frac{\partial v_{f,y}}{\partial x}$$

Equação de Basset–Boussinesq–Oseen (BBO)

Equação que representa as forças exercidas sobre as partículas. Sua expressão é a soma das forças separadamente.

Equação de Basset–Boussinesq–Oseen

$$\vec{F}_p = \sum \vec{F} = \vec{F}_{grav} + \vec{F}_{drag} + \vec{F}_{lift} + \vec{F}_{mass}$$

Restrição

A equação BBO é somente válida para Reynolds da partícula menores que 1. $Re_p < 1$

Reynolds de Partícula

$$Re_p = \frac{\rho_p}{\mu_f} \left| (\vec{v}_f - \vec{v}_p) \right|_{max} d_p$$

Equação de Basset–Boussinesq–Oseen (BBO)

Força Gravitacional

$$\vec{F}_{grav} = m_p \vec{g}$$

Força de Sustentação

$$\vec{F}_{lift} = 1.61 \mu_f d_p \left(\vec{v}_f - \vec{v}_p\right) \sqrt{Re_G}$$

Força de Arrasto

$$\vec{F}_{drag} = 3\pi \mu_f d_p \left(\vec{v}_f - \vec{v}_p\right)$$

Força de Massa Virtual

$$\vec{F}_{mass} = \frac{1}{2} \rho_f V_p \frac{d}{dt} \left(\vec{v}_f - \vec{v}_p\right)$$

Reynolds de Cisalhamento

$$Re_G = \frac{\rho_f}{\mu_f} d_p^2 \nabla \vec{v}_f$$

Métodos Numéricos

Método dos Elementos Finitos

Domínio

Equações são definidas em um domínio Ω com contorno Γ.

Forma forte com as funções peso

$$\int_{\Omega}\left(\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t}+\vec{v}_f.\vec{\nabla}\vec{\omega}-\frac{\mu_f}{\rho_f}\nabla^2\vec{\omega}\right).\vec{\delta}d\Omega=0$$

$$\int_{\Omega}\left(\nabla^2\psi+\omega_z\right).\vec{\phi}d\Omega=0$$

$$\int_{\Omega}\left(\vec{v}_f-\left(\frac{\partial\psi}{\partial y},-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\right).\vec{\xi}d\Omega=0$$

Condições de contorno

$$\omega=\omega_\Gamma \text{ em } \Gamma$$

$$\psi=\psi_\Gamma \text{ em } \Gamma$$

$$\vec{v}_f=\vec{v}_{f\Gamma} \text{ em } \Gamma$$

$\vec{\delta}$, $\vec{\phi}$ e $\vec{\xi}$ são as funções de peso de cada equação.

Método dos Elementos Finitos

Forma fraca

$$m_1\left(\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t},\delta\right)+g_1(\vec{v}_f,\vec{\delta})+\frac{\mu_f}{\rho_f}k_1(\vec{\omega},\vec{\delta})=0$$

$$-k_2(\psi,\vec{\phi})+m_2(\omega_z,\vec{\phi})=0$$

$$m_3(\vec{v}_f,\vec{\xi})-g_3(\psi,\vec{\xi})=0$$

Onde:

$$m_1\left(\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t},\delta\right)=\int_\Omega \frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t}.\vec{\delta}d\Omega$$

$$g_1(\vec{v}_f,\vec{\delta})=\int_\Omega \vec{v}_f.\vec{\nabla}\vec{\omega}.\vec{\delta}d\Omega$$

$$k_1(\vec{\omega},\vec{\delta})=\int_\Omega \vec{\nabla}\vec{\omega}.\vec{\nabla}\vec{\delta}d\Omega$$

$$k_2(\psi,\vec{\phi})=\int_\Omega \vec{\nabla}\psi.\vec{\nabla}\vec{\phi}d\Omega$$

$$m_2(\omega_z,\vec{\phi})=\int_\Omega \omega_z.\vec{\phi}d\Omega$$

$$m_3(\vec{v}_f,\vec{\xi})=\int_\Omega \vec{v}_f.\vec{\xi}d\Omega$$

$$g_3(\psi,\vec{\xi})=\int_\Omega\left(\frac{\partial\psi}{\partial y},-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right).\vec{\xi}d\Omega$$

Discretização do Modelo de Escoamentos

Formulação de Galerkin

Funções de peso são definidas com valor igual às funções interpoladoras.

