Les Distributions Tempérées

1. Retour sur l'espace de Schwartz :

on rappelle que $S(\mathbb{R}^n)$ est Constitué des fcts C^∞ tq :

- $\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial_x^\beta \varphi(x)| < \infty$
- $\sup_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^n) |\partial_x^\beta \varphi(x)| < \infty, \forall \beta \in \mathbb{N}^n$
- $\lim_{|x|\to\infty} x^\alpha \partial_x^\beta \varphi(x) = 0, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$;

les Propriètes précedentes sont équivalentes

Définition.

Pour $m \in \mathbb{N}$;

$$P_m(\varphi) = \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq m} \sup |x^\alpha \partial_x^\beta \varphi(x)|$$

c'est une semi-norme sur $S(\mathbb{R}^n)$

L'ensemble de ses semi-normes permet de munir $S(\mathbb{R}^n)$ d'une Topologie d'espace vectoriel topologique métrisable et Complet.

on peut prendre (par exemple)

$$d(\varphi, \psi) = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{2^k} \frac{P_k(\varphi-\psi)}{1+P_k(\varphi-\psi)}$$

Proposition : (Admise)

1. une app. lineaire $A : S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ est Continue ssi :

   Pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\exists c > 0$ et $\exists k \in \mathbb{N}$

   tq $P_m(A\varphi) \leq c P_k(\varphi)$, $\forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$

2. Une app. lineaire $B : S(\mathbb{R}^n) \to (E, \|\ \|)$ e.v.n, est Cont ssi :

   il existe $c > 0$ et il existe $k \in \mathbb{N}$

   tq : $\|B\varphi\|_E \leq c P_k(\varphi)$, $\forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$

3. Une suite $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de $S(\mathbb{R}^n)$ converge vers φ ds $S(\mathbb{R}^n)$ ssi :

   $$P_m(\varphi_j) \xrightarrow[j\to\infty]{} 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
   $$P_m(\varphi_j - \varphi) \longrightarrow 0$$

Exemple :

1. Soit $q \in \mathbb{R}$; $q \geq 1$

   $S(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^1(\mathbb{R}^n)$ continue

   $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, $\|\varphi\|_{L^q} ? \leq c P_k(\varphi)$

   $$\|\varphi\|_q^p = \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^q dx$$
   $$= \int_{\mathbb{R}} (1+|x|)^{-q(n+1)} ((1+|x|^2)^{n+1} \varphi(x))^q dx$$

$$\leq \sup_{\mathbb{R}^n} \left((1+|x|^2)^{n+1} |\varphi(x)| \right)^q \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{(1+|x|^2)^{q(n+1)}}$$

$$\leq \left(p_{2(n+1)}(\varphi) \right)^q \frac{1}{\| (1+|x|^2)^{n+1} \|_{L^q}^q}$$

2. Soit $a = a(x)$ une fct C^∞, majorée par un polynôme, ainsi que $a(x)$ est à croissance polynomiale

Alors L'app : $M_a : \varphi \longrightarrow a\varphi$ est Cont de $S(\mathbb{R}^n)$ dans lui même.

3. La transformation de Fourier

$$F : S(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S(\mathbb{R}^n)$$
$$\varphi \longmapsto F\varphi = \hat{\varphi}$$

$$\hat{\varphi}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy} \varphi(y)\, dy$$

$\forall m \in \mathbb{N}$, $\exists c > 0$, $\exists k \in \mathbb{N}$

$$P_m(\hat{\varphi}) \leq C\, P_k(\varphi)$$

$\boxed{m=0}$

$$P_0(\hat{\varphi}) = \|\hat{\varphi}\|_\infty \leq \|\varphi\|_{L^1}$$

$$\leq \left\| \frac{1}{(1+|x|)^{n+1}} \right\|_{L^1} P_{n+1}(\varphi)$$

or

$$x^\alpha \partial_x^\beta \varphi(x) = (2i\pi)^{-|\alpha|} F\left(\partial_x^\alpha (-2i\pi x)^\beta \varphi(x) \right)$$

