

数学实验报告 实验 2

顾真榕 计试 001 2183214664

2020 年 12 月 24 日

我已尽力为您呈现最佳的 Word 版本, 若您有时间, 我会强烈建议克隆 GitHub 上的仓库 <https://github.com/endaytrr/math-experiment-final.git>, 并使用 Typora 查看实验报告 README.md, 内含有视频演示.

摘要

本实验报告记录了进行实验 2 的过程和理论推导, 得出了相关结论, 作出了总结.

目录

数学实验报告 实验 2	1
摘要	2
目录	2
1. 问题陈述	3
2. 模型假设	3
3. 实验过程与结果	7
4. 模型简化与理论推导	8
总结与反思	13

1. 问题陈述

给定半径为 r , 无外力作用的固定的圆, 除圆上的一段区间为空隙外, 其余部分为刚性镜面. 有一质点, 在圆周上任意一点处向圆内随机发射, 遇到圆周则反弹, 运动过程中动能不损失. 该质点是否能从给定的空隙中射出? 若能射出, 在圆周内回弹的次数和空隙位置、发射位置、发射角度、空隙大小之间的关系如何?

2. 模型假设

2.1 几何图形建构

首先不考虑计算需要, 对质点的反射轨迹建立表达式表示.

由于反射角仅仅和入射角相关, 所以放缩圆的大小不会影响结果. 故在极坐标系中建立圆 $\rho = 1$. 同样, 结果和发射点与空隙的绝对位置无关, 但和两者的相对位置有关, 故固定小球的发射点位于 $(\rho, \theta) = (1, 0)$ 处, 并规定空隙中心点位置在于 θ_0 , 大小为 δ , 即空隙可表示为 $\{(1, \theta) | \theta \in [\theta_0 - \frac{\delta}{2}, \theta_0 + \frac{\delta}{2}]\}$. 以逆时针为正方向, 质点发射的角度和 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 的夹角为 ϕ , $\phi \in (0, \pi)$.

(在这一个段落的语境下, 所有的坐标表示均为直角坐标.) 根据第一条反射角过点 $(1, 0) = (\cos 0\phi, \sin 0\phi)$ 和发射的角度为 ϕ , 得知其所在直线方程 $y = -(x - 1)\cot\phi$. 直线和圆另一个交点 $(\cos 2\phi, \sin 2\phi)$, 发射的角度为 3ϕ , 可得: $y - \sin(2\phi) = -\cot(3\phi)(x - \cos(2\phi))$. 通过数学归纳法可知, 质点路径为:

$$\begin{cases} y - \sin(2n\phi) = -\cot((2n - 1)\phi)(x - \cos(2n\phi)), n \in \mathbb{N} \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$$

参数形式:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(2n\phi) - \sin((2n + 1)\phi)t \\ \sin(2n\phi) + \cos((2n + 1)\phi)t \end{bmatrix}, t \in [0, 2\sin\phi]$$

使用参数形式分别取 $t = 0$ 和 $t = 2\sin\phi$ 即可得到两个端点, 能极大减小复杂度, 并保证垂直的曲线绘制精确.

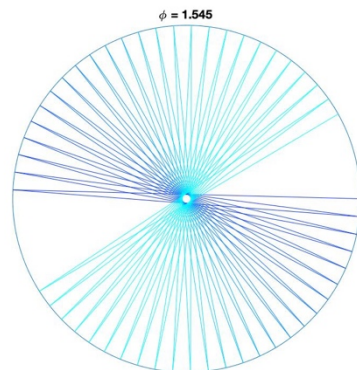
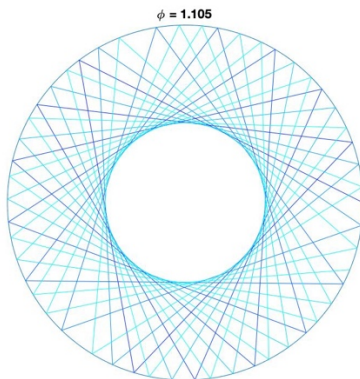
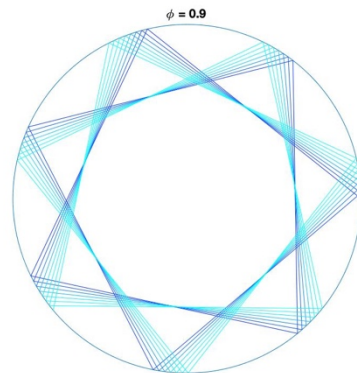
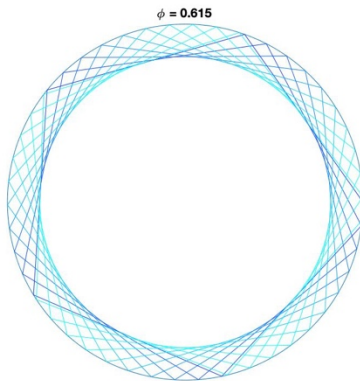
不考虑空隙此时可以绘制出由 50 次反射, ϕ 从0变化到 π 时的反射模式. 其中, 反射射线是逐渐减淡的, 运用到的算法是 $x_{n+1} = \text{rgb}(255, 255, 255) - 255 \left(\frac{\text{rgb}(255, 255, 255) - x_n}{255} \right)^p$, p 是渐变系数, 在下图中为 1.1. 1 以上越大渐变越快, 为 1 是不变, 介于 0 到 1 之间时向深色渐变.

