# 

# 数学实验报告 实验2

顾真榕 计试001 2183214664

2020年12月24日

我已尽力为您呈现最佳的Word版本, 若您有时间, 我会强烈建议克隆GitHub上的仓库[https://github.com/endaytrer/math-experiment-final.git](https://github.com/endaytrer/math-experiment-final), 并使用Typora查看实验报告README.md, 内含有视频演示.

## 摘要

本实验报告记录了进行实验2的过程和理论推导, 得出了相关结论, 作出了总结.

## 目录

数学实验报告 实验2 1

摘要 2

目录 2

1. 问题陈述 3

2. 模型假设 3

3. 实验过程与结果 7

4. 4. 模型简化与理论推导 8

总结与反思 13

### 问题陈述

给定半径为, 无外力作用的固定的的圆, 除圆上的一段区间为空隙外, 其余部分为刚性镜面. 有一质点, 在圆周上任意一点处向圆内随机发射, 遇到圆周则反弹, 运动过程中动能不损失. 该质点是否能从给定的空隙中射出? 若能射出, 在圆周内回弹的次数和空隙位置、发射位置、发射角度、空隙大小之间的关系如何?

### 模型假设

#### 2.1 几何图形建构

首先不考虑计算需要, 对质点的反射轨迹建立表达式表示.

由于反射角仅仅和入射角相关, 所以放缩圆的大小不会影响结果. 故在极坐标系中建立圆. 同样, 结果和发射点与空隙的绝对位置无关, 但和两者的相对位置有关, 故固定小球的发射点位于处, 并规定空隙中心点位置在于, 大小为, 即空隙可表示为. 以逆时针为正方向, 质点发射的角度和的夹角为, .

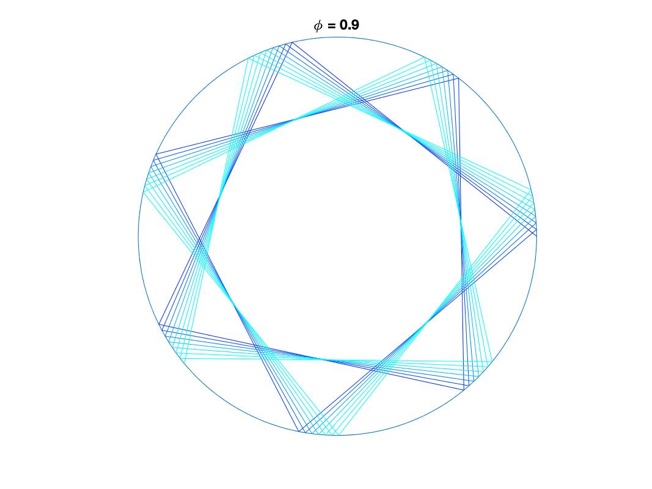
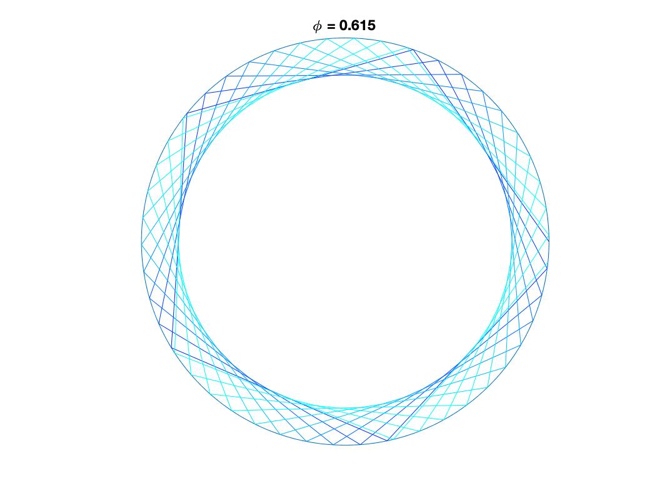
(在这一个段落的语境下, 所有的坐标表示均为直角坐标.) 根据第一条反射角过点和发射的角度为, 得知其所在直线方程. 直线和圆另一个交点, 发射的角度为, 可得: . 通过数学归纳法可知, 质点路径为:

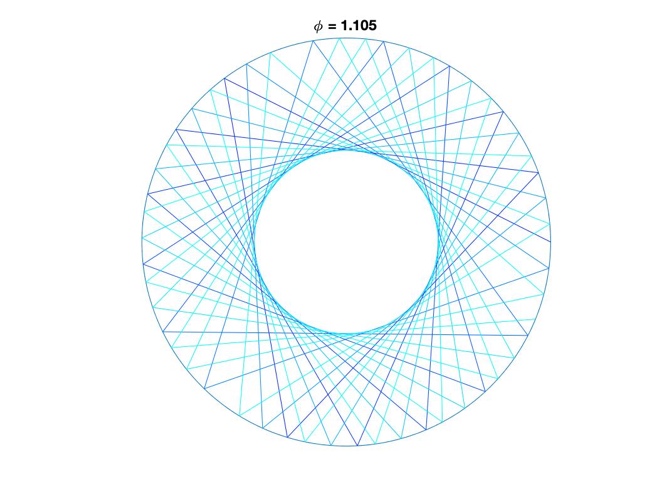
参数形式:

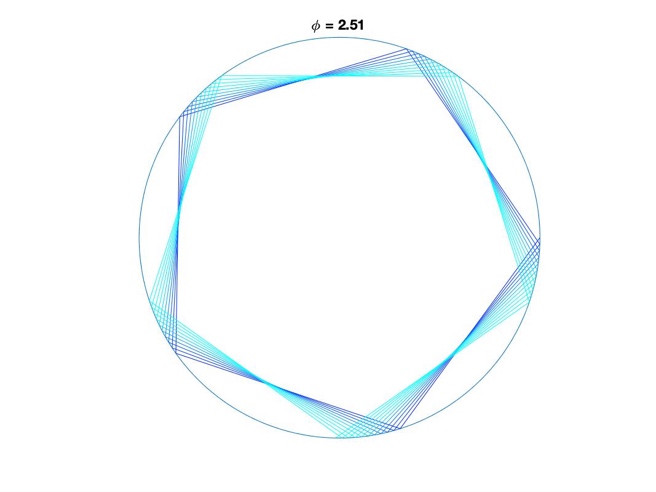
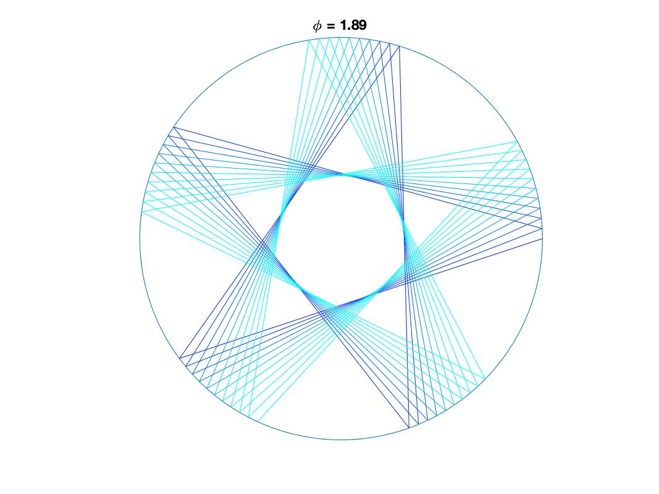
使用参数形式分别取和即可得到两个端点, 能极大减小复杂度, 并保证垂直的曲线绘制精确.

不考虑空隙此时可以绘制出由50次反射, 从变化到时的反射模式. 其中, 反射射线是逐渐减淡的, 运用到的算法是, p是渐变系数, 在下图中为1.1. 1以上越大渐变越快, 为1是不变, 介于0到1之间时向深色渐变.

