Faculté des Sciences de Tunis 2018-2019

Département de mathématiques

M 1- MA : Analyse de Fourier et Distributions

Série 3

Exercice 1

1.Vérifier que les expressions suivantes définissent des distributions puis donner leur ordre et leur support.

Sur $\mathbb{R}$: $\int_{\mathbb{R}_+} \varphi'(x) cosx dx$, $\langle Pf(1/x^2), \varphi\rangle = \lim_{\epsilon\longrightarrow 0_+} \left(\int_{|x|\geq\epsilon} \varphi(x)/x^2 dx - 2\varphi(0)/\epsilon\right)$ $\sum k\varphi^{(k)}(k)$,

Sur $\mathbb{R}^2$: $\int\int_{x^2+y^2\leq 1} \varphi(x,y)|x|^{1/2} dxdy$, $\int\int_{x\geq 0} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,y)dxdy$, $\int\int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, x+y)dxdy$,

$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x, sinx)dx$.

Montrer que cette dernière distribution n'est pas une une fonction continue.

2. Si f et g sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, à quelle condition l'expression $\int_{\mathbb{R}} \varphi(f(x), g(x))dx$ définit-elle une distribution sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 2

Calculer les limites des suites ou familles de distributions suivantes:

1) $f_k(x) = e^{ikx}$ $(k \longrightarrow \infty)$, 2) $f_\epsilon(x) = \frac{\epsilon}{2}|x|^{\epsilon-1}$ $(\epsilon \longrightarrow 0^+)$,

3) $f_\alpha(x) = \frac{e^{i\alpha x}}{x-i0}$ $(\alpha \longrightarrow +\infty)$, 4) $T_k = 1/k\sum_0^{k-1}\delta_{p/k}$.

Exercice 3

1. Calculer les dérivées des distributions suivantes:
$E(x)$, $|sinx|$, $Vp(1/x)$, $Log|x|$, $|x^2-1|$.

2. Déterminer l'expression $(\partial_x + \partial_y)T$ où T est la distribution sur $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\langle T, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t,t)dt.$$

3. Calculer ΔE où $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ est définie par $E(x) = \|x\|^{-1}e^{ik\|x\|}$, $k \neq 0$.

4. On prend $\lambda, \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ et on pose dans $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$P = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j-1}^{n} \alpha_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \lambda \quad \text{et} \quad \langle E, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\lambda t}\varphi(t, \alpha_1 t, ..., \alpha_n t)dt.$$

Montrer que E est une solution élémentaire de P, à support dans $\{(t,x),\ t \geq 0\}$.

Exercice 4

1. Soient u et v deux distributions sur $\mathbb{R}$ et $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\chi(0) = 1$.
Montrer que que l'expression

$$\langle w, \varphi \rangle = \langle v, \frac{\varphi(x) - \varphi(0)\chi(x)}{x} \rangle$$

définit une distribution qui vérifie l'équation $xw = v$. Résoudre l'équation $xu = v$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

2. Résoudre dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'équation $x(x-1)u = 1$.

Exercice 5

1. Montrer que $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ admet une primitive dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ssi $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx = 0$.

2. Soient u et v deux distributions sur $\mathbb{R}$ et $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\int_{\mathbb{R}} \chi = 1$.
Montrer que l'expression

$$\langle w, \varphi \rangle = -\langle v, \int_{-\infty}^{x} (\varphi(t) - (\int_{\mathbb{R}} \varphi(s)ds)\chi(t))dt \rangle$$

définit une distribution qui vérifie l'équation $w' = v$. Résoudre l'équation $u' = v$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

2. Résoudre dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'équation $xu' - u = \delta_0$.

Série 3

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = \{ \varphi : \mathbb{R}^n \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{C} , \text{supp}\,\varphi \text{ compact} \}$

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$

$\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n) = \{ \varphi : \mathbb{R}^n \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{C} , \text{supp}\,\varphi \subset K \}$

$P_{m,K}(\varphi) = \sup_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha \varphi(x)| \quad ; \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

$= \max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha \varphi\|_\infty$

$P_{m,K}$ semi normes de $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$

$n = 1$:

$P_0(\varphi) = \|\varphi\|_\infty$

$P_1(\varphi) = \max\{ \|\varphi\|_\infty, \|\varphi'\|_\infty \}$

$P_2(\varphi) = \max\{ \|\varphi\|_\infty, \|\varphi'\|_\infty, \|\varphi''\|_\infty \}$