$(\hat{f'}) = ?$ $\quad \{ f(\xi) \, \hat{?} \}$ $\quad$ Sup def

$$\sup_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial x^\beta \hat{f}(x)| \leq C_{\alpha,\beta}\, P_0\left(\partial_x^\alpha (-2i\pi x)^\beta \varphi(x) \right)$$

$$\leq C_{\alpha,\beta,n}\, P_{n+1}\left(\partial_x^\alpha (-2i\pi x)^\beta \varphi(x) \right)$$

$$\leq C\, P_{(m+1+n)}(\varphi)$$

$$\Rightarrow P_m(\hat{\varphi}) \leq C\, P_{m+n+1}(\varphi)$$

Naturellement :

$F : S(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S(\mathbb{R}^n)$ est un isomorphisme de $S(\mathbb{R}^n)$

Théorème :

L'ensemble $D(\mathbb{R}^n)$ est dense ds $S(\mathbb{R}^n)$

Preuve.

$\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$

$\exists \varphi_j \in D(\mathbb{R}^n)$ tq $\varphi_j \xrightarrow[j\to\infty]{} \varphi$ ds $S(\mathbb{R}^n)$

$\psi = \psi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 2 \end{cases}$$

ψ fonction p

$R > 0$. $\psi_R(x) = \psi\left(\frac{x}{R}\right)$

$$\psi_R(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq R \\ 0 & \text{si } |x| \geq 2R \end{cases}$$

$$\varphi_R(x) = \psi_R(x)\varphi(x) \in C_0^\infty, \quad \|\psi\|_\infty = 1$$

$\cdot\ \varphi_R \longrightarrow \varphi$ ds $S(\mathbb{R}^n)$ lorsque $R \longrightarrow +\infty$

$$\varphi(x) - \varphi_R(x) = \varphi(x)(1 - \psi_R(x))$$

$$P_m(\varphi - \varphi_R) \xrightarrow[R\to\infty]{} 0, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Em effet,

$$P_0(\varphi-\varphi_k) = \sup_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x) - \varphi_k(x)|$$

$$\leq \sup_{|x|\geq R} |\varphi-\varphi_R|$$

$\hookrightarrow \varphi-\varphi_R = \varphi(1-\psi_R)$

si $|x|\leq R$ $\quad \psi_R = 1$

donc $\quad 1-\psi = 0$

donc on s'intéresse $|x|\geq R$.

$$\leq 2\sup|\varphi(x)|$$

car $\sup|\varphi-\varphi_R|$

$$= \sup|\varphi(1-\psi_R(x))|$$

$$\leq \sup \varphi(\sup 1 + \sup \psi) \quad (=1)$$

$$= 2\sup\varphi$$

$$\leq 2 \cdot \frac{P_1(\varphi)}{1+R}$$

car $\varphi(x) = \dfrac{1}{1+|x|}(1+|x|)\varphi(x)$, $x \geq R$, $P_1(\varphi)$

$\bullet\ P_1(\varphi - \varphi_R) \xrightarrow[R\to+\infty]{?} 0$

$\sup|x_j(\varphi-\varphi_R)|$

$\sup|\partial x_j(\varphi-\varphi_R)|$

$\cdot\ \sup|x_k \partial x_j(\varphi-\varphi_k)|$

$\cdot\ P_0(\varphi-\varphi_R)$

$$x_k \partial x_j (\varphi(x)(1-\psi(\tfrac{x}{R})))$$

$$= x_k(\partial x_j \varphi(x))(1-\psi(\tfrac{x}{R})) - x_k\varphi(x)\frac{1}{R}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)\left(\frac{x}{R}\right)$$

$\Downarrow$

$$\|x_k \partial x_j(\varphi(x)(1-\psi(\tfrac{x}{R}))\| \leq C_1 P_2(\varphi) + \frac{C_2}{R}P_1(\varphi)$$

2. les distributions tempérées :

Définition:

Distribution tempérée :

on dit que u est une distribution tempérée si u est une forme linéaire continue sur $S(\mathbb{R}^n)$

$$u : S(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\varphi \longmapsto \langle u,\varphi\rangle.$$

$\exists c>0,\ \exists m\in\mathbb{N}$ tq $|\langle u,\varphi\rangle| \leq c P_m(\varphi)$

$\forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$

$\Rightarrow$ On note $S'(\mathbb{R}^n)$ l'espace des distributions tempérées

Remarque:

1. si $\varphi_j \longrightarrow \varphi$ ds $S(\mathbb{R}^n)$ alors:

$\langle 0,\varphi_j\rangle \longrightarrow \langle 0,\varphi\rangle$ ds $\mathbb{C}$

2. $S'(\mathbb{R}^n) \subset D'(\mathbb{R}^n)$

$(D(\mathbb{R}^n) \subset S(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n))$

⚠ La Réciproque est fausse.

