Simulação Numérica De Escoamentos Dispersos Em Turbomáquinas Utilizando Método De Elementos Finitos

Lucas Carvalho De Sousa
Gustavo Rabello Dos Anjos

Universidade do Estado do Rio de Janeiro

encarvlucas@hotmail.com

25 de Junho de 2019

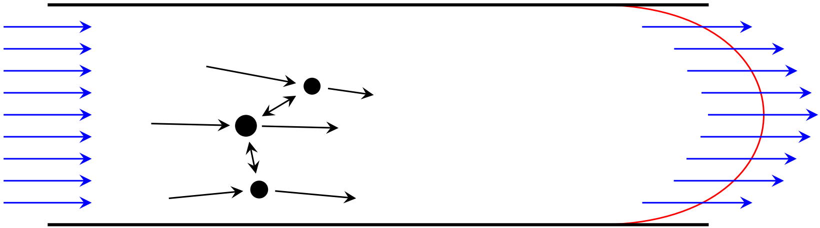
Sumário

Introdução

Simulação de Escoamentos Bidimensionais com Partículas

Objetivos deste trabalho:

Desenvolver uma biblioteca de Python para a simulação de escoamentos particulados.

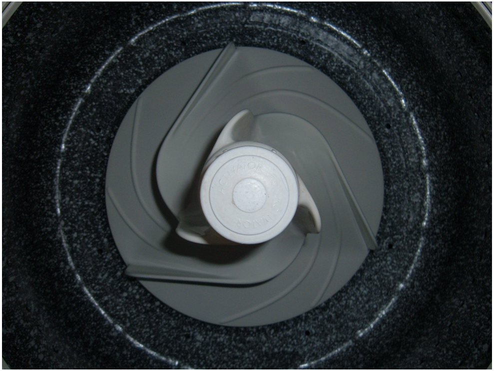


Escoamento entre placas, Hagen-Poiseuille.

Escoamentos em Turbomáquinas

Objetivos deste trabalho:

Estudar como partículas se comportam dentro de uma turbomáquina em funcionamento.



Fonte: © BrokenSphere / Wikimedia Commons.

Equações de Governo

Formulação Corrente-Vorticidade

Hipóteses tomadas

- Fluído incompressível
- Fluído newtoniano

Equação de Navier-Stoakes

$$\frac{\partial \vec{v}_f}{\partial t} + \vec{v}_f.\vec{\nabla}\vec{v}_f = -\frac{1}{\rho_f}\vec{\nabla}p + \frac{\mu_f}{\rho_f}\nabla^2\vec{v}_f + \vec{g}$$

Desvantagens

- Acoplamento da pressão e velocidade
- Exige elementos de ordem elevada

Formulação Corrente-Vorticidade

Equação da Vorticidade

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{v}_f . \vec{\nabla} \vec{\omega} = \frac{\mu_f}{\rho_f} \nabla^2 \vec{\omega}$$

Equação da Corrente

$$\nabla^2 \psi = -\omega_z$$

Equações Auxiliares

$$\vec{v}_f = (v_{f,x} \, , v_{f,y})$$

$$v_{f,x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$v_{f,y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\omega_z = \frac{\partial v_{f,x}}{\partial y} - \frac{\partial v_{f,y}}{\partial x}$$

Equação de Basset–Boussinesq–Oseen (BBO)

Equação que representa as forças exercidas sobre as partículas. Sua expressão é a soma das forças separadamente.

Equação de Basset–Boussinesq–Oseen

$$\vec{F}_p = \sum \vec{F} = \vec{F}_{grav} + \vec{F}_{drag} + \vec{F}_{lift} + \vec{F}_{mass}$$

Restrição

A equação BBO é somente válida para Reynolds da partícula menores que 1. $Re_p < 1$

Reynolds de Partícula

$$Re_p = \frac{\rho_p}{\mu_f} |\,(\vec{v}_f - \vec{v}_p)\,|_{max}\, d_p$$

Equação de Basset–Boussinesq–Oseen (BBO)

Força Gravitacional

$$\vec{F}_{grav} = m_p \vec{g}$$

Força de Sustentação

$$\vec{F}_{lift} = 1.61 \mu_f d_p \left(\vec{v}_f - \vec{v}_p\right) \sqrt{Re_G}$$

Força de Arrasto

$$\vec{F}_{drag} = 3\pi \mu_f d_p \left(\vec{v}_f - \vec{v}_p\right)$$

Força de Massa Virtual

$$\vec{F}_{mass} = \frac{1}{2} \rho_f V_p \frac{d}{dt} \left(\vec{v}_f - \vec{v}_p\right)$$

Reynolds de Cisalhamento

$$Re_G = \frac{\rho_f}{\mu_f} d_p^2 \nabla \vec{v}_f$$

Métodos Numéricos

Método dos Elementos Finitos

Domínio

Equações são definidas em um domínio Ω com contorno Γ.

