chp 3 : Opération élementaire sur les distribution

I. La multiplication par une fonction C^∞ :

Définition :

H_1 : $T \in D'(\mathbb{R}^n)$

H_2 : $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

la distribution aT définie par :

$\langle aT, \varphi \rangle = \langle T, a\varphi \rangle \quad ; \forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$

Exemple.

1. Dans $D'(\mathbb{R})$

$x.\delta_0 = ? \quad ; \varphi \in D(\mathbb{R})$

$\langle x.\delta_0, \varphi \rangle = \langle \delta_0, x\varphi \rangle = x\varphi(x)\Big|_{x=0} = 0$

$\Rightarrow x.\delta_0 = 0.$

2. Dans $D'(\mathbb{R})$

$\langle x\, vp(\frac{1}{x}), \varphi \rangle = \langle vp(\frac{1}{x}), x\varphi \rangle$

$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \varphi(x)\, dx$

car φ est à support compact donc est définie sur $[-R, R]$

$= \int_{\mathbb{R}} 1.\varphi(x)\, dx$

$= \langle 1, \varphi(x) \rangle = \langle T_1, \varphi \rangle$

$\rightarrow x\, vp(\frac{1}{x}) = 1$

Remarque :

1. Le $\varphi \longrightarrow \langle T, a\varphi \rangle$ définit bien une distribution si $\varphi_j \longrightarrow 0$ dans $D(\mathbb{R}^n)$ alors $(a\varphi_j) \rightarrow 0$ dans $D(\mathbb{R}^n) \rightarrow \langle T, a\varphi_j \rangle \rightarrow 0$ dsc

2. Si T est d'ordre $\leq n$ alors aT est d'ordre $\leq m$

3. $Supp(aT) \subset Supp(a) \cap supp(T)$

on raisonne par l'absurde

Soit $x_0 \notin (suppT \cap supp\, a)$

i.e : $x_0 \notin supp\, T$ ou $x_0 \notin supp\, a$

*) si $x_0 \notin supp\, a$, càd : $\exists V_{x_0}$ tq

$a(x) = 0 \quad \forall x \in V_{x_0}$.

$\Rightarrow a\varphi = 0 \quad , \forall \varphi \in D(V_{x_0})$

$\Rightarrow \langle T, a\varphi \rangle = 0 \quad \Rightarrow \langle aT, \varphi \rangle = 0$

i.e : $x_0 \notin supp(aT)$

4. On fixe $a = a(x)$ dans $C^\infty(\mathbb{R}^n)$

l'application $D'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow D'(\mathbb{R}^n)$

$T \longmapsto aT$

est alors linéaire et continue

ie: $T_j \longrightarrow T$ dans $D'(\mathbb{R}^n)$

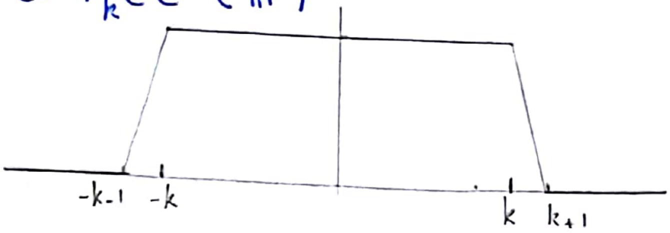
$\Rightarrow aT_j \longrightarrow aT$ dans $D'(\mathbb{R}^n)$

5. Toute élément $T \in D'(\mathbb{R}^n)$ est limité dans $D'(\mathbb{R}^n)$ d'une suite de distribution à support Compact

$k \in \mathbb{N}^*$

$$\psi_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq k \\ 0 & \text{si } |x| \geq k+1 \end{cases}$$

et $\psi_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$



$T \in D(\mathbb{R}^n)$

$T_k = \psi_k T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$

$\langle T_k, \varphi \rangle = \langle \psi_k T, \varphi \rangle = \langle T, \psi_k \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$

$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$, pour $k \geq R$

Si $\operatorname{supp} \varphi \subset B(0, R)$

II. Dérivation des distributions:

$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ Continue

$\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable, de classe C^1

$$\varphi \longmapsto \int_a^b f(x)\, \varphi'(x)\, dx = L(\varphi)$$

Si $f \in C^1$, $L(\varphi) = \left[f(x)\varphi(x) \right]_a^b - \int_a^b f'(x)\varphi(x)\, dx$

Définition.