Exemple:

1. $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \subset S'(\mathbb{R}^n) \subset D'(\mathbb{R}^n)$

($\mathcal{E}'$ est le duale de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$)

2) Pour $p\geq 1$

$$L^p(\mathbb{R}^n) \subset S'(\mathbb{R}^n)$$

$f\in L^p(\mathbb{R}^n) \Rightarrow T_f \in S'(\mathbb{R}^n)$

$\varphi\in S(\mathbb{R}^n)$, $\langle T_f,\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,dx$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x)}{(1+|x|)^{n+1}} (1+|x|)^{n+1} \varphi(x) \, dx$$

$$|\langle T_f, \varphi \rangle| \leq P_{n+1}(\varphi) \int \frac{f(x)}{(1+|x|)^{n+1}} dx$$

$$\leq P_{n+1}(\varphi) \; \|f\|_{L^p} \left\| \frac{1}{(1+|x|)^{n+1}} \right\|_{L^q}$$

Holder

3. On rappelle que $h(x) = e^x$ dëfimit un element de $D'(\mathbb{R}) \longrightarrow T_f$

(car $e^x \in L^1_{Loc}$)

attention : $T_f = T_{e^x} \in S'(\mathbb{R})$

Exercice:

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \forall n \in \mathbb{N}, \exists C_m > 0$ tq

$$P_m(\varphi(x-a)) \leq C_m P_m(\varphi)(1+|a|)^m$$

$$P_m(\psi) = \sum_{k,p\leq m} \sup_{\mathbb{R}} \left(|x|^k |\psi^{(p)}(x)|\right)$$

$$P_m(\varphi(x-a)) = \sum_{k,p\leq m} \sup_{\mathbb{R}} \left(|x|^k |\varphi^{(p)}(x-a)|\right)$$

$$(\varphi(x-a))' = \varphi'(x-a)$$

$$x = x-a+a$$

$$|x|^k = (|x-a|+|a|)^k \leq C_k(|x-a|^k+|a|^k)$$

$$P_m(\varphi(x-a)) \leq \sum_{k,p\leq m} C_k \sup_{\mathbb{R}}\Big(|\underbrace{x-a}_{y}|^k |\varphi^{(p)}(\underbrace{x-a}_{y})|\Big) + \sum_{k,p\leq m} C_k \sup_{\mathbb{R}}\left(|a|^k |\varphi^{(p)}(x-a)|\right)$$

$$P_m(\varphi(x-a)) \leq \sum_{p,k\leq m} C_k \sup_{\mathbb{R}} \left(|y|^k |\varphi^{(p)}(y)|\right) + \sum_{k,p\leq m} (1+|a|)^{k \to m} C_k \sup_{\mathbb{R}} |\varphi^{(p)}(y)|$$

$$P_m(\varphi(x-a)) \leq C_m P_m(\varphi) + C'_m (1+|a|)^m P_m(\varphi)$$

$$P_m(\varphi(x-a)) \leq C_m P_m(\varphi)(1+|a|)^m$$

Supposons que $x \longmapsto e^x$ définit un elt de $S'(\mathbb{R})$. ie: $T_{e^x} \in S'(\mathbb{R})$

$\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\varphi \subset [-1,1]$, $\varphi(0)=1$, $\varphi \geq 0$

$\exists m \in \mathbb{N}$, $|\langle T_{e^x}, \psi\rangle| \leq C P_m(\psi)$ $\forall \psi \in S(\mathbb{R})$

→ on choisit $\psi(x) = \varphi(x-a)$, $a \in \mathbb{R}_+$

$$\langle T_{e^x}, \psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} e^x \psi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} e^x \varphi(x-a)\,dx = e^a \int_{-1}^{1} e^y \varphi(y)\,dy \geq C_0 e^a$$

$$C_0 e^a \leq \left|\int e^x \varphi(x-a)\,dx\right| \leq C P_m(\varphi)(1+|a|)^m$$

$$C_0 e^a \leq C_m P_m(\varphi)(1+a)^m, \ \forall a>0$$

Absurde.

