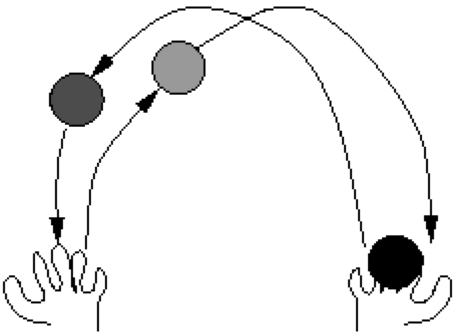
AZ EMBER, A POLIP ÉS A NÉGYLABDÁS KASZKÁD

Ezt a cikket A. Engels és S. Mauw írta, gyakorlatilag egy az egyben lefordítottam, de a végét átdolgoztam egy kicsit, hogy szájbarágósabb legyen. A megértéshez szükség van a kongruencia fogalom ismeretére, meg egy kis kitartásra. A szöveg viszonylag könnyen követhető, és a végén kiderül, miért nincs négylabdás kaszkád.

Észrevételeket az encse@index.hu címre küldhettek. Az eredeti változat megtalálható: http://www.win.tue.nl/~sjouke/misc/jugglepaper.html

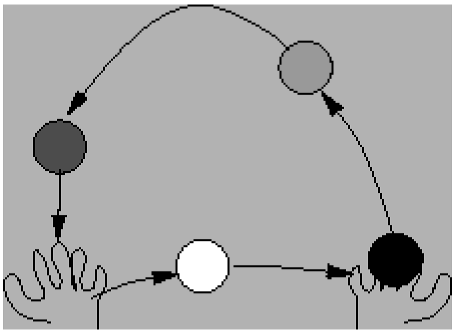
1. Bevezetés

Zsonglőrködni nem túl nehéz. A legismertebb trükk, a háromlabdás kaszkád (1. ábra), megtanulásához mindösszesze néhány óra kitartó gyakorlás szükséges. A három labdával bemutatható trükkök közül ez a legszimmetrikusabb és legszabályosabb minta: a kezek felváltva dobnak, a labdák pedig egymás után, mindig ugyanabban a sorrendben röppennek a levegőbe.

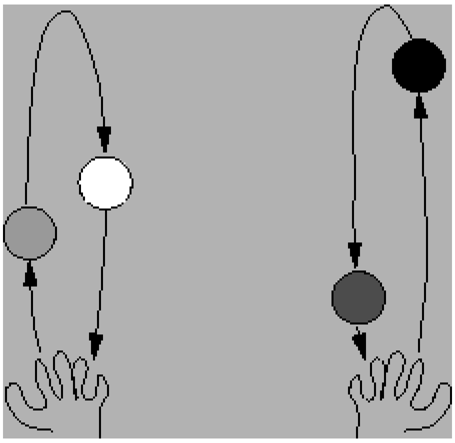


1. ábra: Háromlabdás kaszkád

A háromlabdás kaszkád elsajátítása után a kezdő zsonglőr rögtön a négylabdás zsonglőrködésen kezdi törni a fejét. Eleinte úgy tűnik, ugyanarról van szó, csak kicsit jobban oda kell figyelni az időzítésre és a dobások pontosságára. De bármilyen kitartóan próbálkozik is, a négylabdás kaszkád csak nem akar összejönni. Végül aztán kénytelen beérni kevésbé szimmetrikus mintákkal, mint pl. a koszorú (2. ábra) és összetett trükkökkel, mint az oszlopok (3. ábra) és különböző variációi.



2. ábra: Háromlabdás koszorú



3. ábra: Oszlopok

A négylabdás kaszkád nem csak látszólag lehetetlen, nem a zsonglőr tudásán múlik: még a legjobbaknak sem sikerül. A kaszkád működik, ha páratlan számú labdával próbálkozunk (egészen 11-ig, ami pillanatnyilag a világrekord), de páros számú labdával egész egyszerűen nem lehet bemutatni. A háttérben valami egészen alapvető dolog bujkál. Ennek járunk utána.

A problémát matematikai eszközökkel tárgyaljuk. Mindenekelőtt megadjuk a kaszkád formális definícióját, majd elemi számelméleti megfontolásokkal bebizonyítjuk, hogy két kézzel valóban végrehajthatatlan a négylabdás változat.