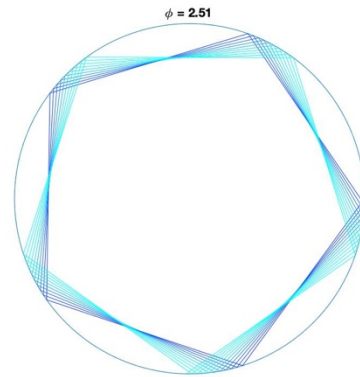
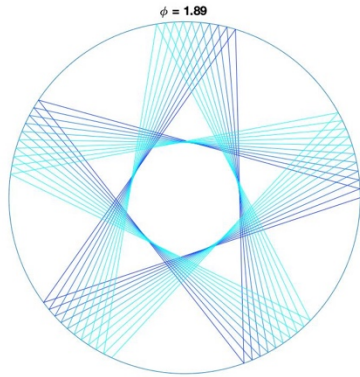
```
1 clear;
2 clc;
3
```

```

4 phiSet = 0.005:0.005:pi;
5 index = 1;
6 nSet = 0:50;
7
8 for phi = phiSet
9     t = linspace(0, 2 * sin(phi), 2);
10    plot(cos(linspace(-pi, pi, 1000)), sin(linspace(-pi, pi, 1000)))
11    curveColor = [0, 0.14, 1];
12    gradientMultiplier = 1.1;
13
14    for n = nSet
15        hold on;
16        x = cos(2 * n * phi) - t * sin((2 * n + 1) * phi);
17        y = sin(2 * n * phi) + t * cos((2 * n + 1) * phi);
18        plot(x, y, 'color', curveColor)
19        curveColor = [1 1 1] - ([1 1 1] - curveColor).^gradientMultiplier; % gradient color
20    end
21
22    hold off;
23    axis off;
24    title("\phi = " + phi)
25    daspect([1 1 1])
26    axis([-1, 1, -1, 1])
27    saveas(gcf, "fig1-" + index + '.jpg')
28    index = index + 1;
29 End

