



**Universidade do Estado do Rio de Janeiro**

Centro de Tecnologia e Ciências

Faculdade de Engenharia

Luís Henrique Carnevale da Cunha

**Formulação Corrente-Vorticidade em Problemas de Transferência de  
Calor Conjugado usando MEF**

Rio de Janeiro

2018

Luís Henrique Carnevale da Cunha

**Formulação Corrente-Vorticidade em Problemas de Transferência de Calor Conjugado  
usando MEF**

Projeto Final apresentado ao Departamento  
de Engenharia Mecânica da Universidade  
do Estado do Rio de Janeiro, para obtenção do  
grau de bacharel em Engenharia Mecânica.

Orientador: Gustavo Rabello dos Anjos

Rio de Janeiro

2019

Ficha elaborada pelo autor através do  
Sistema para Geração Automática de Ficha Catalográfica da Rede Sirius - UERJ

c972 Cunha, Luís Henrique Carnevale da  
Formulação Corrente-Vorticidade em Problemas de  
Transferência de Calor Conjugado usando MEF / Luís  
Henrique Carnevale da Cunha. - 2019.  
92 f.

Orientador: Gustavo Rabello dos Anjos  
Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à  
Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade  
de Engenharia, para obtenção do grau de bacharel em  
Engenharia Mecânica.

1. Método de Elementos Finitos - Monografias. 2.  
Formulação Corrente-Vorticidade - Monografias. 3.  
Transferência de Calor - Monografias. I. Anjos,  
Gustavo Rabello dos. II. Universidade do Estado do  
Rio de Janeiro. Faculdade de Engenharia. III. Título.

CDU 621

Luís Henrique Carnevale da Cunha

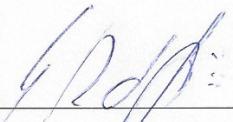
**Formulação Corrente-Vorticidade em Problemas de Transferência de Calor Conjugado  
usando MEF**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado  
à Universidade do Estado do Rio de Janeiro,  
Faculdade de Engenharia, para obtenção do  
grau de bacharel em Engenharia Mecânica.

Aprovado em: 01/02/2019

Banca Examinadora:

---



---

Prof. D.Sc. Gustavo Rabello dos Anjos - Orientador  
Departamento de Engenharia Mecânica - UERJ

---



---

Prof. D.Sc. Norberto Mangiacacchi  
Departamento de Engenharia Mecânica - UERJ

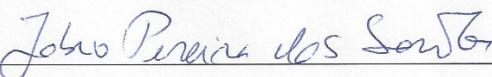
---



---

Profª. D.Sc. Cristiane Oliveira de Faria  
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

---



---

Prof. D.Sc. Fábio Pereira dos Santos  
Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ

Rio de Janeiro

2019

## **RESUMO**

**CUNHA**, Luís Henrique Carnevale da. *Formulação Corrente-Vorticidade em Problemas de Transferência de Calor Conjugado usando MEF*. 92 f. Monografia (Projeto Final de Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, 2018.

Problemas de transferência de calor conjugado tem um extensivo número de aplicações pois diversas vezes é necessário conhecer como a convecção em um fluido influencia a temperatura em regiões sólidas. A formulação corrente-vorticidade é uma alternativa usual à solução das equações de Navier-Stokes em domínios bidimensionais. Uma de suas principais dificuldades é a aplicação de condições de contorno para a vorticidade, e geralmente são propostos diversos esquemas em diferenças finitas para tais condições. Nesse trabalho é proposto o uso do método de elementos finitos para a solução do problema da formulação corrente-vorticidade usando elementos triangulares lineares em uma malha não estruturada. Em conjunto com a solução do escoamento, também é resolvido um modelo de transferência de calor, considerando o campo de velocidades calculado, no estudo da distribuição de temperatura entre um fluido monofásico incompressível e uma região solida. Os resultados obtidos foram satisfatórios para casos com baixo número de Reynolds e Peclet.

Palavras-chave: Método de Elementos Finitos, Formulação Corrente-Vorticidade, Transferência de Calor Conjugado.

## **ABSTRACT**

Conjugated heat transfer problems have an extensive number of applications since that many times it is necessary to understand how heat convection in a fluid influences the temperature in solid regions. The stream function-vorticity formulation is a useful alternative to solving the Navier-Stokes equations in two dimensional domain. One of its major difficulties is the lack of boundary conditions for vorticity, and several Finite Difference schemes are proposed to satisfy such a condition. In this work we propose using the finite element method for solving the couple problem of the stream function-vorticity formulation using linear triangle elements in unstructured meshes. Along side the flow simulation, a heat transfer equation is also solved using the flow calculated velocity field to study the temperature distribution in a incompressible single-phase fluid medium as a conjugate heat transfer problem. The results obtained were satisfactory when using low Reynolds and Péclet number.

Keywords: Finite Element Method, Conjugated Heat Transfer, Stream Function-Vorticity, Unstructured Mesh.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Imagen retirada da tese de doutorado de Szczukiewicz [1]. Representa uma placa de silício com 67 micro canais onde ocorre a passagem de fluido refrigerante .....	9
Figura 2	(a) Domínio dividido em elementos triangulares ; (b) Domínio dividido em elementos quadrilátero. As malhas foram obtidas com o software livre "Gmsh" .....	13
Figura 3	(a) Malha estruturada; (b) malha não estruturada. ....	14
Figura 4	Exemplo de convecção forçada com a camada limite térmica .....	16
Figura 5	Representação da seção transversal de um componente eletrônico com diferentes camadas de processamento e micro canais de refrigeração .....	19
Figura 6	Representação de um Volume de Controle bidimensional com fluxo de massa atravessando as fronteira na direção x .....	20
Figura 7	Representação de um elemento triangular linear com 3 nós .....	41
Figura 8	Exemplo de uma malha bidimensional triangular gerada no Gmsh .....	43
Figura 9	Solução analítica e numérica com uma malha de 3288 nós and 6576 elementos e erro absoluto. ....	48
Figura 10	Erro absoluto da solução numérica com a malha de 3288 pontos nodais .....	48
Figura 11	Convergência da solução numérica da equação de calor em um sólido para 6 refinamentos de malha com 4, 106, 402, 828, 1343, 3288 pontos nodais .....	49
Figura 12	Representação esquemática do problema proposto com suas condições de contorno .....	50
Figura 13	Malha gerada com 2944 nós e 6086 elementos, onde os elementos próximos à interface tem o tamanho menor .....	51
Figura 14	Resultados da simulação do prolema de condução térmica proposto e comparação do valor obtido usando o algoritmo de MEF e a solução analítica .....	51
Figura 15	Convergência do método para a condução de calor entre dois sólidos com diferentes valores de difusividade térmica .....	52
Figura 16	Representação do escoamento de Poiseuille com o perfil teórico de velocidade. ....	53
Figura 17	Solução numérica de velocidade e temperatura para o escoamento de Poiseuille entre placas aquecidas .....	54

Figura 18 Comparação entre a solução numérica e a solução analítica para o problema do escoamento de Poiseuille entre placas aquecidas .....	55
Figura 19 Esquema de um problema de trocador de calor com as condições utilizadas ..	56
Figura 20 Malha gerada co o software Gmsh para a simulação do trocador de calor.....	57
Figura 21 Solução numérica do campo de velocidade e comparação com a solução analítica do escoamento de Poiseuille para as mesma condições impostas .....	57
Figura 22 Solução numérica para o perfil de temperatura em um trocador de calor e comparação do método proposto nesse trabalho com resultados encontrados na literatura .....	58
Figura 23 Soluções para a temperatura e velocidade para todo o domínio do problema de trocador de calor proposto .....	58
Figura 24 Representação de um problema de arrefecimento de componente eletrônico com um canal irregular para o escoamento de fluido refrigerante.....	59
Figura 25 Malha gerada com elementos de tamanhos menores mais próximos ao canal de refrigeração .....	60
Figura 26 Soluções numéricas para a velocidade e temperatura no problema de arrefecimento de componente eletrônico .....	60

## **LISTA DE TABELAS**

Tabela 1	Propriedades e condições de entrada dos fluidos no trocador de calor .....	56
Tabela 2	Propriedades impostas na solução do problema proposto .....	59

## SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>9</b>
<b>1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....</b>	<b>12</b>
<b>1.1 Método de Elementos Finitos.....</b>	<b>12</b>
<b>1.2 Transferência de Calor.....</b>	<b>15</b>
<b>1.3 Arrefecimento de Componentes Eletrônicos .....</b>	<b>18</b>
<b>2 EQUAÇÕES DE GOVERNO .....</b>	<b>20</b>
<b>2.1 Equação da Continuidade.....</b>	<b>20</b>
<b>2.2 Equação de Navier Stokes .....</b>	<b>21</b>
<b>2.2.1 Formulação Corrente-Vorticidade .....</b>	<b>24</b>
<b>2.3 Equação da Temperatura .....</b>	<b>25</b>
<b>2.4 Modelo Final.....</b>	<b>28</b>
<b>2.5 Adimensionalização .....</b>	<b>28</b>
<b>3 MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS .....</b>	<b>32</b>
<b>3.1 Formulação Forte.....</b>	<b>32</b>
<b>3.2 Formulação Fraca .....</b>	<b>33</b>
<b>3.3 Discretização de Galerkin .....</b>	<b>36</b>
<b>3.3.1 Forma Matricial .....</b>	<b>39</b>
<b>3.4 Discretização no Tempo .....</b>	<b>40</b>
<b>3.5 Elementos da Malha.....</b>	<b>41</b>
<b>4 ALGORITMO E METODOLOGIA .....</b>	<b>43</b>
<b>4.1 Geração de Malha.....</b>	<b>43</b>
<b>4.2 Condições de Contorno para a Função de Corrente e Vorticidade .....</b>	<b>44</b>
<b>4.3 Algoritmo .....</b>	<b>44</b>
<b>4.4 Montagem das Matrizes Globais .....</b>	<b>46</b>
<b>5 RESULTADOS NUMÉRICOS .....</b>	<b>47</b>
<b>5.1 Validações.....</b>	<b>47</b>
<b>5.1.1 Equação de Laplace .....</b>	<b>47</b>

5.1.2	<b>Equação de Calor em Duas Regiões Sólidas .....</b>	50
5.1.3	<b>Escoamento de Poiseuille entre Placas Aquecidas .....</b>	53
5.2	<b>Simulações.....</b>	56
5.2.1	<b>Trocador de Calor de Tipo Contracorrente.....</b>	56
5.2.2	<b>Canal com Perturbações entre Sólidos Diferentes .....</b>	59
	<b>CONCLUSÃO .....</b>	61
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	87

## INTRODUÇÃO

Em diversas áreas de pesquisa, existem muitas aplicações práticas de problemas onde a condução de calor em uma região de material no estado sólido é diretamente influenciada pelo transporte de calor em uma região vizinha em que ocorre o escoamento de um fluido. Esses problemas são conhecidos como problemas de transferência de calor conjugado. Ser possível modelar e simular numericamente problemas com essas características tem um papel de extrema importância na compreensão e estudo de como um escoamento pode influenciar na distribuição de calor durante diversos tipos de processos, e os resultados podem ser usados para a otimização de sistemas práticos. Um exemplo de aplicação é o estudo de trocadores de calor como mostrado em *Song et al (2002)* [2].

A motivação inicial desse trabalho é o desenvolvimento de um modelo capaz de simular problemas de transferência de calor conjugada, e essa motivação surgiu da necessidade de se estudar o arrefecimento em componentes eletrônicos modernos, em especial, microprocessadores. Com o grande aumento no poder de processamento e consequente aumento na performance desses componentes, o controle da temperatura de funcionamento é altamente necessário para se assegurar uma operação precisa e eficiente, além de melhorar a vida útil dos dispositivos. Os componentes estudados são compostos por diferentes camadas de processadores e entre essas camadas existem micro canais utilizados na passagem de fluidos refrigerantes. Trabalhos como em *Szczukiewicz (2012)* [1], mostrado na Figura 1, e *Marzinichen et al (2010)* [3] fazem o estudo desses sistemas de arrefecimento.

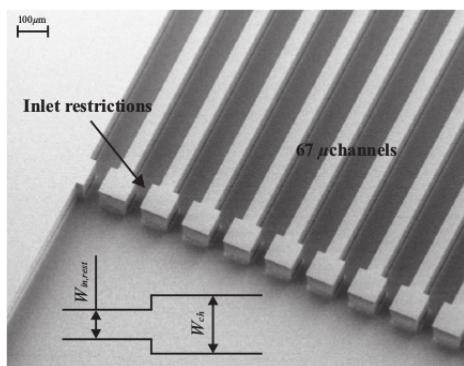


Figura 1: Imagem retirada da tese de doutorado de *Szczukiewicz* [1]. Representa uma placa de silício com 67 micro canais onde ocorre a passagem de fluido refrigerante

Para o desenvolvimento do modelo numérico proposto, é necessária a solução das equações de Navier-Stokes para um fluido incompressível, que é uma tarefa com diver-

sas aplicações na fluidodinâmica computacional. A formulação Corrente-Vorticidade é um modo de expressar as equações de Navier-Stokes através das variáveis função de corrente ( $\Psi$ ) e vorticidade ( $\omega$ ) ao invés de se usar as variáveis primitivas (velocidade e pressão). A vantagem dessa formulação é o fato de que a pressão deixa de ser necessária, logo, não é preciso resolver o problema do acoplamento entre pressão e velocidade. É possível encontrar uso dessa formulação na literatura como em *Hoffman et al (2000)* [4].

A maioria dos pesquisadores na área usam métodos de diferenças finitas ou volumes finitos para a simulação numérica em problemas de transferência de calor conjugado (*Wansophaek et al (2005)*) [5], entretanto, algumas suposições sobre o coeficiente de transferência de calor devem ser feitas para se calcular a temperatura ao longo da interface fluido-sólido.

Um exemplo do uso do método de elementos finitos aplicado à formulação corrente-vorticidade e usado em um problema de transferência de calor conjugado pode ser encontrado em *Cesini et al (1998)* [6]. Simulações em elementos finitos tradicionais usam uma aproximação de diferenças finitas para serem computados os valores da vorticidade no contorno (*Vynnycky et al (1998)* [7]), o que não é vantajoso para malhas não estruturadas. Uma abordagem diferente, inteiramente em elementos finitos, será desenvolvida nesse projeto.

O algoritmo proposto nesse trabalho é baseado no modo de solução da formulação corrente-vorticidade em *Salih (2013)* [8] e usa os resultados do escoamento na equação da temperatura. O método de elementos finitos é implementado com a linguagem Python usando a aproximação de Galerkin para as variáveis espaciais nas equações de governo e um esquema de diferenças finitas para a aproximação da derivada temporal nas equações como visto em *Lewis et al (2004)* [9]. Além disso, o software livre *GMSH* [10] foi utilizado para a geração de malhas em duas dimensões com elementos triangulares lineares. A solução dos sistemas lineares resultantes do método foi feita pelo método de decomposição LU com o uso da biblioteca *Scipy* [11] e a visualização dos resultados foi realizada através do software livre *Paraview* [12].

Esse trabalho está dividido nos seguintes capítulos:

- Introdução
- Capítulo 1: Revisão bibliográfica dos conceitos abordados
- Capítulo 2: Desenvolvimento das equações matemáticas usadas
- Capítulo 3: Aplicação do método de elementos finitos às equações do modelo
- Capítulo 4: Descrição da metodologia de solução e do algoritmo
- Capítulo 5: Validações e resultados obtidos
- Conclusão

## 1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 1.1 Método de Elementos Finitos

Diversos fenômenos físicos podem ser descritos com uso de equações diferenciais parciais (EDP's) e, em geral, obter a solução dessas equações de modo analítico é quase impossível, salvo os casos onde hipóteses podem ser feitas para simplificar o problema. Devido a essa dificuldade começaram a surgir métodos, conhecidos como métodos numéricos, em que o objetivo é resolver um problema discreto, ao invés de um problema contínuo, e com isso obter soluções aproximadas para as EDP's.

Alguns métodos numéricos mais conhecidos são:

- Método de Diferenças Finitas;
- Método de Volumes Finitos;
- Método de Elementos Finitos

O método de diferenças finitas foi aplicado nesse trabalho para a discretização das derivadas temporais. O método baseia-se em encontrar esquemas de aproximação para as derivadas através da expansão das funções em séries de Taylor.

O método de volumes finitos consiste em discretizar o domínio de um problema em volumes de controle e, após isso, integrar as equações do modelo dentro no volume de controle de forma conservativa. O intuito dessa integração é obter equações discretizadas para os pontos nodais dos volumes (*Versteeg e Malalasekra* [13]).

O método principal nesse trabalho é o método de elementos finitos (MEF). Segundo *Fish (2007)* [14], o MEF foi desenvolvido na década de 50, entretanto em 1943 *Courant* já havia publicado um artigo ([15]) em que usava uma formulação variacional em um domínio discretizado em elementos triangulares. Em 1956, *M.J. Turner, R.W. Clough, H.C. Martin e L.J. Topp* publicaram um dos primeiros artigos ([16]) que discutiam as bases do método, que até então não era conhecido como elementos finitos.

A ideia do MEF é dividir o domínio de um problema em elementos conectados por nós (ou pontos nodais) e, obter a solução aproximada aplicando a equação em cada elemento e montando um sistema de equações. O domínio discreto é conhecido como malha e a geração da malha pode ser feita de diversas formas e utilizando diferentes geometrias

de elementos. Na Figura 2 estão representadas malhas com elementos triangulares e com elementos quadriláteros para uma mesma região, e com diferentes níveis de refinamento, ou seja, tamanho dos elementos. As malhas foram obtidas com o software livre "Gmsh". Uma malha com elementos menores e, por consequência, com maior número de pontos e elementos é dita mais refinada.

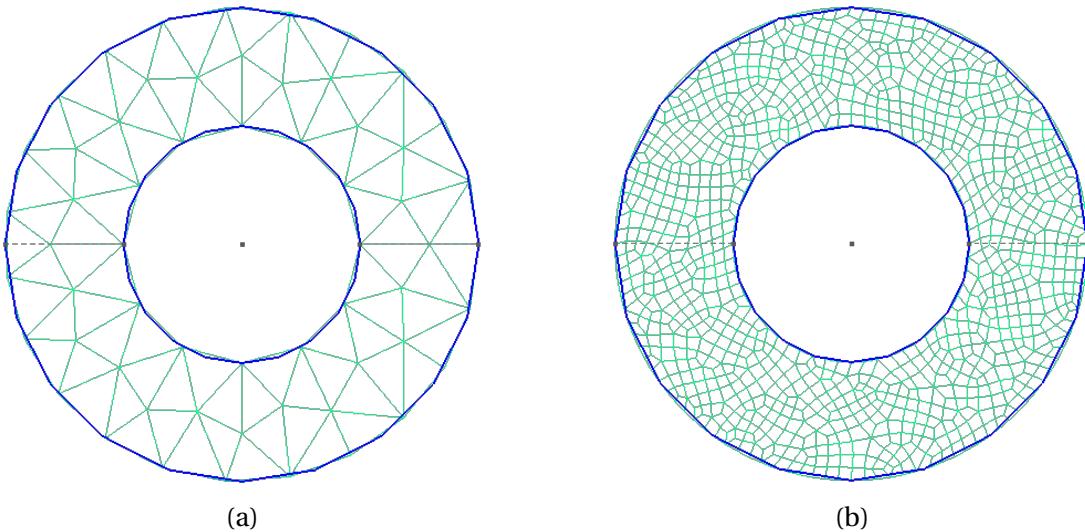


Figura 2: (a) Domínio dividido em elementos triangulares ; (b) Domínio dividido em elementos quadrilátero. As malhas foram obtidas com o software livre "Gmsh"

Ainda segundo *Fish (2007)* [14], para problemas lineares, a solução é obtida através de um sistema de equações lineares que pode ser resolvido computacionalmente. A dimensão desses sistemas depende do número de pontos e geralmente a precisão do método aumenta com o refinamento da malha. Entretanto o custo computacional para se calcular a solução dos sistemas também aumenta.

Uma grande vantagem do MEF em relação aos métodos como o de diferenças finitas é a naturalidade da aplicação em geometrias complexas devido a grande variedade de elementos que podem ser usados na discretização, não necessitando de malhas estruturadas (que são malhas onde cada nó tem um mesmo número de vizinhos e os espaçamentos são constantes). A Figura 3 representa a diferença entre malhas estruturadas e não estruturadas.

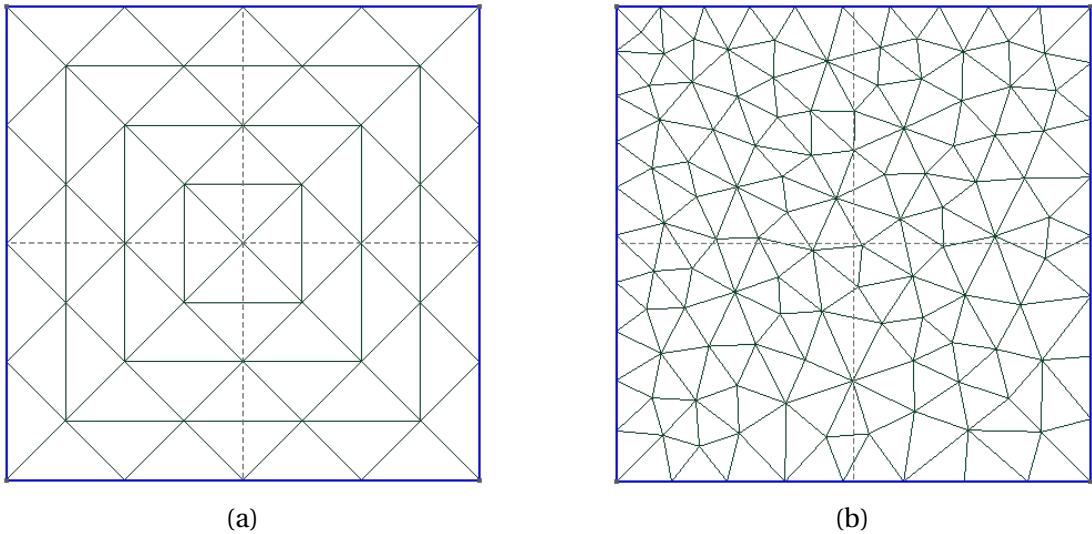


Figura 3: (a)Malha estruturada; (b)malha não estruturada.

O procedimento do MEF aplicado à este trabalho está detalhado no Capítulo 3. Resumidamente, ele consiste em primeiro obter a formulação fraca ou variacional do problema. Essa formulação é obtida através da ponderação do modelo na forma forte (EDP's iniciais) com o uso de funções de teste e funções de peso.

O segundo passo do MEF é a discretização do domínio, e da escolha da aproximação para as funções de teste. Para essa aproximação foi usado o método de Galerkin que busca aproximar funções  $f(x)$  como:

$$f(x) \approx \sum_{i=1}^m f_i N_i(x) \quad (1.1)$$

sendo  $m$  o número de pontos,  $f_i$  é uma constante e  $N_i(x)$  é um tipo de função conhecida como função de forma, que depende do tipo de elemento usado na discretização.

Com as funções de forma, as equações da formulação fraca são aplicadas a cada elemento e assim são obtidas as matrizes do sistema local. Após isso é feita a superposição dessas matrizes para ser calculada a matriz global do sistema linear, ou seja, a que representa todo o domínio. Com sistema global montado, são aplicadas as condições de contorno e o problema é resolvido por algum método de solução de sistemas lineares, que nesse caso o escolhido foi o método de decomposição LU disponível na biblioteca *Scipy* [11].

## 1.2 Transferência de Calor

Segundo *Incropora (2011)* [17] a termodinâmica estuda a transferência de energia através da interação de um sistema com sua vizinhança na forma de calor e trabalho. Contudo, ela lida com os estados iniciais e finais de um sistema sujeito a um processo. O estudo da transferência de calor busca determinar quais são os mecanismos que descrevem a troca de energia durante as interações dos processos termodinâmicos e a taxa em relação ao tempo em que ela ocorre.

Como definição mais geral dada por (*Cengel (2002)* [18]), calor é uma forma de energia que pode ser transferida de um sistema a outro devido a uma diferença de temperatura.

A transferência de calor se dá através de três modos:

- **Condução:** Esse modo de transferência de calor é relacionado à atividade molecular e atômica de um meio estacionário, sólido ou fluido, quando há um gradiente de temperatura. O mecanismo que explica esse fenômeno é a troca de energia devido a interação de partículas mais energéticas e partículas menos energéticas. Temperaturas mais elevadas estão associadas a um nível de agitação molecular mais elevado e quando moléculas com diferentes níveis de agitação colidem, há uma transferência de energia, devido a conservação de momento, da mais energética para a menos energética, o que é consistente com o fato de que o fluxo de calor tem sentido oposto ao gradiente de temperatura. Nos sólidos, essa troca de energia está associada a propagação de fônonas nas estruturas de rede (vibração devido ao movimento molecular). A principal equação que descreve esse fluxo é a lei de Fourier:

$$q_{cond} = -k\nabla T \quad (1.2)$$

onde  $k$  é uma constante conhecida como condutividade térmica.

- **Convecção:** É um modo de transferência de energia entre uma superfície sólida e um líquido, ou gás, que se encontra em movimento. Envolve os efeitos combinados da condução e do escoamento do fluido. Pode ser classificada em:

1. Convecção livre (ou natural): O escoamento do fluido em questão se dá devido a ação de forças de empuxo oriundas da diferença de densidade entre partes do fluido com maior temperatura e com menor temperatura.

2. Convecção forçada: Quando o escoamento ocorre com a influência de um meio externo como um ventilador, bomba hidráulica, etc.

Processos de transferência de calor em que é observado a mudança de fase de um fluido também são considerados como convecção por causa do movimento realizado por tais processos. Alguns exemplos são a formação de bolhas de vapor durante a ebulação e a queda de gotas na condensação.

Por mais que a convecção seja um fenômeno complexo, o fluxo de calor nesses casos pode ser descrito pela lei do resfriamento de Newton, expressa na Eq. 1.3, que relaciona a temperatura da superfície  $T_s$  com a temperatura  $T_\infty$  do fluido suficientemente longe da superfície. Em geral  $T_\infty$  é a temperatura obtida o mais longe possível da chamada camada limite térmica, representada na Figura 4.

$$q_{conv} = h(T_s - T_\infty) \quad (1.3)$$

onde o coeficiente de transferência de calor por convecção  $h$  não é uma propriedade do fluido, mas sim uma constante obtida experimentalmente e que depende de diversos fatores como a geometria em que ocorre o escoamento, a velocidade, e as propriedades do fluido.