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = \bigcup_{K \text{ compact de } \mathbb{R}^n} \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$

$$d_K(f,g) = \sum_m \frac{P_{m,K}(f-g)}{1 - P_{m,K}(f,g)}$$

$f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{D}_K} f \iff P_{m,K}(f-g) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \quad \forall n$

$\iff D^\alpha f_n \xrightarrow{K.\text{unif}} D^\alpha f , \forall \alpha$

$(f_n)_n \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} f$

Définition :

- une application linéaire

$T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$

$\varphi \longmapsto \langle T, \varphi \rangle$, $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

est une distribution ssi T est continue

ie $\forall K$ compact de $\mathbb{R}^n$, $T/_{\mathcal{D}_K}$ est continue

ie $\forall K$ compact de $\mathbb{R}^n$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, supp $\varphi \subset K$, $\exists\, c(K)$ (cste qui dépend de K) et $\exists\, m_0 \in \mathbb{N}$ tq :

$|\langle T, \varphi \rangle| \leq c\, P_{m_0,K}(\varphi)$ on ordre$(\varphi) \leq m_0$

- Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, l'ordre de T noté

$\text{ordre}(T) = \inf_{m \in \mathbb{N}} \{ |\langle T, \varphi \rangle| \leq c\, P_m$

- $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \iff f \cdot 1_K \in L^1(\mathbb{R}^n)$ $\forall K$ compact

$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$

$T_f : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$

$\varphi \longmapsto \langle T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x)\, dx$

$= \int_{\text{supp}\,\varphi} f(x) \varphi(x)\, dx$

$= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) 1_{\text{supp}\,\varphi}\, dx$

- T_f est bien définie et

$|\varphi(x) f(x) 1_{\text{supp}\,\varphi}| \leq \|\varphi\|_\infty |f(x) \cdot 1_{\text{supp}\,\varphi}|$

est intégrable

- T_f est linéaire car T_f est bien définie, en outre $\forall K$ compact et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tq supp $\varphi \subset K$ on a :

$|\langle T, \varphi \rangle| \leq \|f \cdot 1_K\| \cdot \|\varphi\|_\infty$

$\Rightarrow T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et ordre$(T_f) = 0$

• $a \in \mathbb{R}^n$,

Distribution du Dirac :

$$\delta_a : T : D(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\varphi \longmapsto \varphi(a)$$

T est linéaire et $\forall$ K compact de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi \in D_K(\mathbb{R}^n)$

$$|\langle T, \varphi \rangle| = |\varphi(a)| \leq P_{K,0}(\varphi)$$

$\Rightarrow \delta_0 \in D'(\mathbb{R}^n)$

Développement de Taylor avec reste intégrale en 0 à l'ordre n :

$\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}\varphi^{(n)}(0) + \underbrace{\frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-t)^n \varphi^{(n+1)}(tx)\,dt}_{\text{reste } = x^{n+1}\psi(x)}$$

$$\psi(x) = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n \varphi^{n+1}(tx)\,dt$$

$$\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \psi(0) = \frac{\varphi^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}$$

$$\psi \in C^\infty(\mathbb{R}), \quad \|\psi\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty^{(n+1)} \frac{1}{(n+1)!}$$

Exercice 1 :

1) • $\varphi \in D(\mathbb{R})$

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^+} \varphi'(x) \cos x \, dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi'(x) \cos x \, \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+} \, dx$$

$\langle T, \varphi \rangle$ est bien définie car

$x \longmapsto \varphi'(x)\cos x \, \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$ continue

donc borélienne et

$|\varphi'(x) \cos \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}| \leq |\varphi'(x)|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$

Par suite T est bien définie et est linéai[re]

Continuité de T :

Soit K un compact de $\mathbb{R}$, $\varphi \in D_K(\mathbb{R}^n)$

comme K un compact, $\exists A > 0$ tq

supp $\varphi \subset [-A, A] \Rightarrow$ supp $\varphi' \subset [-A, A]$

$$|\langle T, \varphi \rangle| = \left|\int_0^A \varphi'(x) \cos x \, dx\right|$$
$$= A \cdot P_{K,1}(\varphi)$$

dérivée 1

$\Rightarrow T \in D'(\mathbb{R})$

$$\langle V_p(\tfrac{1}{x}), \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \, dx$$