```



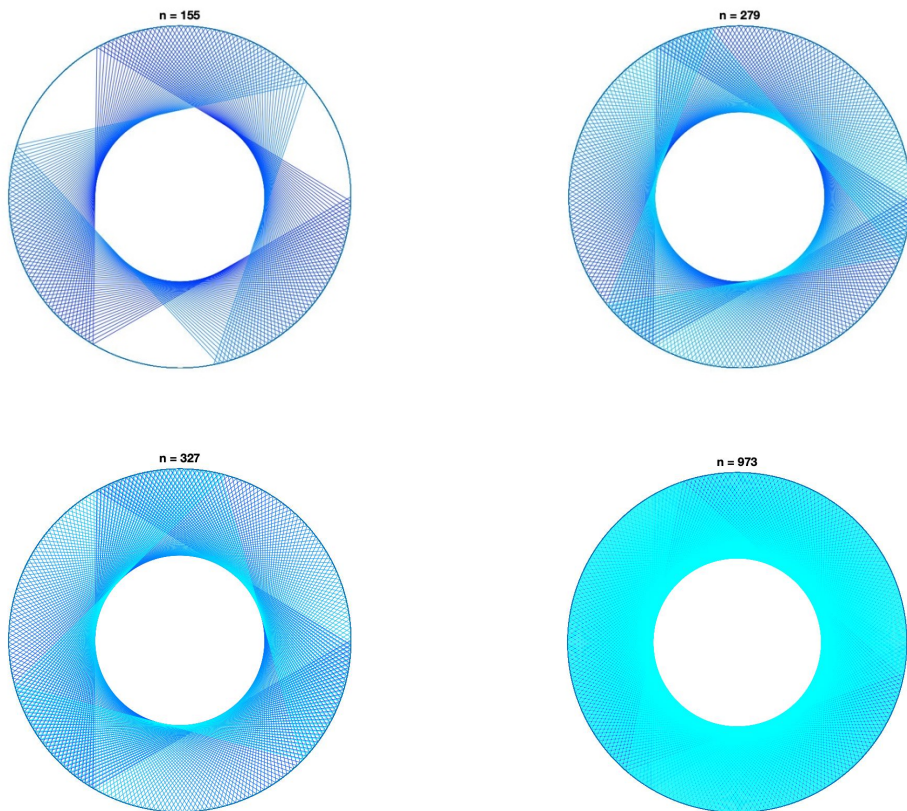


取得一个角度 $\phi = 2.09$, 反射次数按时间增加画出 1000 次反射(渐变系数为 1.01)

```

1  clear;
2  clc;
3
4  phi = 2.09;
5  index = 1;
6  nSet = 0:2:1000;
7  t = linspace(0, 2 * sin(phi), 2);
8  gradientMultiplier = 1.01;
9  curveColor = [0, 0.14, 1];
10 hold off;
11
12 for nRange = nSet
13     plot(cos(linspace(-pi, pi, 1000)), sin(linspace(-pi, pi, 1000)), 'color', [0 0.4470 0.741
14     0])
15     for n = nRange:nRange + 1
16         hold on;
17         x = cos(2 * n * phi) - t * sin((2 * n + 1) * phi);
18         y = sin(2 * n * phi) + t * cos((2 * n + 1) * phi);
19         plot(x, y, 'color', curveColor)
20         curveColor = [1 1 1] - ([1 1 1] - curveColor).^gradientMultiplier; % gradient color
21     end
22     axis off;
23     title("n = " + n)
24     daspect([1 1 1])
25     axis([-1, 1, -1, 1])
26     saveas(gcf, "fig2-" + index + '.jpg')
27     hold on;
28     index = index + 1;
29 End

```



向量表示

初值点: $\vec{x} = (x \ y)^T = (1 \ 0)^T$

路径上第 n 个端点:

$$\begin{aligned} \vec{x}_n = & (1 \ 0) + (\cos 2\phi - 1 \ \sin 2\phi) + \begin{pmatrix} \cos 2\phi & -\sin 2\phi \\ \sin 2\phi & \cos 2\phi \end{pmatrix} (\cos 2\phi - 1 \ \sin 2\phi) \\ & + \begin{pmatrix} \cos 2\phi & -\sin 2\phi \\ \sin 2\phi & \cos 2\phi \end{pmatrix}^2 (\cos 2\phi - 1 \ \sin 2\phi) + \dots \\ & + \begin{pmatrix} \cos 2\phi & -\sin 2\phi \\ \sin 2\phi & \cos 2\phi \end{pmatrix}^{n-2} (\cos 2\phi - 1 \ \sin 2\phi) \end{aligned}$$

2.2 图形抽象

在反射前, 质点轨迹的弦对应的圆心角为 2ϕ . 经过一次反射后, 入射角为 $\frac{\pi}{2}$, 弦长、弦所对于圆心角仍然不变. 将反射点认定为新的发射点, 在圆上相对来说和第一次发射的情景是完全相同的.

