

# Simulação Numérica De Escoamentos Dispersos Em Turbomáquinas Utilizando Método De Elementos Finitos

**Lucas Carvalho De Sousa**

**Gustavo Rabello Dos Anjos**

Universidade do Estado do Rio de Janeiro

*encarvlucas@hotmail.com*

25 de Junho de 2019



# Sumário

- 1 **Introdução**
  - Simulação de Escoamentos Bidimensionais com Partículas
  - Escoamentos em Turbomáquinas
- 2 **Equações de Governo**
  - Formulação Corrente-Vorticidade
  - Equação de Basset–Boussinesq–Oseen (BBO)
- 3 **Métodos Numéricos**
  - Método dos Elementos Finitos
  - Discretizações dos Modelos
  - Definição das Matrizes
- 4 **Código**
  - Montagem das Matrizes Globais
  - Estrutura de Uso da Biblioteca
  - Estrutura de Solução
- 5 **Validações e Resultados**
  - Validações
  - Resultados de Simulações

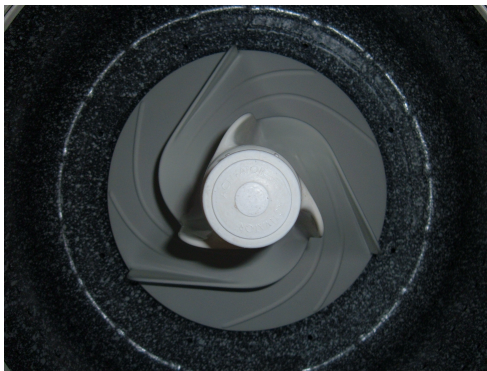
# Introdução



# Escoamentos em Turbomáquinas

## Objetivos deste trabalho:

Estudar como partículas se comportam dentro de uma turbomáquina em funcionamento.



Fonte: © BrokenSphere / Wikimedia Commons.

## Equações de Governo

# Formulação Corrente-Vorticidade

## Hipóteses tomadas

- Fluido incompressível
- Fluido newtoniano

## Equação de Navier-Stokes

$$\frac{\partial \vec{v}_f}{\partial t} + \vec{v}_f \cdot \vec{\nabla} \vec{v}_f = -\frac{1}{\rho_f} \vec{\nabla} p + \frac{\mu_f}{\rho_f} \nabla^2 \vec{v}_f + \vec{g}$$

## Desvantagens

- Acoplamento da pressão e velocidade
- Exige elementos de ordem elevada

# Formulação Corrente-Vorticidade

## Equação da Vorticidade

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{v}_f \cdot \vec{\nabla} \vec{\omega} = \frac{\mu_f}{\rho_f} \nabla^2 \vec{\omega}$$

## Equação da Corrente

$$\nabla^2 \psi = -\omega_z$$

## Equações Auxiliares

$$\vec{v}_f = (v_{f,x}, v_{f,y})$$

$$v_{f,x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$v_{f,y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\omega_z = \frac{\partial v_{f,x}}{\partial y} - \frac{\partial v_{f,y}}{\partial x}$$



# Equação de Basset–Boussinesq–Oseen (BBO)

Equação que representa as forças exercidas sobre as partículas.  
Sua expressão é a soma das forças separadamente.

## Equação de Basset–Boussinesq–Oseen

$$\vec{F}_p = \sum \vec{F} = \vec{F}_{grav} + \vec{F}_{drag} + \vec{F}_{lift} + \vec{F}_{mass}$$

## Restrição

A equação BBO é somente válida para Reynolds da partícula menores que 1.  $Re_p < 1$

## Reynolds de Partícula

$$Re_p = \frac{\rho_p}{\mu_f} |(\vec{v}_f - \vec{v}_p)|_{max} d_p$$

# Equação de Basset–Boussinesq–Oseen (BBO)

## Força Gravitacional

$$\vec{F}_{grav} = m_p \vec{g}$$

## Força de Sustentação

$$\vec{F}_{lift} = 1.61 \mu_f d_p (\vec{v}_f - \vec{v}_p) \sqrt{Re_G}$$

## Força de Arrasto

$$\vec{F}_{drag} = 3\pi \mu_f d_p (\vec{v}_f - \vec{v}_p)$$

## Força de Massa Virtual

$$\vec{F}_{mass} = \frac{1}{2} \rho_f V_p \frac{d}{dt} (\vec{v}_f - \vec{v}_p)$$

## Reynolds de Cisalhamento

$$Re_G = \frac{\rho_f}{\mu_f} d_p^2 \nabla \vec{v}_f$$

# Métodos Numéricos

# Método dos Elementos Finitos

## Domínio

Equações são definidas em um domínio  $\Omega$  com contorno  $\Gamma$ .