Eredményünk ennél valamivel általánosabb, ugyanis gondolatmenetünkben nem rögzítjük a kezek számát. (Két zsonglőr három vagy négy kézzel is zsonglőrködhet, egy polip pedig akár nyolccal is.) Az általunk kimondott tétel szerint a kaszkád akkor és csak akkor hajtható végre, ha a kezek és a labdák száma egymással relatív prím, azaz legnagyobb közös osztójuk 1.

A továbbiakban elsőként bevezetünk egy egyszerű jelölést a zsonglőr trükkök leírására, definiáljuk a kaszkád fogalmát, majd a zsonglőr trükkök zárt partícionálásának fogalmára támaszkodva bevezetjük a „valódi" kaszkád és az „összetett" kaszkád fogalmakat.

2. Jelölésrendszer

A zsonglőr trükkök leírására többféle módszer is ismeretes, a Wildcat oldalon például szöveges megjegyzésekkel kibővített videókat használunk, de az érdeklődőket bevezetjük a siteswap leírások tömörebb, formálisabb világába is.

Mivel a továbbiakban matematikailag elemezzük a trükköket, céljainkhoz valamely formális rendszer illeszkedik igazán. Sajnos a mi megközelítésünkhöz az ismertebb jelölések nem használhatók, így mindenekelőtt bevezetünk egy egyszerű, ad- hoc jelölésrendszert.

A trükkök lényegét a különböző fizikai jellemzők (méretek, sebesség, dobások iránya) figyelmen kívül hagyásával ragadhatjuk meg. Nekünk csak az számít, hogy a kezek milyen sorrendben dobják fel a labdákat. Jelölésrendszerünk ezért csak egy dolgot tartalmaz: (kéz, labda) párok sorozatát.

Definíció (zsonglőr trükk): zsonglőr trükk egy olyan $J = \binom{h_1}{b_1}\binom{h_2}{b_2}\binom{h_3}{b_3}\ldots$ (esetleg végtelen hosszú) sorozat, ahol h_i-ket „kezek" egy véges H halmazából választjuk, b_i-ket pedig „labdák" egy véges B halmazából vesszük, azaz ha h és b egy J-beli pár elemei, akkor $h \epsilon H$ és $b \epsilon B$. A sorozat azt jelenti, hogy a b_1 labdát a h_1 kézből dobjuk el, majd így folytatjuk a többi elemmel.

Például: a háromlabdás kaszkádot az $\binom{L}{1}\binom{R}{2}\binom{L}{3}\binom{R}{1}\binom{L}{2}\binom{R}{3}\binom{L}{1}\binom{R}{2}\binom{L}{3}\binom{R}{1}\binom{L}{2}\binom{R}{3}$..., sorozat írja le, ahol a három pont a minta ismétlődését jelenti; L a bal kezet, R pedig a jobb kezet jelöli.

Vegyük észre, hogy eltekintettünk a labdák elkapásától, mint eseménytől. Habár ennek időzítése a trükk látványát, „ízét" befolyásolja, úgy gondoljuk, hogy a minta szempontjából még sincs alapvető jelentősége. Az egyszerűsítés következménye az, hogy jelölésünk nem tesz különbséget az olyan zsonglőrködési stílusok között, mint a *forró krumpli zsonglőrködés*, amiben a labdák a lehető legrövidebb ideig maradnak a zsonglőr kezében, és a *lusta zsonglőrködés*, ami ennek az ellentéte. Az egyetlen kikötésünk, hogy a labdát két feldobás között valamikor el kell kapni.

Másodszor, jelölésünkből hiányzik a szinkron dobások leírásának lehetősége, azaz csak olyan trükköket írhatunk le, amiben, egy időpillanatban egyszerre csak egy dobás történik. Eltekintettünk a multiplex dobásoktól is, azaz trükkjeinkben egy kézben mindig csak legfeljebb egy labda lehet.

Másrészt, még ezzel a nagyon egyszerű jelöléssel is sok trükk leírható, többek között cikkünk tárgya, a kaszkád is.

Ha $J = \binom{h_1}{b_1}\binom{h_2}{b_2}\binom{h_3}{b_3}$..., akkor $h_1 h_2 h_3$ ...-at *kéz-mintának*, $b_1 b_2 b_3$-at pedig *labda-mintának* nevezzük. Például a háromlabdás kaszkád $\binom{L}{1}\binom{R}{2}\binom{L}{3}\binom{R}{1}\binom{L}{2}\binom{R}{3}\binom{L}{1}\binom{R}{2}\binom{L}{3}\binom{R}{1}\binom{L}{2}\binom{R}{3}$...

sorozatának kéz-mintája $LRLRLRLRLRLR$ ..., labda mintája pedig 123123123123 ...