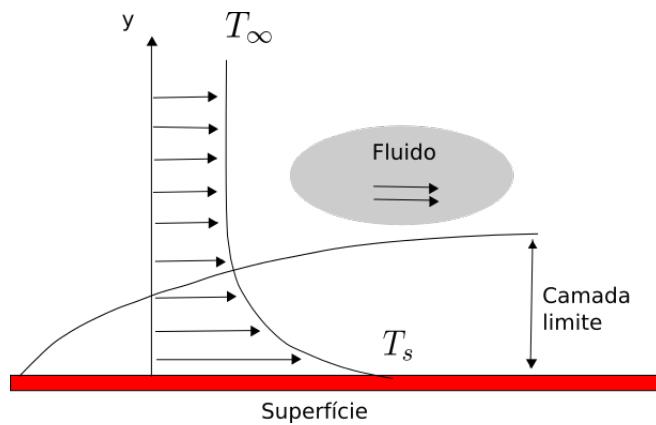


Figura 4: Exemplo de convecção forçada com a camada limite térmica

- **Radiação Térmica:** É a energia emitida por qualquer corpo, sólido ou fluido, com a temperatura diferente de 0K. Sua emissão é atribuída à mudança nas configurações eletrônicas dos átomos e moléculas. A energia de radiação é transmitida por ondas eletromagnéticas e, diferentemente da condução e da convecção, não é necessária a

presença de um meio material. Na verdade, a transferência por radiação é mais eficiente no vácuo.

O poder emissivo  $E$  de uma superfície tem o limite máximo prescrito pela lei de Stefan-Boltzmann (veja Eq. 1.4), válida para um corpo ideal conhecidos como corpo negro

$$E_b = \sigma T_s^4 \quad (1.4)$$

em que  $\sigma$  é a constante de Stefan-Boltzmann ( $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$ ). Para uma superfície real, é necessária definir a propriedade  $\epsilon$  que é a emissividade da superfície, de modo que:

$$E = \epsilon \sigma T_s^4 \quad (1.5)$$

Uma superfície também está sujeita a incidência de radiação, conhecida como irradiação e denominada por  $G$ . Esta radiação está sujeita à três fenômenos. Ela pode ser absorvida pela superfície, refletida, ou transmitida através da superfície (como no caso da luz passando pelo vidro de uma janela). A partir de  $G$ , é conveniente definir:

1.  $\rho$  - índice de reflexão;
2.  $\alpha$  - índice de absorção;
3.  $\tau$  - índice de transmissão;

de modo que:

$$G = \rho G + \alpha G + \tau G \quad (1.6)$$

Fazendo um a avaliação do balanço de energia na superfície, tem-se que o fluxo radiante total que sai da superfície é:

$$q_{rad} = E - \alpha G = \sigma(\epsilon T_s^4 - \alpha T_s^4) \quad (1.7)$$

### 1.3 Arrefecimento de Componentes Eletrônicos

Equipamentos eletrônicos fazem parte de praticamente todos as atividades modernas. Com isso, é cada vez mais vital que a confiabilidade de seu funcionamento seja garantida. Esses componentes dependem da passagem de corrente elétrica para a realização de suas tarefas e, devido a lei de Joule, estão suscetíveis a um aumento de temperatura que decorre do calor gerado pelo fluxo de elétrons. O calor excessivo produzido durante a operação de equipamentos eletrônicos é um fator de risco não só ao próprio equipamento, que perde eficiência e, em casos mais graves, pode haver dano permanente, mas também para o usuário que pode sofrer queimaduras e estar sujeito ao risco de incêndio. Tendo em vista a importância de se controlar a temperatura de funcionamento de equipamentos eletrônicos, faz-se necessário o uso de diversas técnicas de arrefecimento para que ocorra a desejada troca de calor.

Existem diversos modos de se refrigerar um componente eletrônico. Um exemplo mais comum é o uso do *cooler* nos processadores de computador. Esse sistema usa uma ventoinha para que haja a transferência de calor por convecção forçada entre o ar e um dispositivo metálico com diversas aletas que por sua vez recebe calor diretamente do chip por condução.

Como motivação inicial desse trabalho, buscou-se desenvolver um modelo matemático capaz de ser usado para a simulação numérica de um tipo específico de sistema de refrigeração em microprocessadores.

Com o crescente avanço da computação e da maior necessidade por poder de processamento surgiram equipamentos eletrônicos que possuem mais de um microprocessador por placa. Uma configuração eficiente para o design de tais dispositivos leva à construção de componentes onde há o empilhamento de diferentes unidades de processamento como esquematizado na Figura 5. Para se garantir a eficiência no trabalho desses processadores, assim como a vida útil de funcionamento, o controle de temperatura é feito através de um sistema de arrefecimento que utiliza um líquido refrigerante escoando por micro canais entre as camadas de processamento. Em trabalhos como os de Szczukiewicz (2012) [1] e Marcinichen *et al* (2010) [3] é possível ver o estudo desses tipos de sistema.

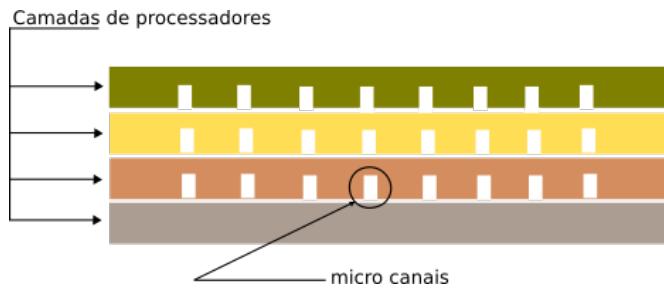


Figura 5: Representação da seção transversal de um componente eletrônico com diferentes camadas de processamento e micro canais de refrigeração

Para se estudar o funcionamento desse modo de refrigeração, é necessário que o modelo matemático descreva o transporte de calor realizado pelo fluido refrigerante e como o calor é conduzido pela região líquida do componente, o que constitui um **problema de transferência de calor conjugado**. E além disso, também é de grande interesse descrever como o fluido refrigerante escoa dentro desses canais e, para isso, foi utilizada a **formulação corrente-vorticidade** que é um modo de se representarem as equações de Navier-Stokes em função da função de corrente e do transporte de vorticidade em um escoamento.

## 2 EQUAÇÕES DE GOVERNO

Para se resolverem problemas de transferência de calor conjugado com o uso da formulação ( $\Psi, \omega$ ) são necessárias equações capazes de descrever o comportamento de um fluido incompressível em movimento e de como o transporte de energia ocorre através de um escoamento. Neste capítulo serão demonstradas as equações e hipóteses do modelo proposto. São elas:

- Equação da Continuidade
- Equação de Navier Stokes
- Equação da Temperatura

### 2.1 Equação da Continuidade

A equação da continuidade descreve a taxa de variação no tempo da densidade de um fluido em um ponto no espaço. Seu desenvolvimento é feito analisando-se o balanço de massa que atravessa um volume de controle com massa  $dm$ , volume  $dV$  constante no tempo e densidade  $\rho$  como na Figura 6.

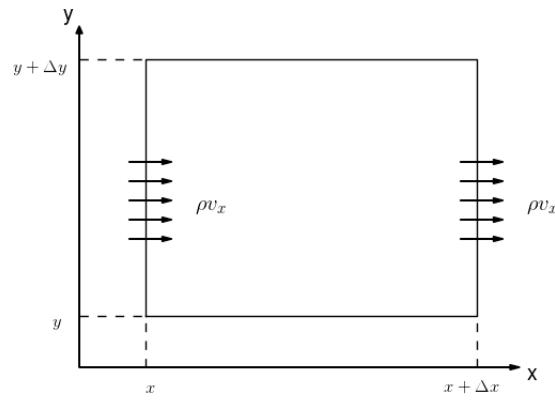


Figura 6: Representação de um Volume de Controle bidimensional com fluxo de massa atravessando as fronteira na direção x

O balanço de massa é:

$$\Delta\dot{m} = -\dot{m} \quad (2.1)$$

onde  $\Delta\dot{m}$  é a taxa de acumulação de massa no interior do volume e  $\dot{m}$  é o fluxo líquido de massa que sai do volume de controle.

A taxa de variação no tempo da massa pode ser expressa pela Eq. 2.2.

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} dm = \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho dV) = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (2.2)$$

O fluxo de massa que entra ou sai em uma das faces do volume de controle depende da velocidade do fluido na direção normal da superfície e da área em que ele atravessa. Definindo uma velocidade  $\mathbf{v}$  e o vetor normal à superfície  $\mathbf{n}$ , o fluxo total que passa pelo volume de controle é descrito na Eq. 2.3.

$$\oint_A \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA \quad (2.3)$$

A Eq. 2.3 pode ser reescrita utilizando-se o Teorema de Gauss, logo,

$$\oint_A \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV \quad (2.4)$$

De Eq. 2.1, Eq. 2.2 e Eq. 2.4, e levando em conta que o volume  $dV$  não pode ser nulo, obtém-se a Equação da Continuidade na forma diferencial (Eq. 2.5) onde  $\nabla$  é um operador diferencial que para coordenadas cartesianas em duas dimensões pode ser visto como  $\nabla = [\partial/\partial x, \partial/\partial y]$ .

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.5)$$

Considerando um fluido incompressível, isto é, que a densidade não varia no espaço e no tempo, e fazendo uso da identidade  $\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v}$ , a Eq. 2.5 pode ser reduzida à:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.6)$$

## 2.2 Equação de Navier Stokes

Para se obter a Equação de Navier Stokes, primeiro será derivada a Equação da Conservação de Momento Linear em um volume de controle, que representa a taxa de variação do momento linear no tempo e pode ser obtida pelo balanço de forças:

$$\Delta \dot{l} = -\dot{l} + F_{sup} + F_{corpo} \quad (2.7)$$

onde  $\Delta \dot{l}$  é a taxa de acumulação do momento linear dentro do volume de controle,  $\dot{l}$  representa fluxo líquido de momento linear que atravessa a fronteira do volume e  $F_{sup}$  e  $F_{corpo}$  são as forças aplicadas à superfície e forças de corpo respectivamente.

A taxa de acumulação do momento linear no interior do volume de controle e o fluxo que atravessa sua fronteira pode ser analisado de modo análogo ao processo apresentado para a equação da continuidade e estão representados na Eq. 2.8 e Eq. 2.9 respectivamente.

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) dV \quad (2.8)$$

$$\oint_A \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA \quad (2.9)$$

Segundo [19], a resultante das forças externas aplicadas à superfície do volume de controle pode ser descrita como na Eq. 2.10, onde  $\sigma$  é um tensor de tensões. A única força de corpo considerada é a ação da gravidade ( $\mathbf{g}$ ) e está representada na Eq. 2.11.

$$\oint_A \sigma \mathbf{n} dA \quad (2.10)$$

$$\int_V \rho \mathbf{g} dV \quad (2.11)$$

Do princípio de conservação do momento linear e da Eq. 2.8, Eq. 2.9, Eq. 2.10, Eq. 2.11:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) dV + \oint_A \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = \oint_A \sigma \mathbf{n} dA + \int_V \rho \mathbf{g} dV \quad (2.12)$$

Aplicando o Teorema de Gauss nas integrais de superfície na Eq. 2.12 chegamos à Equação da Conservação de Momento Linear, escrita na forma diferencial em Eq. 2.13.

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = \nabla \cdot \sigma + \rho \mathbf{g} \quad (2.13)$$

O lado esquerdo da Eq. 2.13 pode ser simplificado assumindo um fluido incompressível ( $\rho$  é constante e  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ ) e desenvolvendo  $\nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = \mathbf{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) + \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \rho \frac{D \mathbf{v}}{Dt} \quad (2.14)$$

onde  $D/Dt$  é o operador derivada material, descrito para uma função  $\phi$  em Eq. 2.14

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \phi \quad (2.15)$$

Portanto, a equação da conservação do momento linear para um fluido incompressível é:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g} \quad (2.16)$$

Para se desenvolver a equação de Navier-Stokes é conveniente separar o tensor de tensões  $\boldsymbol{\sigma}$  em um componente relacionada à pressão e outro relacionado às tensões viscosas:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \quad (2.17)$$

onde  $p$  é a pressão,  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade, e  $\boldsymbol{\tau}$  é o tensor de tensões viscosas. Com isso:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (2.18)$$

Considerando um fluido newtoniano e incompressível, o tensor  $\boldsymbol{\tau}$  é escrito em função da velocidade e viscosidade  $\mu$ :

$$\boldsymbol{\tau} = \mu(\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T) \quad (2.19)$$

e seu divergente é:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (2.20)$$

Substituindo Eq. 2.20 e Eq. 2.18 na Eq. 2.16:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{g} \quad (2.21)$$

em que  $\nu = \mu/\rho$  é denominado viscosidade cinemática. A Eq. 2.21 é conhecida como equação de Navier-Stokes.

### 2.2.1 Formulação Corrente-Vorticidade

A formulação Corrente-Vorticidade é um modo de se escrever a equação de Navier-Stokes usando a função de corrente  $\Psi$  e a vorticidade  $\omega$  como variáveis. Para escoamentos bidimensionais com fluidos incompressíveis a formulação apresenta a vantagem de eliminar o acoplamento entre a pressão e o campo de velocidade, o que facilita na sua solução. A função de corrente se relaciona com o campo de velocidades como descrito na Eq. 2.22 e a vorticidade é definida como na Eq. 2.23.

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = v_x, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x} = -v_y \quad (2.22)$$

$$\omega = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (2.23)$$

Com Eq. 2.22 e Eq. 2.23 é possível encontrar a relação entre a função de corrente e a velocidade, apresentada na Eq. 2.24.

$$\omega = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \quad (2.24)$$

Pode-se obter a equação de transporte da vorticidade aplicando o operador rotacional na equação de Navier-Stokes (N-S):

$$\frac{\partial}{\partial y} (\text{Eq. N-S na direção } x) - \frac{\partial}{\partial x} (\text{Eq. N-S na direção } y) \quad (2.25)$$

ou seja:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{Dv_x}{Dt} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{Dv_y}{Dt} \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left[ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 v_x + \mathbf{g} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v_y + \mathbf{g} \right] \quad (2.26)$$

Analizando o lado esquerdo da Eq. 2.26 tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{Dv_x}{Dt} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{Dv_y}{Dt} \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right] \quad (2.27)$$

com o uso da propriedade:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \quad (2.28)$$

onde  $x_i$  e  $x_j$  são variáveis quaisquer, e usando a definição de vorticidade na Eq. 2.23, a Eq. 2.27 pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right] + v_x \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right] + v_y \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right] = \frac{\partial \omega}{\partial t} + v_x \frac{\partial \omega}{\partial x} + v_y \frac{\partial \omega}{\partial y} \quad (2.29)$$

Considerando a gravidade e a viscosidade constantes, usando a propriedade da Eq. 2.28 e com a definição da vorticidade na Eq. 2.23 o lado direito da Eq. 2.26 é reescrito como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right) \right] + \nu \left[ \frac{\partial(\nabla^2 v_x)}{\partial y} - \frac{\partial(\nabla^2 v_y)}{\partial y} \right] = \\ \nu \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right] = \nu \left[ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right] \end{aligned} \quad (2.30)$$

Substituindo Eq. 2.30 e Eq. 2.29 na Eq. 2.26 chega-se na equação de transporte da vorticidade, escrita na forma vetorial em Eq. 2.31.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \omega = \nu \nabla^2 \omega \quad (2.31)$$

## 2.3 Equação da Temperatura

Semelhante à equação de Navier-Stokes, para se obter a Equação da Temperatura primeiro é necessário desenvolver uma outra equação, conhecida como Equação da Conservação de Energia, e para isso também é aplicada a análise de volume de controle. Além disso, a energia total será expressa pela soma da energia cinética e energia interna.

A equação para a energia cinética pode ser obtida a partir da equação da conservação de momento linear quando a mesma é multiplicada escalarmente pela velocidade, ou seja:

$$\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) = \frac{1}{\rho} [-\mathbf{v} \cdot \nabla p + \mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \tau)] + \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} \quad (2.32)$$

Utilizando a regra da cadeia é possível demonstrar a relação:

$$\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \right) \quad (2.33)$$

e semelhantemente:

$$\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \nabla \left( \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \right) \quad (2.34)$$

Definindo o produto  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v_x^2 + v_y^2 = v^2$  e com a Eq. 2.33 e Eq. 2.34, deduz-se:

$$\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \right) + \mathbf{v} \cdot \nabla \left( \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \right) = \frac{D}{Dt} \left( \frac{v^2}{2} \right) \quad (2.35)$$

A equação da Energia Cinética é apresentada em Eq. 2.36.

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{v^2}{2} \right) = \frac{1}{\rho} [-\mathbf{v} \cdot \nabla p + \mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \tau)] + \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} \quad (2.36)$$

Definindo  $e$  como a energia interna específica por unidade de volume, a energia total  $dE$  de um volume de controle infinitesimal  $dV$  pode ser escrita como:

$$dE = \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) dV \quad (2.37)$$

A Eq. 2.38 mostra o princípio da conservação de energia total para um volume de controle, que é um caso da 1<sup>a</sup> lei da termodinâmica.

$$\Delta \dot{E} = -\dot{E} + \dot{W}_{sup} + \dot{W}_{corpo} - q + \dot{Q} \quad (2.38)$$

onde  $\Delta \dot{E}$  é a taxa de acumulação da energia dentro do volume,  $-\dot{E}$  é o fluxo líquido para fora do volume,  $\dot{W}_{sup}$  e  $\dot{W}_{corpo}$  são as parcelas do trabalho por unidade de tempo das forças aplicadas à superfície e das forças de corpo respectivamente,  $q$  é o fluxo líquido de calor para fora do volume e  $\dot{Q}$  é a taxa de geração de calor dentro do volume.

A expressão matemática que descreve a taxa de acumulação está representada na Eq. 2.39 e do fluxo líquido na Eq. 2.40

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \left( e + \frac{v^2}{2} \right) dV \quad (2.39)$$

$$\oint_A \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA \quad (2.40)$$

O trabalho por unidade de tempo das forças aplicadas à superfície e das forças de corpo (no caso, a força gravitacional) é obtido multiplicando-as escalarmente pela velocidade, ou seja:

$$\dot{W}_{sup} + \dot{W}_{corpo} = \oint_A \mathbf{v} \cdot \sigma \mathbf{n} dA + \int_V \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} dV \quad (2.41)$$

O fluxo e a taxa de geração de calor são representados na Eq. 2.42.

$$-q + \dot{Q} = -\oint_A \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dA + \int_V \dot{Q} dV \quad (2.42)$$

Reagrupando todos os termos obtém-se a equação da energia total na forma integral:

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left( e + \frac{v^2}{2} \right) dV &= -\oint_A \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA + \oint_A \mathbf{v} \cdot \sigma \mathbf{n} dA + \\ &\quad \int_V \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} dV - \oint_A \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dA + \int_V \dot{Q} dV \end{aligned} \quad (2.43)$$

Aplicando o teorema de Gauss nas integrais de superfície, a Eq. 2.43 pode ser reescrita na forma diferencial:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( e + \frac{v^2}{2} \right) + \nabla \cdot \left[ \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) \mathbf{v} \right] = \nabla \cdot (\mathbf{v} \cdot \sigma) + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \dot{Q} \quad (2.44)$$

Lembrando que  $\sigma = -p\mathbf{I} + \tau$  e simplificando o lado esquerdo da Eq. 2.44 de modo semelhante ao apresentado para a Eq. 2.13 na seção anterior, a equação da energia total na forma vetorial é:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( e + \frac{v^2}{2} \right) = -\nabla \cdot (\mathbf{v} p) + \nabla \cdot (\mathbf{v} \cdot \tau) + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \dot{Q} \quad (2.45)$$

A Equação da Energia Interna, apresentada na Eq. 2.46, é resultado da subtração entre a equação da energia total e da energia cinética (Eq. 2.45 e Eq. 2.36).

$$\rho \frac{De}{Dt} = -p \nabla \cdot \mathbf{v} + \tau \nabla \cdot \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \dot{Q} \quad (2.46)$$

O termo  $\tau \nabla \cdot \mathbf{v}$  é conhecido como função dissipação  $\Phi$ . Para se chegar à equação da temperatura será usada a hipótese de que os efeitos viscosos podem ser desprezados, ou seja  $\Phi = 0$ . De acordo com [17], a energia interna pode ser escrita como  $e = C_v T$ , onde

$C_v$  é o calor específico a volume constante e  $T$  é a temperatura. Além disso, é importante desenvolver o termo  $\nabla \cdot \mathbf{q}$  fazendo uso da lei de Fourier expressa na Eq. 2.47.

$$\mathbf{q} = -k\nabla T \quad (2.47)$$

logo

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = -\nabla \cdot (k\nabla T) \quad (2.48)$$

onde  $k$  é uma propriedade física denominada condutividade térmica. Considerando  $C_v$  e  $k$  constantes e definindo a difusividade térmica  $\alpha = k/\rho C_v$ , a equação da temperatura é:

$$\frac{DT}{Dt} = \alpha \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho C_v} \quad (2.49)$$

## 2.4 Modelo Final

A seguir estão apresentadas, de modo resumido, as equações do transporte de vorticidade, da vorticidade, função corrente, velocidade em função corrente e transporte de temperatura sem geração de calor, respectivamente:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \omega = \nu \nabla^2 \omega \quad (2.50)$$

$$\omega = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (2.51)$$

$$\nabla^2 \Psi = -\omega \quad (2.52)$$

$$\mathbf{v} = \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y}, -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \quad (2.53)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \alpha \nabla^2 T \quad (2.54)$$

## 2.5 Adimensionalização

Em diversas situações, a adimensionalidade das equações de um modelo ajudam a compreender quais fatores são mais relevantes à dinâmica de um sistema durante uma si-

mulação. Além disso, os grupos adimensionais também podem ser usados para o estudo de modelos experimentais em escala reduzida pois dois sistemas diferentes regidos pelas mesmas leis físicas podem ser ditos similares desde que o valor de seus respectivos produtos adimensionais sejam idênticos.

Para a equação da temperatura (veja Eq. 3.4) sem geração de calor, as variáveis adimensionais podem ser definidas:

$$T^* = \frac{T}{T_0}, \quad t^* = \frac{U_0 t}{L}, \quad x^* = \frac{x}{L}, \quad y^* = \frac{y}{L}, \quad \alpha^* = \frac{\alpha}{\alpha_0}, \quad \mathbf{v}^* = \frac{\mathbf{v}}{U_0} \quad (2.55)$$

substituindo Eq. 2.55 em Eq. 3.4:

$$\frac{\partial(T^* T_0)}{\partial(t^*(L/U_0))} + v_x^* U_0 \frac{\partial(T^* T_0)}{\partial(x^* L)} + v_y^* U_0 \frac{\partial(T^* T_0)}{\partial(y^* L)} = \alpha^* \alpha_0 \left[ \frac{\partial^2(T^* T_0)}{\partial(x^* L)^2} + \frac{\partial^2(T^* T_0)}{\partial(y^* L)^2} \right] \quad (2.56)$$

Como os parâmetros  $L$ ,  $U_0$ ,  $T_0$  e  $\alpha_0$  são valores de referência constantes, a Eq. 2.56 pode ser reescrita como:

$$\frac{T_0 U_0}{L} \left[ \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + v_x^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v_y^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right] = \frac{\alpha_0 T_0}{L^2} \alpha^* \left[ \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \right] \quad (2.57)$$

Simplificando a equação e reescrevendo na forma vetorial, com o uso da derivada material, tem-se:

$$\frac{DT^*}{Dt^*} = \frac{\alpha}{U_0 L} \nabla T^* \quad (2.58)$$

Utilizando as variáveis da Eq. 2.55 e  $v = v_0 v^*$ , o mesmo procedimento pode ser realizado na equação de transporte da vorticidade. Para encontrar-se a vorticidade adimensional faz-se o uso da velocidade adimensional e da Eq. 2.51, assim:

$$\omega = \frac{\partial v_y^* U_0}{\partial(x^* L)} - \frac{\partial v_x^* U_0}{\partial(y^* L)} = \frac{U_0}{L} \left( \frac{\partial v_y^*}{\partial x^*} - \frac{\partial v_x^*}{\partial y^*} \right) = \frac{U_0}{L} \omega^* \quad (2.59)$$

Logo, a equação da vorticidade torna-se:

$$\frac{\partial(\omega^*(U_0/L))}{\partial(t^*(L/U))} + v_x^* U_0 \frac{\partial(\omega^*(U_0/L))}{\partial(x^* L)} + v_y^* U_0 \frac{\partial(\omega^*(U_0/L))}{\partial(y^* L)} = v^* v_0 \left[ \frac{\partial^2(\omega^*(U_0/L))}{\partial(x^* L)^2} + \frac{\partial^2(\omega^*(U_0/L))}{\partial(y^* L)^2} \right] \quad (2.60)$$

Desenvolvendo do mesmo modo que na equação da temperatura:

$$\frac{U_0^2}{L^2} \left( \frac{\partial \omega^*}{\partial t^*} + v_x^* \frac{\partial \omega^*}{\partial x^*} + v_y^* \frac{\partial \omega^*}{\partial y^*} \right) = \frac{U_0 v_0}{L^3} v^* \left( \frac{\partial^2 \omega^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \omega^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (2.61)$$

logo,

$$\frac{D\omega^*}{Dt^*} = \frac{\nu}{U_0 L} \nabla^2 \omega^* \quad (2.62)$$

Para a função de corrente, utiliza-se a Eq. 3.2 e a vorticidade adimensional  $\omega^* = (L/U_0)\omega$  encontrada na Eq. 2.59:

$$-\omega^* \frac{U_0}{L} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial(x^* L)^2} + \frac{\partial \Psi}{\partial(y^* L)^2} = \frac{1}{L^2} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^{*2}} \right) \quad (2.63)$$

Passando as constantes  $U_0$  e  $L$  para dentro da derivada de  $\Psi$ :

$$-\omega^* = \frac{\partial^2(\Psi/(U_0 L))}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2(\Psi/(U_0 L))}{\partial y^{*2}} \quad (2.64)$$

com isso defini-se:

$$\Psi^* = \frac{\Psi}{U_0 L} \quad (2.65)$$

Os grupos adimensionais encontrados na Eq. 2.62 e Eq. 2.58 são apresentados a seguir, assim como outros grupos relevantes à problemas de transferência de calor.