$x \in [-A, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, A]$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-A}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} \, dx + \int_\varepsilon^A \frac{1}{x} \, dx \right) \text{ existe}$$

• $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\langle Pf(\frac{1}{x^2}), \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx - 2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon}\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)+\varphi(-x)-2\varphi(0)}{x^2}\,dx\right]$$

$$\overset{TCD(*)}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x)+\varphi(-x)-2\varphi(0)}{x^2}\,dx$$

or on a :

• $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varphi(x)+\varphi(-x)-2\varphi(0)}{x^2} 1_{]\varepsilon,+\infty[}$

$$= \frac{\varphi(x)+\varphi(x)-2\varphi(0)}{x^2} 1_{[0,+\infty[}(x)$$

• $x \longmapsto \frac{\varphi(x)+\varphi(-x)-2\varphi(0)}{x^2} 1_{]\varepsilon,+\infty[}$

$$\left|\frac{\varphi(x)+\varphi(-x)-2\varphi(0)}{x^2} 1_{]\varepsilon,+\infty[}\right|$$

$$\leq \left|\frac{\varphi(x)+\varphi(-x)-2\varphi(0)}{x^2}\right| 1_{[0,1[}(x)$$

$$+ \frac{4\|\varphi\|_\infty}{x^2} 1_{[1,+\infty[}$$

$$\leq \underbrace{\|\varphi''\|_\infty 1_{[0,1[}(x) + 4\frac{\|\varphi\|_\infty}{x^2} 1_{[1,+\infty[}}_{(**)} \in L^1(\mathbb{R})$$

alors d'après TCD on a $(*)$

donc $\langle Pf(\frac{1}{x^2}), \varphi\rangle$ est bien définie

et vaut $\int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x)+\varphi(-x)-2\varphi(0)}{x^2}\,dx$

Ainsi $Pf(\frac{1}{x^2}) : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$ est

linéaire, en outre

$\forall K$ compact de $\mathbb{R}$, et $\forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R})$,

on a d'après $(**)$

$$|\langle Pf(\frac{1}{x^2}), \varphi\rangle| \leq p_{K,2}(\varphi) + 4p_{K,0}(\varphi)$$

$$\leq 5\, p_{K,2}(\varphi)$$

• $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists N \in \mathbb{N}^* /$ supp $\varphi \subset [-N,N]$

$$\langle T, \varphi\rangle = \sum_{k \in \mathbb{N}} k\,\varphi^{(k)}(k)$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} k\,\varphi^{(k)}(k)$$

$\Rightarrow T$ est bien définie donc linéaire

de plus $\forall K$ compact, $\forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R})$

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq (N-1)\, p_{K,N-1}(\varphi)$$

$\Rightarrow T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

• $\langle T, \varphi\rangle = \iint \varphi(x,y) \underbrace{|x|^{1/2} 1_{B(0,1)}(x,y)}_{f(x,y)}\,dx\,dy$

$T = T_f$ où $f(x,y) = |x|^{1/2} 1_{B(0,1)}(x,y)$

$f \in L^1(\mathbb{R})$, en effet

$$\int |f(x,y)|\,dx\,dy \leq \int_{B(0,1)} dx\,dy = \pi$$

surface de la boule $= \pi \times 1^2$

par suite $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$

- $\langle T,\varphi\rangle = \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, x+y)\,dx\,dy$

comme $\mathrm{supp}\,\varphi \subset B(0,R)$

$\Rightarrow \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(x,x+y)\,dx\,dy = \int_{]-R,R[\times]-2R,2R[} \varphi(x,x+y)\,dx\,dy$

est bien définie

T est linéaire et $\forall K$ compact de $\mathbb{R}^2$

$|\langle T,\varphi\rangle| \leq \underbrace{8R^2}_{\text{surface}} P_{K,0}(\varphi)$

$\Rightarrow T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$

$\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$(t,s) \longrightarrow x = t,\ y = s-t$

$\iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(x,x+y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(s,t)\,ds\,dt$

Définition:

soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, on dit qu'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est un ouvert de nullité de T et on note $T_{|U} = 0$ ssi $\forall \varphi \in \mathcal{D}_U(\mathbb{R}^n)$