Periodicitás

A gyakorlatban csak a periodikus trükkök érdekesek. A fenti kaszkád például 6 szerint periodikus, azaz 6 egymást követő elem ismétlődik benne a végtelenségig. Természetesen a minta 12, 18, stb. szerint is periodikus, de a 6-nak fontos jelentősége, hogy ez a legkisebb olyan szám, ami szerint a sorozat periodikus. A továbbiakban ezt a tényt a sorozat *alapperiódusának*, vagy egyszerűen *periódusának* mondjuk.

Ciklikusság

Egy sorozat *ciklikus*, ha periodikus, és egy perióduson belül a sorozat minden eleme különböző.

Következő tételünk a trükk periodicitása valamint a kéz- és labda-minták periodicitása között teremt kapcsolatot.

1. tétel (a zsonglőr trükkök periodicitása) Legyen J egy olyan zsonglőr trükk, amiben a kéz-minta p_H, a labda-minta pedig p_B szerint periodikus. Ekkor a zsonglőr trükk $lkt(p_H, p_B)$ szerint periodikus (lkt a legkisebb közös többszöröst jelenti). Továbbá, ha p_H és p_B alapperiódusok, akkor J alapperiódusa $lkt(p_H, p_B)$.

Bizonyítás: Az állítás abból az észrevételből következik, hogy a zsonglőr trükk pontosan akkor periodikus p szerint, ha a kéz- és labda-minták periodikusak p szerint. ■

3. A kaszkád

Ahogy a bevezetőben említettük, a kaszkádban a kezek felváltva dobnak, a feldobott labdák sorrendje pedig rögzített. Ez a megfigyelés a következő definícióhoz vezet.

Definíció (kaszkád): a kaszkád olyan zsonglőr trükk, amiben a kéz- és labda- minták ciklikusak.

A definíció minden kéz- és labda halmazhoz lényegében egy sorozatot rendel (a különbség a kezek sorrendjében, és a labdák sorrendjében lehet, de ez a lényegen nem változtat). A kétkezes, négylabdás kaszkádhoz tartozó sorozat például:

$$\binom{L}{1}\binom{R}{2}\binom{L}{3}\binom{R}{4}\binom{L}{1}\binom{R}{2}\binom{L}{3}\binom{R}{4}...$$

Mi ezzel a baj? Ha jobban megfigyeljük, akkor tulajdonképpen két minta „szuperpozícióját" látjuk. A bal kéz felváltva dobálja az 1-es és 3-as labdákat, a jobb kéz pedig közben ugyanezt csinálja a 2-es és 4-es labdákkal. A labdák soha nem cserélnek kezet. A kétkezes, négylabdás kaszkád tehát nem más, mint a korábban már említett oszlopos trükk (3. ábra), márpedig ezt nem szeretnénk „valódi" kaszkádnak tekinteni. A továbbiakban tehát az ilyen esetek kiszűrésével foglalkozunk.

4. Zárt partíciók és alap trükkök

Egy trükköt akkor fogunk *alap trükknek* nevezni, ha akárhogy is próbáljuk a sorozatához tartozó elemeket két vagy több csoportra bontani, mindig lesz olyan kéz vagy labda, ami egynél több csoportban is előfordul. (Pontosan ez a feltétel sérült meg a négylabdás kaszkád esetében, amikor bal és jobb kéz szerint bontottuk két részre a sorozatot.)

Definíció (zárt partíció): legyen $J = \binom{h_1}{b_1}\binom{h_2}{b_2}\binom{h_3}{b_3}\dots$ egy zsonglőr trükk. J egy zárt partíciója egy olyan $J_1, J_2, \dots, J_n$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozathalmaz, ahol az egyes J_i-k J részsorozatai. Továbbá ha $J_i = \binom{h_{\mathrm{n}_{i1}}}{b_{\mathrm{n}_{i1}}}\binom{h_{\mathrm{n}_{i2}}}{b_{\mathrm{n}_{i2}}}\dots$, akkor:

1. J_i-k a J egy partícionálását adják, azaz egyetlen J_i sem üres, és minden $k \in \mathbb{N}$-re pontosan egy olyan i és j létezik, amire $n_{ij} = k$.
2. Ha $h_i = h_j$ vagy $b_i = b_j$, akkor $\binom{h_i}{b_i}$ és $\binom{h_j}{b_j}$ ugyanabban a részsorozatban vannak. (Zártság.)