- a) Número de Reynolds: Principal número adimensional para a caracterização de regimes de escoamento. Para  $Re < Re_{crítico}$  o escoamento é dito laminar e para os casos em que  $Re > Re_{crítico}$  o escoamento é considerado turbulento.

$$Re = \frac{U_0 L}{\nu} \quad (2.66)$$

- b) Número de Péclet: É um número que pode ser entendido como a relação entre as taxas de transferência de calor por advecção e por difusão.

$$Pe = \frac{U_0 L}{\alpha} \quad (2.67)$$

- c) Número de Biot: Aparece em problemas de transferência de calor com convecção em

uma superfície sólida como condição de contorno. O termo  $h$  é o coeficiente de troca térmica.

$$Bi = \frac{hL}{k} \quad (2.68)$$

- d) Número de Nusselt: É semelhante ao número de Biot e também é usado para problemas de troca de calor por convecção, mas não restritos à uma superfície sólida no contorno.

$$Nu = \frac{hL}{k} \quad (2.69)$$

- e) Número de Prandtl: Pode ser visto como uma relação entre a camada limite hidrodinâmica e térmica.

$$Pr = \frac{Pe}{Re} = \frac{\nu}{\alpha} \quad (2.70)$$

### 3 MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

#### 3.1 Formulação Forte

A formulação forte de um modelo é o conjunto de suas equações diferenciais aplicadas à um domínio, e de suas condições de contorno aplicadas à fronteira desse domínio.

Como foi apresentado no capítulo anterior, o modelo matemático proposto é:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \omega = \nu \nabla^2 \omega \quad (3.1)$$

$$\nabla^2 \Psi = -\omega \quad (3.2)$$

$$\mathbf{v} = \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y}, -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \alpha \nabla^2 T \quad (3.4)$$

válidas no domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  e com condições de contorno:

$$\omega = \bar{\omega} \quad (3.5)$$

$$\Psi = \bar{\Psi} \quad (3.6)$$

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} \quad (3.7)$$

$$(3.8)$$

em  $\Gamma \subset \Omega$ .

Essas condições de contorno, onde há um valor definido para a função, são conhecidas como condições de Dirichlet. Para a equação de temperatura, além da condição de Dirichlet, também foram utilizadas condições de Neumann em alguns casos, onde o fluxo de calor perpendicular ao contorno tem um valor prescrito, por isso é conveniente separar o contorno  $\Gamma$  em uma região  $\Gamma_N$  onde se aplica a condição de Neumann e  $\Gamma_E$  onde se aplica a condição de Dirichlet, de modo que  $\Gamma_N \cup \Gamma_E = \Gamma$ . Assim, as condições de contorno para a temperatura são:

$$T = \bar{T} \text{ em } \Gamma_E \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \bar{q} \text{ em } \Gamma_N \quad (3.10)$$

### 3.2 Formulação Fraca

A formulação fraca do modelo é obtida como resultado da ponderação das equações na forma forte integradas no domínio. Essa ponderação é feita com o uso de funções de teste e funções de peso como descrito em *Hughes (2000)* [20].

De acordo com *Anjos (2007)* [21] o espaço de Sobolev pode ser definido como:

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, 2, \dots, n \right\} \quad (3.11)$$

onde  $L^2(\Omega)$  é o espaço:

$$L^2(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \int_{\Omega} u^2 d\Omega < \infty \right\} \quad (3.12)$$

As funções de teste são conjuntos de funções que podem servir como solução para o modelo e são definidas nos espaços:

$$\mathbb{W} = \{ \omega | \omega \in H^1(\Omega), \omega = \bar{\omega} \text{ em } \Gamma \} \quad (3.13)$$

$$\mathbb{T} = \{ T | T \in H^1(\Omega), T = \bar{T} \text{ em } \Gamma_E \} \quad (3.14)$$

$$\mathbb{V} = \{ \mathbf{v} | \mathbf{v} \in H^1(\Omega), \mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} \text{ em } \Gamma \} \quad (3.15)$$

$$\mathbb{P} = \{ \Psi | \Psi \in H^1(\Omega), \Psi = \bar{\Psi} \text{ em } \Gamma \} \quad (3.16)$$

Os espaços das funções de peso são montados de maneira semelhante:

$$\mathbb{S} = \{ \zeta | \zeta \in H^1(\Omega), \zeta = 0 \text{ em } \Gamma \} \quad (3.17)$$

$$\mathbb{D} = \{ \delta | \delta \in H^1(\Omega), \delta = 0 \text{ em } \Gamma_E \} \quad (3.18)$$

$$\mathbb{F} = \{ \phi | \phi \in H^1(\Omega), \phi = 0 \text{ em } \Gamma \} \quad (3.19)$$

$$\mathbb{H} = \{ \eta | \eta \in H^1(\Omega), \eta = 0 \text{ em } \Gamma \} \quad (3.20)$$

em que  $\delta, \phi, \eta$  e  $\zeta$  são as funções de peso.

Multiplicando as equações do modelo pelas funções de peso e integrando no domínio  $\Omega$  tem-se:

$$\int_{\Omega} \delta \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T - \alpha \nabla^2 T \right] d\Omega = 0 \quad (3.21)$$

$$\int_{\Omega} \phi [\nabla^2 \Psi + \omega] d\Omega = 0 \quad (3.22)$$

$$\int_{\Omega} \eta \left[ \mathbf{v} - \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y}, -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \right] d\Omega = 0 \quad (3.23)$$

$$\int_{\Omega} \zeta \left[ \frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \omega - \nu \nabla^2 \omega \right] d\Omega = 0 \quad (3.24)$$

Desenvolvendo as integrais obtemos:

$$\int_{\Omega} \delta \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \mathbf{v} \cdot \nabla T d\Omega - \int_{\Omega} \delta \alpha \nabla^2 T d\Omega = 0 \quad (3.25)$$

$$\int_{\Omega} \phi \nabla^2 \Psi d\Omega + \int_{\Omega} \phi \omega d\Omega = 0 \quad (3.26)$$

$$\int_{\Omega} \eta \mathbf{v} d\Omega - \int_{\Omega} \eta \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y}, -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) d\Omega = 0 \quad (3.27)$$

$$\int_{\Omega} \zeta \frac{\partial \omega}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \zeta \mathbf{v} \cdot \nabla \omega d\Omega - \int_{\Omega} \zeta \nu \nabla^2 \omega d\Omega = 0 \quad (3.28)$$

Utilizando o teorema de Green nos termos difusivos (com o operador Laplaciano  $\nabla^2$ ) é possível reduzir a ordem das derivadas. Essas integrais se tornam:

$$-\int_{\Omega} \delta \alpha \nabla^2 T d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \delta \cdot \alpha \nabla T d\Omega - \int_{\Gamma} \delta (\alpha \nabla T \cdot \mathbf{n}) d\Gamma \quad (3.29)$$

$$\int_{\Omega} \phi \nabla^2 \Psi = - \int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \nabla \Psi d\Omega + \int_{\Gamma} \phi (\nabla \Psi \cdot \mathbf{n}) d\Gamma \quad (3.30)$$

$$\int_{\Omega} \zeta \nu \nabla^2 \omega d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla \zeta \cdot \nu \nabla \omega d\Omega + \int_{\Gamma} \zeta (\nu \nabla \omega \cdot \mathbf{n}) d\Gamma \quad (3.31)$$

onde as integrais em  $\Gamma$  representam as contribuições das condições de contorno e  $\mathbf{n}$  é um vetor unitário perpendicular ao contorno. As condições de Dirichlet propostas no modelo também são conhecidas como condições essenciais, e devido ao espaço em que são definidas as funções de peso, a integral em  $\Gamma$  com condições essenciais é nula. Já na equação de temperatura, alguns casos tinham condição de Neumann, com isso, a integral do contorno na Eq. 3.29 é separada em uma região  $\Gamma_N$  onde se aplica a condição de Neumann e  $\Gamma_E$  onde se aplica a condição essencial, de modo que  $\Gamma_N \cup \Gamma_E = \Gamma$ . Como  $\alpha$  e  $\nu$  são considerados constantes, podemos reescrever o modelo:

$$\int_{\Omega} \delta \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \mathbf{v} \cdot \nabla T d\Omega + \alpha \int_{\Omega} \nabla \delta \cdot \nabla T d\Omega - \int_{\Gamma_N} \delta (\alpha \nabla T \cdot \mathbf{n}) d\Gamma = 0 \quad (3.32)$$

$$-\int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \nabla \Psi d\Omega + \int_{\Omega} \phi \omega d\Omega = 0 \quad (3.33)$$

$$\int_{\Omega} \eta \mathbf{v} d\Omega - \int_{\Omega} \eta \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y}, -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) d\Omega = 0 \quad (3.34)$$

$$\int_{\Omega} \zeta \frac{\partial \omega}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \zeta \mathbf{v} \cdot \nabla \omega d\Omega + \nu \int_{\Omega} \nabla \zeta \cdot \nabla \omega d\Omega = 0 \quad (3.35)$$

Definindo cada integral como:

$$m_1(\delta, \frac{\partial T}{\partial t}) = \int_{\Omega} \delta \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega \quad (3.36) \qquad k_2(\zeta, \omega) = \int_{\Omega} \nabla \zeta \cdot \nabla \omega d\Omega \quad (3.42)$$

$$g_1(\delta, \mathbf{v}, T) = \int_{\Omega} \delta \mathbf{v} \cdot \nabla T d\Omega \quad (3.37) \qquad k_3(\phi, \Psi) = \int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \nabla \Psi d\Omega \quad (3.43)$$

$$k_1(\delta, T) = \int_{\Omega} \nabla \delta \cdot \nabla T d\Omega \quad (3.38) \qquad m_3(\phi, \omega) = \int_{\Omega} \phi \omega d\Omega \quad (3.44)$$

$$f(\delta, T, \mathbf{n}) = \int_{\Gamma_N} \delta (\alpha \nabla T \cdot \mathbf{n}) d\Gamma \quad (3.39) \qquad m_4(\eta, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \eta \mathbf{v} d\Omega \quad (3.45)$$

$$m_2(\zeta, \frac{\partial \omega}{\partial t}) = \int_{\Omega} \zeta \frac{\partial \omega}{\partial t} d\Omega \quad (3.40) \qquad l(\eta, \Psi) = \int_{\Omega} \eta \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y}, -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) d\Omega \quad (3.46)$$

$$g_2(\zeta, \mathbf{v}, \omega) = \int_{\Omega} \zeta \mathbf{v} \cdot \nabla \omega d\Omega \quad (3.41)$$

O problema na forma fraca é:

Encontrar as soluções de  $\omega \in \mathbb{W}$ ,  $\Psi \in \mathbb{P}$ ,  $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$  e  $T \in \mathbb{T}$  tais que

$$m_1(\delta, \frac{\partial T}{\partial t}) + g_1(\delta, \mathbf{v}, T) + \alpha k_1(\delta, T) - f(\delta, T, \mathbf{n}) = 0 \quad (3.47)$$

$$-k_3(\phi, \Psi) + m_3(\phi, \omega) = 0 \quad (3.48)$$

$$m_4(\eta, \mathbf{v}) - l(\eta, \Psi) = 0 \quad (3.49)$$

$$m_2(\zeta, \frac{\partial \omega}{\partial t}) + g_2(\zeta, \mathbf{v}, \omega) + \nu k_2(\zeta, \omega) = 0 \quad (3.50)$$

para todo  $\delta \in \mathbb{D}$ ,  $\phi \in \mathbb{F}$ ,  $\eta \in \mathbb{H}$ ,  $\zeta \in \mathbb{S}$ .

### 3.3 Discretização de Galerkin

Aqui, o método de Galerkin é usado para discretizar as equações em relação as coordenadas espaciais  $(x, y) \in \Omega$ , mantendo a continuidade no tempo, que será discretizado na próxima seção. O primeiro passo desse método de acordo com *Hughes (200)* [20] é a construção de aproximações para as funções de teste e de peso dentro de um espaço de dimensão finita de modo que as funções são definidas em um espaço com  $m$  elementos de  $H^1(\Omega)$ . O domínio  $\Omega$  é discretizado com  $n_e$  o número de elementos e  $n_p$  o numero de nós, ou pontos, de uma malha computacional.

A partir daqui, é mais claro desenvolver a equação vetorial de  $\mathbf{v}$  separando nas componentes  $\mathbf{v} = (u, v)$ . As funções de aproximação usadas são:

$$T \approx \sum_i^{n_p} T_i(t) N_i(x, y) \quad (3.51)$$

$$\delta \approx \sum_j^{n_p} \delta_j(t) N_j(x, y) \quad (3.56)$$

$$\Psi \approx \sum_i^{n_p} \Psi_i(t) N_i(x, y) \quad (3.52)$$

$$\phi \approx \sum_j^{n_p} \phi_j(t) N_j(x, y) \quad (3.57)$$

$$\omega \approx \sum_i^{n_p} \omega_i(t) N_i(x, y) \quad (3.53)$$

$$\eta \approx \sum_j^{n_p} \eta_j(t) N_j(x, y) \quad (3.58)$$

$$u \approx \sum_i^{n_p} u_i(t) N_i(x, y) \quad (3.54)$$

$$\zeta \approx \sum_j^{n_p} \zeta_j(t) N_j(x, y) \quad (3.59)$$

$$v \approx \sum_i^{n_p} v_i(t) N_i(x, y) \quad (3.55)$$

onde  $N_i(x, y) = [N_1(x, y), N_2(x, y), \dots, N_{n_p}(x, y)]$  são conhecidas como funções de forma

e dependem do tipo de elemento aplicado na discretização do domínio. Também é útil definir o gradiente de  $N_i$  como:

$$\nabla N_i = B_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x}, \frac{\partial N_2}{\partial x}, \dots, \frac{\partial N_{np}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y}, \frac{\partial N_2}{\partial y}, \dots, \frac{\partial N_{np}}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{xx} \\ B_{yy} \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

Substituindo as aproximações nas integrais da formulação fraca:

$$\int_{\Omega} \sum_j^{n_p} \delta_j(t) N_j \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_i^{n_p} T_i(t) N_i \right) d\Omega + \int_{\Omega} \sum_j^{n_p} \delta_j(t) N_j \mathbf{v} \cdot \nabla \left( \sum_i^{n_p} T_i(t) N_i \right) d\Omega + \alpha \int_{\Omega} \nabla \left( \sum_j^{n_p} \delta_j(t) N_j \right) \cdot \nabla \left( \sum_i^{n_p} T_i(t) N_i \right) d\Omega - f(\delta, T, \mathbf{n}) = 0 \quad (3.61)$$

$$\int_{\Omega} \nabla \left( \sum_j^{n_p} \phi_j(t) N_j \right) \cdot \nabla \left( \sum_i^{n_p} \Psi_i(t) N_i \right) d\Omega - \int_{\Omega} \sum_j^{n_p} \phi_j(t) N_j \sum_i^{n_p} \omega_i(t) N_i d\Omega = 0 \quad (3.62)$$

$$\int_{\Omega} \sum_j^{n_p} \eta_j(t) N_j \sum_i^{n_p} u_i(t) N_i d\Omega - \int_{\Omega} \sum_j^{n_p} \eta_j(t) N_j \frac{\partial}{\partial y} \left( \sum_i^{n_p} \Psi_i(t) N_i \right) d\Omega = 0 \quad (3.63)$$

$$\int_{\Omega} \sum_j^{n_p} \eta_j(t) N_j \sum_i^{n_p} v_i(t) N_i d\Omega + \int_{\Omega} \sum_j^{n_p} \eta_j(t) N_j \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_i^{n_p} \Psi_i(t) N_i \right) d\Omega = 0 \quad (3.64)$$

$$\int_{\Omega} \sum_j^{n_p} \varsigma_j(t) N_j \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_i^{n_p} \omega_i(t) N_i \right) d\Omega + \int_{\Omega} \sum_j^{n_p} \varsigma_j(t) N_j \mathbf{v} \cdot \nabla \left( \sum_i^{n_p} \omega_i(t) N_i \right) d\Omega + \nu \int_{\Omega} \nabla \left( \sum_j^{n_p} \varsigma_j(t) N_j \right) \cdot \nabla \left( \sum_i^{n_p} \omega_i(t) N_i \right) d\Omega = 0 \quad (3.65)$$

A integral  $f(\delta, T, \mathbf{n})$  na Eq. 3.61 é simplificada usando-se a lei de Fourier, e como o fluxo de calor nessa região é conhecido, temos:

$$f(\delta, T, \mathbf{n}) = \int_{\Gamma_N} \delta (\alpha \nabla T \cdot \mathbf{n}) d\Gamma = \int_{\Gamma_N} \delta \bar{q} d\Gamma \quad (3.66)$$

logo,

$$\int_{\Gamma_N} \delta \bar{q} d\Gamma = \bar{q} \int_{\Gamma_N} \sum_j^{n_p} \delta_j(t) N_j d\Gamma \quad (3.67)$$

Nas Eqs. 3.61 e 3.65, a velocidade  $\mathbf{v}$  não é tratada como incógnita e pode sair da integral. Reescrevendo as equações usando as propriedades do somatório e deixando somente os termos com dependência espacial (as funções de forma) dentro das integrais temos:

$$\sum_j^{n_p} \delta_j(t) \left[ \sum_i^{n_p} \left[ \frac{\partial T_i}{\partial t} \int_{\Omega} N_j N_i d\Omega + T_i(t) \mathbf{v} \cdot \int_{\Omega} N_j \nabla N_i d\Omega + \alpha T_i(t) \int_{\Omega} \nabla N_j \cdot \nabla N_i d\Omega - \bar{q} \int_{\Gamma_N} N_j d\Gamma \right] = 0 \quad (3.68)$$

$$\sum_j^{n_p} \phi_j(t) \left[ \sum_i^{n_p} \left[ \Psi_i(t) \int_{\Omega} \nabla N_j \cdot \nabla N_i d\Omega - \omega_i(t) \int_{\Omega} N_j N_i d\Omega \right] \right] = 0 \quad (3.69)$$

$$\sum_j^{n_p} \eta_j(t) \left[ \sum_i^{n_p} \left[ u_i(t) \int_{\Omega} N_j N_i d\Omega - \Psi_i(t) \int_{\Omega} N_j \frac{\partial N_i}{\partial y} d\Omega \right] \right] = 0 \quad (3.70)$$

$$\sum_j^{n_p} \eta_j(t) \left[ \sum_i^{n_p} \left[ v_i(t) \int_{\Omega} N_j N_i d\Omega + \Psi_i(t) \int_{\Omega} N_j \frac{\partial N_i}{\partial x} d\Omega \right] \right] = 0 \quad (3.71)$$

$$\sum_j^{n_p} \varsigma_j(t) \left[ \sum_i^{n_p} \left[ \frac{\partial \omega_i}{\partial t} \int_{\Omega} N_j N_i d\Omega + \omega_i(t) \mathbf{v} \cdot \int_{\Omega} N_j \nabla N_i d\Omega + v \omega_i(t) \int_{\Omega} \nabla N_j \cdot \nabla N_i d\Omega \right] \right] = 0 \quad (3.72)$$

Os termos com dependência temporal das aproximações das funções de peso devem ser não-nulos logo podem sair das equações, resultando em:

$$\sum_j^{n_p} \sum_i^{n_p} \left[ \frac{\partial T_i}{\partial t} \int_{\Omega} N_j N_i d\Omega + T_i(t) \mathbf{v} \cdot \int_{\Omega} N_j B_{ij} d\Omega + \alpha T_i(t) \int_{\Omega} B_{ji} \cdot B_{ij} d\Omega - \sum_j^{n_p} \bar{q} \int_{\Gamma_N} N_j d\Gamma \right] = 0 \quad (3.73)$$

$$\sum_j^{n_p} \sum_i^{n_p} \left[ \Psi_i(t) \int_{\Omega} B_{ji} \cdot B_{ij} d\Omega - \omega_i(t) \int_{\Omega} N_j N_i d\Omega \right] = 0 \quad (3.74)$$

$$\sum_j^{n_p} \sum_i^{n_p} \left[ u_i(t) \int_{\Omega} N_j N_i d\Omega - \Psi_i(t) \int_{\Omega} N_j B_{yy} d\Omega \right] = 0 \quad (3.75)$$

$$\sum_j^{n_p} \sum_i^{n_p} \left[ v_i(t) \int_{\Omega} N_j N_i d\Omega + \Psi_i(t) \int_{\Omega} N_j B_{xx} d\Omega \right] = 0 \quad (3.76)$$

$$\sum_j^{n_p} \sum_i^{n_p} \left[ \frac{\partial \omega_i}{\partial t} \int_{\Omega} N_j N_i d\Omega + \omega_i(t) \mathbf{v} \cdot \int_{\Omega} N_j B_{ij} d\Omega + v \omega_i(t) \int_{\Omega} B_{ji} \cdot B_{ij} d\Omega \right] = 0 \quad (3.77)$$

### 3.3.1 Forma Matricial

Na seção anterior foi demonstrado o uso da discretização de Galerkin no modelo. Das equações resultantes, é possível perceber uma série de termos integrais semelhantes que dão origem às matrizes clássicas do MEF. São elas a matriz de rigidez  $\mathbf{K}$ , a matriz de massa  $\mathbf{M}$ , e as matrizes referentes à derivada em relação a  $x$ ,  $\mathbf{G}_x$ , e em relação a  $y$ ,  $\mathbf{G}_y$ . Essas matrizes globais dependem do tipo de elemento, ou seja, dependem das matrizes locais para um elemento  $\Omega_e \subset \Omega$ . As matrizes locais são definidas como:

$$k^e = \int_{\Omega_e} B_{ji} \cdot B_{ij} d\Omega \quad (3.78)$$

$$m^e = \int_{\Omega_e} N_j N_i d\Omega \quad (3.79)$$

$$g_x^e = \int_{\Omega_e} N_j B_{xx} d\Omega \quad (3.80)$$

$$g_y^e = \int_{\Omega_e} N_j B_{yy} d\Omega \quad (3.81)$$

A montagem das matrizes globais com suas equivalentes locais será explicada no próximo capítulo. Após essa operação, o modelo discreto pode ser escrito na forma matricial:

$$\mathbf{M} \frac{\partial T}{\partial t} + (\alpha \mathbf{K} + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{G}_x, \mathbf{G}_y)) T = \mathbf{f} \quad (3.82)$$

$$\mathbf{M} \frac{\partial \omega}{\partial t} + (v \mathbf{K} + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{G}_x, \mathbf{G}_y)) \omega = 0 \quad (3.83)$$

$$\mathbf{K} \Psi = \mathbf{M} \omega \quad (3.84)$$

$$u = \mathbf{G}_y \Psi \quad , \quad v = -\mathbf{G}_x \Psi \quad (3.85)$$

### 3.4 Discretização no Tempo

A discretização no tempo é necessária para a solução das Eqs. 3.82 e 3.83. De acordo com *Lewis et al (2004)* [9] a abordagem mais comum é fazer o uso de um esquema de diferenças finitas para a aproximação da derivada temporal.

O esquema aplicado nesse trabalho foi o de diferenças regressivas, que é uma aproximação de primeira ordem. Sua formulação decorre da aplicação da série de Taylor para uma função  $u(t + \Delta t)$  ao redor de ponto  $t$ :

$$u(t + \Delta t) \approx u(t) + \frac{du(t)}{dt}(t + \Delta t - t) + \frac{1}{2} \frac{d^2 u(t)}{dt^2}(t + \Delta t - t)^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3 u(t)}{dt^3}(t + \Delta t - t)^3 + \dots \quad (3.86)$$

Truncando a aproximação após o segundo termo, tem-se:

$$u(t + \Delta t) \approx u(t) + \frac{du(t)}{dt} \Delta t \rightarrow \frac{du(t)}{dt} \approx \frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t} \quad (3.87)$$

Fazendo o uso da notação  $u(t + \Delta t) = u^{n+1}$  e  $u(t) = u^n$ , e avaliando os termos com  $T$  em  $T^{n+1}$  e  $\omega$  em  $\omega^{n+1}$ , as Eqs. 3.82 e 3.83 são escritas como:

$$\mathbf{M} \frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t} + (\alpha \mathbf{K} + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{G}_x, \mathbf{G}_y)) T^{n+1} = \mathbf{f} \quad (3.88)$$

$$\mathbf{M} \frac{\omega^{n+1} - \omega^n}{\Delta t} + (\nu \mathbf{K} + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{G}_x, \mathbf{G}_y)) \omega^{n+1} = 0 \quad (3.89)$$

### 3.5 Elementos da Malha

Como já foi discutido, o MEF depende da discretização do domínio  $\Omega$  em elementos definidos em  $\Omega_e \subset \Omega$ . Esses elementos podem assumir diversas formas geométricas. A relação entre as equações diferenciais de um modelo e o tipo de elemento escolhido se dá através da chamada função de forma, também conhecida como função de interpolação ou função de base. Segundo *Lewis (2004)* [9] os tipos mais comuns de funções de forma são funções polinomiais pois exigem menor esforço em operações de integração ou diferenciação e a precisão dos resultados pode ser melhorada com o aumento do grau do polinômio.

Para o desenvolvimento do método nesse trabalho, foi feita a escolha de realizar a discretização do domínio bidimensional em elementos triangulares, como exemplificado na Figura 7, em que as funções de forma representavam uma interpolação linear.

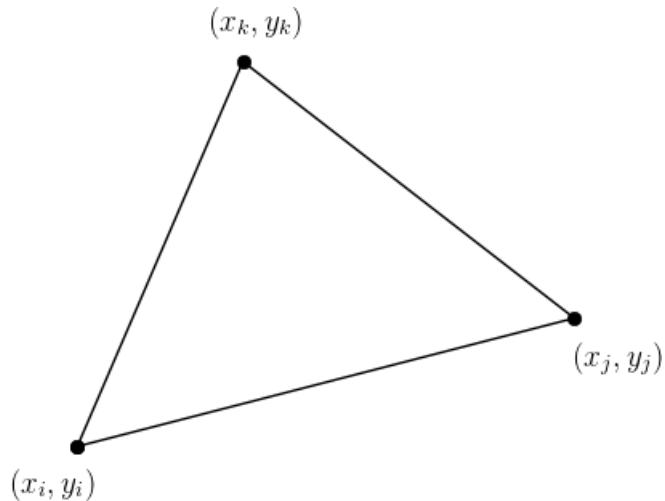


Figura 7: Representação de um elemento triangular linear com 3 nós

As funções de forma para o elemento escolhido são amplamente encontradas na literatura, como em *Lewis (2004)* [9], e estão expressas na Eq. 3.90.