(dans $\mathbb{R}$)

La dérivée d'une distribution $T \in D'(\mathbb{R})$ est définie par:

$$\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle \; ; \forall \varphi \in D(\mathbb{R})$$

Exemple:

$f \in L^1_{Loc}(\mathbb{R})$

$$\langle T'_f, \varphi \rangle = -\langle T_f, \varphi' \rangle = -\int f(x)\varphi'(x)\, dx$$

si f est de plus, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$

$\operatorname{Supp} \varphi \in [-\alpha, \alpha]$

$$= -\int_{-\alpha}^{\alpha} f \cdot \varphi'\, dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} f'(x)\varphi(x)\, dx$$

$$= \langle T_{f'}, \varphi \rangle$$

Ainsi, lorsque f est une fct de C^1 sa dérivée au sens du distribution coïncide avec sa dérivée usuelle.

$(T_f)' = T_{f'}$

Définition:

(dans $\mathbb{R}^d$)

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle = -\left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle$$

pour $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$

Exemple.

1. Dans $D'(\mathbb{R}^n)$

$\delta_0' = ?$, $\langle \delta_0', \varphi \rangle = -\langle \delta_0, \varphi' \rangle$

$= -\varphi'(0)$

2. $H' = ?$

$$\langle H', \varphi \rangle = -\langle H, \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} H(x)\varphi'(x)\, dx.$$

$$= -\int_0^{\infty} \varphi'(x)\,dx = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle$$

$\Rightarrow H' = \delta_0$

3. $f(x) = |x|$

$$\langle (T_f)', \varphi \rangle = - \langle T_f, \varphi' \rangle$$

$$= - \int_{\mathbb{R}} |x| \varphi'(x)\, dx$$

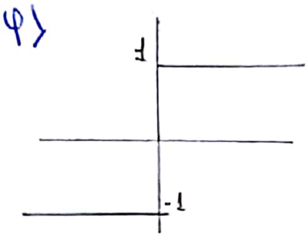
$$= \int_{-\infty}^{0} x\varphi'(x)\,dx - \int_0^{\infty} x\varphi'(x)\,dx$$

$$= x\varphi(x)\Big]_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} \varphi(x)\,dx - x\varphi(x)\Big]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \varphi(x)\,dx$$

$$= -\int_{-\infty}^{0} \varphi + \int_0^{\infty} \varphi$$

$$= \langle T_g, \varphi \rangle$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



4- Dans $D'(\mathbb{R}^2)$

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t,t)\, dt$$

Que vaut $\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y}$?

$$\langle \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y}, \varphi \rangle = - \langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \rangle - \langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \rangle$$

$$= - \langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \rangle$$

$$= - \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}(t,t) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(t,t) \right] dt$$

$$= - \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dt}(\varphi(t,t))\, dt = 0$$

$$= - \left[\varphi(t,t) \right]_{-\infty}^{\infty} = 0$$ (car φ est à support compact)

$$\langle 2y \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y}, \varphi \rangle = \langle \frac{\partial T}{\partial x}, \varphi \rangle + \langle \frac{\partial T}{\partial y}, \varphi \rangle \quad -2.$$

$$= \langle \frac{\partial T}{\partial x}, 2y\varphi \rangle - \langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \rangle$$

$$= - \langle T, 2y \frac{\partial \varphi}{\partial x} \rangle - \langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \rangle$$

$$= - \langle T, 2y \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \rangle$$

$$\langle \frac{y}{2} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y}, \varphi \rangle = - \int_{\mathbb{R}} \left(2 \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t^2,t) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(t^2,t) \right) dt$$

$$= \frac{d}{dt}(\varphi(t^2,t))$$

Remarque:

1- La dérivation est continue ds $D'(\mathbb{R}^n)$

Si $T_j \longrightarrow T$ alors $\frac{\partial T_j}{\partial x_k} \longrightarrow \frac{\partial T}{\partial x_k}$

$$T(x) = \sum_{k \geq 0} e^{2i\pi kx} = 1 + \sum_{k \geq 1} e^{2i\pi kx}.$$

$S(x) = \sum_{k \geq 1} \frac{e^{2i\pi kx}}{k^2}$, S est une fct continue sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow S$ définie ~~sur~~ une distribution sur $\mathbb{R}$

$$S(x) = \lim_{N \to \infty} S_N(x)$$

$$S_N(x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{e^{2i\pi kx}}{k^2}$$

$$\|S - S_N\|_{\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |S(x) - S_N(x)|$$

$$\leq \sum_{k \geq N+1} \frac{1}{k^2}$$

$S_N \longrightarrow S$ pour $\| \ \|_{\infty}$

$$\Rightarrow S_N \longrightarrow S \quad \text{ds } D'(\mathbb{R})$$

$$\Rightarrow T''_{S_N} \longrightarrow T'' \quad \text{ds } D'(\mathbb{R})$$

$$T''_{S_N} = -4\pi^2 \sum_{k=1}^{N} e^{2i\pi k x}$$

Théorème :

toute distribution opportée par l'origine est Combimaison linéaire et dérivées de La masse de Dirac