$$\omega(\vec{x},t) = \sum_{i=1}^{n_p} \omega_i(t) N_i(\vec{x})$$

$$\psi(\vec{x},t) = \sum_{i=1}^{n_p} \psi_i(t) N_i(\vec{x})$$

$$v_{f,x}(\vec{x},t) = \sum_{i=1}^{n_p} v_{f,x,i}(t) N_i(\vec{x})$$

$$v_{f,y}(\vec{x},t) = \sum_{i=1}^{n_p} v_{f,y,i}(t) N_i(\vec{x})$$

$$\delta(\vec{x},t) = \sum_{j=1}^{n_p} \delta_i(t) N_j(\vec{x})$$

$$\phi(\vec{x},t) = \sum_{j=1}^{n_p} \phi_i(t) N_j(\vec{x})$$

$$\xi(\vec{x},t) = \sum_{j=1}^{n_p} \xi_i(t) N_j(\vec{x})$$

Discretização do Modelo de Escoamentos

Função de Aproximação

$N(x)$ é a função de aproximação de cada elemento:

$$N_i(\vec{x}) = [N_1(\vec{x}), \ldots, N_{n_p}(\vec{x})]$$

Matrizes locais dos elementos

Surgem os termos locais, para cada elemento e:

$$\mathbf{m^e} = \int_{\Omega^e} N_i^e N_j^e \, d\Omega^e$$

$$\mathbf{g_x^e} = \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} N_j^e \, d\Omega^e$$

$$\mathbf{g_y^e} = \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} N_j^e \, d\Omega^e$$

$$\mathbf{k_{xx}^e} = \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} \, d\Omega^e$$

$$\mathbf{k_{yy}^e} = \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \, d\Omega^e$$

Discretização do Modelo de Escoamentos

Discretização no tempo

Para os termos temporais é utilizada o Método de Diferenças Finitas:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} \approx \frac{\omega(t+dt) - \omega(t)}{dt} = \frac{\omega^{t_{n+1}} - \omega^{t_n}}{dt}$$

Equações na forma global

$$\left(\mathbf{M} v_{f,x}^{t_n} \mathbf{G_x} + v_{f,y}^{t_n} \mathbf{G_y} + \frac{\mu_f}{\rho_f} \left(\mathbf{K_{xx}} + \mathbf{K_{yy}} \right) \right) \omega^{t_{n+1}} = \mathbf{M} \omega^{t_n}$$

$$\left(\mathbf{K_{xx}} + \mathbf{K_{yy}} \right) \psi = \mathbf{M} \omega^{t_{n+1}}$$

$$\mathbf{M} v_{f,x}^{t_n} \omega^{t_{n+1}} = \mathbf{G_y} \psi$$

$$\mathbf{M} v_{f,y}^{t_n} \omega^{t_{n+1}} = -\mathbf{G_x} \psi$$

Discretização do Modelo de Partículas

Equações das forças nas partículas

$$\vec{F}^{t_n}_{grav} = m_p \vec{g}$$

$$\vec{F}^{t_n}_{drag} = 3\pi\mu_f d_p \left(\vec{v}_f^{\,t_n} - \vec{v}_p^{\,t_{n-1}} \right)$$

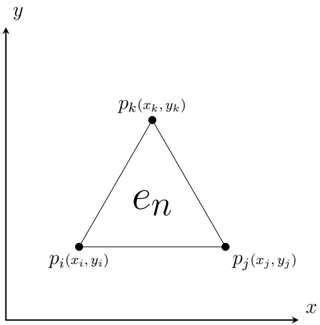
$$\vec{F}^{t_n}_{lift} = 1.61\mu_f d_p \left(\vec{v}_f^{\,t_n} - \vec{v}_p^{\,t_{n-1}} \right) \sqrt{Re_G^{t_n}}$$

$$\vec{F}^{t_n}_{mass} = \frac{1}{2}\rho_f V_p \frac{\left(\vec{v}_f^{\,t_n} - \vec{v}_p^{\,t_{n-1}} \right) - \left(\vec{v}_f^{\,t_{n-1}} - \vec{v}_p^{\,t_{n-2}} \right)}{dt}$$

Reynolds específicos

$$Re_p^{t_n} = \frac{\rho_p}{\mu_f} d_p \left| \vec{v}_f^{\,t_n} - \vec{v}_p^{\,t_{n-1}} \right|_{max} \qquad Re_G^{t_n} = \frac{d_p^2 \rho_f}{\mu_f} \left(\frac{d\vec{v}_f}{d\vec{r}} \right)^{t_n}$$

Matrizes dos Elementos Triangulares



Elemento triangular linear.