1. clear;
2. clc;
3. phiSet = 0.005:0.005:pi;
4. index = 1;
5. nSet = 0:50;
6. for phi = phiSet
7. t = linspace(0, 2 \* sin(phi), 2);
8. plot(cos(linspace(-pi, pi, 1000)), sin(linspace(-pi, pi, 1000)))
9. curveColor = [0, 0.14, 1];
10. gradientMultiplier = 1.1;
11. for n = nSet
12. hold on;
13. x = cos(2 \* n \* phi) - t \* sin((2 \* n + 1) \* phi);
14. y = sin(2 \* n \* phi) + t \* cos((2 \* n + 1) \* phi);
15. plot(x, y, 'color', curveColor)
16. curveColor = [1 1 1] - ([1 1 1] - curveColor).^gradientMultiplier; % gradient color
17. end
18. hold off;
19. axis off;
20. title("\phi = " + phi)
21. daspect([1 1 1])
22. axis([-1, 1, -1, 1])
23. saveas(gcf, "fig1-" + index + '.jpg')
24. index = index + 1;
25. End

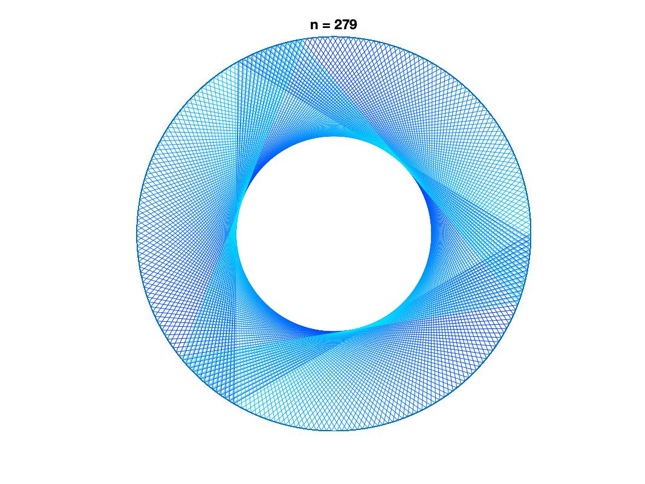
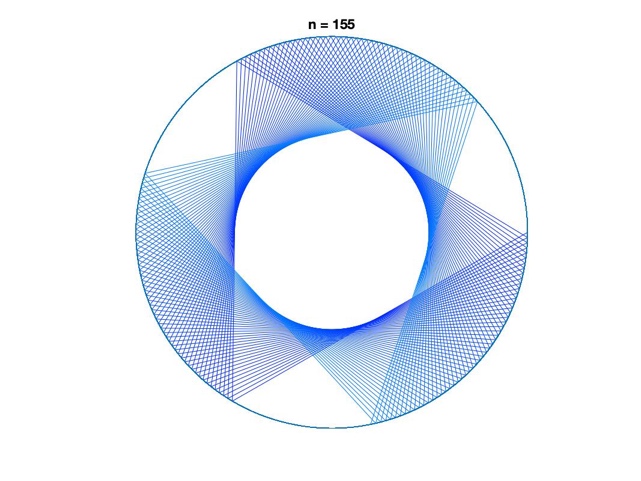


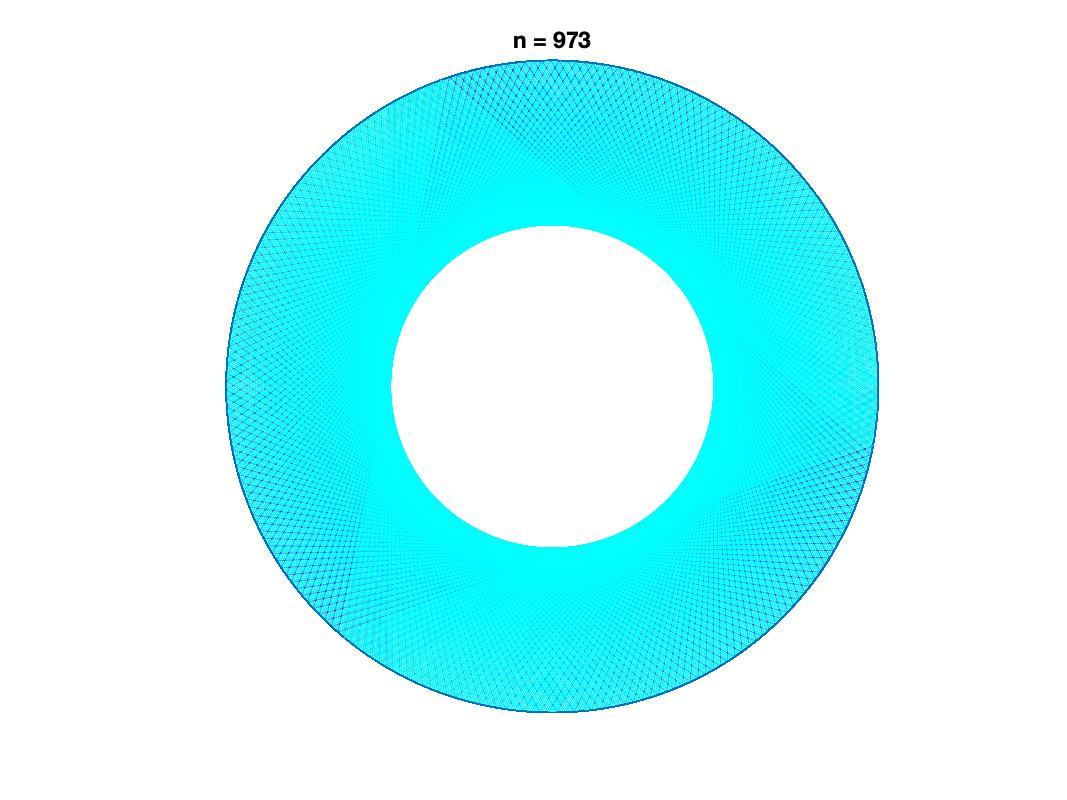
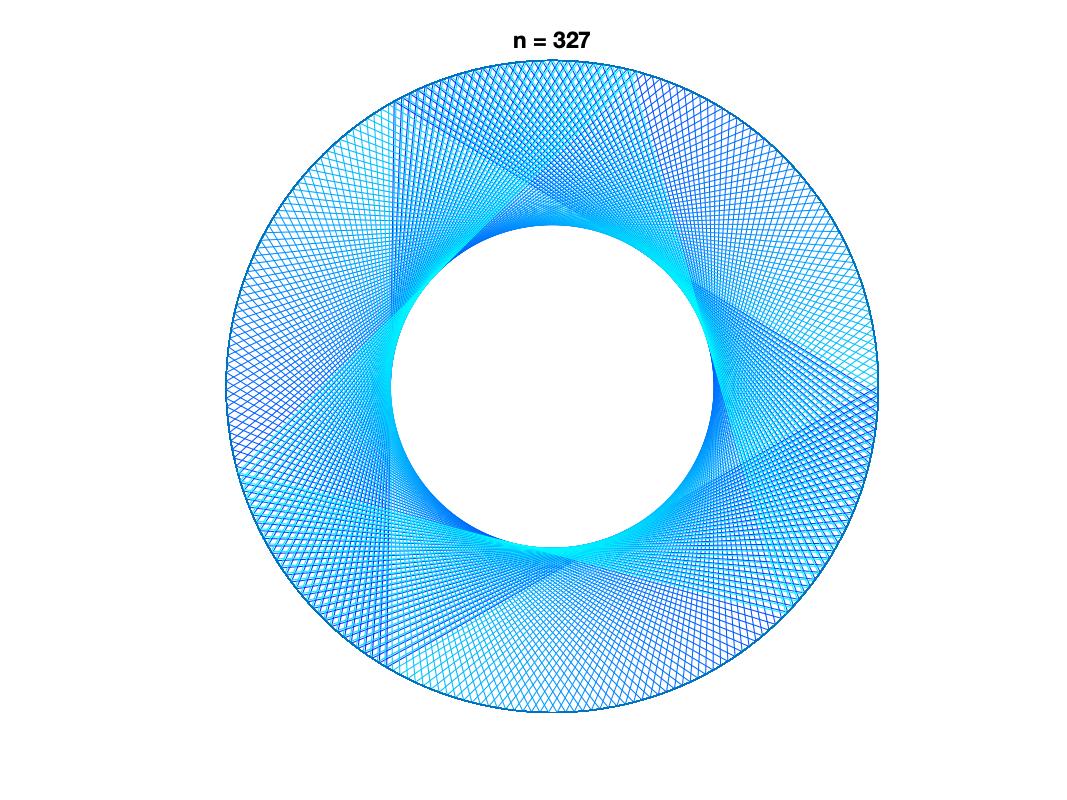