$\langle T,\varphi\rangle = 0$

supp T est le plus petit fermé de $\mathbb{R}^n$ dont le complément est un ouvert de nullité de T

Pour montrer que $F = \mathrm{supp}\,T$, F fermé

- $\mathrm{supp}\,T \subset F \Leftrightarrow F^c \subset (\mathrm{supp}\,T)^c$

$\Leftrightarrow T_{|F^c} = 0$

- $F \subset \mathrm{supp}\,T \Leftrightarrow$ on fait la caractérisation de support d'une distribution :

$a \in \mathrm{supp}\,T \Leftrightarrow \forall R>0, \exists \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tq $\mathrm{supp}\,\varphi \subset B(a,R)$ et $\langle T,\varphi\rangle \neq 0$.

$a \in (\mathrm{supp}\,T)^c \Leftrightarrow \exists B(a,R) \subset (\mathrm{supp}\,T)^c$

$\Rightarrow \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \mathrm{supp}\,\varphi \subset B(a,R) \subset (\mathrm{supp}\,T)^c$

$\Rightarrow \langle T,\varphi\rangle = 0$

- $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{C}$

$\varphi \longmapsto \langle T,\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x,\sin x)\,dx$

$T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, $\partial(T) = 0$

$\mathrm{supp}\,T = \{(x,y) \text{ tq } y = \sin x,\ x \in \mathbb{R}\}$

$= G_{\sin x}$: fermé

* montrons que $\mathrm{supp}\,T \subset G_{\sin}$:

$G_{\sin}^c$ est un ouvert de nullité de T

car $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, $\mathrm{supp}\,\varphi \subset G_{\sin}^c$

$\Rightarrow \varphi(x,y) = 0\ \forall (x,y)\ ;\ y = \sin x, x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \langle T,\varphi\rangle = 0$

* montrons que $G_{\sin} \subset \mathrm{supp}\,T$:

soit $a = (x_0, \sin x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $\forall R > 0$

d'après le lemme d'Uryshon, il existe $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ vérifiant : i) $0 \leq \varphi \leq 1$

ii) $\varphi = 1$ sur $B'(a,\frac{R}{2})$

iii) $\mathrm{supp}\,\varphi \subset B(a,R)$

La condition $(x,\sin x) \in B'(a,\frac{R}{2})$ garantit $\varphi(x,\sin x) = 1$

or $(x-x_0)^2+(\sin x-\sin x_0)^2 \leq \frac{R^2}{4}$

dès que $|x-x_0| \leq \frac{R}{2\sqrt{2}}$

car $|\sin x - \sin x_0| \leq |x-x_0|$

Ainsi sur $\left[x_0-\frac{R}{2\sqrt{2}}, x_0+\frac{R}{2\sqrt{2}}\right]$

On a $\varphi(x,\sin x)=1$

par suite :

$$<T,\varphi> = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x,\sin x)\,dx$$

$$\geq \int_{x_0-\frac{R}{2\sqrt{2}}}^{x_0+\frac{R}{2\sqrt{2}}} \underbrace{\varphi(x,\sin x)}_{1}\,dx$$

$$= \frac{R}{\sqrt{2}} > 0$$

Exercice :

1) montrer que $V_p\left(\frac{1}{x}\right)$ définie par

$$<V_p\left(\tfrac{1}{x}\right),\varphi> = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$$

2) Déterminer l'ordre et le support

Correction :

1) $<V_p\left(\frac{1}{x}\right),\varphi> = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,dx$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x} 1_{[\varepsilon,+\infty[}\,dx$$

TCD $\to = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,dx$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x} 1_{[\varepsilon,A]}(x)$$

$$= \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x} 1_{[0,A]}(x)$$

$$x \longmapsto \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x} 1_{]0,A]}(x) \leq \underbrace{2\|\varphi'\|_\infty 1_{[0,A]}}_{\in L}$$

donc $V_p\left(\frac{1}{x}\right)$ est bien définie linéaire et vérifie $\forall K$ compact de $\mathbb{R}$, $\forall \varphi \in D_K(\mathbb{R})$