Preuve : (dans $\mathbb{R}$)

$T \in D'(\mathbb{R})$, $\operatorname{Supp} T \subset \{0\}$

. Si $\operatorname{Supp} T = \emptyset$

$T = 0$, $T = 0 . \delta_0$

. Si $\operatorname{Supp} T = \{0\}$, $\exists \alpha_0, \dots, \alpha_N \in \mathbb{C}$

$$T = \alpha_0 \delta_0 + \alpha_1 \delta_0' + \dots + \alpha_N \delta_0^{(N)}$$

$\operatorname{Supp} T \subset k$

$\operatorname{ordre}(T) < \infty$

$\varphi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$

$$\varphi(x) = \sum_{j=0}^{m} \frac{x^j}{j!} \varphi^{(j)}(0) + R_m(x)$$

$$\langle T, R_m \rangle = 0$$

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{j=0}^{n} \langle T, \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!} x^j \rangle$$

$$= \sum_{j=0}^{m} \frac{\overbrace{\langle T, x_j \rangle}^{=C_j}}{j!} \varphi^{j}(0)$$

$$= \sum_{j=0}^{m} \frac{C_j}{j!} (-1)^j \langle \delta_0^{(j)}, \varphi \rangle$$

$$= \langle \sum_{j=0}^{m} \underbrace{\frac{C_j}{j!} (-1)^j}_{\alpha_j} \delta_0^{(j)}, \varphi \rangle$$

Théorème : Formules des Sautes

Soit f une fct de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, càd qu'il existe une suite $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, $a_k < a_{k+1}$, telle que f est de classe C^1 sur $]a_k, a_{k+1}[$ et f et f' se prolongent continuement sur les intervalles $[a_k, a_{k+1}]$

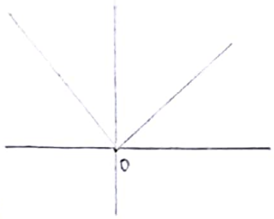
on a alors la formule des sauts :

$$T_f' = \{f'\} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} [f(a_k+0) - f(a_k-0)]\delta_{a_k}$$

où $\{f'\}$ désigne la dérivée usuelle de f en dehors des points a_k

Exemple.

1. $f(x) = |x|$



f est C^1 par morceaux

$$T_f' = \{f'\} + 0.\delta_0$$
$$= \{f'\} = \begin{cases} 1 & \text{si } x>0 \\ -1 & \text{si } x<0 \end{cases}$$

2. $f(x) = E(x)$ $\qquad f(a_k+0) - f(a_k-0) = a_k - (a_k-1)$

$$T_f' = \{f'\} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_k$$

Terminologie : le nombre $f(a_k+0)$ et $f(a_k-0)$ est appelé saut de f au point a_k.

Preuve:

$\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\quad \mathrm{supp}\,\varphi \subset [-R, R]$

$$\langle T_f', \varphi\rangle = -\langle T_f, \varphi'\rangle$$
$$= -\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)\,dx$$
$$= -\int_{-R}^{R} f(x)\varphi'(x)\,dx$$
$$= -\sum_k \int_{a_k}^{a_{k+1}} f.\varphi'\,dx$$
$$= -\sum_k [f.\varphi]_{a_k}^{a_{k+1}} + \sum_k \int_{a_k}^{a_{k+1}} f'\varphi\,dx.$$

$$\sum_k \int_{a_k}^{a_{k+1}} f'\varphi\,dx = \int_{-R}^{R} f'.\varphi(x)\,dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}} f'(x).\varphi(x)\,dx$$
$$= \langle \{f'\}, \varphi\rangle$$
$$= \langle T_{\{f'\}}, \varphi\rangle.$$

$$-\sum_k (f.\varphi)_{a_k}^{a_{k+1}} = -(f(a_{k+1}-0)\varphi(a_{k+1}) - f(a_k+0)\varphi(a_k))$$
$$-(f(a_{k+2}-0)\varphi(a_{k+2}) - f(a_{k+1}+0)\,f(a_{k+1}))$$

Exercice :

$f(x) = \mathrm{Log}|x|$

$|x|^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{Log}|x| \longrightarrow 0$

