数学实验报告 实验 2

顾真榕 计试 001 2183214664

2020 年 12 月 24 日

> 我已尽力为您呈现最佳的 Word 版本, 若您有时间, 我会强烈建议克隆 GitHub 上的仓库 https://github.com/endaytrer/math-experiment-final.git, 并使用 Typora 查看实验报告 README.md, 内含有视频演示.

摘要

本实验报告记录了进行实验 2 的过程和理论推导, 得出了相关结论, 作出了总结.

目录

1. 问题陈述

给定半径为r, 无外力作用的固定的的圆, 除圆上的一段区间为空隙外, 其余部分为刚性镜面. 有一质点, 在圆周上任意一点处向圆内随机发射, 遇到圆周则反弹, 运动过程中动能不损失. 该质点是否能从给定的空隙中射出? 若能射出, 在圆周内回弹的次数和空隙位置、发射位置、发射角度、空隙大小之间的关系如何?

2. 模型假设

2.1 几何图形建构

首先不考虑计算需要, 对质点的反射轨迹建立表达式表示.

由于反射角仅仅和入射角相关, 所以放缩圆的大小不会影响结果. 故在极坐标系中建立圆$\rho = 1$. 同样, 结果和发射点与空隙的绝对位置无关, 但和两者的相对位置有关, 故固定小球的发射点位于$(\rho, \theta) = (1,0)$处, 并规定空隙中心点位置在于θ_0, 大小为δ, 即空隙可表示为$\{(1,\theta)|\theta \in \left[\theta_0 - \frac{\delta}{2}, \theta_0 + \frac{\delta}{2}\right]\}$. 以逆时针为正方向, 质点发射的角度和$\theta = \frac{\pi}{2}$的夹角为$\phi$, $\phi \in (0,\pi)$.

(在这一个段落的语境下, 所有的坐标表示均为直角坐标.) 根据第一条反射角过点$(1,0) = (\cos 0\phi, \sin 0\phi)$和发射的角度为$\phi$, 得知其所在直线方程$y = -(x-1)\cot\phi$. 直线和圆另一个交点$(\cos 2\phi, \sin 2\phi)$, 发射的角度为$3\phi$, 可得: $y - \sin(2\phi) = -\cot(3\phi)(x - \cos(2\phi))$. 通过数学归纳法可知, 质点路径为:

$$\begin{cases} y - \sin(2n\phi) = -\cot((2n-1)\phi)(x - \cos(2n\phi)), n \in \mathbb{N} \\ x^2 + y^2 \le 1 \end{cases}$$

参数形式:

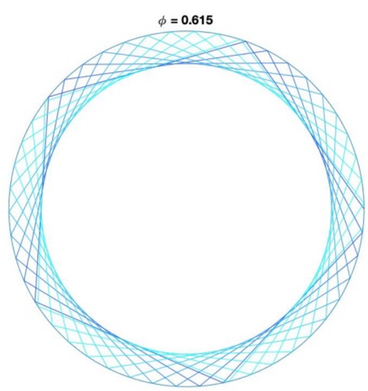
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(2n\phi) - \sin\big((2n+1)\phi\big)t \\ \sin(2n\phi) + \cos\big((2n+1)\phi\big)t \end{bmatrix}, t \in [0, 2\sin\phi]$$

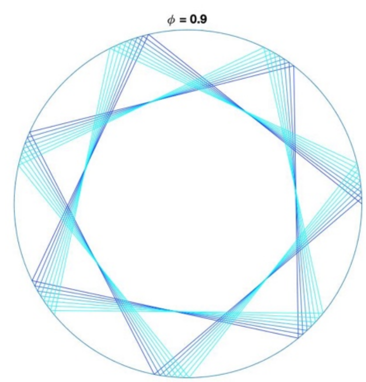
使用参数形式分别取$t = 0$和$t = 2\sin\phi$即可得到两个端点, 能极大减小复杂度, 并保证垂直的曲线绘制精确.