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(x, y) &= [N_i \ N_j \ N_k] \\ N_i &= \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y) \\ N_j &= \frac{1}{2A}(a_j + b_j x + c_j y) \\ N_k &= \frac{1}{2A}(a_k + b_k x + c_k y) \end{aligned} \tag{3.90}$$

Os termos  $a$ ,  $b$  e  $c$  da Eq. 3.90 dependem das coordenadas  $(x, y)$  dos nós no elemento e são calculados de acordo com a Eq. 3.92. Também é necessário conhecer a área  $A$  do

elemento que é obtida através de:

$$2A = a_i + a_j + a_k \quad (3.91)$$

$$\begin{aligned} a_i &= x_j y_k - x_k y_j; \quad b_i = y_j - y_k; \quad c_i = x_k - x_j \\ a_j &= x_k y_i - x_i y_k; \quad b_j = y_k - y_i; \quad c_j = x_i - x_k \\ a_k &= x_i y_j - x_j y_i; \quad b_k = y_i - y_j; \quad c_k = x_j - x_i \end{aligned} \quad (3.92)$$

Utilizando essas funções em conjunto da definição das matrizes elementares da seção anterior, as matrizes podem ser escritas diretamente como:

$$k^e = \frac{1}{4A} \begin{bmatrix} b_i^2 + c_i^2 & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ b_i b_j + c_i c_j & b_j^2 + c_j^2 & b_k b_j + c_k c_j \\ b_i b_k + c_i c_k & b_k b_j + c_k c_j & b_k^2 + c_k^2 \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

$$m^e = \frac{A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.94)$$

$$g_x^e = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ b_i & b_j & b_k \\ b_i & b_j & b_k \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

$$g_y^e = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} c_i & c_j & c_k \\ c_i & c_j & c_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} \quad (3.96)$$

## 4 ALGORITMO E METODOLOGIA

### 4.1 Geração de Malha

Após a definição do modelo numérico, a geração de malha é o primeiro passo a ser feito para a solução de um problema. Ela pode ser feita de diversas maneiras e para o desenvolvimento do algoritmo implementado nesse trabalho foi escolhido utilizar o software livre *Gmsh* [10]. Este software foi desenvolvido por Christophe Geuzaine e Jean-François Remacle e lançado sob a GNU General Public License. Ele é dividido em módulos e os utilizados foram:

- **Geométrico:** Utilizado para a construção dos objetos que serão discretizados através da definição de pontos, linhas, superfícies e volumes.
- **Geração de Malha:** É responsável por interpretar os objetos construídos no módulo geométrico e discretiza-los, gerando a malha em elementos finitos. Este módulo fornece diferentes tipos de discretização e tipos de elementos, também é possível exportar as malhas em alguns tipos de arquivo padrão para elementos finitos, o que permite a sua aplicação em conjunto com outras ferramentas de simulação com o MEF.

Para a discretização em elementos triangulares lineares, foi empregada a opção padrão do módulo de geração de malha, que utiliza o algoritmo de triangulação de Delaunay. Após esta etapa, é exportado o arquivo contendo as informações dos pontos e como eles estão conectados nos elementos. Além disso, o software permite a definição de grupos físicos que facilita na identificação dos elementos e pontos que estão localizados na fronteira.

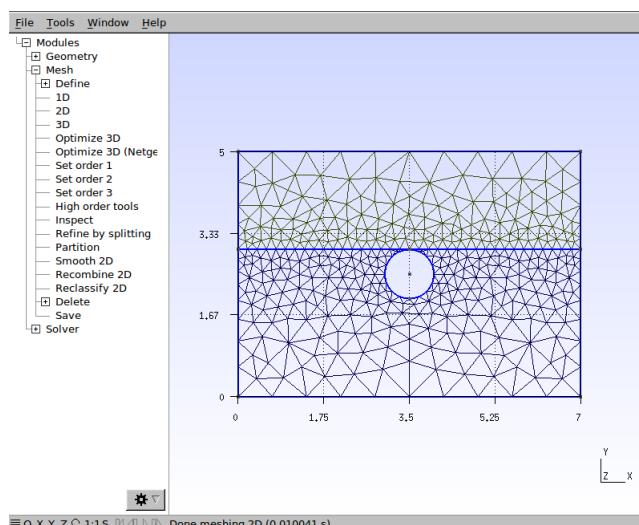


Figura 8: Exemplo de uma malha bidimensional triangular gerada no Gmsh

## 4.2 Condições de Contorno para a Função de Corrente e Vorticidade

Para a solução da equação de transporte da vorticidade e a equação da função de corrente são necessárias condições de contorno capazes de descrever o escoamento do problema em questão. Para a função de corrente nas simulações desse trabalho foi aplicada uma condição de Dirichlet constante por toda uma parede, que é condizente com a interpretação física dessa grandeza como descrito por *Peeters et al (1987)* [22]. Além disso, a diferença no valor da função de corrente entre duas paredes representa a vazão de fluido que escoa entre elas.

No caso da vorticidade, a literatura sugere que sejam aplicadas condições de Dirichlet em que seu valor é calculado por esquemas de diferenças finitas como os encontrados em *Hoffmann (2000)* [4]. Entretanto esses esquemas não são facilmente aplicáveis em malhas não estruturadas e com isso foi proposta a ideia de se calcular o valor da vorticidade no contorno através da formulação em elementos finitos da equação da vorticidade, dada por:

$$\omega = \mathbf{M}^{-1}[\mathbf{G}_x v - \mathbf{G}_y u] \quad (4.1)$$

em que  $\mathbf{M}^{-1}$  é a inversa da matriz de massa  $\mathbf{M}$

## 4.3 Algoritmo

Nesta seção encontra-se, de modo resumido, o método de solução para a formulação corrente-vorticidade em conjunto da transferência de calor que foi implementado. Para melhor compreensão, as equações já discutidas são apresentadas novamente em suas respectivas etapas:

1. Inicializar um campo de velocidade que respeita as condições de contorno;
2. Inicializar a vorticidade com:

$$\omega = \mathbf{M}^{-1}[\mathbf{G}_x v - \mathbf{G}_y u] \quad (4.2)$$

3. A função de corrente inicial é obtida pela solução de:

$$\mathbf{K}\Psi = \mathbf{M}\omega \quad (4.3)$$

4. Calcular as condições de contorno da vorticidade para o próximo tempo pela Eq. 4.2;

5. Resolver a equação de transporte da vorticidade:

$$\mathbf{M} \frac{\omega^n + 1 - \omega^n}{\Delta t} + (\nu \mathbf{K} + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{G}_x, \mathbf{G}_y)) \omega^{n+1} = 0 \quad (4.4)$$

6. Resolver a função de corrente com:

$$\mathbf{K}\Psi = \mathbf{M}\omega \quad (4.5)$$

7. Obter o novo campo de velocidade a partir da função de corrente aplicando a equação:

$$u = \mathbf{G}_y \Psi, \quad v = -\mathbf{G}_x \Psi \quad (4.6)$$

8. Resolver o transporte de temperatura com o novo campo de velocidade pela equação:

$$\mathbf{M} \frac{T^n + 1 - T^n}{\Delta t} + (\alpha \mathbf{K} + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{G}_x, \mathbf{G}_y)) T^{n+1} = \mathbf{f} \quad (4.7)$$

9. Repetir a partir do item 4 para o próximo passo no tempo.

#### 4.4 Montagem das Matrizes Globais

A montagem das matrizes globais, também conhecida como *Assembling*, é uma etapa de extrema importância, tanto para o funcionamento do código como devido ao tempo de execução desta tarefa. A seguir é mostrado o código escrito na linguagem Python utilizado para o assembling.

```
for elem in range(_numele): # Loop que varre todos os elementos

    for i_local in range(3):          #
        i_global = _ien[elem, i_local] # Obtenção dos índices
                                         # globais através da matriz
        for j_local in range(3):          # de conectividade ien
            j_global = _ien[elem, j_local] #

            K[i_global, j_global] += k_local[i_local, j_local] #
            M[i_global, j_global] += m_local[i_local, j_local] # Assembling
            Gx[i_global, j_global] += gx_local[i_local, j_local] #
            Gy[i_global, j_global] += gy_local[i_local, j_local] #
```

A matriz de conectividade dos elementos é uma estrutura em que cada linha corresponde a um elemento e cada coluna possui o índice dos nós contidos no elemento. Para o elemento triangular linear, essa matriz tem 3 colunas.

Dentro do *loop* que varre os elementos também é definida a construção das matrizes elementares. Essa etapa foi omitida para facilitar a compreensão do processo de assembling mas consiste em:

1. Ler as coordenadas ( $x, y$ ) dos nós no elemento;
2. Calcular os índices  $a, b, c$  e a área do elemento como demonstrado na seção 3.5 no capítulo anterior;
3. Substituir os índices nas respectivas matrizes

## 5 RESULTADOS NUMÉRICOS

### 5.1 Validações

#### 5.1.1 Equação de Laplace

O primeiro teste de validação realizado foi a aplicação do algoritmo à um problema de Laplace com condições de contorno de Dirichlet, descrito na Eq. 5.1. Essa validação é feita devido a analogia entre a equação de Laplace e a difusão, no regime permanente, de calor em uma região sólida sem geração de energia.

$$\begin{cases} \nabla^2 u(x, y) = 0 \\ u(0, y) = 0 \\ u(x, 0) = 0 \\ u(x, 2) = 0 \\ u(3, y) = f(y) \end{cases} \quad \text{sendo,} \quad f(y) = \begin{cases} y, & 0 \leq y \leq 1 \\ 2 - y, & 1 \leq y \leq 2 \end{cases} \quad (5.1)$$

Através da técnica de separação de variáveis é possível de se encontrar uma solução analítica para  $u(x, y)$  nesse problema, descrita pela Eq. 5.7. O algoritmo desenvolvido levou em conta o regime transiente assumindo  $u(x, y, t) = 0$  em  $t = 0$  como condição inicial. Assim que a solução do sistema converge para o resultado permanente, 100 iterações com  $\Delta t = 0.1$ , é feita a comparação entre o valor analítico e o valor numérico obtido, representado na Figura 9 e na Figura 10.

$$u(x, y) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right)}{m^2 \sinh\left(\frac{3m\pi}{2}\right)} \sinh\left(\frac{m\pi x}{2}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{2}\right) \quad (5.2)$$

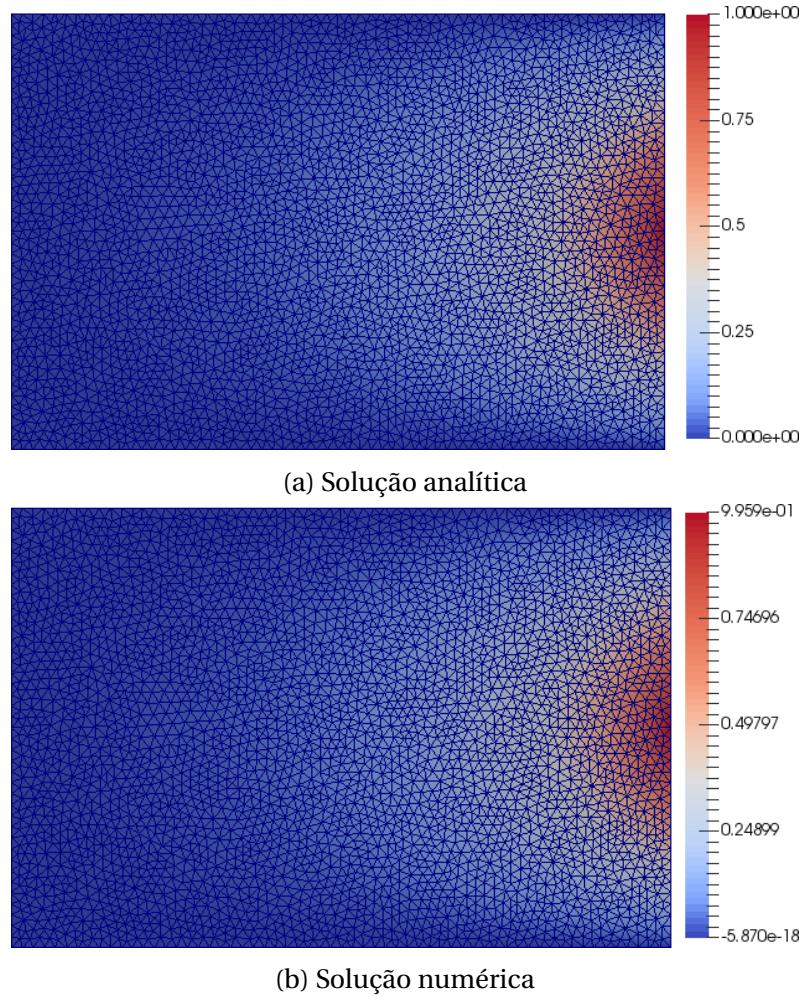


Figura 9: Solução analítica e numérica com uma malha de 3288 nós and 6576 elementos e erro absoluto.

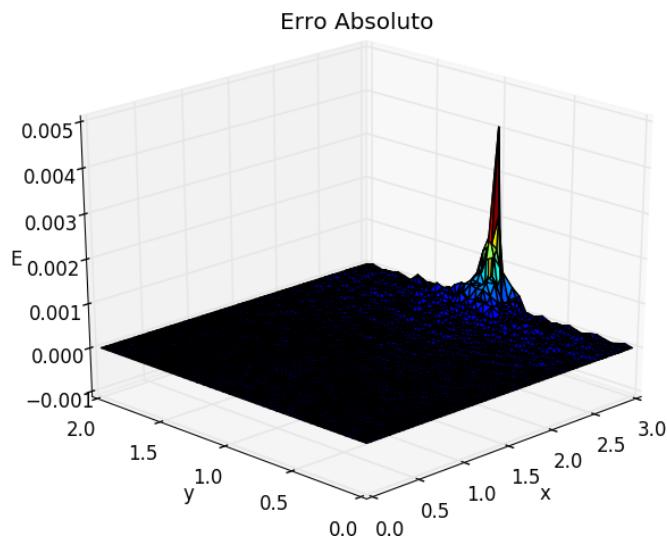


Figura 10: Erro absoluto da solução numérica com a malha de 3288 pontos nodais

Além disso, também é feita a analise de convergência de malha no método para 6

malhas contendo 24, 106, 402, 828, 1343, 3288 pontos nodais, e o tamanho característico  $l$  dos elementos foram, respectivamente, 0.8, 0.3, 0.15, 0.1, 0.08, 0.05. A análise é feita com a norma  $L^2$  em que, sendo  $\bar{u}_i$  a solução analítica e  $u_i$  a numérica, o erro é definido como:

$$Erro = \sqrt{\sum_i^{n_p} (\bar{u}_i - u_i)^2} \quad (5.3)$$

e o erro absoluto:

$$Erro_{abs} = \bar{u}_i - u_i \quad (5.4)$$

A Figura 11 mostra que foi alcançada uma convergência quadrática no método numérico implementado.

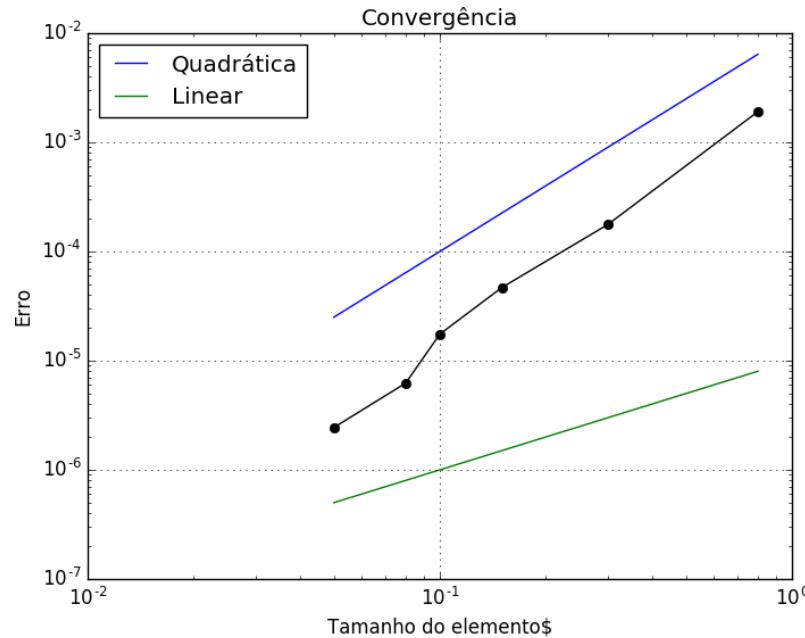


Figura 11: Convergência da solução numérica da equação de calor em um sólido para 6 refinamentos de malha com 4, 106, 402, 828, 1343, 3288 pontos nodais

### 5.1.2 Equação de Calor em Duas Regiões Sólidas

Essa é uma validação para a equação do calor aplicada à um domínio composto por duas regiões sólidas que possuem diferentes valores para a difusão térmica. A geometria e condições do problema estão esquematizados na Figura 12.

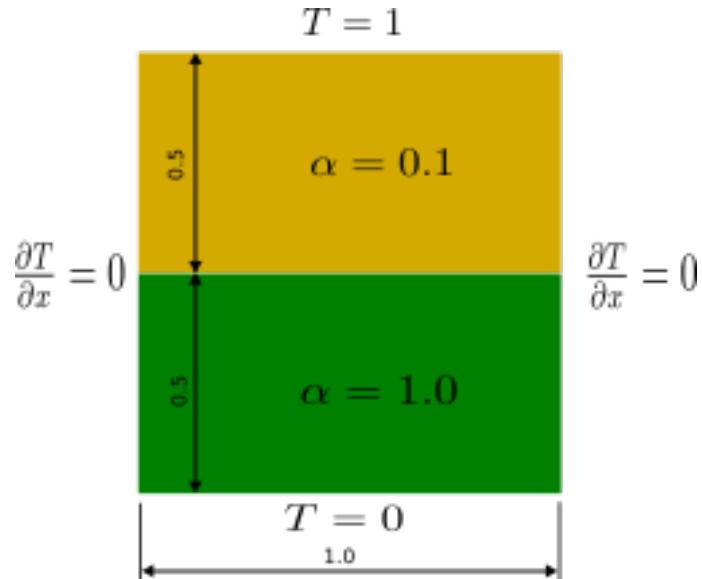


Figura 12: Representação esquemática do problema proposto com suas condições de contorno

Como é assumido que não há fluxo na direção  $x$  é possível simplificar o problema para se obter uma solução analítica  $T = T(y)$  expressa na Eq. 5.5. Essa solução é encontrada fazendo o balanço do fluxo de calor na direção  $y$  pela aplicação da lei de Fourier.

$$T(y) = \begin{cases} \frac{2}{11}y, & 0 \leq y \leq 0.5 \\ \frac{20}{11}y - \frac{9}{11}, & 0.5 < y \leq 1 \end{cases} \quad (5.5)$$

Numericamente, foi resolvido o problema bidimensional e a solução ao longo de  $x = 0.5$  foi comparada com a solução analítica. Para os pontos na interface entre os sólidos, o valor da difusividade térmica  $\alpha_{in}$  foi definido pela média harmônica expressa na Eq. 5.6. Além disso, foi adotada a estratégia serem definidos elementos de tamanhos menores próximos à interface, exemplificado na Figura 13.

$$\alpha_{in} = \frac{2\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \quad (5.6)$$

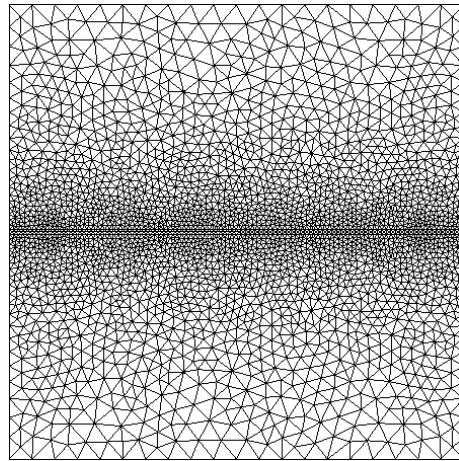


Figura 13: Malha gerada com 2944 nós e 6086 elementos, onde os elementos próximos à interface tem o tamanho menor

Na Figura 14 estão apresentados os resultados obtidos e o erro absoluto do método para uma simulação com  $\Delta t = 0.05$  and 400 iterações.

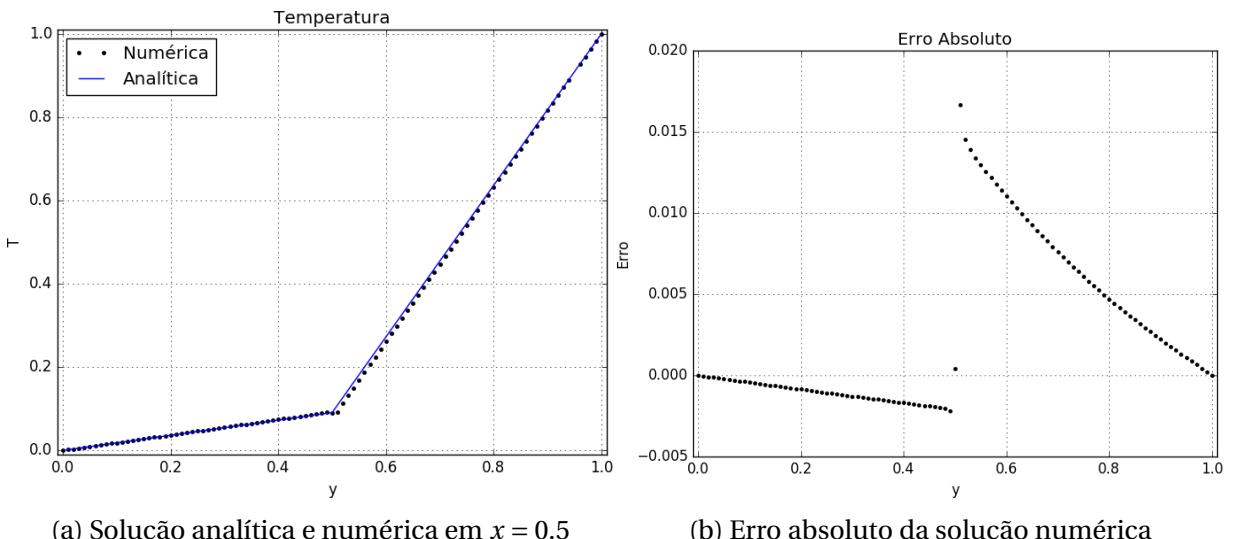


Figura 14: Resultados da simulação do problema de condução térmica proposto e comparação do valor obtido usando o algoritmo de MEF e a solução analítica

Assim como no caso da seção anterior, foi feita a mesma análise de convergência para 5 malhas com 436, 558, 812, 1435, 2944 pontos nodais e com comprimento característico sendo 0.073, 0.064, 0.053, 0.040, 0.028. Para esse problema, o método alcançou uma taxa de convergência linear, mostrada na Figura 15.

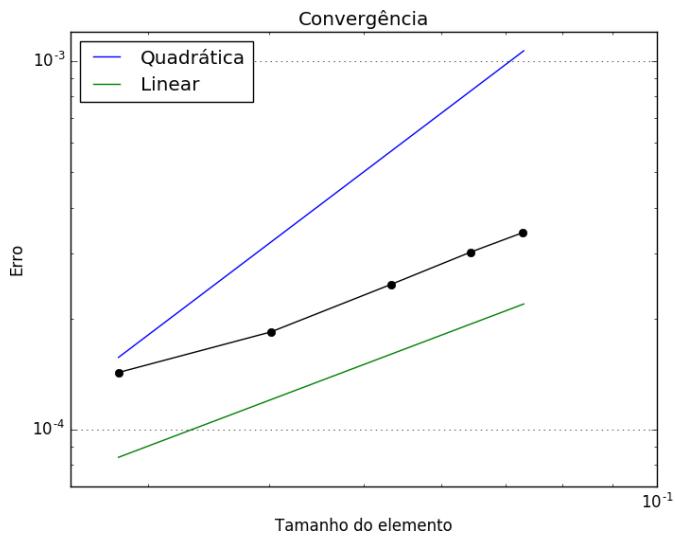


Figura 15: Convergência do método para a condução de calor entre dois sólidos com diferentes valores de difusividade térmica

### 5.1.3 Escoamento de Poiseuille entre Placas Aquecidas

O escoamento de Poiseuille é uma das soluções clássicas para as equações de Navier-Stokes com um fluido em movimento entre placas paralelas, esquematizado na Figura 16. As hipóteses principais dessa solução são:

- Condição de não escorregamento, ou seja, a velocidade do fluido nas paredes é igual a zero;
- Escoamento completamente desenvolvido, logo não há variação de velocidade em relação a direção x.

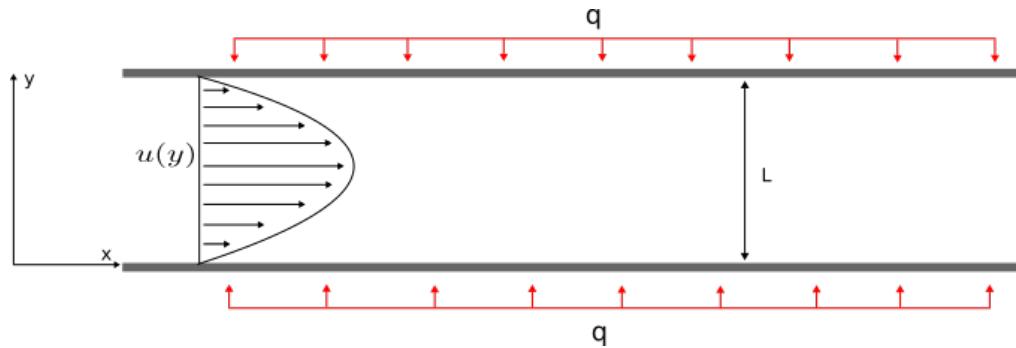


Figura 16: Representação do escoamento de Poiseuille com o perfil teórico de velocidade.

Na Figura 16 também estão representadas as condições de entrada da velocidade e o fluxo de calor que as placas transmitem ao escoamento. Para a região completamente desenvolvida, esse problema tem solução analítica como demonstrado por *Pontes e Mangiavacchi (2016)* [19] e a equação que descreve a distribuição de temperatura para  $\alpha = 1$  é:

$$T = \frac{-15}{48}q + \frac{2}{Re(-\partial P/\partial x)}qx + 3q\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{3}\right) \quad (5.7)$$

A solução analítica para a componente  $u$  da velocidade com a distância entre as placas  $L = 1$  é a parábola:

$$u = 6y(1 - y) \quad (5.8)$$

As condições de contorno para a função de corrente foram  $\Psi = 0$  na placa inferior e  $\Psi = 1$  na superior. Foram assumidos os valores de  $Re = 10$ ,  $Pr = 1$ , e  $(-\partial P/\partial x) = 12$  para ser consistente com as condições do problema. Além disso, foram executadas 60 iterações com  $\Delta t = 0.1$ . A Figura 17 mostra o resultado numérico para o escoamento e para a temperatura.