Forma forte com as funções peso

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} + \vec{v}_f.\vec{\nabla}\vec{\omega} - \frac{\mu_f}{\rho_f}\nabla^2\vec{\omega}\right).\vec{\delta}d\Omega = 0$$

$$\int_\Omega \left(\nabla^2\psi + \omega_z\right).\vec{\phi}d\Omega = 0$$

$$\int_\Omega \left(\vec{v}_f - \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}, -\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\right).\vec{\xi}d\Omega = 0$$

Condições de contorno

$$\omega = \omega_\Gamma \text{ em } \Gamma$$

$$\psi = \psi_\Gamma \text{ em } \Gamma$$

$$\vec{v}_f = \vec{v}_{f\Gamma} \text{ em } \Gamma$$

$\vec{\delta}$, $\vec{\phi}$ e $\vec{\xi}$ são as funções de peso de cada equação.

Método dos Elementos Finitos

Forma fraca

$$m_1\left(\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t},\delta\right)+g_1(\vec{v}_f,\vec{\delta})+\frac{\mu_f}{\rho_f}k_1(\vec{\omega},\vec{\delta})=0$$

$$-k_2(\psi,\vec{\phi})+m_2(\omega_z,\vec{\phi})=0$$

$$m_3(\vec{v}_f,\vec{\xi})-g_3(\psi,\vec{\xi})=0$$

Onde:

$$m_1\left(\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t},\delta\right)=\int_\Omega\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t}.\vec{\delta}d\Omega$$

$$g_1(\vec{v}_f,\vec{\delta})=\int_\Omega\vec{v}_f.\vec{\nabla}\vec{\omega}.\vec{\delta}d\Omega$$

$$k_1(\vec{\omega},\vec{\delta})=\int_\Omega\vec{\nabla}\vec{\omega}.\vec{\nabla}\vec{\delta}d\Omega$$

$$k_2(\psi,\vec{\phi})=\int_\Omega\vec{\nabla}\psi.\vec{\nabla}\vec{\phi}d\Omega$$

$$m_2(\omega_z,\vec{\phi})=\int_\Omega\omega_z.\vec{\phi}d\Omega$$

$$m_3(\vec{v}_f,\vec{\xi})=\int_\Omega\vec{v}_f.\vec{\xi}d\Omega$$

$$g_3(\psi,\vec{\xi})=\int_\Omega\left(\frac{\partial\psi}{\partial y},-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right).\vec{\xi}d\Omega$$

Discretização do Modelo de Escoamentos

Formulação de Galerkin

Funções de peso são definidas com valor igual às funções interpoladoras.

$$\omega(\vec{x},t) = \sum_{i=1}^{n_p} \omega_i(t) N_i(\vec{x})$$

$$\psi(\vec{x},t) = \sum_{i=1}^{n_p} \psi_i(t) N_i(\vec{x})$$

$$v_{f,x}(\vec{x},t) = \sum_{i=1}^{n_p} v_{f,x,i}(t) N_i(\vec{x})$$

$$v_{f,y}(\vec{x},t) = \sum_{i=1}^{n_p} v_{f,y,i}(t) N_i(\vec{x})$$

$$\delta(\vec{x},t) = \sum_{j=1}^{n_p} \delta_i(t) N_j(\vec{x})$$

$$\phi(\vec{x},t) = \sum_{j=1}^{n_p} \phi_i(t) N_j(\vec{x})$$

$$\xi(\vec{x},t) = \sum_{j=1}^{n_p} \xi_i(t) N_j(\vec{x})$$

Discretização do Modelo de Escoamentos

Função de Aproximação

$N(x)$ é a função de aproximação de cada elemento:

$$N_i(\vec{x}) = [N_1(\vec{x}), \ldots, N_{n_p}(\vec{x})]$$

Matrizes locais dos elementos

Surgem os termos locais, para cada elemento e:

$$\mathbf{m^e} = \int_{\Omega^e} N_i^e N_j^e \, d\Omega^e$$

$$\mathbf{g_x^e} = \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} N_j^e \, d\Omega^e$$

$$\mathbf{g_y^e} = \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} N_j^e \, d\Omega^e$$

$$\mathbf{k_{xx}^e} = \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} \, d\Omega^e$$

$$\mathbf{k_{yy}^e} = \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \, d\Omega^e$$