$x \longrightarrow 0$

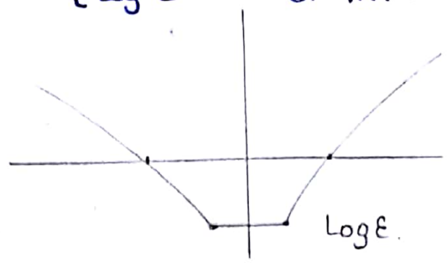
$\exists \alpha > 0,\ |x| < \alpha,\ |x|^{\frac{1}{2}}|\mathrm{Log}|x|| \leq 1$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} |\mathrm{Log}|x||\,dx \leq \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = 2\int_0^{\alpha} \frac{dx}{\sqrt{x}} < \infty$$

$\Rightarrow f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$

Que vaut T'_f ?

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \log|x| & \text{si } |x| \geq \varepsilon \\ \log \varepsilon & \text{si } |x| < \varepsilon \end{cases}$$



$f_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} f$ ds $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$\langle f_\varepsilon, \varphi \rangle \longrightarrow \langle f, \varphi \rangle$?

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x) - \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)\varphi(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} (f(x) - f_\varepsilon(x))\varphi(x)\, dx$$

$$= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (\log|x| - \log\varepsilon).\varphi(x)\, dx.$$

$$\left|\int \quad \right| \leq \|\varphi\|_\infty \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |\log|x|| + |\log\varepsilon|\, dx$$

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |\log|x||\, dx \leq 4\int_0^{\varepsilon} \frac{dx}{2\sqrt{x}} = 4\sqrt{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \left|\int \quad \right| \leq 2\varepsilon|\log\varepsilon|$$

$$T'_{f_\varepsilon} \longrightarrow T_f.$$

$$T'_{f_\varepsilon} = \{f'_\varepsilon\}$$

$$\langle T'_{f_\varepsilon}, \varphi \rangle = \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx$$

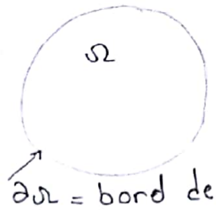
$$\langle T_f, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx$$

$$= \langle vp(\tfrac{1}{x}), \varphi \rangle$$

Formule des Sautes dans l'espace:

om Considère un ensemble ouverts (vase de Klein) Ω de $\mathbb{R}^n$

Ω = disque = $D(0,R)$



$\partial\Omega$ = bord de Ω $= \bar{\Omega} \setminus \Omega$

om suppose que ce bord $\partial\Omega$ est "regulièr"

Théorème:

Ω ouvert borné et régulièr de $\mathbb{R}^n$, $\Omega' = \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$

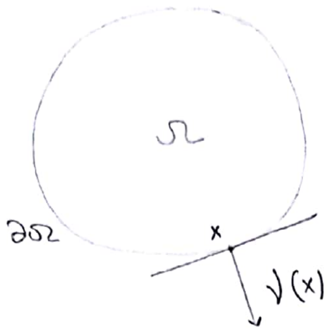
Soit f une fct définie sur $\mathbb{R}^n$ dont les restrictions à Ω et Ω' se prolongent respectivement en des elts de $C^1(\bar{\Omega})$ et $C^1(\bar{\Omega}')$

Pour $x \in \partial\Omega$, on note $f_{int}(x)$ et $f_{ext}(x)$ les valeurs de ces prolongement

$$\frac{\partial T_f}{\partial x_j} = \left\{\frac{\partial f}{\partial x_j}\right\} + \left[f_{ext}(x) + f_{int}(x)\right] \nu(x) e_j(x)\, d\sigma$$

où $\nu(x)$ est le vecteur unitaire normale sortant à $\partial\Omega$, au pt x

$d\sigma$ est La mesure de surface sur $\partial\Omega$ et e_j le j-ème vecteur de de la base Canonique de $\mathbb{R}^n$



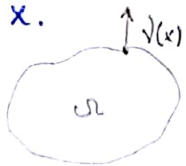
Théorème : Formule de Stokes

Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de bord $\partial\Omega$ régulier

X un champs de vecteurs dont les coefficients appartiennent à $C^1(\bar{\Omega})$

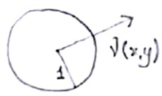
alors $$\int_\Omega \operatorname{div} X(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} X(x)\nu(x)\, d\sigma(x)$$

avec $\nu(x)$: vecteur normale sortant à $\partial\Omega$ au pt x.



Exemple.