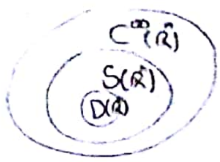
Définition:

On dit qu'une suite $(u_j)_{j\geq 1}$ de distribution tempérées converge vers u dans $S'(\mathbb{R}^n)$.

Si $\langle u_j, \varphi\rangle \longrightarrow \langle u, \varphi\rangle$ $\forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$

Remarques. Exemples:

1. La convergence dans $S'(\mathbb{R}^n)$ entraîne la convergence dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$



$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset S(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

$$\rightarrow \underset{\overset{\shortparallel}{(C^\infty(\mathbb{R}^n))'}}{\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)} \subset S'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

2. La convergence dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ $(p \geq 1)$ entraîne la convergence ds $S'(\mathbb{R}^n)$

3- $u_k = a_k \delta_k$ dans $\mathbb{R}$, $\langle u_k, \varphi \rangle = a_k \varphi(k)$

$a_k \in \mathbb{C}$. $u_k \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$.

u_k ne Converge pas dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$

$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

Si k est assez grand, $\varphi(k) = 0$

$\langle u_k, \varphi \rangle = 0$, $k \geq k_0$

Dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $u_k \longrightarrow 0$.

Il reste à examiner la Convergence de (u_k) ds $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

$\underline{\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})}$ $\quad |\varphi(x)| \leq \dfrac{C_p}{(1+|x|)^p}$

$\downarrow$

φ est croissant rapide

$\langle u_k, \varphi \rangle = a_k \varphi(k)$

$$|\langle u_k, \varphi \rangle| \leq \frac{|a_k| C_p}{(1+k)^p}$$

Si $\exists N \geq 1$, tq $|a_k| \leq c(1+k)^N$

$$\Rightarrow |\langle u_k, \varphi \rangle| \leq \frac{C_p . C (1+k)^N}{(1+k)^p}, \forall p \geq 1, \forall k.$$

$\longrightarrow$ Si (a_k) est croissant polynomiale (croissance lente) alors $u_n \xrightarrow[\text{ds } \mathcal{S}'(\mathbb{R})]{} 0$

4- Si $u_j \longrightarrow u$ ds $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

alors $\partial_x^\alpha u_j \longrightarrow \partial_x^\alpha u$. ds $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

$$\sum_{j \geq 1} u_j = u, \quad \sum_{j \geq 1} u'_j = u'$$

Exercice:

$$T_k = \frac{1}{k} \sum_{p=0}^{k-1} \delta_{p/k}$$

$$\langle T_m, \varphi \rangle = \frac{1}{k} \sum_{0}^{k-1} \left(\varphi(0) . \varphi\left(\frac{1}{k}\right) + \dots \varphi\left(\frac{k-1}{k}\right) \right)$$

Serie de Riemann

$$\downarrow$$

$$\int_0^1 \varphi(x)\, dx$$

3- Transformation de Fourier sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

on appelle que $F\varphi(\xi) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2i\pi x \xi} . \varphi(x)\, dx$

définit un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Définition:

Pour $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, on définit la transformation de Fourier $\hat{u}$ par:

$$\langle Fu, \varphi \rangle = \langle \hat{u}, \varphi \rangle = \langle u, \hat{\varphi} \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

$\hat{u} = Fu$, $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\varphi \longmapsto \hat{\varphi} \longrightarrow \langle u, \hat{\varphi} \rangle$$

$$\hat{u} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$F_u = u \circ F$

$\langle Fu, \varphi \rangle = \langle u, F\varphi \rangle$

Remarque:

1- Clairement $\hat{u}$ définit une distribution tempérée . C'est bien, par Composition, une forme Lineaire

Scanned by CamScanner

continue sur $S(\mathbb{R}^n)$

2- Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ alors $T_f \in S'(\mathbb{R}^n)$

et $\hat{T}_f = T_{\hat{f}}$

$f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$

$$\langle \hat{T}_f, \varphi \rangle = \langle T_f, \hat{\varphi} \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{\varphi}(x)\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)\varphi(x)\,dx$$

$$= \langle T_{\hat{f}}, \varphi \rangle$$

Théoréme :

La transformation de Fourier est un isomorphisme de $S'(\mathbb{R}^n)$ dans lui même d'inverse $F^{-1} = \bar{F}$

$$\bar{F}(\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi xy}\varphi(y)\,dy$$

Exemples.