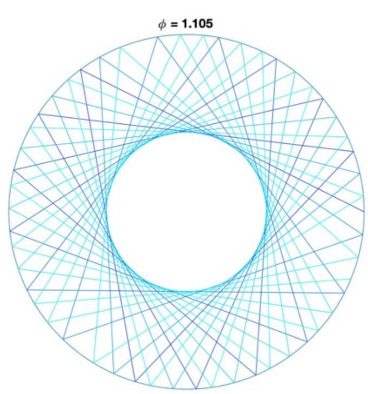
不考虑空隙此时可以绘制出由 50 次反射, ϕ从0变化到π时的反射模式. 其中, 反射射线是逐渐减淡的, 运用到的算法是$\mathrm{x}_{n+1} = \mathrm{rgb}(255, 255, 255) - 255\left(\frac{\mathrm{rgb}(255, 255, 255) - \mathrm{x}_n}{255}\right)^{\mathrm{p}}$, p 是渐变系数, 在下图中为 1.1. 1 以上越大渐变越快, 为 1 是不变, 介于 0 到 1 之间时向深色渐变.

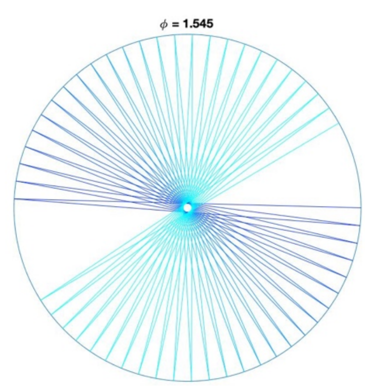
```
clear;
clc;

```

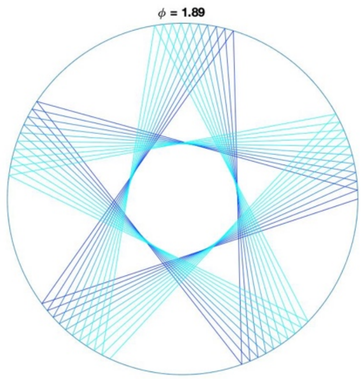
```
phiSet = 0.005:0.005:pi;
index = 1;
nSet = 0:50;

for phi = phiSet
    t = linspace(0, 2 * sin(phi), 2);
    plot(cos(linspace(-pi, pi, 1000)), sin(linspace(-pi, pi, 1000)))
    curveColor = [0, 0.14, 1];
    gradientMultiplier = 1.1;

    for n = nSet
        hold on;
        x = cos(2 * n * phi) - t * sin((2 * n + 1) * phi);
        y = sin(2 * n * phi) + t * cos((2 * n + 1) * phi);
        plot(x, y, 'color', curveColor)
        curveColor = [1 1 1] - ([1 1 1] - curveColor).^gradientMultiplier; % gradient color
    end

    hold off;
    axis off;
    title("\phi = " + phi)
    daspect([1 1 1])
    axis([-1, 1, -1, 1])
    saveas(gcf, "fig1-" + index + '.jpg')
    index = index + 1;
End
```