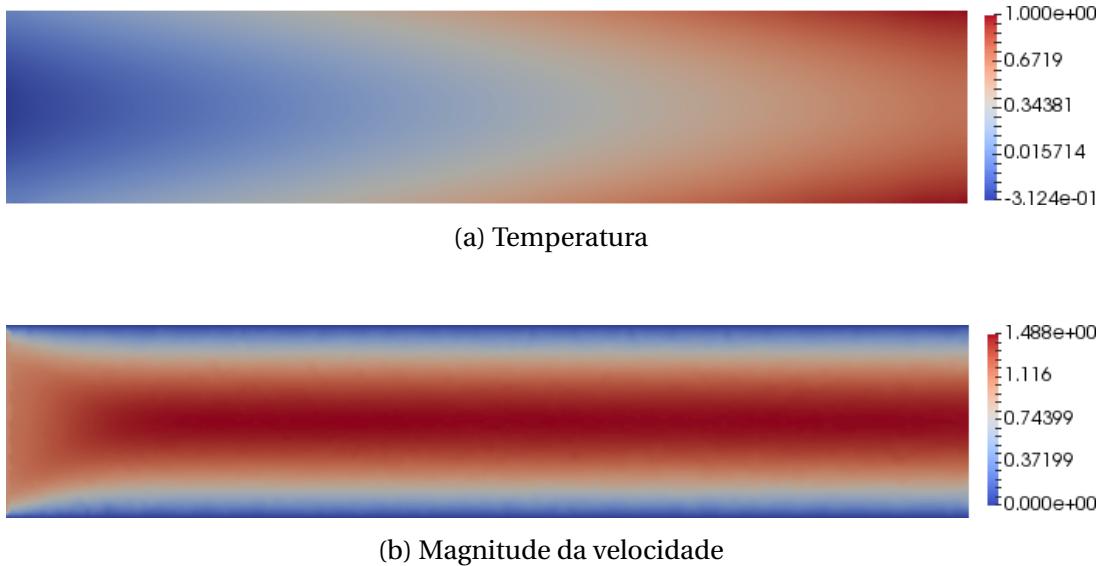
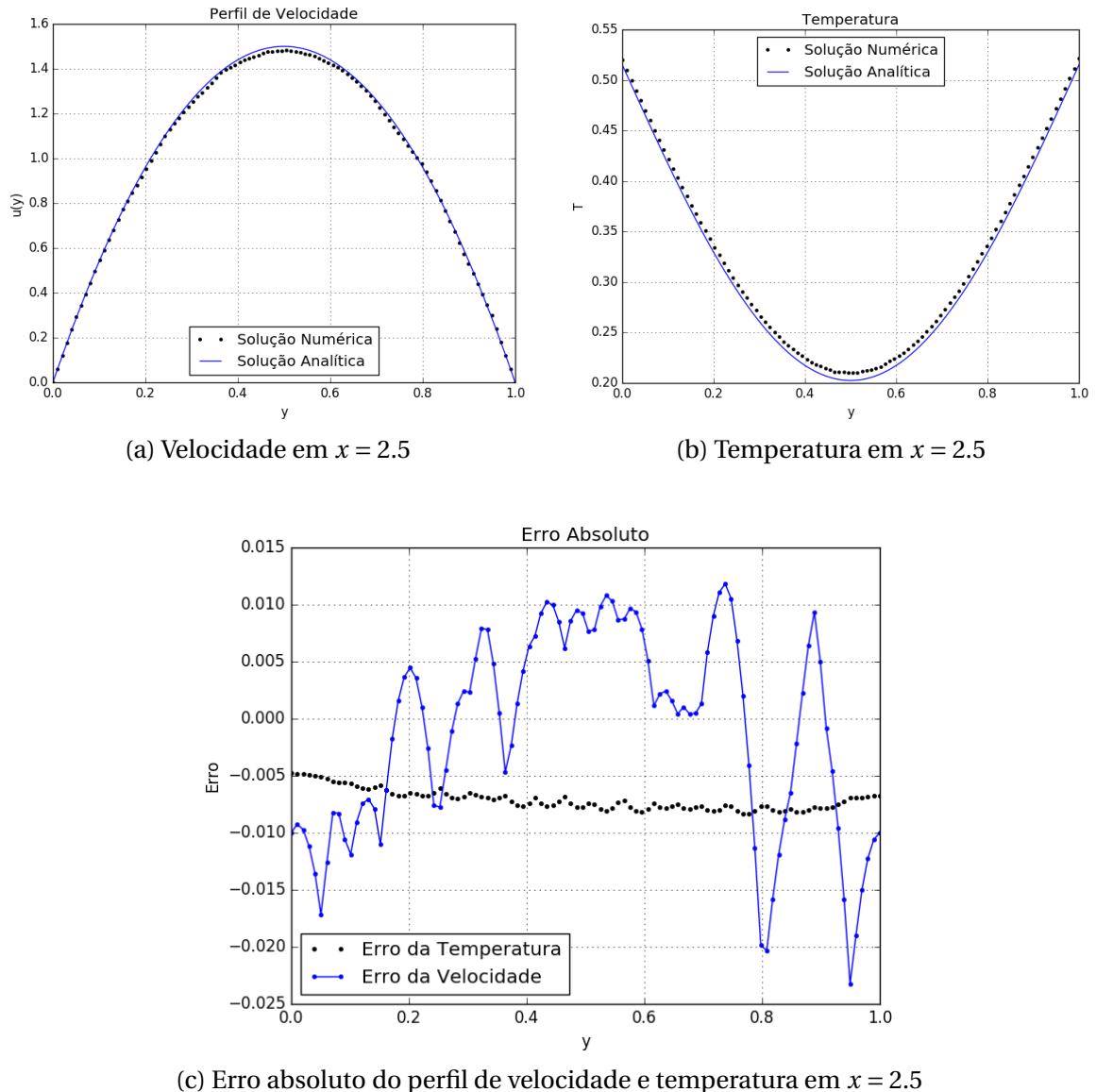


Figura 17: Solução numérica de velocidade e temperatura para o escoamento de Poiseuille entre placas aquecidas

Na Figura 18 é apresentada uma comparação entre a solução analítica e o resultado numérico, junto com seus respectivos erros, para a temperatura e para a velocidade. Essa comparação foi feita em  $x = 2.5$  onde o escoamento se encontra completamente desenvolvido para se evitar o efeito das condições de Dirichlet para temperatura na entrada e na saída.



## 5.2 Simulações

### 5.2.1 Trocador de Calor de Tipo Contracorrente

Um trocador de calor pode ser entendido como um problema de transferência de calor conjugada quando a espessura da parede sólida entre os fluidos é suficientemente grande a ponto de ser necessário estudar a distribuição de temperatura nessa região. A Figura 19 esquematiza um problema com um trocador de calor do tipo contracorrente e nela estão indicadas as entradas de fluido, com os parâmetros da simulação descritos na Tabela 1, e as condições de contorno da função de corrente. As fronteiras superior, inferior e laterais da região sólida foram consideradas isolantes, ou seja, fluxo de calor é nulo.

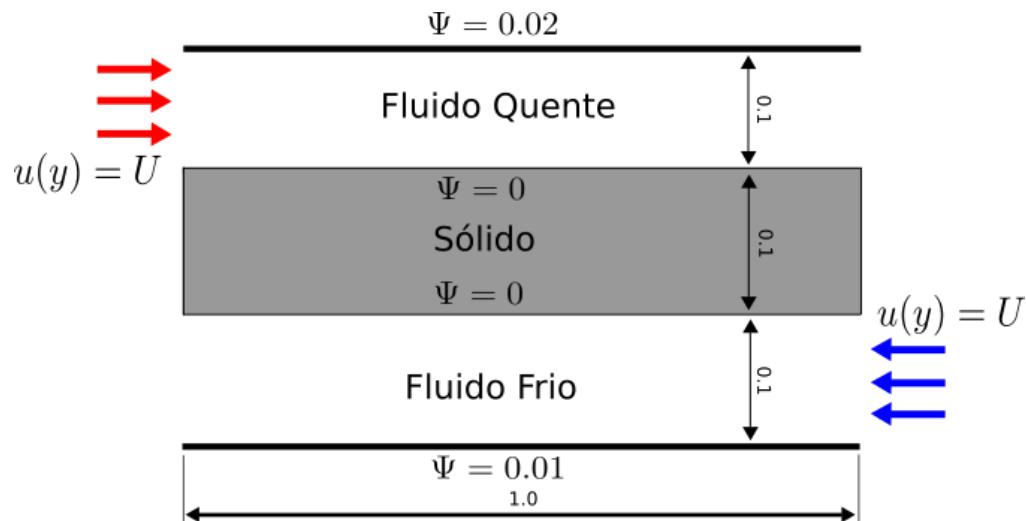


Figura 19: Esquema de um problema de trocador de calor com as condições utilizadas

Fluidos	T ( $^{\circ}\text{C}$ )	$\alpha (\frac{m^2}{s})$	$\nu (\frac{m^2}{s})$	$U (\frac{m}{s})$
Quente	800	0.0004	0.00015	0.2
Frio	300	0.0004	0.00015	0.1

Tabela 1: Propriedades e condições de entrada dos fluidos no trocador de calor

Os resultados apresentados foram obtidos com a malha apresentada na Figura 20 que contem 3154 nós e 6486 elementos dos quais 1944 nós e 3884 elementos encontram-se nas regiões de escoamento do fluido. A difusividade térmica o sólido foi 5 vezes maior que a dos

fluidos, ou seja,  $\alpha = 0.002$ . As soluções foram obtidas com 300 iterações usando o intervalo de tempo  $\Delta t = 0.5$ .

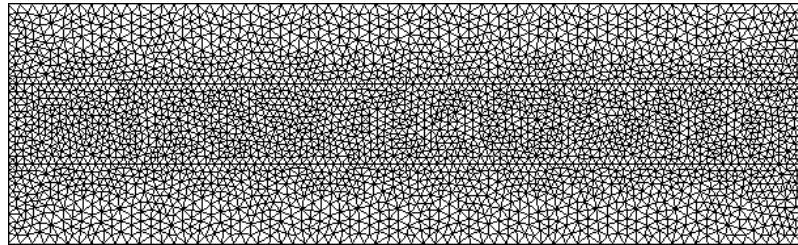


Figura 20: Malha gerada co o software Gmsh para a simulação do trocador de calor

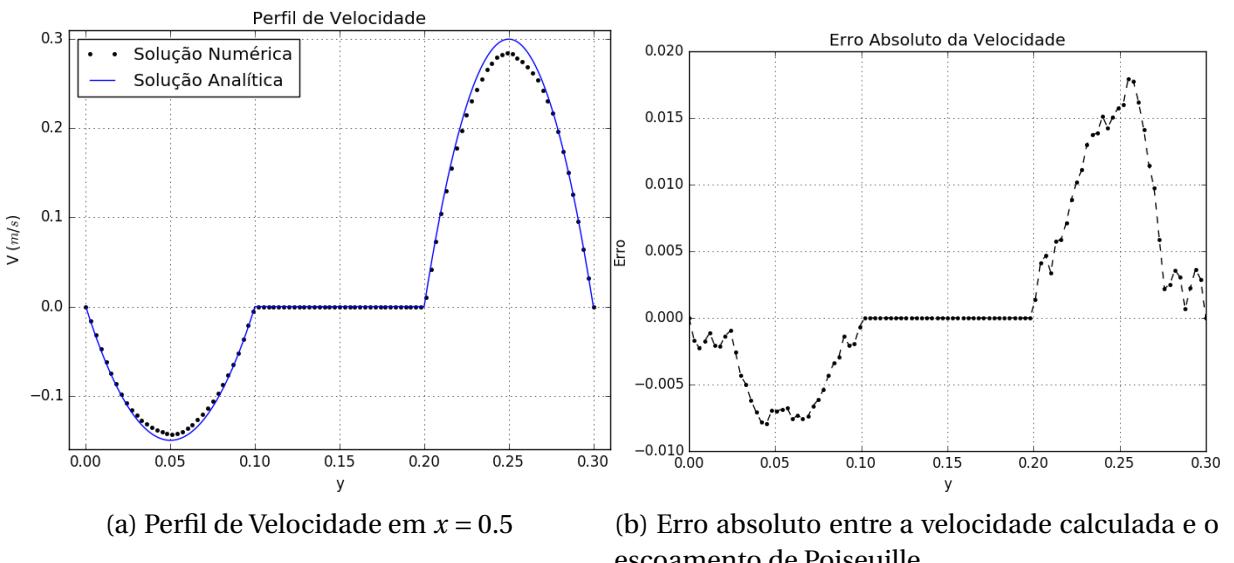


Figura 21: Solução numérica do campo de velocidade e comparação com a solução analítica do escoamento de Poiseuille para as mesmas condições impostas

A Figura 21 mostra o perfil de velocidade na seção  $x = 0.5$  onde o escoamento encontra-se completamente desenvolvido, como é possível de perceber na Figura 23 que apresenta as soluções completas obtidas. A região em que  $0 < y < 0.1$  representa o escoamento do fluido frio, e em  $0.2 < y < 0.3$  tem-se a passagem do fluido quente. Também é mostrada a comparação entre a velocidade calculada e o escoamento de Poiseuille para as mesmas condições propostas no problema.

Uma comparação entre a solução para a temperatura obtida e a encontrada na literatura é feita na Figura 22. Uma análise qualitativa mostra um resultado suficientemente satisfatório entre o método implementado e os trabalhos de *Wansophark et al (2005)* [5] e *Chen et al (2000)* [23].

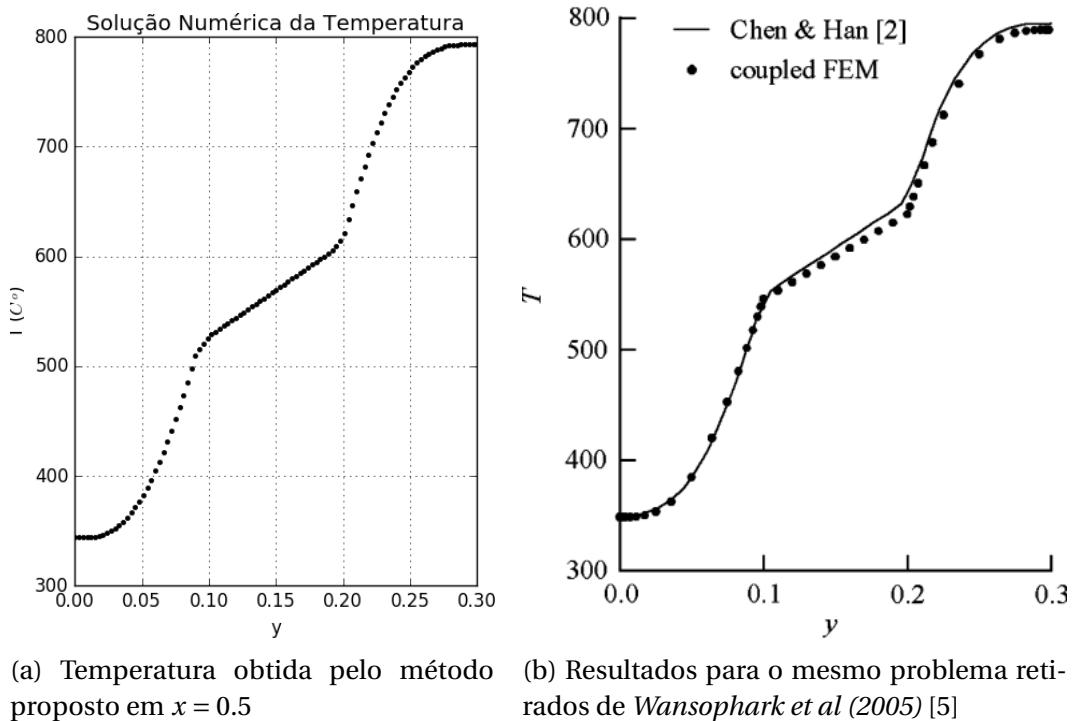


Figura 22: Solução numérica para o perfil de temperatura em um trocador de calor e comparação do método proposto nesse trabalho com resultados encontrados na literatura

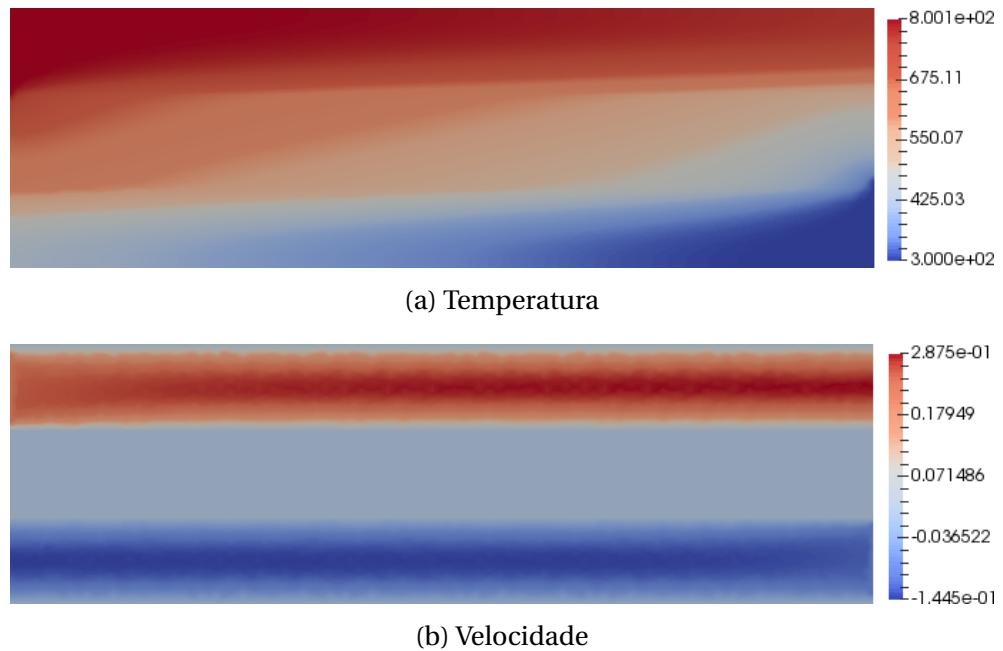


Figura 23: Soluções para a temperatura e velocidade para todo o domínio do problema de trocador de calor proposto

### 5.2.2 Canal com Perturbações entre Sólidos Diferentes

Esse problema foi proposto como uma primeira etapa para a solução do arrefecimento em componentes eletrônicos que usam micro canais com fluidos refrigerantes. O problema esquematizado na Figura 24 é composto por duas regiões sólidas e um canal com um lado irregular onde se passa um fluido refrigerante. A região inferior é mantida a temperatura de  $70^{\circ}C$  que é a temperatura de funcionamento de alguns modelos de processadores. A região superior é mantida a  $20^{\circ}C$  que representa a temperatura do ambiente externo e, com isso, é suposto que o sólido superior é suficientemente longo para que seu contorno esteja em equilíbrio com o ambiente. Nas paredes laterais de ambos sólidos foi considerada a condição natural (fluxo de calor nulo).

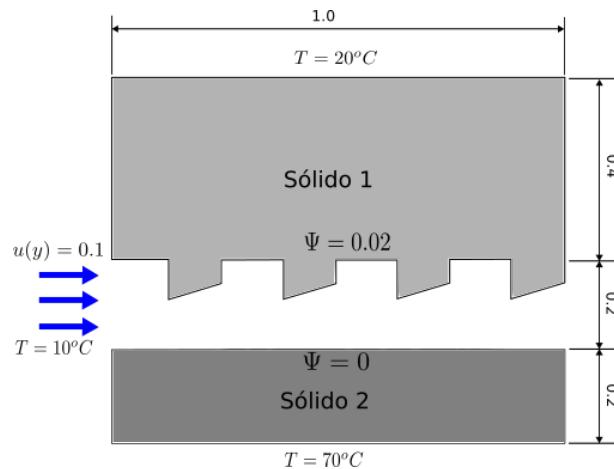


Figura 24: Representação de um problema de arrefecimento de componente eletrônico com um canal irregular para o escoamento de fluido refrigerante

O fluido refrigerante entra a uma velocidade  $u(y) = 0.1$  e a uma temperatura de  $10^{\circ}C$ . Esses valores foram arbitrariamente impostos pois o método não foi capaz de produzir bons resultados com parâmetros de sistemas de refrigeração mais realistas. Possíveis hipóteses sobre essa dificuldade estão detalhadas na conclusão deste trabalho. Outros valores que foram arbitrariamente impostos estão na Tabela 2.

Propriedades	Sólido 1	Sólido 2	Fluido
$\alpha$	1.2	1.0	0.001
$\nu$	-	-	0.00015

Tabela 2: Propriedades impostas na solução do problema proposto

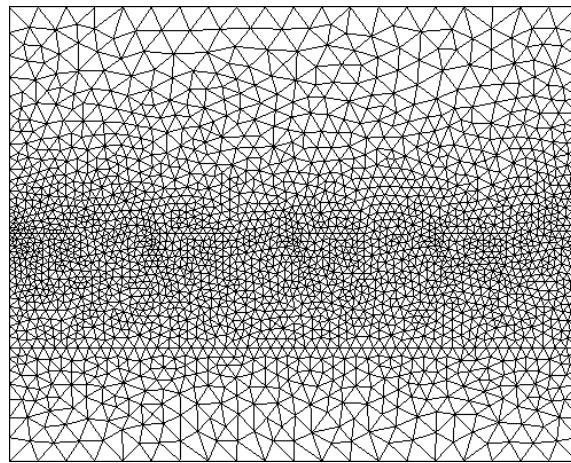
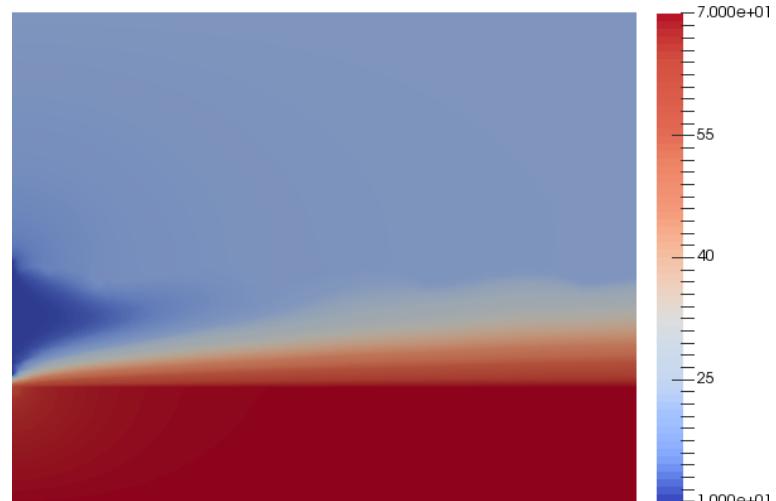
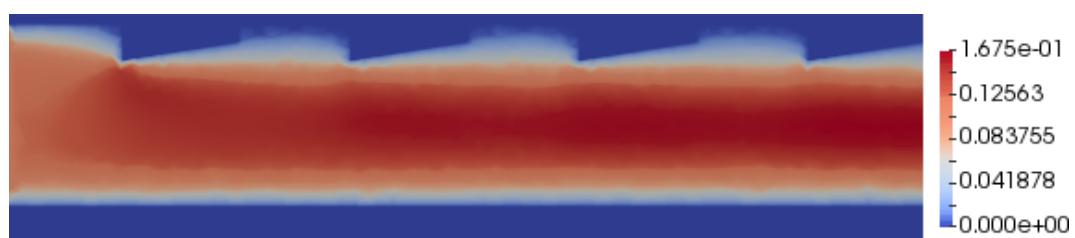


Figura 25: Malha gerada com elementos de tamanhos menores mais próximos ao canal de refrigeração

Os resultados da Figura 26 foram obtidos com a malha apresentada na Figura 25 que contém 2308 nós e 4756 elementos no total, sendo 1077 nós e 2152 elementos na região do escoamento. O código rodou 70 iterações com  $\Delta t = 0.5$ .



(a) Solução numérica da temperatura



(b) Velocidade calculada

Figura 26: Soluções numéricas para a velocidade e temperatura no problema de arrefecimento de componente eletrônico

## CONCLUSÃO

Neste trabalho foi demonstrada uma alternativa à solução das equações de Navier-Stokes com variáveis primitivas através da formulação corrente-vorticidade, que foi implementada em conjunto com a equação do transporte de temperatura para modelar problemas de transferência de calor conjugada. O Método de Elementos Finitos foi aplicado com a discretização espacial utilizando o esquema de Galerkin e a discretização temporal foi realizada por uma aproximação de primeira ordem em diferenças finitas.

Pelo fato de não haver o acoplamento do campo de velocidade e pressão na formulação corrente-vorticidade, o uso de elementos triangulares lineares foi possível, fazendo com que a metodologia e implementação do código numérico fosse simplificada. O código foi desenvolvido de modo a facilitar sua aplicação em diversos problemas que envolvam transferência de calor desde que seja possível utilizar esse tipo de malha.

As simulações apresentados mostram que o modelo e o método abordado foram capazes de descrever o escoamento e distribuição de temperatura com resultados satisfatórios quando comparados à solução analítica, como nos casos da equação de Laplace, no escoamento de Poiseuille entre placas aquecidas e na transferência de calor em um domínio heterogêneo. Também foi demonstrada a simulação de um trocador de calor que alcançou resultados semelhantes aos encontrados na trabalho de *Wansophark et al (2005)* [5] que foi uma das principais referências utilizadas neste trabalho.

Um problema de arrefecimento de componentes eletrônicos, que é a motivação inicial do trabalho, foi proposto e o método demonstrou ser possível simular tais sistemas. Entretanto os valores utilizados tiveram que ser escolhidos dentro de uma faixa específica pois para parâmetros mais próximos dos de um sistema real as simulações começaram a apresentar fortes oscilações numéricas que influenciavam fortemente no resultado obtido. Esse fenômeno observado ocorre devido ao fato de que, para os parâmetros testados, o número de Reynolds e Péclet era alto fazendo com que o termo convectivo da equações se tornasse dominante e portanto aparecendo as oscilações espúrias. Tais oscilações também estão presentes no método de diferenças finitas como apresentado por *Spalding (1972)* [24].