$$|<V_p\left(\tfrac{1}{x}\right),\varphi>| \leq 2A\, p_{K,1}(\varphi)$$

2) $\theta\left(V_p\left(\frac{1}{x}\right)\right) \leq 1$

On suppose $\theta\left(V_p\left(\frac{1}{x}\right)\right)=0$

alors $\forall K$ compact $\exists c>0$ tq

$$|<V_p\left(\tfrac{1}{x}\right),\varphi>| \leq c\|\varphi\|_\infty \quad (*)$$

Soit K compact, $K=[0,2]$

d'après le lemme d'Uryshon $\exists \varphi \in D(\mathbb{R})$

- $0 \leq \varphi_n \leq 1$
- $\varphi_n = 1$ sur $\left[\frac{1}{2n},1\right]$
- supp $\varphi_n \subset \left]\frac{1}{n},2\right[$

$$<V_p\left(\tfrac{1}{x}\right),\varphi_n> = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi_n(x)-\varphi_n(-x)}{x}\,dx$$

$$= \int_0^2 \underbrace{\frac{\varphi_n(x)}{x}}_{=1 \text{ sur } \left[\frac{1}{2n},1\right]}\,dx$$

$$\geq \int_{\frac{1}{2n}}^1 \frac{dx}{x}$$

$$= \operatorname{Log}(2n)$$

d'après ⊛ $\text{Log}(2n) \leq \|\varphi_n\|_\infty = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

↳ absurde

Exercice :

f integrable positive sur $\mathbb{R}^n$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = 0$$

$k \in \mathbb{N}^*$, $f_k(x) = k^n f(kx)$

Montrer que : $T_{f_k} \xrightarrow{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)} c\,\delta_0$

soit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$\langle T_{f_k}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} k^n f(kx)\varphi(x)\,dx$$

$$\underset{y=kx}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\,\varphi\left(\frac{y}{k}\right)dy \;;\; J = \frac{1}{k^n}$$

comme on a :

i) $\lim\limits_{k\to+\infty} f(y)\,\varphi\left(\frac{y}{k}\right) = f(y)\varphi(0)$ pp

ii) $y \longmapsto \left|f(y)\,\varphi\left(\frac{y}{k}\right)\right| \leq \|\varphi\|_\infty f(y) \in L^1(\mathbb{R}^n)$

d'après le TCD, on obtient

$$\lim_{k\to+\infty} \langle T_{f_k}, \varphi \rangle = c\,\langle \delta_0, \varphi \rangle$$

donc $\lim\limits_{k\to+\infty} T_{f_k} = c\,\delta_0$

Exercice 2 :

3) $\dfrac{1}{x - i0} = \lim\limits_{\substack{\varepsilon\to0^+ \\ \varepsilon>0}} T_{\frac{1}{x-i\varepsilon}} = \lim\limits_{\varepsilon\to0^+} T_\varepsilon$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\langle T_\varepsilon, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x - i\varepsilon}\,dx$$

$$\underset{x\text{ conjugué}}{=} \int_{\mathbb{R}} \frac{x\,\varphi(x)}{x^2+\varepsilon^2}\,dx + i\int_{\mathbb{R}} \frac{\varepsilon\,\varphi(x)}{x^2+\varepsilon^2}\,dx$$

or $\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2} = \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon^2\left(\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2+1\right)}$

$$= \frac{1}{\varepsilon} \times \frac{1}{\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2 + 1}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \text{ où } f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

$f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \pi$

et d'après ce qui précède

$\langle T_{f_\varepsilon}, \varphi \rangle \underset{\varepsilon\to0}{=} \pi\varphi(0)$ donc $T_{f_\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\to0]{} \pi\,\delta_0$

D'autre part :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x\,\varphi(x)}{x^2+\varepsilon^2}\,dx = \int_{-A}^{A} \frac{x\,\varphi(x)}{x^2+\varepsilon^2}\,dx$$

$$= \int_0^A \frac{x}{x^2+\varepsilon^2}\left(\varphi(x) - \varphi(-x)\right)dx$$

or on a :

i) $\frac{x}{x^2+\varepsilon^2}(\varphi(x)-\varphi(-x))\mathbb{1}_{[0,A]}(x) = \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\mathbb{1}_{[0,A]}$

ii) $\left|\frac{x}{x^2+\varepsilon^2}(\varphi(x)-\varphi(-x))\mathbb{1}_{[0,A]}(x)\right| \leq \underbrace{\left|\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\right|\mathbb{1}_{[0,A]}}_{\in L^1(\mathbb{R})}$

il vient donc d'après le TCD que :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}}\frac{x\varphi(x)}{x^2+\varepsilon^2}dx = \int_0^A \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}dx$$

$$= \int_0^{+\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}dx$$

donc $\frac{1}{x-i0} = vp\left(\frac{1}{x}\right) + i\pi\delta_0$

$f\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $T\in D'(\mathbb{R}^n)$

$\langle fT,\varphi\rangle = \langle T, f\varphi\rangle$

2) $f_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon}{2}|x|^{\varepsilon-1}$, $\varepsilon>0$