由此通过归纳法可知:

通用反射关系表达

$$2x\phi \in [\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta] \pmod{2\pi}, x \in N^*$$

2.3 代码实现

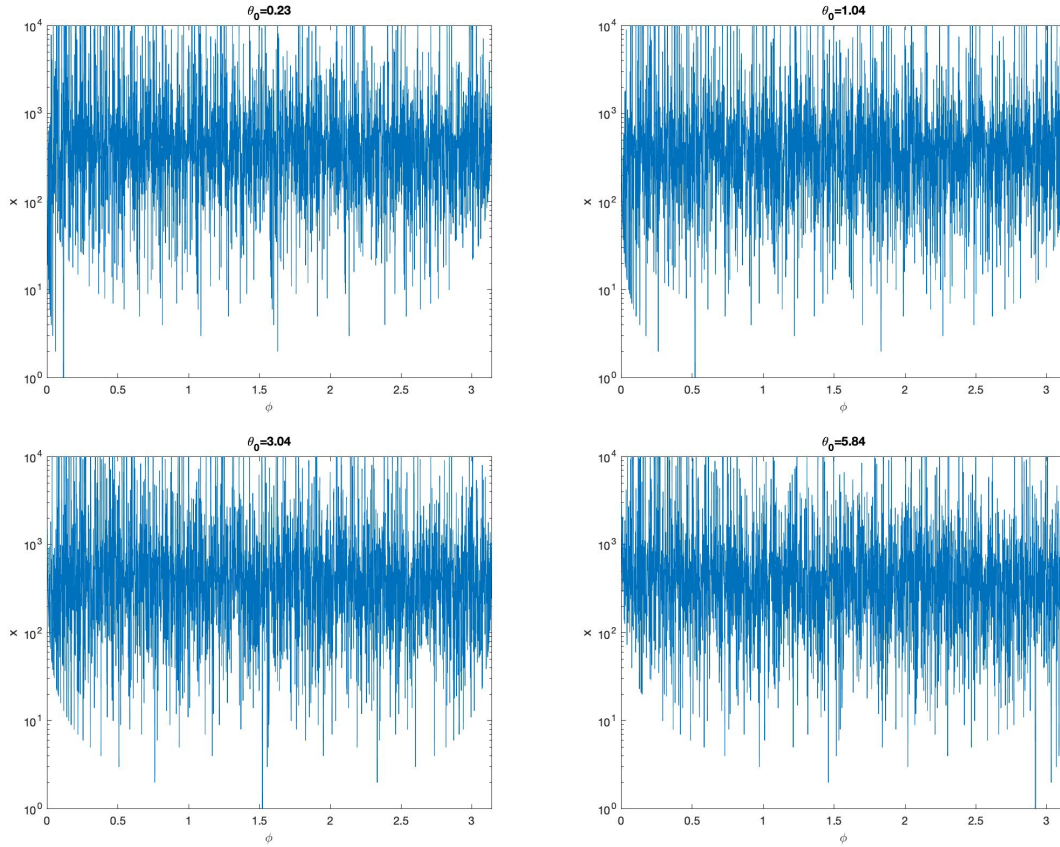
```

1  clear;
2  clc;
3  index = 1;
4  delta = 0.01;
5  phi = 0.001:0.001:pi - 0.001;
6  theta_0 = 0.01:0.01:2 * pi - 0.001;
7
8  for thetaPoint = theta_0
9      res = [];
10
11     for phiPoint = phi
12         x = 0;
13         reflectionAngle = 0;
14
15         while (reflectionAngle > thetaPoint + delta / 2 || reflectionAngle < thetaPoint -
16               delta / 2) && x < 10000
17             reflectionAngle = mod((reflectionAngle + 2 * phiPoint), 2 * pi);
18             x = x + 1;
19         end
20         res = [res, x];
21     end
22
23     semilogy(phi, res)
24     title(['\theta_0=' + round(thetaPoint, 2)]);
25     xlabel("\phi")
26     ylabel("x")
27     axis([0, pi, 1, 10000])
28     saveas(gcf, "fig3-" + index + '.jpg')
29     index = index + 1;
30
31 end
32

```

3. 实验过程与结果

首先考察反射次数 x 与 ϕ 的关系. 固定 θ_0 不变, 作出 $x - \phi(x)$ 的图像, 随后根据时间变化 ϕ 为方便观察, 图像是在线性 - 对数坐标系中画出:



可见, 当 θ_0 图像呈现震荡状, 但局部下确界总体呈现一条凹的曲线形式, 却在中间一点处不平滑. 并且图像在于 $\phi \rightarrow 0$ 和 $\phi \rightarrow 2\pi$ 时, 图像的局部下确界出现了特征峰. 其他区域呈现分层状, 在部分位置也出现了较小的特征峰.