Coordenadas relativas

$$\mathbf{b}\begin{cases} b_i = y_j - y_k \\ b_j = y_k - y_i \\ b_k = y_i - y_j \end{cases} \qquad \mathbf{c}\begin{cases} c_i = x_k - x_j \\ c_j = x_i - x_k \\ c_k = x_j - x_i \end{cases}$$

Matrizes de Gradiente

$$\mathbf{g_x^e} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ b_i & b_j & b_k \\ b_i & b_j & b_k \end{bmatrix} \qquad \mathbf{g_y^e} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} c_i & c_j & c_k \\ c_i & c_j & c_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix}$$

Matriz de Massa

$$\mathbf{m^e} = \frac{A^e}{12}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Matrizes de Rigidez

$$\mathbf{k_{xx}^e} = \frac{t_h}{4A}\begin{bmatrix} b_i b_i & b_j b_i & b_k b_i \\ b_i b_j & b_j b_j & b_k b_j \\ b_i b_k & b_j b_k & b_k b_k \end{bmatrix} \qquad \mathbf{k_{yy}^e} = \frac{t_h}{4A}\begin{bmatrix} c_i c_i & c_j c_i & c_k c_i \\ c_i c_j & c_j c_j & c_k c_j \\ c_i c_k & c_j c_k & c_k c_k \end{bmatrix}$$

Código

Montagem das Matrizes Globais

Algoritmo de montagem

$$\mathbf{m}_{e_n} = \begin{bmatrix} m_{ii} & m_{ij} & m_{ik} \\ m_{ji} & m_{jj} & m_{jk} \\ m_{ki} & m_{kj} & m_{kk} \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{l=i,j,k} \\ \text{q=i,j,k}}]{\text{loop}} \mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_{0,0} & M_{0,1} & \cdots & M_{0,n_p} \\ M_{1,0} & \ddots & & M_{1,n_p} \\ \vdots & & M_{l,q} + m_{l,q} & \vdots \\ M_{n_p,0} & & & M_{n_p,n_p} \end{bmatrix}$$

```
# Loop em cada elemento na lista da malha
for elem in malha.ien:
    x = malha.x[elem] # = [x_i, x_j, x_k]
    y = malha.y[elem] # = [y_i, y_j, y_k]

    # Criação das matrizes locais
    ...

    # Registro das matrizes locais nas matrizes globais
    for i in range(3):
        for j in range(3):
            kx_global[elem[i], elem[j]] += k_x[i][j]
            ky_global[elem[i], elem[j]] += k_y[i][j]
            m_global[elem[i], elem[j]] += m[i][j]
            gx_global[elem[i], elem[j]] += g_x[i][j]
            gy_global[elem[i], elem[j]] += g_y[i][j]
```

Estrutura de Uso da Biblioteca

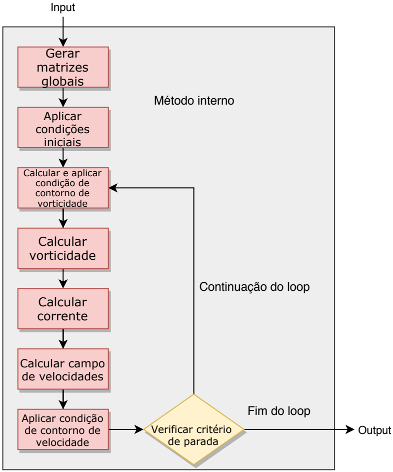
Fluxograma da lógica de uso da biblioteca pelo usuário.

Exemplo de uso da biblioteca

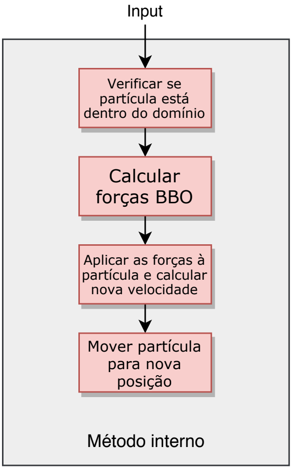
```
# Importação da biblioteca
import TccLib

# Importação da malha ou coordenadas de uma nova
malha = TccLib.Mesh("arquivo_da_malha.msh")
# ou malha = TccLib.Mesh([coordenadas (x, y)]

# Adição de partículas
malha.add_particle(propriedades da partícula)
```

```
# Definição das condições de contorno
malha.new_boundary_condition("nome da propriedade",
                [índices dos nós],
                [valor da condição no nó],
                [1 para Dirichlet ou 0 para Neumann])

# Chamada para a função de solução
v_x, v_y = TccLib.solve_velocity_field(malha)

# Loop de movimentação das partículas
for t in time_list:
    TccLib.move_particles(malha, (v_x, v_y))
```

Estrutura de Solução



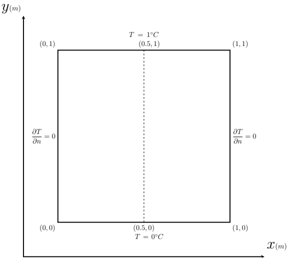
Algoritmo de solução do sistema de corrente-vorticidade.