$\mathbb{R}^2$, $\Omega = D(0,1)$



$\partial\Omega = S^1$ = cercle unité

$X(x,y) = (a(x,y), b(x,y)) \in C^1(\mathbb{R}^2)$

$$\operatorname{div} X(x,y) = \frac{\partial a}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial b}{\partial y}(x,y)$$

$(x,y) \in S^1 \qquad \nu(x,y) = ?$

$$\iint_D \left(\frac{\partial a}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial b}{\partial y}(x,y) \right) dx\, dy = \int_{S^1} (x\, a(x,y) + y\, b(x,y))\, d\sigma(x,y)$$

En coordonnées polaires:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad d\sigma = d\theta$$

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial a}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \frac{\partial b}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \right) . dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos\theta\, a(\cos\theta, \sin\theta) + \sin\theta\, b(\cos\theta, \sin\theta))\, d\theta.$$

Corollaire: Formule d'integration par partie

$f, g \in C^1(\bar{\Omega})$

$$\int_\Omega g(x) \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\, dx = -\int_\Omega f(x) \frac{\partial g}{\partial x_j}(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} f(x) g(x) \nu(x) e_j\, d\sigma$$

Preuve:

Appliquer la formule de Stokes avec $X(x) = f(x) g(x) e_j$

$$\int_\Omega \operatorname{div} X\, dx = \int_{\partial\Omega} X \nu\, d\sigma$$

$$\operatorname{div} X = \frac{\partial f}{\partial x_j} g + f \frac{\partial g}{\partial x_j}$$

$$\int_\Omega \left(f \frac{\partial g}{\partial x_j} + g \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) dx = \int_{\partial\Omega} f(x) g(x) e_j \nu(x)\, d\sigma$$

Formule de Green:

Δ = laplacien (opérateur de laplace)

Dans $\mathbb{R}^n$, $\Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$

$u, v \in C^2(\bar{\Omega})$

$$\int_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u)\,dx = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)d\sigma$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u\, \nu$$

Exemple.

$$\Omega = B(0,R)$$

$$\nu(x) = \frac{x}{R}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial u}{\partial r}$$

Preuve:

Appliquer Stokes avec

$$X = u\nabla v \quad , Y = v\nabla u$$

$$\int_{\Omega} \mathrm{div}.u\,dx = \int_{\Omega} (\nabla u \nabla v + u\Delta v)\,dx$$

$$= \int_{\partial\Omega} x\,\nu\,d\sigma = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial}{\partial \nu}d\sigma$$

$$X = u\nabla v = \begin{vmatrix} u\frac{\partial v}{\partial x_1} \\ u\frac{\partial v}{\partial x_2} \\ \vdots \\ u\frac{\partial v}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

$$\mathrm{div}\,X = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1} + u\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2} + u\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial v}{\partial x_n} + u\frac{\partial^2 v}{\partial x_n^2}$$

$$= \nabla u \nabla v + u\Delta v.$$

$$u(\mathrm{Div}.\nu) = u\frac{\partial \nu}{\partial u}$$

Théorème: Formule des sautes de l'espace.

$$\Omega,\ \Omega' = \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} T_f = \left\{ T_{\frac{\partial f}{\partial x_j}} \right\} + [f_{ext} + f_{int}]\nu(x)e_j d\sigma$$

i.e. $\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$

$$\left\langle \frac{\partial T_f}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_j}\varphi\,dx + \int_{\Omega'} \frac{\partial f}{\partial x_j}\varphi\,dx + \int_{\partial\Omega} [f_{ext}(x) + f_{int}(x)]\nu(x)e_j\,\varphi(x)d\sigma$$

Preuve: $\left\langle \frac{\partial T_f}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle = ?$, $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$

$$= -\left\langle T_f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle = -\int_{\Omega} f(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}dx - \int_{\Omega} f(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}dx$$

$$= \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\varphi(x)\,dx + \int_{\partial\Omega} f_{int}(x)\varphi(x)\nu(x).e_j d\sigma$$

$$+ \int_{\Omega'} \frac{\partial f}{\partial x_j}\varphi\,dx - \int_{\partial\Omega'} f_{ext}(x)\varphi(x)(-\nu(x))e_j\,d\sigma$$

Exemple. Dans $\mathbb{R}^2$. $u(x,y) = \frac{1}{\pi z} = \frac{1}{\pi(x+iy)}$

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad \text{(opérateur de Cauchy - Riemann)}$$

$$\mathcal{D}u = ? = \delta_0$$

$$\langle \mathcal{D}u, \varphi \rangle = \varphi(0,0) \quad . \ \forall \varphi \in D(\mathbb{R}^2)$$