O objetivo desse trabalho foi desenvolver uma ferramenta numérica capaz de resolver problemas de transferência de calor conjugada. E em parte esse objetivo foi alcançado, com a ressalva de que os parâmetros do problema não resultem em números de Reynolds

e Péclet altos devido a abordagem utilizada para a discretização do termo convectivo nas equações de governo.

O modelo e o algoritmo encontram-se em constante desenvolvimento e o próximo passo a ser considerado na implementação é a discretização através do método Semi-Lagrangeano como o utilizado por *Anjos (2007)* [21]. Este é um método de discretização mais sofisticado, capaz de reduzir as oscilações espúrias presentes no método abordado, e fazendo com que um gamma maior de problemas possam ser estudados. Outro etapa possível para o avanço deste trabalho é modificar o modelo proposto de modo a faze-lo capaz de simular escoamentos bifásicos, presentes em alguns sistemas de arrefecimento.

## ANEXO

Durante o desenvolvimento deste trabalho de conclusão de curso, foram publicados três artigos em congressos, sendo eles:

- STREAM FUNCTION-VORTICITY FORMULATION AND HEAT TRANSPORT USING FEM FOR UNSTRUCTURED MESHES AND COMPLEX DOMAINS - II Congresso Brasileiro de Fluidodinâmica Computacional
- STREAM FUNCTION-VORTICITY FORMULATION APPLIED IN THE CONJUGATED HEAT PROBLEM USING THE FEM WITH UNSTRUCTURED MESH - 17th Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering (ENCIT 2018)
- FINITE ELEMENT ANALYSIS APPLIED TO THE COOLING OF ELECTRONIC COMPONENTS - X Congresso Nacional de Engenharia Mecânica (CONEM 2018)



# STREAM FUNCTION-VORTICITY FORMULATION AND HEAT TRANSPORT USING FEM FOR UNSTRUCTURED MESHES AND COMPLEX DOMAINS

L. H. CARNEVALE<sup>1</sup>, G. R. ANJOS<sup>2</sup>, N. MANGIAVACCHI<sup>3</sup>

Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia  
Email: <sup>1</sup>lh.carnevale@gmail.com, <sup>2</sup>gustavo.anjos@uerj.br, <sup>3</sup>norberto@uerj.br

**ABSTRACT** – The stream function-vorticity formulation is a useful alternative to solving the Navier-Stokes equations in two dimensional domain. One of its major difficulties is the lack of boundary conditions for vorticity, and several schemes are proposed to satisfy such a condition. In this paper we propose a finite element scheme for solving the couple problem of the stream function-vorticity formulation using linear triangle elements. A possible application of the method is also demonstrated using the calculated velocity field from the formulation in the heat transport equation to study the temperature distribution in a incompressible single-phase fluid medium. The results obtained were satisfactory when using low to moderate Reynolds number.

## 1. INTRODUCTION

In computational fluid dynamics (CFD), solving the incompressible Navier-Stokes equation is of utmost interest in various applications. The stream function-vorticity ( $\psi$ ,  $\omega_z$ ) formulation is a way to express the Navier-Stokes equation in terms of  $\psi$  and  $\omega_z$  instead of the primitives pressure and velocity (Peeters et al., 1987). The advantage of using the stream function-vorticity formulation is that the pressure does not appear in the equation and, thus, we do not need to solve the pressure-velocity problem, therefore the use of linear element is suitable. The formulation has been proved to be of great use when considering a two dimensional domain (Hoffmann e Chiang, 2000) and in this paper it is proposed an algorithm based on (Salih, 2013) to combine the ( $\psi$ ,  $\omega_z$ ) formulation results with the heat transport equation.

## 2. MATHEMATICAL MODEL

For a two dimensional analysis using FEM with unstructured meshes, the proposed method for solving the heat transport equation in a fluid system makes use of the stream function-vorticity formulation (Hoffmann e Chiang, 2000) to obtain a more precise description of the velocity field in a single-phase incompressible flow.

The equations used in this method are:

$$\omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \omega_z = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega_z \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \omega_z \quad (3)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = v_x, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -v_y \quad (4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \frac{1}{RePr} \nabla^2 T + Q \quad (5)$$

Where  $T$  is the scalar field of temperature, the Reynolds number is  $Re = \rho u D / \mu$  ( $\rho$  is the density,  $u$  is the reference velocity,  $\mu$ , is the viscosity and  $D$  is a characteristic linear dimension), the Prandtl number is  $Pr = \nu / \alpha$  ( $\nu$  is the kinematic viscosity and  $\alpha$  is the thermal diffusivity),  $\omega_z$  is the vorticity field,  $x$  and  $y$  are the independent spatial variables,  $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$  is the velocity field,  $\psi$  is the stream function,  $Q$  is the generation of heat, and  $t$  is the time variable.

The algorithm developed to solve the stream function-vorticity problem was based on the algorithm proposed on (Salih, 2013). At first an initial  $\mathbf{v}$  field is initialized, respecting the boundary conditions for velocity, and the initial  $\omega_z$  is calculated with equation (1). After that, the initial  $\psi$  function is obtained by solving equation(3) with Dirichlet boundary conditions for  $\psi$ .

The next step is to obtain the boundary conditions for the vorticity that are needed to solve eqation (2). Various finite differences schemes can be derived for that, such as in (Peeters et al., 1987), however this schemes need a structured mesh to be implemented. The proposed way to calculate the boundary conditions when using unstructured meshes is to calculate  $\omega_z$  with equation (1) in each time step as the velocity field changes.

With the initial values for  $\mathbf{v}$ ,  $\omega_z$  and  $\psi$  and the boundary conditions calculated, the vorticity transport equation (2) is solved for the next time step, than with the new  $\omega_z$  field, equation (3) is solved for the new  $\psi$  field. Afterwards the new velocity field is obtained by equations in (4). This repeats over a defined number of steps.

In the equations (1) and (4) we use the Lumped Mass matrix to reduce the computational cost of inverting the original Mass matrix ( $\mathbf{M}$ ). The Lumped matrix is constructed adding all the elements for each line of  $\mathbf{M}$  and placing the results in the main diagonal and its use is valid when the original matrix elements have higher values when closer to its diagonal.

The FEM algorithm was developed for the use of linear triangular elements in the discretization of the spatial domain and for the time it was used a finite differences method with a forward difference approximation and an implicit approach. The linear systems of equations were solved by a direct solver. To build the geometric model and mesh of the different spatial domains an open source software called “GMSH” Geuzaine e Remacle (2009) was used.

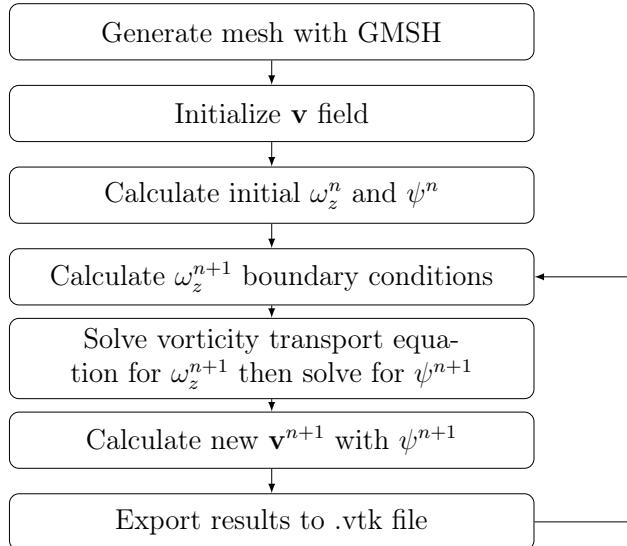


Figure 1 – Summarized algorithm flow chart

### 3. RESULTS

#### 3.1. Poiseuille Flow in Heated Plates

A validation for the temperature equation (5) was constructed based on the analytic solution shown in (Pontes e Mangiavacchi, 2010). After applying all the coefficient values, the temperature solution can be described by equation (6).

$$T = \frac{-15}{48}q + \frac{2}{Re(-\partial P/\partial x)}qx + 3q \left( \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{3} \right) \quad (6)$$

The top and bottom plates had a heat flux boundary condition of  $q = 1$  perpendicular to the boundary. For the stream function  $\psi = 0$  on the bottom plate and  $\psi = 1$  on the top plate,  $Re = 10$ ,  $Pr = 1$ , and  $(-\partial P/\partial x) = 12$ . The exact solution for temperature and numerical solutions are shown in Figure 2 and Figure 3 after 60 iterations with  $\Delta t = 0.1$ .

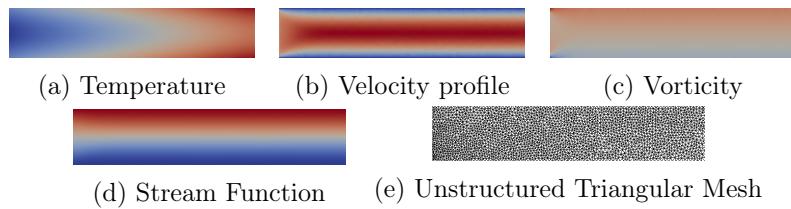


Figure 2 – Numerical solutions obtained by the stream function-vorticity FEM code

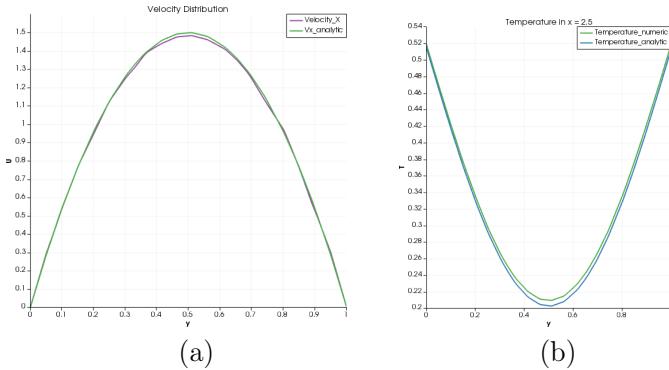


Figure 3 – Comparison of the numerical solution obtained with the stream function-vorticity finite element solver and the exact solution for (a) Velocity comparison; (b) Temperature comparison

### 3.2. Heat Transport Between Non-Smooth Plates

The results presented in figure Figure 4 are for a similar case as the above, however now the heat flux  $q = 1$  is only defined on the rectangular shapes along the top and bottom boundaries with the intent to observe how a perturbation on the boundary would affect the solution. Each rectangle has a 0.1 height and 0.5 width. The other boundary conditions and simulation parameters were set as the same for the plane Poiseuille case.

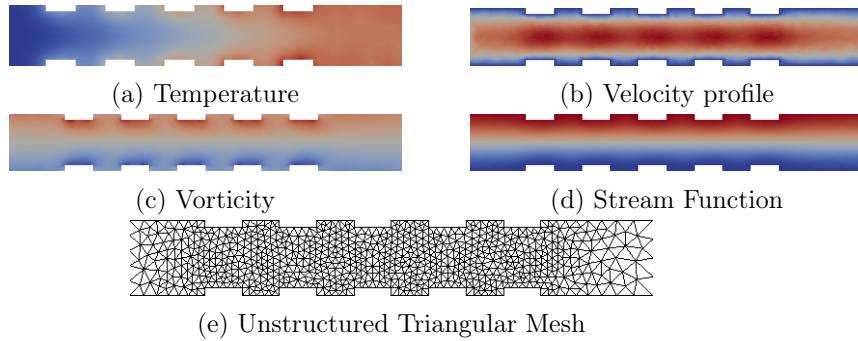


Figure 4 – Numerical solutions obtained by the stream function-vorticity FEM code for the complex geometry proposed

## 4. CONCLUSION

The proposed method for solving the stream function-vorticity system using the FEM on two dimensional unstructured meshes has shown good results when compared with the literature on the case of low Reynolds. Moreover, it has also been demonstrated its application alongside the temperature distribution equation. The algorithm is in continuous development to accommodate higher  $Re$  values, thus simulating more challenging problems.



## REFERENCES

- GEUZAIN, C.; REMACLE, J.-F. Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2009.
- HOFFMANN, K. A.; CHIANG, S. T. *Computational Fluid Dynamics*, volume 1. Engineering Education Systems, fourth edição, 2000.
- PEETERS, M. F.; HABASHIT, W. G. .; DUECK, E. G. . Finite element stream function-vorticity solutions of the incompressible navier-stokes equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1987.
- PONTES, J.; MANGIAVACCHI, N. *Fenômenos de Transferência*, volume 1. 1 edição, 2010.
- SALIH, A. Streamfunction-vorticity formulation. Indian Institute of Space Science and Technology, Department of Aerospace Engineering, 2013.

## STREAM FUNCTION-VORTICITY FORMULATION APPLIED IN THE CONJUGATED HEAT PROBLEM USING THE FEM WITH UNSTRUCTURED MESH

L. H. CARNEVALE, lh.carnevale@gmail.com

G. R. ANJOS, gustavo.anjos@uerj.br

N. MANGIAVACCHI, norberto@uerj.br

Group of Environmental Studies for Water Reservoirs - GESAR, State University or Rio de Janeiro - UERJ, Rua Fonseca Teles, 121, 20940- 903, São Cristóvão, Rio de Janeiro, RJ, Brazil

**Abstract.** Conjugated heat transfer problems have an extensive number of applications because a lot of times it is necessary to understand how heat convection in a fluid influences the temperature in solid regions. The stream function-vorticity formulation is a useful alternative to solving the Navier-Stokes equations in two dimensional domain. One of its major difficulties is the lack of boundary conditions for vorticity, and several schemes are proposed to satisfy such a condition. In this paper we propose a finite element scheme for solving the couple problem of the stream function-vorticity formulation using linear triangle elements. A possible application of the method is also demonstrated using the calculated velocity field from the formulation in the heat transport equation to study the temperature distribution in a incompressible single-phase fluid medium as a conjugate heat transfer problem. The results obtained were satisfactory when using low Reynolds number.

**Keywords:** Finite Element Method, Conjugated Heat Transfer, Stream Function-Vorticity, Unstructured Mesh

### 1. INTRODUCTION

There are many practical applications for problems where heat conduction in a solid region is directly influenced by heat convection in a region with a moving fluid, those applications are called conjugated heat transfer problems. Being able to successfully model and simulate problems with such characteristics has an important role in understanding the mechanics of how the flow of a fluid can influence heat distribution during different types of processes and those results can be used in optimizing practical systems, an example of application is in the study of heat exchangers (Song and Li, 2002). Wansophark *et al.* (2005) says that most researchers in the field use the finite difference and finite volume methods for their numerical analysis, however some assumptions on heat transfer coefficients have to be made in order to compute the temperatures along the fluid-solid interface.

In computational fluid dynamics (CFD), solving the incompressible Navier-Stokes equation is of utmost interest in various applications. The stream function-vorticity ( $\psi, \omega_z$ ) formulation is a way to express the Navier-Stokes equation in terms of  $\psi$  and  $\omega_z$  instead of the primitives pressure and velocity (Peeters *et al.*, 1987). The advantage of using the stream function-vorticity formulation is that the pressure does not appear in the equation and, thus, we do not need to solve the pressure-velocity problem, therefore the use of linear element is suitable. The formulation has been proved to be of great use when considering a two dimensional domain (Hoffmann and Chiang, 2000).

Cesini *et al.* (1998) is an example of the finite element method applied to the stream function-vorticity formulation used in a conjugate heat problem modeling natural convection. Traditional finite-element analyses are based on finite-difference formulas for computing vorticity at walls which limits their use to regular domains as is shown in M. Vynnycky *et al.* (1998).

In this paper we propose an algorithm based on (Salih, 2013) to combine the  $(\psi, \omega_z)$  formulation results with the heat transport equation using a finite element formulation to solve both equations in the conjugate heat problem. The FEM is implemented by discretizing the governing equations using the Galerkin method with linear triangular elements in an unstructured mesh. We present a heat transfer validation in a two dimensional problem with variable spatial diffusivity in different solid materials along with a convergence study. It is also presented a counter flow heat exchanger simulation with temperature and velocity profiles calculations for two different fluid regions and their solid interface. The presented results show good agreement with the available literature such as in Chen and Han (2000).

## 2. METHODOLOGY

### 2.1 Governing Equations

A two dimensional Finite Element Method approach can be employed to analyse different physical phenomena that appear in engineering problems. The analysis of a problem starts with the mathematical modeling, and in this paper we use the heat transport equation (see Eq. 5) over the domain  $\Omega$  and with a variable thermal diffusivity  $\alpha = k/\rho c_p$  ( $\rho$  is the density and  $c_p$  the specific heat) as a function of space. The proposed method for solving the heat transport equation in a fluid system makes use of the stream function-vorticity formulation (Hoffmann and Chiang, 2000) to obtain a more precise description of the velocity field in a single-phase incompressible flow.

The 2-dimensional set of equations for the fluid flow using the stream-functino vorticity used in dimensional form are presented below:

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \omega_z = \nu \nabla^2 \omega_z \quad (1)$$

$$\omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \omega_z \quad (3)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = v_x, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -v_y \quad (4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \alpha \nabla^2 T \quad (5)$$

Where  $T$  is the scalar field of temperature,  $\nu$  is the kinematic viscosity,  $\alpha$  is the thermal diffusivity,  $\omega_z$  is the vorticity field,  $x$  and  $y$  are the independent spatial variables,  $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$  is the velocity field,  $\psi$  is the stream function, and  $t$  is the time variable.

### 2.2 FEM formulation

Equation 6 is a general transport equation of the variable  $\phi$ . Using the semi-discrete Galerkin method, first the equation is multiplied by a weight function  $w$  and integrated over the domain  $\Omega$ .

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \phi = \gamma \nabla^2 \phi \quad (6)$$

$$\int_{\Omega} w \frac{\partial \phi}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} w \mathbf{v} \cdot \nabla \phi d\Omega - \int_{\Omega} w \nabla \cdot (\gamma \nabla \phi) d\Omega = 0 \quad (7)$$

Using the Green theorem on the diffusive term, Eq. 7 becomes:

$$\int_{\Omega} w \frac{\partial \phi}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} w \mathbf{v} \cdot \nabla \phi d\Omega + \int_{\Omega} (\nabla w) \cdot (\gamma \nabla \phi) d\Omega - \int_{\Gamma} w [(\gamma \nabla \phi) \cdot \mathbf{n}] d\Gamma = 0 \quad (8)$$

The integral evaluated over  $\Gamma$  represents the boundary conditions of the problem. Being  $ne$  the number of elements on the domain, the weight function and  $\phi$  are approximated by Eq. 9 making use of the called shape function  $\mathbf{N}(x, y)$ .

$$w \approx \sum_j^{ne} b_j(t) \mathbf{N}_j(x, y) \quad (9)$$

$$\phi \approx \sum_i^{ne} a_i(t) \mathbf{N}_i(x, y)$$

Writing Eq.8 with Eq. 9, and not writing the sum notation:

$$\int_{\Omega} b_j \mathbf{N}_j \frac{\partial a_i \mathbf{N}_i}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} b_j \mathbf{N}_j \mathbf{v} \cdot \nabla a_i \mathbf{N}_i d\Omega + \int_{\Omega} \nabla(b_j \mathbf{N}_j) \gamma \nabla(a_i \mathbf{N}_i) d\Omega = \int_{\Gamma} b_j \mathbf{N}_j [(\gamma \nabla a_i \mathbf{N}_i) \cdot \mathbf{n}] d\Gamma \quad (10)$$

Definig the mass matrix  $\mathbf{M}$ , the stiffness matrix  $\mathbf{K}$  as:

$$\int_{\Omega} \mathbf{N}_j \mathbf{N}_i d\Omega = \mathbf{M} \quad (11)$$

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{N}_j \gamma \nabla \mathbf{N}_i d\Omega = \mathbf{K} \quad (12)$$

and

$$\int_{\Omega} \mathbf{N}_j \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{N}_i d\Omega = \mathbf{v} \cdot \mathbf{G} = v_x \mathbf{G}_{\mathbf{x}} + v_y \mathbf{G}_{\mathbf{y}} \quad (13)$$

$$\int_{\Gamma} b_j \mathbf{N}_j [(\gamma \nabla a_i \mathbf{N}_i) \cdot \mathbf{n}] d\Gamma = \mathbf{f} \quad (14)$$

substituting Eqs.12, 11, 13 and 14 in Eq. 10:

$$\mathbf{M} \frac{\partial a}{\partial t} + (\gamma \mathbf{K} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{G}) a = \mathbf{f} \quad (15)$$

A first-order implicit forward difference approximation was used to discretize the time derivative in Eq. 15, thus the final matricial equation is obtained and presented in Eq. 16.

$$\left( \frac{\mathbf{M}}{\Delta t} + \gamma \mathbf{K} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{G} \right) a^{n+1} = \left( \frac{\mathbf{M}}{\Delta t} \right) a^n + \mathbf{f} \quad (16)$$

The same approach was used with Eqs. 5, 1 , 3, 4 and 2. Their matricial form is respectively 17, 18 , 19, 20 and 21.

$$\left( \frac{\mathbf{M}}{\Delta t} + \alpha \mathbf{K} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{G} \right) T^{n+1} = \left( \frac{\mathbf{M}}{\Delta t} \right) T^n + \mathbf{f} \quad (17)$$

$$\left( \frac{\mathbf{M}}{\Delta t} + \nu \mathbf{K} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{G} \right) w_z^{n+1} = \left( \frac{\mathbf{M}}{\Delta t} \right) w_z^n + \mathbf{f} \quad (18)$$

$$\mathbf{K} \psi = \mathbf{M} \omega_z + \mathbf{f} \quad (19)$$

$$v_x = \mathbf{G}_{\mathbf{y}} \psi , \quad v_y = -\mathbf{G}_{\mathbf{x}} \psi \quad (20)$$

$$\omega_z = \mathbf{G}_{\mathbf{x}} v_y - \mathbf{G}_{\mathbf{y}} v_x \quad (21)$$

### 2.3 Element Geometry

The algorithm was developed for the use of linear triangular elements in the discretization of the spatial domain and to build the geometric model and mesh of the different spatial domains an open source software called "GMSH" Geuzaine and Remacle (2009) was used. The advantage of using such elements is that the shape function  $\mathbf{N}(x, y)$  have a well known form (Eq. 22) as shown in Lewis *et al.* (2004).

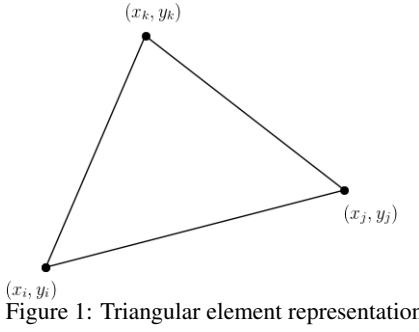


Figure 1: Triangular element representation

$$\begin{aligned}
 \mathbf{N}(x, y) &= [N_i \ N_j \ N_k] \\
 N_i &= \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y) \\
 N_j &= \frac{1}{2A} (a_j + b_j x + c_j y) \\
 N_k &= \frac{1}{2A} (a_k + b_k x + c_k y)
 \end{aligned} \tag{22}$$

Figure 1 shows a representation of the linear triangular element. With the  $(x, y)$  coordinates of each node  $(i, j, k)$ , the coefficients in Eq. 22 are calculated as indicated in Eq. 23, along with the element area that is  $A = a_i + a_j + a_k$ .

$$\begin{aligned}
 a_i &= x_j y_k - x_k y_j; \quad b_i = y_j - y_k; \quad c_i = x_k - x_j \\
 a_j &= x_k y_i - x_i y_k; \quad b_j = y_k - y_i; \quad c_j = x_i - x_k \\
 a_k &= x_i y_j - x_j y_i; \quad b_k = y_i - y_j; \quad c_k = x_j - x_i
 \end{aligned} \tag{23}$$

Using the coefficients in Eq. 23 the element matrices implemented are Eqs. 24, 25. After computing these element matrices, the values are added to their respective global matrix that is used to solve the model equations.

$$\mathbf{k} = \frac{1}{4A} \begin{bmatrix} b_i^2 + c_i^2 & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ b_i b_j + c_i c_j & b_j^2 + c_j^2 & b_k b_j + c_k c_j \\ b_i b_k + c_i c_k & b_k b_j + c_k c_j & b_k^2 + c_k^2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{g}_x = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ b_i & b_j & b_k \\ b_i & b_j & b_k \end{bmatrix} \tag{24}$$

$$\mathbf{m} = \frac{A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{g}_y = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} c_i & c_j & c_k \\ c_i & c_j & c_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} \tag{25}$$

## 2.4 Algorithm

The method for solving the stream function-vorticity problem was based on the algorithm proposed on (Salih, 2013). At first an initial  $\mathbf{v}$  field is initialized, respecting the boundary conditions for velocity, and the initial  $\omega_z$  is calculated with Eq. 21. After that, the initial  $\psi$  function is obtained by solving Eq. 19 with a constant value Dirichlet condition on each wall boundary for  $\psi$ . This  $\psi$  boundary condition indicates the flow rate between the walls where it is defined.

The next is to solve Eq. 18 and for that we need its boundary conditions. As previous mentioned various finite differences schemes can be used for calculating it, however these schemes need a regular domain. The proposed way to calculate the vorticity values when using unstructured meshes is to calculate  $\omega_z$  with Eq. 21 in each time step as the velocity field changes.

With the initial values for  $\mathbf{v}$ ,  $\omega_z$  and  $\psi$  and the boundary conditions calculated, the vorticity in Eq. 18 is solved for the next time step, than with the new  $\omega_z$  field, Eq. 19 is solved for the new  $\psi$  field. Afterwards the new velocity field in the fluid region is obtained by Eq. 20. With the velocity values computed we impose  $\mathbf{v} = 0$  in the solid region elements and solve Eq. 17.

This process repeats until the change in the velocity components values reach a desired precision and after that only the heat transport needs to be solved as  $\mathbf{v}$  is kept constant. And the algorithm stops when the same precision is reached for the temperature values.

