

城市轨道交通网络线路规划的优化算法

刘灿齐 周溪召

(上海铁道大学 上海 200331) (上海海运学院 上海 200135)

摘 要 文章用计算机软件技术,探讨了城市轨道交通网络的线路规划问题的优化算法,使规划进一步科学化,试图达到以最小的投资取得最大的效益。
关键词 城市轨道交通 网络线路规划 优化算法

0 引 言

目前,我国许多大城市都在着手轨道交通(以下简称“轨交”)的规划与建设。在交通科学领域有关轨交网络的规划技术研究也正如火如荼的展开,但是除了在流量预测时用到一些定量技术外,在线路确定时还主要采用定性的方法,规划者大多依据普通城市道路规划的经验 and 感性认识进行轨交定线,这样就难以保证其科学性,容易使轨交线的位置和密度不合理,不利于使其在整个城市交通中起骨干作用^[1]。

由于轨交的造价远远大于普通城市道路的造价,并且它具有不可更改性,这种失误容易造成巨大的经济浪费。所以我们在确定线路时,必须遵循“用最少的轨交总里程吸引最大的总出行量”的原则。要做到这点,就必须理性地、定量地、深入地研究轨交网络的最优化。

1 有关概念

1.1 要点、分区与出行量

一个市区人员出行量最大的地点一般为市中心、副中心、集中的工业区、集中居住区、火车站、机场、客运码头、长途汽车站等,设共有 m 个,称之为“要点”。究竟要点数目 m 应为多大? 没有绝对的标准。从下文算法可以看出,每个要点都将竞争引入轨交网,若 m 太大的话,一些次要的点将被淘汰。但算法的实际运算时间是 m 的级数级,故 m 不应太大。一般不大于 20。

以各要点为质心,将全市按龟裂状分割(如图 1 示),每个龟裂片称作“交通分区”(简称分区)。分区边缘上的点距两边的质心(要点)等距。用客流量定量预测技术可预测出规划年份各分区之间的日轨交出行量。从而得分区之间 OD 矩阵 Q 。由于市内出行一般是当天返回的,所以可以假定任意两区间的出行量是对称的,从而 Q 也是对称的。

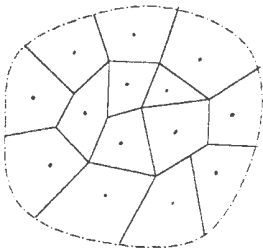


图 1 龟裂状分割的市区

由于在每个分区中,要点附近区域的出行量最大,未来的轨交线又必经过此点且在此设站,使此处乘坐最方便,因此全分区的所有轨交方式出行量(以下如无特别声明,将“轨交方式出行量”简称为出行量)中,此点为最大。分区内可能还有其它轨交站点,但它们的出行量小,并且由于分布在要点的四周,在地理位置上的前与后、左与右可以近似相互抵消(从下文可知,某点的出行量对网络定线的影响与该点的地理位置有关),我们近似地把全区的出行量都看作是从要点出发的。

出行量是轨交网定量规划的基础,而它又是较难精确预测的,因为它是一个随时间变化的量,并且不同的分区变化率不同(即使假定每年的变化率固定不变);同时轨交网的通达性和服务水平、城市的人口发展政策和用地发展规划都将对

它产生较强的影响^[2,3]。对这个问题,有必要作更
深入的研究。因该问题不是本文的主题,为简便
计,本文中的预测量是一个常量,可以看作是轨交
线使用年限内的平均值。

1.2 效益与成本

效益 我们假定任一条轨交线都是双向的。
设一条轨交线以两要点 i, j 为端点,它只承担此
两点间的出行量 q_{ij}, q_{ji} 时,它的效益是这些出行量
的空间位移,与具体线路的长度无关。设两要点
间的几何直线距离为 d_{ij} ,则该轨交线的效益为:
 $A_{ij}+ A_{ji}= 2A_{ij}= 2Tq_{ij}d_{ij}U$,其中 $U= 365K$ 轨交线
的寿命年数 T 为每人公里的位移效益的货币值。
这里的效益包括经济效益、环境效益、以及乘客因
改乘轨交而免去的地面交通所花时间的效益,都
折算成货币值。对于整个轨交网,如果它包含 m

