Faculté des Sciences de Tunis 2018-2019

Département de mathématiques

M 1- MA : Analyse de Fourier et Distributions

Série 4

Exercice 1

Vérifier que les expressions suivantes définissent des distributions tempérées sur $\mathbb{R}$ puis donner leurs transformées de Fourier.

$f \in L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow T_f \in S'(\mathbb{R}^n)$

$\mathcal{F}(T_f) = T_{\mathcal{F}(f)}$

$u_1(x) = exp(-|x|)$; $u_2(x) = |x^2 - 1|$; $u_3(x) = cosx$; $u_4(x) = xsinx$.

borné ⇒ à croissance lente. de $\hat{m}$ de $\hat{m}$ de $\hat{m}$

$\Rightarrow u_i \in S'(\mathbb{R})$

Exercice 2

Vérifier que $Vp(1/x)$ est une distribution tempérée sur $\mathbb{R}$ puis calculer sa transformée de Fourier. (utiliser sa parité et l'identité $xVp(1/x) = 1$).
En déduire $\mathcal{F}(H)$.

Exercice 3

Soit λ un nombre réel négatif et $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ telle que

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \lambda u \in L^2(\mathbb{R}).$$

Montrer que u et du/dx appartiennent à $L^2(\mathbb{R})$.
Donner un contre-exemple lorsque $\lambda \geq 0$.

Exercice 4

On considère l'équation différentielle suivante dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

$$xu' - u = \delta \tag{E}$$

1. Résoudre l'équation homogène.
2. En déduire que (E) admet une solution tempérée si et seulement si toutes ses solutions sont tempérées.
3. Déterminer la solution générale de (E) et vérifier qu'elle est tempérée .
4. Déterminer l'unique solution de (E) vérifiant

$$< u, exp(-x^2) >= 1 \qquad et \qquad < u, x\,exp(-x^2) >= -1$$

Exercice 5

En utilisant l'identité $H' = \delta$, montrer que

$$\widehat{H} = \frac{1}{2i\pi}Vp(1/x) + \frac{1}{2}\delta.$$

Exercice 6**

Montrer que la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ de la fonction $f(x) = e^{isx^2}$, $s \in \mathbb{R}_+^*$, est donnée par

$$\widehat{f}(\xi) = \sqrt{\pi/s}\; e^{i\pi/4} e^{-i\pi^2\xi^2/s}.$$

$(S(\mathbb{R}), d)$ complet (e.m)

$$N_m(\varphi) = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ k+|\alpha| \leq m}} (1 + \|x\|^2)^k |D^\alpha \varphi(x)|$$

$$N_0(\varphi) = \|\varphi\|_\infty$$

$$N_1(\varphi) = \max\{\|\varphi\|_\infty, \|\varphi'\|_\infty, \sup_{x \in \mathbb{R}} (1+x^2)|\varphi(x)|\}$$

$$d(\varphi, \psi) = \sum_{m \geq 0} \frac{1}{2^m} \cdot \frac{N_m(\varphi - \psi)}{1 + N_m(\varphi - \psi)}$$

$$\varphi_k \longrightarrow \varphi \Rightarrow N_m(\varphi_k - \varphi) \xrightarrow[k \to \infty]{\forall m} 0$$

Déf. une app. linéaire $T : S(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite distribution tempérée ($T \in S'(\mathbb{R}^n)$)

ssi $\exists c > 0$, $\exists m_0 \in \mathbb{N}$ $|\langle T, \varphi \rangle| \leq c N_{m_0}(\varphi)$

$T \in D'(\mathbb{R})$ $\langle T, \varphi \rangle \leq c(k) P_{k,m}(\varphi) \leq c(k) N_m(\varphi)$

• tout distribution tempérée est une distribution.

$D(\mathbb{R}) \subset S(\mathbb{R})$

$S'(\mathbb{R}^n) \subset D'(\mathbb{R}^n)$

• $f \in L^p(\mathbb{R}^n) \Rightarrow T_f \in S'(\mathbb{R}^n)$

$f \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\, dx$$

$$|f(x)\varphi(x)| \leq \|\varphi\|_\infty \cdot |f(x)| \in L^1$$

$$|\langle T_f, \varphi \rangle| \leq \|f\|_1 \cdot \underbrace{\|\varphi\|_\infty}_{= N_0(\varphi)}$$

$$\Rightarrow |\langle T_f, \varphi \rangle| \leq \|f\|_1 N_0(\varphi)$$

Déf : si f mes $|f(x)| \leq c(1 + \|x\|^2)^k$

alors f est dite à croissance lente

et $T_f \in S'(\mathbb{R}^n)$

• $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$.

