Chapitre 3

LES DISTRIBUTIONS

On introduit dans ce chapitre l'espace des distributions sur $\mathbb{R}^n$ ainsi que leurs propriétés élémentaires. Il est bien entendu que tout le travail peut être repris mot pour mot sur un ensemble Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$.

1. Cadre de travail

On notera $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables et à support compact sur $\mathbb{R}^n$. C'est un espace très utile en analyse puisqu'il est dense dans la plupart des espaces fonctionnels, en particulier dans les $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$. Cependant, lorsqu'on essaie de le munir d'une topologie raisonnable qui rend, par exemple, la dérivation continue, on s'aperçoit que l'entreprise n'est pas très aisée....Dans ce cours, nous allons donc jeter un voile pudique sur cette topologie en disant simplement que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est muni de la topologie limite inductive stricte issue des espaces $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$, où les K sont des ensembles compacts de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$ est le sous espace des éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, à support dans K.
On admettra les deux propriétés suivantes:

1. Une suite (φ_k) de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ converge vers 0 s'il existe un compact K de $\mathbb{R}^n$ tel que
   - $\mathrm{supp}(\varphi_k) \subset K$ pour tout k,
   - la suite $(\partial_x^\alpha \varphi_k)$ converge vers 0 uniformément sur K, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$
2. Une application linéaire est continue sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si elle est séquentiellement continue (cad continue sur les suites).

2. Les distributions

Définition: On appelle distribution sur $\mathbb{R}^n$ toute forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.
L'espace des distributions sera noté $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

L'image de $\varphi \in \mathbb{R}^n$ par $T \in \mathbb{R}^n$ sera notée $\langle T, \varphi \rangle$.

Proposition 1
Soit T une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes.

1. T est une distribution sur $\mathbb{R}^n$.
2. Pour tout compact K de $\mathbb{R}^n$, il existe $k \in \mathbb{N}$ et une constante $C > 0$ tels que

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_K |\partial_x^\alpha \varphi(x)| \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n). \tag{*}$$

Preuve: Le sens 2) $\Longrightarrow$ 1) est clair. Pour la réciproque, en raisonnant par l'absurde, on trouve un compact K et (en prenant $C = k = j \geq 1$) une suite $\varphi_j \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$ tels que

$$|\langle T, \varphi_j \rangle| > j \sum_{|\alpha| \leq j} \sup_K |\partial_x^\alpha \varphi_j(x)|$$

La suite $\psi_j = |\langle T, \varphi_j\rangle|^{-1}\varphi_j$ vérifie alors $|\langle T, \psi_j\rangle| = 1$ et

$$\sup_K |\partial_x^\alpha \psi_j(x)| < 1/j, \quad \text{pour } |\alpha| \leq j, \quad \text{supp}\psi_j = \text{supp}\varphi_j \subset K,$$

ce qui exprime en particulier qu'elle converge vers zéro dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et contredit ainsi le point 1).

Exemples de distributions

1. La masse de Dirac en un point x_0 de $\mathbb{R}^n$ notée δ_{x_0} et définie par $\langle \delta_{x_0}, \varphi\rangle = \varphi(0)$.
2. La fonction de Heaviside H élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est définie par $\langle H, \varphi\rangle = \int_0^{+\infty} \varphi(x)dx$.
3. Toute fonction $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ définit naturellement une distribution T_f par la formule $\langle T_f, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx$.
   En effet, pour tout compact K de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$, on a l'estimation
   $$|\langle T, \varphi\rangle| \leq \|f\|_{L^1} \sup_K |\varphi|.$$
   Ainsi, $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ s'injecte dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ par intégration. Dans cet esprit, on dira qu'une distribution T est une fonction s'il existe $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ telle que $T = T_f$. Et on dira que T est de classe C^k si la fonction f est de classe C^k.
   Notons enfin qu'on peut développer les mêmes arguments pour une fonction $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$.
4. Valeur principale de $1/x$
   C'est la distribution sur $\mathbb{R}$ définie par
   $$\langle Vp(1/x), \varphi\rangle = \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \int_{|x|\geq\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx$$
5. La distribution sur $\mathbb{R}^n$ définie par $\langle T_f, \varphi\rangle = \int_{S_R} \varphi(x)d\sigma(x)$ où S_R est la sphère de $\mathbb{R}^n$ de centre l'origine et de rayon R.

2. Ordre et support d'une distribution

Définition: Si l'inégalité (*) de la Proposition 1.1 est vérifiée par un entier k_0 indépendant du compact K tel que supp$\varphi \subset K$, on dit que la distribution T est d'ordre $\leq k_0$. Si un tel k_0 n'existe pas, on dit que T est d'ordre infini.

Moralement, lorsqu'on applique une distribution d'ordre $\leq k_0$ à une fonction-test φ, on "consomme" au plus k_0 dérivées de φ.

