



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Faculdade de Engenharia

Silveira Luís Victorino

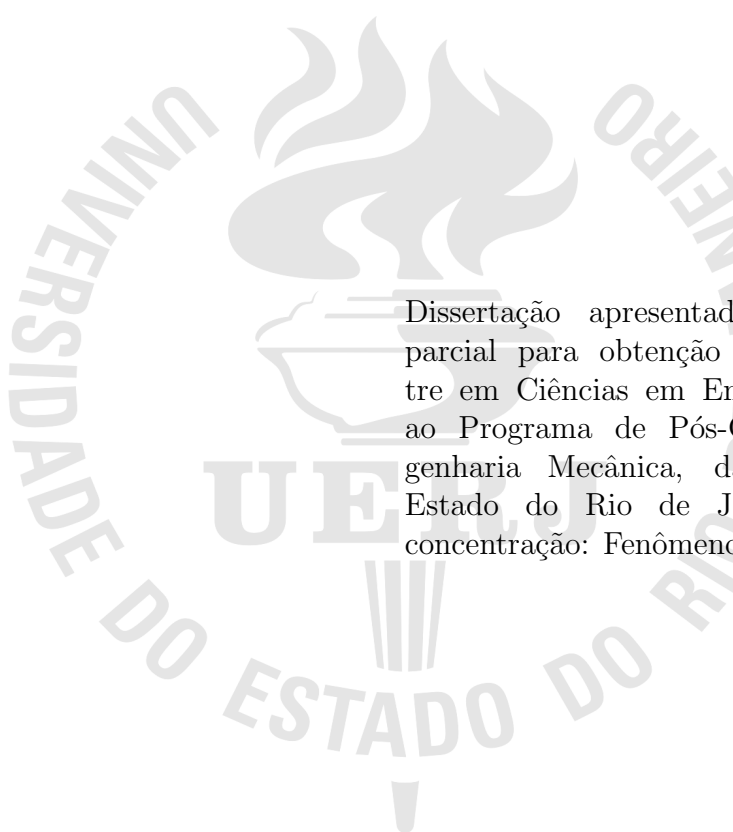
**Simulação numérica da cavitação em turbomáquinas usando
uma formulação Euler-Lagrange**

Rio de Janeiro

2014

Silveira Luís Victorino

**Simulação numérica da cavitação em turbomáquinas usando uma formulação
Euler-Lagrange**



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências em Engenharia Mecânica, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Fenômenos de Transporte.

Orientador: Prof. Dr. Norberto Mangiavacchi

Rio de Janeiro

2014

Silveira Luís victorino

**Simulação numérica da cavitação em turbomáquinas usando uma formulação
Euler-Lagrange**

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências em Engenharia Mecânica, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Fenômenos de Transporte.

Aprovado em: Março de 2014

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Norberto Mangiavacchi (Orientador)
Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica - UERJ

Prof. Dr. Manoel Antônio da Fonseca Costa Filho
Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica - UERJ

Prof. Dr. Mauro Carlos Lopes Souza
Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica - UERJ

Dr. Gustavo Rabello dos Anjos
Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica - UERJ

Prof. Dr. José Pontes
Programa de Pós-graduação em Engenharia Metalúrgica e de Materiais - COPPE/UFRJ

Rio de Janeiro

2014

Dedico este trabalho às pessoas mais importantes da minha vida, as pessoas que me tornaram o Homem que sou hoje; Aos meus pais, Carolina e Armando, com muito amor.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus Pai Todo Poderoso pelo fôlego de vida. Gostaria de agradecer a Ele por uma vida tão repleta de bênçãos, começando pela família maravilhosa que Ele escolheu para mim. Pelos tantos momentos de felicidade e também pelos não tão felizes assim, que, além de me deixarem mais forte fizeram-me crescer e perceber que sou rodeado de pessoas maravilhosas.

A minha mãe Carolina e ao meu pai Armando. Para eles, por mais que eu escreva e tente explicar, jamais conseguirei expressar minha gratidão tal como ela é. Dedicar esse trabalho a eles é o mínimo que eu poderia fazer pelo que eles fizeram e fazem por mim todos os dias. Por tudo o meu muito obrigado.

Aos meus irmãos pelo incentivo, conselho e carinho que me têm dado.

A minha amiga, companheira de todos os dias, minha namorada Lidiana Siqueira por tudo.

A todos os professores que, direta ou indiretamente, contribuíram para o sucesso deste trabalho.

Ao meu professor e orientador Norberto Mangiavacchi pelo suporte nas pesquisas e o grande contributo para tornar realidade este trabalho. Mais que um professor e orientador ele é um exemplo de profissional e de ser humano.

A Rachel Lucena, pelas ajudas e dicas para se familiarizar com o Latex.

A comunidade acadêmica do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da UERJ em geral, professores, colegas e funcionários.

Ao Gesar pelas instalações e a CAPES pelo suporte financeiro.

*“Talvez não tenha conseguido fazer o
melhor, mas lutei para que o melhor fosse
feito. Não sou o que deveria ser, mas
Graças a Deus, não sou o que era antes”.*

Marthin Luther King

RESUMO

Turbomáquinas são máquinas operacionais que transferem energia mecânica entre um rotor e um fluido. Estas máquinas têm muitas aplicações industriais. Um dos componentes de uma turbomáquina responsável pela transferência da energia, ou receber a rotação do eixo e transformar em energia de fluido em caso de bomba ou transferir a energia do fluido para o eixo em caso de uma turbina, é o impelidor ou rotor. O fenômeno da cavitação envolve escoamento bifásico: o líquido a ser bombeado e as bolhas de vapor que são formadas durante o processo de bombeamento. O processo de formação dessas bolhas é complexo, mas ocorre principalmente devido a presença de regiões de pressões muito baixas. O colapso dessas bolhas pode muitas vezes levar a deterioração do material, dependendo da intensidade ou da velocidade de colapso das bolhas. O principal objetivo deste trabalho foi estudar o comportamento hidrodinâmico do escoamento nos canais do impelidor de uma turbomáquina do tipo radial usando recursos de fluidodinâmica computacional (CFD). Uma abordagem Euler-Lagrange acoplada com o modelo da equação de Langevin foi empregada para estimar a trajetória das bolhas. Resultados das simulações mostram as particularidades de um escoamento líquido-bolha de vapor passando em um canal de geometria curva, fornecendo assim informações que podem nos ajudar na prevenção da cavitação nessas máquinas.

Palavras-chave: Simulação numérica, cavitação, DFC (Dinâmica dos fluidos computacional).

ABSTRACT

Turbomachines are operational machines that transfer mechanical energy between a rotor and a fluid. This type of machinery is employed in many. One of the main components of a turbomachine responsible for the energy transference, either receiving the rotation of the shaft and transforming it into fluid energy in the case of a pump or transferring energy from the fluid to the shaft in the case of a turbine, is the impeller or rotor. The cavitation phenomenon involves two-phase flow: the liquid to be pumped and the vapor bubbles which are formed during pumping. The formation process of these bubbles is complex, but occurs mainly due to the presence of regions of very low pressure. The collapse of the bubbles can often lead to a deterioration of the material, depending on the intensity or speed of bubbles collapse. The main objectives of this work was to study the hydrodynamic behavior of the flow in the impeller channels of a turbomachine (radial flow turbopump) using computational fluid dynamics (CFD resources). An Euler-Lagrange approach coupled with the Langevin equation model, was employed to estimate the bubbles tracking trajectory. Results of the simulations show the details of liquid-vapor bubble flow in a curved channel, providing insights that help us in the cavitation prevent of this machines.

Keywords: Numerical simulation, Cavitation, CFD (computational fluid dynamics).

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Cavitação em venturi dotado de estrangulamento [1]	16
Figura 2 - Diagrama de fase de uma substância pura [2]	19
Figura 3 - Modelo de colapso da bolha de cavitação [1]	20
Figura 4 - Danos por cavitação em impelidores [1].....	21
Figura 5 - Fotografias em séries de colapso de uma bolha próxima de uma superfície sólida e gráfico de pressão da bolha [2]	22
Figura 6 - Escoamento de partículas ao longo de um canal [3]	24
Figura 7 - Canal reto	28
Figura 8 - Força de massa virtual para apenas uma bolha [4]	39
Figura 9 - Exemplo de malha triangular e os volumes de controle associados a esta malha.....	46
Figura 10- Trajetória dimensional da partícula da posição do nó atual ω_i^{n+1} até seu correspondente ponto de partida ω_d^n . O algoritmo implementado consiste em localizar cada elemento anterior até achar o ponto de partida \mathbf{x}_d . O estado atual da implementação é linear, assim a trajetória é aproximada por um segmento de reta [3]	51
Figura 11- Malha do canal reto	54
Figura 12- Representação dos locais onde foram definidas as condições de contorno do canais com geometria reta e curva, respectivamente	55
Figura 13- Malha do canal reto	58
Figura 14- Perfil de velocidade laminar para escoamento completamente desenvol- vido com $Re = 500$	59
Figura 15- Perfil de velocidade turbulenta para escoamento completamente desen- volvido com $Re = 5 \times 10^5$	60
Figura 16- Campo de velocidade para o regime laminar e turbulento respectivamente	61
Figura 17- Campo de vorticidade do escoamento laminar.....	62
Figura 18- Campo de vorticidade do escoamento turbulento	63
Figura 19- Velocidade da bolha e do líquido representadas em percurso senoidal, caso 1.....	64

Figura 20- Velocidade da bolha e do líquido representadas em percurso senoidal, caso 2	64
Figura 21- Parametrização do canal curvo	65
Figura 22- Campo do vetor velocidade para o regime laminar e turbulento respec- tivamente, $\Omega_z = 0$	66
Figura 23- Campo do vetor velocidade para o regime laminar e turbulento com trajetória de bolhas, respectivamente, $\Omega_z = 0$	66
Figura 24- Campo do vetor velocidade para o regime laminar e turbulento respec- tivamente, $\Omega_z = 0.5$	67
Figura 25- Campo da trajetória das bolhas para o regime laminar e turbulento respectivamente: Caso 1 ($D_p = 0.001m$); $\Omega_z = 0.5$	68
Figura 26- Campo da trajetória das bolhas para o regime laminar e turbulento respectivamente: Caso 2 ($D_p = 0.005m$); $\Omega_z = 0.5$	68
Figura 27- Volume de controle para o método da mediana [5]	76
Figura 28- Elemento triangular [5]	76
Figura 29- Volume de controle para o método da mediana [5]	77
Figura 30- Representação de \vec{J} nas interfaces de integração [5]	80
Figura 31- Volumes finitos originados pelo processo da mediana [6]	87

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Alguns dados relacionados ao escoamentos dos dois casos simulados - Canal reto.....	59
Tabela 2	Dados relacionados ao comportamento da trajetória da bolha.....	63

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	14
	Motivação	14
	Objetivos	14
1	O FENÔMENO DA CAVITAÇÃO	16
1.1	Física do fenômeno	17
1.2	Revisão da modelagem da cavitação	22
2	MODELAGEM MATEMÁTICA	24
2.1	Formulação Euler-Lagrange	24
3	EQUAÇÕES GOVERNANTES	26
3.1	Descrição Euleriana - Escoamento da fase contínua	26
3.1.1	Formulação função corrente-vorticidade	27
3.2	Equação da vorticidade em um referencial em rotação	28
3.3	Adimensionalização das equações governantes	29
3.4	Modelagem da turbulência	30
3.4.1	Equações de Navier-Stokes como média de Reynolds - RANS	31
3.4.2	Modelo de comprimento de mistura de Prandtl	32
3.4.3	Equação da vorticidade com o termo turbulento	34
3.5	Descrição Lagrangeana - Movimento das partículas	35
3.5.1	Relação entre a aceleração do escoamento do líquido e aceleração da bolha ..	40
3.5.2	Modelo de Rayleigh-Plesset - Evolução do raio da bolha	40
4	MÉTODO DE VOLUMES FINITOS COM MALHAS NÃO ES- TRUTURADAS	42
4.1	Método das medianas para a construção dos volumes de controle	45
5	DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES GOVERNANTES	47
5.1	Discretização da equação do transporte	47
5.2	Método semi-lagrangeano	50

5.3	Discretização da Equação de Poisson da função de corrente	52
5.4	Condições de contorno	52
5.5	Discretização do movimento das partículas	55
6	VALIDAÇÕES E RESULTADOS	58
6.1	Validação do perfil de velocidade do escoamento do canal reto	58
6.2	Validação do campo de vorticidade do canal reto	61
6.3	Validação do método para monitoramento da trajetória da bolha.	63
6.4	Resultado do escoamento em canal curvo	64
6.4.1	Com referencial sem rotação (rotor parado)	65
6.4.2	Com referencial em rotação	67
	CONCLUSÃO	69
	REFERÊNCIAS	71
A	APÊNDICE A - SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES POR VOLUMES FINITOS	76
A.1	Solução da função de corrente.....	77
A.1.1	Cálculo das contribuições.....	78
A.1.1.1	Contribuições do Elemento 123 para o Vértice 1	80
A.1.1.2	Contribuições do Elemento 123 para o Vértice 2	82
A.1.1.3	Contribuições do Elemento 123 para o Vértice 3	83
B	APÊNDICE B - O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS	86
B.1	Montagem do sistema matricial usando Método de elementos finitos	87

INTRODUÇÃO

Motivação

A cavitação é um fenômeno que pode ocorrer em qualquer sistema hidráulico desde tubulações até as turbomáquinas hidráulicas. Este vem sendo estudado em diferentes ciências e problemas de engenharia há décadas, devido aos problemas originados pela mesma. O estudo do fenômeno em turbomáquinas teve sua importância aumentada devido ao aperfeiçoamento dos sistemas hidráulicos. Na atualidade as máquinas são projetadas para operar no limite de sua melhor eficiência, visando ganhos de produtividade e redução de custos de aquisição de equipamentos.

No Brasil, por exemplo, a geração de eletricidade ainda depende muito da energia hidráulica, em cerca de 92% [7] e estima-se que 75% das companhias produtoras deste tipo de energia no mundo, operam com problemas de cavitação, o que demonstra a importância do estudo deste fenômeno a fim de diminuição dos custos de manutenção e do aumento do rendimento destes equipamentos, pois a cavitação provoca uma perda na eficiência dessas máquinas, além da necessidade da substituição prematura dos componentes. Na Usina Hidrelétrica Luiz Carlos Barreto de Carvalho, no estado de São Paulo, a cada quatro anos as turbinas são paradas para manutenção e somente para reparar os danos causados pela cavitação nas pás das turbinas, gastam-se em torno de 25 dias [8], ocasionando elevados custos de manutenção.

Um melhor conhecimento da dinâmica do escoamento no interior dessas máquinas na fase de seu projeto, pode prever ou evitar o aparecimento do fenômeno; minimizando os danos nesses equipamentos e podendo assim reduzir consideravelmente os custos referentes a perda de material e a manutenção, o que resultaria evidentemente em grande economia para as indústrias e sistemas que usam esses equipamentos.

Objetivos

O principal objetivo desse trabalho foi estudar o fenômeno da cavitação, analisando o comportamento hidrodinâmico do escoamento e mostrar a dinâmica das bolhas de cavitação nas passagens entre as lâminas do impelidor de uma turbomáquina. Uma

abordagem Euleriana-Lagrangiana para escoamentos multifásicos, acoplada ao modelo de Langevin foi empregada para estimar a trajetória das bolhas de cavitação no escoamento turbulento nessas geometrias usando recursos de dinâmica dos fluidos computacional (CFD) que é uma alternativa para experiência de protótipos com intuito de melhorar o entendimento de como evitar os problemas relacionados ao fenômeno.

Na abordagem Euler-Lagrange uma descrição do contínuo é usada para a fase líquida (descrição Euleriana), as bolhas são modeladas individualmente como partículas esféricas e seu transporte resolvido a partir de uma equação de movimento e monitoramento discreto dessas partículas. As bolhas são geralmente modeladas como modelos ponto-partículas com forças de interação fluido-bolhas; a fração vapor-volume é obtida pela simulação da evolução das bolhas individuais, compondo a fase discreta [4], [9]. A dinâmica dessas bolhas é computada usando equações de Newton do movimento. Esta descrição considera cada bolha individualmente e isto permite tomar em conta várias forças atuando na bolha, bem como interação bolha-parede.

Uma solução pelo método de elementos finitos/volumes finitos com malhas não-estruturadas foi usada para resolver um escoamento bidimensional da fase contínua na passagem entre as lâminas do impelidor; e como o problema da cavitação lida quase sempre com escoamento turbulento, foi usado um modelo simples de turbulência que é o de comprimento de mistura de Prandtl Eddy Viscosity. A fase dispersa (bolhas) foi monitorada usando as equações do movimento na abordagem Lagrangiana e considerando apenas os efeitos da fase contínua na fase dispersa.

1 O FENÔMENO DA CAVITAÇÃO

O termo cavitação tem origem do latim da palavra “cavus” que significa buraco ou cavidade e é utilizado para descrever o processo de nucleação, crescimento e colapso das bolhas de vapor em um fluido. A cavitação é um fenômeno físico pertinente em geral à fase líquida das substâncias, podendo ser observado em diversos sistemas hidrodinâmicos como em hélices de navios, bombas, turbinas, tubulações e até mesmo em válvulas [10].

Embora a cavitação tenha sido prevista por Euler [11] na sua teoria de turbinas, mas deve-se mesmo a Reynolds [12] a primeira descrição do fenômeno apresentada na sequência dos históricos ensaios experimentais que realizou para investigar o comportamento de hélices, utilizando um escoamento em tubo de venturi, conforme mostrado na Figura 1.

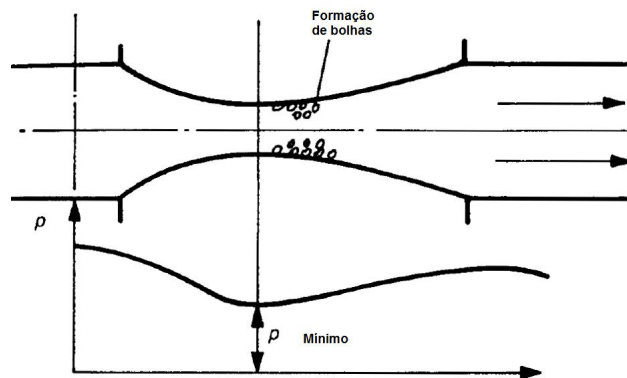


Figura 1 - Cavitação em venturi dotado de estrangulamento [1]

Já no fim do século XIX o engenheiro francês A. Normand, chamou atenção para a formação de cavidades no funcionamento das hélices marítimas. Em virtude de terem surgido condições derivadas do aumento das velocidades de rotação e do emprego nas turbomáquinas de pás com perfis idênticos aos das asas usadas em aviação, intervieram causas diferentes e mais complexas do que as assinaladas por Normand [13], ao mesmo tempo que as suas consequências se tornavam particularmente graves.

A cavitação é a ocorrência de bolhas de vapor ou gás em um líquido devido a baixas pressões locais que são geradas pela alta velocidade do escoamento local. Canavelis [14], define o fenômeno como sendo a formação e subsequente colapso, ao longo do escoamento em um líquido, de bolhas preenchidas por vapor.

Knapp e Daily [15], estudaram o fenômeno da cavitação e se tornaram referência para pesquisadores nesta área. Eles apresentaram em sua obra os fundamentos teóricos da cavitação, mostraram também a cavitação em máquinas hidráulicas além de apresentarem diversos resultados experimentais relacionados ao fenômeno. Eles definiram a cavitação como sendo uma condição que ocorre quando um líquido alcança um estado no qual cavidades de vapor são formadas e crescem devido a uma redução da pressão dinâmica do fluido até a pressão de vapor do líquido com temperatura constante.

A cavitação é um fenômeno de interesse de muitos ramos da engenharia e da ciência. Pode ser observado desde máquinas hidráulicas até turbomáquinas de aplicação espacial. Assumindo uma importância particular no estudo de escoamentos de todos os tipos de líquidos, especialmente quando esses escoamentos se processam a altas velocidades.

Inicialmente, nas regiões de pressões baixas, formam-se pequenas bolsas ou cavidades, no interior das quais o líquido se vaporiza. Conduzidos pela corrente líquida, as bolhas chegam a regiões de pressões mais elevadas, entram em colapso, com a condensação do vapor e o consequente retorno ao estado líquido.