个要点且是连通的,则它的效益为
$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m A_{ij}$$

成本 一条轨交线的成本分作两部分:线路
成本和乘客成本。线路成本包括建设成本、运营成
本和折旧成本。线路成本与轨交类型和长度有关,
将轨交线概括为两类:地铁、轻轨,单位长度的单
向线路成本分别为: U_1, U_2 ,究竟采用哪种类型,由
该线路上的单向客流量 v_{ij} (一般地, $v_{ij} \geq q_{ij}$,因为
两要点之间如有轨交线的话,它除承担此两要点
之间的出行量外,还有可能承担别的出行量)决定,
设 ω 为两者的分界值,则

$$U_{ij}= U(v_{ij})= \begin{cases} U_1 & v_{ij} > \omega \\ U_2 & v_{ij} \leq \omega \end{cases}$$

单向线路成本可表示为: $b_{ij}= U_{ij} \cdot l_{ij}$ (l_{ij} 为要点
 i, j 的轨交线长度)。

乘客成本包括乘坐轨交线的时间和车票,故
两要点之间的乘客成本为:

$$G_{ij}= 2 \cdot (V \cdot q_{ij} \cdot l_{Tij}+ W \cdot q_{ij}) \cdot U$$

其中, l_{Tij} 为要点 i, j 的最短路径轨交线长
度, V 为每人公里平均消耗时间的货币值, W 为每
人的票价,假定在整个轨交网是一票到底的。

净效益 净效益 = 效益 - 成本

1.3 虚拟网

我们的问题是: 某两个要点之间该不该修建
直联的轨交线 (不经过别的要点)? 该修的话,采用
哪种类型?

首先,就每对要点之间画一条虚拟的轨交线
路(如果今后确定在这两点间修轨交线的话,就必
走这条虚拟的线路),虚拟线路是根据以下原则确

定的:

◦ 配合原则: 尽量与地面商业街走向一致,尽
可能照顾到两要点之间出行量较大的地点(非要
点),不与地面机动车快速干道长距离重复。

◦ 低成本原则: 线路尽可能顺直,避免两线较
长距离的重复或基本重复,尽量避免大规模的拆
迁建筑物。

根据低成本原则,用 R_{ij} 表示两要点 i, j 之
间的虚拟轨交线,设 k 为要点,如果 R_{ik} 加上 R_{kj} 基
本上与 R_{ij} 重复,则取消 R_{ij} ,令 $l_{ij}= \infty$ 。总共 m 个
要点之间有不少于 $m(m-1)/2$ 条虚拟线,这些虚拟
线构成了虚拟网。

虚拟线会有除要点外的一些相交处,这些相
交处是未来轨交线设站的首选地点,因为这有利于
换乘,我们称之为“交点”。交点的数目可能很
大,作以下合并: 当若干个交点集中在一个 3km^2
区域内或相距不足 1km 时,将之合并为一个交
点;当一些交点距某要点不足 1km 时,将之与该
要点合并,仍看作要点。设如此调整后仍有 n 个交
点,也将之编号: $m+1, m+2, \dots, m+n$ 。在这些交
点不定义出行量,因为是否真有轨交线经过和相
交,现在还未知。

以下将两要点间的直联轨交线段称作边,实
际中的边一般是曲线或折线,但在示意图中可能
将之画成直线段(图 2, 3)。如果一条两要点之间
的边上有交点,则它被交点分成几段,此时称它为
“母边”,其中各段称为“子边”;如果一条两要点之
间的边上没有交点,则称之为“寡边”。

如此一来,虚拟网中有 m 个要点, n 个交点和
若干条母边、寡边、子边。有时把要点和交点统称
为“结点”。

2 优化算法

2.1 目标与约定

我们确定实修轨交网(以下简称实修网)的办
法是: 以虚拟网为基础,从出行量最大的一点开
始,通过添加要点和实修轨交线(把虚边变成实
边)的办法使实修网不断扩张,并且约定: (1)最终
形成的实修网是连通的; (2)人员的轨交出行路线
必选择最短路径; (3)母边和它的子边同时入实修
网,对称的边也同时入实修网。