4. 4. 模型简化与理论推导

4.1 狭缝宽度为 0 时的理想情况

简化条件, 若 $\delta = 0$, 原通用反射关系表达可转化为如下的同余方程:

$$2x\phi \equiv \theta_0 \pmod{2\pi}, x \in \mathbb{N}^*$$

转化为二元方程:

$$2\phi x - 2\pi y = \theta_0, x \in \mathbb{N}^*, y \in \mathbb{N}$$

由于 θ 是一个小于 π 的角度, θ_0 又大于 0, 故一定有 $y < x$.

分别取 $y \in \mathbb{N}$, 将 $D(x)$ 拓展为 \mathbb{R} , 得到一曲线族 $S_L = \left\{ x = \frac{\theta_0 + 2y\pi}{2\phi} \mid y \in \mathbb{N} \right\}$. 曲线族上满足 $x \in \mathbb{N}^*$ 的点为所有满足在圆内反射 y 周内达到狭缝的 (ϕ, x) 坐标. 所有满足条件的 ϕ 的集合:

$$\Phi_L = \left\{ \frac{\theta_0}{2}, \frac{\theta_0}{4}, \frac{\theta_0}{4} + \frac{\pi}{2}, \frac{\theta_0}{6}, \frac{\theta_0}{6} + \frac{1}{3}\pi, \frac{\theta_0}{6} + \frac{2}{3}\pi, \dots \right\}$$

特殊地,

- $y = x - 1$ 时, 有: $x = \frac{\theta_0 - 2\pi}{2\phi - 2\pi}$;
- $y = x - 2$ 时, 有: $x = \frac{\theta_0 - 4\pi}{2\phi - 2\pi}$;
- ...
- 给定 $\forall m \in [1, +\infty) \cap \mathbb{N}^*$, 当 $y = x - m, x \in [m, +\infty)$ 时, 有 $x = \frac{\theta_0 - 2m\pi}{2\phi - 2\pi}$.

故这些曲线也可以得到曲线族 $S_R = \left\{ x = \frac{\theta_0 - 2n\pi}{2\phi - 2\pi} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$

当 x 取整数时, $\phi = \frac{\theta_0 + 2(x-n)\pi}{2x}$.

所有满足条件的 ϕ 的集合:

$$\Phi_R = \left\{ \frac{\theta_0}{4} + \frac{\pi}{2}, \frac{\theta_0}{6} + \frac{1}{3}\pi, \frac{\theta_0}{6} + \frac{2}{3}\pi, \frac{\theta_0}{8} + \frac{1}{4}\pi, \frac{\theta_0}{8} + \frac{2}{4}\pi, \frac{\theta_0}{8} + \frac{3}{4}\pi, \dots \right\}$$

令 $\Phi = \Phi_L \cup \Phi_R = \Phi_L$. 若考虑重复元素, Φ 要么是有限集, 要么是可数集. 下面证明其为可数集:

假设 Φ 为有限集, 其每一个元素必然可以用 $\frac{\theta_0}{2k} + \frac{l}{k}\pi$ 表出, 其中 k 和 l 是有界的, 设 k 的上确界为 K .

但元素 $\frac{\theta_0}{2K+2} + \frac{1}{K+1}\pi$ 符合上述形式, 并且此元素一定严格小于任何一个可以被 $\frac{\theta_0}{2k} + \frac{l}{k}\pi$ 表出的元素, 否则 $\theta_0 < 0$, 和假设矛盾;

所以, Φ 是可数集, 势为 \aleph_0 , 而 ϕ 所有可能取值的集合为 $(0, \pi) \sim \mathbb{R}$, 势为 \aleph , 故若随机选取 ϕ , 其从狭缝中射出的概率为 0, 记为射出次数为 ∞ , 但若 $\phi \in \Phi$, 则可以在有限次反射内射出. 即:

$$x = \begin{cases} \infty, \forall m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*, m < n, \phi \neq \frac{\theta_0}{2n} + \frac{m}{n}\pi \\ 0, \forall m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*, m < n, \phi = \frac{\theta_0}{2n} + \frac{m}{n}\pi \end{cases}$$

验证结果: 假设 $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$, $\phi = \frac{\pi}{3}$, 此时显然是无法反射出去的.

条件 $\phi = \frac{\theta_0}{2n} + \frac{m}{n}\pi$ 可以化简为整数的同余方程 $2n \equiv 1 \pmod{m}$, 即 n 是 2 的模 m 意义下的乘法逆元, $n = 2^{m-2} \pmod{m} < m$, 故无解.