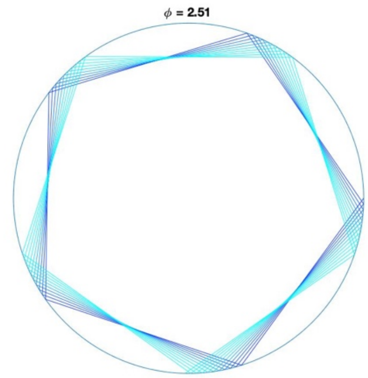






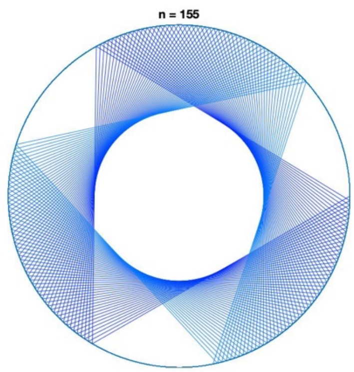


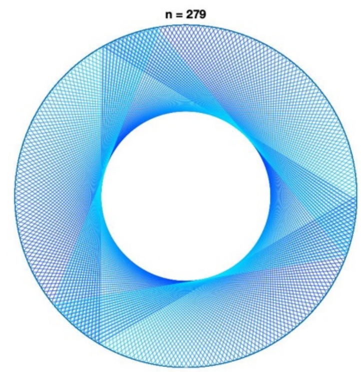


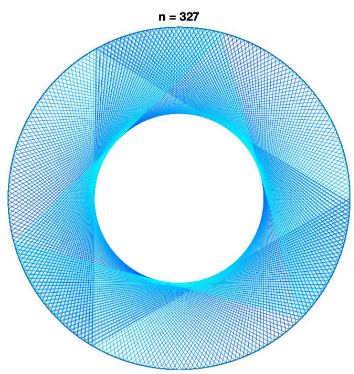


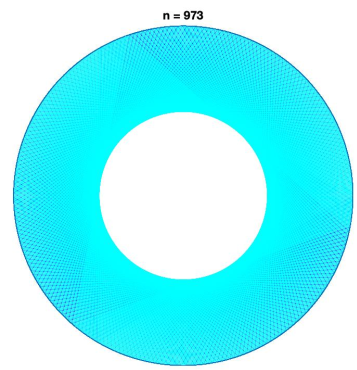
取得一个角度$\phi = 2.09$, 反射次数按时间增加画出 1000 次反射(渐变系数为 1.01)

```
clear;
clc;

phi = 2.09;
index = 1;
nSet = 0:2:1000;
t = linspace(0, 2 * sin(phi), 2);
gradientMultiplier = 1.01;
curveColor = [0, 0.14, 1];
hold off;

for nRange = nSet
    plot(cos(linspace(-pi, pi, 1000)), sin(linspace(-pi, pi, 1000)), 'color', [0 0.4470 0.7410])
    for n = nRange:nRange + 1
        hold on;
        x = cos(2 * n * phi) - t * sin((2 * n + 1) * phi);
        y = sin(2 * n * phi) + t * cos((2 * n + 1) * phi);
        plot(x, y, 'color', curveColor)
        curveColor = [1 1 1] - ([1 1 1] - curveColor).^gradientMultiplier; % gradient color
    end
    axis off;
    title("n = " + n)
    daspect([1 1 1])
    axis([-1, 1, -1, 1])
    saveas(gcf, "fig2-" + index + '.jpg')
    hold on;
    index = index + 1;
End
```









向量表示

初值点: $\vec{x} = (x \quad y)^T = (1 \quad 0)^T$

路径上第 n 个端点:

$$\overrightarrow{x_n} = (1\ 0) + (\cos 2\phi - 1\ \ \sin 2\phi) + \begin{pmatrix} \cos 2\phi & -\sin 2\phi \\ \sin 2\phi & \cos 2\phi \end{pmatrix} (\cos 2\phi - 1\ \ \sin 2\phi)$$

$$+ \begin{pmatrix} \cos 2\phi & -\sin 2\phi \\ \sin 2\phi & \cos 2\phi \end{pmatrix}^2 (\cos 2\phi - 1\ \ \sin 2\phi) + \cdots$$

$$+ \begin{pmatrix} \cos 2\phi & -\sin 2\phi \\ \sin 2\phi & \cos 2\phi \end{pmatrix}^{n-2} (\cos 2\phi - 1\ \ \sin 2\phi)$$

2.2 图形抽象

在反射前, 质点轨迹的弦对应的圆心角为2ϕ. 经过一次反射后, 入射角为$\frac{\pi}{2}$, 弦长、弦所对于圆心角仍然不变. 将反射点认定为新的发射点, 在圆上相对来说和第一次发射的情景是完全相同的.

由此通过归纳法可知:

通用反射关系表达

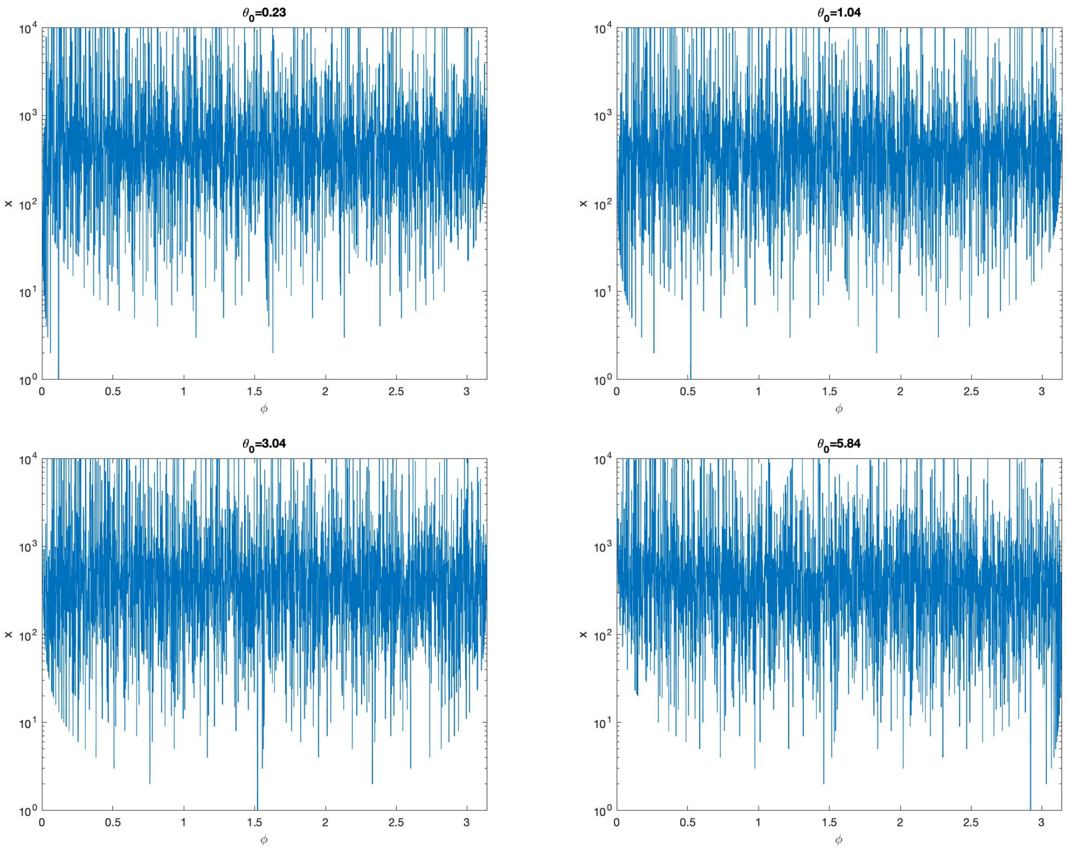
$$2x\phi \in [\,\theta_0 - \delta,\ \theta_0 + \delta\,]\ (mod\ 2\pi), x \in N^*$$

2.3 代码实现

```
clear;
clc;
index = 1;
delta = 0.01;
phi = 0.001:0.001:pi - 0.001;
theta_0 = 0.01:0.01:2 * pi - 0.001;

for thetaPoint = theta_0
    res = [];

    for phiPoint = phi
        x = 0;
        reflectionAngle = 0;

        while (reflectionAngle > thetaPoint + delta / 2 || reflectionAngle < thetaPoint - delta / 2) && x < 10000
            reflectionAngle = mod((reflectionAngle + 2 * phiPoint), 2 * pi);
            x = x + 1;
        end

        res = [res, x];
    end

    semilogy(phi, res)
    title(["\theta_0=" + round(thetaPoint, 2)]);
    xlabel("\phi")
    ylabel("x")
    axis([0, pi, 1, 10000])
    saveas(gcf, "fig3-" + index + '.jpg')
    index = index + 1;

end
```

3. 实验过程与结果

首先考察反射次数x与ϕ的关系. 固定θ_0不变, 作出$x-\phi(x)$的图像, 随后根据时间变化ϕ为方便观察, 图像是在线性 – 对数坐标系中画出:



可见，当θ_0图像呈现震荡状，但局部下确界总体呈现一条凹的曲线形式，却在中间一点处不平滑. 并且图像在于$\phi \to 0$和 $\phi \to 2\pi$时，图像的局部下确界出现了特征峰. 其他区域呈现分层状，在部分位置也出现了较小的特征峰.

4. 模型简化与理论推导

4.1 狭缝宽度为 0 时的理想情况

简化条件，若$\delta = 0$，原通用反射关系表达可转化为如下的同余方程:

$$2x\phi \equiv \theta_0 \pmod{2\pi}, x \in \mathbb{N}^*$$

转化为二元方程:

$$2\phi x - 2\pi y = \theta_0, x \in \mathbb{N}^*, y \in \mathbb{N}$$

由于θ是一个小于π的角度，θ_0又大于 0，故一定有$y < x$.