As partículas formadas pela condensação se chocam muito rapidamente umas com as outras e de encontro à superfície que se antepõe ao seu deslocamento, produz-se, em consequência, simultaneamente, uma alteração no campo de velocidades e de pressões que deveria existir segundo as considerações teóricas do escoamento líquido. A cavitação pode ser a origem de vários efeitos negativos para as máquinas, tais como: Ruído, vibrações, erosões, danos estruturais e alterações de desempenho [2]. Esses efeitos fazem da cavitação uma questão importante para o projeto e operação de turbomáquinas, pois estes são prejudiciais e por consequência indesejáveis, pelo que, de um modo geral, se torna necessário evitar ou pelo menos minimizá-los. É por isso que o estudo do fenômeno da cavitação continua a revestir-se de particular importância, uma vez que as exigências de um rápido desenvolvimento tecnológico têm determinado uma tendência para o aumento das velocidades máximas atingidas, quer pelos escoamentos, quer pelos rotores de diferentes turbomáquinas ou pelos próprios perfis hidrodinâmicos.

1.1 Física do fenômeno

Em alguns aspectos, a cavitação é semelhante a um outro fenômeno físico, a ebulição. A geração de vapor no líquido pode ser causado por dois diferentes mecanismos:

seguindo uma entrada de calor, assim um aumento da temperatura a pressão constante, que é bem conhecido como fenômeno de ebulição, ou, a uma temperatura constante, uma diminuição da pressão, que corresponde ao fenômeno da cavitação.

Quando a pressão do líquido diminui abaixo da pressão de saturação, alguns líquidos mudam de fase, de líquido para vapor. A pressão de vapor, P_v , é uma propriedade do fluido que depende muito da temperatura do fluido. Uma redução suficiente da pressão numa dada região de um meio líquido é a causa que normalmente está na base do desencadeamento do fenômeno da cavitação. No entanto, como é sabido, a formação de cavidades num meio líquido e seu subsequente crescimento por vaporização podem também ser provocados por uma elevação da temperatura ambiente. Contudo, é habitual estabelecer uma distinção entre estas situações. Assim, a designação de ebulição é normalmente associada às situações em que aqueles fenômenos são induzidos por efeitos térmicos reservando-se, em geral, a designação de cavitação para identificar as situações em que os mesmos têm por origem, predominantemente, um decréscimo da pressão de carácter dinâmico.

A diferença na direção da mudança de estado no diagrama de fase da Figura 2, é mais significativa do que pode, a primeira vista, ser imaginado. É virtualmente impossível causar qualquer rápida mudança uniforme na temperatura em todo volume finito do líquido. Os detalhes do processo de ebulição geralmente abrangem a interação detalhada das bolhas de vapor com uma superfície do sólido e a camada limite térmica nesta superfície. Por outro lado, uma rápida e uniforme mudança na pressão em um líquido é comum e portanto os detalhes do processo de cavitação diferem consideravelmente daqueles que ocorrem na ebulição.

O primeiro passo para se estudar a cavitação é o entendimento do processo físico relacionado ao seu surgimento. A Figura 2, mostra um gráfico típico idealizado, de uma substância pura, relacionando a pressão (P), a temperatura (T) e o volume específico (v), onde cada estado físico da substância é indicado neste gráfico. Em uma substância pura, a fase líquida e a fase vapor podem coexistir em equilíbrio somente em uma determinada linha, correlacionando pressão e temperatura, essa linha é chamada de linha líquido-vapor e se estende desde o ponto-tríplo até o ponto crítico. Fora desta linha, uma fase desta substância é mais estável que a outra [2]. No ponto-tríplo as três fases (líquido, vapor e sólido) coexistem, ou seja, a substância pode ter três alternativas de estados estáveis.

Nos sistemas hidráulicos há uma variação da pressão estática absoluta devido às perdas de carga e características do equipamento. Nestes sistemas, caso ocorra uma diminuição da pressão estática absoluta do fluido transportado e se esta pressão se torne igual ou inferior a pressão de vapor desta substância, a pressão P_v na Figura 2, pode ocorrer a vaporização instantânea do líquido, devido a possibilidade de coexistirem a fase líquida e a fase vapor, ocasionando a formação de bolhas de vapor no seio do líquido. Estas bolhas formadas podem desaparecer caso ocorra um aumento da pressão no escoamento [2].

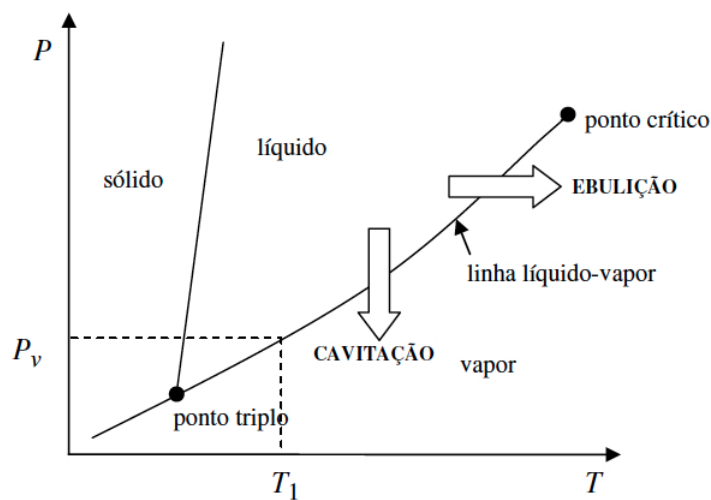


Figura 2 - Diagrama de fase de uma substância pura [2]

Em turbomáquinas hidráulicas do tipo radial, o fenômeno da cavitação é observado principalmente nos rotores, visto que nesta parte do equipamento há um aumento da velocidade e uma diminuição da pressão [16]. Quando a pressão do líquido fica maior que a da bolha, suas dimensões diminuem até entrar em colapso, permitindo a entrada do líquido que está em volta em seu interior. Isto gera uma alteração no campo de velocidade e de pressão. Este líquido que já está a altas velocidades fora da bolha, encontra uma região de pouca resistência ao penetrar na região “colapsada”, aumentando ainda mais sua velocidade. Ao atingir regiões sólidas (rotor, carcaça, etc), parte da energia contida nestas partículas é transferida para o material podendo desagregar os elementos da superfície do material de menor coesão, formando pequenas cavidades. Dependendo da frequência da ocorrência do fenômeno, esta região pode se desgastar cada vez mais, aumentando a erosão na superfície, e comprometendo o funcionamento das partes da máquina conforme mostra

a Figura 4.

Este processo ocorre com alta frequência, podendo atingir a ordem de 25 mil bolhas por segundo. A duração (surgimento-colapso) é da ordem de milionésimos de segundos. É possível verificar a ocorrência do fenômeno da cavitação através de inspeção visual (caso seja possível abrir a máquina) ou mesmo pelo som característico quando a máquina estiver em funcionamento. Ao detectar um rotor com certo desgaste é importante definir de forma correta a origem do problema. Não deve se confundir os fenômenos de cavitação, erosão e corrosão. A erosão ocorre devido ao contato de partículas sólidas com o rotor, enquanto a corrosão ocorre devido a incompatibilidade entre o material do rotor e o fluido. Lembrando que os três podem ocorrer simultaneamente [17]. A Figura 3 mostra esquematicamente um modelo de colapso da bolha de cavitação.

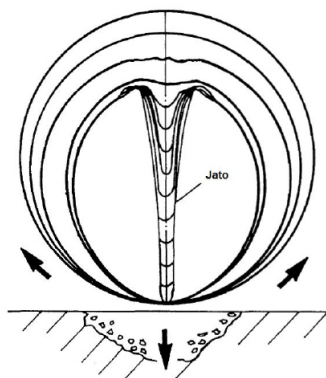


Figura 3 - Modelo de colapso da bolha de cavitação [1]

Faceira, [18], salienta a complexidade desse fenômeno (cavitação) e a diversidade de pontos de vista dos diferentes autores, que sobre o assunto se têm pronunciado, dificultam a apresentação de uma definição que, sendo, concisa, seja simultaneamente capaz de transmitir informações suficientes para uma adequada identificação deste fenômeno em relação a outros fenômenos físicos.



(a) Rotor de uma turbina danificado por cavitação



(b) Rotor de uma bomba centrífuga danificado pela cavitação

Figura 4 - Danos por cavitação em impelidores [1]

A cavitação é um fenômeno associado a mudança de fase em meios líquidos, durante esse fenômeno, parte da massa líquida evapora nucleando bolhas, essas bolhas crescem e entram em colapso nas regiões de alta pressão, ao implodirem ou colidirem contra as paredes das superfícies próximas podem provocar a erosão por cavitação. Quando a pressão local da turbomáquina cai para a pressão crítica, dependendo das condições de fluxo, a cavitação ocorre.

A erosão por cavitação pode provocar danos estruturais aos equipamentos e esses danos são os responsáveis pela perda da eficiência em turbomáquinas, podem também gerar ruídos e vibrações. No projeto de turbomáquinas, a prevenção do início da cavitação é uma das maiores tarefas dos engenheiros projetistas. Calainho e Lomônaco [7], apresentaram os possíveis danos oriundos da cavitação em turbinas hidráulicas enfatizando que a erosão devido a cavitação é um dos danos mais nocivos por causar grandes perdas econômicas uma vez que indisponibiliza as máquinas periodicamente, por longos períodos, para serviços de reparo.

A Figura 5, apresenta uma série de fotografias de uma bolha em colapso próxima a uma superfície sólida, para um rotor de aço inox sob o efeito da erosão por cavitação. A curva da pressão, da parte superior dessa figura, mostra a variação da pressão na superfície em diferentes estágios do processo de formação e colapso de bolhas de vapor. Os picos de pressão mostrados nos instantes 6 e 7 da Figura 5 correspondem a um mínimo de volume da bolha provocado pela geração do micro jato.

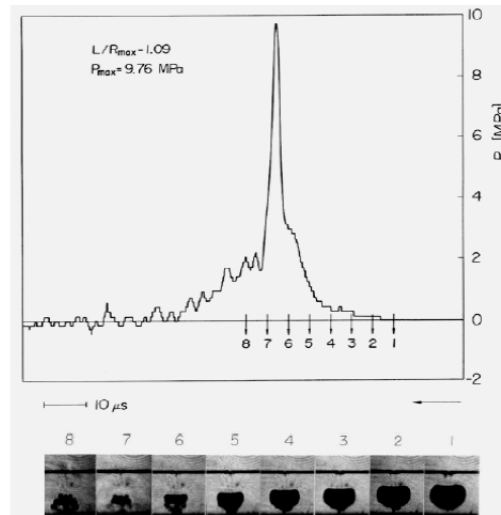


Figura 5 - Fotografias em séries de colapso de uma bolha próxima de uma superfície sólida e gráfico de pressão da bolha [2]

1.2 Revisão da modelagem da cavitação

A simulação numérica de escoamentos multifásicos é um dos mais desafiadores problemas CFD (computational fluid dynamics) que ocorre em muitas aplicações de engenharia. Entre estes está a cavitação, em que um líquido se vaporiza em regiões onde há queda de pressão abaixo a pressão de vapor deste líquido.

Afim de descrever a previsão do fenômeno de cavitação, é geralmente usada uma abordagem de escoamento multifásico. Normalmente dois tipos de escoamento multifásico podem ser identificados, nomeadamente, escoamento disperso e escoamento separado. O escoamento disperso consiste em partículas finitas, gotas ou bolhas distribuídas em uma fase contínua. Por outro lado, fluxo separado consiste em duas ou mais correntes de diferentes fluidos separados por interfaces. No fluxo disperso dois tipos de modelos prevalecem, o modelo de trajetória e modelo de dois fluidos. No modelo de trajetória, o movimento da fase dispersa é avaliado seguindo tanto o movimento da partícula atual quanto o movimento da maioria das partículas representativas. Os detalhes do escoamento a volta de cada partícula são resumidos em arrasto, sustentação e forças de momento, força devido à massa virtual e força de Basset atuando sobre estas (partículas) e alterando suas trajetórias.

A complexidade do fenômeno dificulta sua modelagem. Em caso de investigações

experimentais, o estudo da cavitação necessita de instrumentação específica para ambiente multifásico e as estratégias de modelagem têm sido baseadas em hipóteses empíricas; mesmo assim, os pesquisadores têm obtido grandes progressos, começando do trabalho de Rayleigh [19] até hoje, muitos estudos teóricos e experimentais têm levado a análise e entendimento melhor do fenômeno da cavitação. Modelos de cavitação existentes avaliam o comportamento do escoamento e em muitos casos, a prevenção e aparecimento, crescimento e colapso das bolhas. As abordagens mais simples são baseadas no uso de equações relacionando pressão e densidade, tais como a relação barotrópica de Delannoy [20] e a equação de Chen [21], derivada da densidade em relação ao tempo e a pressão, tal como a equação polinomial de Song [22].

2 MODELAGEM MATEMÁTICA

2.1 Formulação Euler-Lagrange

Na modelagem usando abordagem Euler-Lagrange, a fase contínua é resolvida pelo referencial euleriano resolvendo as equações de Navier-Stokes no domínio computacional. A fase dispersa é simulada considerando partículas afetadas pelas forças do fluido contínuo, aplicando-se essas forças em cada partícula usando a segunda lei de Newton tem-se a aceleração da partícula escoando através da fase contínua. Quando apenas os efeitos da fase contínua são considerados na fase dispersa, chama-se regime one-way coupling [23]. Quando os efeitos tanto da fase contínua quanto da fase dispersa são considerados, chama-se regime two-way coupling; no regime two-way coupling, os efeitos das bolhas na fase contínua são considerados introduzindo um termo fonte na equação Navier-Stokes e mudando o volume disponível para a fase contínua em células computacionais de acordo com a fração de vazios na célula. A modelagem one-way coupling é ilustrada na Figura 6.

O método de simulação numérica usando a abordagem Euleriana-Lagrangiana foi desenvolvido com bastantes hipóteses. Em problemas tais como dispersão de poluentes na atmosfera, pode ser assumido que as partículas não perturbam o campo de escoamento. A solução então envolve o monitoramento da trajetória em um campo de velocidades conhecido, isto é, as equações da fase fluida são resolvidas independentemente das partículas [24].

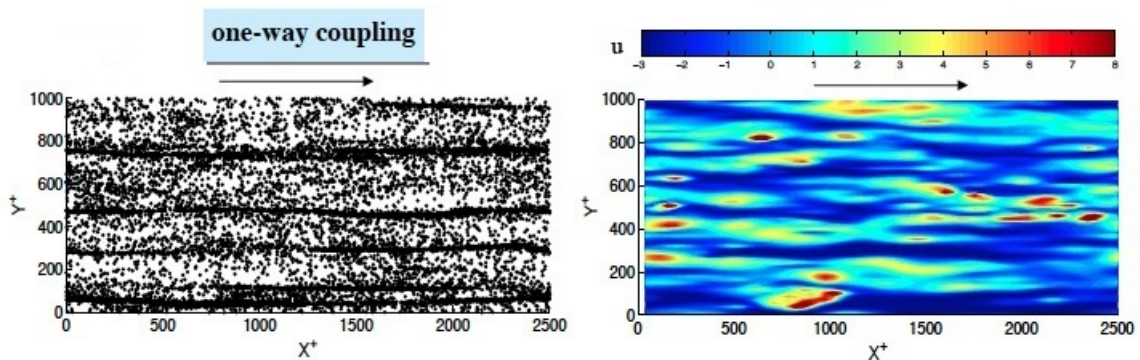


Figura 6 - Escoamento de partículas ao longo de um canal [3]

Esquemas numéricos baseado em modelos matemáticos de escoamento multifásico particulado têm usado abordagem do contínuo para todas as fases ou uma abordagem do

contínuo para fase fluida e uma abordagem lagrangiana para as partículas. Estes métodos de simulação podem se encontrar em várias configurações, por exemplo, sedimentação e suspensões fluidizadas, transporte lubrificado, fraturação hidráulica de reservatórios, etc. Existem outras formulações, a abordagem Euleriana-Euleriana, que considera a fase particulada como sendo um fluido contínuo interpenetrando e interagindo com a fase fluida [25], o que não é o objetivo desse trabalho.

3 EQUAÇÕES GOVERNANTES

3.1 Descrição Euleriana - Escoamento da fase contínua

Assumindo que o escoamento é incompressível, que as propriedades físicas do fluido newtoniano são constantes, regime transiente e escoamento isotérmico, simplificam-se as equações de Navier-Stokes. Assim a forma das equações que regem o escoamento em coordenadas cartesianas, se tornam:

- Equação da conservação da massa (Equação da continuidade):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla \cdot \rho u) = 0 \quad (3.1)$$

Considerando escoamento incompressível, massa específica do fluido constante, então a equação 3.1 se torna:

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (3.2)$$

ou

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.3)$$

- Equação de conservação da quantidade de movimento (considerando direções x e y):

a) Na direção x

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (3.4)$$

b) Na direção y

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3.5)$$

3.1.1 Formulação função corrente-vorticidade

As equações de Navier-Stokes para escoamento de um fluido podem ser resolvidas usando formulações alternativas. Existem vários esquemas numéricos para solução das equações de Navier-Stokes que representam escoamentos viscosos incompressíveis. Um desses esquemas utiliza a formulação função corrente-vorticidade que foi usado no presente estudo. Utiliza-se a função corrente-vorticidade na equação de conservação de massa e na equação de conservação da quantidade de movimento a fim de desacoplar os campos de pressão do cálculo das componentes do vetor velocidade, além de reduzir o número de equações a serem resolvidas. Para isso são definidas a função corrente, ψ , e a vorticidade, ω , como sendo:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (3.6)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3.7)$$

Note que as equações 3.6 e 3.7, satisfazem a equação 3.3 (equação da conservação da massa).

$$\omega = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.8)$$

Substituindo u e v na equação 3.8, temos a equação de Poisson para a função de corrente:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega \quad (3.9)$$

Diferenciando a equação 3.4 em relação a y e a equação 3.5 em x , subtraindo as expressões obtidas e substituindo a equação 3.8 na expressão obtida, obtém-se a equação do transporte para a vorticidade:

$$\rho \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) = \mu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (3.10)$$

As equações 3.9 e 3.10 juntas formam a formulação função corrente-vorticidade das equações de Navier-Stokes. Essa formulação é equivalente as equações 3.3, 3.4 e 3.5.

Devido ao fato das equações, que em geral, modelam problemas de escoamento de fluido não apresentarem soluções analíticas, faz-se necessário a aplicação de técnicas numéricas para resolvê-las. Na literatura, encontra-se diversos métodos para obter a solução dos sistemas de equações, como por exemplo, método de diferenças finitas, método de elementos finitos, método de volumes finitos e métodos espectrais.

Nesse trabalho, escolheu-se o método de volumes finitos com malhas não-estruturadas para primeiramente validar o método simulando o escoamento em um canal com paredes retas (Figura 7) e depois aplicar o método validado para um canal de paredes curvas - geometria geralmente encontrada nos canais entre as lâminas dos impelidores de turbomáquinas do tipo radial.



Figura 7 - Canal reto

3.2 Equação da vorticidade em um referencial em rotação

A equação da vorticidade em um referencial sem rotação é exatamente igual a de um referencial girando; isso pode ser demonstrado a partir da equação de Navier-Stokes [26]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 u \quad (3.11)$$

Como a expressão abaixo é definida por:

$$u \cdot \nabla u = \omega \times u + \frac{1}{2} \nabla u^2 \quad (3.12)$$

Então temos:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \underbrace{(2\Omega + \omega)}_{\omega_a} \times u = -\frac{\nabla p}{\rho} - \frac{1}{2} \nabla u^2 + \nu \nabla^2 u \quad (3.13)$$

O termo ω_a significa vorticidade absoluta e Ω é a velocidade angular. Assim, aplicando o rotacional em ambos lados da equação 3.13 e observado que $\nabla \times \Omega = 0$, chegamos a seguinte equação:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla \times (\omega_a \times u) = -\frac{\nabla \rho}{\rho^2} \times \nabla p + \nu \nabla^2 \omega \quad (3.14)$$

Como se trata de um escoamento bidimensional, incompressível e com propriedades constantes a equação 3.14 se reduz a:

$$\frac{D\omega}{Dt} = \nu \nabla^2 \omega \quad (3.15)$$

Onde a derivada material de ω independe do referencial, ou seja, é igual tanto referencial parado quanto no referencial girando.