$u \in D'(\mathbb{R}^2)$??

pour $\to u \in L^1_{Loc}(\mathbb{R}^n)$ m'elle définie une distribution.

$$\int_{D(0,R)} |u(x,y)|\, dx\, dy$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{D(0,R)} \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} \overset{\text{Coord. polaire}}{=} \frac{1}{\pi}\int_0^R\int_0^{2\pi} \frac{\overbrace{r\,dr\,d\theta}^{ds\,\mathbb{R}^2}}{r}$$

dans $\mathbb{R}^n$, $\frac{1}{r^\alpha} r^{n-1} . dr\, dw$

Supp $\varphi \subset D(0,R)$

$$\langle \partial u, \varphi\rangle = -\frac{1}{2\pi}\left\langle \frac{1}{x+iy}, \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right\rangle$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\iint_{D(0,R)} \frac{1}{x+iy}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)dx\,dy$$

$z = re^{i\theta}$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_0^R\int_0^{2\pi} \frac{1}{r} e^{-i\theta}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}(re^{i\theta}) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(\ )\right) r\,dr\,d\theta$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_0^R\int_0^{2\pi} e^{-i\theta}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}(re^{i\theta}) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(re^{i\theta})\right)dr\,d\theta$$

$= I$

$\varphi(r\cos\theta, r\sin\theta) = g(r,\theta)$

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(-)\cos\theta + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(-)\sin\theta$$

$$\frac{\partial g}{\partial\theta}(r,\theta) = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}(-)r\sin\theta + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(-)r\cos\theta$$

$$r\cos\theta\frac{\partial g}{\partial r} - \sin\theta\frac{\partial g}{\partial\theta} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(-)\, r$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial x}(re^{i\theta}) = \cos\theta\frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial\theta}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(re^{i\theta}) = \sin\theta\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial\theta}$$

$$r\sin\theta\frac{\partial g}{\partial r} + \cos\theta\frac{\partial g}{\partial\theta} = r\frac{\partial\varphi}{\partial y}.$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(re^{i\theta}) + i\frac{\partial\varphi}{\partial y}(re^{i\theta}) = e^{i\theta}.\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) + i\frac{e^{i\theta}}{r}\frac{\partial g}{\partial\theta}(r,\theta)$$

$$I = \frac{-1}{2\pi}\int_0^R\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{i}{r}\frac{\partial g}{\partial\theta}\right)d\theta\,dr$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)\,dr\right)d\theta$$

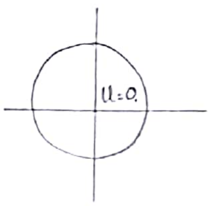
$$= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(-\varphi(0,0))\,d\theta = \varphi(0,0)$$

$(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x+iy}\right)$$

$$= \frac{-1}{(x+iy)^2} + \frac{1}{(x+iy)^2} = 0$$

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi z}\cdot \lim_{\varepsilon\to 0^+} \overbrace{\frac{1}{\ }\ \frac{1}{\pi z}}^{u_\varepsilon}_{|z|\geq\varepsilon}$$



$$\frac{1}{\pi z} = \frac{1}{\pi(x+iy)} = u(x,y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\} + \frac{1}{\pi(x+iy)}\nu(x,y)_1 d\sigma$$

$$i\frac{\partial u}{\partial y} = \left\{i\frac{\partial u}{\partial y}\right\} + \frac{(+i).1}{\pi(x+iy)}\nu(x,y)_2 d\sigma$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} = \cancel{\{0\}} + \frac{1}{\pi\varepsilon}.d\sigma = \frac{1}{\pi}d\theta.$$

$(x,y) \in C$(cercle)

$$\nu(x,y) = \left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right)$$

$$\frac{1}{\pi(x+iy)}\left(\frac{x}{\varepsilon} + i\frac{y}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{\pi.\varepsilon}$$

Scanned by CamScanner

$d\sigma = \varepsilon\, d\theta$

$$\langle Pu, \varphi\rangle = \left\langle \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}\right), \varphi\right\rangle$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{\pi}\varphi(\varepsilon,\theta)\, d\theta.$$

Définition:

$$P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D_x^\alpha \quad (a_\alpha \in \mathbb{C})$$

un opérateur différentiel à coeff. cste.

on dit qu'une distribution E est solution élémentaire de $P(D)$. si $P(D)E = \delta_0$

E est aussi appelées sol° fondamentale de P.

$$D_x^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} \cdots D_{x_n}^{\alpha_n}$$