分别取$y \in \mathbb{N}$, 将$D(x)$拓展为$\mathbb{R}$, 得到一曲线族$S_L = \left\{x = \frac{\theta_0 + 2y\pi}{2\phi} \mid y \in \mathbb{N}\right\}$. 曲线族上满足 $x \in \mathbb{N}^*$ 的点为所有满足在在圆内反射y周内达到狭缝的(ϕ, x)坐标. 所有满足条件的ϕ的集合:

$$\Phi_L = \left\{\frac{\theta_0}{2}, \frac{\theta_0}{4}, \frac{\theta_0}{4} + \frac{\pi}{2}, \frac{\theta_0}{6}, \frac{\theta_0}{6} + \frac{1}{3}\pi, \frac{\theta_0}{6} + \frac{2}{3}\pi, \cdots\right\}$$

特殊地,

- $y = x - 1$时, 有: $x = \frac{\theta_0 - 2\pi}{2\phi - 2\pi}$;
- $y = x - 2$时, 有: $x = \frac{\theta_0 - 4\pi}{2\phi - 2\pi}$;
- $\cdots$
- 给定$\forall m \in [1, +\infty) \cap \mathbb{N}^*$, 当 $y = x - m, x \in [m, +\infty)$时 , 有$x = \frac{\theta_0 - 2m\pi}{2\phi - 2\pi}$.

故这些曲线也可以得到曲线族$S_R = \left\{x = \frac{\theta_0 - 2n\pi}{2\phi - 2\pi} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$

当x取整数时, $\phi = \frac{\theta_0 + 2(x-n)\pi}{2x}$.

所有满足条件的ϕ的集合:

$$\Phi_R = \left\{\frac{\theta_0}{4} + \frac{\pi}{2}, \frac{\theta_0}{6} + \frac{1}{3}\pi, \frac{\theta_0}{6} + \frac{2}{3}\pi, \frac{\theta_0}{8} + \frac{1}{4}\pi, \frac{\theta_0}{8} + \frac{2}{4}\pi, \frac{\theta_0}{8} + \frac{3}{4}\pi, \cdots\right\}$$

令$\Phi = \Phi_L \cup \Phi_R = \Phi_L$. 若考虑重复元素, Φ要么是有限集, 要么是可数集. 下面证明其为可数集:

假设Φ为有限集, 其每一个元素必然可以用$\frac{\theta_0}{2k} + \frac{l}{k}\pi$表出, 其中$k$和$l$是有界的, 设$k$的上确界为$K$.

但元素$\frac{\theta_0}{2K+2} + \frac{1}{K+1}$符合上述形式, 并且此元素一定严格小于任何一个可以被$\frac{\theta_0}{2k} + \frac{l}{k}\pi$表出的元素, 否则$\theta_0 < 0$, 和假设矛盾;

所以, Φ是可数集, 势为$\aleph_0$, 而ϕ所有可能取值的集合为$(0, \pi) \sim \mathbb{R}$, 势为$\aleph$, 故若随机选取ϕ, 其从狭缝中射出的概率为 0, 记为射出次数为∞, 但若$\phi \in \Phi$, 则可以在有限次反射内射出. 即:

$$\mathrm{x} = \begin{cases} \infty, \forall \mathrm{m} \in \mathbb{N}, \mathrm{n} \in \mathbb{N}^*, \mathrm{m} < \mathrm{n}, \phi \neq \dfrac{\theta_0}{2n} + \dfrac{m}{n}\pi \\ 0, \forall m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*, m < n, \phi = \dfrac{\theta_0}{2n} + \dfrac{m}{n}\pi \end{cases}$$