## Forma forte com as funções peso

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{v}_f \cdot \nabla \vec{\omega} - \frac{\mu_f}{\rho_f} \nabla^2 \vec{\omega} \right) \cdot \vec{\delta} d\Omega = 0$$

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 \psi + \omega_z) \cdot \vec{\phi} d\Omega = 0$$

$$\int_{\Omega} \left( \vec{v}_f - \left( \frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right) \cdot \vec{\xi} d\Omega = 0$$

$\vec{\delta}$ ,  $\vec{\phi}$  e  $\vec{\xi}$  são as funções de peso de cada equação.

## Condições de contorno

$$\omega = \omega_{\Gamma} \text{ em } \Gamma$$

$$\psi = \psi_{\Gamma} \text{ em } \Gamma$$

$$\vec{v}_f = \vec{v}_{f\Gamma} \text{ em } \Gamma$$

# Método dos Elementos Finitos

## Forma fraca

$$\begin{aligned}m_1 \left( \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t}, \delta \right) + g_1(\vec{v}_f, \vec{\delta}) + \frac{\mu_f}{\rho_f} k_1(\vec{\omega}, \vec{\delta}) &= 0 \\ -k_2(\psi, \vec{\phi}) + m_2(\omega_z, \vec{\phi}) &= 0 \\ m_3(\vec{v}_f, \vec{\xi}) - g_3(\psi, \vec{\xi}) &= 0\end{aligned}$$

Onde:

$$\begin{aligned}m_1 \left( \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t}, \delta \right) &= \int_{\Omega} \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} \cdot \vec{\delta} d\Omega \\ g_1(\vec{v}_f, \vec{\delta}) &= \int_{\Omega} \vec{v}_f \cdot \vec{\nabla} \vec{\omega} \cdot \vec{\delta} d\Omega \\ k_1(\vec{\omega}, \vec{\delta}) &= \int_{\Omega} \vec{\nabla} \vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} \vec{\delta} d\Omega\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k_2(\psi, \vec{\phi}) &= \int_{\Omega} \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{\nabla} \vec{\phi} d\Omega \\ m_2(\omega_z, \vec{\phi}) &= \int_{\Omega} \omega_z \cdot \vec{\phi} d\Omega \\ m_3(\vec{v}_f, \vec{\xi}) &= \int_{\Omega} \vec{v}_f \cdot \vec{\xi} d\Omega \\ g_3(\psi, \vec{\xi}) &= \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \cdot \vec{\xi} d\Omega\end{aligned}$$

# Discretização do Modelo de Escoamentos

## Formulação de Galerkin

Funções de peso são definidas com valor igual às funções interpoladoras.

$$\omega(\vec{x}, t) = \sum_{i=1}^{n_p} \omega_i(t) N_i(\vec{x})$$

$$\psi(\vec{x}, t) = \sum_{i=1}^{n_p} \psi_i(t) N_i(\vec{x})$$

$$v_{f,x}(\vec{x}, t) = \sum_{i=1}^{n_p} v_{f,x,i}(t) N_i(\vec{x})$$

$$v_{f,y}(\vec{x}, t) = \sum_{i=1}^{n_p} v_{f,y,i}(t) N_i(\vec{x})$$

$$\delta(\vec{x}, t) = \sum_{j=1}^{n_p} \delta_j(t) N_j(\vec{x})$$

$$\phi(\vec{x}, t) = \sum_{j=1}^{n_p} \phi_j(t) N_j(\vec{x})$$

$$\xi(\vec{x}, t) = \sum_{j=1}^{n_p} \xi_j(t) N_j(\vec{x})$$

# Discretização do Modelo de Escoamentos

## Função de Aproximação

$N(x)$  é a função de aproximação de cada elemento:

$$N_i(\vec{x}) = [N_1(\vec{x}), \dots, N_{n_p}(\vec{x})]$$

## Matrizes locais dos elementos

Surgem os termos locais, para cada elemento  $e$ :

$$\mathbf{m}^e = \int_{\Omega^e} N_i^e N_j^e d\Omega^e$$

$$\mathbf{g}_x^e = \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} N_j^e d\Omega^e$$

$$\mathbf{g}_y^e = \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} N_j^e d\Omega^e$$

$$\mathbf{k}_{xx}^e = \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} d\Omega^e$$

$$\mathbf{k}_{yy}^e = \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} d\Omega^e$$

# Discretização do Modelo de Escoamentos

## Discretização no tempo

Para os termos temporais é utilizada o Método de Diferenças Finitas:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} \approx \frac{\omega(t + dt) - \omega(t)}{dt} = \frac{\omega^{t_{n+1}} - \omega^{t_n}}{dt}$$

## Equações na forma global

$$\left( \mathbf{M} \mathbf{v}_{f,x}^{t_n} \mathbf{G}_x + \mathbf{v}_{f,y}^{t_n} \mathbf{G}_y + \frac{\mu_f}{\rho_f} (\mathbf{K}_{xx} + \mathbf{K}_{yy}) \right) \omega^{t_{n+1}} = \mathbf{M} \omega^{t_n}$$

$$(\mathbf{K}_{xx} + \mathbf{K}_{yy}) \psi = \mathbf{M} \omega^{t_{n+1}}$$

$$\mathbf{M} \mathbf{v}_{f,x}^{t_n} \omega^{t_{n+1}} = \mathbf{G}_y \psi$$

$$\mathbf{M} \mathbf{v}_{f,y}^{t_n} \omega^{t_{n+1}} = -\mathbf{G}_x \psi$$



# Discretização do Modelo de Partículas

## Equações das forças nas partículas

$$\vec{F}_{grav}^{t_n} = m_p \vec{g}$$

$$\vec{F}_{drag}^{t_n} = 3\pi\mu_f d_p \left( \vec{v}_f^{t_n} - \vec{v}_p^{t_{n-1}} \right)$$

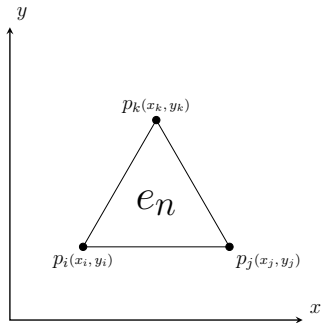
$$\vec{F}_{lift}^{t_n} = 1.61\mu_f d_p \left( \vec{v}_f^{t_n} - \vec{v}_p^{t_{n-1}} \right) \sqrt{Re_G^{t_n}}$$

$$\vec{F}_{mass}^{t_n} = \frac{1}{2}\rho_f V_p \frac{\left( \vec{v}_f^{t_n} - \vec{v}_p^{t_{n-1}} \right) - \left( \vec{v}_f^{t_{n-1}} - \vec{v}_p^{t_{n-2}} \right)}{dt}$$

## Reynolds específicos

$$Re_p^{t_n} = \frac{\rho_p}{\mu_f} d_p \left| \vec{v}_f^{t_n} - \vec{v}_p^{t_{n-1}} \right|_{max} \quad Re_G^{t_n} = \frac{d_p^2 \rho_f}{\mu_f} \left( \frac{d\vec{v}_f}{d\vec{r}} \right)^{t_n}$$

# Matrizes dos Elementos Triangulares



Elemento triangular linear.