3.3 Adimensionalização das equações governantes

Para proporcionar uma simplificação e permitir uma melhor correlação entre grandezas, foi desenvolvida uma adimensionalização das equações. Para tornar as equações governantes adimensionais, todos os comprimentos foram divididos por um comprimento de referência, L , e todas as velocidades por uma velocidade de referência, V_∞ . Denotando as variáveis adimensionais por asteriscos, obtemos:

$$\begin{aligned} t^* &= \frac{V_\infty t}{L}; & x^* &= \frac{x}{L}; & y^* &= \frac{y}{L}; & u^* &= \frac{u}{V_\infty}; \\ v^* &= \frac{v}{V_\infty}; & \omega^* &= \frac{\omega L}{V_\infty}; & p^* &= \frac{p}{\rho V_\infty L} & \text{e} & \psi^* &= \frac{\psi}{V_\infty L} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Assim substituindo, as variáveis da equação 3.16 nas equações 3.3, 3.4, 3.5, 3.9 e 3.10, resultam respectivamente:

- A equação da continuidade

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \quad (3.17)$$

Sendo o número de Reynolds definido por:

$$Re = \frac{\rho V_{\infty} L}{\mu} \quad (3.18)$$

- As equações de conservação da quantidade de movimento

a) Na direção x

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (3.19)$$

b) Na direção y

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (3.20)$$

- A equação de poisson para a função de corrente

$$\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial y^{*2}} = -\omega^* \quad (3.21)$$

- A equação do transporte para vorticidade

$$\frac{\partial \omega^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial \omega^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \omega^*}{\partial y^*} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \omega^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (3.22)$$

Ou na forma do operador laplaciano:

$$\nabla^2 \omega^* = Re \left(\frac{\partial \omega^*}{\partial t^*} + \frac{\partial \psi^*}{\partial y^*} \frac{\partial \omega^*}{\partial x^*} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} \frac{\partial \omega^*}{\partial y^*} \right) \quad (3.23)$$

3.4 Modelagem da turbulência

A turbulência é um dos mais importantes problemas de engenharia ainda sem solução exata. Não existe teoria geral pela qual esse fenômeno possa ser tratado para todas as configurações de interesse. Sabe-se que as equações de Navier-Stokes, juntamente com as equações da continuidade e da energia, governam os escoamentos turbulentos. Porém, mesmo considerando os recentes avanços computacionais, não é possível ainda a solução numérica das equações descrevendo numerosas aplicações práticas. Mesmo geometrias simples requerem elevado esforços computacionais e dependem das informações provenientes de observações experimentais [27].

3.4.1 Equações de Navier-Stokes como média de Reynolds - RANS

Uma grande variedade de modelos de turbulência com média de Reynolds foi proposta ao longo do último século, desde modelos rudimentares, como os modelos algébricos, até os mais elaborados modelos diferenciais de transporte de tensão de Reynolds. A existência de uma grande quantidade de modelos de turbulência baseados na técnica de decomposição de Reynolds torna difícil definir um critério único que permita uma distinção adequada entre eles. Alguns desses modelos, por exemplo, não utilizam o conceito de viscosidade/difusividade, mas empregam equações diferenciais para o transporte de “entidades” que caracterizam a turbulência, tais como a quantidade de movimento, $\overline{u_i u_j}$ e o fluxo de propriedades escalares associadas ao escoamento, $\overline{u_i \varphi}$, onde φ representa um escalar qualquer.

Modelos que empregam equações de transporte para “quantidades” que caracterizam o estado de turbulência do escoamento foram desenvolvidos para levar em consideração o transporte da turbulência. Estas “quantidades”, que caracterizam a turbulência, podem ser chamadas “entidades turbulentas”.

Os modelos de turbulência baseados na decomposição de Reynolds, são também conhecidos como modelos RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes). A denominação “RANS” se deve ao fato das variáveis das equações de Navier-Stokes serem decompostas numa parte média e outra flutuante.

O campo de velocidade instantâneo de um escoamento turbulento é descrito pelas equações de Navier-Stokes. Aplicando a decomposição de Reynolds as quantidades do escoamento, presentes nas equações de governo, e realizando o procedimento de média, obtém-se:

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \rho \overline{u' u'} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \overline{u' v'} \right) \quad (3.24)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \rho \overline{u' v'} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \overline{v' v'} \right) \quad (3.25)$$

Estas equações são conhecidas como as equações de Reynolds (RANS) e diferem da

equação original (Navier-Stokes) apenas pela presença da média do produto das flutuações de velocidade $\overline{\rho u'v'}$, o chamado tensor de Reynolds. Este termo representa a transferência de quantidade de movimento adicional, causada pela turbulência. Embora $\overline{\rho u'v'}$ tenha origem na não linearidade dos termos de inércia da equação de Navier-Stokes, geralmente agrupa-se estes termos à tensão viscosa. Por este motivo e, também, pelo seu papel de aumentar a difusividade da quantidade de movimento, os componentes do tensor de Reynolds são algumas vezes chamados de tensões turbulentas.

Dentro desta classe de modelos, a parametrização das incógnitas turbulentas (por exemplo, $\overline{u'v'}$) é feita através de equações algébricas diferenciais, relacionando-as com propriedades do escoamento médio (normalmente com $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$). Estas parametrizações empregam o conceito de viscosidade/difusividade turbulenta e o conceito de comprimento de mistura.

3.4.2 Modelo de comprimento de mistura de Prandtl

Em 1925, Prandtl formulou uma hipótese para a modelagem da viscosidade turbulenta - que é em função do escoamento e não uma propriedade inerente ao fluido. É um modelo no qual a viscosidade turbulenta é avaliada através de expressões algébricas, não envolvendo equações diferenciais de transporte. Prandtl imaginou que em um escoamento turbulento, porções de fluido movimentam-se durante um determinado tempo, e assim também em um determinado comprimento, com a mesma quantidade de movimento. Depois eles se dissipam e tornam a se agrupar.

A distância média em que estas porções se conservam ele chamou de Comprimento de Mistura. Muitos experimentos mostraram que este modelo supõe condições ideais em um escoamento turbulento, muito mais do que no modelo dos movimentos térmicos na teoria cinética de gases. Não obstante, em muitos casos foi possível encontrar uma aproximação aceitável à tensão turbulenta.

Matematicamente, as velocidades são tratadas como contendo duas componentes, uma média e independente do tempo e outra levando em conta as flutuações, como indicado abaixo:

$$u = \bar{u} + u'$$

$$v = \bar{v} + v'$$

u e v são respectivamente, as velocidades na direção x , paralela a direção do escoamento e na direção y , perpendicular a x . Nessas expressões o primeiro termo é o valor médio e o segundo corresponde a flutuação.

Para escoamento bidimensional em canal, existe uma tensão turbulenta aparente, devido ao deslocamento do fluido para pontos de diferentes velocidades, definida por:

$$\tau_t = \rho \overline{u'v'} \quad (3.26)$$

Caso não houvesse gradientes de velocidades no fluido, era de se esperar que essa tensão fosse zero. Por isso é razoável admitir que:

$$\overline{u'v'} \propto \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (3.27)$$

O fator de proporcionalidade é definido como difusividade turbulenta da equação da quantidade de movimento, ε_M :

$$\overline{u'v'} = -\varepsilon_M \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (3.28)$$

Em escoamentos laminares, $u' = v' = 0$, ou seja, $u = \bar{u}$, $v = \bar{v}$ e $\varepsilon_M = 0$

Entre os vários métodos para a avaliação da difusividade turbulenta, ε_M a teoria do comprimento de mistura de Prandtl é a mais simples e conduz a resultados adequados para a camada limite externas. Essa teoria postula, que a difusividade turbulenta, ε_M , é proporcional ao módulo do gradiente de velocidade na direção normal ao escoamento:

$$\varepsilon_M = l^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (3.29)$$

O campo da viscosidade turbulenta é levantado ao se considerar o comprimento de escala característico como sendo o comprimento de mistura, l , e a velocidade característica como sendo proporcional ao gradiente de velocidade média. Deste modo, a viscosidade turbulenta é dada por:

$$\mu_t = \rho l^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (3.30)$$

$$\nu_t = l^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (3.31)$$

Onde ρ é a massa específica e l é denominado de comprimento de mistura de Prandtl, cujo valor deve ser determinado a partir de resultados experimentais. Prandtl considerou que l para regiões não muito distantes da parede, deveria ser proporcional à distância y da parede:

$$l = ky \quad (3.32)$$

Sendo k a constante de Von Kármán (próximo a parede $k \approx 0.41$).

Como a distribuição do comprimento de mistura é prescrita a partir de dados experimentais, variando como o tipo de escoamento, no entanto a falta de generalidade dos dados levantados é uma das principais limitações do modelo. Existe uma base de dados experimentais significativa para escoamentos simples, tais como camada limite e escoamentos cisalhantes. Contudo, especificar o comprimento de mistura em escoamentos complexos é particularmente difícil, pois não há dados experimentais para estimá-lo apropriadamente.

3.4.3 Equação da vorticidade com o termo turbulento

Como foi usada a formulação função corrente-vorticidade e o presente estudo se trata de um escoamento turbulento, segue abaixo a equação da vorticidade com o termo relacionado a turbulência do escoamento - eddy viscosity, apresentada em coordenadas cartesianas e na forma conservativa:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \left(\frac{\partial^2 (\nu + \nu_t) \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\nu + \nu_t) \omega}{\partial y^2} \right) + \mathcal{P} \quad (3.33)$$

Onde:

ν_t é a viscosidade dinâmica turbulenta ou a difusividade turbulenta e

$$\mathcal{P} = 2 \left[\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 \nu_t}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 \nu_t}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 \nu_t}{\partial y^2} \right] \quad (3.34)$$

onde, segundo o trabalho de Christensen [28], os termos de segunda derivada em \mathcal{P} podem ser desprezados, resultando em $\mathcal{P} \approx 0$.

Adimensionalizada, a equação da vorticidade turbulenta, se torna:

$$\frac{\partial \omega^*}{\partial t} + u^* \frac{\partial \omega^*}{\partial x} + v^* \frac{\partial \omega^*}{\partial y} = \frac{1}{Re_l} \nabla^2 \left[\left(1 + \frac{Re_l}{Re_t} \right) \omega^* \right] \quad (3.35)$$

Onde:

$$Re_l = \frac{\rho V_\infty L}{\mu} \quad (3.36)$$

$$Re_t = \frac{\rho V_\infty L}{\mu_t} = \frac{V_\infty L}{\nu_t} \quad (3.37)$$

3.5 Descrição Lagrangeana - Movimento das partículas

A dinâmica de partículas em um fluido constitui um grande campo de estudos em mecânica dos fluidos. Este campo provavelmente foi iniciado a partir da análise de Stokes, realizada em 1851, para o movimento de translação de uma esfera em um meio infinito com número de Reynolds tendendo a zero. Os trabalhos pioneiros da época de Stokes provavelmente foram motivados pela análise do movimento de translação de uma esfera presa a um fio (pêndulo) com vista à determinação da força de resistência que o ar causava na esfera [29].

Com o desenvolvimento tecnológico e industrial ao longo dos últimos 150 anos, o movimento de partículas em fluidos mudou o foco da aplicação para área de processos que envolvem partículas ou escoamentos multifásicos em geral.

Neste trabalho um modelo one-way coupling foi usado, este leva em conta apenas os efeitos da fase contínua na dispersa. Os efeitos da fase contínua são tomados pelo cálculo das forças relativas da fase contínua atuando na dispersa. O conhecimento das forças que atuam numa bolha isolada de um campo de escoamento é de fundamental importância para a modelagem de escoamentos dispersos.

O movimento de uma bolha isolada num campo de escoamento transiente é descrito pela ação combinada das forças de campo e de superfície que atuam na interface bolha-fluido. Estas forças são a de arrasto, de sustentação, de massa virtual, de Basset, entre outras. Aplicando estas forças na segunda lei de Newton para cada bolha, a aceleração

de cada bolha no passo de tempo da simulação podem ser expressadas como se segue:

$$\frac{dx_b}{dt} = u_b \quad (3.38)$$

$$\frac{du_b}{dt} = a_b \quad (3.39)$$

$$m_b \left(\frac{du_b}{dt} \right) = \sum F_b = F_{drag} + F_{lift} + F_{buoy} + F_{basset} + F_{virtualmass} \quad (3.40)$$

Onde u_b é a velocidade da bolha e m_b a massa da bolha. $\sum F_b$ é a soma das forças exercidas pelo fluido nas partículas, F_{drag} a força de arrasto, F_{lift} a força de sustentação, F_{basset} é a força de Basset, F_{buoy} é a força de empuxo e $F_{virtualmass}$ é a força devido a força de massa aparente.

$$F_{drag} = \frac{1}{2} \rho_l A_b c_d |u_b - u_l| (u_b - u_l) \quad (3.41)$$

$$F_{lift} = m_l c_l (u_b - u_l) \times \nabla \times u_l \quad (3.42)$$

$$F_{buoy} = (m_b - m_l) g \quad (3.43)$$

$$F_{virtualmass} = -\frac{1}{2} c_{vm} m_l \left(\frac{Du_b}{Dt} - \frac{du_l}{dt} \right) \quad (3.44)$$

$$F_{basset} = -\frac{3}{2} c_b D_b^2 \sqrt{\pi \rho_l \mu_l} \int_0^\tau \left[\frac{\frac{d}{dt}(u_b - u_l) + (u_b - u_l)}{\sqrt{t - \tau}} \right] d\tau \quad (3.45)$$

ρ_l é a massa específica da fase líquida, A_b é a área da bolha, $c_l = \frac{3.1}{\sqrt{Re_b}}$ é o coeficiente de sustentação da bolha, u_b é a velocidade da bolha, u_l é a velocidade do escoamento (fase líquida), m_l é a massa da fase líquida, m_b é a massa da bolha e $\frac{D}{Dt}$ é a derivada material.

Cada termo do lado direito da equação 3.40 está associado a um mecanismo físico. Enumerando-os de um a cinco, eles são:

- Força de arrasto da partícula: É introduzido um coeficiente para a força de arrasto, c_d , para poder associar uma dependência deste termo com Re_b . Normalmente a definição de coeficiente de arrasto é separada em aplicações para esferas sólidas e para esferas fluidas (gotas ou bolhas). Esta distinção é necessária, uma vez que as gotas e as bolhas podem ser deformadas ou mesmo quebradas pela ação das forças do meio contínuo.

Uma correlação do coeficiente de arrasto da bolha, c_d , uma função do número de

Reynolds da bolha determinado experimentalmente por Haberman [30], é dada por:

$$c_d = \frac{24}{Re_b}(1 + 0.1Re_b^{0.75}) \quad (3.46)$$

Isso para $Re_b < 1000$. Para $Re_b > 1000$ os efeitos viscosos são suplantados pelos efeitos inerciais e o coeficiente de arrasto passa a ser uma constante. Esta região se estende de $1000 < Re_b < 10^5$ e é denominado por regime de Newton, sendo que $c_d \approx 0.45$. Para $Re_b > 10^5$, a camada limite laminar pode passar para o regime turbulento com conseqüente queda no c_d . Entretanto dificilmente há aplicações práticas para $Re_b > 10^5$.

Johnson [31], realizou simulações lagrangianas de bolhas de cavitação se movendo a volta de um corpo e incluindo a força de arrasto com um coeficiente de arrasto determinado por Haberman [30] e também a contribuição da mudança de volume da bolha no tempo para a força virtual. Thomas [32] incluiu as contribuições devido a força de sustentação, com uma constante de sustentação, $c_d = 0,5$. Auton [33] mostrou que a constante de sustentação, c_d de 0,5 é apropriada no limite invíscido e mostrou também que as contribuições para força virtual e aceleração do fluido; a derivada material é um termo apropriado para a aceleração do fluido.

As expressões analíticas para equação de movimento da partícula para número de Reynolds finito são mais complexas, porém, ainda limitadas para aplicações práticas, uma vez que todas as expressões se originam de expressões assintóticas do regime de Stokes. Rigorosamente, não se dispõe de um modelo exato para o regime $Re_b > 1$, onde ocorrem a maioria das aplicações de interesse prático. Outros fatores que limitam a equação de movimento da partícula além do regime de Re_b são: a forma da partícula, que nem sempre é esférica; o fato de a partícula não ser sólida, mas que pode ser constituída por um fluido, como no caso deste trabalho - bolhas e também a presença de uma população de partículas reduzindo a distância livre entre partículas e criando um acoplamento entre partículas.

- Força de sustentação: Uma bolha escoando em um fluido está submetida a uma força de sustentação e de arrasto. Essas duas forças, na maioria das partículas, ou corpos aerodinâmicos, vêm casadas. A força de sustentação é originada pelo efeito de rotação do escoamento da fase contínua sobre as bolhas; Um corpo submetido a

uma corrente rotacional, estará sujeito a uma rotação, que induzirá uma distribuição de pressão assimétrica em torno do mesmo, gerando uma força transversal à direção do escoamento.

c_l é um coeficiente difícil de estimar de forma teórica devido aos gradientes de velocidade local. Para o caso de um escoamento invíscido ao redor de uma esfera, $c_l = 0.5$, porém quando se considera a viscosidade da fase contínua e a presença de bolhas no escoamento, este coeficiente pode adotar valores entre 0.01 e 0.05 [33].

Para um referencial que se move com a partícula define-se a velocidade relativa, $u_r = u_b - u_l$. A força de arrasto age na direção paralela a u_r , mas no sentido contrário, enquanto a força de sustentação é sempre ortogonal a força de arrasto.

- Força de empuxo da partícula.
- Força devido à massa virtual da partícula: Quando bolhas se movem em um campo líquido com velocidade não uniforme, este acelera parte do líquido de sua vizinhança. Devido a aceleração induzida do movimento da bolha, o líquido a volta da bolha experimenta uma força extra que é devido ao movimento de uma estrutura de referência não-inercial, chamado de força de massa virtual (Figura 8). Pode ser enfatizado que embora o movimento da bolha com uma velocidade terminal constante, também acelera parte do líquido da sua vizinhança mas isso não é resultado de uma força de massa virtual. O conceito de força de massa virtual pode ser entendido considerando a troca na energia cinética de um fluido de uma esfera em aceleração. Em escoamentos potenciais, a aceleração induz a uma força resistente na esfera igual a metade da massa do fluido deslocado vezes a aceleração da esfera.



Figura 8 - Força de massa virtual para apenas uma bolha [4]

O coeficiente c_{vm} chama-se coeficiente de massa virtual e corresponde a fração de volume do líquido que é acelerado com a bolha. Este coeficiente é geralmente dependente da forma da bolha.

- Força de Basset: É um termo que retêm a memória da força aplicada no escoamento. Ela é causada pelo atraso entre o desenvolvimento da camada limite na superfície da partícula e a mudança da velocidade relativa. A força de Basset depende da “história” da aceleração relativa até o tempo presente, portanto, ela é também denominada de termo de história da força. O efeito da força de Basset é reduzir a aceleração do movimento relativo e, portanto, aumentar o tempo requerido para atingir a velocidade terminal. É introduzido um coeficiente para a força de basset, c_b , para poder associar uma dependência deste termo com Re_b . No regime de $Re_b \rightarrow 0$ o valor esperado do coeficiente c_b é unitário. Entretanto para estender a aplicação da força para regimes de Reynolds finitos, o coeficiente c_b , é dado por:

$$c_b = 0.48 + \frac{0.52}{(1 + A_c)^3} \quad (3.47)$$

Onde A_c é um parâmetro de aceleração achado experimentalmente e é definido por:

$$A_c = \frac{(u_b - u_l)^2}{\frac{dD_b}{dt}(u_b - u_l)} \quad (3.48)$$

Note que A_c diminui se a velocidade relativa diminui ou se aceleração aumenta. Note também que, no limite, quando $A_c \rightarrow 0$, $c_b \rightarrow 1$.

Em modelos eulerianos-lagrangeanos aplicados em escoamentos de um gás carregado de partículas ou de um líquido carregado de bolhas de gás em regime turbulento, há a necessidade de se empregar o termo de Basset para melhor capturar o efeito que as partículas causam na turbulência e para estudar a dispersão turbulenta nas partículas.

3.5.1 Relação entre a aceleração do escoamento do líquido e aceleração da bolha

Quando se trata de um referencial girando, a expressão abaixo é levada em consideração, adicionando-a a aceleração da partícula (bolha). Assim temos:

$$a_i = a_r + 2\Omega \times u + \Omega \times \Omega \times r - \frac{d\Omega}{dt} \times r \quad (3.49)$$

Como Ω é constante então a equação 3.49, fica:

$$a_i = a_r + 2\Omega \times u + \Omega \times \Omega \times r - \Omega_z^2 r \quad (3.50)$$

Onde o termo a_i e a_r representam a aceleração no referencial inercial e no referencial girando, respectivamente e o termo r representa o raio.