Ha $n = 1$, és így $J_1 = J$, akkor egy zárt partíciót kapunk, ezt *triviális partíciónak* nevezzük.

Definíció: Egy zsonglőr trükk *alap trükk,* ha egyetlen zárt partíciója létezik: a triviális partíció, egyébként a trükk *összetett trükk*.

Definíció: Akkor mondjuk, hogy egy kaszkád *„valódi"*, ha a hozzátartozó zsonglőr trükk alap trükk.

Nézzük meg, hogyan különíti el az *alap trükkök* fogalma a „valódi" kaszkádokat a többitől. Például a négylabdás kaszkád sorozata

$$\binom{L}{1}\binom{R}{2}\binom{L}{3}\binom{R}{4}\binom{L}{1}\binom{R}{2}\binom{L}{3}\binom{R}{4}\dots$$

ennek egy zárt partíciója a trükköt két egymástól független résztrükkre bontja:

$$\binom{L}{1}\binom{L}{3}\binom{L}{1}\binom{L}{3}\dots$$

$$\binom{R}{2}\binom{R}{4}\binom{R}{2}\binom{R}{4}\dots$$

A háromlabdás kaszkád viszont alap trükk, mert a megfelelő sorozathoz:

$$\binom{L}{1}\binom{R}{2}\binom{L}{3}\binom{R}{1}\binom{L}{2}\binom{R}{3}\binom{L}{1}\binom{R}{2}\binom{L}{3}\binom{R}{1}\binom{L}{2}\binom{R}{3}\dots$$

csak a triviális partíció tartozik. (Az olvasónak azért érdemes egy kicsit próbálkozni a felbontással.)

Következő tételünk szerint az alap trükkök azért érdekesek, mert minden zsonglőr trükk felépíthető belőlük.

2. Tétel: minden J zsonglőr trükknek egyértelműen létezik egy olyan $J_1, J_2, \dots, J_n$ zárt partíciója, amiben az egyes J_i-k alap trükkök.

Bizonyítás: ha $J_1, J_2, \dots, J_m$ és $J_1', J_2', \dots, J_n'$ J-nek két zárt partíciója, akkor nem nehéz belátni, hogy egy új zárt partíciót kapunk, ha vesszük az összes $J_i \cap J_j'$ metszet sorozatot és elhagyjuk belőlük az üres sorozatokat. Egy sorozat zárt partícióinak száma véges, hiszen egy partíció legfeljebb $min(|H|, |B|)$ különböző részsorozatból állhat. Ezért elkészíthetjük az összes zárt partíció metszetét is, ami egyértelműen létezik és minden részsorozata egy-egy alap trükköt ír le. ■

Keressünk szükséges és/vagy elégséges feltételeket arra, hogy egy trükk alap trükk-e. Ehhez segítségünkre lesz a Kínai maradéktétel.

3. Tétel (Kínai maradéktétel): legyen m, n természetes, x és y egész szám úgy, hogy m és n relatív prímek. Ekkor létezik egy olyan z egész szám, amire $z \equiv x \; mod \; m$ és $z \equiv y \; mod \; n$ egyszerre teljesül.

A bizonyítás bármely számelmélettel foglalkozó tankönyvben megtalálható. Ezt a tételt felhasználva elégséges feltételt adunk arra, hogy egy trükk alap trükk legyen.

4. tétel: legyen J egy olyan zsonglőr trükk, amiben a kéz-minta p_H, a labda-minta pedig p_B szerint periodikus. Ha p_H és p_B relatív prímek, akkor J alap trükk.

Bizonyítás: megmutatjuk, hogy minden $h \in H$ és $b \in B$ párra $\binom{h}{b}$ megtalálható a J sorozatban. Ebből következik, hogy J-nek csak egyetlen zárt partíciója van, a triviális partíció, ami más szóval azt jelenti, hogy J alap trükk.