## Coordenadas relativas

$$\mathbf{b} \begin{cases} b_i = y_j - y_k \\ b_j = y_k - y_i \\ b_k = y_i - y_j \end{cases} \quad \mathbf{c} \begin{cases} c_i = x_k - x_j \\ c_j = x_i - x_k \\ c_k = x_j - x_i \end{cases}$$

## Matrizes de Gradiente

$$\mathbf{g}_x^e = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ b_i & b_j & b_k \\ b_i & b_j & b_k \end{bmatrix} \quad \mathbf{g}_y^e = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} c_i & c_j & c_k \\ c_i & c_j & c_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix}$$

## Matriz de Massa

$$\mathbf{m}^e = \frac{A^e}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

## Matrizes de Rigidez

$$\mathbf{k}_{xx}^e = \frac{t_h}{4A} \begin{bmatrix} b_i b_i & b_j b_i & b_k b_i \\ b_i b_j & b_j b_j & b_k b_j \\ b_i b_k & b_j b_k & b_k b_k \end{bmatrix} \quad \mathbf{k}_{yy}^e = \frac{t_h}{4A} \begin{bmatrix} c_i c_i & c_j c_i & c_k c_i \\ c_i c_j & c_j c_j & c_k c_j \\ c_i c_k & c_j c_k & c_k c_k \end{bmatrix}$$

## Código

# Montagem das Matrizes Globais

## Algoritmo de montagem

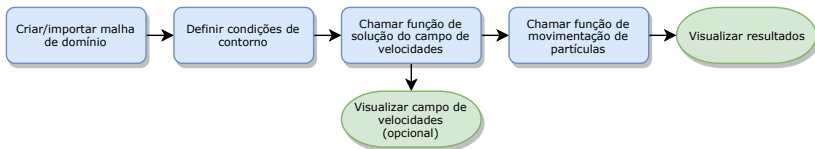
$$\mathbf{m}_{en} = \begin{bmatrix} m_{ij} & m_{jj} & m_{ik} \\ m_{ji} & m_{jj} & m_{jk} \\ m_{ki} & m_{kj} & m_{kk} \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l=i,j,k \\ q=i,j,k}]{\text{loop}} \mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_{0,0} & M_{0,1} & \dots & M_{0,n_p} \\ M_{1,0} & \ddots & & M_{1,n_p} \\ \vdots & & & \vdots \\ M_{n_p,0} & & M_{l,q} + m_{l,q} & M_{n_p,n_p} \end{bmatrix}$$

```
# Loop em cada elemento na lista da malha
for elem in malha.iem:
    x = malha.x[elem] # = [x_i, x_j, x_k]
    y = malha.y[elem] # = [y_i, y_j, y_k]

    # Criação das matrizes locais
    ...

    # Registro das matrizes locais nas matrizes globais
    for i in range(3):
        for j in range(3):
            kx_global[elem[i], elem[j]] += k_x[i][j]
            ky_global[elem[i], elem[j]] += k_y[i][j]
            m_global[elem[i], elem[j]] += m[i][j]
            gx_global[elem[i], elem[j]] += g_x[i][j]
            gy_global[elem[i], elem[j]] += g_y[i][j]
```

# Estrutura de Uso da Biblioteca



Fluxograma da lógica de uso da biblioteca pelo usuário.

## Exemplo de uso da biblioteca

```
# Importação da biblioteca
import TccLib
```

```
# Importação da malha ou coordenadas de uma nova
malha = TccLib.Mesh("arquivo_da_malha.msh")
# ou malha = TccLib.Mesh([coordenadas (x, y)])
```

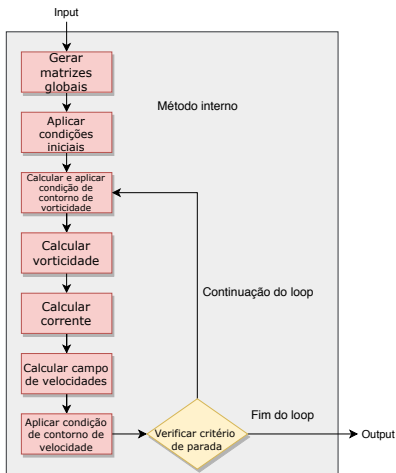
```
# Adição de partículas
malha.add_particle(propriedades da partícula)
```

```
# Definição das condições de contorno
malha.new_boundary_condition("nome da propriedade",
                             [índices dos nós],
                             [valor da condição no nó],
                             [1 para Dirichlet ou 0 para Neumann])
```