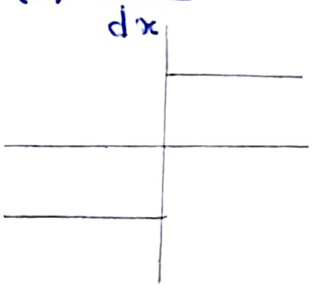
$$D_{x_j}^{\alpha_j} = \frac{1}{i}\frac{\partial^{\alpha_j}}{\partial x_j^{\alpha_j}} \ ?$$

Exemple:

1- Dans $\mathbb{R}$; $P(D) = \dfrac{d}{dx}$

$E = H$

$$\frac{dH}{dx} = H' = \delta_0$$



② $\mathbb{R}$, $P = \dfrac{d}{dx} - \lambda$; $\lambda \in \mathbb{C}$

$E = e^{\lambda x} H.$

$$PE = (e^{\lambda x}H)' - \lambda e^{\lambda x} H$$

$$= \lambda e^{\lambda x} H - \lambda e^{\lambda x} H + e^{\lambda x}\delta_0$$

$$= e^{\lambda . 0}\delta_0 = \delta_0$$

$u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $f \in C^\infty(\mathbb{R})$

$(fu)' = f'u + fu'$, en effet,

$$\langle (fu)', \varphi\rangle = -\langle fu, \varphi'\rangle = -\langle u, f\varphi'\rangle$$

$$= -\langle u, (f\varphi)' - f'\varphi\rangle$$

$$= -\langle u, (f\varphi)'\rangle + \langle u, f'\varphi\rangle$$

$$= \langle f u', \varphi\rangle + \langle f u', \varphi\rangle$$

$$= \langle f'u + fu', \varphi\rangle$$

D'où $(fu)' = f'u + fu'$

3- $\lambda, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$

$$\langle E, \varphi\rangle = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\varphi(t, \alpha_1 t, \ldots, \alpha_n t)\, dt$$

$$P = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \alpha_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \lambda$$

¿ $PE = \delta_0 \iff PE(\varphi) = \varphi(0)$?

$\langle E, \varphi\rangle$ est bien définie, en effet,

$\forall K$ compact de $\mathbb{R}^{n+1}$, $\varphi \in \mathcal{D}_K$

$K \subset B_{(0,R)}$ car $t \in B(0,R)$

$$|\langle E, \varphi\rangle| \leq \int_0^R e^{-\lambda t}\|\varphi\|_\infty\, dt$$

$$|\langle E, \varphi\rangle| \leq \int_0^R e^{-\lambda t}\|\varphi\|_\infty\, dt$$

$$= \frac{1 - e^{-\lambda R}}{\lambda}\|\varphi\|_\infty$$

$\langle PE, \varphi\rangle = ?$

$$PE = \frac{\partial E}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \alpha_j \frac{\partial E}{\partial x_j} + \lambda E$$

$$\langle PE, \varphi\rangle = \langle \frac{\partial E}{\partial t}, \varphi\rangle + \sum_{j=1} \alpha_j \langle \frac{\partial E}{\partial x_j}, \varphi\rangle + \langle \lambda E, \varphi\rangle$$

$$= -\langle E, \frac{\partial \varphi}{\partial t}\rangle - \sum \langle E, \alpha_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\rangle + \langle E, \lambda\varphi\rangle$$

$$= \int_0^\infty - e^{-\lambda t}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \alpha_1 t, \dots, \alpha_n t) + \sum \alpha_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(\text{———}) - \lambda\varphi(-)\right] dt$$

$$= -\int_0^\infty \frac{d}{dt}\left(e^{-\lambda t}\varphi(t, \alpha_1 t, \dots, \alpha_n t)\right) dt$$

Composition de dérivation

$= \varphi(0,0)$

D'où $PE = \delta_0$

Remarque:

Une solution éltaire de $P(D)$ lorsqu'elle existe, n'est pas unique en général. On peut tjrs lui ajouter une distribution ds le rayon de $P(D)$

$$\left.\begin{array}{l} P(D)E = \delta_0 \\ \text{Si } P(D)u = 0 \end{array}\right) \Rightarrow P(D)(E+u) = \delta_0$$

Exemple.