Discretização do Modelo de Escoamentos

Discretização no tempo

$N(x)$ é a função de aproximação de cada elemento:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} \approx \frac{\omega(t+dt) - \omega(t)}{dt}$$

Equações na forma global

$$\left(\mathbf{M} v_{f,x} \mathbf{G_x} + v_{f,y} \mathbf{G_y} + \frac{\mu_f}{\rho_f} (\mathbf{K_{xx}} + \mathbf{K_{yy}}) \right) \omega^{t_{n+1}} = \mathbf{M} \omega^{t_n}$$

$$(\mathbf{K_{xx}} + \mathbf{K_{yy}}) \psi = \mathbf{M} \omega^{t_{n+1}}$$

$$\mathbf{M} v_{f,x} \omega^{t_{n+1}} = \mathbf{G_y} \psi$$

$$\mathbf{M} v_{f,y} \omega^{t_{n+1}} = -\mathbf{G_x} \psi$$

Discretização do Modelo de Partículas

Equações das forças nas partículas

$$\vec{F}^{t_n}_{grav} = m_p \vec{g}$$

$$\vec{F}^{t_n}_{drag} = 3\pi \mu_f d_p \left(\vec{v}_f^{\,t_n} - \vec{v}_p^{\,t_{n-1}} \right)$$

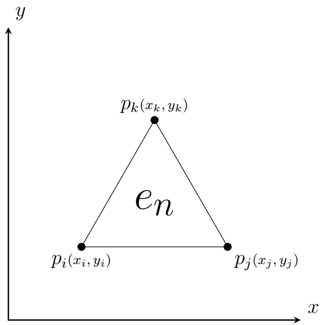
$$\vec{F}^{t_n}_{lift} = 1.61 \mu_f d_p \left(\vec{v}_f^{\,t_n} - \vec{v}_p^{\,t_{n-1}} \right) \sqrt{Re_G^{t_n}}$$

$$\vec{F}^{t_n}_{mass} = \frac{1}{2} \rho_f V_p \frac{\left(\vec{v}_f^{\,t_n} - \vec{v}_p^{\,t_{n-1}} \right) - \left(\vec{v}_f^{\,t_{n-1}} - \vec{v}_p^{\,t_{n-2}} \right)}{dt}$$

Reynolds específicos

$$Re_p^{t_n} = \frac{\rho_p}{\mu_f} d_p \left| \vec{v}_f^{\,t_n} - \vec{v}_p^{\,t_{n-1}} \right|_{max} \qquad Re_G^{t_n} = \frac{d_p^2 \rho_f}{\mu_f} \left(\frac{d\vec{v}_f}{d\vec{r}} \right)^{t_n}$$

Matrizes dos Elementos Triangulares



Elemento triangular linear.

Coeficientes de Forma

$$\mathbf{b} \begin{cases} b_i = y_j - y_k \\ b_j = y_k - y_i \\ b_k = y_i - y_j \end{cases} \qquad \begin{cases} c_i = x_k - x_j \\ c_j = x_i - x_k \\ c_k = x_j - x_i \end{cases}$$

Matrizes de Gradiente

$$\mathbf{g}_\mathbf{x}^\mathbf{e} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ b_i & b_j & b_k \\ b_i & b_j & b_k \end{bmatrix} \qquad \mathbf{g}_\mathbf{y}^\mathbf{e} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} c_i & c_j & c_k \\ c_i & c_j & c_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix}$$