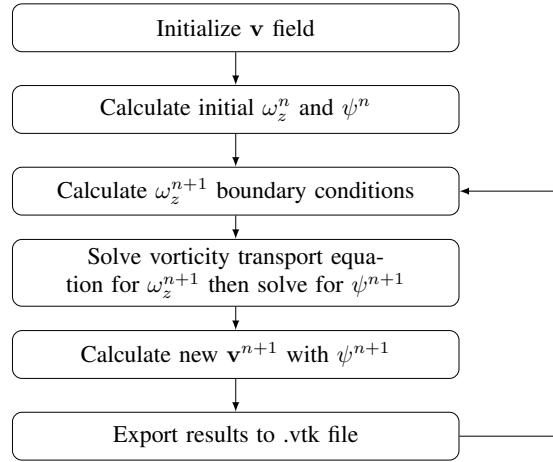


Figure 2: Summarized algorithm flow chart for solving the stream function-vorticity problem

### 3. RESULTS

#### 3.1 Validation With Different Solid Regions

This is a validation for the heat equation solution in a  $1 \times 1$  square domain divided in two different solid regions on  $y = 0.5$ . The problem conditions and mesh (with 2944 nodes and 6086 elements) are presented in Fig. 3. For this case it is possible to obtain an analytical solution  $T = T(y)$  as in Eq. 26. The thermal diffusivity of the solid 1 and 2 regions was set as  $\alpha = 0.1$  and  $\alpha = 1$  respectively, and on their interface nodes the harmonic mean  $\alpha_{in}$  of those coefficients was assumed (Eq. 27). The numeric results using  $\Delta t = 0.05$  and 400 time steps is presented in Fig. 4 along with its comparison against the analytical solution of the problem.

$$T(y) = \begin{cases} \frac{2}{11}y, & 0 \leq y \leq 0.5 \\ \frac{20}{11}y - \frac{9}{11}, & 0.5 < y \leq 1 \end{cases} \quad (26)$$

$$\alpha_{in} = \frac{2\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \quad (27)$$

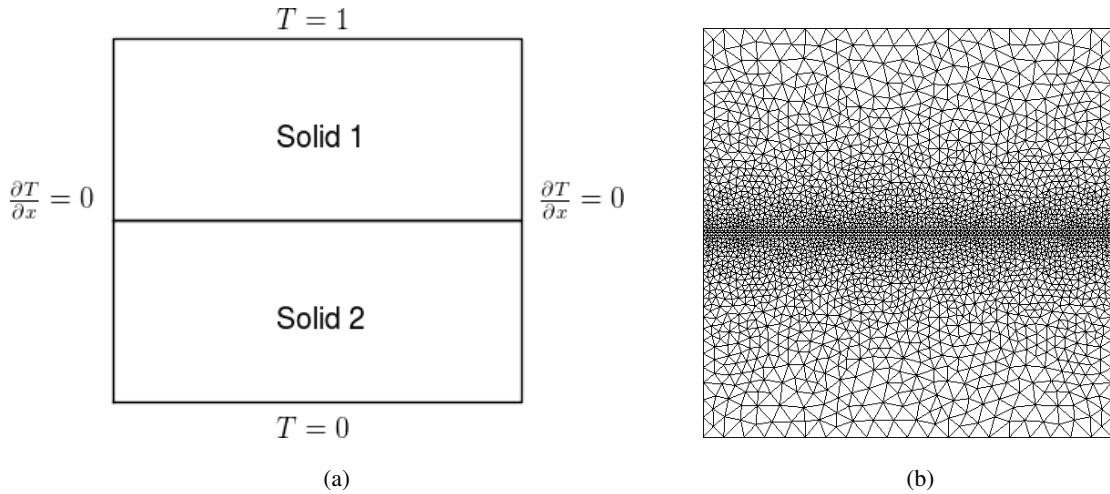


Figure 3: (a) Problem representation and boundary conditions; (b) Mesh with 2944 node and 6086 elements of different sizes closer to the interface generated with Gmsh

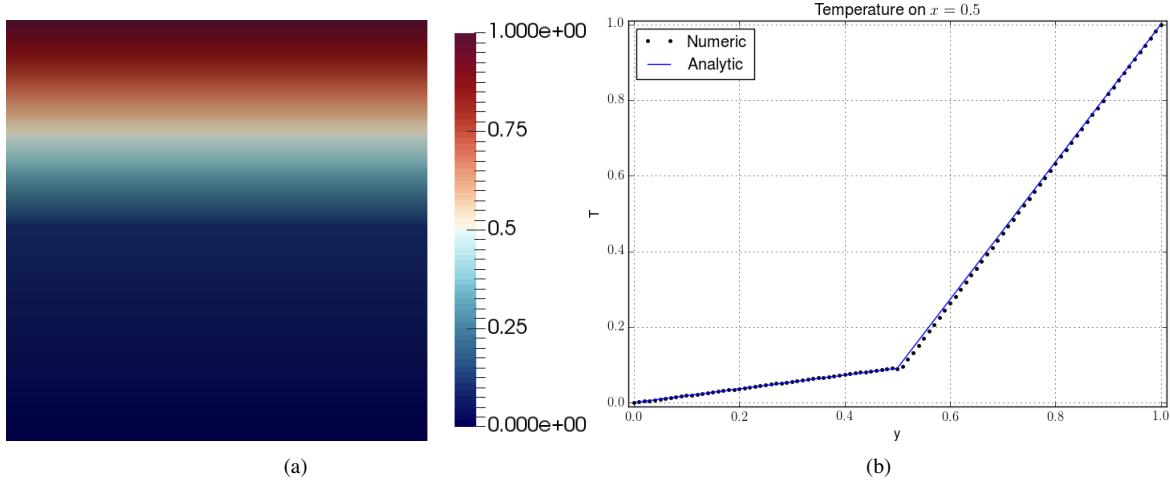


Figure 4: (a) Numerical temperature distribution; (b) Comparison between analytical and numerical solution on a mesh with 2944 nodes and 6086 elements

A convergence analysis using the  $L^2$  norm and five meshes with 436, 558, 812, 1435, 2944 nodes is shown in Fig. 5. From this graphic, it is possible to notice the numerical method is closer to a linear convergence rate. Being  $\bar{u}_i$  the analytic solution and  $u_i$  the numeric solution at node  $i$ , the error is defined in Eq. 28 and the characteristic element length  $l$  was defined as the average  $l$  between th elements.

$$Error = \sqrt{\sum_i^{nodes} (\bar{u}_i - u_i)^2} \quad (28)$$

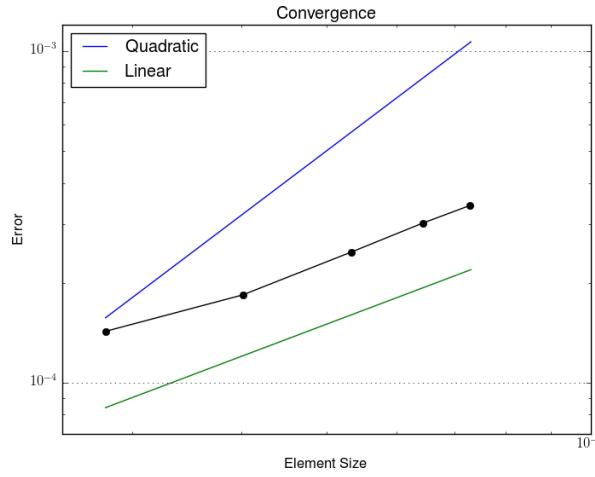


Figure 5: Convergence of the algorithm using  $L^2$  norm, the characteristic length of the elements ( $l$ ) were approximately 0.073, 0.064, 0.053, 0.040, 0.028

### 3.2 Heat Exchanger

The heat exchanger is an example of conjugate heat problem, where it is desired to know the temperature distribution in a fluid and a solid region. For this simulation a counter flow heat exchanger with the channels opening and the solid thickness having each a height of 0.1 and length equal to 1. The problem conditions and parameters are presented in Fig. 6 and Tab. 1. The top and bottom boundaries were considered isolated (no heat flux) as well as both sides of the solid region. The  $(\psi, \omega)$  equations were solved only on the regions where the fluids would flow and the results were used, with setting  $\mathbf{v} = 0$  on the solid region, to solve the heat equation in all the domain.

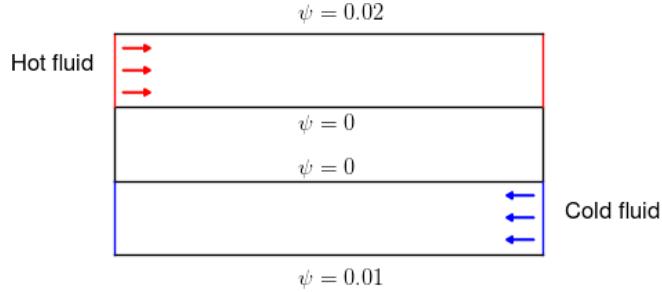


Figure 6: Heat Exchanger problem

Fluids	T ( $^{\circ}\text{C}$ )	$\alpha (\frac{\text{m}^2}{\text{s}})$	$\nu (\frac{\text{m}^2}{\text{s}})$	$U (\frac{\text{m}}{\text{s}})$
Hot	800	0.0004	0.00015	0.2
Cold	300	0.0004	0.00015	0.1

Table 1: Fluid properties

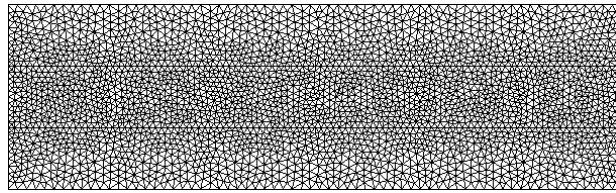
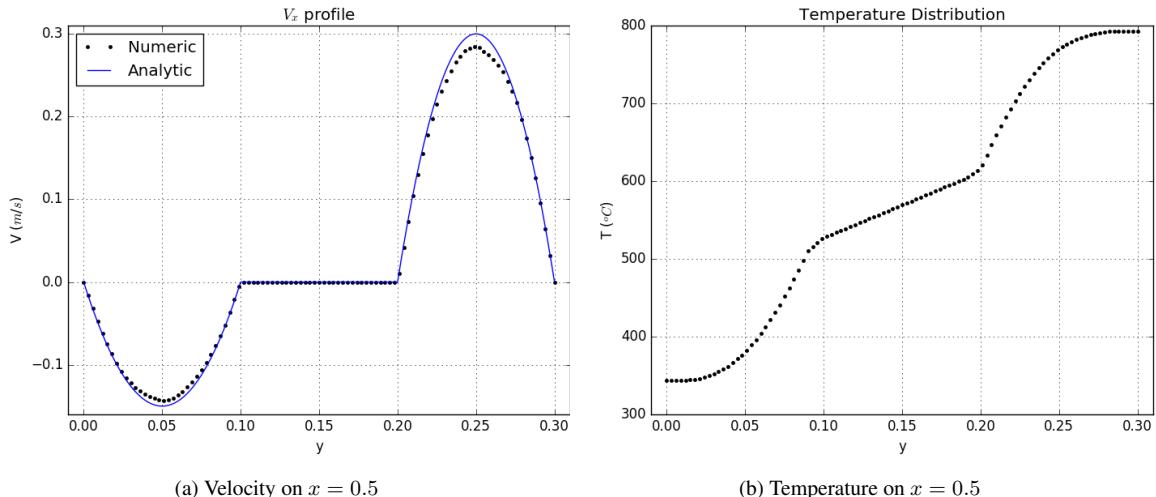


Figure 7: Mesh with 3154 nodes and 6486 elements generated with Gmsh (1944 nodes and 3884 elements on the fluid region)

The results presented in Fig. 9 and 8 were obtained with the mesh in Fig. 7 having 3154 nodes and 6486 elements, the solid region thermal diffusivity  $\alpha = 0.002$  and solving for 300 time steps with  $\Delta t = 0.5$ . It is shown in Fig. 9 (a) a comparison between the numeric velocity calculated and an analytical solution for a Poiseuille flow with the prescribed conditions. Good agreement was found between the current numerical simulation and the solution found in Wansophark *et al.* (2005) and Chen and Han (2000)



(a) Velocity on  $x = 0.5$

(b) Temperature on  $x = 0.5$

Figure 8: Solutions obtained using the  $(\psi, \omega)$  formulation along side the heat transport equation using the proposed FEM method for a heat exchanger simulation

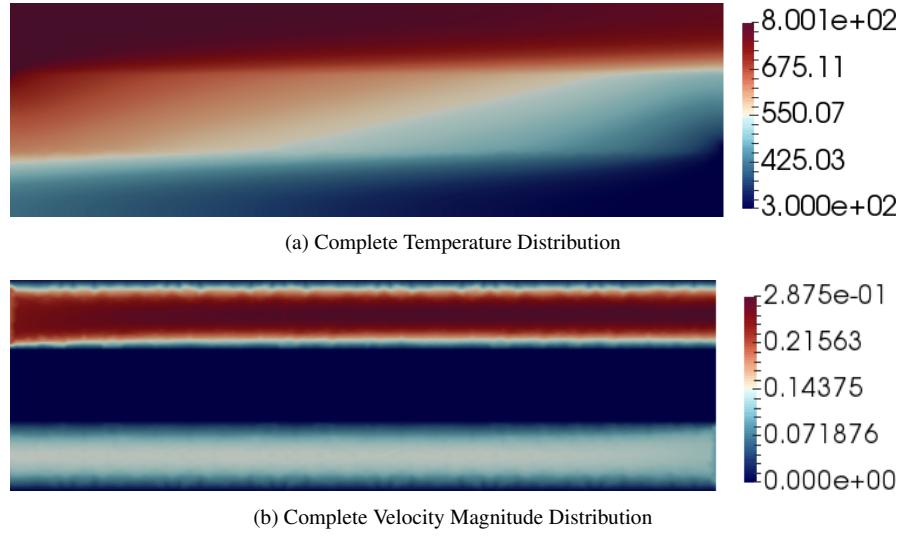


Figure 9: Complete solution of the heat exchanger simulation using the proposed model. The images were made with the open source software Paraview

### 3.3 Non Smooth Channel Between Different Solids

Here we have a simulation of the heat transfer between two solids that have a non smooth channel with a fluid of a lower temperature flowing between them. The problem geometry and boundary conditions are represented in Fig. 10 (a). The left and right walls of both solids were considered thermically isolated. The properties were arbitrarily defined and presented in Tab. 1.

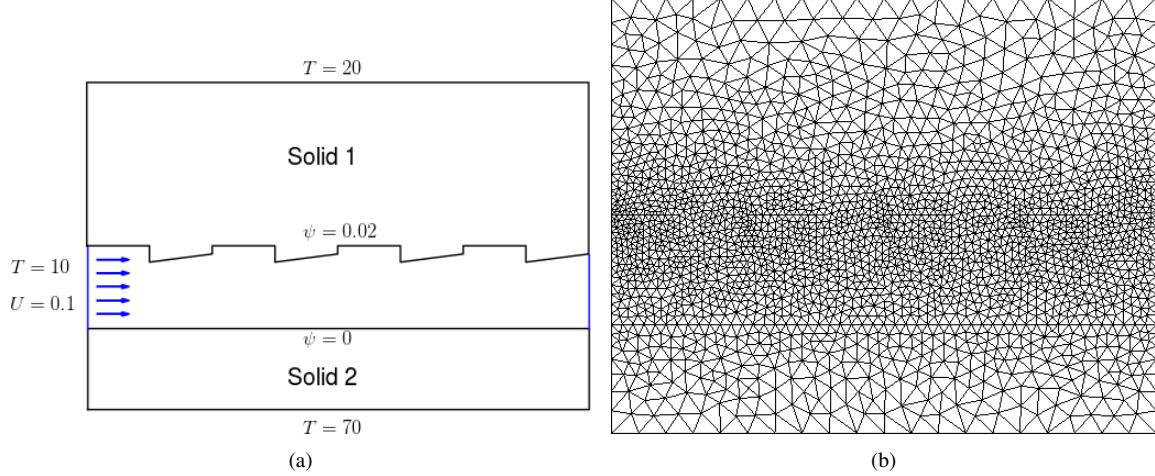
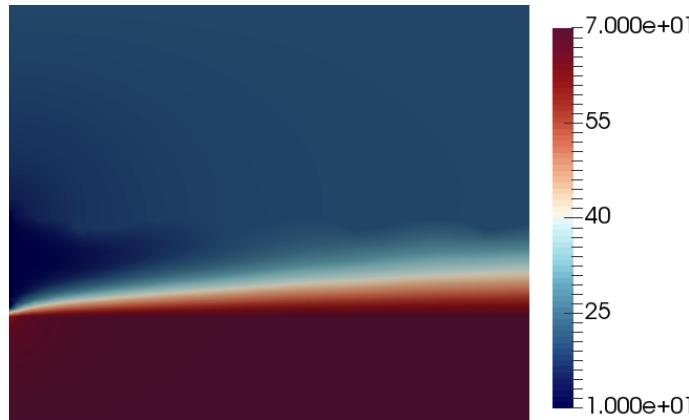


Figure 10: (a) Problem geometry and boundary conditions; (b) Mesh with different element sizes near the solid-fluid interfaces and in fluid region

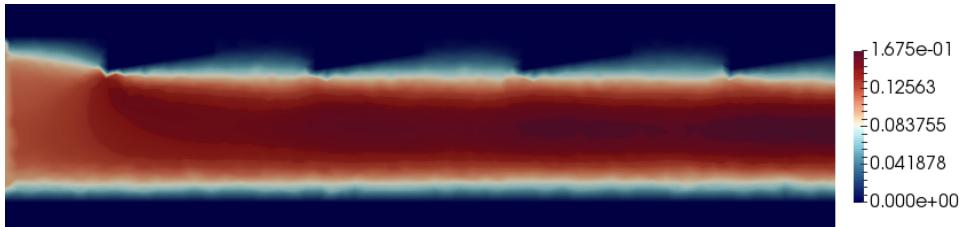
Properties	Solid 1	Solid 2	Fluid
$\alpha$	1.2	1.0	0.001
$\nu$	-	-	0.00015

Table 2: Defined thermal diffusivity values and fluid kinematic viscosity

The results presented in Fig. 11 were obtained with the mesh in Fig. 10(b) having 2308 nodes and 4756 elements in total (1077 nodes and 2152 elements in fluid region). As the heat exchanger case,  $\Delta t = 0.5$  and now the problem was solved in 70 time steps.



(a) Complete Temperature Distribution



(b) Velocity magnitude distribution on fluid region

Figure 11: Complete solution of the simulation using the proposed model. The images were made with the open source software Paraview

#### 4. CONCLUSION

In this paper we propose a method of numerically solving the conjugate heat problem using a finite elements algorithm. The Galerkin discretization method for solving stream function-vorticity formulation has good results only when the parameters of the problem are equivalent to low Reynolds numbers and a similar problem is observed when solving the heat equation, we are able to obtain good results only with low Peclet numbers, this happens due to instabilities that occur when the convective term of those equations starts to have more influence than the diffusive term.

The conjugate heat model proposed is still in development so that more details and a better range for Reynolds and Peclet numbers can be considered in the problem. A few possible ways to reduce the instabilities problem found is the use of different discretization schemes such as the Taylor-Galerkin method or a Semi-Lagrangian method. And with that being able to use the model in studying a wider range of applications that require higher Reynolds and Peclet numbers with a better efficiency.

#### 5. ACKNOWLEDGEMENTS

The authors thank the FAPERJ (Research Support Foundation of the State of Rio de Janeiro) for its financial support.

#### 6. REFERENCES

- Cesini, G., Paroncini, M., Cortella, G., and Manzan, M., 1998. "Natural convection from a horizontal cylinder in a rectangular cavity". *International Journal of Heat and Mass Transfer*.
- Chen, X. and Han, P., 2000. "A note on the solution of conjugate heat transfer problems using simple-like algorithms". *International Journal of Heat and Fluid Flow*.
- Geuzaine, C. and Remacle, J.F., 2009. "Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*.

- Hoffmann, K.A. and Chiang, S.T., 2000. *Computational Fluid Dynamics*, Vol. 1. Engineering Education Systems, 4th edition.
- Lewis, R.W., Nithiarasu, P. and Seetharamu, K.N., 2004. *Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Fluid Flow*. John Wiley & Sons Ltd.
- M.Vynnycky, S.Kimura, K.Kanev and I.Pop, 1998. "Forced convection heat transfer from a flat plate: the conjugate problem". *International Journal of Heat and Mass Transfer*.
- Peeters, M.F., Habashit, W.G.. and Dueck, E.G., 1987. "Finite element stream function-vorticity solutions of the incompressible navier-stokes equations". *International Journal for Numerical Methods in Fluids*.
- Salih, A., 2013. "Streamfunction-vorticity formulation". Indian Institute of Space Science and Technology, Department of Aerospace Engineering.
- Song, W. and Li, B., 2002. "Finite element solution of conjugate heat transfer problems with and without the use of gap elements". *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*.
- Wansophaek, N., Malatip, A. and Dechaumphai, P., 2005. "Streamline upwind finite element method for conjugate heat transfer problems". *Acta Mech Sinica*.

## 7. RESPONSIBILITY NOTICE

The authors are the only responsibles for the printed material included in this paper.



20 A 24 DE MAIO DE 2018 SALVADOR – BA – BRASIL

## Finite Element Analysis applied to the Cooling of Electronic Components

L. H. CARNEVALE, lh.carnevale@gmail.com

G. R. ANJOS, gustavo.anjos@uerj.br

N. MANGIAVACCHI, norberto@uerj.br

Group of Environmental Studies for Water Reservoirs - GESAR, State University of Rio de Janeiro - UERJ, Rua Fonseca Teles, 121, 20940-903, São Cristóvão, Rio de Janeiro, RJ, Brazil

**Abstract:** The numerical simulation is an important tool to solve problems found in several physical processes, such as oil drilling, reservoir filling, hemodynamics and cooling of electronic components, the latter of great importance for describing problems related to controlling flow and temperature conditions for new generation of stack processors. It is in this scope this project retains, for the development and improvement of a numerical platform using finite elements method simulation in order to study, in details, physical processes involved in cooling the electronic components, specifically the characterization of temperature distribution in flows within different geometry. With this project, the objective is to comprehend, in detail, the mechanisms of heat dissipation in modern electronic components. Furthermore, it is also desired to have a better understanding of which alternatives present the most efficient cooling.

**Keywords:** Finite Element Method, Complex Geometries, Cooling of Electronic Components

### 1. INTRODUCTION

Nowadays, most of the cooling devices found in personal computers or datacenters work with air or an hydraulic system. With the large increase in processing power and, therefore, performance enhancement of microprocessors, the temperature control of a computer chip became an extremely important and necessary task to ensure a precise and efficient operation, and moreover it improves the working life of those electronic components. Furthermore, the growing number of processors in each motherboard implicates in the assembly of multi-layer stacks of those components with internal refrigeration channels, as higher computational resources are required.

It is known that heat transfer is highly dependent on the nature of the flow contained in the observed system, and in this sense, Marcinichen and Thome (2010) and many other researchers have studied the multi-microchannel two-phase refrigerant evaporation for the simultaneous cooling of two or more stacked microprocessors. The usage of greenhouse refrigerant fluids that don't bring harm to the environment is an advantage to the method. The two-phase flow approach comes with greater difficulty in designing and modeling the cooling systems. On the other hand, as the flow uses the latent energy of the fluid substance to remove heat, it is observed a greater increase in the heat transfer coefficient that make the usage of microchannel evaporators a viable choice.

The Finite Element Method (FEM) formulation proposed uses the Galerkin method to discretize the spatial terms of the differential equation that model the heat transfer, together with a forward finite difference approximation to discretize the time derivatives (Lewis *et al.*, 2004). The resulting system of equations was solved using a direct method.

In this paper we numerically implement a similar experiment as the one made by Szczukiewicz (2012) using different cross section geometries in the ducts that stay between the layers of processors, and as a first approach, calculating only the temperature distribution in the evaporator solid region and using a convection heat flux condition on the ducts boundary. In spite of cutting edge experimental techniques available, the numerical analysis has become an useful tool to simulate the behavior of the fluid flow and the heat transfer that occur in the proposed system due to the fast growth of computational resources and its significant price reduction in comparison with experimental facilities.

### 2. MATHEMATICAL MODEL

#### 2.1 Equations

A two dimensional Finite Element Method approach can be employed to analyse different physical phenomena that appear in engineering problems. The analysis of a problem starts with the mathematical modeling, and in this paper we use the Heat Transport Equation 1 over the domain  $\Omega$  and with a variable thermal diffusivity  $\alpha = k/\rho c_p$  ( $\rho$  is the density and  $c_p$  the specific heat) as a function of space. The boundary can be separated in two regions  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , on  $\Gamma_1$  it is applied a convection heat flux ( $q_{conv}$ ) boundary condition and on  $\Gamma_2$  the heat flux  $\bar{q}$  is defined as the boundary condition.

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \nabla \cdot (\alpha \nabla T) + Q \quad (1)$$

$$q_{conv} = h(T - T_\infty) \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\Gamma_1} = \frac{-q_{conv}}{k} = \frac{-h}{k}(T - T_\infty) \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\Gamma_2} = \frac{-\bar{q}}{k} \quad (4)$$

Where  $T$  is the scalar field of temperature,  $\mathbf{v}$  is the velocity field,  $Q$  is the generation of heat,  $t$  is the time variable,  $h$  is the heat transfer coefficient,  $k$  is the thermal conductivity, and  $T_\infty$  is the temperature of the fluid promoting the convection heat flux. The terms  $\frac{\partial T}{\partial n}$  indicate differentiation on the direction normal to the boundary.

In this paper we are interested in observing the temperature distribution over a solid region and no heat generation is considered ( $\mathbf{v} = 0$  and  $Q = 0$ ), thus Eq. 1 is reduced to:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\alpha \nabla T) \quad (5)$$

For Eq.5 a non-dimensional form can be deduced as demonstrated in (HAHN and ÖZİŞIK, 2012, p. 25) using the non-dimensional variables:

$$T^* = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}, \quad t^* = \frac{\alpha t}{L^2}, \quad x^* = \frac{x}{L}, \quad y^* = \frac{y}{L}, \quad \alpha^* = \frac{\alpha}{\alpha_0}, \quad \rho^* = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad c_p^* = \frac{c_p}{c_{p0}} \quad (6)$$

Dropping the non-dimensional notation, Eq. 5 keeps the same form, however, it is important to notice that  $\alpha$  is kept in the equation as a value relative to a reference. The variables  $\rho_0$  and  $c_{p0}$  are reference values and  $T_0$  is a reference temperature. The convection heat flux condition (Eq. 3) becomes:

$$\alpha \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\Gamma_1} = \frac{-Bi}{\rho c_v} T \quad (7)$$

where  $Bi = \frac{hL}{k}$  is the Biot number ( $L$  is a characteristic length) and  $c_v = c_p$  for solid materials.