3.5.2 Modelo de Rayleigh-Plesset - Evolução do raio da bolha

A dinâmica de bolhas de vapor de forma esférica, expressas pela equação de Rayleigh-Plesset, foram estudadas seguindo os trabalhos originais de Rayleigh [19] e Plesset [34]. A teoria foi resumida na equação diferencial para o raio da bolha $R(t)$ por Gilmore [35], estendida e refinada por muitos outros pesquisadores. Antes, estudos experimentais e analíticos foram feitos por Haberman [30] e outros pesquisadores.

O modelo das equações de Rayleigh-Plesset para o crescimento temporal e o colapso das bolhas esféricas de vapor acontece em ambiente isotérmico. Difusão do gás e os efeitos da transferência de calor são desprezados. A lei isentrópica (aquela em que a entropia

do sistema permanece constante) é assumida para gás não condensável dentro da bolha. Algumas modificações que foram feitas por Hsiao [36] consideram uma velocidade de deslizamento entre a bolha e o fluido, e um campo de pressão não uniforme ao longo da superfície da bolha, chamada de equação da pressão da superfície média. Resultando na equação diferencial para a dinâmica da bolha, como formulado em Chahine [37]:

$$\rho_l \left[R_b \frac{d^2 R_b}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{dR_b}{dt} \right)^2 \right] = p_b - p_\infty - \frac{2\sigma}{R_b} - \frac{4\mu_l}{R_b} \frac{dR_b}{dt} \quad (3.51)$$

Onde R_b é o raio da bolha, p_b e p_∞ são a pressão dentro e fora da bolha respectivamente, σ a tensão superficial da bolha, μ_l e ρ_l são a viscosidade e a massa específica do líquido, respectivamente. Para estimar p_b , é geralmente assumido que a bolha contém alguns gases contaminantes que expandem ou contraem de acordo com o processo adiabático ou processo isotérmico [2]. A pressão dentro da bolha, p_b , consiste na contribuição da pressão do gás p_g e a pressão de vapor p_v .

4 MÉTODO DE VOLUMES FINITOS COM MALHAS NÃO ESTRUTURADAS

Este capítulo descreve a metodologia empregada para a solução numérica das equações governantes que descrevem o escoamento da fase contínua; começa apresentando um breve histórico do desenvolvimento e utilização do método de elementos finitos/volumes finitos, bem como a idéia básica do método e, no apêndice A, a solução da equação do transporte para a vorticidade utilizando uma abordagem em volumes finitos.

O método de volumes finitos é uma técnica numérica muito usada para resolver equações governantes do escoamento de fluidos Newtoniano e não-Newtoniano. A idéia do método é discretizar as equações governantes sobre um volume de controle e dentro de um domínio de tempo para formar um sistema de equações algébricas. Neste trabalho, a discretização das equações governantes foram feitas usando malhas não-estruturadas bidimensionais baseados em triângulos como volume de controle. A vantagem de usar malhas não-estruturadas, em comparação com malhas estruturadas, está no fato de que geometrias complexas podem ser estudadas sem a necessidade de refinamento desnecessário de malhas .

O uso de malhas não estruturadas mais frequentemente esteve associado ao método de elementos finitos, geralmente empregando malhas triangulares. Um dos trabalhos pioneiros utilizando volumes finitos em malhas triangulares é o de Winslow [38].

Recentemente, um grande esforço de pesquisa vem sendo aplicado para o desenvolvimento de métodos numéricos para o escoamento de fluidos nos quais malhas não estruturadas são usadas juntamente com o método de volumes finitos [39], [26], [40], [5], [6], [27], [41].

Tais métodos têm recebido a denominação de “Control Volume Based Finite Element Method”, em primeiro lugar, pelo uso de malhas não estruturadas triangulares que dão origem aos volumes finitos, também denominados volumes de controle, e, segundo, pelos passos seguidos na formulação, semelhantes aos da formulação clássica de elementos finitos. Volumes de controle centrados nos vértices dos triângulos da malha não estruturada podem ser criados de duas formas distintas [5]. Uma delas utiliza a triangulação de Delaunay e dá origem aos diagramas de Voronoi. A outra utiliza o método das medianas e dá origem a diagramas mais gerais, como os empregados em Baliga e Patankar [39],

Baliga, Phan e Patankar [26] e Prakash e Patankar [40].

O uso de malhas não estruturadas para discretização de domínios está cada vez mais presente nos métodos numéricos. Isto se justifica pela facilidade de adaptação destas malhas em geometrias complexas, permitindo que refinamentos locais possam ser feitos em regiões específicas [6], [5].

Para a mecânica dos fluidos computacional, revelam-se bastante promissores os métodos que possuem maior versatilidade geométrica e que utilizam técnicas de balanço de conservação das propriedades no volume de controle na forma integral, como o método de Volumes Finitos [42].

A malha utilizada no processo de solução é uma malha não estruturada triangular gerada por Triangulação de Delaunay e os métodos empregados são: para a equação de Poisson para função de corrente e para a equação do transporte para a vorticidade.

O conceito chave usado durante toda a formulação de volumes finitos é o princípio de conservação de uma determinada quantidade física expressa pelas equações governantes sobre qualquer volume finito, também denominado volume de controle [43]. O domínio do escoamento é discretizado em um conjunto de volumes de controle não sobrepostos, que podem ser irregulares no tamanho e na forma.

Os valores de uma variável dependente são armazenados no centróide dos volumes de controle, ou seja, nos vértices dos triângulos da malha. As equações discretizadas da variável dependente são obtidas integrando as equações governantes sobre cada um dos volumes de controle do domínio. O processo de discretização torna-se mais conveniente reconhecendo-se o fato que todas as equações governantes relevantes possuem uma forma comum, isto é, a forma da equação geral do transporte:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\Lambda\Phi)}_{\text{termo transiente}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k}(\Lambda u_k \Phi)}_{\text{termo convectivo}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \right)}_{\text{termo difusivo}} + \underbrace{S_\Phi}_{\text{termo fonte}} \quad (4.1)$$

onde o símbolo Φ refere-se a uma variável dependente que pode ser a componente de um vetor, um tensor ou mesmo um escalar. Os coeficientes Λ e Γ têm significados diferentes para cada variável dependente, e S_Φ é chamado de termo fonte, que engloba todos os termos que não podem ser acomodados nos termos convectivos e difusivos, e é específico a um Φ particular.

Integrando-se a equação geral do transporte sobre o intervalo de tempo δt e o

respectivo volume de controle com o volume genérico ΔV e a área das superfícies do volume CV , e usando o teorema da divergência de Gauss sempre que possível, a equação integrada de uma variável dependente particular sobre cada volume de controle pode ser discretizada como:

$$\int_{\delta t} \int_{\Delta V} \Lambda \frac{\partial}{\partial t} dV dt + \int_{\delta t} \int_{\Omega_{cv}} J_k \cdot \mathbf{n}_k d\Omega dt = \int_{\delta t} \int_{\Delta V} S_\Phi dV dt \quad (4.2)$$

Onde

$$J_k = \Lambda u_k \Phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \quad (4.3)$$

denota o fluxo total (convecção mais difusão) que passa através da face com \mathbf{n}_k que é o vetor unitário que aponta para fora.

Supondo que o valor no nó central P do volume de controle prevalece sobre todo o volume de controle para os termos que não são explicitamente uma função da posição, tal como o termo da derivada temporal, $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$, o termo fonte S_Φ , e adotando a fórmula de Euler implícita atrasada de primeira ordem sobre o intervalo de tempo t , em vista de sua simplicidade e estabilidade incondicional para cálculos numéricos, temos:

$$a_p^0(\Phi_p - \Phi_p^n) + \int_{\Omega_{cv}} J_k \cdot \mathbf{n}_k d\Omega = \bar{S}_c + \bar{S}_p \Phi_p \quad (4.4)$$

onde

$$a_p^0 = \frac{\Lambda}{\delta t} \Delta V \quad (4.5)$$

onde o sobrescrito n denota os valores resultantes do nível de tempo anterior e a integral no volume do termo fonte s_Φ , que geralmente é dependente da própria variável dependente, foi linearizada como uma função de Φ_p com \bar{S}_c sendo a parte que não depende explicitamente Φ_p com \bar{S}_p o coeficiente de Φ_p . O *overbar*(sobrebarra) indica que os valores aplicados são avaliados usando o campo conhecido no tempo n (ou da iteração precedente).

Agora, o único termo integral restante é aquele que envolve o fluxo total J_k . Uma vez que conhecemos os valores da variável dependente nas faces do volume de controle a partir de uma esquema de aproximação da variação espacial apropriado (isto é, a função de interpolação baseada no volume de controle) que relaciona o fluxo total J_k em cada

face do volume de controle aos valores da variável dependente nos nós vizinhos, então esta integral pode ser manipulada usando o valor multiplicado pela respectiva área da face.

Assim, a forma final da equação integrada, ou seja, a equação de aproximação algébrica que estabelece a relação do valor Φ_p no nó central P com os valores dos nós dos seus vizinhos, é determinada e pode ser simbolicamente expressa em uma forma generalizada (nominalmente linear) para cada um dos volumes de controle do domínio:

$$a_p \Phi_p = \sum_{nb} a_{nb} \Phi_{nb} + \bar{S}_c + a_p^0 \Phi_p^0 \quad (4.6)$$

com

$$a_p = \sum_{nb} a_{nb} + a_p^0 - \bar{S}_p \quad (4.7)$$

onde a soma deve ser feita sobre todos os nós vizinhos nb dos nós centrados em P . Os coeficientes a_{nb} são funções das variáveis dependentes e seus conteúdos dependem de como estabelecer a relação entre o fluxo total, J_k e os valores da variável dependente nos nós vizinhos, dependendo, assim, tanto da forma do volume de controle usado quanto do esquema de aproximação ao adotado. São estes coeficientes que determinam a exatidão espacial da solução final.

Após ter executado as etapas acima mencionadas para cada um dos volume de controle no domínio, cada um dos nós no domínio do escoamento tem sua própria equação discretizada como a equação 4.6.

Conforme mencionado anteriormente, para obter os volumes de controle elementares a partir de uma malha não estruturada, dispõe-se de algumas técnicas. Uma delas é o método das medianas, onde os volumes são gerados a partir de uma triangulação, que pode ser uma triangulação qualquer ou a triangulação de Delaunay. Esse processo de obtenção dos volumes será empregado no modelo numérico a ser desenvolvido neste trabalho.

4.1 Método das medianas para a construção dos volumes de controle

Uma forma de se obter os volumes de controle não estruturados é através do método das medianas. Apesar deste trabalho empregar malhas Delaunay na simulação de escoamentos, o método das medianas é geral e pode ser aplicado a qualquer tipo de

malha triangular, para a construção dos volumes de controle.

Considere a geometria mostrada na Figura 9(a), discretizada utilizando uma triangulação e sobre a qual serão construídos os volumes elementares utilizando o método das medianas.

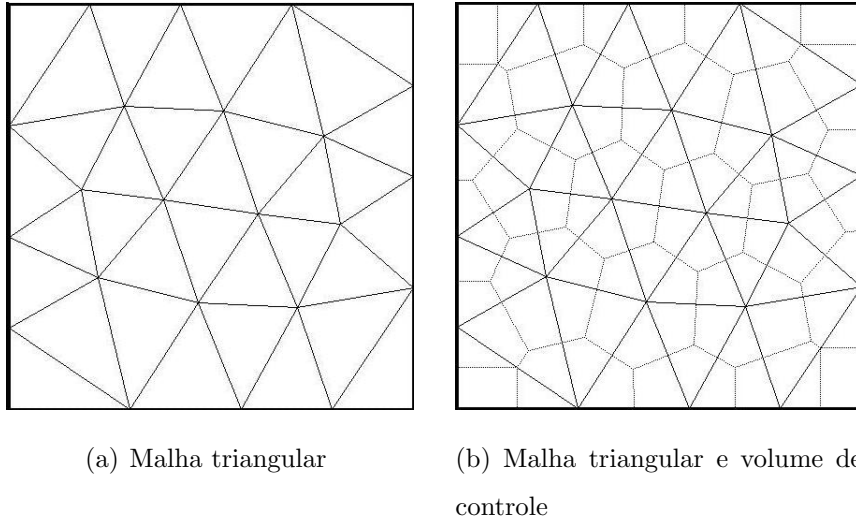


Figura 9 - Exemplo de malha triangular e os volumes de controle associados a esta malha

Esse método consiste em ligar os centróides dos triângulos com os pontos médios dos lados dos triângulos. Uma vantagem desse método é que utilizando os centróides dos triângulos para gerar os volumes de controle, fica assegurado que não existirá volumes de controle exteriores á malha, e mais, a área de cada volume de controle interior a um determinado elemento triangular é exatamente igual á um terço da área do elemento, o que simplifica os cálculos.

5 DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES GOVERNANTES

5.1 Discretização da equação do transporte

A equação 3.35 (equação do transporte para vorticidade) foi discretizada usando o método de elementos finitos/volumes finitos com uso de malhas não-estruturadas.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{Re_l} \nabla^2 \left[\left(1 + \frac{Re_l}{Re_t} \right) \omega \right] \quad (5.1)$$

$$\frac{D\omega}{Dt} = \nabla \cdot \left(\frac{1}{Re_l} + \frac{1}{Re_t} \right) \nabla \omega \quad (5.2)$$

$$\frac{D\omega}{Dt} = \nabla \cdot \underbrace{\left[\left(\frac{1}{Re_l} + \frac{1}{Re_t} \right) \nabla \omega \right]}_J \quad (5.3)$$

Assim, escrevemos a equação 5.3 usando a notação de fluxo J , como:

$$\nabla \cdot J = \frac{D\omega}{Dt} \quad (5.4)$$

que integrada no volume, resulta em:

$$\underbrace{\int_V \nabla \cdot J dV}_{\text{Expressão LE}} = \underbrace{\int_V \frac{D\omega}{Dt} dV}_{\text{Expressão LD}} \quad (5.5)$$

Aplicando o Teorema da Divergência de Gauss na Expressão LE, essa integral no volume resulta em uma integral de superfície:

$$\int_S J \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \frac{D\omega}{Dt} dV \quad (5.6)$$

$$\text{Expressão LE} = \int_S J \cdot \mathbf{n} dS \quad (5.7)$$

Onde \mathbf{n} é um vetor unitário normal a S que aponta para fora e S é a fronteira fechada do volume V .

O lado esquerdo (Expressão LE) e o lado direito (Expressão LD) da equação 5.6 serão desenvolvidos separadamente.

Primeiro o cálculo da expressão LE. Para isso, a integral de superfície, calculada no volume de controle do vértice 1 (vide Figura 27, Apêndice A), resulta em:

$$\int_a^0 J \cdot \mathbf{n} dS + \int_0^c J \cdot \mathbf{n} dS + [\text{Contribuições de outros elementos associados ao nó 1}] = 0 \quad (5.8)$$

Daí estabelecendo-se uma função de interpolação para ω , é possível calcular o fluxo J :

$$\omega = Ax + By + C \quad (5.9)$$

Com os valores de ω_1 , ω_2 e ω_3 e os valores das coordenadas (x, y) nos pontos 1, 2 e 3, é possível encontrar os valores das constantes A , B e C , da seguinte maneira: em $(x, y) = (x_1, y_1)$, tem-se que $\omega = \omega_1$, em $(x, y) = (x_2, y_2)$, tem-se que $\omega = \omega_2$ e em $(x, y) = (x_3, y_3)$, tem-se que $\omega = \omega_3$. Substituindo esses valores na equação 5.9, obtém-se:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= Ax_1 + By_1 + C \\ \omega_2 &= Ax_2 + By_2 + C \\ \omega_3 &= Ax_3 + By_3 + C \end{aligned} \quad (5.10)$$

Essas três expressões podem ser escritas como o seguinte sistema linear:

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

cuja solução resulta nos valores para as constantes A , B e C , cujo os cálculos são mostrados na solução da função de corrente (Apêndice A).

Lembrando que o vetor fluxo é dado por:

$$J = (J_x, J_y) = \left(\alpha \frac{\partial \omega}{\partial x}, \alpha \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \quad (5.12)$$

As componentes J_x e J_y resultam em:

$$J_x = \alpha A, J_y = \alpha B \quad (5.13)$$

Seguindo a analogia da solução da equação A.2 foram calculadas as constantes E_{ij} , $1 \leq i, j \leq 3$, do elemento 123 para os volumes de controle associados a cada um dos vértices 1, 2 e 3, é possível reunir essas constantes em uma matriz E_e , $1 \leq i, j \leq 3$, assim:

$$E_e = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

Note que a matriz E_e é simétrica.

Chamando

$$\omega_e = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

o vetor das vorticidades no elemento $\overline{123}$, a contribuição para os volumes de controle do elemento $\overline{123}$, associada aos vértices 1, 2 e 3 do elemento e .

$$u_e = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

O cálculo da matriz E_e é feito para cada elemento da malha. Portanto, é necessário adicionar todas as contribuições devidas a todos os n elementos da malha. Assim o lado esquerdo da equação 5.5, resulta em:

$$\text{Expressão LE} = \mathbf{K}\omega \quad (5.17)$$

Agora, expandindo o lado direito da equação 5.5 (Expressão LD), usando o método semi-lagrangiano, temos:

$$\text{Expressão LD} = \int_V \frac{D\omega}{Dt} dV \approx \frac{D\omega}{Dt} \int_V dV = \frac{\omega_p^{n+1} - \omega_d^n}{\Delta t} V_{vc} \quad (5.18)$$

Assim igualando a Expressão LE e a Expressão LD, temos:

$$\frac{V_{vc}}{\Delta t} \mathbf{I} (\omega^{n+1} - \omega_d^n) = \mathbf{K} \omega^{n+1} \quad (5.19)$$

$$\left(\frac{V_{vc}}{\Delta t} \mathbf{I} - \mathbf{K} \right) \omega^{n+1} = \left(\frac{V_{vc}}{\Delta t} \mathbf{I} \omega_d^n \right) \quad (5.20)$$

5.2 Método semi-lagrangiano

A história do método semi-Lagrangiano data do final da década de 1950 até o início da década de 1960 [44], [45], [46]. No entanto a utilização de tal metodologia para modelagem de problemas envolvendo escoamento de fluidos começou mais tarde na década de 1980 através dos trabalhos de Robert [47] e Pironneau [48], na qual problemas convectivos foram predominantemente investigados.

Este método foi usado pela primeira vez em sistemas convecção-difusão onde a estabilidade numérica e grandes passos de tempo foram necessários. Desde então, esta metodologia tem sido utilizada para atender a expectativa de grandes problemas serem resolvidos relativamente com mais rapidez. Para finalidade meteorológicas, a predição das condições climáticas, o uso de grandes passos de tempo é essencial para eficiência [49]. Nas equações de Navier-Stokes, entretanto, embora seu uso não tenha sido tão frequente até poucos anos atrás, trabalhos recentes vêm demonstrando sua elevada eficiência, principalmente quando o escoamento é caracterizado por alto número de Reynolds [50], [51].

É um método de fator de integração em que esse fator é um operador de advecção. Este operador é deslocado para um sistema de coordenadas em movimento a partir da qual o próximo passo de tempo é calculado, seja uma função representada pela derivada material abaixo na forma bidimensional como:

$$\frac{D\omega}{Dt} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} \quad (5.21)$$

Em dinâmica dos fluidos, as coordenadas de Lagrange controlam o escoamento movendo os pontos da malha ao longo de sua trajetória. No entanto, isso pode limitar possíveis condições de simulação, mesmo para baixa velocidade de escoamento, já que a trajetória da partícula pode ocorrer em um estado caótico em um curto espaço de tempo, provocando distorções inaceitáveis na malha. Assim para resolver um problema, o método reinicializa o sistema de coordenadas em cada passo de tempo, consequentemente

recuperando a malha original. O valor no passo de tempo atual é calculado de acordo com a sua posição no passo de tempo anterior.