取得一个角度, 反射次数按时间增加画出1000次反射(渐变系数为1.01)

1. clear;
2. clc;
3. phi = 2.09;
4. index = 1;
5. nSet = 0:2:1000;
6. t = linspace(0, 2 \* sin(phi), 2);
7. gradientMultiplier = 1.01;
8. curveColor = [0, 0.14, 1];
9. hold off;
10. for nRange = nSet
11. plot(cos(linspace(-pi, pi, 1000)), sin(linspace(-pi, pi, 1000)), 'color', [0 0.4470 0.7410])
12. for n = nRange:nRange + 1
13. hold on;
14. x = cos(2 \* n \* phi) - t \* sin((2 \* n + 1) \* phi);
15. y = sin(2 \* n \* phi) + t \* cos((2 \* n + 1) \* phi);
16. plot(x, y, 'color', curveColor)
17. curveColor = [1 1 1] - ([1 1 1] - curveColor).^gradientMultiplier; % gradient color
18. end
19. axis off;
20. title("n = " + n)
21. daspect([1 1 1])
22. axis([-1, 1, -1, 1])
23. saveas(gcf, "fig2-" + index + '.jpg')
24. hold on;
25. index = index + 1;
26. End





**向量表示**

初值点:

路径上第n个端点:

#### 2.2 图形抽象

在反射前, 质点轨迹的弦对应的圆心角为. 经过一次反射后, 入射角为, 弦长、弦所对于圆心角仍然不变. 将反射点认定为新的发射点, 在圆上相对来说和第一次发射的情景是完全相同的.

由此通过归纳法可知:

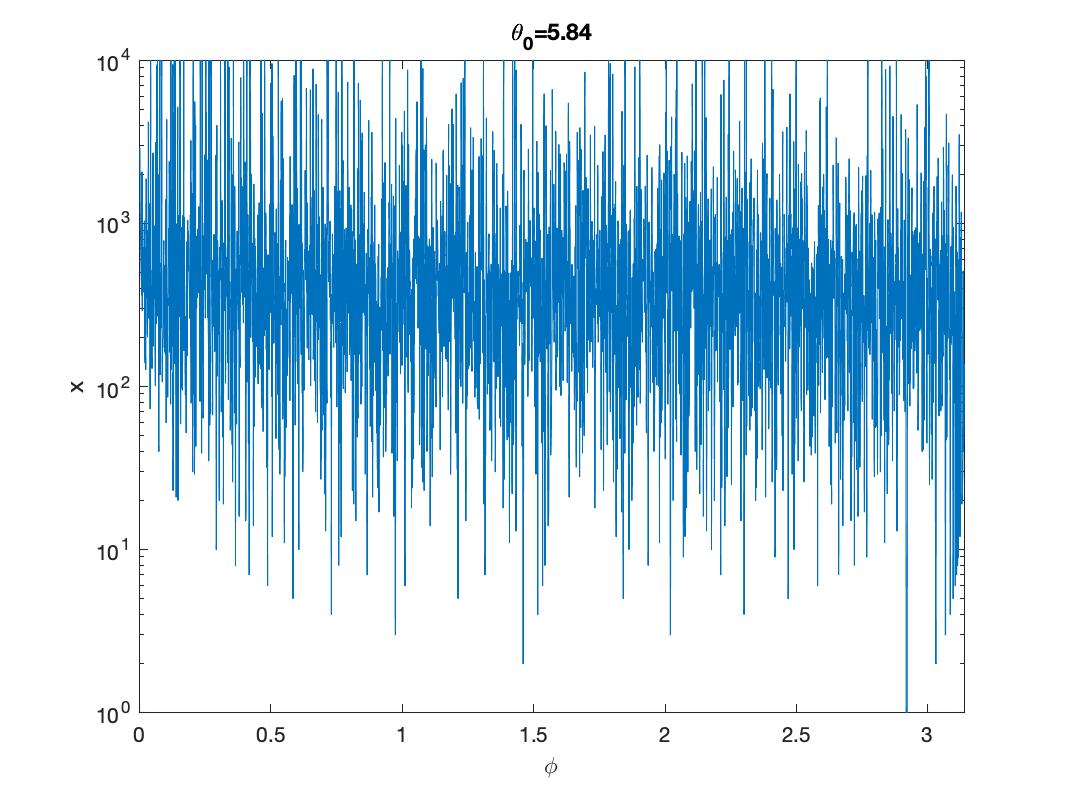
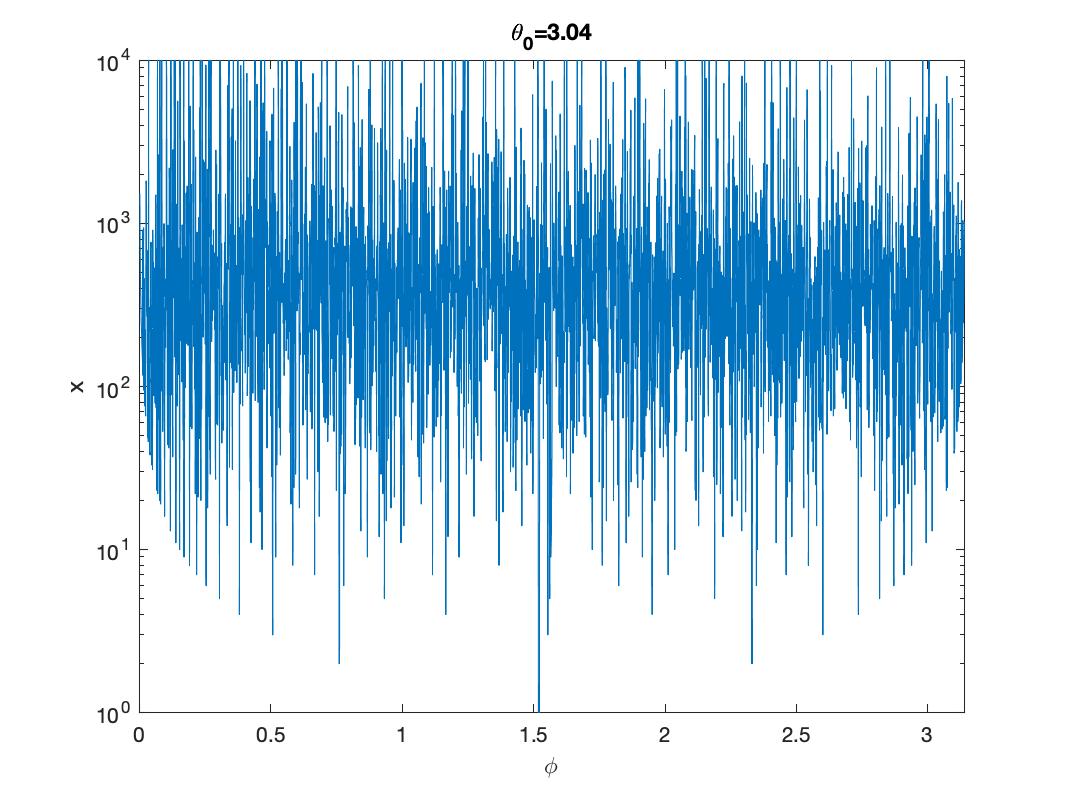
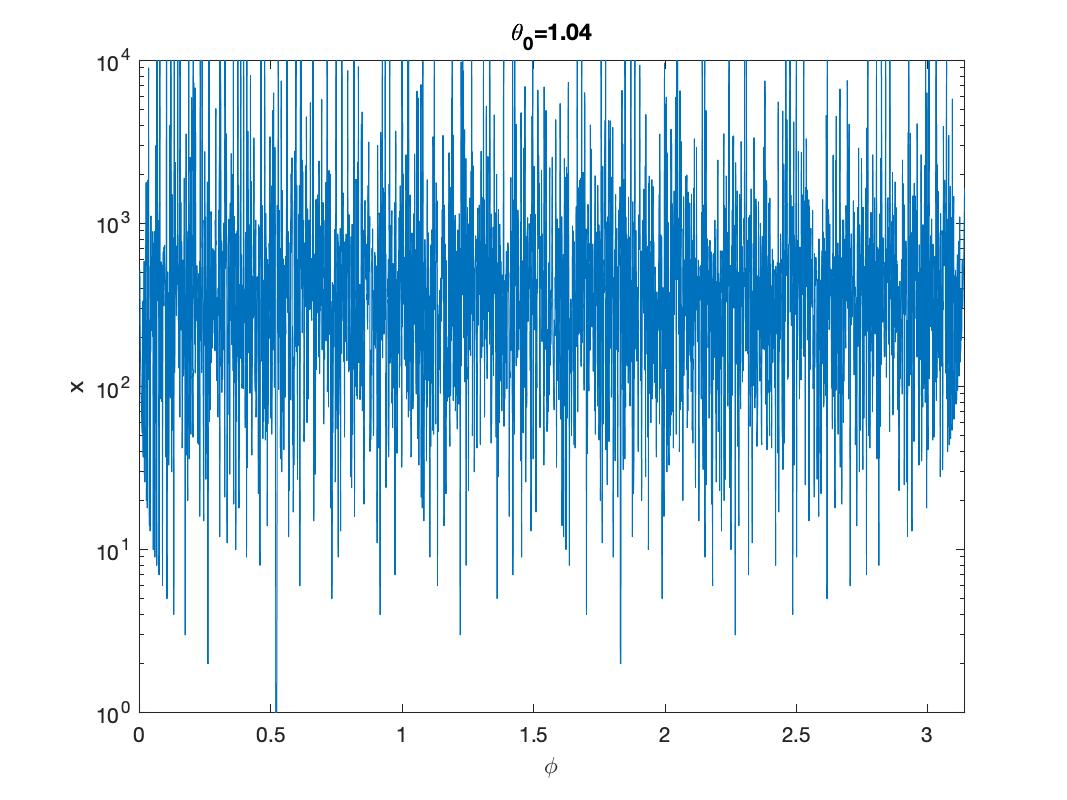
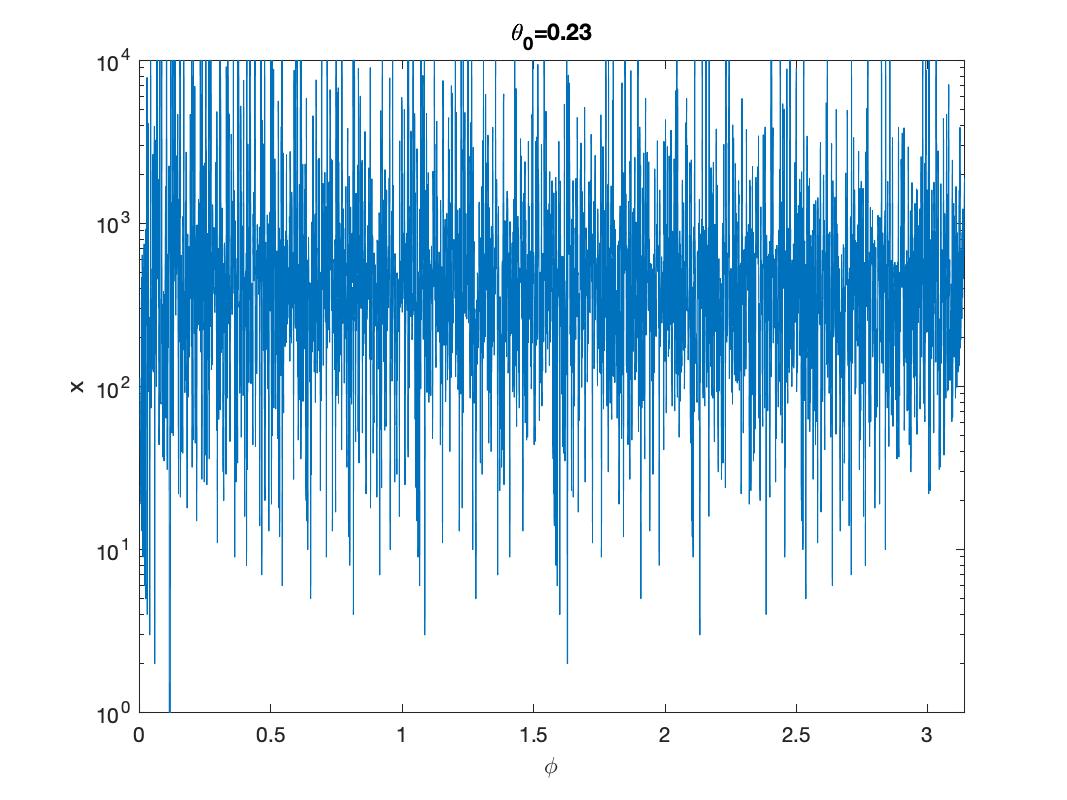
**通用反射关系表达**

#### 2.3 代码实现

1. clear;
2. clc;
3. index = 1;
4. delta = 0.01;
5. phi = 0.001:0.001:pi - 0.001;
6. theta\_0 = 0.01:0.01:2 \* pi - 0.001;
7. for thetaPoint = theta\_0
8. res = [];
9. for phiPoint = phi
10. x = 0;
11. reflectionAngle = 0;
12. while (reflectionAngle > thetaPoint + delta / 2 || reflectionAngle < thetaPoint - delta / 2) && x < 10000
13. reflectionAngle = mod((reflectionAngle + 2 \* phiPoint), 2 \* pi);
14. x = x + 1;
15. end
16. res = [res, x];
17. end
18. semilogy(phi, res)
19. title(["\theta\_0=" + round(thetaPoint, 2)]);
20. xlabel("\phi")
21. ylabel("x")
22. axis([0, pi, 1, 10000])
23. saveas(gcf, "fig3-" + index + '.jpg')
24. index = index + 1;
25. end

### 实验过程与结果

首先考察反射次数与的关系. 固定不变, 作出 - 的图像, 随后根据时间变化为方便观察, 图像是在线性 - 对数坐标系中画出:



可见, 当图像呈现震荡状, 但局部下确界总体呈现一条凹的曲线形式, 却在中间一点处不平滑. 并且图像在于和 时, 图像的局部下确界出现了特征峰. 其他区域呈现分层状, 在部分位置也出现了较小的特征峰.

### 4. 模型简化与理论推导

#### 4.1 狭缝宽度为0时的理想情况

简化条件, 若, 原通用反射关系表达可转化为如下的同余方程:

转化为二元方程:

由于是一个小于的角度, 又大于0, 故一定有.