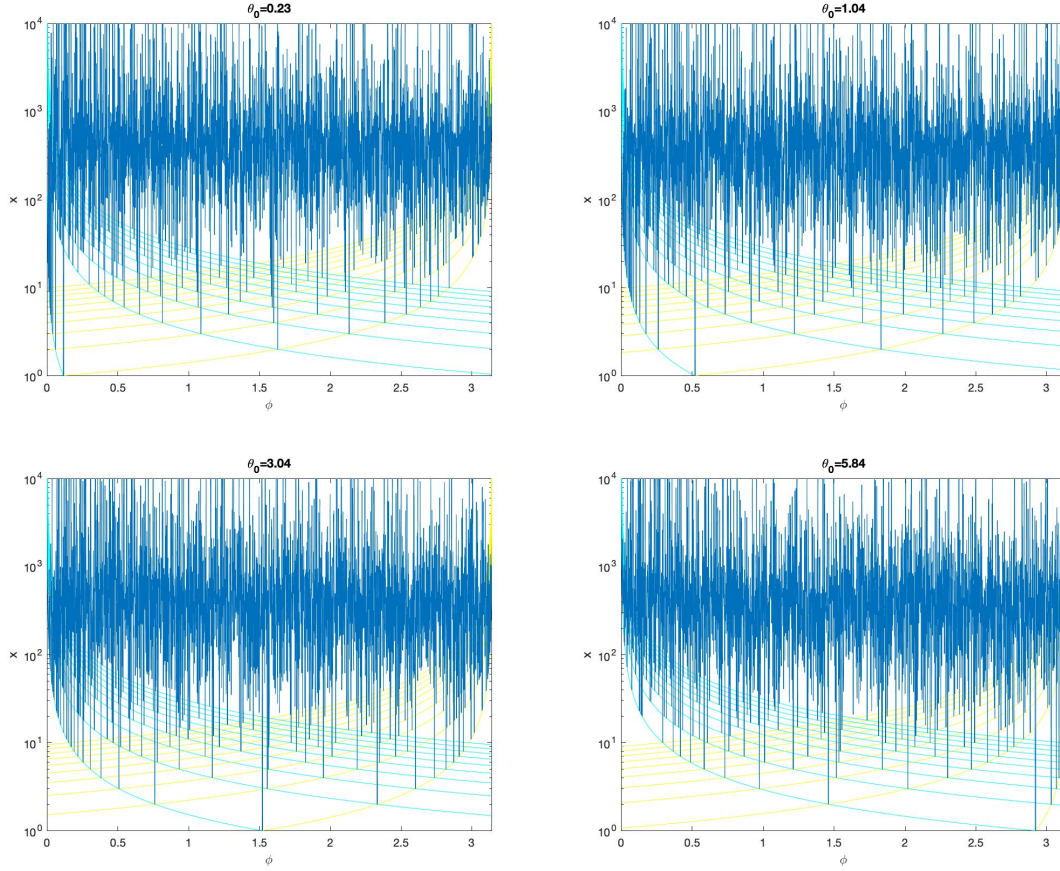
对于上述无法射出的情况 (为方便起见, 之后称之为情况 $\circ Spec$), 其一般特征是经过多次反射后返回了原点, 即 $2n\phi = 2k\pi$, 或 ϕ 是 π 的有理数倍. 此时若 θ_0 是 ϕ 的整数倍, 则可以射出, 反之无法射出, 且最近的反射点与狭缝相差有限量.

在图上画出 $m \leq 10$ 时的图像, 取 δ 为很小的有限量, 和原图像比对, 局部极小值在 $\phi \in \Phi$ 时的分层性状基本吻合. 演示及其代码如下:

```

1  clear;
2  clc;
3
4  index = 1;
5  delta = 0.01;
6  phi = 0.001:0.001:pi - 0.001;
7  theta_0 = 0.01:0.01:2 * pi - 0.001;
8
9  for thetaPoint = theta_0
10     res = [];
11
12     for phiPoint = phi
13         x = 0;
14         reflectionAngle = 0;
15
16         while (reflectionAngle > thetaPoint + delta / 2 || reflectionAngle < thetaPoint - del
ta / 2) && x < 10000
17             reflectionAngle = mod((reflectionAngle + 2 * phiPoint), 2 * pi);
18             x = x + 1;
19         end
20
21         res = [res, x];
22     end
23
24     for i = 0:1:9
25         semilogy(phi, (thetaPoint - 2 * (i + 1) * pi) ./ (2 * phi - 2 * pi), 'y')
26         hold on;
27         semilogy(phi, (thetaPoint + 2 * i * pi) ./ (2 * phi), 'c')
28         hold on;
29     end
30
31     semilogy(phi, res, 'color', [0 0.4470 0.7410])
32     hold off;
33     title(["\theta_0=" + round(thetaPoint, 2)]);
34     xlabel("\phi")
35     ylabel("x")
36     axis([0 pi 1 10000])
37     saveas(gcf, "fig4-" + index + '.jpg')
38     index = index + 1;
39
40 End