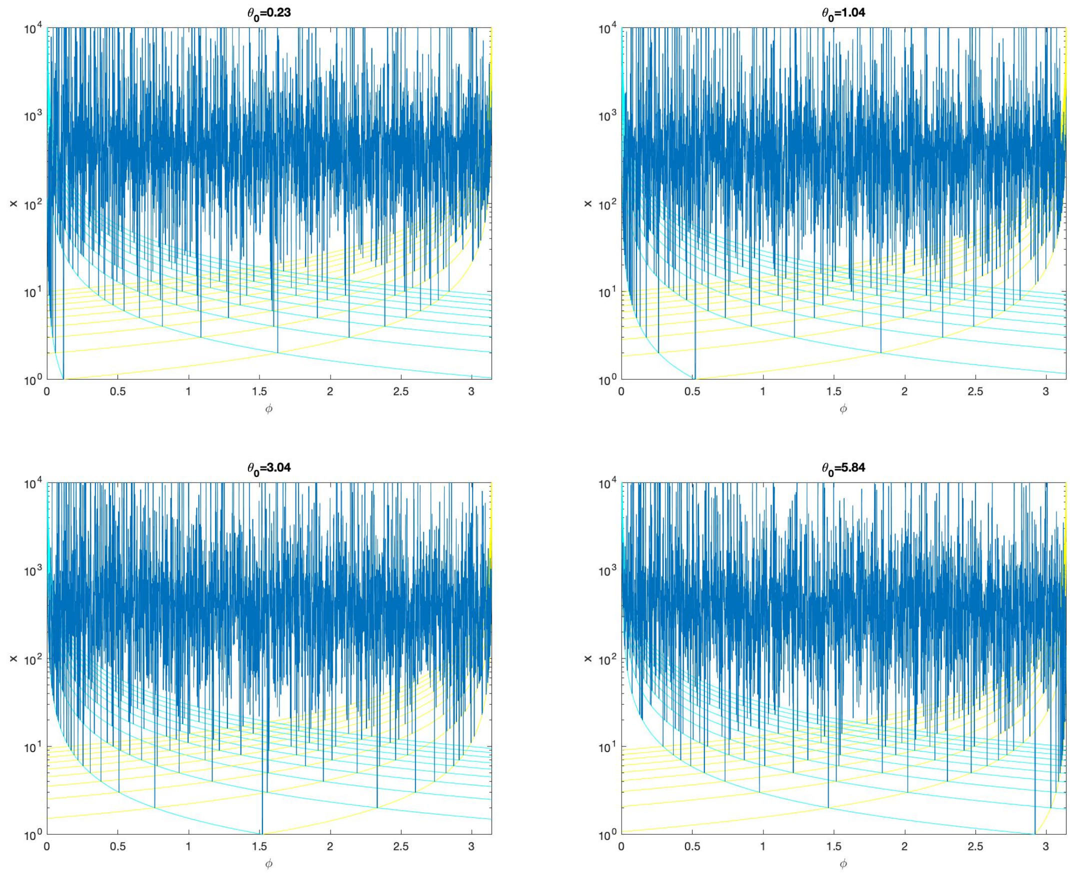
验证结果: 假设$\theta_0 = \frac{\pi}{3}$, $\phi = \frac{\pi}{3}$, 此时显然是无法反射出去的.

条件$\phi = \frac{\theta_0}{2n} + \frac{m}{n}\pi$可以化简为整数的同余方程 $2n \equiv 1 \ (mod\ m)$, 即n是 2 的模m意义下的乘法逆元, $n = 2^{m-2} \ (\mathrm{mod}\ m) < m$, 故无解.

对于上述无法射出的情况 (为方便起见, 之后称之为情况$\circ Spec$), 其一般特征是经过多次反射后返回了原点, 即$2n\phi = 2k\pi$, 或ϕ是π的有理数倍. 此时若θ_0是ϕ的整数倍, 则可以射出, 反之无法射出, 且最近的反射点与狭缝相差有限量.