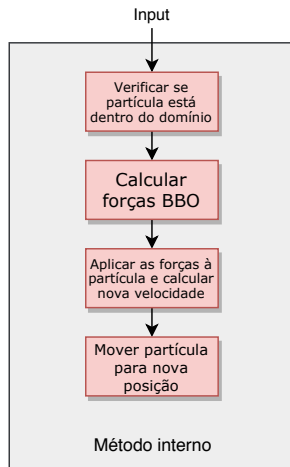
```
# Chamada para a função de solução
v_x, v_y = TccLib.solve_velocity_field(malha)
```

```
# Loop de movimentação das partículas
for t in time_list:
    TccLib.move_particles(malha, (v_x, v_y))
```

# Estrutura de Solução



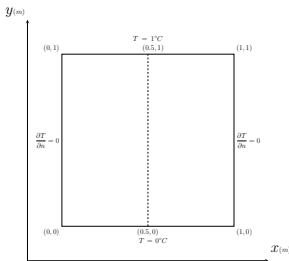
Algoritmo de solução do sistema de corrente-vorticidade.



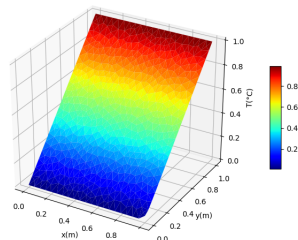
Algoritmo de solução da posição das partículas.

## Validações e Resultados

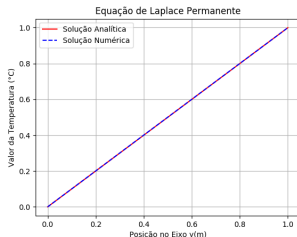
# Validações de Problemas em Sólidos



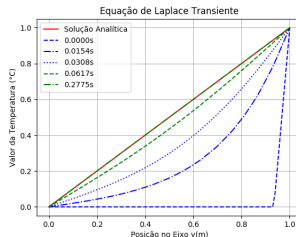
### Condições de contorno em uma placa sólida.



Resultado da simulação na placa.



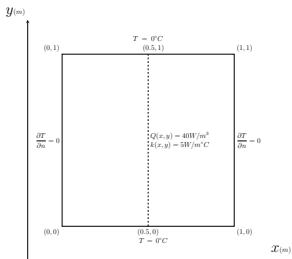
### Comparação do resultado permanente.



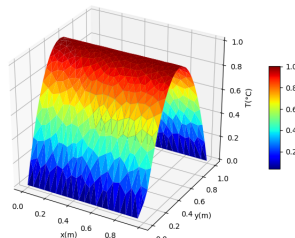
Comparação do resultado transiente.



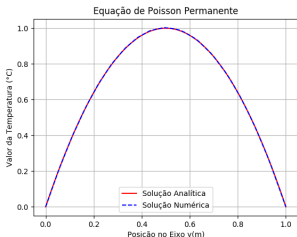
# Validações de Problemas em Sólidos



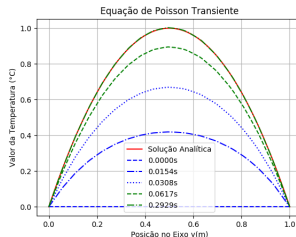
Placa com geração de calor.



Resultado da simulação na placa.

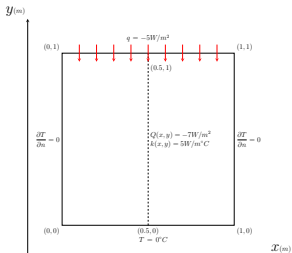


Comparação do resultado permanente.

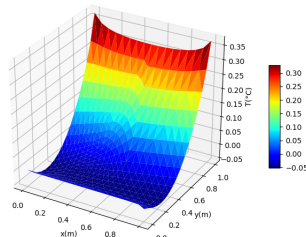


Comparação do resultado transiente.

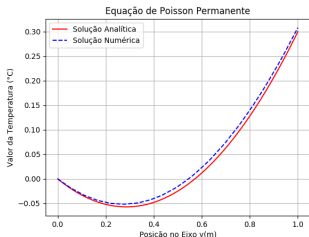
# Validações de Problemas em Sólidos



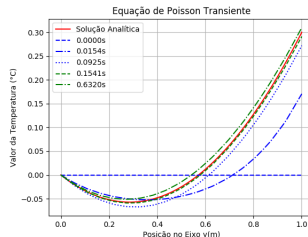
Placa com fluxo e geração de calor.