$T \in S'(\mathbb{R}^n)$

$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F} : S'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S'(\mathbb{R}^n) \\ \text{est une isométrie} \end{array} \right.$

$$\langle \mathcal{F}(T), \varphi \rangle = \langle T, \underbrace{\mathcal{F}(\varphi)}_{\in S'(\mathbb{R}^n)} \rangle$$

Propriétés : $\varphi \in S'(\mathbb{R}^n)$, $D^\alpha \mathcal{F}(\varphi) = (-2i\pi)^{|\alpha|} \mathcal{F}(x^\alpha \varphi)$

$$\mathcal{F}(D^\alpha \varphi) = (2i\pi)^{|\alpha|} x^\alpha \mathcal{F}(\varphi)$$

Ds $S'(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned} \langle D^\alpha \mathcal{F}(T), \varphi \rangle &= (-1)^{|\alpha|} \langle \mathcal{F}(T), D^\alpha \varphi \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|} \langle T, \mathcal{F}(D^\alpha \varphi) \rangle \\ &= (-2i\pi)^{|\alpha|} \langle T, x^\alpha \mathcal{F}(\varphi) \rangle \\ &= (2i\pi)^{|\alpha|} \langle x^\alpha T, \mathcal{F}\varphi \rangle \\ &= (-2i\pi)^{|\alpha|} \langle \mathcal{F}(x^\alpha T), \varphi \rangle \end{aligned}$$

$\mathcal{F}(\delta_a)$?

$$\langle \mathcal{F}(\delta_a), \varphi \rangle = \langle \delta_a, \mathcal{F}(\varphi) \rangle = \hat{\varphi}(a)$$

$$= \int \varphi(y) e^{-2i\pi a y}\, dy$$

$$= \langle T_f, \varphi \rangle,$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}(\delta_a) = e^{-2i\pi a y}.$$

$n = 1$

$\mathcal{F}(\delta^{(k)})$.

$$\langle \delta^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \varphi^{(k)}(0)$$

$$\varphi^{(k)}(0) = (-1)^k \langle \delta^k, \varphi \rangle$$

Scanned by CamScanner

Théorème :

La transformation de Fourier est un isomorphisme isométrique de $S'(\mathbb{R}^n)$ ds lui même dont la réciproque de $\mathcal{F}$ est $\bar{\mathcal{F}} \in S'(\mathbb{R}^n)$; $\langle \bar{\mathcal{F}}(T), \varphi \rangle = \langle T, \bar{\mathcal{F}}(\varphi) \rangle$

$$\mathcal{F}(\delta^{(k)}) = (-2i\pi x)^k$$

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}(\delta^{(k)})) = \delta^{(k)} = \bar{\mathcal{F}}((-2i\pi x)^k)$$

$$\bar{\mathcal{F}}(\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, e^{2i\pi x y}\, dy.$$

$$\bar{\mathcal{F}}(\varphi) = \mathcal{F}(\check{\varphi})$$

$T_f \in S'(\mathbb{R}^n)$

$$\langle \bar{\mathcal{F}} T_f, \varphi \rangle = \langle T_f, \bar{\mathcal{F}} \varphi \rangle = \langle T_f, \mathcal{F} \check{\varphi} \rangle$$

$\mathcal{F}(\delta) = 1$

$\bar{\mathcal{F}}(\delta) = 1.$

$$\bar{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(\delta)) = \delta = \bar{\mathcal{F}}(1) = \mathcal{F}(1)$$

$$\langle \bar{\mathcal{F}}(1), \varphi \rangle = \langle 1, \bar{\mathcal{F}} \varphi \rangle = \langle 1, \mathcal{F} \check{\varphi} \rangle$$

Exercice 1:

1. $f(x) = e^{-|x|}$, $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\|f\|_1 = 2$

$f \in L^1 \Rightarrow f \in S'(\mathbb{R})$; $\mathcal{F}(T_f) = T_{\mathcal{F}(f)}$ $\Big|$ $\mathcal{F}(f) = \dfrac{2}{1 + 4\pi^2 x^2}$

• Polynôme est localement intégrable.