Seguindo a descrição do método semi-Lagrangiano, a equação 5.21 pode ser discretizada no tempo no ponto x_i utilizando um esquema implícito de primeira ordem:

$$\frac{D\omega}{Dt} = \frac{\omega_p^{n+1} - \omega_d^n}{\Delta t} \quad (5.22)$$

onde $\omega_d^n = \omega^n(\mathbf{x}_d, t^n)$ e \mathbf{x}_d é chamado de ponto de partida. Na forma forte, a derivada substancial é calculada ao longo da trajetória característica, assim achando o ponto \mathbf{x}_d pela solução da equação 5.22 no tempo anterior $t^{n+1} \geq t \geq t^n$ usando a condição inicial $\mathbf{x}(t^{n+1})$. De acordo com este esquema, a posição inicial \mathbf{x}_i no tempo t^{n+1} é conhecido e portanto é usado para achar o ponto \mathbf{x}_d , na qual a posição não é conhecida, usando a seguinte expressão:

$$\mathbf{x}_d^n = \mathbf{x}_p^{n+1} - \mathbf{v}_p^n \Delta t \quad (5.23)$$

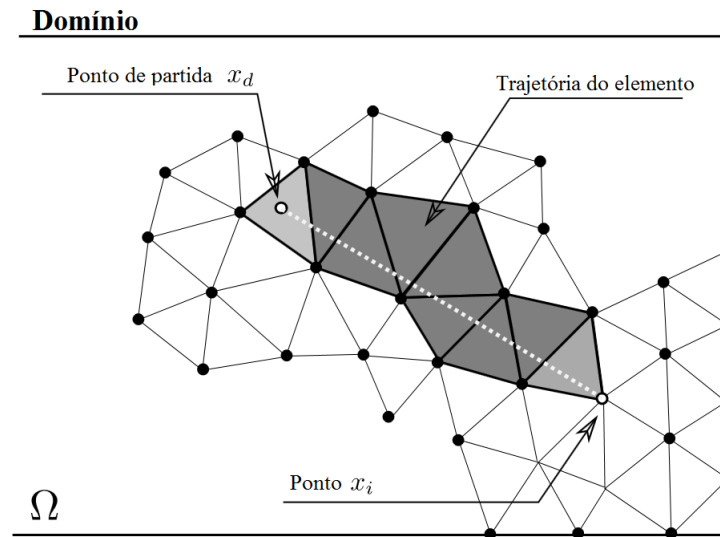


Figura 10 - Trajetória dimensional da partícula da posição do nó atual ω_i^{n+1} até seu correspondente ponto de partida ω_d^n . O algoritmo implementado consiste em localizar cada elemento anterior até achar o ponto de partida \mathbf{x}_d . O estado atual da implementação é linear, assim a trajetória é aproximada por um segmento de reta [3]

No contexto semi-Lagrangeano, um procedimento de pesquisa é necessário para achar o ponto de partida desconhecido \mathbf{x}_d no tempo t^n . Este procedimento pode levar a excessivo custo computacional se não for bem pensado, por isso deve ser tratado com muito cuidado.

Neste trabalho, a pesquisa deste procedimento é implementado usando uma rotina interna do MATLAB, que localiza os pontos de partida na malha não-estruturada e realiza as interpolações necessárias. Resultando no valor ω_d^n a partir de ω_p^n .

5.3 Discretização da Equação de Poisson da função de corrente

A equação da função de corrente,

$$\nabla^2 \psi = -\omega \quad (5.24)$$

é discretizada utilizando o método de volumes finitos (apêndice A), ou de forma equivalente, pelo método de elementos finitos (apêndice B), resultando na equação matricial abaixo:

$$\mathbf{K}\psi = -M\omega \quad (5.25)$$

5.4 Condições de contorno

Quando se resolve sistemas de equações diferenciais parciais, as condições de contorno, juntamente com as condições iniciais, determinam a solução particular do problema que está sendo estudado.

Neste trabalho foi usado as seguintes condições de contorno:

a) Entrada do escoamento

Na entrada do escoamento a condição de contorno é de Dirichlet para impôr a vorticidade diferente de zero (considerando a rotação do fluido na entrada do escoamento) e a função de corrente.

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (5.26)$$

Foi considerado um escoamento totalmente desenvolvido na entrada do escoamento e tanto no referencial estacionário, quanto no referencial girando, foi imposta uma velocidade angular na entrada devido a rotação do fluido, $\Omega_z = \text{constante}$.

b) Saída do escoamento

Na saída do escoamento temos uma condição de contorno de Neumann e derivada nula

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (5.27)$$

c) Paredes sólidas

Produz-se uma condição de contorno de ψ prescrita nas paredes, impondo assim a condição de não-deslizamento nas duas paredes. As condições de contorno empregadas, para a função de corrente nas paredes superior e inferior do canal é admitida como sendo $\psi = 1$ e $\psi = 0$, respectivamente. O que implica que não há transferência de massa através das paredes do canal e as fronteiras por si mesmas formam linhas de corrente.

Nas partes superior e inferior, temos condições de contorno para a vorticidade, essa pode ser achada a partir da função de corrente. A função de corrente é constante nas paredes. Assim a equação da vorticidade em coordenadas cartesianas é definida por:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega_w$$

Considerando, n a direção normal e t a direção tangencial do escoamento no canal curvo, que é o caso do nosso estudo, a equação da vorticidade se torna:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial n^2} = -\omega_w \quad (5.28)$$

Em coordenadas polares esta mesma expressão se torna:

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} = -\omega_w \quad (5.29)$$

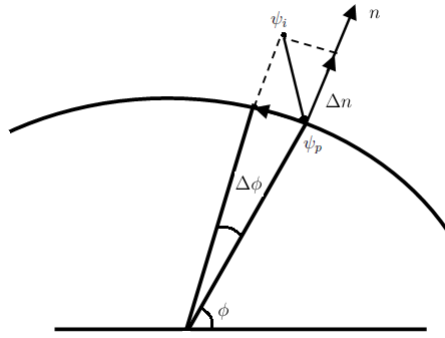


Figura 11 - Malha do canal reto

Considerando a superfície sólida localmente como sendo cilíndrica e que ψ não varia na direção tangencial sobre a parede,

$$\frac{\partial\psi}{\partial\phi} = 0 \quad (5.30)$$

e

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} = 0 \quad (5.31)$$

Portanto, temos:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial n^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} = -\omega_w - \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial r} \quad (5.32)$$

Assim estimou-se ω_w através da vizinhança de ψ na parede e no interior usando expansão de séries de Taylor para a expressão de ψ , usando a Figura 11, temos:

$$\psi_i = \psi_p + \frac{\partial\psi}{\partial n} \cdot \Delta n + \frac{\partial^2\psi}{\partial n^2} \cdot \frac{\Delta n^2}{2} + \frac{\partial\psi}{\partial\phi} \cdot \Delta\phi + \frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} \cdot \frac{\phi^2}{2} \quad (5.33)$$

Como, ψ é constante nas paredes superior e inferior, temos:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\phi} = 0$$

Então, a equação 5.33 fica:

$$\psi_i = \psi_p + \frac{\partial\psi}{\partial n} \cdot \Delta n - \left(\omega_w + \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial n} \right) \cdot \frac{\Delta n^2}{2} \quad (5.34)$$

$\frac{\partial \psi}{\partial n}$ é igual a velocidade na direção normal que é nula. Assim, as condições de contorno para vorticidade nas paredes inferior e superior, ω_w , são dadas pela seguinte expressão:

$$\omega_w = 2 \left(\frac{\psi_p - \psi_i}{\Delta n^2} \right)$$

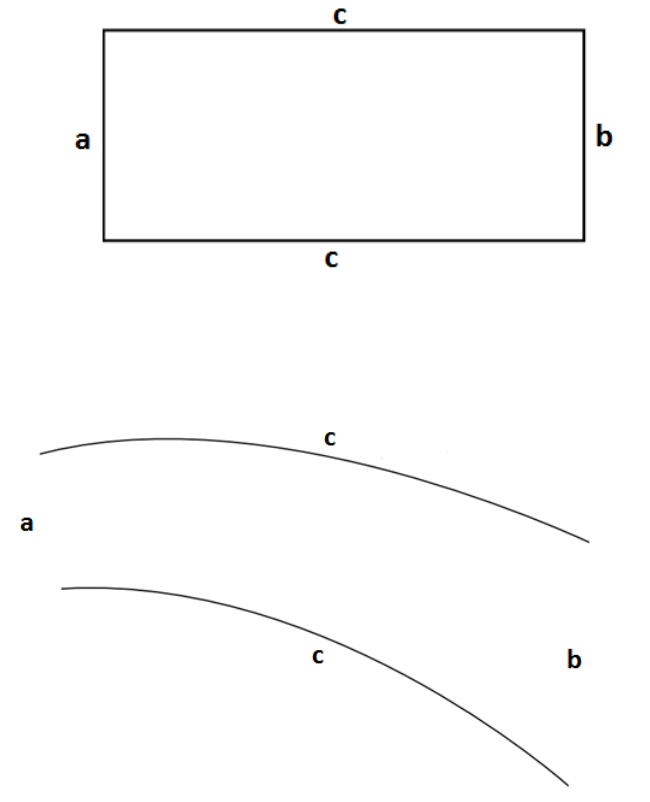


Figura 12 - Representação dos locais onde foram definidas as condições de contorno do canais com geometria reta e curva, respectivamente

5.5 Discretização do movimento das partículas

No Capítulo 1, foram mostradas as equações governantes do movimento das bolhas; essas equações serão discretizadas na presente seção.

Assim temos a equação da posição da bolha dada por:

$$\frac{d\mathbf{x}_b}{dt} = \mathbf{u}_b \quad (5.35)$$

Discretizada como:

$$\frac{\mathbf{x}_b^{n+1} - \mathbf{x}_b^n}{\Delta t} = \mathbf{u}_b^n \quad (5.36)$$

Assim temos a equação da aceleração da bolha dada por:

$$\frac{d\mathbf{u}_b}{dt} = \mathbf{a}_b \quad (5.37)$$

Discretizada como:

$$\frac{\mathbf{u}_b^{n+1} - \mathbf{u}_b^n}{\Delta t} = \mathbf{a}_b^n \quad (5.38)$$

Assim, a expressão da equação do movimento de Newton para monitorar e computar a trajetória das bolhas, fica:

$$\begin{aligned} m_b \left(\frac{d\mathbf{u}_b}{dt} + \underbrace{2\Omega \times \mathbf{u}_f - \Omega^2 r}_{\text{Ass. a rotação}} \right) &= m_f \left(\frac{D\mathbf{u}_f}{Dt} + \underbrace{2\Omega \times \mathbf{u}_f - \Omega^2 r}_{\text{Ass. a rotação}} \right) - \\ m_f \frac{C_{vm}}{2} \left(\left(\frac{D\mathbf{u}_b}{Dt} + \underbrace{2\Omega \times \mathbf{u}_f - \Omega^2 r}_{\text{Ass. a rotação}} \right) - \left(\frac{D\mathbf{u}_f}{Dt} + \underbrace{2\Omega \times \mathbf{u}_f - \Omega^2 r}_{\text{Ass. a rotação}} \right) \right) & \\ - \frac{1}{2} C_d \rho_f (\mathbf{u}_b - \mathbf{u}_f) |\mathbf{u}_b - \mathbf{u}_f| \frac{\pi D_b^2}{4} & \end{aligned} \quad (5.39)$$

Esta mesma equação (equação 5.39) na forma discretizada se torna:

$$\begin{aligned}
& \frac{m_b}{\Delta t} \mathbf{u}_b^{n+1} + \frac{m_f C_{vm}}{2\Delta t} \mathbf{u}_b^{n+1} + \frac{\rho_f C_d}{2} \mathbf{u}_b^{n+1} |\mathbf{u}_b - \mathbf{u}_f| \frac{\pi D_b^2}{4} = \\
& (m_f - m_b)(2\Omega \times \mathbf{u}_f - \Omega^2 r) + \frac{m_b}{\Delta t} \mathbf{u}_b^n + m_f \frac{D\mathbf{u}_f}{Dt} + \frac{m_f C_{vm}}{2\Delta t} \mathbf{u}_b^n + \\
& \frac{m_f C_{vm}}{2} \frac{D\mathbf{u}_f}{Dt} + \frac{\rho_f C_d}{2} \mathbf{u}_f |\mathbf{u}_b - \mathbf{u}_f| \frac{\pi D_b^2}{4}
\end{aligned} \tag{5.40}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_b^{n+1} &= \frac{1}{\left(\frac{m_b}{\Delta t} + \frac{m_f C_{vm}}{2\Delta t} + \frac{\rho_f C_d}{2} |\mathbf{u}_b - \mathbf{u}_f| \frac{\pi D_b^2}{4} \right)} \left(\frac{m_b}{\Delta t} + \frac{m_f C_{vm}}{2\Delta t} \right) \mathbf{u}_b^n + \\
& \left(m_f + \frac{m_f C_{vm}}{2} \right) \frac{D\mathbf{u}_f}{Dt} + \frac{\rho_f C_d}{2} \mathbf{u}_f |\mathbf{u}_b - \mathbf{u}_f| \frac{\pi D_b^2}{4} + (m_f - m_b)(2\Omega \times \mathbf{u}_f - \Omega^2 r)
\end{aligned} \tag{5.41}$$

6 VALIDAÇÕES E RESULTADOS

Neste capítulo, foi feita a validação do escoamento bidimensional com base na metodologia proposta para a solução da fase dispersa e da fase contínua em um canal de geometria reta. Em seguida, foram apresentados os resultados do escoamento em um canal de geometria curva, que são as geralmente encontradas em passagens entre lâminas de rotores de turbomáquinas do tipo radiais, para posterior análise da trajetória da fase dispersa em ambos casos.

A Figura 13, mostra a malha do canal reto.

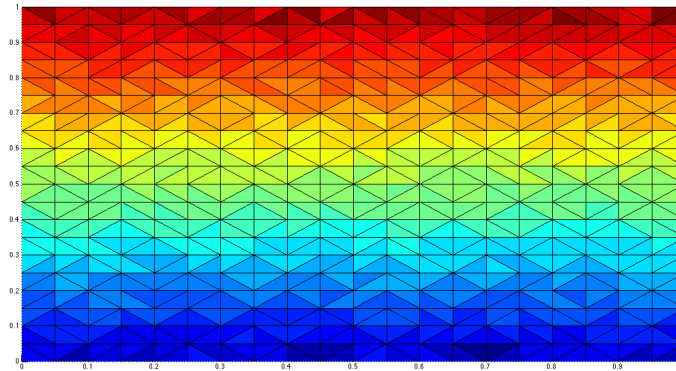


Figura 13 - Malha do canal reto

6.1 Validação do perfil de velocidade do escoamento do canal reto

Foram comparados para efeito de validação, os resultados obtidos na simulação da fase contínua deste trabalho, no qual se utilizou o método de elementos finitos/volumes finitos com malhas não estruturadas, com vários problemas numéricos padrões da literatura. O estudo foi realizado considerando um escoamento bidimensional, primeiramente em regime laminar e depois adicionado um termo relacionado a turbulência e considerando também as seguintes hipóteses simplificadoras do problema: escoamento incompressível, isotérmico e em regime transiente num canal reto em primeira instância - este caso é muito usado para validação de muitos métodos numéricos por causa de sua geometria simples e sem a complexidade do campo de escoamento quando apresenta regiões de recirculação.

Os códigos computacionais foram desenvolvidos em ambiente MATLAB; os resultados apresentados tanto para escoamento laminar quanto para o escoamento turbulento,

são consistente em comparação com os trabalhos numéricos de Ghia [52]. O campo de velocidade é apresentado na Figura 14 para o escoamento laminar e Figura 15 para o escoamento turbulento. Uma excelente concordância pode ser observada também entre os contornos de vorticidade computados nas figuras subsequentes e os resultados encontrados em Ghia [52].

Tabela 1 Alguns dados relacionados ao escoamentos dos dois casos simulados - Canal reto

Casos	Modelo de escoamento	Número de Reynolds, Re	Velocidade máxima (m/s)
Validação 1	Laminar	500	1.5
Validação 2	Turbulento	10^5	1.1

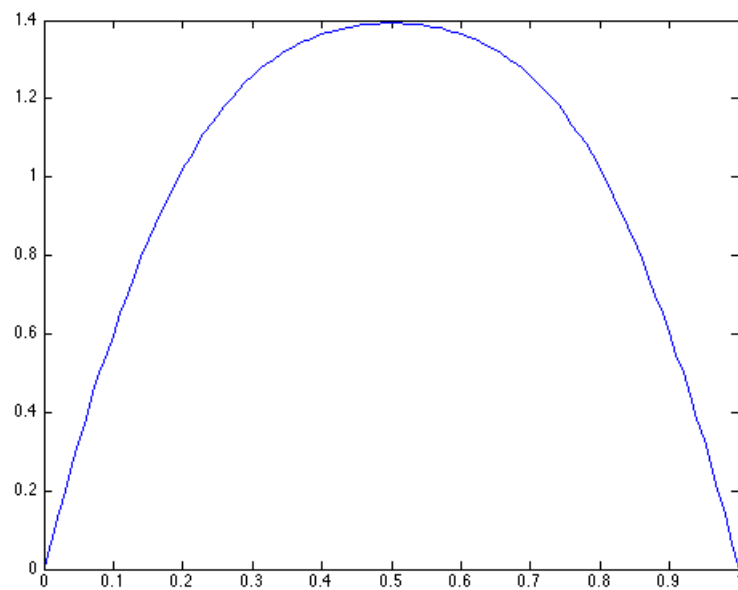
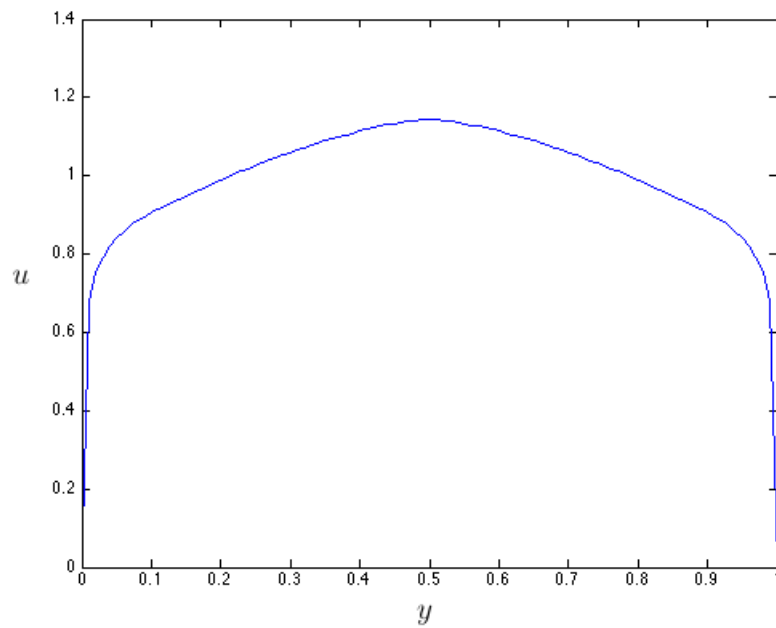
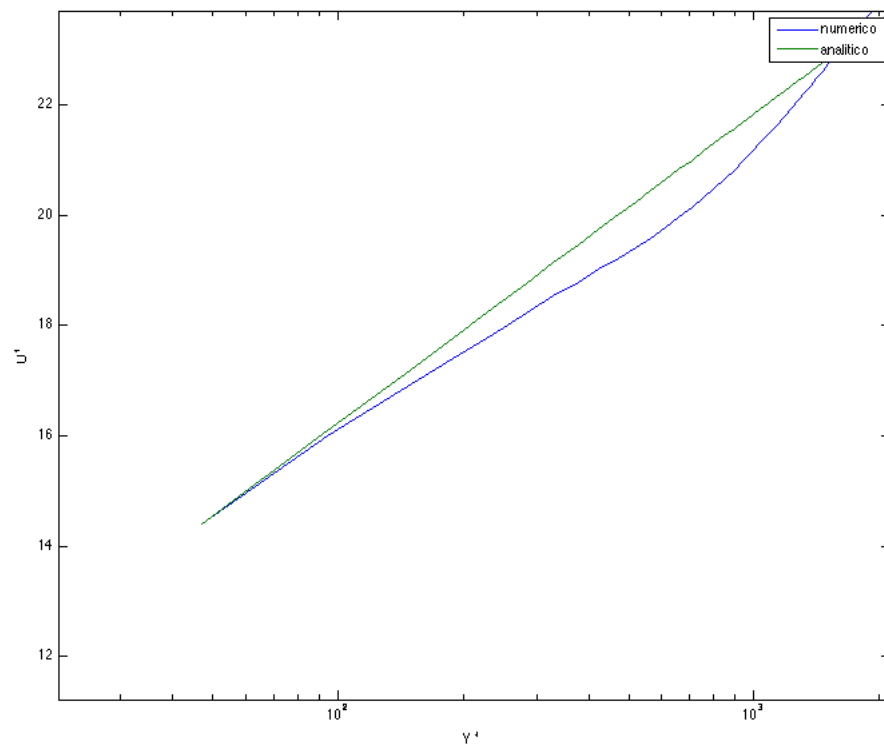


Figura 14 - Perfil de velocidade laminar para escoamento completamente desenvolvido com $Re = 500$



(a) Perfil de velocidade do escoamento turbulento



(b) Comparação do perfil numérico adimensional, $u^+ = \frac{yu_*}{\nu}$ com o perfil semi-empírico (lei da parede), $u^+ = 2.5 \ln \frac{yu_*}{\nu} + 5$

Figura 15 - Perfil de velocidade turbulenta para escoamento completamente desenvolvido com $Re = 5 \times 10^5$

A Figura 16 mostra o campo de velocidade do escoamento laminar e turbulento, respectivamente.