Resultado da simulação na placa.

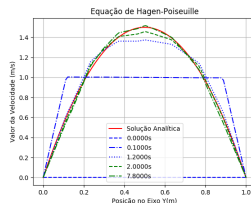


Comparação do resultado permanente.

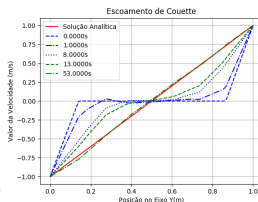


Comparação do resultado transiente.

\_\_\_\_\_

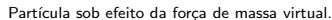
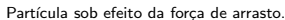
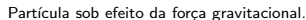
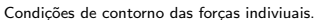


Comparação com solução analítica.

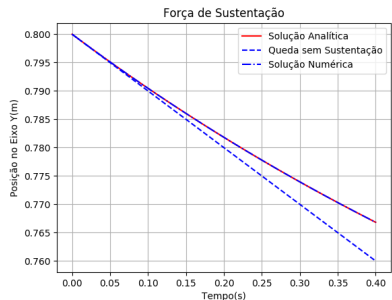
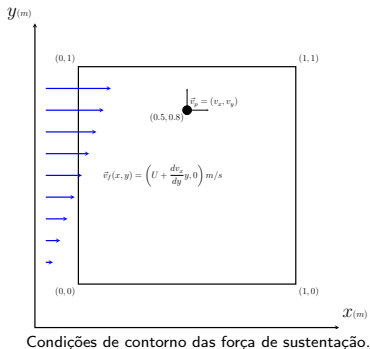


Comparação com solução analítica.

1000



# Validações das Forças nas Partículas



Partícula sob efeito da força de sustentação.

## Simulação em um Canal

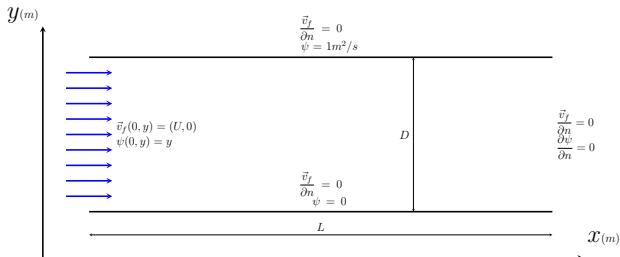
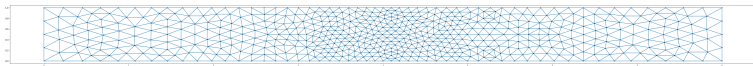


Diagrama da simulação.

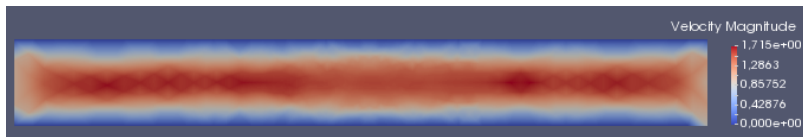
## Parâmetros

$$L = 8m, D = 1m, U = 1m/s, \mu_f = 50Pa.s, \rho_f = 50kg/m^3, \\ d_p = 0.001m, \rho_p = 20000kg/m^3.$$

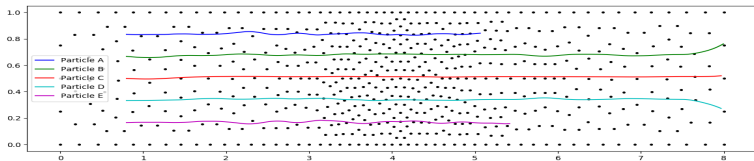
# Simulação em um Canal



Malha do canal utilizado.



Campo de velocidades resultante.



Percurso das partículas na simulação.

## Simulação em um Canal com Obstáculo

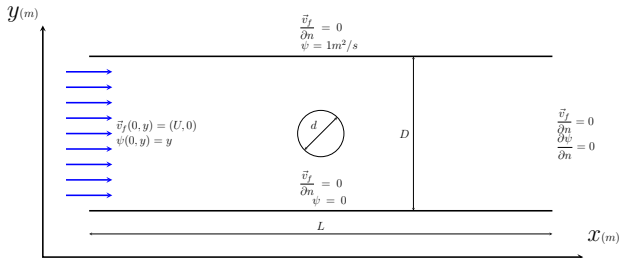


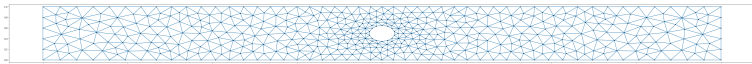
Diagrama da simulação.