Legyen tehát $h \in H$ és $b \in B$ két tetszőleges elem. Legyen $J = \binom{h_1}{b_1}\binom{h_2}{b_2}\binom{h_3}{b_3} \dots$, és legyen m és n olyan, hogy $h_m = h$ és $b_n = b$. Ha véletlenül $m = n$, akkor $\binom{h}{b}$ eleme J-nek. Egyébként próbáljunk meg a periodicitást felhasználva olyan k-t keresni, amire $h_k = h_m = h$ és $b_k = b_n = b$ egyszerre teljesül. A kéz-minta p_H szerinti periodicitása miatt, valahányszor $k \equiv m \; mod \; p_H$ teljesül egy k-ra, akkor $h_k = h_m$ is fennáll, a kongruencia ugyanis azt jelenti, hogy k néhányszor p_H-val van eltolva m-hez képest. Azt is tudjuk, hogy p_H és p_B relatív prímek, így a Kínai maradéktétel szerint létezik olyan k is, ami egyszerre teljesíti a $k \equiv m \; mod \; p_H$ és $k \equiv n \; mod \; p_B$ feltételeket. Ekkor viszont a labda-minta p_B szerinti periodicitása miatt $h_k = h_m = h$ mellett már $b_k = b_n = b$ is teljesül, azaz: $\binom{h_k}{b_k} = \binom{h}{b}$. ■

5. Vissza a kaszkádhoz

Előző tételünk alapján, ha egy zsonglőr trükkben a kezek és labdák száma egymással relatív prím, akkor a zsonglőr trükk alap trükk. Ennek fordítottja általában nem igaz. Például a kétlabdás koszorú (amit úgy kapunk, hogy a fekete labdát eltávolítjuk az 1. ábrából): $\binom{L}{1}\binom{R}{1}\binom{L}{2}\binom{R}{2}$ nyilvánvalóan alap trükk, másrészt a kéz-minta periódusa 2, a labda-mintáé pedig 4, ezek pedig nem relatív prímek.

Az alábbi tétel segítségével belátjuk, hogy a 4. tétel fordítottja mégis igaz, ha vizsgálódásunkat csak a különböző kaszkád trükkökre korlátozzuk.

5. tétel: legyen J egy kaszkád p_H kézzel és p_B labdával. Ekkor J-nek van egy $lnko(p_H, p_B)$ elemű zárt partíciója, amiben az egyes részsorozatok alap trükkök.

Bizonyítás

Elkészítjük a feltételeknek megfelelő felbontást.

Legyen $J = \binom{h_1}{b_1}\binom{h_2}{b_2}\binom{h_3}{b_3} \dots$ és definiáljuk J_i-t $i = 1$-től $lnko(p_B, p_H)$-ig a következőképpen:

$$\binom{h_k}{b_k} \in J_i \Leftrightarrow i \equiv k \; mod \; lnko(p_H, p_B)$$

Ezzel elemenként szétszórtuk a sorozatot J_i-k be: az első elem J_1-be, a második J_2-be, a harmadik J_3-ba stb. került, aztán a végén az $lnko(p_B, p_H) + 1$-edik elem megint J_1-be, a következő J_2-be és így tovább.

Belátjuk, hogy az így megadott J_i-k valóban J zárt partícióját adják, továbbá mindegyik J_i alap trükk.

1) J_i-k nyilvánvalóan partícionálják J-t, csak azt kell megmutatnunk, hogy a partíció zárt. Ehhez legyen $h \in H$ tetszőleges kéz, és válasszunk olyan m-et és n-et, amire $h_n = h_m = h$ teljesül. A kérdés az, hogy $\binom{h_m}{b_m}$ és $\binom{h_n}{b_n}$ vajon ugyanabba J_i-be kerülnek-e. Tudjuk, hogy a kéz-minta p_H szerint periodikus, és minden kéz pontosan egyszer fordul elő egy cikluson belül, így $n \equiv m \; mod \; p_H$ teljesül, amiből a kongruencia fogalom tulajdonságai szerint: $n \equiv m \; mod \; lnko(p_H, p_B)$. Ez viszont pontosan azt jelenti, hogy $\binom{h_m}{b_m}$ és $\binom{h_n}{b_n}$ ugyanabban a J_i sorozatban vannak. Ugyanezt a gondolatmenet végrehajthatjuk a labdákra is, a kettőből együtt pedig következik a partíció zártsága.