在图上画出$m \leq 10$时的图像, 取δ为很小的有限量, 和原图像比对, 局部极小值在$\phi \in \Phi$时的分层性状基本吻合. 演示及其代码如下:

```
clear;
clc;

index = 1;
delta = 0.01;
phi = 0.001:0.001:pi - 0.001;
theta_0 = 0.01:0.01:2 * pi - 0.001;

for thetaPoint = theta_0
    res = [];

    for phiPoint = phi
        x = 0;
        reflectionAngle = 0;

        while (reflectionAngle > thetaPoint + delta / 2 || reflectionAngle < thetaPoint - delta / 2) && x < 10000
            reflectionAngle = mod((reflectionAngle + 2 * phiPoint), 2 * pi);
            x = x + 1;
        end

        res = [res, x];
    end

    for i = 0:1:9
        semilogy(phi, (thetaPoint - 2 * (i + 1) * pi) ./ (2 * phi - 2 * pi), 'y')
        hold on;
        semilogy(phi, (thetaPoint + 2 * i * pi) ./ (2 * phi), 'c')
        hold on;
    end

    semilogy(phi, res, 'color', [0 0.4470 0.7410])
    hold off;
    title(["\theta_0=" + round(thetaPoint, 2)]);
    xlabel("\phi")
    ylabel("x")
    axis([0 pi 1 10000])
    saveas(gcf, "fig4-" + index + '.jpg')
    index = index + 1;

End
```



4.2 狭缝宽度趋于 0 的理想情况

即$\forall\varepsilon > 0, \delta < \varepsilon$.

除情况◦$Spec$之外, 对于$\forall\phi$, 可以证明若给定$\varepsilon > 0$, 可以在有限次反射内射出.

即证明: 除情况◦$Spec$外, 对于$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in N^*, y \in N$, 使得$|2\phi x - 2\pi y - \theta_0| < \varepsilon$

1. $\phi = \frac{p}{q}\pi, (p, q \in \mathbb{N}^*)$, 此时根据 4.1 的结论, 对于非◦$Spec$情况$\exists\ x \in \mathbb{N}^*, y \in \mathbb{N}$ 使得 $|2\phi x - 2\pi y - \theta_0| = 0 < \varepsilon$

2. $\phi = \lambda\pi, (\lambda \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$:

   由于$\phi > 0, \pi > 0$, 故一定$\exists k_1 \in N$使得$k_1\phi > 2\pi$且$(k_1 - 1)\phi < 2$;

   此时, 存在$x \in [0, k_1), y = 0$使得$2\phi x - 2\pi y$和θ_0 的差距在ϕ以内; 同时必有$\phi_2 = k_1\phi - 2\pi < \phi$, 否则$(k_1 - 1)\phi \geq 2\pi$.

   若$\phi_2 \leq \frac{\phi}{2}$, 不对$\phi_2$进行任何操作;

否则, 设$\phi_2 = \phi - \psi, \psi \in (0, \frac{\phi}{2})$, 故, $\mu(k_2\phi - 2\pi) = \iota_1\phi + v\mu\phi_2 = \iota_2\phi + (\phi - \mu\psi)$, 只要取$\mu = \left[\frac{\phi}{2\psi}\right]$, k_2变为μk_2, $\phi_2 = (\phi - \mu\psi)$即可, 此时$\phi_2 \le \frac{\phi}{2}$

由于$\phi_2 > 0$, 故一定$\exists k_2 \in N$使得$k_2\phi_2 > 2\pi$且$(k_2 - 1)\phi_2 < 2$;

此时, 存在$x = pk_1, 0 < p < k_2, y = p$使得$2\phi x - 2\pi y$和$\theta_0$ 的差距在ϕ_2以内; 同时必有$\phi_3 = k_2\phi_2 - 2\pi < \phi_2$, 否则$(k_2 - 1)\phi \ge 2\pi$.

再对k_2进行如上变换, 可以继续保证$\phi_3 \le \frac{\phi_2}{2} \le \frac{\phi}{4}$.

以此类推, 可构造数列$\{\phi, \phi_2\ \phi_3, \cdots\}$是单调递减且有界的, 故该数列收敛. 该数列每一项都小于等于数列$\{\phi, \frac{\phi}{2}, \frac{\phi}{4}, \cdots, \frac{\phi}{2^n}, \cdots\}$中的对应项, 根据夹逼准则, 因此, 该数列收敛于 0. 故对于$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in \mathbb{N}^*, y \in \mathbb{N}$, 使得$|2\phi x - 2\pi y - \theta_0| < \varepsilon$.