## Parâmetros

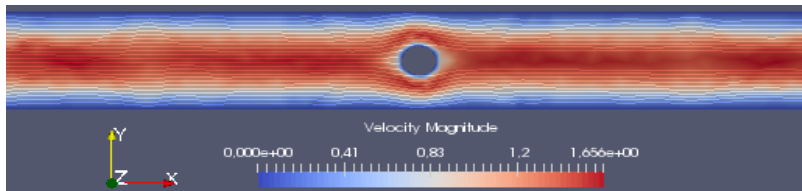
$$L = 8m, D = 1m, d = 0.3m, U = 1m/s, \mu_f = 50Pa.s, \rho_f = 50kg/m^3, d_p = 0.001m, \rho_p = 20000kg/m^3.$$



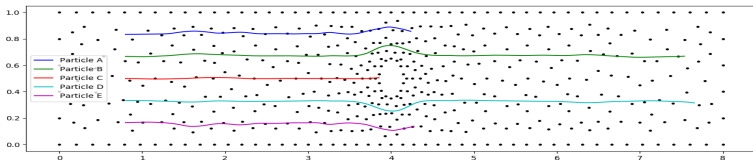
# Simulação em um Canal com Obstáculo



Malha do canal utilizado.



Campo de velocidades resultante.



Percurso das partículas na simulação.

## Simulação em um Canal em Degrau

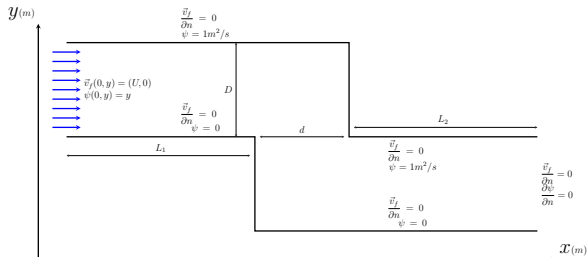
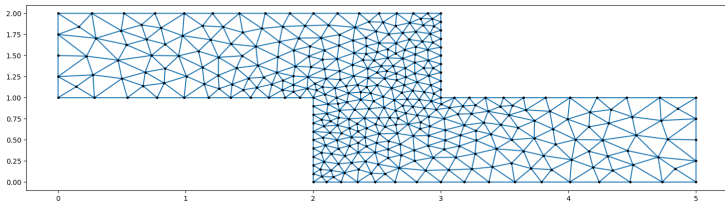


Diagrama da simulação.

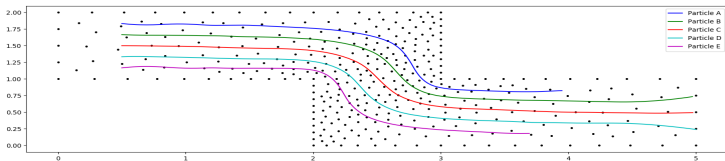
## Parâmetros

$$L_1 = 2m, L_2 = 2m, d = 1m, D = 1m, U = 1m/s, \mu_f = 50Pa.s, \\ \rho_f = 50kg/m^3, d_p = 0.001m, \rho_p = 20000kg/m^3.$$

# Simulação em um Canal em Degrau

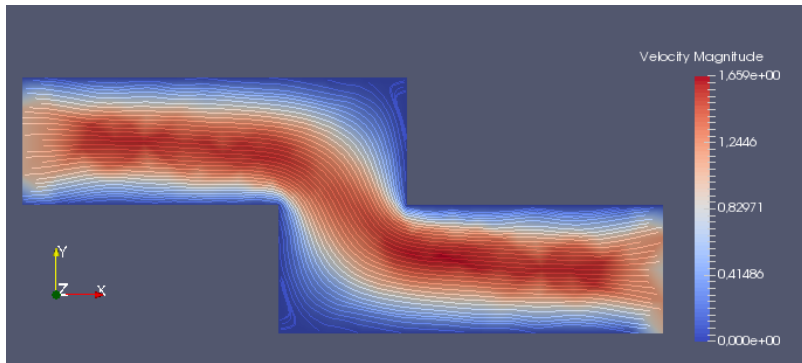


Malha do canal utilizado.