优化目标是: 实修网的净效益最大。这决定实
际操作的原则是: 每添加一条实修轨交线或添加
一个要点(必然同时也就添加了一条实修轨交线)

应该选择净效益最大的。

约束条件: 轨交线总里程长度不超过 MS

2.2 常量定义

暂将各要点依出行量预测值从大到小顺序排列并编号为 $1\ 2\ \cdots\ m$, 根据出行量预测值和虚拟网确定以下三个矩阵。本文的矩阵都是对称的, 为简便计, 都只写出下三角部分。

OD矩阵 (因交点无出行量, 此矩阵不包含它们):

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ q_{21} & 0 & & & \\ q_{31} & q_{32} & \cdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & & & \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

效益矩阵 (同理不包含交点):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ A_{21} & 0 & & & \\ A_{31} & A_{32} & \cdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & & & \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

虚拟网的边长矩阵 (此矩阵包含子边的长度,

$i-j$ 间无直联边时, $l_{ij} = \infty$):

$$L = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ l_{21} & 0 & & & \\ l_{31} & l_{32} & \cdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & & & \\ l_{m+1,1} & l_{m+1,2} & \cdots & l_{m+1,M+1-n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

在算法中这些要点将被重排序号, 以上三个矩阵的行和列的排列顺序也会随之发生变化, 但元素值是不变的, 并且仍然是对称的。

2.3 变量定义及初始化

结点数组: $P = (P_1, P_2, \cdots, P_{m+n})$, 每个分量是记录型变量 $P_i = (c, e, y)$, c 是字符串, 存放该点的名称, 该字段是不变的; e 是虚实号 (0 为虚, 表示该点未进入实修网; 1 为实, 表示已进入实修网), 初始时全为 0; y 是要点/交点分类号: $y = 1$, 是要点, $y = -1$, 是交点, 该字段是不变的。

边矩阵: $R = (R_{ij})_{(m+n) \times (m+n)}$, 每边是一记录型变量: $R_{ij} = (z, f, g, v, h, b)$ 其中: z 是母边/子边/寡边分类号, 1 是母边, 0 是寡边, -1 是子边, 该字段是不变的; f 是虚实号, 初始时全为 0; g 是锁号 ($g = 0$ 时, 可以入网, $g = -1$ 时, 永远也不允许此边入网), 初始时 $l_{ij} = \infty$ 的边加锁: $g = -1$, 其它 $g = 0$; v 是单向流量, 初始时令其等于 q_{ij} ; h

是类型号, 1 为地铁, 2 为轻轨, 定义为

$$R_{ij} \circ h = h(v_{ij}) = \begin{cases} 1 & v_{ij} > c_0 \\ 2 & v_{ij} \leq c_0 \end{cases}$$

初始时, $R_{ij} \circ h = h(q_{ij})$; b 是线路成本, 初始时 $b = U(q_{ij}) \circ l_{ij}$ 对初始时 $g = -1$ 的边, v, h, b 字段的初始值全为 0。

在算法中, 用记录的字段名加相应足标表示相应记录的字段, 如 f_{ij} 表示 $R_{ij} \circ f$ 。

最短路径矩阵:

$$T = \begin{bmatrix} (1) & & & & \\ T_{21} & (2) & & & \\ T_{31} & T_{32} & & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ T_{m+n,1} & T_{m+n,2} & \cdots & T_{m+n,M+1-n-1} & (m+n) \end{bmatrix}$$

T_{ij} 为数组, 初始时, 每个 T_{ij} 为空数组 (\emptyset)。

最短路径长度矩阵:

$$L T = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ l T_{21} & 0 & & & \\ l T_{31} & l T_{32} & & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ l T_{m+n,1} & l T_{m+n,2} & \cdots & l T_{m+n,M+1-n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