分别取, 将拓展为, 得到一曲线族. 曲线族上满足 的点为所有满足在在圆内反射周内达到狭缝的坐标. 所有满足条件的的集合:

特殊地,

* 时, 有: ;
* 时, 有: ;
* 给定, 当 时 , 有.

故这些曲线也可以得到曲线族

当取整数时, .

所有满足条件的的集合:

令. 若考虑重复元素, 要么是有限集, 要么是可数集. 下面证明其为可数集:

假设为有限集, 其每一个元素必然可以用表出, 其中和是有界的, 设的上确界为.

但元素符合上述形式, 并且此元素一定严格小于任何一个可以被表出的元素, 否则, 和假设矛盾;

所以, 是可数集, 势为, 而所有可能取值的集合为, 势为, 故若随机选取, 其从狭缝中射出的概率为0, 记为射出次数为, 但若, 则可以在有限次反射内射出. 即:

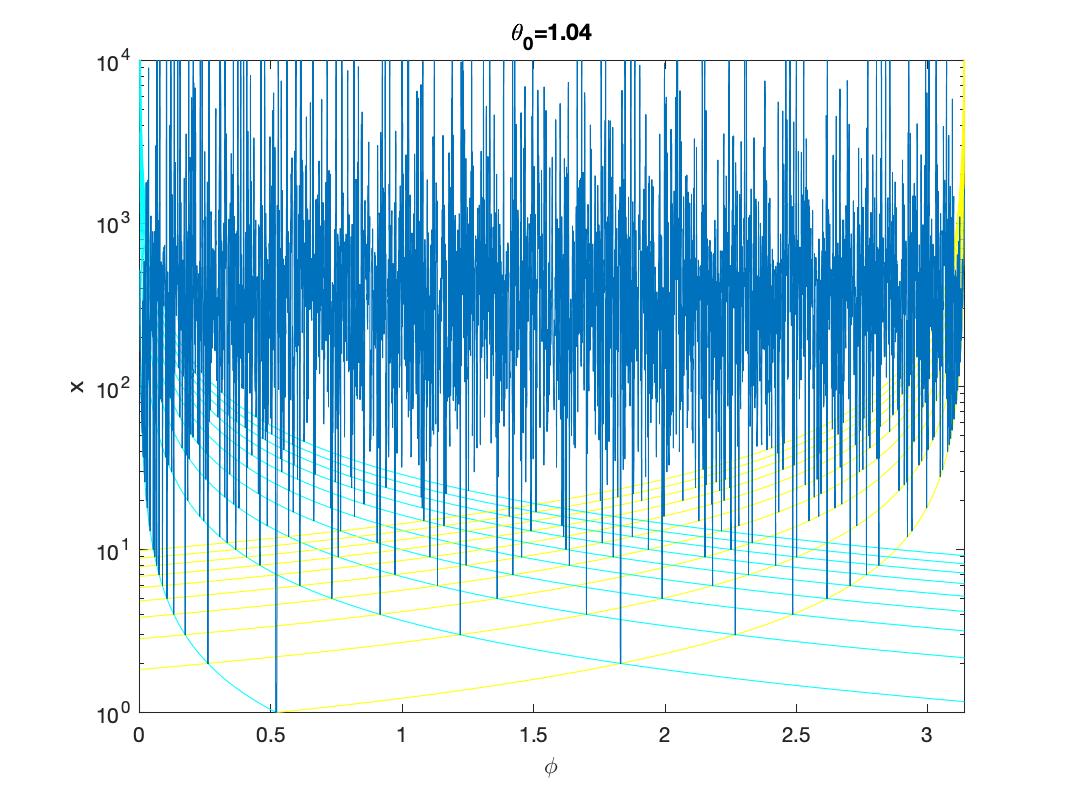
验证结果: 假设, , 此时显然是无法反射出去的.

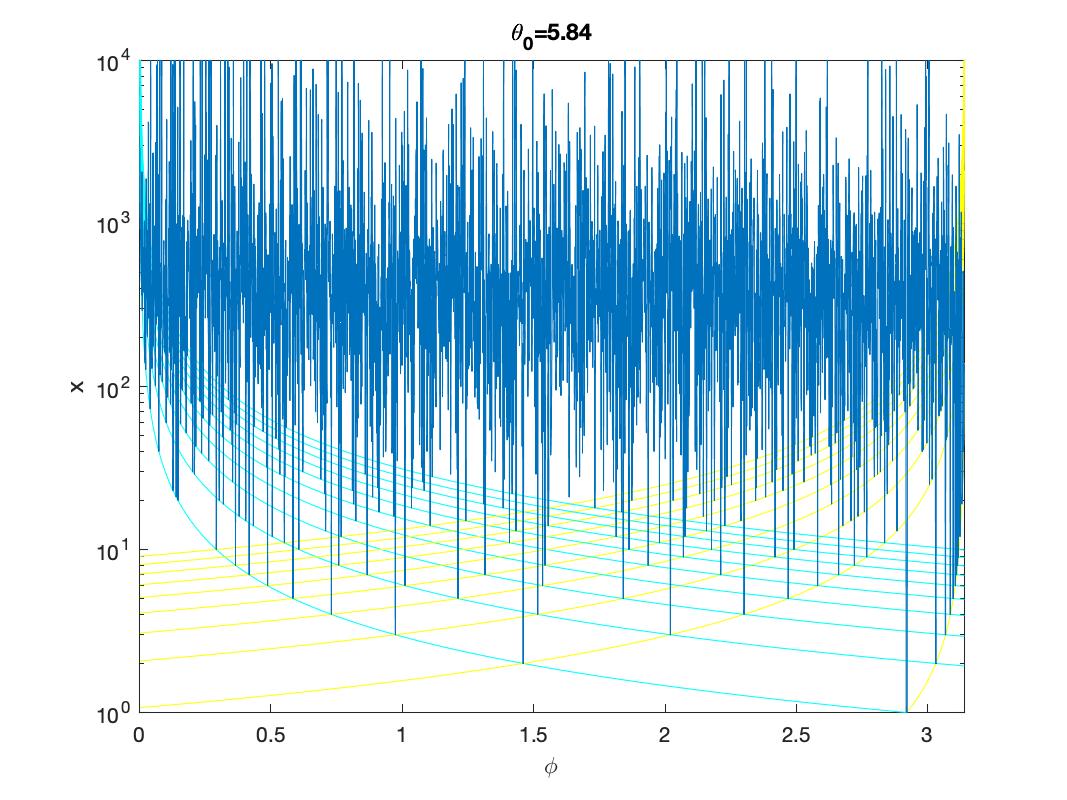
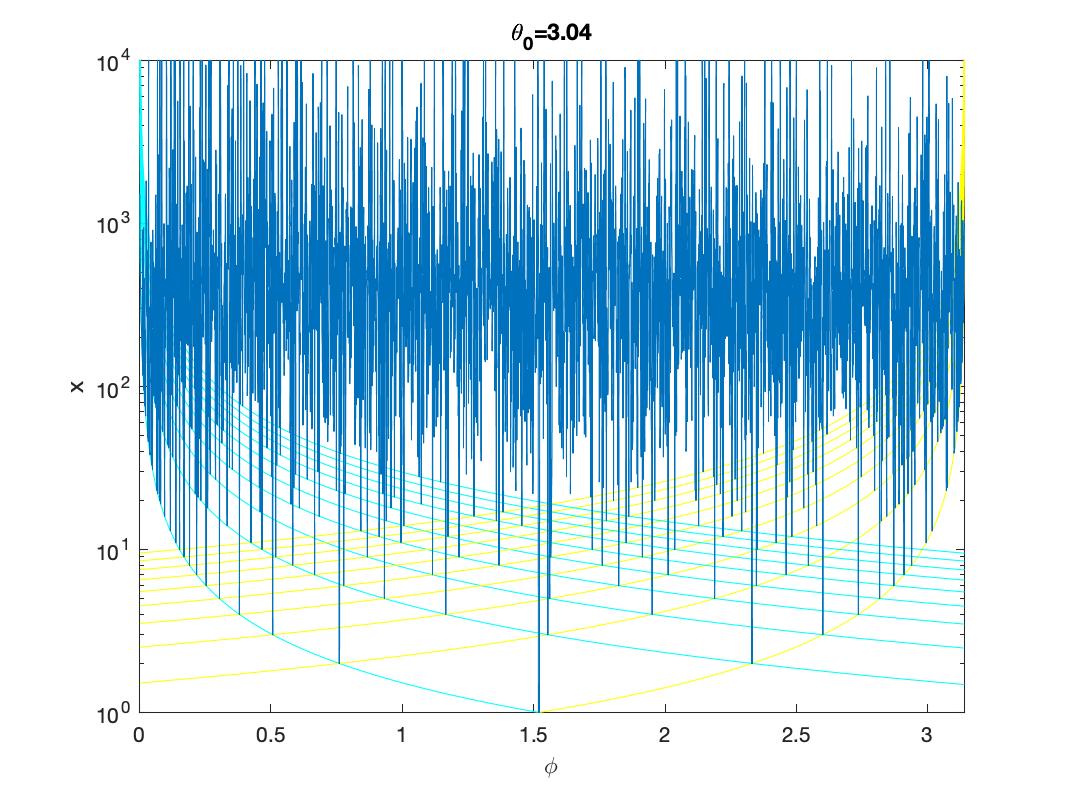
条件可以化简为整数的同余方程 , 即是2的模意义下的乘法逆元, , 故无解.