Percurso das partículas na simulação.

# Simulação em um Canal em Degrau



Campo de velocidades resultante.

## Simulação em um Canal com Restrição

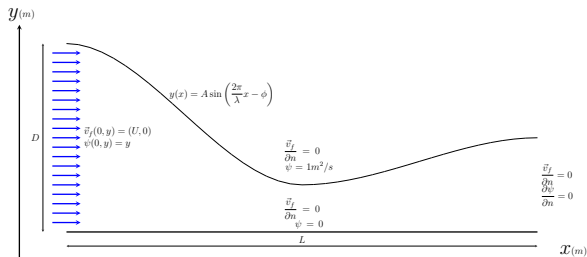


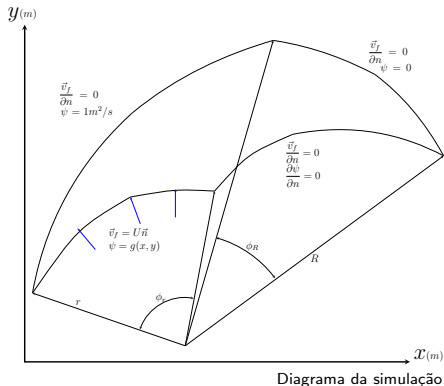
Diagrama da simulação.

## Parâmetros

$$L = 8m, D = 2m, A = 0.004m, \lambda = 0.0006m, \phi = 0, U = 1m/s, \\ \mu_f = 50Pa.s, \rho_f = 50kg/m^3, d_p = 0.001m, \rho_p = 20000kg/m^3.$$



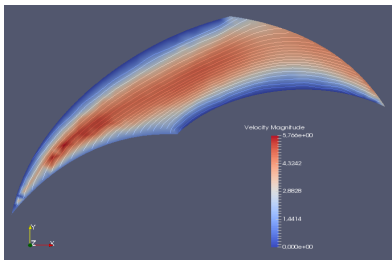
## Simulações em um Impelidor



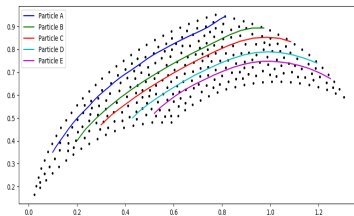
## Parâmetros

$$L = 8m, D = 2m, A = 0.004m, \lambda = 0.0006m, \phi = 0, U = 1m/s, \\ \mu_f = 50Pa.s, \rho_f = 50kg/m^3, d_p = 0.001m, \rho_f = \text{por caso.}$$

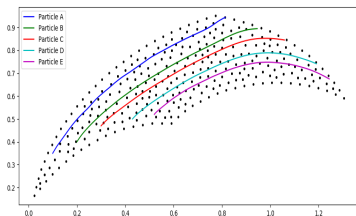
# Simulações em um Impelidor



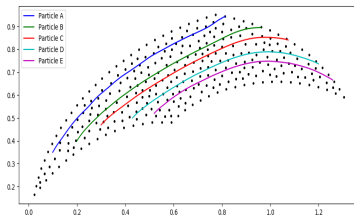
Campo de velocidades resultante.



Trajétoria de partículas de ouro,  $\rho_{Au} = 20000 \text{ kg/m}^3$ .



Trajétoria de partículas de ferro,  $\rho_{Fe} = 7300 \text{ kg/m}^3$ .



Trajétoria de partículas de areia,  $\rho_p = 1600 \text{ kg/m}^3$ .



# Conclusão

## Conclusões

- A o modelo e a biblioteca representam bem o fenômeno esperado.
- Foi possível visualizar a movimentação das partículas.
- A força de arrasto possui a maior contribuição ao movimento.

## Pontos fracos

- O simulador requer um grande esforço computacional.
- Restrição de uso para valores de Reynolds  $< 1$ .

# Agradecimentos



Muito Obrigado!