2) Most bebizonyítjuk, hogy az egyes J_i-k alap trükkök. Vegyünk egy tetszőleges J_i-t, és válasszunk belőle két tetszőleges elemet, jelölje ezeket $\binom{h}{b'}$ és $\binom{h'}{b}$. Ha sikerül belátnunk, hogy $\binom{h}{b}$ is eleme J_i-nek akkor J_i-nek nincs valódi partícionálása, más szóval alap trükk.

Mivel $\binom{h}{b'}$ és $\binom{h'}{b}$ J_i-beli elemek, létezik olyan m és n amire egyrészt $\binom{h_m}{b_m} = \binom{h}{b'}$, $\binom{h_n}{b_n} = \binom{h'}{b}$, másrészt $i \equiv m \; mod \; lnko(p_H, p_B)$ és $i \equiv n \; mod \; lnko(p_H, p_B)$. Ez utóbbi két megállapítás szerint $lnko(p_H, p_B)$ osztója $m - i$-nek és $n - i$-nek.

Keressünk olyan l-t, ami megoldása az

$$l \equiv \frac{m - i}{lnko(p_H, p_B)} \; mod \; \frac{p_H}{lnko(p_H, p_B)}$$

$$l \equiv \frac{n - i}{lnko(p_H, p_B)} \; mod \; \frac{p_B}{lnko(p_H, p_B)}$$

egyenletrendszernek.

A legnagyobb közös osztó definíciójából következik, hogy $\frac{p_H}{lnko\,(p_H, p_B)}$ és $\frac{p_B}{lnko\,(p_H, p_B)}$ relatív prímek, így alkalmazhatjuk a kínai maradéktételt, ami egy, a feltételeknek eleget tevő l -t szolgáltat.

A kongruencia fogalom tulajdonságai miatt teljesül, hogy:

$$l \equiv \frac{m - i}{lnko(p_H, p_B)} \; mod \; \frac{p_H}{lnko(p_H, p_B)}$$

$$l * lnko(p_H, p_B) \equiv m - i \;\; mod \; p_H$$

$$l * lnko(p_H, p_B) + \; i \equiv m \; mod \; p_H$$

A kéz-minta p_H szerint periodikus, így $h_{l * lnko\,(p_H,\; p_B) + i} = h_m = h$ is fennáll.

Hasonlóan, a másik egyenletből:

$$l \equiv \frac{n - i}{lnko(p_H, p_B)} \; mod \; \frac{p_B}{lnko(p_H, p_B)}$$

$$l * lnko(p_H, p_B) \equiv n - i \;\; mod \; p_B$$

$$l * lnko(p_H, p_B) + \; i \equiv n \; mod \; p_B$$

A labda-minta p_B szerinti periodicitása miatt: $b_{l\,*\,lnko\,(p_H,\,p_B)+\,i} = b_n = b$ is fennáll.

Összefoglalva: $\binom{h_{l*lnko\,(p_H,p_B)+\,i}}{b_{l*lnko\,(p_H,p_B)+\,i}} = \binom{h_m}{b_n} = \binom{h}{b}$. Ráadásul $\binom{h_{l*lnko\,(p_H,p_B)+\,i}}{b_{l*lnko\,(p_H,p_B)+\,i}}$ csakugyan eleme J_i-nek, hiszen $l * lnko(p_H, p_B) + i \equiv i \, mod \, lnko(p_H, p_B)$. Megvan tehát a keresett elem, így J_i csakugyan alap trükk. ■

Következmény: a h labdás, b kezes kaszkád pontosan akkor „valódi”, ha h és b relatív prímek.

Bizonyítás:

1. Ha h és b relatív prímek, akkor a 4. tétel szerint a trükk alap trükk, azaz a szóban forgó kaszkád „valódi”.

2. Megfordítva tegyük fel, hogy a kaszkád „valódi”. Az 5. tétel szerint a kaszkádnak van egy $lnko(h, b)$ elemű zárt partícionálása felbontása. Mivel a szóban forgó kaszkád valódi, sorozatának csak egyetlen partícionálása van: a triviális partícionálás. Az 5. tétel által garantált partícionálás, tehát szükségképpen megegyezik ezzel. A triviális partíció viszont 1 elemű, amiből $lnko(h, b) = 1$ következik. Azaz h és b csakugyan relatív prímek. ■