1- $F(\delta_0) = ?$

$$\langle F(\delta_0), \varphi \rangle = \langle \delta_0, \hat{\varphi} \rangle = \hat{\varphi}(0)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\,dy$$

$$= \langle T_1, \varphi \rangle = \langle 1, \varphi \rangle$$

$$F(\delta_0) = 1$$

2- $F(\underbrace{e^{-\|x\|^2}}_{\varphi})(\xi) = \pi^{n/2} e^{-\pi^2\|x\|^2}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2}dx \underset{\substack{\text{Coord.}\\ \text{Sphérique}}}{=} \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} e^{-r^2} r^{n-1}\,dr\,dw$$

$$= C_n \underbrace{\int_0^\infty e^{-r^2} r^{n-1}\,dr}_{I_n \text{ finie}} \Rightarrow \varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

$x = (x_1, \dots, x_n)$

$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$

$$F(e^{-|x|^2})(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2i\pi x.\xi} e^{-|x|^2}dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\cdots\int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi(x_1\xi_1+\dots+x_n\xi_n)} . e^{-(x_1^2+\dots+x_n^2)}dx$$

$$\underset{\substack{\text{Tonelli}\\ \text{Fubini}}}{=} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x_1\xi_1} e^{-x_1^2}dx\right)\cdots\cdots\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x_n\xi_n} e^{-x_n^2}dx\right)$$

$$I(\alpha) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\alpha t} . e^{-\alpha^2}d\alpha)$$

$$F(e^{-|x|^2})(\xi) = I(\xi_1)\dots I(\xi_n)$$

il suffit de Calculer $I(\alpha)$.

Exemple:

$$F(e^{-\|x\|^2})(\xi) = \prod_{j=1}^n F(e^{-x^2})(\xi_j)$$

$$F(xu)(\xi) = \int e^{-2i\pi x\xi} x\,u(x)\,dx$$

$$= -\frac{1}{2i\pi}\int \frac{d}{d\xi}(e^{-2i\pi x\xi})u(x)\,dx$$

$$= -\frac{1}{2i\pi}\left(\int e^{-2i\pi x\xi}u(x)\,dx\right)'$$

$$= -\frac{1}{2i\pi}\hat{Fu}'(\xi)$$

$u(x) = e^{-x^2}$ ds $\mathbb{R}$

$u'(x) = -2x e^{-x^2}$

$u'(x) = -2x\,u(x)$

$$F(u)(\xi) = -2F(xu)(\xi)$$

$$2i\pi\xi\,\hat{u}(\xi) = 2\left(\frac{1}{2i\pi}\right)\hat{u}'(\xi)$$

$$= 2\hat{u}'(\xi) - 4\pi^2\xi\hat{u}(\xi) = 0$$

$$\hat{u}(\xi) - \pi^2 \xi \hat{u}(\xi) = 0$$

$$y' - 2\pi^2 \xi y = 0$$

$$y(\xi) = y(0)\, e^{-\pi^2 \xi^2}$$

$$\hat{u}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

$$\Rightarrow F(e^{-\|x\|^2})(\xi) = \prod_{j=1}^{n} \pi^{\frac{1}{2}} e^{-\xi_j^2} = \pi^{n/2} e^{-\|\xi\|^2}$$

Proposition. Dans $S'(\mathbb{R}^n)$

1. $F(\partial_x^\alpha u) = (2i\pi)^{|\alpha|} \xi^\alpha Fu$.
2. $F(x^\alpha u) = (-2i\pi)^{|\alpha|} \partial_\xi^\alpha Fu$

Lemme:

Soit $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^p)$ et $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^{p+q})$ et Q un pavé de $\mathbb{R}^q$ (pdt de segment)

alors on a :

a) Dérivation sous le Crochet :

la fonction $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$y \longmapsto \varphi(y) = \langle u(x), \varphi(x,y) \rangle_{\mathcal{E}', C^\infty}$$

est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^q$ et $\partial_y^\alpha \varphi(y) = \langle u(x), \partial_y^\alpha \varphi(x,y) \rangle$

b). Integration sous le Crochet:

$$\int_{Q_\psi} \varphi(y)\, dy = \int_\psi \langle u(x), \varphi(x,y) \rangle dy$$

$$= \langle u(x), \int_\psi \varphi(x,y)\, dy \rangle$$

Théorème:

La transformée de Fourier d'une distribution à support Compact appartient à $O_n(\mathbb{R}^n)$ (espace des fcts C^∞ à croissance lente ainsi que toutes leurs dérivées

pour $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, on a:

$$\hat{u}(\xi) = \langle u(x), e^{-2i\pi x\xi} \rangle$$

preuve:

$u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \subset S'(\mathbb{R}^n)$

$\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$

$$\langle \hat{u}, \varphi \rangle = \langle u, \hat{\varphi} \rangle = \langle u(\xi), \hat{\varphi}(\xi) \rangle$$

$$= \langle u(\xi), \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2i\pi x\xi} \varphi(x) dx \rangle$$

Soit Q un pavé de $\mathbb{R}^n$ contenant le support de u.

$$\langle \hat{u}, \varphi \rangle = \langle u(\xi), \int_Q e^{-2i\pi x\xi} \varphi(x)\, dx \rangle$$

$$= \int_Q \langle u(\xi), e^{-2i\pi x\xi} \varphi(x) \rangle dx$$

$$= \int_Q \underbrace{\langle u(\xi), e^{-2i\pi x\xi} \rangle}_{\in C^\infty(\mathbb{R}^n)} \varphi(x)\, dx$$

Théorème:

$u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $v \in S'(\mathbb{R}^n)$

alors $F(u * v) = Fu \cdot Fv$.

Preuve:

on Commence par examiner le Cas de $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \Rightarrow u * v \in \mathcal{E}'$

$\Rightarrow \widehat{u * v}$ est une fct C^∞.

$$\widehat{u * v}(\xi) = \langle (u * v)(x), e^{-2i\pi x\xi} \rangle$$

$$= \langle u_x, \langle v_y, e^{-2i\pi(x+y)\xi} \rangle \rangle$$

$$= \langle u_x, \langle v_y, e^{-2i\pi x\xi} e^{-2i\pi y\xi} \rangle \rangle$$

$$= \langle u_x, \langle v_y, e^{-2i\pi y\xi} \rangle e^{-2i\pi x\xi} \rangle$$

$$= \langle u_x, e^{-2i\pi x\xi} \rangle \hat{v}(\xi)$$

$$= \hat{u}(\xi) \, \hat{v}(\xi)$$

b. $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ et $v \in S'(\mathbb{R}^n)$

Soit (v_j) une suite de distribution dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $v_j \xrightarrow[S'(\mathbb{R}^n)]{} v$

$$\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \; ; \; \psi = \begin{cases} 1 & \text{si } \|x\| \leq 1 \\ 0 & \text{si } \|x\| \geq 2 \end{cases}$$

$$v_j = \psi\left(\frac{x}{j}\right) v$$

$v_j \longrightarrow v$ ds S'

$u * v_j \longrightarrow u * v$ ds S'

$$F(u * v_j) \longrightarrow F(u * v)$$

$$\hat{u} \cdot \hat{v}_j \longrightarrow F(\hat{u} * \hat{v})$$

$$\downarrow$$

$$\hat{u} \, \hat{v}$$

$$\Rightarrow F(\hat{u} * \hat{v}) = \hat{u} \cdot \hat{v}.$$

4. Quelques applications:

Transformation de Fourier partielle

$\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \quad \ni (t, x)$

$t \in \mathbb{R}$, $x := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

Définition: (de la transformée de Fourier partielle)

Pour $\varphi = \varphi(t, x) \in S(\mathbb{R}^{n+1})$ on définit la transformée de Fourier partielle par: $(\xi \in \mathbb{R}^n)$

$$F'\varphi(t,\xi) = \tilde{\varphi}(t,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2i\pi x\xi} \varphi(t,x)\,dx$$