$f_\varepsilon \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ car $\frac{1}{|x|^{1-\varepsilon}}$ est intégrable au V_0 $(1-\varepsilon<1)$

Soit $\varphi\in D(\mathbb{R})$, $\exists A>0$ tq $supp\,\varphi\subset[-A,A]$

$$\langle T_{f_\varepsilon},\varphi\rangle = \int_{-A}^{A} f_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^A \underbrace{\varepsilon x^{\varepsilon-1}}_{u'}\underbrace{(\varphi(x)+\varphi(-x))}_{v}dx$$

chg de variable des intégrales généralisées

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\left[x^\varepsilon(\varphi(x)+\varphi(-x))\right]_0^A}_{0} - \frac{1}{2}\int_0^A(\varphi'(x)+\varphi'(-x))x^\varepsilon dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^A(\varphi'(x)+\varphi'(-x))x^\varepsilon dx$$

or on a :

i) $\lim_{\varepsilon\to 0^+}(\varphi'(x)+\varphi'(-x))x^\varepsilon\mathbb{1}_{[0,A]}(x)$

$= (\varphi'(x)+\varphi'(-x))\mathbb{1}_{[0,A]}(x)$

ii) $|(\varphi'(x)+\varphi'(-x))x^\varepsilon|\mathbb{1}_{[0,A]}(x) \leq (\varphi'(x)+\varphi'(-x))(x+1)\mathbb{1}_{[0,A]}$

d'après le TCD :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\langle T_{f_\varepsilon},\varphi\rangle = -\frac{1}{2}\int_0^A(\varphi'(x)+\varphi'(-x))dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^A(\varphi(x)+\varphi(-x))'dx$$

$$= \varphi(0) = \langle\delta_0,\varphi\rangle$$

$\Rightarrow \lim_{\varepsilon\to 0^+} T_{f_\varepsilon} = \delta_0$

* f de classe $C^1 \Rightarrow T_f' = T_{f'}$

* f de classe C^1 sauf en un pt a

$\Rightarrow T_f' = T_{f'} + \underbrace{(f(a^+)-f(a^-))}_{S_a(f)}\delta_a$

* $T_{sig}' = 2\delta_0$

$\langle T_{sig}',\varphi\rangle = -\langle T_{sig},\varphi'\rangle$

$$= -\int_{\mathbb{R}} sig(x)\varphi'(x)dx$$

$$= -\left[\int_0^{+\infty}\varphi'(x)dx - \int_{-\infty}^0\varphi'(x)dx\right]$$

$$= 2\varphi(0) = 2\delta_0$$

Exercice 3 :

1) * $T'_{\log|x|} = ?$

$x \longmapsto \mathrm{Log}|x|$ est localement integrable

en effet, $\forall a > 0$

$$\int_{-a}^{a} |\mathrm{Ln}|x||\,dx = 2\int_{0}^{a} |\mathrm{Ln}(x)|\,dx$$

$$\underset{\substack{x=ay \\ y=\frac{x}{a}}}{=} 2a\int_{0}^{1} |\mathrm{Ln}(ay)|\,dy$$

$$\leq 2a\left(|\mathrm{Ln}\,a| + \int_{0}^{1} |\mathrm{Ln}(y)|\,dy\right)$$

$$\leq 2a\left(|\mathrm{Ln}\,a| - \int_{0}^{1} \mathrm{Ln}(y)\,dy\right)$$

$$\leq 2a\left(|\mathrm{Ln}\,a| - [y\mathrm{Ln}y - y]_{0}^{1}\right)$$

$$\leq 2a\left(|\mathrm{Ln}\,a| + 1\right) < +\infty$$

$\Rightarrow T_f \in D'(\mathbb{R})$

Soit $\varphi \in D(\mathbb{R})$, $\exists A > 0$ tq $\mathrm{supp}\,\varphi \subset [-A, A]$