初始时每个 $l T_{ij} = \infty$ 。

2.4 算法

第一步 初始化 根据以上变量定义对各变量初始化。此时实修网中, 总的实边 (实修轨交线) 长度 $S = 0$, 总实要点数 $M = 0$ 。

第二步 令 $e = 1$, 这意味着, 首先将出行量最大的要点纳入实修网, $M = M + 1$ 。

第三步 问: $M = m$? 若是, 令 $r = 1, Z_{M+1,r} = 0$, 跳至第五步。否则, 计算余下各要点入实修网所产生的净效益。对余下的要点 $P_k (M+1 \leq k \leq m)$ 依次作以下工作:

(1) 考察它的可入性 执行循环:

for $i = 0$ to M

if $S + l_{ik} > MS$ then 给 R_{ik}, R_{ki} 及其子边 (若有的话) 加锁 endif

next i

如果所有的 R_{ik} 都被加锁, 则称该要点为“此轮不可入的”。如果余下的各要点都是“此轮不可入的”, 则令 $r = 1, Z_{M+1,r} = 0$, 跳至第五步。

(2) 计算添加可入要点 P_k 入实修网的净效益

首先计算各 $R_{i,k} (i = 1, 2, \cdots, M)$ 中未加锁的各虚边加入实修网的成本。若将 $R_{i,k}$ 变成实边, 则

增加的线路成本为 $b_{i,k} + b_{k,j} = 2 \cdot U_{i,k} \cdot l_{i,k}$; 另外, P_k 和实修网中各 j 点之间的乘客 (流量为 $q_{k,j} + q_{j,k}$) 将在边 $R_{i_0,k}$ (当 $R_{i,k}$ 是虚母边且其上已有实的交点, 令 i_0 为离 P_k 最近的实交点号, 否则令 $i = i_0$) 和最短路径 $T_{i_0,j}$ 上出行, 使 $T_{i_0,j}$ 沿线各边的流量都增加 $q_{k,j} + q_{j,k}$. 设 $T_{i_0,j} = (i, i_1, \dots, i_u, j)$, 令 $i_{u-1} = j$, 逐一检查各边 R_{i_{t-1},i_t} , 如果此边是轻轨 ($h = 2$), 且 $v + q_{k,j} > c_0$, 则应提高类型级别, 改为地铁 ($h = 1$), 从而, 线路成本增加 (如果该边还是子边, 则应就它的母边进行类型提级和线路成本增加计算) $\Delta B_{i_{t-1},i_t} = 2 \cdot (U_1 - U_2) \cdot l_{i_{t-1},i_t}$, 否则, $\Delta B_{i_{t-1},i_t} = 0$, 令 $B T_{ij} = \sum_{t=0}^u \Delta B_{i_{t-1},i_t}$.

综上得: $R_{i,k}$ 加入实修网的线路成本为: $2b_{i,k} + \sum_{j=1}^M B T_{ij}$. 另外, 乘客成本为 $G_k = 2U^0 \cdot \sum_{j=1}^m q_{k,j} (l_{k,j} + l T_{ij}) + 2U^0 \cdot \sum_{j=1}^m q_{k,j}$.

分两种情况考察总成本:
• 若 $R_{i,k}$ 是寡边或是没有已为实的交点的母边, 总成本即为:

$$H_{k,j} = G_{k,j} + 2b_{i,k} + \sum_{j=1}^M B T_{ij}$$

• 若 $R_{i,k}$ 是其上已有实的交点母边, i_0 如上所设, 则因 $R_{i_0,i}$ 由虚变实, 使原实修网中的某些点对间的最短路径变短 (改走 $R_{i_0,i}$), 设这些点对的集合为 H . 设 $(s, t) \in H$, 它原来的最短路径是 T_{st} , 现在是 $T_{st}^{(i_0,i)}$ (调用求最短路径的子程序^[4]), 乘客成本节省了: $\Delta G_{st} = 2V_{qst} (l T_{st} - l T_{st}^{(i_0,i)})$. 同时, 还使 T_{st} 沿线各实边的流量减少了 q_{st} , 从而可能引起它们的类型降级; 而 $T_{st}^{(i_0,i)}$ 沿线各实边的流量增加了 q_{st} , 从而可能引起它们的类型升级. 依次计算这些升、降级变化所带来的线路成本的增、减 (如果该边是子边, 则应就它的母边进行类型提级和线路成本增加计算), 设前者减少了 $\Delta B T_{st}$, 后者增加了 $\Delta B T_{st}^{(i_0,i)}$. 所以, 此时总成本增加为:

$$H_{k,i} = G_{k,i} + 2b_{i,k} + \sum_{j=1}^m B T_{ij} + \sum_{(s,t) \in H} [\Delta B T_{st} - \Delta T_{st}^{(i_0,i)} - \Delta G_{st}]$$

无论这 M 条虚边中的哪一条变成实边, 实修网的总效益增加值恒为: $A_k = 2 \cdot \sum_{i=1}^m A_{ik}$. 故 $R_{i,k}$ 变成实边的净效益为:

$$Z_{k,i} = A_k - H_{k,i} \quad (1 \leq i \leq M)$$

设其中最大者为 $Z_{k,r}$, 令 $Z_k = Z_{k,r}$, 若 P_k 真的加入实修网, 它必与 $R_{k,r}$ 一同加入实修网.

第四步 确定新加入的要点. 在各 Z_k 中挑选最大者, 设为 Z_{k_0} , 将 P_{k_0} 与 P_{M+1} 互换, 同时前面的六个矩阵 (Q, A, L, T, l, T, R) 的第 k_0 行与第 $(M+1)$ 行、第 k_0 列与第 $(M+1)$ 列也要互换. 于是 P_{M+1} 成为即将添入实修网的要点, $R_{M+1,r}$ 为即将一同添入实修网的边 (它是母边或寡边).

第五步 考察实修网中尚存的各要点之间的虚边.

与 $R_{M+1,r}$ 竞争入实修网的还有实修网中各要点之间尚存的未加锁的虚边 (图 2), 设这些虚边的集合为 K . 或 K 为空集, 则当 $M = m$ 时, 结束; 当 $M < m$ 时, 跳至第六步. 否则, 设 $R_{ij} \in K$, 若 $l_{ij} + S > MS$, 则对它及其子边 (若有的话) 加锁, 并令 $K = K - \{R_{ij}\}$, 接着考虑下一条. 否则, 计算它变成实边的净效益.

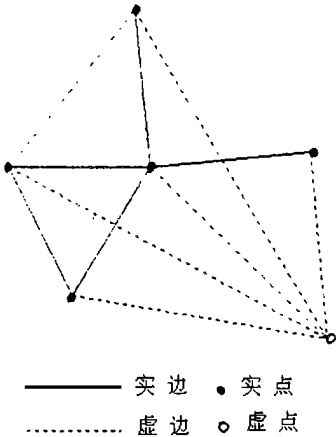


图 2 实修网的扩张过程

由于整个实修网未增加新的要点, 故未增加效益, 也即此举的效益为 0. 线路成本增加了 $2b_{ij}$, 另外, 因为 $i-j$ 间有了直联轨交线, 使原实修网中的某些点对间的最短路径发生变化, 例如 (i, j) 即是, 设这些点对的集合为 H . 与第三步类同, 计算出因此引起的乘客成本节省值 ΔG_{st} , 线路成本增加值 $\Delta B T_{st}^{(i,j)}$ 和减少 $\Delta B T_{st}$. 于是 R_{ij} 变虚为实的净效益为:

$$W_{ij} = 0 - 2b_{ij} + \sum_{(s,t) \in H} [\Delta G_{st} + \Delta B T_{st} - \Delta B T_{st}^{(i,j)}],$$

接着考虑 K 中的下一条边.