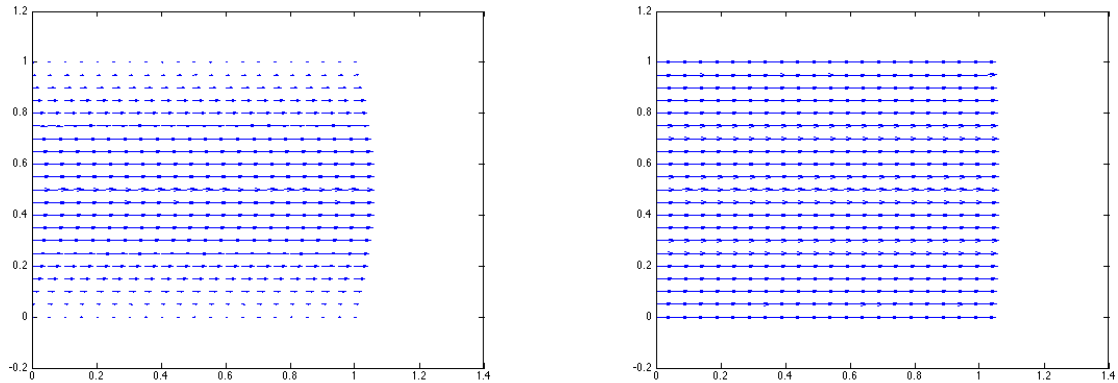


Figura 16 - Campo de velocidade para o regime laminar e turbulento respectivamente

Ao contrário do escoamento laminar, as expressões para o perfil de velocidade turbulento são baseados em análises e medições, são de natureza semi-empírica com restrições determinadas através de dados experimentais.

Notar na Figura 16, que o perfil de velocidade do escoamento laminar é parabólico pois somente há difusão molecular mas é muito mais completo no escoamento turbulento com um achatamento próximo as paredes do canal.

Para o escoamento bidimensional em canal, foi primeiramente testado e validado o escoamento em um canal de geometria reta e depois para um canal de geometria curva, ou seja, aquelas geometrias geralmente encontradas em rotores de turbomáquinas do tipo axiais.

6.2 Validação do campo de vorticidade do canal reto

O valor do componente ω_z do vetor vorticidade do escoamento,

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (6.1)$$

foi apresentado nos capítulos anteriores. O vetor vorticidade é perpendicular ao plano de escoamento, por isso está representado com índice z - o plano do escoamento é xy . Desde que o vetor é o rotacional do vetor velocidade, sabe-se também que é livre de divergência, não havendo fonte ou sumidouro de vorticidade no próprio fluido. Já na

equação de transporte da vorticidade, facilmente se demonstra que o termo de geração de vorticidade é nulo em escoamentos bidimensionais. Isso tudo leva a conclusão que não é possível gerar vorticidade em escoamentos bidimensionais. Os mecanismos de transporte de vorticidade, presentes no caso de escoamentos bidimensionais, são a difusão viscosa e a convecção.

Foi também realizada uma simulação do escoamento em estudo sem utilização do modelo de turbulência. A solução convergiu para um escoamento laminar, mostrando a correção fundamental do modelo.

Na Figura 17 e Figura 18, são mostradas duas vistas do campo de vorticidade, ω_z . Verifica-se que no caso do escoamento turbulento a vorticidade torna-se significativo somente na região da parede. Contudo deve-se ressaltar que esta avaliação é referente ao campo de velocidade média. As pequenas ondulações nas partes superior e inferior são devido a imprecisão das condições de contorno para a vorticidade na parede, calculadas no capítulo anterior.

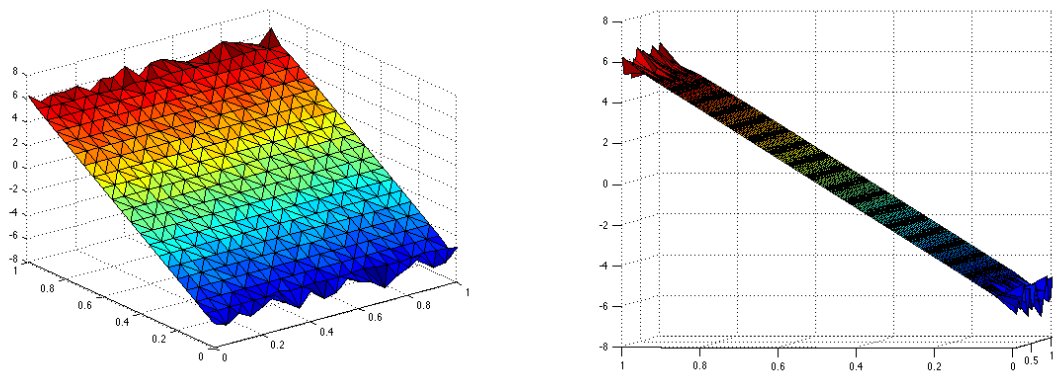


Figura 17 - Campo de vorticidade do escoamento laminar

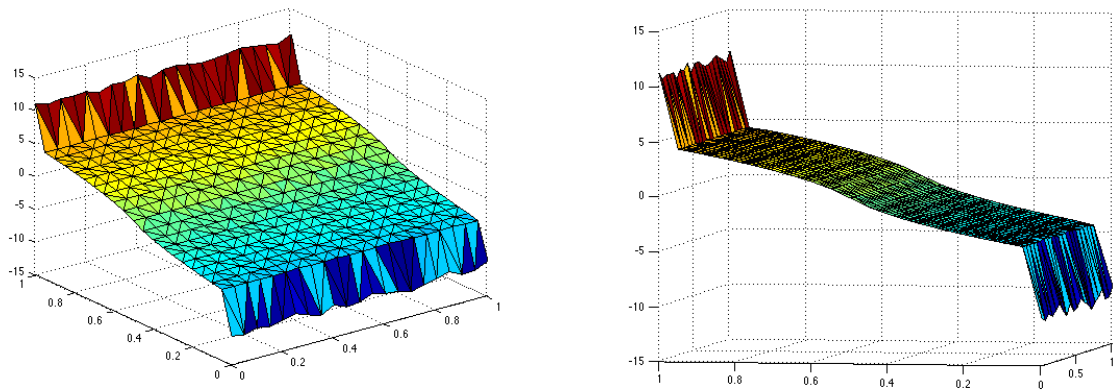


Figura 18 - Campo de vorticidade do escoamento turbulento

6.3 Validação do método para monitoramento da trajetória da bolha

A validação do método para computação e o monitoramento da trajetória da bolha foi feito usando a lei de Newton do movimento (equação 5.41 discretizada), simulando o comportamento da velocidade de apenas uma bolha em relação a velocidade da fase contínua, considerando um comportamento senoidal ($u = u_0 + \sin(\Omega t)$ e $v = v_0 + \sin(\Omega t)$) para a fase contínua. Os dados das simulações se encontram na Tabela 2.

Foi constatado que devido a baixa massa da bolha, ela se movimenta com uma velocidade maior que a da fase contínua e a curva senoidal da bolha é bem mais acentuada em comparação com a curva da fase contínua. Isso também explica o motivo das bolhas de cavitação terem a tendência de colidirem e conseqüentemente implodirem contras as paredes da passagem. A Figura 19 e a Figura 20 ilustram esse comportamento:

Tabela 2 Dados relacionados ao comportamento da trajetória da bolha

Casos	velocidade da bolha (m/s)	velocidade do líquido (m/s)
Caso 1	2.5	1.5
Caso 2	3.4	1.5

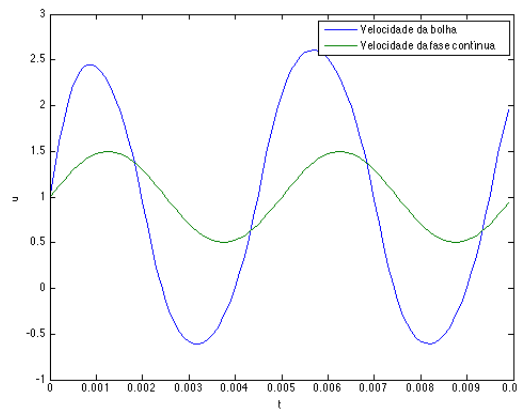


Figura 19 - Velocidade da bolha e do líquido representadas em percurso senoidal, caso 1

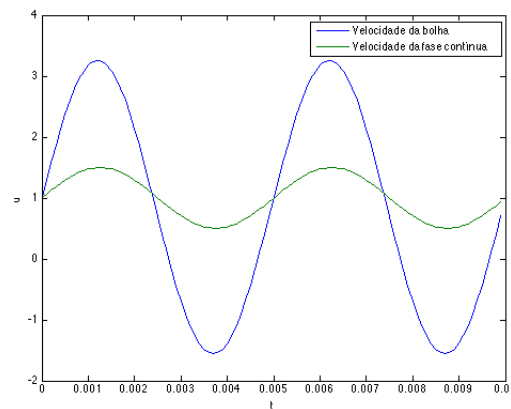


Figura 20 - Velocidade da bolha e do líquido representadas em percurso senoidal, caso 2

6.4 Resultado do escoamento em canal curvo

Aqui são apresentadas algumas simulações do escoamento em canais de geometrias curvas, primeiramente usando um referencial parado e depois com o referencial em rotação, afim de mostrar o comportamento do vetor velocidade e a trajetória das bolhas ao longo dos dois casos. Em todos os casos foi utilizado $Re = 500$ para o regime laminar e $Re = 10^5$ para o regime turbulento.

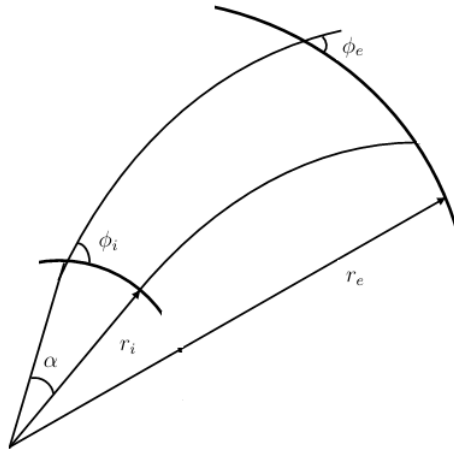


Figura 21 - Parametrização do canal curvo

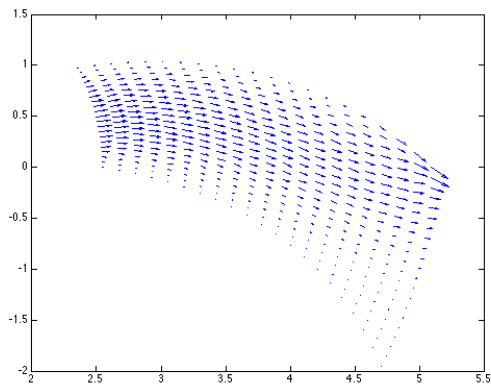
Os parâmetros r_e , r_i , ϕ_e , ϕ_i e α são o raio externo, o raio interno, o ângulo da parede externa associada ao raio externo, o ângulo da parede externa associada ao raio interno e o ângulo da entrada, respectivamente.

$$\alpha = \frac{2\pi}{n} \quad (6.2)$$

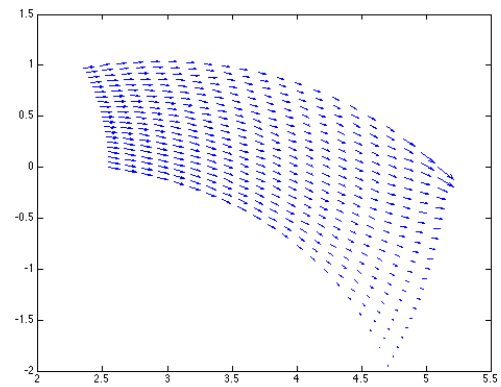
onde n é o número de pás do impelidor.

6.4.1 Com referencial sem rotação (rotor parado)

A Figura 22(a) mostra o campo de velocidade de um escoamento laminar e a Figura 22(b) o campo de velocidade de um escoamento turbulento ambos em um canal curvo, considerando o rotor parado. Pode-se observar que ambos campos conservam o perfil de velocidade dos escoamentos em canal com geometria reta e que a direção do escoamento em ambos casos, tende a procurar a saída na parede superior direita do canal, isso devido a presença da grande espessura da camada limite na parede inferior.



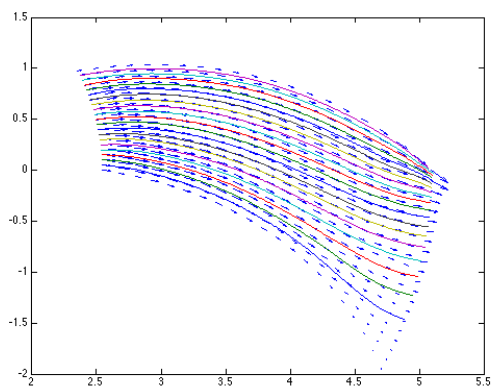
(a) Regime laminar



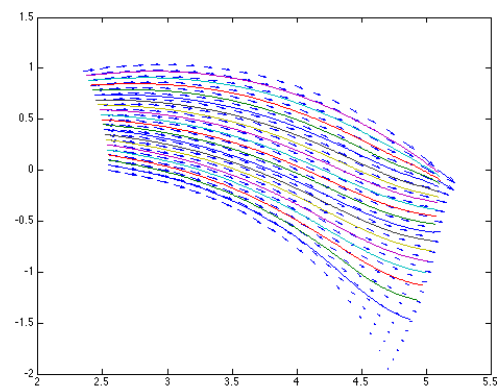
(b) Regime turbulento

Figura 22 - Campo do vetor velocidade para o regime laminar e turbulento respectivamente, $\Omega_z = 0$

Pode-se notar que a trajetória das bolhas tende a seguir a direção do escoamento, porque além do referencial estar sendo considerado fixo, ou seja, sem rotação, o deslocamento das bolhas é desencadeado pela ação das forças devido ao movimento da fase líquida conforme mostram as Figura 23(a) e Figura 23(b). Claro que a aceleração da bolha é bem maior que a da fase líquida em função da sua massa conforme relatado anteriormente.



(a) Regime laminar

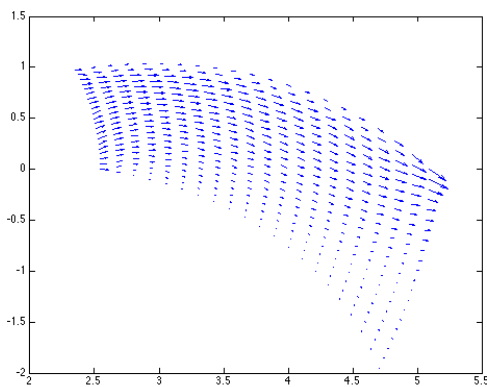


(b) Regime turbulento

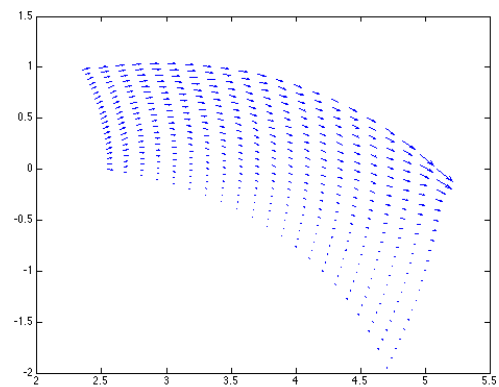
Figura 23 - Campo do vetor velocidade para o regime laminar e turbulento com trajetória de bolhas, respectivamente, $\Omega_z = 0$

6.4.2 Com referencial em rotação

Neste caso, são apresentados resultados obtidos para escoamento do canal curvo considerando o referencial com rotação angular constante, $\Omega_z = 0.5$. A Figura 24(a) e Figura 24(b) mostram o campo de velocidade para o caso laminar e turbulento, respectivamente; Comparando os caso de referencial parado e em rotação, observa-se que particularmente no caso turbulento o regime de baixa velocidade é maior no caso com referencial girando.



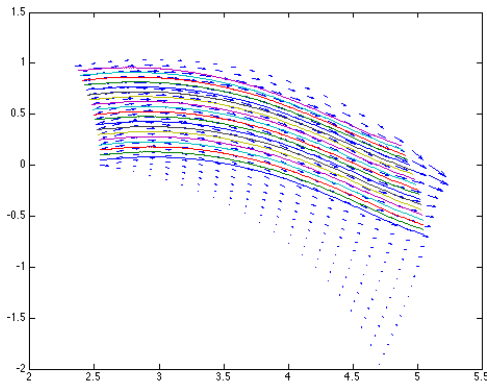
(a) Regime laminar



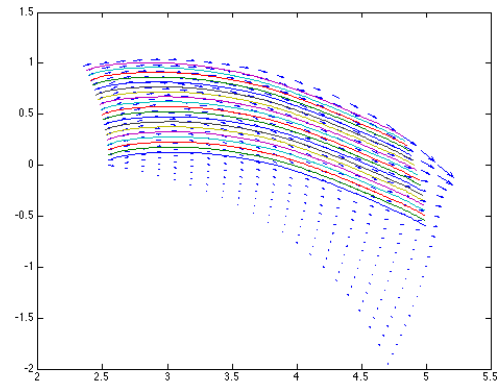
(b) Regime turbulento

Figura 24 - Campo do vetor velocidade para o regime laminar e turbulento respectivamente, $\Omega_z = 0.5$

As bolhas originadas na parte inferior e superior da entrada do escoamento tendem a se afastar das paredes, se concentrando no meio do canal e seguindo o escoamento procurando uma saída na parte superior da saída do escoamento do canal, mas no caso 1, as bolha mais próximas da parede superior tendem a colidir contra esta (parede) nas proximidades da saída do escoamento, conforme mostram as Figura 25(a) e Figura 25(b); Enquanto no caso 2, as bolha mais próximas da parede superior tendem a colidir contra esta (parede) antes do meio do canal, no escoamento turbulento da Figura 26(a) isso acontece bem no início do escoamento e no caso da Figura 26(b) isso acontece próximo a metade do canal.

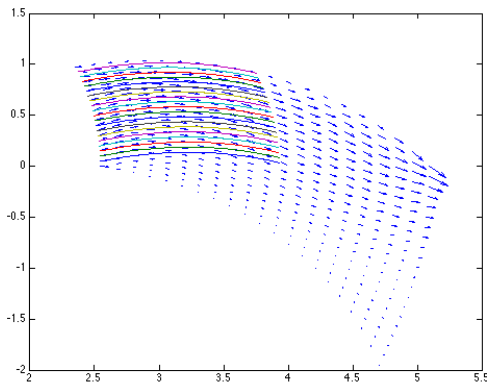


(a) Regime laminar

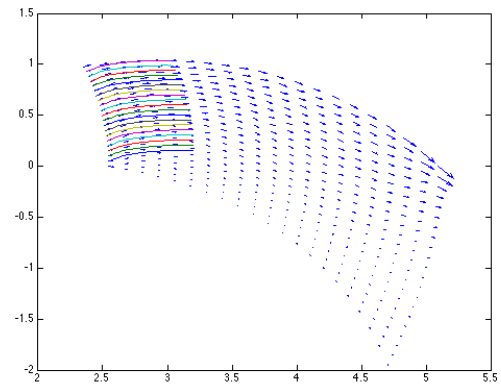


(b) Regime turbulento

Figura 25 - Campo da trajetória das bolhas para o regime laminar e turbulento respectivamente: Caso 1 ($D_p = 0.001m$); $\Omega_z = 0.5$



(a) Regime laminar



(b) Regime turbulento

Figura 26 - Campo da trajetória das bolhas para o regime laminar e turbulento respectivamente: Caso 2 ($D_p = 0.005m$); $\Omega_z = 0.5$

Pode-se concluir que a colisão das bolhas irá ocorrer na parede superior. No caso de bolhas com $D_p = 0.001m$, não ocorre grande diferença entre o caso laminar e turbulento. Já com diâmetros maiores, no caso do escoamento turbulento, a tendência de colisão das bolhas é mais acentuada que no escoamento laminar.