$\rightarrow$ L'app $F' : S(\mathbb{R}^{n+1}) \longrightarrow S(\mathbb{R}^{n+1})$ est un isomorphisme, d'inverse

$$(F')^{-1} = (2\pi)^{-n} \overline{F'}$$

$$\overline{F'}(\varphi)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi x\xi} \varphi(t,x)\,dx$$

$$F'(F')^{-1} = (F')^{-1} F' = Id_{S(\mathbb{R}^{n+1})}$$

Définition:

pour $u \in S'(\mathbb{R}^{n+1})$, la transformée de fourier partielle est donnée par:

$$\langle \tilde{u}, \varphi \rangle = \langle u, \tilde{\varphi} \rangle \quad , \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^{n+1})$$

Exemple:

δ_0 sur $\mathbb{R}^{n+1}$

$$\langle \tilde{\delta}_0, \varphi \rangle = \langle \delta_0, \tilde{\varphi}(t,\xi) \rangle$$

$$= \tilde{\varphi}(0,0) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(0,x)\,dx.$$

$$\tilde{\varphi}(t,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2i\pi x\xi} \varphi(t,x)\,dx$$

$$\tilde{\varphi}(0,0) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(0,x)\,dx$$

propriètes:

$u \in S'(\mathbb{R}^{n+1})$

a) $F'(\partial_x^\alpha u) = 2i\pi \xi^{|\alpha|} F'u$.

et $F'(\partial_t^k u) = \partial_t^k F'u$.

b) $F'(x^\alpha u) = (-2i\pi)^{|\alpha|} \partial_\xi^\alpha F'u$

et $F'(t^k u) = t^k F'u$.

Equation de transport :

$a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \nabla_x u = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0$$

$\rightsquigarrow u = u(t,x)$, $u \in S'(\mathbb{R}^{n+1})$

$u(0,x) = u_0(x)$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} 2i\pi \xi_j a_j \tilde{u} = 0$$

$$\tilde{u}(t,\xi) = \tilde{u}(0,\xi)\, e^{-2i\pi t a \xi}$$

on revient par F'^{-1}

$$u(t,x) = u(0, x - at) = u_0(x - at)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) + \sum a_j \frac{\partial}{\partial x_j} u = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) + \sum a_j \frac{\partial}{\partial x_j} u$$

$$= -a_1 \frac{\partial u_0(x-at)}{\partial x_1} - \dots - a_n \frac{\partial u_n(x-at)}{\partial x_n} + a_1 \frac{\partial u_0(x-at)}{\partial x_1} + \dots + a_n \frac{\partial u_n(x-at)}{\partial x_n}$$

$= 0$

Mesure de la surface sur la sphère:

$R > 0$, on note $d\sigma_R$ la mesure de surface sur la sphère $S_R = \{x \in \mathbb{R}^3, \|x\| = R\}$

Naturellement, $d\sigma_R$ définit une distributio à support compact.

$$\forall \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^3), \; \langle d\sigma_R, \varphi \rangle = \int_{\|x\| = R} \varphi(x)\, d\sigma_R(x)$$

on cherche à calculer sa transformée de Fourier $\widehat{d\sigma_R}$

on sait que $\widehat{d\sigma_R}$ est une fct C^∞, à croissance lente, donnée par :

$$\widehat{d\sigma_R}(\xi) = \langle d\sigma_R, e^{-2i\pi x \xi} \rangle = \int_{\|x\| = R} e^{-2i\pi x \xi}\, d\sigma_R(x)$$

- $\xi = 0$. $\widehat{d\sigma_R}(0) = 4\pi R^2$
- $\xi \neq 0$, on effectue une changement de variables et on passe en coordonnées sphériques.

$x = Rw$, $w = (w_1, w_2, w_3)$

$w_1 = \cos\theta_1$. $\theta_1 \in]0, \pi[$, $\theta_2 \in]0, 2\pi[$

$w_2 = \sin\theta_1 \cos\theta_2$

$w_3 = \sin\theta_1 \sin\theta_2$

$d\sigma_R(x) = R^2\, dw = x^2 \sin\theta_1\, d\theta_1\, d\theta_2$

$$\widehat{d\sigma_R}(\xi) = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-2\pi i R \|\xi\| \cos(x,\xi)}\, R^2 \sin\theta_1\, d\theta_1\, d\theta_2$$

on choisit pour l'angle θ_1, $\theta_1 = \widehat{(x,\xi)}$

$$\hat{d\sigma_R}(\xi) = R^2 \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} e^{-2i\pi R\|\xi\|\cos\theta_1} \sin\theta_1 d\theta_1 d\theta_2$$