$$\langle T'_f, \varphi \rangle = -\int_{-A}^{A} \underbrace{\mathrm{Ln}|x|}_{\text{paire}}\, \varphi'(x)\,dx$$

$$= -\int_{0}^{A} \mathrm{Ln}x\,(\varphi'(x) + \varphi'(-x))\,dx$$

$$\underset{\mathrm{TCD}}{=} -\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon}^{A} \underbrace{\mathrm{Ln}x}_{v} \underbrace{(\varphi'(x) + \varphi'(-x))}_{(\varphi(x) + \varphi(-x))' = u'}\,dx$$

$$\underset{\substack{\text{integration} \\ \text{par partie}}}{=} \lim_{\varepsilon \to 0^+}\left(\left[\ln x\,(\varphi(x) - \varphi(-x))\right]_{\varepsilon}^{A} - \int_{\varepsilon}^{A} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\,dx\right)$$

$$\langle T'_f, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0^+}\left[\left(\ln\varepsilon\,(\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)\right) + \langle Vp\left(\tfrac{1}{x}\right), \varphi \rangle\right]$$

or $\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon) \underset{0}{\sim} 2\varepsilon\varphi'(0)$

$\Rightarrow \lim\limits_{\varepsilon \to 0} 2\varphi'(0)\,\varepsilon\ln\varepsilon = 0$

d'où $T'_f = Vp\left(\frac{1}{x}\right)$

2) $T : D(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{C}$

$\varphi \longmapsto \langle T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t,t)\,dt$

T est bien définie, en effet :

$\forall \varphi \in D(\mathbb{R})$, $\exists R > 0$, $\mathrm{supp}\,\varphi \subset B'(0, R)$

$\Rightarrow \varphi(x,y) = 0$

si $x^2 + y^2 \geq 0$:

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{-\frac{R}{\sqrt{2}}}^{\frac{R}{\sqrt{2}}} \varphi(t,t)\,dt \text{ est vérifiée}$$

$\Rightarrow |\langle T, \varphi \rangle| \leq \sqrt{2}\,R\,\|\varphi\|_{\infty}$

Par suite T est linéaire et $\forall K$ compact de $\mathbb{R}^2$, $\forall \varphi \in D_K(\mathbb{R}^2)$, $\exists R > 0$, $K \subset B'(0,R)$

et on a :

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq \sqrt{2}\,R\,P_{K,0}(\varphi)$$

$$\langle D^2T, \varphi\rangle = -\langle T, \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\rangle$$

$$= -\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(t,t) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(t,t)\right) dt$$

$$= -\int_{\mathbb{R}} (\varphi(t,t))' \, dt$$

$$= -\left[\varphi(t,t)\right]_{-\infty}^{+\infty}$$

$= 0$ car φ est à support compact

4) $d>0$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$

$$P = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{\partial}{\partial x_j} + d$$

$$\langle E, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-dt} \varphi(t, \alpha_1 t, \dots, \alpha_n t)\, dt$$

$E \in D'(\mathbb{R}^{n+1})$ et supp $E = \{(t,x), t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n\}$

$$\langle PE, \varphi\rangle = \langle \frac{\partial}{\partial t} E, \varphi\rangle + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle \frac{\partial E}{\partial x_j}, \varphi\rangle$$

$$= -\langle E, \frac{\partial \varphi}{\partial t}\rangle - \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \langle E, \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\rangle + \langle E, d\varphi\rangle$$

$$= -\langle E, P\varphi\rangle$$

or $P\varphi(t, \alpha_1 t, \dots, \alpha_n t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \alpha_1 t, \dots, \alpha_n t) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(t, \alpha_1 t, \dots, \alpha_n t)$

Par suite

$$-\langle E, P\varphi\rangle = -\int_{\mathbb{R}} e^{-dt} \underbrace{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}(T) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(T) - d\varphi(t)\right)}_{\left(e^{-dt}\varphi(t, \alpha_1 t, \dots, \alpha_n t)\right)'}$$

$$= -\left[e^{-dt}\varphi(t, \alpha_1 t, \dots, \alpha_n t)\right]_0^{+\infty}$$

$$= \varphi(0_{\mathbb{R}^{n+1}}) = \langle \delta, \varphi\rangle$$

Exercice 4 :