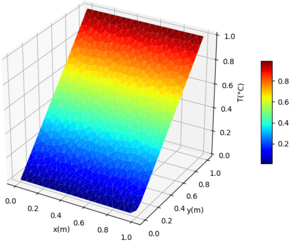
Algoritmo de solução da posição das partículas.

Validações e Resultados

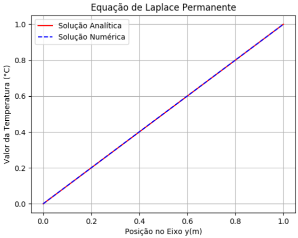
Validações de Problemas em Sólidos



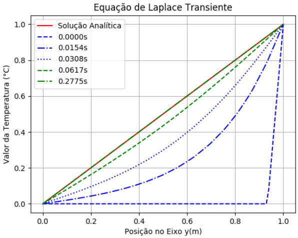
Condições de contorno em uma placa sólida.



Resultado da simulação na placa.

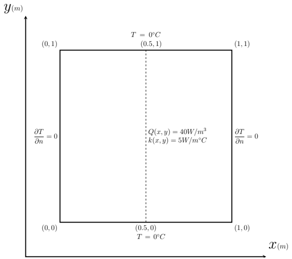


Comparação do resultado permanente.

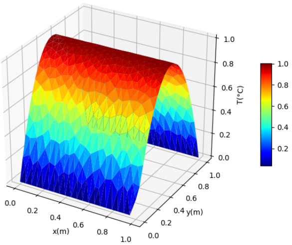


Comparação do resultado transiente.

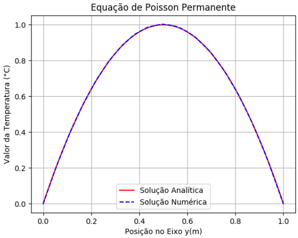
Validações de Problemas em Sólidos



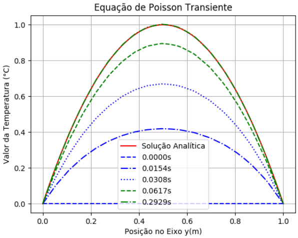
Placa com geração de calor.



Resultado da simulação na placa.

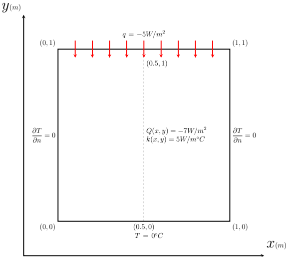


Comparação do resultado permanente.

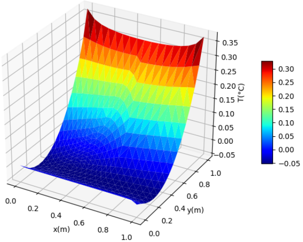


Comparação do resultado transiente.

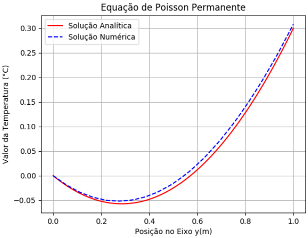
Validações de Problemas em Sólidos



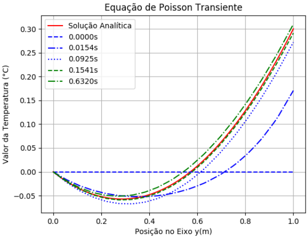
Placa com fluxo e geração de calor.



Resultado da simulação na placa.

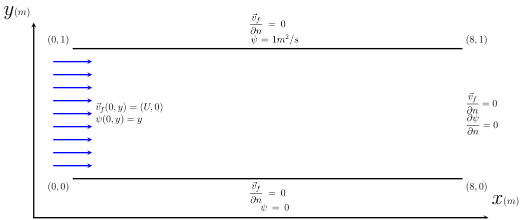


Comparação do resultado permanente.

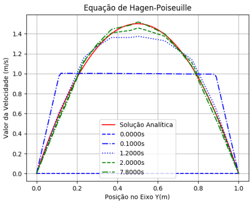


Comparação do resultado transiente.

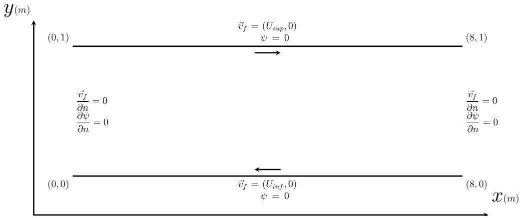
Validações do Modelo Corrente-Vorticidade



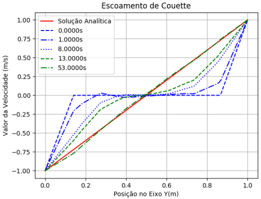
Escoamento entre placas estacionárias (Poiseuille).



Comparação com solução analítica.



Escoamento entre placas em movimento (Couette).



Comparação com solução analítica.

Agradecimentos

Muito Obrigado!