对于上述无法射出的情况 (为方便起见, 之后称之为情况), 其一般特征是经过多次反射后返回了原点, 即, 或是的有理数倍. 此时若是的整数倍, 则可以射出, 反之无法射出, 且最近的反射点与狭缝相差有限量.

在图上画出时的图像, 取为很小的有限量, 和原图像比对, 局部极小值在时的分层性状基本吻合. 演示及其代码如下:

1. clear;
2. clc;
3. index = 1;
4. delta = 0.01;
5. phi = 0.001:0.001:pi - 0.001;
6. theta\_0 = 0.01:0.01:2 \* pi - 0.001;
7. for thetaPoint = theta\_0
8. res = [];
9. for phiPoint = phi
10. x = 0;
11. reflectionAngle = 0;
12. while (reflectionAngle > thetaPoint + delta / 2 || reflectionAngle < thetaPoint - delta / 2) && x < 10000
13. reflectionAngle = mod((reflectionAngle + 2 \* phiPoint), 2 \* pi);
14. x = x + 1;
15. end
16. res = [res, x];
17. end
18. for i = 0:1:9
19. semilogy(phi, (thetaPoint - 2 \* (i + 1) \* pi) ./ (2 \* phi - 2 \* pi), 'y')
20. hold on;
21. semilogy(phi, (thetaPoint + 2 \* i \* pi) ./ (2 \* phi), 'c')
22. hold on;
23. end
24. semilogy(phi, res, 'color', [0 0.4470 0.7410])
25. hold off;
26. title(["\theta\_0=" + round(thetaPoint, 2)]);
27. xlabel("\phi")
28. ylabel("x")
29. axis([0 pi 1 10000])
30. saveas(gcf, "fig4-" + index + '.jpg')
31. index = index + 1;
32. End





#### 4.2 狭缝宽度趋于0的理想情况

即.

除情况之外, 对于, 可以证明若给定, 可以在有限次反射内射出.

即证明: 除情况外, 对于, 使得

1. , 此时根据4.1的结论, 对于非情况 使得
2. :

* 由于, 故一定使得且;
* 此时, 存在使得和 的差距在以内; 同时必有, 否则.
* 若, 不对进行任何操作;
* 否则, 设, 故, , 只要取, 变为, 即可, 此时
* 由于, 故一定使得且;
* 此时, 存在使得和 的差距在以内; 同时必有, 否则.
* 再对进行如上变换, 可以继续保证.
* 以此类推, 可构造数列是单调递减且有界的, 故该数列收敛. 该数列每一项都小于等于数列中的对应项, 根据夹逼准则, 因此, 该数列收敛于0. 故对于, 使得.