```



4.2 狭缝宽度趋于 0 的理想情况

即 $\forall \varepsilon > 0, \delta < \varepsilon$.

除情况 $\circ Spec$ 之外, 对于 $\forall \phi$, 可以证明若给定 $\varepsilon > 0$, 可以在有限次反射内射出.

即证明: 除情况 $\circ Spec$ 外, 对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in \mathbb{N}^*, y \in \mathbb{N}$, 使得 $|2\phi x - 2\pi y - \theta_0| < \varepsilon$

1. $\phi = \frac{p}{q}\pi, (p, q \in \mathbb{N}^*)$, 此时根据 4.1 的结论, 对于非 $\circ Spec$ 情况 $\exists x \in \mathbb{N}^*, y \in \mathbb{N}$ 使得 $|2\phi x - 2\pi y - \theta_0| = 0 < \varepsilon$
2. $\phi = \lambda\pi, (\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$:

由于 $\phi > 0, \pi > 0$, 故一定 $\exists k_1 \in \mathbb{N}$ 使得 $k_1\phi > 2\pi$ 且 $(k_1 - 1)\phi < 2\pi$;

此时, 存在 $x \in [0, k_1), y = 0$ 使得 $2\phi x - 2\pi y$ 和 θ_0 的差距在 ϕ 以内; 同时必有 $\phi_2 = k_1\phi - 2\pi < \phi$, 否则 $(k_1 - 1)\phi \geq 2\pi$.

若 $\phi_2 \leq \frac{\phi}{2}$, 不对 ϕ_2 进行任何操作;

否则, 设 $\phi_2 = \phi - \psi, \psi \in (0, \frac{\phi}{2})$, 故, $\mu(k_2\phi - 2\pi) = \iota_1\phi + v\mu\phi_2 = \iota_2\phi + (\phi - \mu\psi)$, 只要取 $\mu = \left\lfloor \frac{\phi}{2\psi} \right\rfloor$, k_2 变为 μk_2 , $\phi_2 = (\phi - \mu\psi)$ 即可, 此时 $\phi_2 \leq \frac{\phi}{2}$

由于 $\phi_2 > 0$, 故一定 $\exists k_2 \in \mathbb{N}$ 使得 $k_2\phi_2 > 2\pi$ 且 $(k_2 - 1)\phi_2 < 2\pi$;

此时, 存在 $x = pk_1, 0 < p < k_2, y = p$ 使得 $2\phi x - 2\pi y$ 和 θ_0 的差距在 ϕ_2 以内;
同时必有 $\phi_3 = k_2\phi_2 - 2\pi < \phi_2$, 否则 $(k_2 - 1)\phi \geq 2\pi$.

再对 k_2 进行如上变换, 可以继续保证 $\phi_3 \leq \frac{\phi_2}{2} \leq \frac{\phi}{4}$.

以此类推, 可构造数列 $\{\phi, \phi_2, \phi_3, \dots\}$ 是单调递减且有界的, 故该数列收敛. 该数列每一项都小于等于数列 $\{\phi, \frac{\phi}{2}, \frac{\phi}{4}, \dots, \frac{\phi}{2^n}, \dots\}$ 中的对应项, 根据夹逼准则, 因此, 该数列收敛于 0. 故对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in \mathbb{N}^*, y \in \mathbb{N}$, 使得 $|2\phi x - 2\pi y - \theta_0| < \varepsilon$.

4.3 狭缝宽度有限的一般情况

对于情况 $\circ Spec, 2n\phi = 2k\pi$, 对于随机给定的 θ_0 , 狭缝包含任意一个反射点的概率为 $\max(\frac{n\delta}{\pi}, 1)$, 故有有限的概率可以反射出.