CONCLUSÃO

Neste capítulo é apresentado o resumo do trabalho, principais conclusões referentes a metodologia utilizada, aos resultados mostrados e são apresentadas algumas recomendações para possíveis trabalhos futuros relacionados.

O método numérico baseado numa abordagem Euleriana-Lagrangeana desenvolvido para analisar e estudar a trajetória das bolhas no escoamento de uma fase líquida se mostrou bastante eficaz para este estudo. Foi desenvolvido um código computacional usando método de elementos finitos/volumes finitos com uso de malhas não-estruturadas para a solução do escoamento bidimensional na passagem entre as lâminas de uma turbomáquina - foi utilizado um enfoque euleriano para a fase contínua e um enfoque lagrangeano para a fase dispersa. O método é denominado elementos finitos/volumes finitos com uso de malhas não estruturadas porque é demonstrado que as duas abordagens resultam exatamente na mesma implementação computacional.

A abordagem Euleriana-Lagrangeana é um método muito apropriado para investigações fundamentais de escoamentos bifásicos, uma vez que considera vários efeitos relacionados a interações líquido-bolha. Outra vantagem dessa abordagem é de permitir fácil implementação através da extensão do código de simulação do escoamento de uma única fase. Além disso, a incorporação de uma distribuição arbitrária de propriedades da bolha é fácil. O esforço computacional não está relacionado apenas com resolução da malha espacial mas também com a quantidade de bolhas que estão sendo monitoradas.

A validação dos dados aqui apresentados mostram que o esquema proposto, reproduz resultados que são qualitativamente consistentes. O método desenvolvido é adequado para teste de modelos que usa dinâmica de bolha e escoamento de líquidos.

O modelo proposto é adequado para escoamento isotérmico e sem troca de massa entre as fases e o modelo de turbulência algébrico usado foi bastante simples, o de viscosidade turbulenta de comprimento de mistura de Prandtl e se mostrou bastante eficiente na solução desse tipo de escoamento.

Neste estudo, foram consideradas apenas a força de arrasto, a força devido a massa virtual e a aceleração do líquido. As bolhas são indeformáveis, isto é, não foi considerada deformação das bolhas pela ação das forças externas e nem que as bolhas influenciam o escoamento. A força de arrasto tende a acelerar a bolha contra a parede enquanto a

aceleração do fluido afasta a bolha para longe da parede.

A trajetória das bolhas próximas a região da parede em um escoamento com referencial parado se mostrou bem comportado, acompanhando o escoamento da fase líquida tanto no escoamento laminar quanto no turbulento; As simulações com outros diâmetros de bolha se mostraram pouco diferentes entre si. A trajetória das bolhas no escoamento com referencial em rotação mostrou que as bolhas próximas da parede se afastavam lentamente da parede superior e mais rapidamente da parede inferior. No caso 1 do escoamento com referencial em rotação, essa trajetória leva a colisão contra a parede superior próximo da saída do canal, diferente do caso 2 que a trajetória das bolhas da parte superior aparecem muito próxima a parede colidindo assim contra a parede nas proximidades da metade do canal.

Finalmente, a abordagem Euleriana-Lagrangeana utilizada neste trabalho, pode mostrar todas as variáveis que se movem instantaneamente com as bolhas. Isto inclui o conjunto das diferentes forças que são modeladas para agir na bolha, mudança de velocidade das bolhas, suas flutuações, etc. Esta abordagem pode ser considerada uma ferramenta inteligente para teste de diferentes modelos com aplicações em engenharia para comportamento físico de bolhas se movendo na fase contínua. Um entendimento e uma descrição completamente satisfatória do escoamento multifásico ainda não é possível e isso explica a grande quantidade de correlações fenomenológicas existentes para caracterizar diferentes escoamentos em diferentes configurações geométricas.

TRABALHOS FUTUROS

Além do desenvolvimento do código numérico, pode ser focada a implementação de outros modelos de turbulência que leva em conta a viscosidade turbulenta ou modelos de turbulência mais sofisticados e as forças desprezadas neste trabalho como por exemplo, a força sustentação e a força de Basset, agindo na bolha.

Implementar um modelo de colisão (interação bolha-bolha e bolha-parede), coalescência, deformação dessas através da tensão interfacial e o modelo de Rayleigh-Plesset, ou seja, o modelo de crescimento e colapso da bolha; estes fatores poderiam ser levados em consideração tendo em conta casos reais.

REFERÊNCIAS

- [1] TURTON, R. *Rotodynamic Pump Design*. [S.l.]: Cambridge University Press, Cambridge, England, 1994.
- [2] BRENNEN, C. *Cavitation and Bubble Dynamics*. 1. ed. [S.l.]: Oxford University Press, 1995.
- [3] RASHIDI, G. H. M.; BENERJEE, S. Particle-turbulence interaction in a boundary layer. *Int. Journal Multiphase Flow*, v. 16, p. 935–949, 1990.
- [4] DARMANA, N.; KUIPERS, J. Parallelization of an euler-lagrange model using mixed domain decomposition and a mirror domain technique: Application to dispersed gas-liquid two-phase flow. *J. Comput. Phys.*, v. 1, p. 220–248, 2006.
- [5] MALISKA, C. *Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional*. 1. ed. [S.l.]: LTC-Livros técnicos e científicos, Rio de Janeiro, 1995.
- [6] MALISKA, C.; SHNEIDER, F. Uma formulação em volumes finitos usando malhas não-estruturadas. *In Proceedings do INCIT, 2000*, 2000.
- [7] CALAINHO, J.; LOMONACO, F. Cavitação em turbinas hidráulicas do tipo Francis e Kaplan no Brasil. *XV SNPTEE*, 1999.
- [8] Furnas. *Revista Furnas*, XXXI. 2005. 14–15 p.
- [9] FERRANTE, A.; ELGHOBASHI, S. On the accuracy of the two-fluid formulation in direct numerical simulation of bubble-laden turbulent boundary layers. *J. Phys. Fluids*, v. 4, p. 19–19, 2007.
- [10] KOIVULA, T. On cavitation in fluid power. In: *Proceedings of 48th national conference on fluid power*. Chicago, Illinois, USA: [s.n.], 2000. p. 371–381.
- [11] EULER, L. Principes généraux du mouvement des fluides. *Hist. de L'Academie Royale, Berlin*, 1755.
- [12] REYNOLDS, O. On the effect of immersion of screw propellers. *Trans. Institution of naval Architects, Scientific Papers*, n. 14, p. 78–80, 1874.

- [13] NORMAND, J. A. Note sur L'Influence de L'Imersio de L'Helice et de la vitesse sur la rupture du cylindre d'eau actionné. *Bulletin de Association Technique Maritime*, n. 4, p. 68–73, 1893.
- [14] CANAVELIS, R. Contribution à létude de lerosion de cavitation das les turbomachines hydrauliques. *Bulletin de la direction des études et recherches, Paris*, n. 2, 1967.
- [15] KNAPP, R.; DAILY, J.; HAMMITT, F. *Cavitation*. 1. ed. [S.l.]: McGraw-Hill, New York, 1970.
- [16] PETERMANN, H.; PFLEIDERER, C. *Máquinas de fluxo*. [S.l.]: LTC, 1979.
- [17] CAMPOS-AMEZCUA, R.; REY, R. Numerical analysis of unsteady cavitating flow in an axial inducer. *Journal of Power and Energy*, v. 2, n. 224, p. 223–238, 2010.
- [18] FACEIRA, L. O fenómeno da cavitação e o seu estudo em soleiras descarregadoras de planta rectilínea. *LNEC, Lisboa*, 1983.
- [19] RAYLEIGH, L.; STRUTT, J. On the pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity. *Phil. Mag.*, n. 34, p. 94–98, 1917.
- [20] DELANNOY, Y.; KUENY, J. Cavity flow predictions based on the Euler equation. *ASME Cavitation and Multiphase Flow Forum*, 1990.
- [21] CHEN, Y.; S.D.HEISTER. Modeling Hydrodynamic Non-equilibrium in Cavitating Flows. *Journal Fluids Engineering*, n. 118, p. 172–178, 1996.
- [22] SONG, C.; HE, J. Numerical Simulation of Cavitating Flows by Single-Phase Flow Approach. In: *Third International Symposium on Cavitation*. Grenoble, France: [s.n.], 1998.
- [23] DUKOWICZ, J. A particle-fluid numerical model for liquid sprays. *Phys.*, v. 35, p. 209–253, 1980.
- [24] GAUVIN, W.; KNELMAN, F. Drop trajectory predictions and their importance in the design of spray dryers. *Int. J. Multiphase Flow*, v. 1, p. 793–816, 1975.
- [25] GIDASPOW, D. *Multiphase Flow and Fluidization Continuum and Kinetic Theory Descriptions*. Boston, 1994.

- [26] BALIGA, T. P. B.; PATANKAR, S. Solution of some two-dimensional incompressible fluid flow and heat transfer problems using a control-volume finite-element method. *Numerical Heat Transfer*, v. 6, n. 1, p. 263–282, 1983.
- [27] SPARROW, G. S. E.; PLETCHER, R. *Handbook of Numerical Heat Transfer*. 1. ed. [S.l.]: John Wiley and Sons, 1988.
- [28] CHRISTENSEN, H. F. *A vorticity-streamfunction formulation for turbulent airfoil flows*. Tese (Doutorado) — University of Denmark, Denmark, December 1993.
- [29] ROSA, E. S. *Ecoamento multifásico isotérmico - Modelos de multifluidos e de mistura*. 1. ed. [S.l.]: Bookman, 2012.
- [30] HABERMANN, W.; MORTON, R. *An experimental investigation of the drag and shape of air bubbles rising in various liquids*. Boston, 1953.
- [31] JOHNSON, V. J.; HSIEH, T. The influence of the trajectories of gas nuclei on cavitation inception. *6th Naval Hydrodynamics Symp.*, v. 1, p. 163–179, 1966.
- [32] THOMAS N.H. AUTON, T. S. K.; HUNT, J. Entrapment and transport of bubbles by plunging water. *D. Reidel Publishing Co.*, v. 1, p. 255–268, 1984.
- [33] AUTON T.R.; HUNT, J.; PRUD’HOMME, M. The force exerted on body in inviscid unsteady non-uniform rotational flow. *J. Fluid Mech.*, v. 257, p. 197–241, 1988.
- [34] PLESSET, M. Bubbles dynamics in cavitation in real liquids. *Elsevier Publishing Company*, v. 1, p. 1–17, 1964.
- [35] GILMORE, F. The growth and collapse of a spherical bubble in a viscous compressible liquid. *California Institute of Technology*, v. 1, p. 24–26, 1952.
- [36] HSIAO, C. T.; CHAHINE, G. Prediction of vortex cavitation inception using coupled spherical and non-condensable models and navier-stokes computations. *Journal of Marine Science and Technology*, v. 8, p. 99–108, 2004.
- [37] CHAHINE, G. Numerical simulation of bubble flow interaction. In: *Proceedings of 2nd International cavitation Forum, WIMRC, University of Warwick, great britain*, v. 1, p. 72–86, 2008.

- [38] WINSLOW, A. Numerical solution of quasi-linear poisson equation on a non-uniform triangle mesh. *Journal of Computational Physics*, v. 2, n. 1, p. 149–172, 1967.
- [39] BALIGA, B.; PATANKAR, S. A new finite element formulation for convection-diffusion problems. *Numerical Heat Transfer*, v. 3, n. 1, p. 393–409, 1981.
- [40] PRAKASH, C.; PATANKAR, S. A control volume-based finite-element method for solving the navier-stokes equation using equal-order velocity-pressure interpolation. *Numerical Heat Transfer*, v. 9, n. 1, p. 253–276, 1986.
- [41] VASCONCELLOS, J. *Um método de Volumes Finitos Usando Malhas Não Estruturadas para o Estudo de Escoamentos com Frentes Livres*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil, 1999.
- [42] KENNEDY, P. *Flow Analysis of Injection Molds*. 1. ed. [S.l.]: Hanser Publishers, 1995.
- [43] XUE, R. T. S.; PHAN-THIEN, N. Three-dimensional numerical simulation of visco-elastic flows-predictability and accuracy. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 1, p. 305–331, 1999.
- [44] WINN-NIELSEN, A. On the application of trajectory methods in numerical forecasting. *Tellus*, v. 11, p. 180–196, 1959.
- [45] KRISHNAMURTI, T. Numerical integration of primitive equations by a quasi-lagrangian advective scheme. *Journal of applied Meteorology*, v. 1, p. 508–521, 1962.
- [46] SAWYER, J. A semi-lagrangian method of solving the vorticity advection equation. *Tellus*, v. 15, p. 336–342, 1963.
- [47] ROBERT, A. A stable numerical integration scheme for the primitive meteorological equations. *Atmosphere Oceans*, v. 19, p. 35–46, 1981.
- [48] PIRONNEAU, O. On the transport-diffusion algorithm and its applications to the navier-stokes equation. *Numerische Mathematik*, v. 38, p. 309–332, 1982.
- [49] DURRAN, D. *Numerical Methods for Waves Equations in Geophysical Fluid Dynamics*. 1st edition. ed. New York: [s.n.], 1998.

- [50] ANJOS G.; MANGIAVACCHI, N. P. J.; BOTELHO, C. Modelagem numérica de escoamentos acoplados ao transporte de uma espécie química pelo método de elementos finitos. *ENCIT-Congresso Brasileiro de Ciências Térmicas e Engenharia. Curitiba - PR, Brazil, 2006.*
- [51] ANJOS G.; MANGIAVACCHI, N. P. J.; BOTELHO, C. Simulação numérica das equações de Saint-Venant utilizando o método dos elementos finitos. *16 POSMEC - Simpósio de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica - Uberlândia, MG, Brazil, 2006.*
- [52] GHIA, U. G. K. N.; SHIN, C. T. High-re solutions for incompressible flow using the navier-stokes equations and a multigrid method. *Journal of Computational Physics*, v. 48, p. 387–411, 1982.

A APÊNDICE A - SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES POR VOLUMES FINITOS

De forma semelhante a outros métodos de obtenção das equações aproximadas partindo-se das equações de balanço, o procedimento do método de volumes finitos consiste na integração da equação diferencial na forma conservativa no volume de controle. Neste caso, o volume de controle está mostrado na Figura 27 onde vemos que ele é composto por contribuições de diversos elementos do tipo 123.

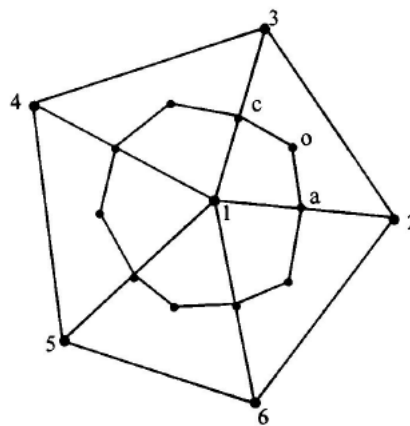


Figura 27 - Volume de controle para o método da mediana [5]

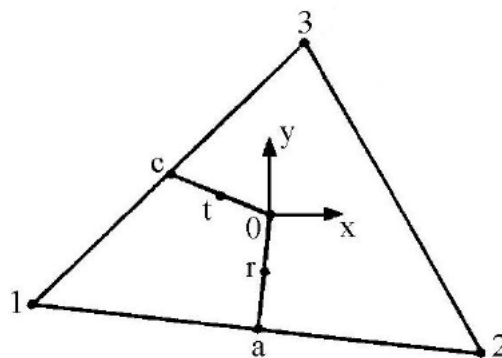


Figura 28 - Elemento triangular [5]

A.1 Solução da função de corrente

Resolver a equação A.2 pelo método de volumes finitos consiste em integrá-la em sua forma conservativa (também chamada forma divergente) no volume.

$$\nabla^2 \psi = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{A.2})$$

Assim, escrevemos a equação A.2 usando a notação de fluxo \vec{J} :

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (\text{A.3})$$

que integrada no volume, resulta em:

$$\int_V \nabla \cdot \vec{J} dV = 0 \quad (\text{A.4})$$

Agora, aplicando o Teorema da Divergência de Gauss, essa integral no volume resulta em uma integral de superfície:

$$\int_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (\text{A.5})$$

Onde \vec{n} é um vetor unitário normal a S que aponta para fora e S é a fronteira fechada do volume V. O volume de controle está mostrado na Figura 29 onde vemos que ele é composto por contribuições de diversos elementos do tipo 123.

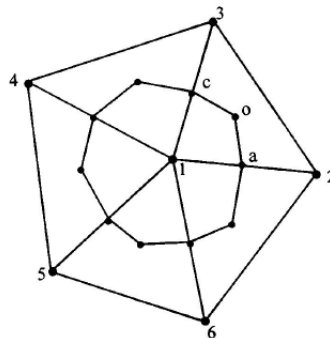


Figura 29 - Volume de controle para o método da mediana [5]

A.1.1 Cálculo das contribuições

A integral de superfície, calculada no volume de controle do vértice 1, como o ilustrado na Figura 29, resulta em:

$$\int_a^0 \vec{J} \cdot \vec{n} dS + \int_0^c \vec{J} \cdot \vec{n} dS + [\text{Contribuições de outros elementos associados ao nó 1}] = 0 \quad (\text{A.6})$$

Estabelecendo uma função de interpolação para ψ , é possível calcular o fluxo \vec{J} , uma vez que ele depende das derivadas parciais de ψ ao longo das linhas $\overline{a0}$ e $\overline{0c}$:

$$\psi = Ax + By + C \quad (\text{A.7})$$

Com os valores de ψ_1 , ψ_2 e ψ_3 e os valores das coordenadas (x, y) nos pontos 1, 2 e 3, é possível encontrar os valores das constantes A , B e C , da seguinte maneira: em $(x, y) = (x_1, y_1)$, tem-se que $\psi = \psi_1$, em $(x, y) = (x_2, y_2)$, tem-se que $\psi = \psi_2$ e em $(x, y) = (x_3, y_3)$, tem-se que $\psi = \psi_3$. Substituindo esses valores na equação A.7, obtém-se:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= Ax_1 + By_1 + C \\ \psi_2 &= Ax_2 + By_2 + C \\ \psi_3 &= Ax_3 + By_3 + C \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Essas três expressões podem ser escritas como o seguinte sistema linear:

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

cujas soluções resultam nos valores para as constantes A , B e C , apresentados a seguir:

$$A = \frac{[(y_2 - y_3)\psi_1 + (y_3 - y_1)\psi_2 + (y_1 - y_2)\psi_3]}{D} \quad (\text{A.10})$$

$$B = \frac{[(x_3 - x_2)\psi_1 + (x_1 - x_3)\psi_2 + (x_2 - x_1)\psi_3]}{D} \quad (\text{A.11})$$

$$C = \frac{[(x_2y_3 - x_3y_2)\psi_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)\psi_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)\psi_3]}{D} \quad (\text{A.12})$$

$$D = (x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - y_1x_2 - y_2x_3 - y_3x_1) \quad (\text{A.13})$$

Lembrando que o vetor fluxo é dado por:

$$\vec{J} = (J_x, J_y) = \left(-\frac{\partial\psi}{\partial x}, -\frac{\partial\psi}{\partial y} \right) \quad (\text{A.14})$$

é possível obter as derivadas de ψ com relação a x e a y usando a função de interpolação A.7. Assim as componentes J_x e J_y resultam em:

$$J_x = -A, J_y = -B \quad (\text{A.15})$$

Substituindo as expressões da equação A.15 na equação A.6, é possível calcular as integrais ao longo de $\overline{a0}$ e $\overline{0c}$:

$$\int_a^0 \vec{J} \cdot \vec{n} dS = J_x(y_a - y_0) + J_y(x_a - x_0) = A(y_a - y_0) + B(x_0 - x_a) \quad (\text{A.16})$$

$$\int_0^c \vec{J} \cdot \vec{n} dS = J_x(y_c - y_0) + J_y(x_0 - x_c) = A(y_0 - y_c) + B(x_c - x_0) \quad (\text{A.17})$$

Assim:

$$\int_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS = A(y_a - y_c) + J_y(x_c - x_a) \quad (\text{A.18})$$

A Figura 30 apresenta a interpretação geométrica das integrações dadas pelas equações A.16 e A.17. Considerando o vetor \vec{J} nos pontos r e t, o produto $-J_x(y_a - y_0) + J_y(x_a - x_0)$ nos dá o fluxo que atravessa a face $\overline{a0}$, ao passo que o produto $J_x(y_c - y_0) + J_y(x_c - x_0)$ calcula o fluxo em $\overline{0c}$. Os sinais que aparecem estão de acordo com o sistema de eixo local.