$$\hat{d\sigma_R}(\xi) = 2\pi R^2 \left[\frac{e^{-2i\pi R\|\xi\|\cos\theta_1}}{2i\pi R\|\xi\|}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2\pi R^2}{\pi R\|\xi\|} \frac{e^{2i\pi R\|\xi\|} - e^{-2i\pi R\|\xi\|}}{2i}$$

$$= \frac{2R}{\|\xi\|} \cdot \sin(2\pi R\|\xi\|)$$

$$\hat{d\sigma_R}(\xi) = 2R^2 \frac{\sin 2\pi R\|\xi\|}{R\|\xi\|}$$

Solution élementaire de l'équation des ondes.

$\mathbb{R}^3$. $\quad \square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x$

$\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ c'est le d'Alembertien sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^3$

on cherche une solution élementaire E, tempérée i.e. $E \in S'(\mathbb{R}^4)$

$\square E = \delta_0 \quad (*)$

on veut de plus que $\mathrm{supp} E \subset \{(t,x), t \geq 0\}$

$E = 0$ si $t < 0$

on applique à $(*)$ la transformation de Fourier partielle

$$\tilde{\square} E = \tilde{\delta_0} = d\sigma_{\{t=0\}}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \partial_t^2 \tilde{E}, \quad \widetilde{\frac{\partial^2 E}{\partial x_j^2}} = -4\pi^2 \xi_j^2 \tilde{E}$$

$$\tilde{\Delta_x E} = -4\pi^2 \|\xi\|^2 \tilde{E}(t,\xi)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial t^2}(t,\xi) + 4\pi^2 \tilde{E}(t,\xi) = d\sigma_{t=0} \\ \tilde{E}(t,\xi) = 0 \quad , \text{ si } t<0 \end{cases}$$

$t > 0 \quad \tilde{E}(t,\xi) = a(\xi)\cos(2\pi\|\xi\|t) + b(\xi)\sin(2\pi\|\xi\|t)$

$$\frac{\partial \tilde{E}}{\partial t}(t,\xi) = (-2\pi\|\xi\| a(\xi)\sin(2\pi\|\xi\|t) + 2\pi\|\xi\| b(\xi)\cos(2\pi\|\xi\|t))\chi_{(t>)} + (a(\xi))\, d\sigma_{t=0}$$

$\rightarrow$ on choisit $a(\xi) = 0$

$$\frac{\partial \tilde{E}}{\partial t}(t,\xi) = (2\pi\|\xi\| . b(\xi)\cos(2\pi\|\xi\|t))\chi_{(t>)}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial t^2}(t,\xi) = (-4\pi^2\|\xi\|^2 b(\xi)\sin(2\pi\|\xi\|t))\chi_{(t>)} + 2\pi\|\xi\| b(\xi)\, d\sigma_{t=0}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial t^2} + 4\pi^2 \tilde{E} = 2\pi\|\xi\| b(\xi)\, d\sigma_{(t=0)}$$

$$b(\xi) = \frac{1}{2\pi|\xi|}$$

$$\tilde{E}(t,\xi) = \begin{cases} \frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|} & ; t > 0 \\ 0 & ; t < 0 \end{cases}$$

$$|\tilde{E}(t,\xi)| \leq \mathrm{Max}(t,0)$$

$$\tilde{E}(t,\xi) \in S'(\mathbb{R}^{+3})$$

$$E = F'^{-1}(\tilde{E})$$

$S(\mathbb{R}^4) \ni \varphi = \varphi(t,x) \; ; \; \tilde{\varphi}(t,\xi)$

$$\langle E, \tilde{\varphi}\rangle = \langle \tilde{E}, \varphi\rangle$$

$$= \int_0^{\infty}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|} . \varphi(t,\xi)\, d\xi\, dt$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{1}{4\pi t} \langle \hat{d\sigma_t}, \varphi(t,\xi)\rangle\, dt$$

$$E = \mathcal{F}'^{-1}(\tilde{E})$$

$$\langle E, \varphi \rangle = \int_0^\infty \frac{1}{4\pi t} \left(\int_{|x| = t} \varphi(t, x)\, d\sigma_t \right) dt.$$