2) $u_2(x) = |x^2 - 1|$. u_2 est cont,

$|u_2(x)| \leq x^2 + 1$.

x		-1		1	
x^2-1	$+$	0	$-$	0	$+$

$$u_2(x) = x^2 - 1 - 2(x^2 - 1)\, \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$$

$$\mathcal{F}(\delta^{(k)}) = (2i\pi x)^k \mathcal{F}(\delta)$$

$$\Rightarrow \delta^{(k)} = (2i\pi)^k \bar{\mathcal{F}}(x^k) = (-2i\pi)^{(k)} \mathcal{F}(x)$$

$$\bar{\mathcal{F}}(T_f) = \mathcal{F}(T_{\check{f}})$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}(x^k) = \frac{1}{(2i\pi)^k} \delta^k$$

$$\hat{u}_2 = -\frac{1}{4\pi^2}\delta'' - \delta - \underbrace{2(x^2 - 1)\, \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)}_{f(x)}$$

$\in L^1(\mathbb{R})$

f paire, $f \in L^1(\mathbb{R})$

$$\hat{f}(x) = 2\int_0^1 (y^2 - 1)\cos(2\pi x y)$$

après 2 intégrations par parties

on obtient : $\hat{f}(x) = \dfrac{4\cos x}{x^3}(x - \sin x)$

$$\hat{u}_2 = -\frac{1}{4\pi^2}\delta'' + \delta - 2\hat{f}.$$

3. $u_3 = \cos x$, u_3 est à croissance lente donc $u_3 \subset S'(\mathbb{R})$

$$u_3 = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\mathcal{F}(\delta_a) = e^{-2\pi i a x}.$$

$$e^{-aix} = \mathcal{F}(\delta_{a/2\pi})$$

Déf. $T \in S'(\mathbb{R})$

T est paire $\Leftrightarrow \langle T, \check{\varphi} \rangle = \langle T, \varphi \rangle$

impaire $\Leftrightarrow \langle T, \check{\varphi} \rangle = -\langle T, \varphi \rangle$

$$\langle \delta_a, \check{\varphi} \rangle = \check{\varphi}(a) = \varphi(-a)$$

ni paire ni impaire pour $n \neq 0$

$$\langle vp(\tfrac{1}{x}), \check{\varphi} \rangle = \int_0^\infty \frac{\varphi(-x) - \varphi(x)}{x} dx \qquad \boxed{\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)}$$

$$= -\langle vp(\tfrac{1}{x}), \varphi \rangle$$

$vp(\frac{1}{x})$ est impaire.

$$\hat{u}_3 = \frac{1}{4\pi}\left(\delta_{\frac{1}{2\pi}} + \delta_{-\frac{1}{2\pi}}\right)$$

$$\widehat{\sin} = \frac{1}{4i\pi}\left(\delta_{\frac{a}{2\pi}} - \delta_{\frac{a}{2\pi}}\right)$$

4) $u_4(x) = x \sin x$, u_4 à croissance lente

donc $u_4 \in S'(\mathbb{R})$

$$\widehat{x \sin x} = -\frac{1}{2i\pi} \widehat{2i\pi x \sin x}$$

$$= -\frac{1}{2i\pi} (\widehat{\cos x})'$$

$$= -\frac{1}{8i\pi}\left(\delta'_{\frac{1}{2\pi}} + \delta'_{-\frac{1}{2\pi}}\right)$$

Exercice 2 :

$vp(\frac{1}{x}) \in S'(\mathbb{R})$

$$x\, vp(\tfrac{1}{x}) = 1$$

$$\widehat{x\, vp(\tfrac{1}{x})} = -\frac{1}{2i\pi} \widehat{\left(-2i\pi x\, vp(\tfrac{1}{x})\right)}$$

$$= \hat{1} = \delta = -\frac{1}{2i\pi}\left(\widehat{vp(\tfrac{1}{x})}\right)'$$

$$\langle \mathcal{F}(1), \varphi \rangle = \langle 1, \hat{\varphi} \rangle = \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(x) e^{2i\pi 0 x} dx = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$$

$$x\, \widehat{vp(\tfrac{1}{x})} = \underset{\text{(Heaviside)}}{H'} \Rightarrow \left(-\frac{1}{2i\pi} \widehat{vp(\tfrac{1}{x})} - H\right)' = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2i\pi} \widehat{vp(\tfrac{1}{x})} = H + C, \quad C \in \mathbb{C}$$

or $vp(\frac{1}{x})$ est impaire $\Rightarrow \widehat{vp(\frac{1}{x})}$ impaire

$$= \frac{1 + sg(\cdot)}{2} + C$$

$$= \frac{1}{2} + C + \underbrace{\frac{1}{2} sg}_{\text{impaire}}$$

$$C = -\frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow \widehat{vp}(\tfrac{1}{x}) = -2i\pi H + i\pi.$$