① $\mathbb{R}^2$

$P = \bar\partial = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial x)$

$E = \frac{1}{\pi z} = \frac{1}{\pi(x+iy)}$

$h = h(z)$ = fonction holomorphe

les fct holomorphes sont les noyaux de $P = 8\bar\partial = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_x)$

En effet:

$(\partial_x + i\partial_y)(z)$

$(\partial x + i\partial y)(x+iy) = 1 - 1 = 0$

② dans $\mathbb{R}^3$

$\Delta = \partial^2 x + \partial^2 y + \partial^2 z$

$E = \frac{c}{r} = \frac{c}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$\Delta E = \delta_0$

$h \in C^\infty$, $\Delta(E+h) = \delta_0$

$\Delta h = 0$

$h(x,y,z) = \alpha x + \beta y + \partial z.$

3. Convolution des distributions:

Définition.

- $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$: distribution à support compact
- $S \in D'(\mathbb{R}^n)$: distribution

on appelle produit de convolution de T et S la distribution définie par :

$\langle T * S, \varphi\rangle = \langle T_x, \langle S_y, \varphi(x+y)\rangle\rangle$

$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$

Exple:

$\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\langle S_y, \varphi(x+y)\rangle$

$\forall x$ fixe, $x \in \mathbb{R}^n$.

$y \longmapsto \varphi(x+y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

et $\operatorname{supp} \varphi(x+y) = \operatorname{supp}\varphi + \{x\}$

$\langle \delta_y , \varphi(x+y) \rangle = \varphi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

$\partial_x^\alpha \langle \delta_y , \varphi(x+y) \rangle = \langle \delta_y , \partial_x^\alpha \varphi(x+y) \rangle$

(Théo de dérivation sous le crochet)

Exemple très important :

$f \in L^1_{Loc}(\mathbb{R}^n)$, supp f ~~(...)~~ compact

$g \in L^1_{Loc}(\mathbb{R}^n)$

$T \longrightarrow T_f$ et $S \longrightarrow T_g$

$T_f * T_g$. , $\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$

$I = \langle T_f * T_g , \varphi \rangle$

$= \langle T_{f_x} , \langle T_{g_y} , \varphi(x+y) \rangle \rangle$

$\langle T_{g_y} , \varphi(x+y) \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\, \varphi(x+y)\, dy$

donc

$I = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(y)\, \varphi(x+y)\, dy \right) dx$

ψ comme $\varphi \subset$ compact $(x+y) \subset$ Compact

$\Rightarrow \psi \in$ Compact , $x \in$ Compact

car $f \in$ Compact.

on pose $s = x+y$, Jacobienne $= |1|$

$t = x$.

$I = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\, g(s-t)\, \varphi(s)\, ds . dt$

Tonelli Fubini.

$= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(t)\, g(s-t)\, dt \right) \varphi(s)\, ds$

$= \int_{\mathbb{R}^n} (f*g)(s)\, \varphi(s)\, ds$

$\langle T_f * T_g , \varphi \rangle = \langle T_{f*g} , \varphi \rangle$

$$\boxed{T_f * T_g = T_{f*g}}$$

Remarques :

1 - cette Convolution admet δ_0 comme elt neutre

$\langle T * \delta_0 , \varphi \rangle = \langle T_x , \underbrace{\langle \delta_0(y) , \varphi(x+y) \rangle}_{\varphi(x)} \rangle$

$= \langle T_x , \varphi(x) \rangle$

2 - Elle est Commutative et associative (...)

3 - Dérivation d'un Convolée

$\partial x_j (T * S) = \partial_{x_j} T * S = T * \partial_{x_j} S$

4 - Si $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, on vérifie que $T * \varphi$ est une fct C^∞ définie par :

$(T * \varphi)(x) = \langle T_y , \varphi(x-y) \rangle$

5 - Si (ρ_k) est une approximation de l'identité alors, pour toute $u \in D'(\mathbb{R}^n)$

la suite de fct C^∞

$u_k = \rho_k * u$ Converge vers u .

ds $D'(\mathbb{R}^n)$

$\rho_k * u \xrightarrow[D'(\mathbb{R}^n)]{} u$

Scanned by CamScanner

⑥- $P(D)$ opérateur differentielle

à Coeff cst.

E est une solution éltaire

de $P(D)$, alors :

$P(D)(E * V) = V \ , \ \forall V \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$

(permet la resolution de EDP

$$P_u = V$$

on prend $u = (E * V)$

car $P(D)(E * V) = V$

$$P(E * V) = (P E) * V$$

$$= \delta_0 * V = V$$

7- $Supp(T * S) \subset Supp T + Supp S$

il faut que T ou S à support

compact.

si non on met borne

Application:

$D'_+(\mathbb{R}) = \{ T \in D'(\mathbb{R}) \ , \ Supp T \subset \mathbb{R}_+ \}$

D'_+ est une algèbre pour la

convolution.