Exemples

- Les distributions des exemples 1), 2), 3) et 5) précédents sont d'ordre 0.
- $Vp(1/x)$ est d'ordre 1.
- La distribution sur $\mathbb{R}$ donnée par $\langle T, \varphi\rangle = \sum_{k=0}^{k=p} \varphi^{(k)}(0)$ est d'ordre p.
- La distribution sur $\mathbb{R}$ donnée par $\langle T, \varphi\rangle = \sum_{k\geq 0} \varphi^{(k)}(k)$ est d'ordre infini .

Définition: Support d'une distribution
Un point x_0 n'appartient pas au support de la distribution T s'il existe un voisinage ouvert U_{x_0} de x_0 tel que $\langle T, \varphi\rangle = 0$ pour toute fonction-test φ supportée dans U_{x_0}.

Remarque

1. Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ tel que $\langle T, \varphi\rangle = 0$ pour toute fonction-test φ supportée dans U, on dit que T est nulle sur U. Supp$T$ est ainsi le complémentaire du plus grand ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ sur lequel T est nulle.

2. Clairement, supp$T$ est un sous ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$.

3. Si supp$T$ est compact, on dit que T est une distribution à support compact. L'ensemble de ces distributions est noté $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.

Exemples

- supp $\delta_{x_0} = \{x_0\}$ et supp$H = \mathbb{R}_+$.
- Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ alors suppT_f= supp$f$.
- Pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ définie par $|\langle T, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x,x)dx$, on a supp$T = \{(x,y),\ x = y\}$.

3. Distributions à support compact

Nous admettrons le résultat suivant:

Théorème 2: Une distribution T sur $\mathbb{R}^n$ est à support compact s'il existe un compact K de $\mathbb{R}^n$, un entier m et une constante $C > 0$ tels que

$$|\langle T, u\rangle| \leq C \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_K |\partial_x^\alpha u(x)|, \qquad \forall u \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Remarques

1. Il faut bien noter qu'une distribution à support compact s'applique à des fonctions C^∞ et pas seulement aux fonctions C_0^∞.

2. En fait, l'espace $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ des distributions à support compact n'est autre que l'espace des formes linéaires continues sur $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

3. On remarque en particulier qu'une distribution à support compact est d'ordre fini. Mais on prendra garde au fait que la réciproque est fausse ($T = T_1 = 1$).

Nous admettrons enfin le résultat suivant:

Théorème 3: Soit $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, de support K et d'ordre m. Si $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ est nulle sur K ainsi que toutes ses dérivées partielles d'ordre $\leq m$, alors $\langle T, \varphi\rangle = 0$.

4. Suites et familles de distributions

On commence par définir les différentes notions de convergence.

Définition

1. On dit qu'une suite (T_j) de distributions sur $\mathbb{R}^n$ converge vers $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ si pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, la suite de nombres complexes $(\langle T_j, \varphi\rangle)$ converge vers $\langle T, \varphi\rangle$.

2. Si les T_j et T sont dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, on dit que (T_j) converge vers T dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ si $\langle T_j, \varphi\rangle \longrightarrow \langle T, \varphi\rangle$ pour toute $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Exemples

1. Dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $\quad T_\epsilon = \frac{\epsilon}{2}|x|^{\epsilon-1} \longrightarrow \delta_0 \quad$ quand $\epsilon \longrightarrow 0^+$.
2. Dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $\quad T_j = \chi_{[-j,j]} \longrightarrow 1 \quad$ quand $j \longrightarrow +\infty$.

Remarques

1. On a évidemment la même définition pour les familles de distributions $(T_\alpha)_{\alpha\in E}$, E étant un espace métrique.
2. Lorsque elle existe, la limite d'une suite de distributions dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ou $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ est unique.
3. La convergence dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ entraine la convergence dans$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.
   Attention, la réciproque est fausse. Considérer pour cela la famille $\frac{\epsilon}{2}\chi_\epsilon|x|^{\epsilon-1}$ où χ_ϵ est l'indicatrice du segment $[-\epsilon^{-1/\epsilon}, \epsilon^{-1/\epsilon}]$.
4. Un dernier mot de topologie: remarquons que dans l'espace $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, la continuité est équivalente à la continuité séquentielle.

Proposition 4 : Comparaison des convergences.
La convergence dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $C^k(\mathbb{R}^n)$, $(0 \le k \le \infty)$ et $L^p(\mathbb{R}^n)$, $(1 \le p \le \infty)$ entraine la convergence dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.
Il suffit de remarquer que chacune de ces convergences entraine la convergence dans L^1_K, K compact quelconque de $(\mathbb{R}^n)$.