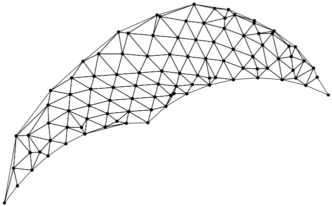
Matriz de Massa

$$\mathbf{m}^\mathbf{e} = \frac{A^e}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Matrizes de Rigidez

$$\mathbf{k}_\mathbf{xx}^\mathbf{e} = \frac{t_h}{4A} \begin{bmatrix} b_i b_i & b_j b_i & b_k b_i \\ b_i b_j & b_j b_j & b_k b_j \\ b_i b_k & b_j b_k & b_k b_k \end{bmatrix} \qquad \mathbf{k}_\mathbf{yy}^\mathbf{e} = \frac{t_h}{4A} \begin{bmatrix} c_i c_i & c_j c_i & c_k c_i \\ c_i c_j & c_j c_j & c_k c_j \\ c_i c_k & c_j c_k & c_k c_k \end{bmatrix}$$

Equações Matriciais



Malha gerada para um perfil de rotor.

Vorticidade

$$\left(\frac{\mathbf{M}}{\Delta t} + \nu \mathbf{K} + \mathbf{v}.\mathbf{G}\right)\omega_z^{n+1} = \frac{\mathbf{M}}{\Delta t}\omega_z^n$$

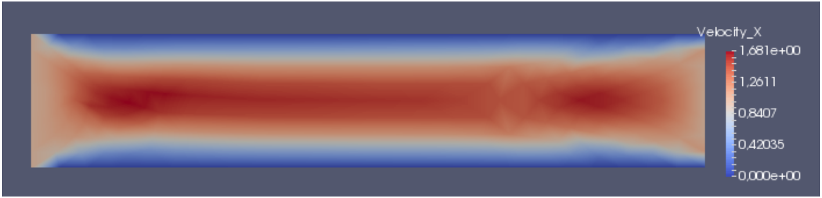
Corrente

$$\mathbf{K}\psi = \mathbf{M}\omega_z$$

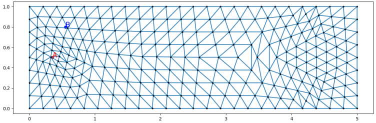
Auxiliares

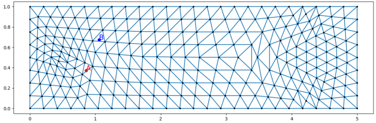
$$\mathbf{M}v_x = \mathbf{G}_y\psi$$
$$\mathbf{M}v_y = -\mathbf{G}_x\psi$$
$$\mathbf{M}\omega_z = \mathbf{G}_x v_y - \mathbf{G}_y v_x$$

Resultados Preliminares

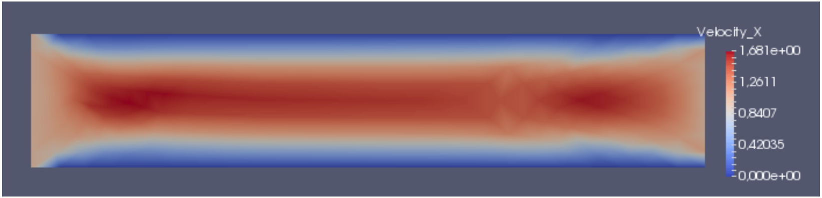


Perfil de velocidades no eixo x para um escoamento entre placas.

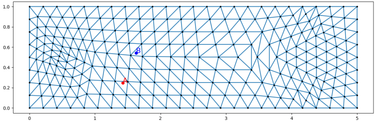


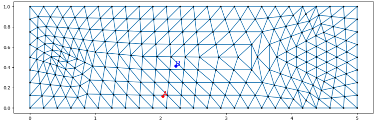


Demonstração de partículas em movimento



Perfil de velocidades no eixo x para um escoamento entre placas.





Demonstração de partículas em movimento

Cronograma Futuro

Atividades Concluídas e Previsão

Atividades	Set/18	Out/18	Nov/18	Dez/18	Jan/19	Fev/19	Mar/19	Abr/19	Mai/19	Jun/19	Jul/19	Ago/19
Revisão Bibliográfica												
Desenvolvimento de código (poiseuille)												
Desenvolvimento de código (dispersos)												
Desenvolvimento de código (temperatura)												
Testes e validações												
Simulação de problemas físicos												
Escrever dissertação												
Apresentação												

Tarefas Realizadas

Tarefas a Realizar

Figura: Cronograma previsto atualizado.

Agradecimentos

Muito Obrigado!