Exercice 3 :

$\lambda < 0$; $u \in S'(\mathbb{R})$

$u'' + \lambda u \in L^2$

$u \in L^2$ et $u' \in L^2$.

$$\widehat{u'' + \lambda u} = \widehat{u''} + \lambda \hat{u}$$

$$= -4\pi^2 x^2 \hat{u} + \lambda \hat{u} \in L^2$$

$$\Rightarrow (-4\pi^2 x^2 + \lambda)\hat{u} = f \in L^2$$

$$\Rightarrow \hat{u} = \frac{f}{-(4\pi^2 x^2 - \lambda)} \in L^2$$

car $\frac{1}{4\pi^2 x^2 - \lambda}$ est borné

d'autre part $\widehat{u'' + \lambda u} = \widehat{(u')' + \lambda u}$

$$= -2i\pi x \hat{u}' + \lambda \hat{u} \in L^2$$

$$\Rightarrow \hat{u}' \in L^2 \Rightarrow u' \in L^2$$

2- $\lambda > 0$,

$u = \sin(\sqrt{\lambda} x) \in S'(\mathbb{R})$

$u'' = -\lambda \sin(\sqrt{\lambda} x)$ verifie, $u'' + \lambda u = 0$

mais $\sqrt{\lambda} x \notin L^2$

Exercice 4:

$x u' - u = \delta'$; $u \in D'(\mathbb{R})$

1. $x u' - u = 0$

on cherche la solution $u = x V$

$u' = V + x V'$

$x u' - u = \cancel{xV} + x^2 V' - \cancel{xV} = 0$

$\Rightarrow x^2 V' = 0 \Rightarrow V' = c_1 \delta + c_2 \delta'$

$V' = c_1 H' + c_2 \delta'$

$\Leftrightarrow V = c_1 H + c_2 \delta + c_3$

D'où $u = c_1 x H + \underbrace{c_2 x \delta}_{=0} + c_3$

2. (E) : $x u' - u = 0$

si $S \in S'(\mathbb{R})$ vérifie E alors ts les autres solutions sont tempérées.

Em effet, tt solution T de E s'écrit $T = S + c_1 x H + c_3 \in S'(\mathbb{R})$.

Remarque:

Exercice:

$n, m \in \mathbb{N}$

$$x^n \delta^{(m)} = \begin{cases} 0 & m \in \{0, \dots, n-1\} \\ (-1)^n A_m^n \delta^{(m-1)} & n \geq m \end{cases}$$

$$\langle x^n \delta^{(m)}, \varphi \rangle = \langle \delta^{(m)}, (x^n \varphi) \rangle$$
$$= (-1)^m \langle \delta, (x^n \varphi)^{(m)} \rangle$$
$$= (x^n \varphi)^{m}(0) =$$
$$= (-1)^n \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \varphi^{(n-k)}(0)$$

$(x^n)^{(k)} = 0$ si $k > n$

$k < n$

$x u' - u = \delta$

on cherche $u = x v$ comme solution de (E)

$x u' - u = x^2 v' = \delta$

or $x^2 \delta'' = \frac{1}{2} \delta \Rightarrow 2 x^2 \delta'' = \delta$

$\Rightarrow v' = 2\delta'' \Rightarrow u = 2 x \delta'$ est sol particulier de 1

avec les conditions initials on trouve c_1 et c_3

Exercice 5:

$H' = \delta$

$\hat{H}' = \hat{\delta} = 1$

$2i\pi x \hat{H} = x\, vp(\frac{1}{x})$

$$\Rightarrow x\left(2i\pi \hat{H} - vp\,\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2i\pi\, \hat{H} - vp\left(\frac{1}{x}\right) = C\delta$$

$$\hat{H} = \frac{1}{2i\pi}\, vp\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{C}{2i\pi}\,\delta$$

$$= \frac{\hat{1} + \hat{Sg}}{2} = \frac{\delta}{2} + \hat{sg}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2i\pi}\, \overbrace{vp\left(\frac{1}{x}\right)}^{\text{impaire}} + \frac{C}{2i\pi} - \frac{1}{2}\delta$$

$$= \underbrace{\hat{sg}}_{\text{impaire.}}$$

$\Rightarrow C = i\pi$. d'où la solution.