第六步 若某个 $W_{ij} > Z_{M+1,r}$ ($R_{ij} \in K$), 跳至第七步. 否则, 让 P_{M+1} 及虚边 $R_{M+1,r}$ 入实修网; 若它还是母边, 则让其子边及其上的尚未入实修网的交点一起加入实修网. 若 $R_{M+1,r}$ 上无早已入实

修网的交点,定义该点和 $R_{M+1,r}$ 上的虚交点(若有的话)至实修网中各点的最短路径:

$$T_{u,j}=T_{j,u}=T_{kj}\oplus u(\oplus \text{表示数组的并接}),$$

$lT_{uj}=l_{u,k}+lT_{kj},(j \text{ 为实修网中各结点的标号}),$

其中 u 依次为 $(M+1)$ 和 $R_{m+1,r}$ 上各虚交点的标号。

若 $R_{m+1,r}$ 上有早已入实修网的交点,则重新计算此边及其子边(若有的话)入实修网后实修网中各结点之间的最短路径,全面修正矩阵 T 及 LT ,修改实修网中最短路径经过 $R_{m+1,r}$ 或其子边的各点对的最短路径沿线各边的流量、线路类型和成本。

最后令 $M=M+1, S=S+1_{M+1,r}$,转至第三步。

第七步 选 K 中 W_{ij} 值最大的虚边,仍设为 R_{ij} ,修改第五步中所述的因使 R_{ij} 变成实边而最短路径发生改变的各实结点对 (s,t) 的 $T_{st}, T_{st}^{(i,j)}$ 沿线各边的流量、类型和线路成本,令: $T_{st}=T_{st}^{(i,j)}, lT_{st}=lT_{st}^{(i,j)}$;让 R_{ij} 及其上的子边和虚交点(若有的话)变成实的,并令 $S=S+L_{ij}$

转至第三步。

算法结束。

最后,得到 M 个实要点和若干条实边构成的实修网,这就是应该投资修建的轨交网

3 示 例

以上海市为例 设 $MS=80\text{km}$,在全市设定 10个要点:人民广场,陆家嘴,虹桥机场,徐家汇,真如,火车站,五角场,花木,闵行,宝山。在预测的

上海市 2010年人员出行量分布基础上,运用本算法可得规划网如图 3所示(图中各边的数值为轨交线长度,单位: km,总长度约 77km) 这意味着,目前上海已建的地铁一号线和在修的地铁二号线基本上是合理的,紧接着应优先考虑修建一条串联各副中心的轨交环线,向闵行、宝山等地的延伸线应缓后修建。

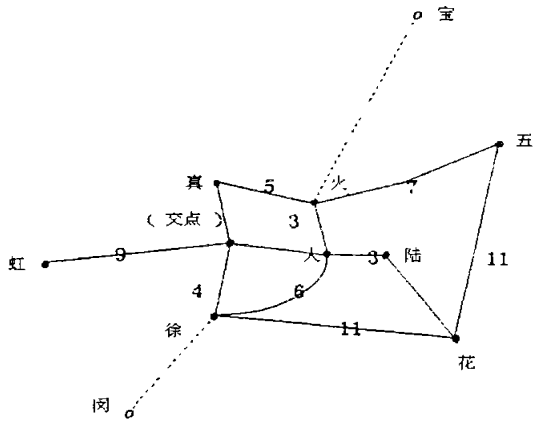


图 3 上海市轨交网示例

参考文献

- 1 刘灿齐.一种分步发展城市轨道交通的规划方法.城市轨道交通研究,1998(1): 39~ 42
- 2 刘 迁.国内城市快速轨道交通客流预测的分析.地铁与轻轨,1996(3): 35~ 38
- 3 史其信等.浅谈城市轨道交通客流预测方法.地铁与轻轨,1996(4): 23~ 26
- 4 王 玮.城市交通规划理论与方法.北京:人民交通出版社.1992 41~ 43

Abstract So far,in traffic field,the line-planning of the urban rail-transit net is mainly qualitative. The method will easily make many errors. Because urban rail-transit is very expensive and inalterable, these errors will waste very much . In this paper, using computer software technology, we are going to research its optimizing algorithm, which help us to get benefit as much as possible by investing as little as possible.

Keywords urban rail-transit; net line-planning; optimizing algorithm