4.3 狭缝宽度有限的一般情况

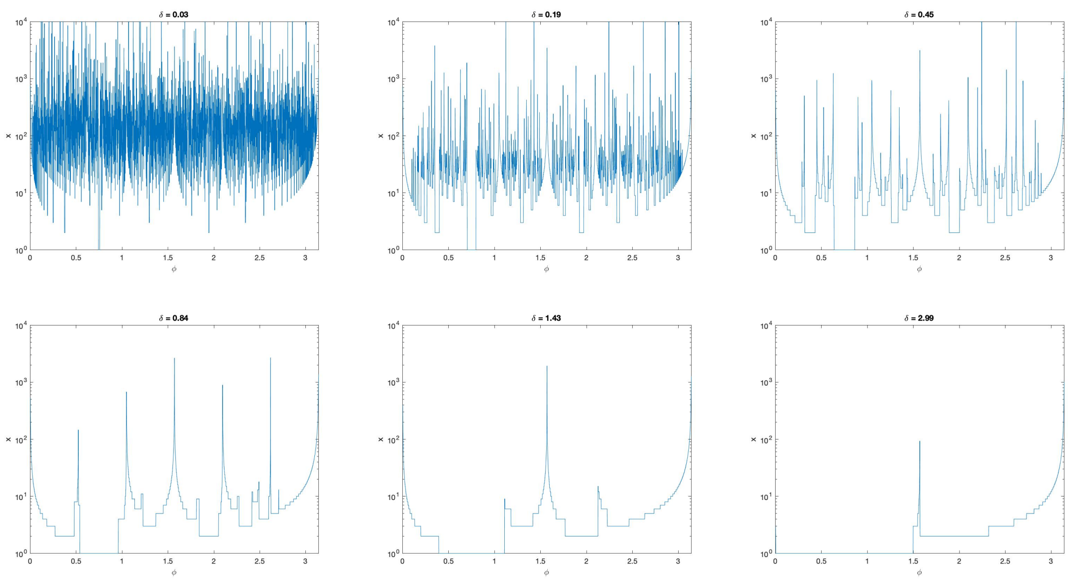
对于情况∘ $Spec$, $2n\phi = 2k\pi$, 对于随机给定的θ_0, 狭缝包含任意一个反射点的概率为$\max(\frac{n\delta}{\pi}, 1)$, 故有有限的概率可以反射出.

其他情况, 根据 4.2 中的结论, 一定可以反射出.

固定特定的$\theta_0 = 1.5$, 对宽度的变换为时间进行画图. 代码如下

```
clear;
clc;
index = 1;
deltaSet = 0.01 : 0.01 : pi - 0.01;
phi = 0.001 : 0.001 : pi - 0.001;
thetaPoint = 1.5;

for delta = deltaSet
    res = [];

    for phiPoint = phi
        x = 0;
        reflectionAngle = 0;

        while (reflectionAngle > thetaPoint + delta / 2 || reflectionAngle < thetaPoint - delta / 2) && x < 10000
            reflectionAngle = mod((reflectionAngle + 2 * phiPoint), 2 * pi);
            x = x + 1;
        end

        res = [res, x];
    end

    semilogy(phi, res)
    xlabel("\phi")
    ylabel("x")
```

```
        titleText = "\delta = " + round(delta, 2);
        title([titleText]);
        axis([0, pi, 1, 10000])
        saveas(gcf, "fig5-" + index + '.jpg')
        index = index + 1;
    End
```



总结与反思

综上所述, 对于狭缝宽度为 0 的情况, 仅有可数个发射角度可以使小球射出; 对于任意小的宽度, 仅有可数个发射角度不能使小球射出; 对于有限小的宽度, 对于随机的狭缝位置, 所有的角度都可能使小球射出; 但有可数个发射角度小球仅仅是有概率射出, 其他的则是必定射出.

本文针对实验结果, 着重分析了狭缝宽度为零情况下射出前反弹次数和发射角度、狭缝位置的关系, 给出了具体的表达式; 以及宽度为有限的情况下, 对于反射角度和π的比值为有理数式射出概率的公式. 理论推导, 公式和实验数据相符.

在数学实验中, 我进一步学会了理论与实践结合的方式, 同时加深了对数学软件运用的理解与课上知识的熟练运用. 不过, 在实验过程中, 我难免遇到了软件不熟练, 以至于先用 Python 写一遍后来翻译成 Matlab 的过程; 以及对理论推导不够深入的问题. 但总之, 此次数学实验给今后的运用带来很好的价值.