其他情况, 根据 4.2 中的结论, 一定可以反射出.

固定特定的 $\theta_0 = 1.5$, 对宽度的变换为时间进行画图. 代码如下

```

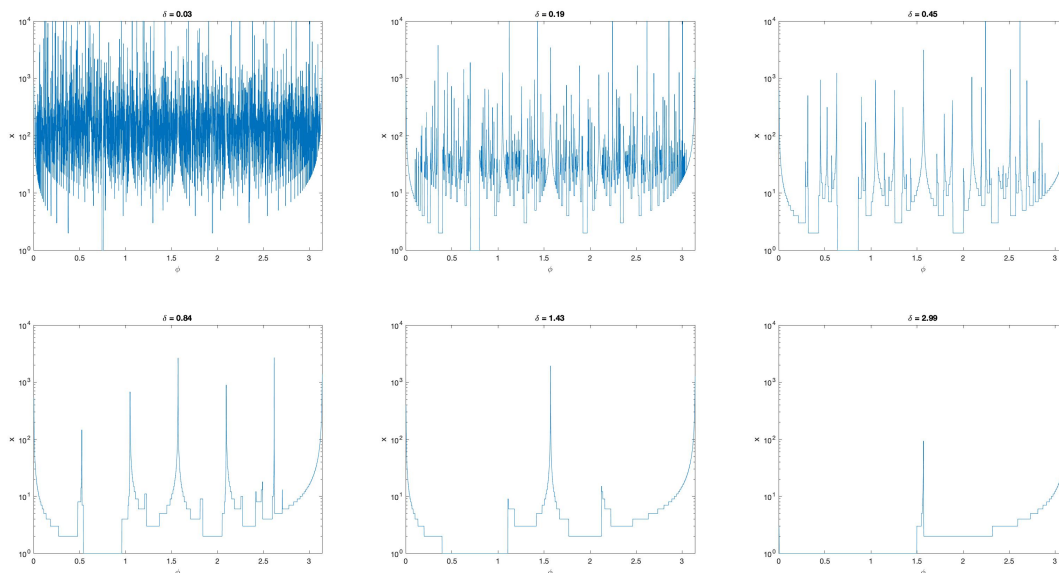
1  clear;
2  clc;
3  index = 1;
4  deltaSet = 0.01 : 0.01 : pi - 0.01;
5  phi = 0.001 : 0.001 : pi - 0.001;
6  thetaPoint = 1.5;
7
8  for delta = deltaSet
9      res = [];
10
11     for phiPoint = phi
12         x = 0;
13         reflectionAngle = 0;
14
15         while (reflectionAngle > thetaPoint + delta / 2 || reflectionAngle < thetaPoint - del
ta / 2) && x < 10000
16             reflectionAngle = mod((reflectionAngle + 2 * phiPoint), 2 * pi);
17             x = x + 1;
18         end
19
20         res = [res, x];
21     end
22
23     semilogy(phi, res)
24     xlabel("\phi")
25     ylabel("x")

```

```

26     titleText = "\delta = " + round(delta, 2);
27     title([titleText]);
28     axis([0, pi, 1, 10000])
29     saveas(gcf, "fig5-" + index + '.jpg')
30     index = index + 1;
31 End

```



总结与反思

综上所述, 对于狭缝宽度为 0 的情况, 仅有可数个发射角度可以使小球射出; 对于任意小的宽度, 仅有可数个发射角度不能使小球射出; 对于有限小的宽度, 对于随机的狭缝位置, 所有的角度都可能使小球射出; 但有可数个发射角度小球仅仅是有概率射出, 其他的则是必定射出.

本文针对实验结果, 着重分析了狭缝宽度为零情况下射出前反弹次数和发射角度、狭缝位置的关系, 给出了具体的表达式; 以及宽度为有限的情况下, 对于反射角度和 π 的比值为有理数式射出概率的公式. 理论推导, 公式和实验数据相符.

在数学实验中, 我进一步学会了理论与实践结合的方式, 同时加深了对数学软件运用的理解与课上知识的熟练运用. 不过, 在实验过程中, 我难免遇到了软件不熟练, 以至于先用 Python 写一遍后来翻译成 Matlab 的过程; 以及对理论推导不够深入的问题. 但总之, 此次数学实验给今后的运用带来很好的价值.