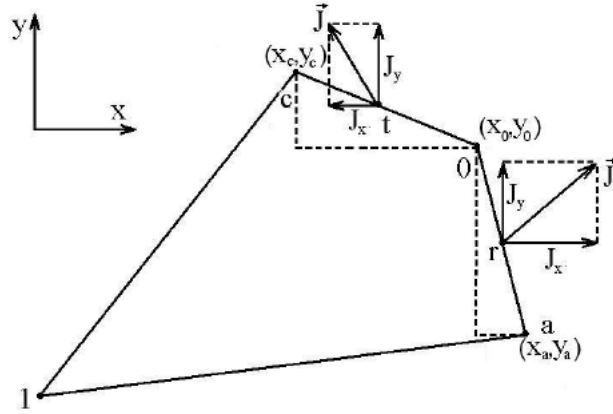


Figura 30 - Representação de \vec{J} nas interfaces de integração [5]

Substituindo as expressões para as constantes A e B na equação A.18, tem-se que a integração ao longo da superfície S pertencente ao elemento 123 resulta, em:

$$\int_a^0 \vec{J} \cdot \vec{n} dS + \int_0^c \vec{J} \cdot \vec{n} dS = C_1 \psi_1 + C_2 \psi_2 + C_3 \psi_3 \quad (\text{A.19})$$

Onde os coeficientes são dados por:

$$C_{11} = \frac{[(y_a - y_c)(y_2 - y_3) + (x_a - x_c)(x_2 - x_3)]}{D} \quad (\text{A.20})$$

$$C_{12} = \frac{[(y_a - y_c)(y_3 - y_1) + (x_a - x_c)(x_3 - x_1)]}{D} \quad (\text{A.21})$$

$$C_{13} = \frac{[(y_a - y_c)(y_1 - y_2) + (x_a - x_c)(x_1 - x_2)]}{D} \quad (\text{A.22})$$

A.1.1.1 Contribuições do Elemento 123 para o Vértice 1

Vamos encontrar os valores das constantes C_1 , C_2 e C_3 para o vértice 1. Para este vértice, elas são dadas por:

$$C_{11} = \frac{[(y_a - y_c)(y_2 - y_3) + (x_a - x_c)(x_2 - x_3)]}{D} \quad (\text{A.23})$$

$$C_{12} = \frac{[(y_a - y_c)(y_3 - y_1) + (x_a - x_c)(x_3 - x_1)]}{D} \quad (\text{A.24})$$

$$C_{13} = \frac{[(y_a - y_c)(y_1 - y_2) + (x_a - x_c)(x_1 - x_2)]}{D} \quad (\text{A.25})$$

Neste caso, tem-se que:

$$\begin{aligned} x_a &= \frac{x_1 + x_2}{2} \\ x_c &= \frac{x_1 + x_3}{2} \\ y_a &= \frac{y_1 + y_2}{2} \\ y_c &= \frac{y_1 + y_3}{2} \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Então:

$$\begin{aligned} x_a - x_c &= \frac{x_2 - x_3}{2} \\ y_a - y_c &= \frac{y_2 - y_3}{2} \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Substituindo as expressões da equação A.27 nas equações A.23, A.24 e A.25, tem-se:

$$C_{11} = \frac{[(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2]}{2D} \quad (\text{A.28})$$

$$C_{12} = \frac{[(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) + (y_2 - y_3)(y_3 - y_1)]}{2D} \quad (\text{A.29})$$

$$C_{13} = \frac{[(x_2 - x_3)(x_1 - x_2) + (y_2 - y_3)(y_1 - y_2)]}{2D} \quad (\text{A.30})$$

Onde o primeiro índice indica que a contribuição foi calculada para o volume associado ao vértice 1.

A.1.1.2 Contribuições do Elemento 123 para o Vértice 2

Vamos encontrar os valores das constantes C_1 , C_2 e C_3 para o vértice 2. Para este vértice, elas são dadas por:

$$C_{21} = \frac{[(y_a - y_c)(y_2 - y_3) + (x_a - x_c)(x_2 - x_3)]}{D} \quad (\text{A.31})$$

$$C_{22} = \frac{[(y_a - y_c)(y_3 - y_1) + (x_a - x_c)(x_3 - x_1)]}{D} \quad (\text{A.32})$$

$$C_{23} = \frac{[(y_a - y_c)(y_1 - y_2) + (x_a - x_c)(x_1 - x_2)]}{D} \quad (\text{A.33})$$

Note que foi feita uma rotação no sentido anti-horário nos índices. Neste caso, tem-se que:

$$\begin{aligned} x_a &= \frac{x_2 + x_3}{2} \\ x_c &= \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y_a &= \frac{y_2 + y_3}{2} \\ y_c &= \frac{y_1 + y_2}{2} \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

Então:

$$\begin{aligned} x_a - x_c &= \frac{x_3 - x_1}{2} \\ y_a - y_c &= \frac{y_3 - y_1}{2} \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

Substituindo as expressões da A.35 nas equações A.31, A.32 e A.33, tem-se:

$$C_{21} = \frac{[(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) + (y_2 - y_3)(y_3 - y_1)]}{2D} \quad (\text{A.36})$$

$$C_{22} = \frac{[(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2]}{2D} \quad (\text{A.37})$$

$$C_{23} = \frac{[(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) + (y_2 - y_3)(y_3 - y_1)]}{2D} \quad (\text{A.38})$$

Onde o primeiro índice indica que a contribuição foi calculada para o volume associado ao vértice 2.

A.1.1.3 Contribuições do Elemento 123 para o Vértice 3

Analogamente ao caso anterior, para calcular as contribuições dos vértices 1 e 2 para o vértice 3, fazemos mais uma rotação no sentido anti-horário nos índices, ou seja, as constantes C_1 , C_2 e C_3 , são dadas por:

$$C_{31} = \frac{[(y_a - y_c)(y_2 - y_3) + (x_a - x_c)(x_2 - x_3)]}{D} \quad (\text{A.39})$$

$$C_{32} = \frac{[(y_a - y_c)(y_3 - y_1) + (x_a - x_c)(x_3 - x_1)]}{D} \quad (\text{A.40})$$

$$C_{33} = \frac{[(y_a - y_c)(y_1 - y_2) + (x_a - x_c)(x_1 - x_2)]}{D} \quad (\text{A.41})$$

Neste caso tem-se:

$$\begin{aligned} x_a &= \frac{x_1 + x_3}{2} \\ x_c &= \frac{x_2 + x_3}{2} \\ y_a &= \frac{y_1 + y_3}{2} \\ y_c &= \frac{y_2 + y_3}{2} \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

Então:

$$\begin{aligned} x_a - x_c &= \frac{x_1 - x_2}{2} \\ y_a - y_c &= \frac{y_1 - y_2}{2} \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

Substituindo as expressões da A.43 nas equações A.39, A.40 e A.41, tem-se:

$$C_{31} = \frac{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}{2D} \quad (\text{A.44})$$

$$C_{32} = \frac{[(x_2 - x_3)(x_1 - x_2) + (y_2 - y_3)(y_1 - y_3)]}{2D} \quad (\text{A.45})$$

$$C_{33} = \frac{[(x_3 - x_1)(x_1 - x_2) + (y_3 - y_1)(y_1 - y_2)]}{2D} \quad (\text{A.46})$$

Onde o primeiro índice indica que a contribuição foi calculada para o volume associado ao vértice 3.

Tendo sido calculadas as constantes C_{ij} , $1 \leq i, j \leq 3$, do elemento 123 para os volumes de controle associados a cada um dos vértices 1, 2 e 3, é possível reunir essas constantes em uma matriz C_e , $1 \leq i, j \leq 3$:

$$C_e = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{A.47})$$

Note que a matriz C_e é simétrica.

Chamando

$$\psi_e = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.48})$$

o vetor das funções de corrente no elemento $\overline{123}$, a contribuição para os volumes de controle do elemento $\overline{123}$, associada aos vértices 1, 2 e 3 do elemento e .

$$u_e = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.49})$$

Pode ser calculada por:

$$u_e = C_e \psi_e \quad (\text{A.50})$$

onde C_e é uma matriz 3×3 constituída pelos coeficientes C_{ij} , $1 \leq i, j \leq 3$ dos vértices 1, 2 e 3.

O cálculo da matriz C_e , e consequentemente, a contribuição u_e , é feito para cada elemento da malha. Portanto, é necessário adicionar todas as contribuições devidas a todos os n elementos da malha. Como os elementos e os vértices da malha são enumerados, um procedimento para somar estas contribuições consiste em calcular as matrizes C_e dos elementos e montar (assemble) uma matriz esparsa K , de dimensão $n \times n$. As contribuições para os vetores u_e , no caso de ψ prescrita, são montados no vetor F , resultando no sistema:

$$K\psi = F \quad (\text{A.51})$$

Esse sistema linear é simétrico e é resolvido pelo método dos Gradientes Conjugados. Após obtida a solução, são encontrados valores de ψ determinados em todos os vértices dos triângulos, ou seja, no centro dos volumes de controle nos quais foram realizados os balanços de conservação de ψ .

B APÊNDICE B - O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

Muitos problemas de engenharia podem ser modelados através de equações diferenciais parciais, bidimensionais, não lineares e acopladas. A solução analítica destas equações é limitada, devido a complexidade matemática. Para a solução destes problemas, torna-se conveniente a utilização de métodos numéricos e neste trabalho foi utilizado os métodos de volumes finitos na seção anterior e de elementos finitos (MEF) na atual seção. No final desta seção é demonstrada a equivalência destas duas abordagens para este problema.

O MEF é projetado para uso em computadores e permite resolver equações diferenciais associadas a um problema físico em geometrias complexas. Este método é utilizado no projeto e melhoria de produtos e aplicações industriais, bem como em simulação de complexos sistemas biológicos e físicos. A variedade de problemas para os quais o método se aplica, cresceu enormemente, com a exigência básica de que as equações construtivas e equações de evolução temporal do problema a ser considerado sejam conhecidas antecipadamente.

O método de elementos finitos é uma ferramenta numérica para a obtenção aproximada das equações diferenciais. Assim este método será usado na solução da equação 3.10.

O uso de malhas não-estruturadas na solução numérica de problemas de mecânica dos fluidos está se tornando cada vez mais frequente [6]. Isto se deve à facilidade com que geometrias bastante irregulares podem ser discretizadas através do uso das malhas não-estruturadas. Tradicionalmente, o método dos elementos finitos sempre se destacou por possuir grande versatilidade geométrica, porém, sem garantir os princípios de conservação nos volumes elementares. Isso motivou a busca de métodos aptos a tratar geometrias bastante irregulares e, ao mesmo tempo, utilizando as técnicas de balanço de conservação das propriedades no volume de controle. Tais métodos foram denominados Control Volume Based Finite Element Method (CVFEM) conforme relatado na seção descrevendo o método de volumes finitos..

Para obter os volumes de controle elementares a partir de uma malha não-estruturada, dispõe-se de algumas técnicas. Uma delas é a triangulação de Dalaunay que constituem a base da metodologia dos Diagramas de Voronoi, normalmente encontrada no método de

elementos finitos.

Outra forma de se obter os volumes de controle não-estruturados é através do método das medianas. A Figura 31 representa volumes construídos por este método.

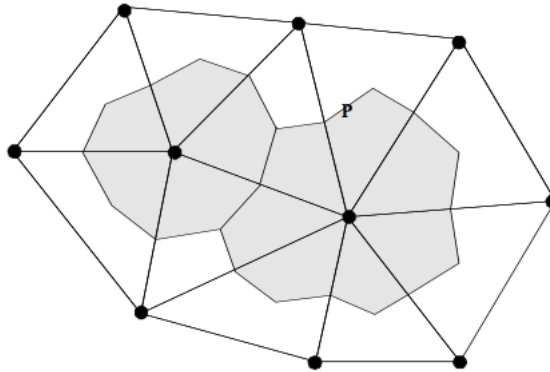


Figura 31 - Volumes finitos originados pelo processo da mediana [6]

A metodologia dos Diagramas de Voronoi e a formulação tradicionalmente estruturada do método dos volumes finitos servem como referência para a avaliação do desempenho do método aqui desenvolvido.

Para validação dos esquemas numéricos aplicados e comparações entre as metodologias, o problema teste escolhido foi o escoamento em uma cavidade quadrada com tampa deslizante na parte superior, assim como na validação pelo método de volumes finitos, que possui solução de referência em Ghia [52].

B.1 Montagem do sistema matricial usando Método de elementos finitos

Os elementos triangulares, como usados neste trabalho, demonstram ser uma forma adequada para qualquer análise bidimensional, pois uma malha gerada a partir de triângulos pode facilitar representar de maneira precisa regiões delimitadas por fronteiras que possuem formas bastante complexas.

A matriz global é definida por:

$$\mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{F} \quad (\text{B.1})$$

onde \mathbf{K} é uma matriz de rigidez, \mathbf{d} um vetor de deslocamentos e \mathbf{F} um vetor de forças.

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{nel} \mathbf{K}_e \quad (\text{B.2})$$

$$\mathbf{F} = \sum_{e=1}^{nel} \mathbf{F}_e \quad (\text{B.3})$$

a) **Matriz de rigidez:**

A matriz de rigidez local (por elemento) é dada por:

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \quad (\text{B.4})$$

e o vetor de forças (por elemento) por:

$$\mathbf{F}_a^e = \int_{\Omega_e} N_a f d\Omega + \int_{\Gamma_e} N_a h d\Omega - \sum_{b=1}^{nen} \mathbf{K}_{ab}^e \mathbf{g}_b^e \quad (\text{B.5})$$

onde N_a é a função de forma associado ao nó a .

Elementos triangulares de lados retos:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_a^e = \nabla N_a = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_a}{\partial x} \\ \frac{\partial N_a}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (\text{B.6})$$

onde: $a=1, 2$ ou 3 .

$$\mathbf{B}_a^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

Sendo ϕ uma função de interpolação:

$$\phi = \phi_1 \xi_1 + \phi_2 \xi_2 + \phi_3 \xi_3 \quad (\text{B.9})$$

Assim:

$$x_p = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3 \quad (\text{B.10})$$

$$x_p = y_1\xi_1 + y_2\xi_2 + y_3\xi_3 \quad (\text{B.11})$$

$$1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \quad (\text{B.12})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ x_p \\ y_p \end{bmatrix} \quad (\text{B.13})$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ x_p \\ y_p \end{bmatrix} \quad (\text{B.14})$$

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ x_p \\ y_p \end{bmatrix} \quad (\text{B.15})$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & y_{23} & x_{32} \\ x_3y_1 - x_1y_3 & y_{31} & x_{13} \\ x_1y_2 - x_2y_1 & y_{12} & x_{21} \end{bmatrix} \quad (\text{B.16})$$

$$x_{ij} = x_i - x_j$$

$$y_{ij} = y_i - y_j$$

$$2A = \det \mathbf{A} = x_{21}y_{31} - x_{31}y_{21}$$

Como a matriz do elemento envolve derivadas das funções de interpolação com relação a coordenadas cartesianas, elas devem ser transformadas em derivadas em função de coordenadas generalizadas. Utilizando a regra da cadeia da derivação, tem-se que:

$$\frac{\partial N_a}{\partial x} = \frac{\partial N_a}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \frac{\partial N_a}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x} + \frac{\partial N_a}{\partial \xi_3} \frac{\partial \xi_3}{\partial x} \quad (\text{B.17})$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} = \frac{\partial \xi_1}{\partial x} = \frac{y_{23}}{2A}; \frac{\partial N_1}{\partial y} = \frac{\partial \xi_1}{\partial y} = \frac{x_{32}}{2A}; \frac{\partial N_2}{\partial x} = \frac{\partial \xi_2}{\partial x} = \frac{y_{31}}{2A}$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial y} = \frac{\partial \xi_2}{\partial y} = \frac{x_{13}}{2A}; \frac{\partial N_3}{\partial x} = \frac{\partial \xi_3}{\partial x} = \frac{y_{12}}{2A}; \frac{\partial N_3}{\partial y} = \frac{\partial \xi_3}{\partial y} = \frac{x_{21}}{2A}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & N_{2,x} & N_{3,x} \\ N_{1,y} & N_{2,y} & N_{3,y} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & y_{31} & y_{12} \\ x_{32} & x_{13} & x_{21} \end{bmatrix} \quad (\text{B.18})$$

Assim,

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega = \frac{1}{4A_e^2} \begin{bmatrix} y_{23} & x_{32} \\ y_{31} & x_{13} \\ y_{12} & x_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{23} & y_{31} & y_{12} \\ x_{32} & x_{13} & x_{21} \end{bmatrix} \int_{\Omega_e} d\Omega_e \quad (\text{B.19})$$

Podemos verificar a equivalência de \mathbf{K}_e (B.19) obtida pelo método de elementos finitos com C_e (A.47) obtida por volumes finitos, para o caso $k_x = k_y = 1$.

b) **Matriz de massa:**

$$\mathbf{M}_{ab}^e = \int_{\Omega^e} N_a N_b d\Omega = \int_{\Omega^e} \xi_a \xi_b d\Omega \quad (\text{B.20})$$

Usando coordenadas naturais em $2D$, temos:

$$\int_A \xi_1^k \xi_2^l \xi_3^m dA = 2A \frac{k!l!m!}{(2+k+l+m)!} \quad (\text{B.21})$$

Se $a = b$ (termos da diagonal)

$$\mathbf{M}_{aa}^e = \int_{\Omega^e} \xi_a^2 d\Omega = 2A \frac{2!}{4!} = \frac{A}{6} \quad (\text{B.22})$$

Se $a \neq b$ (termos fora da diagonal)

$$\mathbf{M}_{ab}^e = \int_{\Omega^e} \xi_a \xi_b d\Omega = 2A \frac{1}{4!} = \frac{A}{12} \quad (\text{B.23})$$

Assim, a matriz de massa, fica:

$$\mathbf{M}_{ab}^e = \frac{A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.24})$$

A matriz de massa “lamped” é uma matriz diagonal obtida somando as contribuições de cada linha e atribuindo este valor ao elemento da diagonal.

$$\mathbf{M}_{ab_L}^e = \frac{A}{12} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \frac{A}{3} \mathbf{I} \quad (\text{B.25})$$

Observamos que a matriz de massa “lamped” de elementos finitos é equivalente a matriz de massa da formulação de volumes finitos com malhas não estruturadas.

$$M_{VF} = V_{vc} \mathbf{I} \quad (\text{B.26})$$

Já que o volume de controle associado a um vértice é o somatório das contribuições dos elementos finitos:

$$V_{vc} = \sum \left(\frac{A}{3} \right) \quad (\text{B.27})$$

Portanto a discretização da equação da função de corrente,

$$\nabla^2 \psi = -\omega \quad (\text{B.28})$$

resulta na seguinte solução por volumes finitos:

$$\mathbf{K}\psi = -\mathbf{M}\omega \quad (\text{B.29})$$

Por elementos finitos usando a matriz de massa lamped, é exatamente a mesma.

De forma análoga, a solução da equação do transporte da vorticidade por volumes finitos:

$$\left(\frac{V_{vc}}{\Delta t} \mathbf{I} - \mathbf{K} \right) \omega^{n+1} = \frac{V_{vc}}{\Delta t} \mathbf{I} \omega^n \quad (\text{B.30})$$

é equivalente a solução por elementos finitos:

$$\left(\frac{M_L}{\Delta t} - \mathbf{K}\right) \omega^{n+1} = \frac{M_L}{\Delta t} \omega^n \quad (\text{B.31})$$

Fica, portanto, demonstrada a equivalência dos dois métodos neste trabalho.