## 2.2 FEM Formulation

Using the semi-discrete Galerkin method Eq. 5 is multiplied by a weight function  $w$  and integrated over the domain  $\Omega$ .

$$\int_{\Omega} w \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega - \int_{\Omega} w \nabla \cdot (\alpha \nabla T) d\Omega = 0 \quad (8)$$

Using the Green theorem on the diffusive term, Eq. 8 becomes:

$$\int_{\Omega} w \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} (\nabla w) \cdot (\alpha \nabla T) d\Omega - \int_{\Gamma} w [(\alpha \nabla T) \cdot \mathbf{n}] d\Gamma = 0 \quad (9)$$

The integral evaluated over  $\Gamma$  represents the boundary conditions of the problem and the term  $(\alpha \nabla T) \cdot \mathbf{n}$ , when divided by  $\rho c_p$ , represents the heat flux  $q = q_{conv} + \bar{q}$  that passes through the boundary. Being  $ne$  the number of elements on the domain, the weight function and temperature are approximated by:

$$w \approx \sum_j^{ne} b_j(t) \mathbf{N}_j(x, y) \quad (10)$$

$$T \approx \sum_i^{ne} a_i(t) \mathbf{N}_i(x, y)$$

Writing Eq.9 with Eq. 10, and not writing the sum notation:

$$\int_{\Omega} b_j \mathbf{N}_j \frac{\partial a_i \mathbf{N}_i}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \nabla(b_j \mathbf{N}_j) \alpha \nabla(a_i \mathbf{N}_i) d\Omega = - \int_{\Gamma} b_j \mathbf{N}_j \frac{q}{\rho c_p} d\Gamma \quad (11)$$

The integral over  $\Gamma$  can be separated in two regions, one with the convection heat flux ( $\Gamma_1$ ) and other with a defined flux( $\Gamma_2$ ).

$$\int_{\Gamma} \mathbf{N}_j \frac{q}{\rho c_p} d\Gamma = \int_{\Gamma_1} \mathbf{N}_j \frac{Bi}{\rho c_p} a_i \mathbf{N}_i d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} \mathbf{N}_j \frac{\bar{q}}{\rho c_p} d\Gamma_2 = Bi a_i \int_{\Gamma_1} \mathbf{N}_j \frac{1}{\rho c_p} \mathbf{N}_i d\Gamma_1 + \mathbf{f} \quad (12)$$

Definig the mass matrix  $\mathbf{M}$  over the domain  $\Omega$ , the stiffness matrix  $\mathbf{K}$ , and the mass matrix  $\mathbf{m}$  over the boundary  $\Gamma_1$  as:

$$\int_{\Omega} \mathbf{N}_j \mathbf{N}_i d\Omega = \mathbf{M} \quad (13)$$

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{N}_j \alpha \nabla \mathbf{N}_i d\Omega = \mathbf{K} \quad (14)$$

$$\int_{\Gamma_1} \mathbf{N}_j \frac{1}{\rho c_p} \mathbf{N}_i d\Gamma_1 = \mathbf{m} \quad (15)$$

substituting Eqs.14, 13, 12, 15 in Eq. 11:

$$\mathbf{M} \frac{\partial a}{\partial t} + (\mathbf{K} + Bi \mathbf{m})a = \mathbf{f} \quad (16)$$

A forward difference approximation with the semi-implicit method was used to approximate the time derivative in Eq. 16:

$$\left( \frac{\mathbf{M}}{\Delta t} + \theta(\mathbf{K} + Bi \mathbf{m}) \right) a^{n+1} = \left( \frac{\mathbf{M}}{\Delta t} - (1 - \theta)(\mathbf{K} + Bi \mathbf{m}) \right) a^n + \mathbf{f} \quad (17)$$

The variable  $\theta$  can have values between 0 and 1 for an explicit or implicit method respectively. When  $\theta = 0.5$  it is known as the Crank-Nicolson method.

### 2.3 Geometry And Mesh

The different cross section geometries used in this paper were dimensioned to have the same hydraulic diameter  $D_h$  and all of the solid domain is a  $5D_h \times 7D_h$  rectangle divided in two regions, above and below  $3D_h$ , that correspond to different materials. The goal of these simulations is to represent the experimental set-up used by Szczukiewicz (2012).

For the mesh generation we use a Delaunay triangulation option present on the open source software “GMSH” Geuzaine and Remacle (2009). This choice was made to facilitate the implementation of a FEM algorithm because linear triangular meshes have well known shape functions (e.g. Lewis *et al.*, 2004, p. 49) and the integrals in the formulation can be easily calculated. All the unstructured meshes with complex geometries used in this paper are presented in Fig. 1.

The hydraulic diameter is calculated by:

$$D_h = \frac{4A}{P} \quad (18)$$

where  $A$  is the area of the duct cross section, and  $P$  the perimeter. For the elliptical section, the parameters  $a$  and  $b$  were obtaind by choosing a value for  $a$  and using Eq. 19 as the perimeter approximation.

$$P \approx \pi(a+b) \left( 1 + \frac{3h}{10 + \sqrt{4 - 3h}} \right) \text{ and, } h = \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2} \quad (19)$$

Setting  $D_h = 1$ , the parameters and dimensions of the geometries and meshes are presented in Tab. 1.

Duct Cross Section	Dimensions	Number of Nodes	Number of Elements
Square	$l = 1$	1308	2616
Equilateral Triangle	$l = 1.73205$	1250	2500
Circle	$d = 1$	1646	3292
Ellipse	$a = 1.436 b = 0.35$	1444	2888

Table 1: Mesh parameters

The meshes used had their elements size set to be smaller in the interface between both material regions and also on the channel boundary with the intent to obtain better results, and to reduce the computational power needed to solve the systems of equations by reducing the number of elements on the rest of the domain.

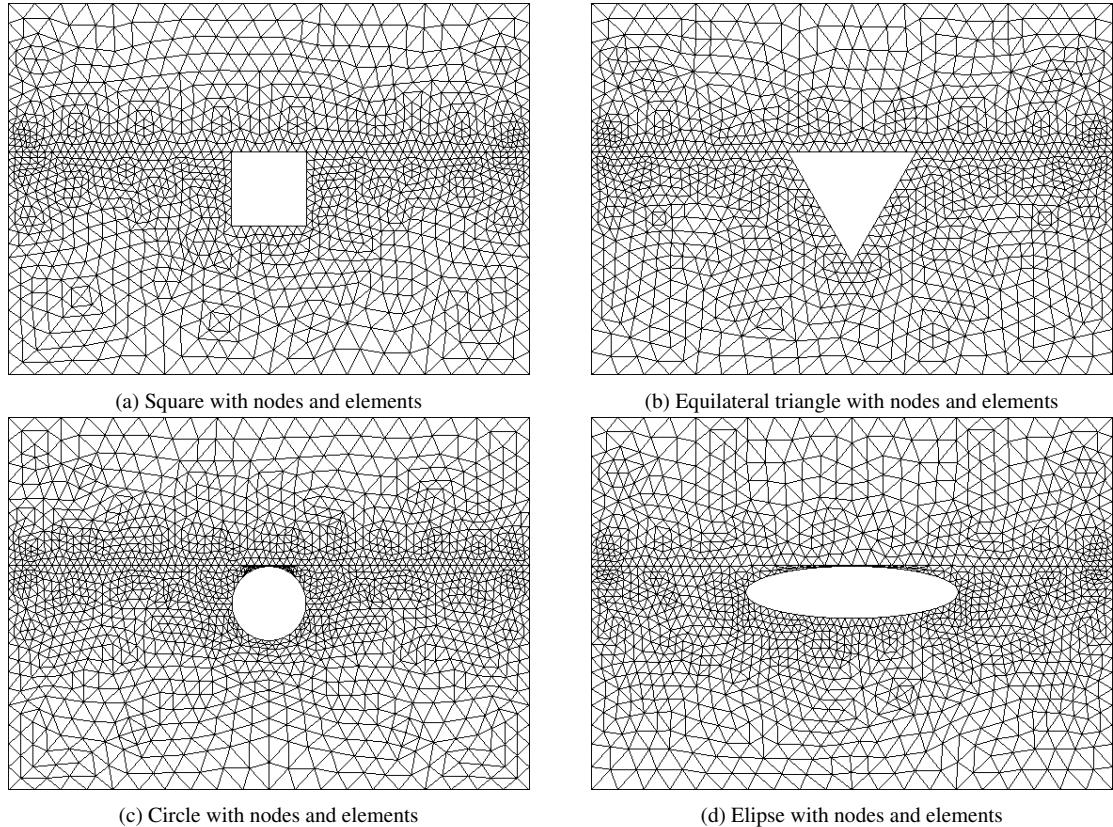


Figure 1: Linear triangular meshes with different channel geometries generated with the software "GMSH"

### 3. RESULTS

#### 3.1 Validation

As a validation test, the following problem with the Laplace equation and Dirichlet boundary conditions is proposed:

$$\begin{cases} \nabla^2 u(x, y) = 0 \\ u(0, y) = 0 \\ u(x, 0) = 0 \quad \text{and,} \quad f(y) = \begin{cases} y, & 0 \leq y \leq 1 \\ 2 - y, & 1 \leq y \leq 2 \end{cases} \\ u(x, 2) = 0 \\ u(3, y) = f(y) \end{cases} \quad (20)$$

The problem can be solved by separation of variables and its solution is given by Eq. 21. A comparison between the analytical and numerical solution obtained by the FEM algorithm is demonstrated in Fig. 2.

$$u(x, y) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right)}{m^2 \sinh\left(\frac{3m\pi}{2}\right)} \sinh\left(\frac{m\pi x}{2}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{2}\right) \quad (21)$$

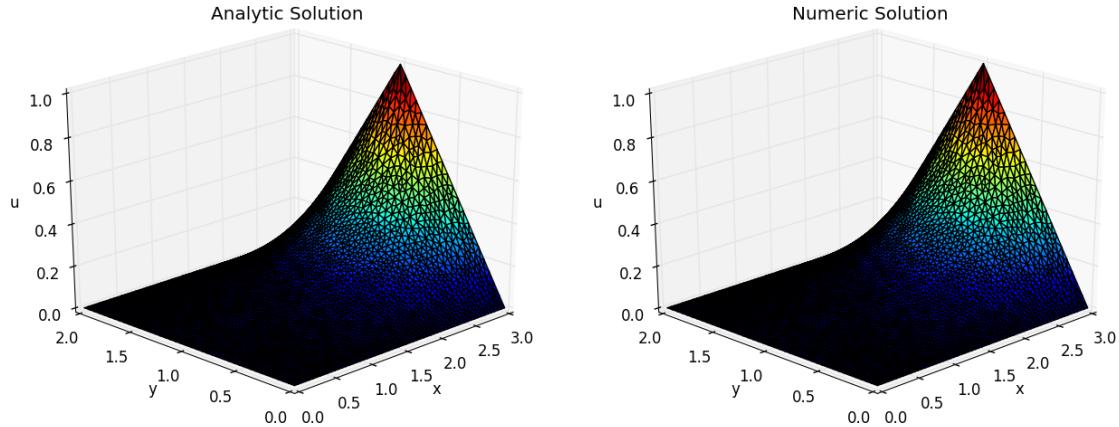


Figure 2: Comparison between analytical and numerical solution on a mesh with 3288 nodes and 6576 elements

A convergence analysis using the  $L^2$  norm and six meshes with 24, 106, 402, 828, 1343, 3288 nodes is shown in Fig. 3. From this graphic, it is possible to notice the numerical method achieves a quadratic convergence rate. Being  $\bar{u}_i$  the analytic solution and  $u_i$  the numeric solution at node  $i$ , the error is:

$$\text{Error} = \sqrt{\sum_i^{\text{nodes}} (\bar{u}_i - u_i)^2} \quad (22)$$

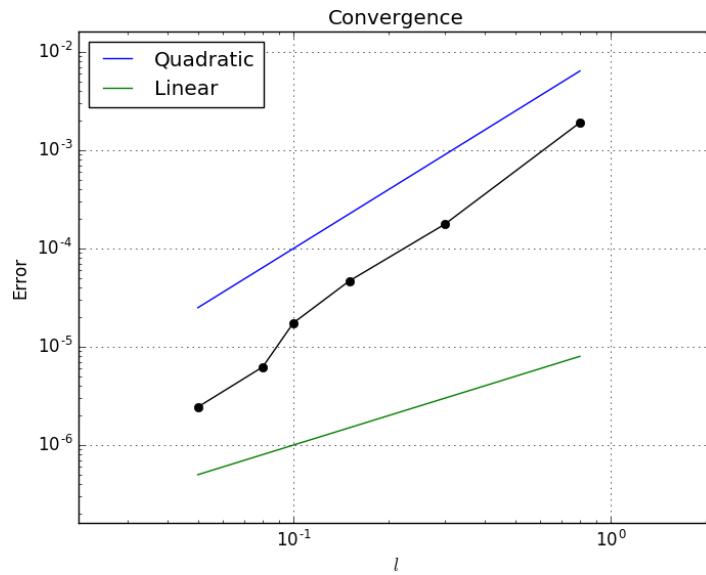


Figure 3: Convergence of the algorithm using  $L^2$  norm, the characteristic length of the elements ( $l$ ) were set in "GMSH" as 0.8, 0.3, 0.15, 0.1, 0.08, 0.05

### 3.2 Micro Evaporator Channel Geometries

The open source software “PARAVIEW” Ahrens *et al.* (2005) was employed for post-processing and analysis of the numerical solutions obtained, making it possible to visualize the data through different tools such as geometric sections, interpolations and vectorization.

All the geometries were simulated using the same parameters and boundary conditions. For the different materials, we used the same as in Szczukiewicz (2012), and their properties are described in Tab. 2.

Material	Region ( $\mu m$ )	$k (\frac{W}{m \cdot K})$	$\rho (\frac{kg}{m^3})$	$c_p (\frac{J}{kg \cdot K})$
Silicon	$0 \leq y < 300$	159	2329	712
Pyrex	$300 \leq y \leq 500$	1.2	2230	800

Table 2: Materials properties

Using the silicon as the reference material ( $\rho = k = c_p = 1$ ), the pyrex relative properties are  $k = 0.007547$ ,  $\rho = 0.957492$ ,  $c_p = 1.123595$ . The spatial measures were non-dimensionalized with  $L = 100\mu m$ . The boundary conditions represented in Fig. 4 were the same for the other channel geometries.

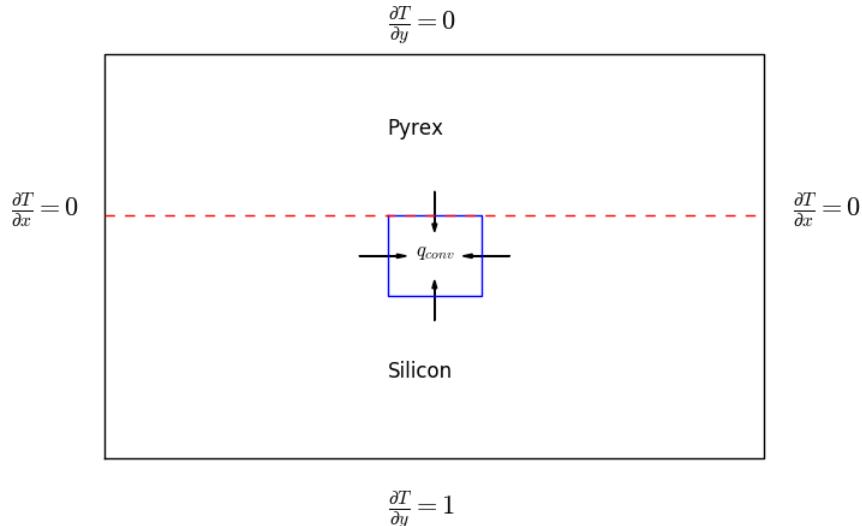


Figure 4: Boundary conditions, material regions, and geometry in the square channel case. The solid region has a length = 7 and height = 5, the pyrex region is above height = 3

The simulation was set to have a total of 600 iterations over time with  $\Delta t = 0.01$  and the Crank-Nicolson method was used ( $\theta = 0.5$ ). For each geometry two cases were tested, one with  $Bi = 1$  and the other with  $Bi = 100$ .

In Fig. 5 the time development of temperature on the silicon and pyrex structure with flow in a square channel cross section is presented for both values of the Biot number.

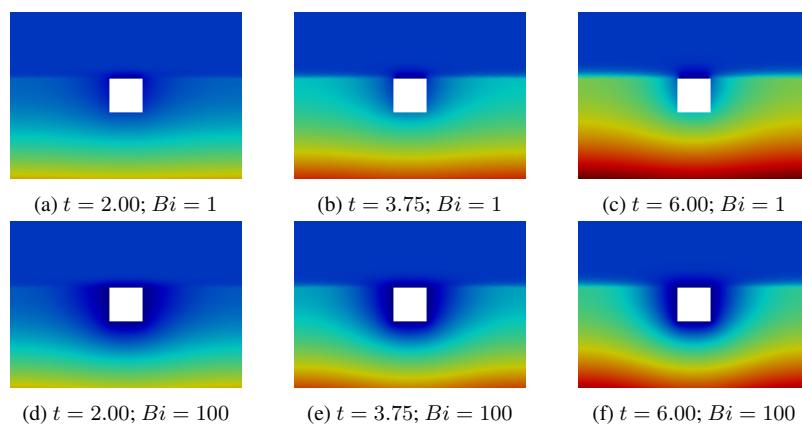


Figure 5: Temperature distribution on the silicon and pyrex region with a square cross section channel

In Fig. 6 the time development of temperature on the silicon and pyrex structure with a triangular duct cross section is presented using the same iterations as the square channel result and it also shows both Biot number cases.

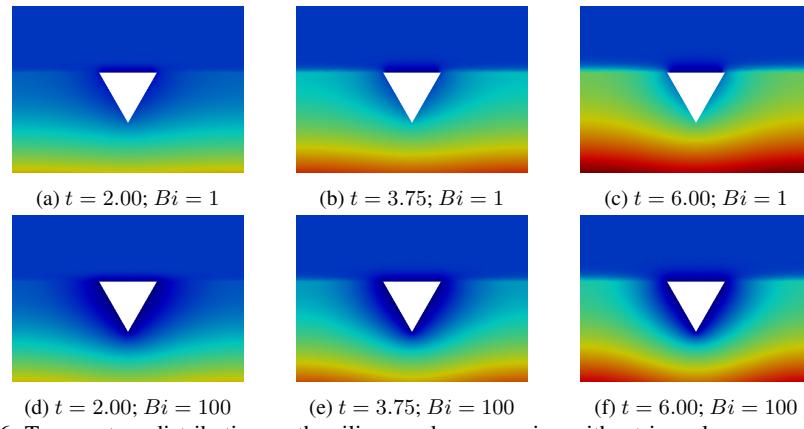


Figure 6: Temperature distribution on the silicon and pyrex region with a triangular cross section duct

The time development of temperature on the silicon and pyrex structure with a circular channel cross section is shown in Fig. 7 in the same manner as the previous results.

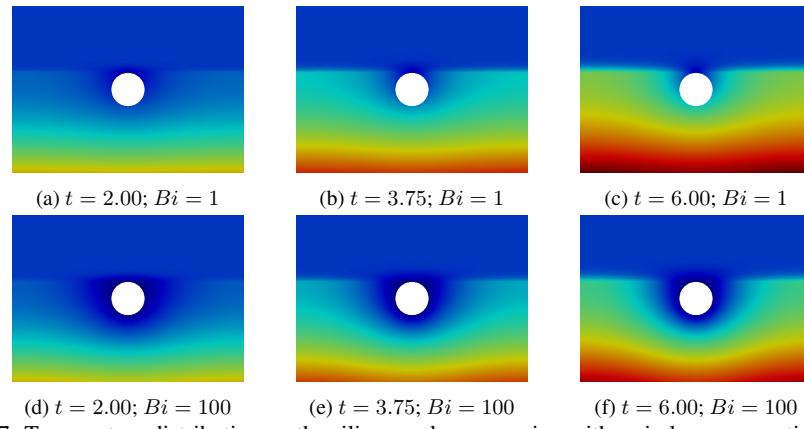


Figure 7: Temperature distribution on the silicon and pyrex region with a circular cross section channel

The results obtained for an elliptical channel cross section are demonstrated in Fig. 8 using the same iterations and Biot number. All the results had the same colormap scale. It is important to mention that in the pyrex region there was very little heat conduction due to a low relative thermal conductivity of the material and this fact made it difficult to set a colormap scale to showcase the phenomena in both regions, therefore only the silicon temperature distribution is observed as it is the material used in electronic components manufacturing.

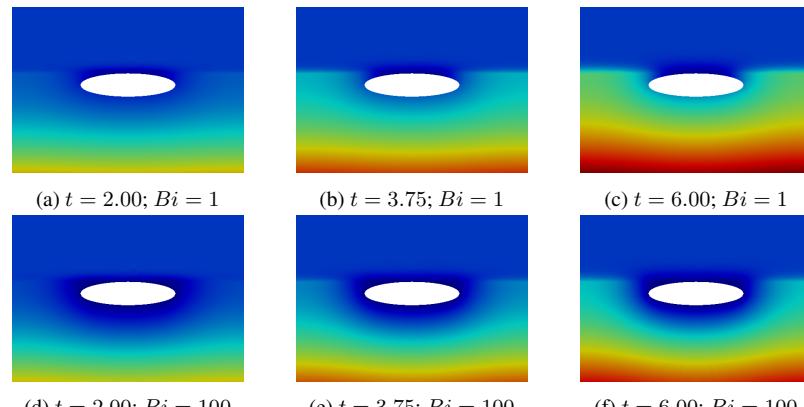


Figure 8: Temperature distribution on the silicon and pyrex region with an elliptical cross section channel

#### 4. CONCLUSION

In this paper, a finite element method was developed to simulate the temperature distribution in complex cross section geometries of a possible heat exchanger used for cooling of electronic components. This method discretizes the governing

equations with the finite element method on unstructured triangular meshes. The results presented show a better heat transfer rate in the cases of higher Biot number, as expected, and the elliptical cross section has a better efficiency in cooling as the temperature distribution over the domain shows a smaller area with the highest temperature on the colormap scale when comparing with the other geometries.

## 5. ACKNOWLEDGEMENTS

The authors thank the FAPERJ (Research Support Foundation of the State of Rio de Janeiro) and CNPQ for their financial support.

## 6. REFERENCES

- Ahrens, James, Geveci, Berk, Law and Charles, 2005. "Paraview: An end-user tool for large data visualization". URL [www.paraview.org](http://www.paraview.org).
- Geuzaine, C. and Remacle, J.F., 2009. "Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*.
- HAHN, D.W. and ÖZIŞIK, M.N., 2012. *HEAT CONDUCTION*. John Wiley & Sons Ltd, 3rd edition.
- Lewis, R.W., Nithiarasu, P. and Seetharamu, K.N., 2004. *Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Fluid Flow*. John Wiley & Sons Ltd.
- Marcinichen, J.B. and Thome, J.R., 2010. "Refrigerated cooling of microprocessors with micro-evaporation a new novel two-phase cooling cycles: A green steady-state simulation code". *Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering*.
- Szczukiewicz, S., 2012. *Thermal and Visual Operational Characteristics of Multi-Microchannel Evaporators using Refrigerants*. Ph.D. thesis, ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE.

## 7. RESPONSIBILITY NOTICE

The authors are the only responsible for the printed material included in this paper.

## REFERÊNCIAS

- [1] SZCZUKIEWICZ, S. *Thermal and Visual Operational Characteristics of Multi-Microchannel Evaporators using Refrigerants*. Tese (Doutorado) — École Polytechnique Fédérale De Lausanne, 2012.
- [2] SONG, W.; LI, B. Q. Finite element solution of conjugate heat transfer problems with and without the use of gap elements. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 2002.
- [3] MARCINICHEN, J. B.; THOME, J. R. Refrigerated cooling of microprocessors with micro-evaporation a new novel two-phase cooling cycles: A green steady-state simulation code. *Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering*, 2010.
- [4] HOFFMANN, K. A.; CHIANG, S. T. *Computational Fluid Dynamics*. Fourth. [S.l.]: Engineering Education Systems, 2000.
- [5] WANSOPHARK, N.; MALATIP, A.; DECHAUMPHAI, P. Streamline upwind finite element method for conjugate heat transfer problems. *Acta Mech Sinica*, 2005.
- [6] CESINI, G. et al. Natural convection from a horizontal cylinder in a rectangular cavity. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1998.
- [7] VYNNYCKY, M. et al. Forced convection heat transfer from a flat plate: the conjugate problem. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1998.
- [8] SALIH, A. *Streamfunction-Vorticity Formulation*. 2013. Indian Institute of Space Science and Technology, Department of Aerospace Engineering.
- [9] LEWIS, R. W.; NITHIARASU, P.; SEETHARAMU, K. N. *Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Fluid Flow*. [S.l.]: John Wiley & Sons Ltd, 2004.
- [10] GEUZAIN, C.; REMACLE, J.-F. Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2009.

- [11] JONES, E. et al. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. 2001–. Disponível em: <<http://www.scipy.org/>>.
- [12] AHRENS et al. *ParaView: An End-User Tool for Large Data Visualization*. Elsevier, 2005. Disponível em: <[www.paraview.org](http://www.paraview.org)>.
- [13] VERSTEEG, H.; MALALASEKRA, W. *An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method*. 2nd. ed. [S.l.]: Prentice Hall, 2007.
- [14] FISH, T. B. J. *A first course in finite elements*. [S.l.]: John Wiley & Sons Ltd, 2007.
- [15] COURANT, R. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. *Bulletin of the American Mathematical Society*, American Mathematical Society, v. 49, 1943.
- [16] TURNER, M. J. et al. Stiffness and deflection analysis of complex structures. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 1956.
- [17] INCROPERA, F. P. et al. *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. Seventh. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2011.
- [18] CENGEL, Y. A. *Heat transfer: a practical approach*. 2. ed. [S.l.]: McGraw-Hill, 2002.
- [19] PONTES, J.; MANGIAVACCHI, N. *Fenômenos de Transferência*. 1. ed. [S.l.: s.n.], 2010.
- [20] HUGHES, T. *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. [S.l.]: Dover Publications, 2000. (Dover Civil and Mechanical Engineering). ISBN 9780486411811.
- [21] ANJOS, G. R. *Solução do Campo Hidrodinâmico em Células Eletroquímicas Pelo Método de Elementos Finitos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2007.
- [22] PEETERS, M. F.; HABASHIT, W. G. ; DUECK, E. G. . Finite element stream function-vorticity solutions of the incompressible navier-stokes equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1987.
- [23] CHEN, X.; HAN, P. A note on the solution of conjugate heat transfer problems using simple-like algorithms. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 2000.

- [24] SPALDING, D. B. A novel finite difference formulation for differential expressions involving both first and second derivatives. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1972.