1) Soit $v \in D'(\mathbb{R})$ fixé

$\chi \in D(\mathbb{R})$, $\chi(0) = 1$

$w\ ? \in D(\mathbb{R})$, $xw = v$

$(x-a)T = 0 \iff T = c\,\delta_a$; $\langle (x-a)\delta_a, \varphi\rangle = \langle \delta_a, (x-a)\varphi\rangle$

$xT = 0 \iff T = c\,\delta$

$x^n T = 0 \iff T = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \delta_0^{(k)}$

$x^2 T = 0 \iff T = c_1 \delta + c_2 \delta'$

$\langle x^2\delta, \varphi\rangle = \langle \delta, x^2\varphi\rangle$

$\langle x^2 \delta', \varphi\rangle = -\langle \delta, 2x\varphi + x^2\varphi'\rangle$

$T^{(n)} = 0 \iff T = T_{a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1}}$

$$\langle w, \varphi\rangle = \langle v, \frac{\varphi(x) - \varphi(0)\chi(x)}{x}\rangle$$

w est bien définie car :

$x \longmapsto \varphi(x) - \varphi(0)\chi(x) \in D(\mathbb{R})$

et s'annule en 0

$\Rightarrow x \longmapsto \dfrac{\varphi(x) - \varphi(0)\chi(x)}{x} \in D(\mathbb{R})$

De plus, $\langle xw, \varphi\rangle \langle w, x\varphi\rangle = \langle v, \frac{x\varphi(x)}{x}\rangle$

$= \langle v, \varphi\rangle$

$u \in D'(\mathbb{R})$? $\begin{cases} xu = v \\ xw = v \end{cases}$

$\Rightarrow x(u - w) = 0$

$\iff u - w = c\,\delta$

$\iff u = w + c\,\delta$

Exercice 5:

$\varphi \in D(\mathbb{R})$ admet une primitive de $D(\mathbb{R}) \iff \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx = 0$

$(\exists \psi \in D(\mathbb{R})\ ;\ \psi'(x) = \varphi(x))$

$(\Rightarrow)$ évident

$(\Leftarrow)$ $\varphi \in D(\mathbb{R})$; $\operatorname{supp}\varphi \subset [-A, A]$

on pose $\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(x)\,dx = -\int_{x}^{+\infty} \varphi(x)\,dx$

alors $\psi \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ est verifie $\psi'(x) = f(x)$

en outre, en dehors de $[-A, A]$, $\psi = 0$

Par suite $\psi \in D(\mathbb{R})$

2) $v \in D'(\mathbb{R})$ donné

w' ? $\in D'(\mathbb{R})$ $w' = v$

Soit $\chi \in D(\mathbb{R})$; $\int_{\mathbb{R}} \chi(x)\,dx = 1$

$\varphi \in D(\mathbb{R})$

$$\langle w, \varphi \rangle = -\langle v, \underbrace{\int_{-\infty}^{x} \Big(\varphi(t) - \big(\overbrace{\int_{\mathbb{R}} \varphi(s)\,ds}^{cste}\big)\chi(t)\Big)\,dt}_{\psi(x)} \rangle$$

d'après 1) sachant $\varphi = \varphi - \int_{\mathbb{R}} \varphi(s)\,ds\,\chi \in D(\mathbb{R})$

et verifie $\int_{\mathbb{R}} \psi(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\,dt - \left(\int_{\mathbb{R}} f(s)\,ds\right)\Big(\underbrace{\int_{\mathbb{R}} \chi(x)\,dx}_{1}\Big)$

$= 0$

alors la primitive de la fct :

$\int_{-\infty}^{x} \psi(t)\,dt \in D(\mathbb{R})$

$\Rightarrow w \in D'(\mathbb{R})$

En outre $\langle w', \varphi \rangle = \langle v, \varphi' \rangle = \langle v, \varphi \rangle$

par suite $w' = v$

Resoudre ds $D'(\mathbb{R})$, $u' = v$

$\begin{cases} u' = v \\ w' = v \end{cases} \Rightarrow (u - w)' = 0$

$\Rightarrow u - w = T_c = c$

$\Rightarrow u = w + c$; $c \in \mathbb{C}$