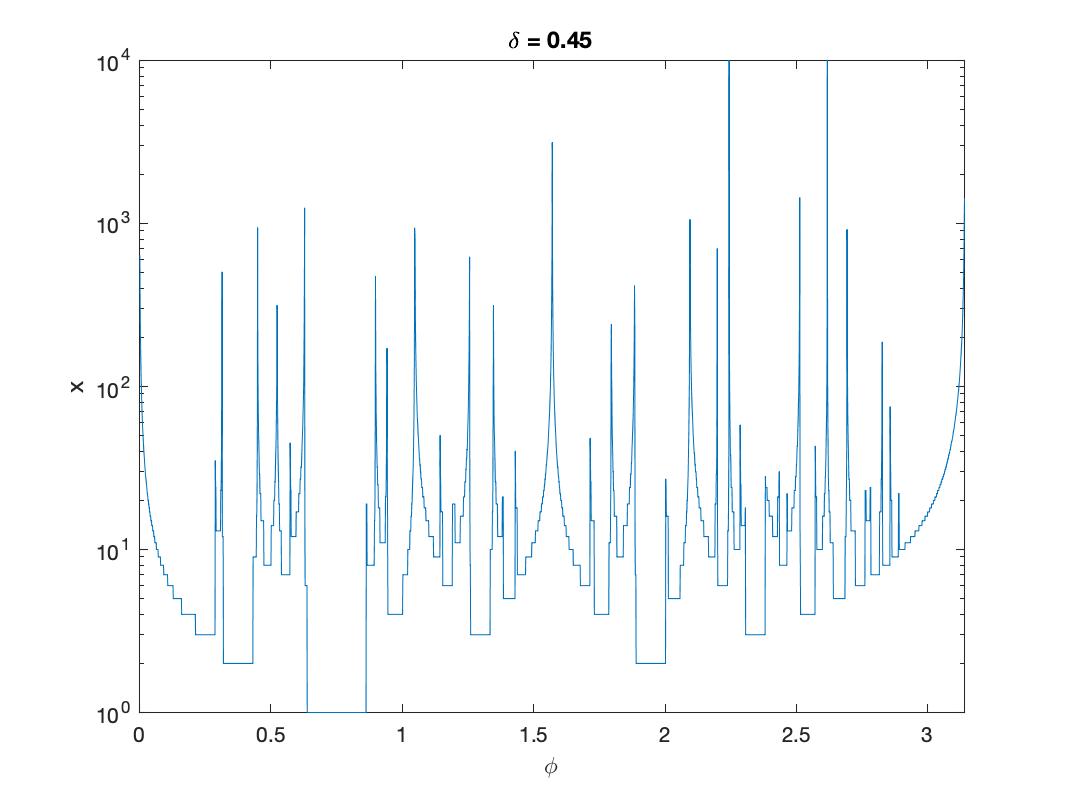
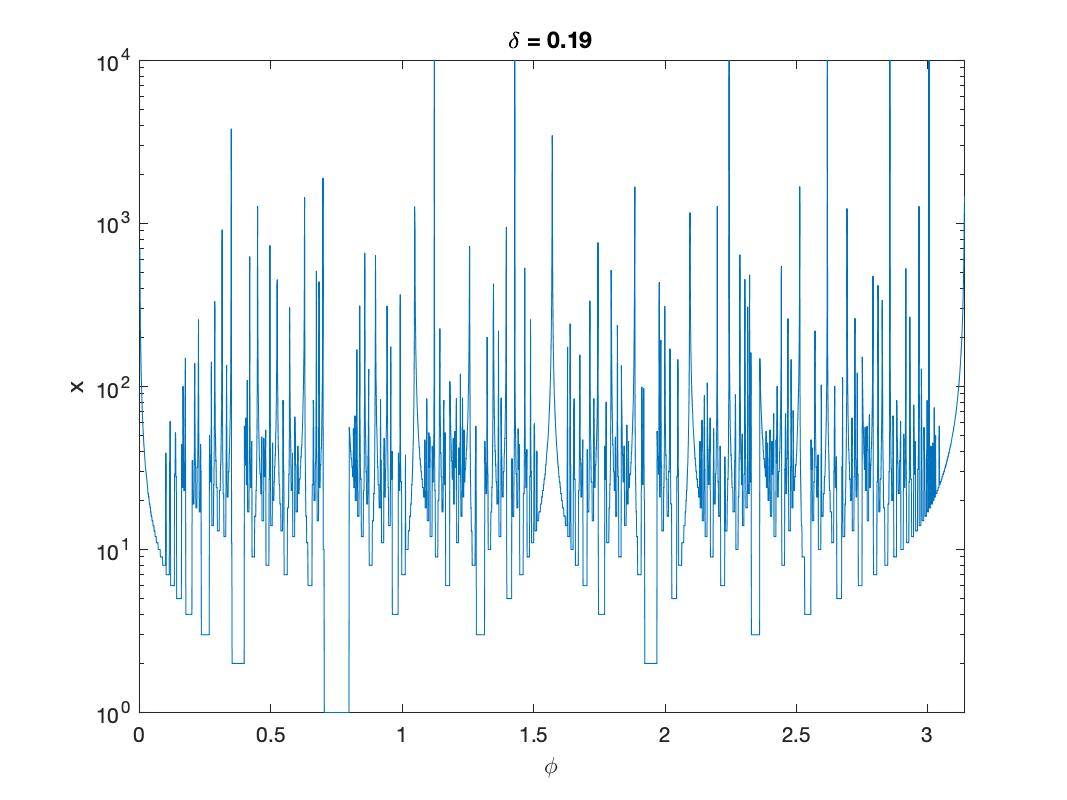
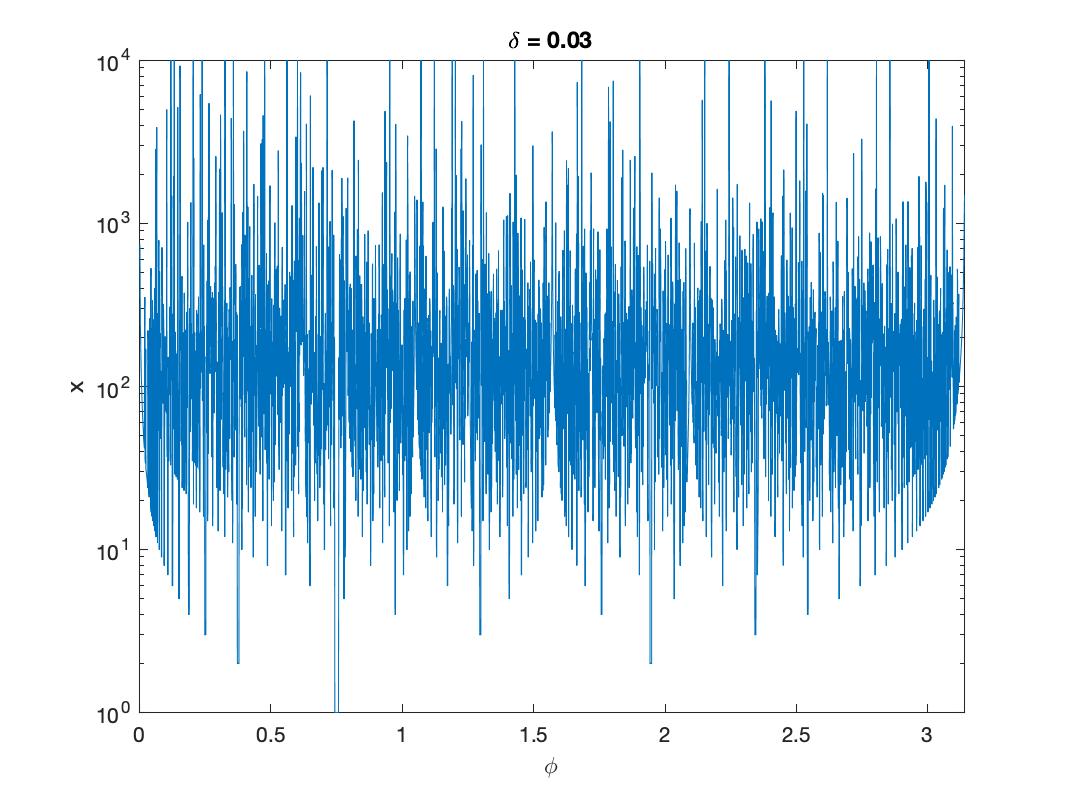
#### 4.3 狭缝宽度有限的一般情况