5. Autres propriétés

Soit $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi = \varphi(t,x) \in C^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ (resp. $T \in \mathcal{D}'$ et $\varphi \in C_0^\infty$). On a alors les résultats suivants:

Théorème 5

1. La fonction $t \longrightarrow \langle T, \varphi(t,.)\rangle$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et vérifie
$$\frac{d^k}{dt^k}(\langle T, \varphi(t,.)\rangle) = \langle T, \partial_t^k\varphi(t,.)\rangle \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$
   C'est la règle de dérivation sous le crochet.
2. $$\int_a^b \langle T, \varphi(t,.)\rangle dt = \langle T, \int_a^b \varphi(t,.)\rangle dt$$
   C'est la règle d'intégration sous le crochet.

Preuve: Pour le 1) il suffit de raisonner pour une dérivée, en dimension $n = 1$.
$$\frac{1}{h}(\langle T, \varphi(t+h,.)\rangle - \langle T, \varphi(t,.)\rangle) = \langle T, \frac{\varphi(t+h,.)-\varphi(t,.)}{h}\rangle$$
Et la famille $\frac{\varphi(t+h,.)-\varphi(t,.)}{h}$, ainsi que toutes ses dérivées, tend uniformément vers $\partial_t\varphi(t,x)$, sur tout compact.
Pour le 2), on pose
$$F(y) = \langle T, \int_a^y \varphi(t,.)dt\rangle$$

La règle de dérivation sous le crochet nous donne alors $F'(y) = \langle T, \varphi(y, .)\rangle$, ce qui entraine

$$\langle T, \int_a^b \varphi(t, .)\rangle dt = F(b) = \int_a^b F'(y)dy = \int_a^b \langle T, \varphi(y, .)\rangle dy,$$

compte tenu du fait que $F(a) = 0$.

les distributions

I. Cadre du Travail :

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ espace des fonctions test

$\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ $\quad L(\varphi) = k^n \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(kx)\,dx$

$$= \int \varphi(x) = 1$$

Exemple :

$\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$; $\varepsilon > 0$

$$A_\varepsilon \varphi = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon}\,dx$$

$$A_\varepsilon(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{(x-i\varepsilon)\,\varphi(x)}{x^2+\varepsilon^2}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{x\,\varphi(x)}{x^2+\varepsilon^2}\,dx - i\varepsilon \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x^2+\varepsilon^2}\,dx$$

$$-i\varepsilon \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x^2+\varepsilon^2}\,dx \underset{x=\varepsilon y}{=} -i \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(\varepsilon y)}{y^2+1}\,dy$$

$$\longrightarrow \varphi(0).(-i)\,\pi$$

$$\varphi(x) = \int_0^x \varphi'(t)\,dt + \varphi(0)$$

$$= x \int_0^1 \varphi'(xs)\,ds + \varphi(0)$$

$$= x\,\psi(x) + \varphi(0)$$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x\,\varphi(x)}{x^2+\varepsilon^2}\,dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(0)\,x}{x^2+\varepsilon^2}\,dx + \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2\,\psi(x)}{x^2+\varepsilon^2}\,dx}_{\varepsilon \to 0}$$

$\int_{\mathbb{R}} \psi(x)\,dx$

$C(2^k, 2^{k+1}) = \{x \in \mathbb{R}^n,\ 2^k < |x| < 2^{k+1}\}$

Couronne

$f_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp} f_k \subset C_{(2^k, 2^{k+1})}$

Rappel

$(f_1, \dots, f_N)$ est libre si

$\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_N f_N = 0$

$\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x \in C_{(2, 2^2)}$

$\rightarrow \alpha_1 f_1(x) = 0$ or $f_1(x) \neq 0$

$\Rightarrow \alpha_1 = 0$

de même pour $\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_N = 0$

on veut étudier l'espace des formes linéaires continues sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\varphi \longmapsto T(\varphi)$$

Définition :

Une suite (φ_k) de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ converge vers 0, s'il existe un compact $K \subset \mathbb{R}^n$ tq :

- $\operatorname{Supp}(\varphi_k) \subset K$.
- La suite $(\partial_x^\alpha \varphi_k)$ converge uniformement vers 0 sur K, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$

$$\sup_{x \in K} |\partial_x^\alpha \varphi_k| \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$$

Définition:

Une Suite (φ_k) de $D(\mathbb{R}^n)$ Converge vers φ s'il existe un Compact $K \subset \mathbb{R}^n$ tq :

- $\text{Supp}\,\varphi$, $\text{Supp}\,\varphi_k \subset K$
- La Suite $(\partial_x^\alpha \varphi_k)$ Converge uniformement vers $(\partial_x^\alpha \varphi)$ sur K pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$

$$\sup_{x \in K} |\partial_x^\alpha \varphi_k(x) - \partial_x^\alpha \varphi(x)| \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

Théorème admis :

$T : D(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ une forme lineaire est Continue ssi elle est séquentiellement Continue

ie : Si $\varphi_k \longrightarrow 0$ ds $D(\mathbb{R}^n)$

alors $T(\varphi_k) \longrightarrow 0$ ds $\mathbb{C}$