6. Összefoglalás

Cikkünk a zsonglőr trükkök matematikai vizsgálatába nyújt bepillantást, a kaszkád tulajdonságainak elemzésével. A fogalom bevezetésekor abból a feltételezésből indultunk ki, hogy a kaszkád a legszimmetrikusabb zsonglőr trükk. Megmutattuk, hogy akárhány kezünk és labdánk van is, egyértelműen definiálhatunk egy kaszkádot, amiben a kezek ciklikusan, egymás után dobják fel a rögzített sorrendben érkező labdákat. Mivel a fogalmat ezelőtt nem definiálták formálisan, elképzelhető, hogy mások másképp gondolnak a kaszkádra, de a legtöbb zsonglőr, akivel kitárgyaltuk ezt a definíciót, elfogadhatónak tartotta. A legvitathatóbb talán a kettőnél több kézre való kiterjesztés volt.

Bevezettük az alap trükkök fogalmát is, ezek olyan zsonglőr trükkök, amiket nem lehet további résztrükkökre bontani. Elemi matematikai módszerekkel, és egyszerű számelméleti eredményekre támaszkodva beláttuk azt a zsonglőrök által jól ismert tényt, hogy kaszkád csak páratlan számú labdával mutatható be. Eredményeink szerint ennél több is igaz, miszerint a kaszkád pontosan akkor lesz „valódi”, ha a labdák és kezek száma egymással relatív prím.

Érdekes kérdés, hogy vannak-e más jól ismert trükkök, amiket a fentihez hasonló eszközökkel elemezhetnénk. Mi a helyzet a koszorúval, vagy a népszerű buzogány-passzolós trükkökkel?

A formális definíciók segíthetnének a trükkök osztályozásában és tulajdonságaik vizsgálatában. A cikkünkben tárgyalt alap trükk fogalom mellett, érdemes lenne vizsgálni a szimmetriát (mikor szimmetrikus egy trükk?), illetve a kényszerű dobásokat (időnként muszáj eldobni a labdát, mert a következő pillanatban már el kell kapni a következőt).

A kaszkád trükkök halmaza zárt a *trükk duálisának* képzésére. Hogy megkapjuk egy trükk duálisát, egész egyszerűen cseréljük fel a kezek és labdák halmazát, azaz játsszák most a labdák szerepét a kezek, és fordítva. Ha kaszkádból indulunk ki, a trükk duálisa is kaszkád lesz. Matematikailag a trükk és duálisa között nincs nagy különbség, a gyakorlatban azonban egyiket gyakran sokkal egyszerűbb bemutatni, mint a másikat, vagy ami ehhez köthető: az egyiket sokkal érdekesebb nézni, mint a másikat. Elég ha az egykezes, ötlabdás kaszkád, és duálisa az ötlabdás, egykezes kaszkád közötti különbséget említjük… Érdekes probléma lehet a különböző trükk osztályok és a dualitás kapcsolatának elemzése is.

Érdemes lenne jelölésmódunkat összevetni a siteswap leírásokkal is. Melyik siteswap leírás ad meg kaszkádot az általunk definiált értelemben? Mikor ír le alap trükköt egy siteswap leírás? Hogy terjeszthető ki a siteswap leírás kettőnél több kézre?

A saját jelölésmódunkat is kiterjeszthetjük, hogy trükkök bővebb halmazát vizsgálhassuk vele. Csak két példa: szinkron dobások (két vagy több dobás egy időben) és multiplex dobások (két vagy több labda egyszerre egy kézben).

Az általunk használt jelölés kicsit közelebb vihető a hagyományos siteswap leírásokhoz. A siteswapben mindig felváltva dob a jobb és bal kéz. Maga a leírás egy számsorozatból áll, amiben a számok azt jelentik, hogy az adott labdát hány ütem múlva kell ismét feldobni. Jelölésünk egyszerűen átalakítható egyfajta dupla siteswapre, ami annyival tud többet a normál siteswapnél, hogy benne a kezek dobásmintája sem rögzített. Az új jelölés szintén párok egy sorozatából áll, ahol az egyes párok azt adják meg, hogy az adott labdát hány ütem múlva dobjuk el legközelebb, és az adott kéz hány ütem múlva dob újra. Egyszerűbb trükkökre természetesen túlságosan terjengős ez a leírás, de szépen lehet vele szabálytalan kéz-mintát, illetve kettőnél több kezet igénylő trükköket leírni.