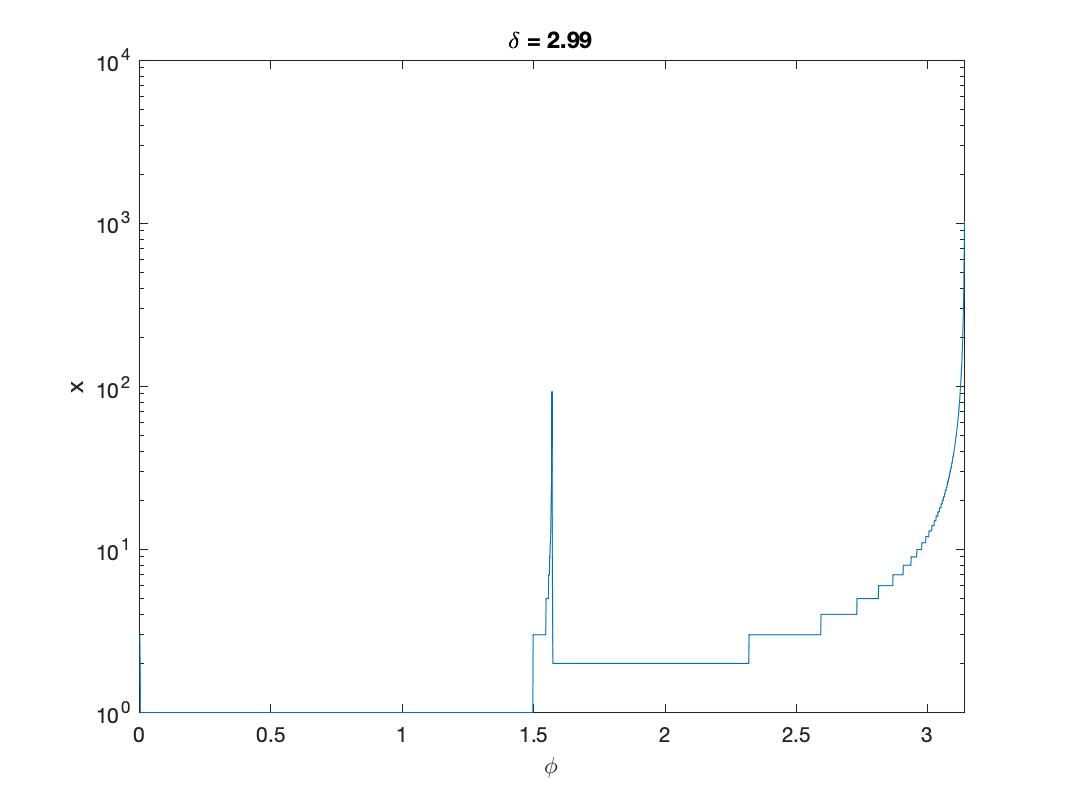
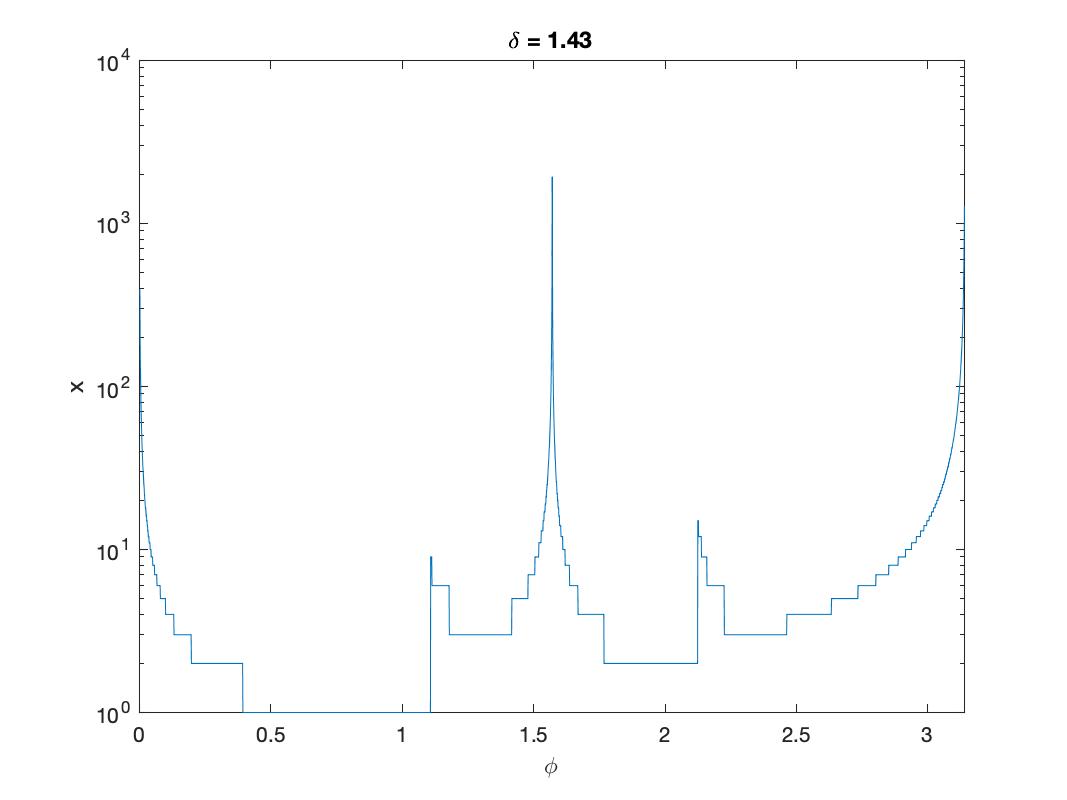
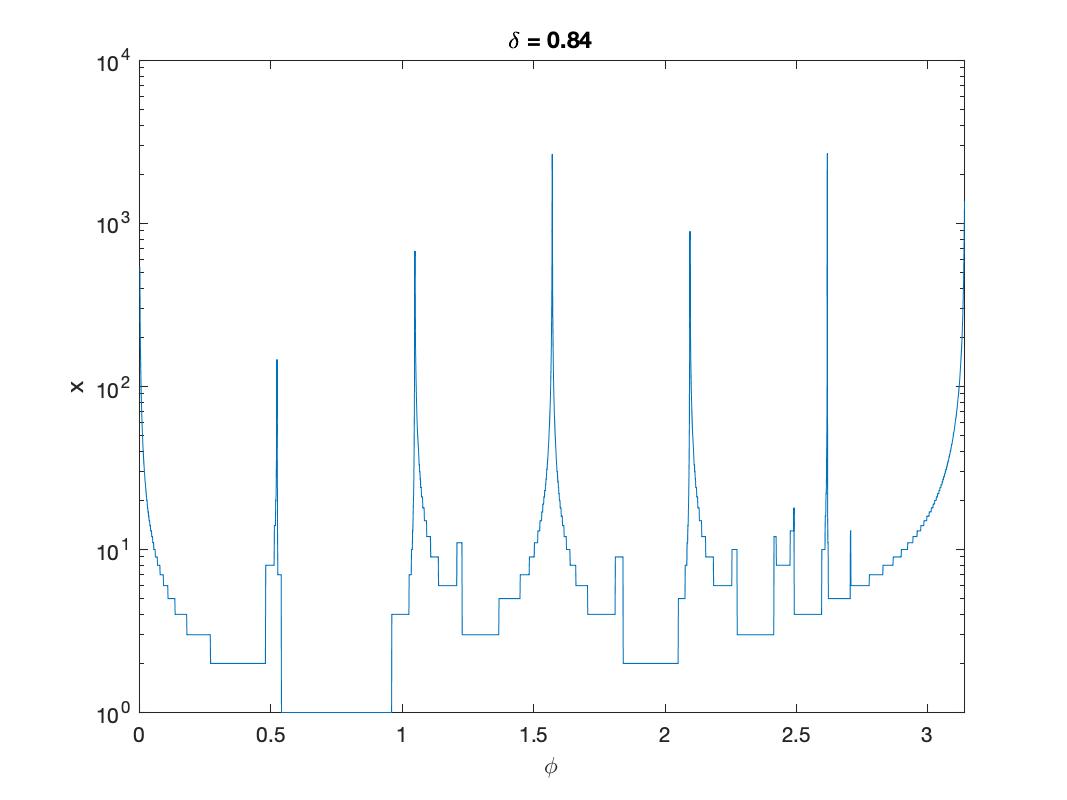
对于情况, , 对于随机给定的, 狭缝包含任意一个反射点的概率为, 故有有限的概率可以反射出.

其他情况, 根据4.2中的结论, 一定可以反射出.

固定特定的, 对宽度的变换为时间进行画图. 代码如下

1. clear;
2. clc;
3. index = 1;
4. deltaSet = 0.01 : 0.01 : pi - 0.01;
5. phi = 0.001 : 0.001 : pi - 0.001;
6. thetaPoint = 1.5;
7. for delta = deltaSet
8. res = [];
9. for phiPoint = phi
10. x = 0;
11. reflectionAngle = 0;
12. while (reflectionAngle > thetaPoint + delta / 2 || reflectionAngle < thetaPoint - delta / 2) && x < 10000
13. reflectionAngle = mod((reflectionAngle + 2 \* phiPoint), 2 \* pi);
14. x = x + 1;
15. end
16. res = [res, x];
17. end
18. semilogy(phi, res)
19. xlabel("\phi")
20. ylabel("x")
21. titleText = "\delta = " + round(delta, 2);
22. title([titleText]);
23. axis([0, pi, 1, 10000])
24. saveas(gcf, "fig5-" + index + '.jpg')
25. index = index + 1;
26. End





## 总结与反思

综上所述, 对于狭缝宽度为0的情况, 仅有可数个发射角度可以使小球射出; 对于任意小的宽度, 仅有可数个发射角度不能使小球射出; 对于有限小的宽度, 对于随机的狭缝位置, 所有的角度都可能使小球射出; 但有可数个发射角度小球仅仅是有概率射出, 其他的则是必定射出.

本文针对实验结果, 着重分析了狭缝宽度为零情况下射出前反弹次数和发射角度、狭缝位置的关系, 给出了具体的表达式; 以及宽度为有限的情况下, 对于反射角度和的比值为有理数式射出概率的公式. 理论推导, 公式和实验数据相符.

在数学实验中, 我进一步学会了理论与实践结合的方式, 同时加深了对数学软件运用的理解与课上知识的熟练运用. 不过, 在实验过程中, 我难免遇到了软件不熟练, 以至于先用Python写一遍后来翻译成Matlab的过程; 以及对理论推导不够深入的问题. 但总之, 此次数学实验给今后的运用带来很好的价值.