Faculté des Sciences de Tunis
Département de mathématiques 2017-2018

M 1- MA : Analyse de Fourier et Distributions

Série 2

**Exercice 1**

Calculer les transformées de Fourier des fonctions suivantes:

1. $f(x) = \chi_{[a,b]}(x), \quad a < b$ .
2. $f(x) = sinx/x$.
3. $f(x) = exp(-\alpha|x|), \quad \alpha > 0$.
4. $f(x) = sign(\text{x})\text{exp}(-\alpha|x|), \quad \alpha > 0$.
5. $f(x) = exp(-\alpha x^2), \quad \alpha > 0$.(Remarquer que $\hat{f}$ vérifie une équation différentielle).

**Exercice 2**

Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \frac{x}{x^2+a^2}, \ a > 0$.

1. Montrer que $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $f \notin L^1(\mathbb{R})$.
2. Calculer $\widehat{f}$ et vérifier qu'elle n'est pas continue.

**Exercice 3**

Trouver une fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{f} \geq 0$ et $\widehat{f}(0) = 1$.

**Exercice 4**

On rappelle que l'opérateur de Laplace sur $\mathbb{R}^2$ est donné par $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}$.
Etablir l'inégalité suivante pour toute fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ :

$$||\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}||_{L^2} \leq ||\Delta f||_{L^2}$$

**Exercice 5**

On considère la suite de fonctions $f_n = \chi_{[-n,n]} * \chi_{[-1,1]}, \ n \geq 1$.

1. Vérifier que

$$\widehat{f_n}(x) = \frac{sin(2\pi x)sin(2\pi nx)}{\pi^2 x^2}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

**1.** Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\int_0^{+\infty} |\widehat{f}_n(x)|dx \geq c \int_0^{n\pi/2} |\frac{sinx}{x}|dx$$

**2.** En déduire que la transformation de Fourier $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow C_0(\mathbb{R})$ n'est pas surjective. (On pourra raisonner par l'absurde ).
**3.** Montrer que $\mathcal{F}$ est d'image dense.

**Exercice 6**
On considère une fonction $f$ dans l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.
**1.** Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$ définit une fonction continue sur $\mathbb{R}$, 1-périodique.
**2.** En déduire la formule sommatoire de Poisson :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)e^{2i\pi nx}.$$

En particulier, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)$.

**Exercice 7**
On note $(t, x) = (t, x_1, x_2, ..., x_n)$ le point courant de $\mathbb{R}^{n+1}$. On définit la transformation de Fourier partielle d'une fonction $f$ de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$ par:

$$\tilde{f}(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t,y)e^{-2i\pi xy}dy$$

**1.** Montrer que cette transformation est une bijection linéaire de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$.

**2.** Etablir les formules

$$\widetilde{\partial_t f}(t,x) = \partial_t \tilde{f}(t,x), \qquad \widetilde{\partial_{x_j} f}(t,x) = 2i\pi x_j \tilde{f}(t,x)$$

**3.** On note $G_t(x) = (4\pi t)^{-n/2}exp(-\frac{\|x\|^2}{4t}), \quad t > 0$.

Montrer que pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, la convolée $u(t,x) = G_t * \varphi(x)$ est solution de l'équation de la chaleur

$$\partial_t u = \Delta_x u \qquad \text{dans} \qquad \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^n.$$

et

$$\lim_{t\longrightarrow 0+} u(t,x) = \varphi(x).$$

**4.** Examiner cette convolée lorsque $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Serie n°2

**Exercice 1:**

1) $f(x) = \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$ , $\hat{f}$?

$f \in L^1(\mathbb{R})$ , $\|f\|_1 = b-a = \hat{f}(0)$ ($f \geq 0$)

$\lambda \in \mathbb{R}^*$ , $\hat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-2i\pi x\lambda}\, dx$

$= \int_a^b e^{-2i\pi\lambda x}\, dx$

$= \frac{1}{2i\pi\lambda}\left[e^{-2i\pi\lambda a} - e^{-2i\pi b}\right]$

2) $x \longmapsto \frac{\sin x}{x}$ soit donc borelienne est dans $L^2(\mathbb{R})$ mais pas $L^1(\mathbb{R})$

$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \underset{|x|\geq 1}{\leq} \frac{1}{x^2}$ dont l'integrale cv. sur $]1,\infty[$ $\Rightarrow f \in L^2(\mathbb{R})$

$\int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = 2\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$

$= 2 \lim_{n\to\infty} \int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$

$= 2 \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\, dx$

$\geq 2 \lim_{k\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x|\, dx$ ①

$\sin(k\pi + x) = (-1)^k \sin x$

$= \lim_{k\to\infty} \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \int_0^{\pi} \sin y\, dy$

$y = x - k\pi$

$\geq \frac{4}{\pi} \lim_{k\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$

3) $\alpha > 0$ , $f(x) = e^{-\alpha|x|}$ , $f \in L^1(\mathbb{R})$

$\hat{f}(0) = \|f\|_1 = \frac{2}{\alpha}$.

pour $\lambda \neq 0$, comme $f$ est paire

alors $\hat{f}(\lambda) = 2\mathrm{Re}\left(\int_0^{\infty} f(x)\, e^{-2i\pi\lambda x}\, dx\right)$ ($\sin = 0$)

$= 2\mathrm{Re}\left(\int_0^{\infty} e^{-\lambda|x|}\, e^{-2i\pi\lambda x}\, dx\right)$

$\int f(x)\, e^{-2i\pi\lambda x}\, dx = 2\int_0^{\infty} f(x)\cos(2\pi\lambda x)\, dx - i\underbrace{\int_{\mathbb{R}} f(x)\sin(2\pi\lambda x)\, dx}_{0}$

$= 2\mathrm{Re}\left(\int_0^{\infty} f(x)\, e^{-2i\pi\lambda x}\, dx\right)$

$= 2\mathrm{Re} \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+2i\pi\lambda)x}\, dx$

$= 2\mathrm{Re}\left[\frac{e^{-(\alpha+2i\pi\lambda)x}}{\alpha+2i\pi\lambda}\right]_{+\infty}^{0}$

$\hat{f}(\lambda) = 2\mathrm{Re}\left[\frac{1}{\alpha+2i\pi\lambda}\right]$

$= \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2\lambda}$

4) $\alpha > 0$, $f(x) = sig(x)\, e^{-\alpha|x|}$

borelienne

$\|f\|_1 = \frac{1}{\alpha}$

$f$ étant impaire

$$\hat{f}(\lambda) = -2i\, Im\left(\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \cdot e^{-2i\pi\lambda x} dx\right) \quad (\cos = 0)$$

$$= + \frac{4i\pi\lambda}{\alpha^2 + 4\pi^2\lambda^2}$$

5) $f(x) = e^{-\alpha x^2}$, $\alpha > 0$

$f \in L^1(\mathbb{R})$ ; $\lim_{|x| \to +\infty} x^2 . e^{-\alpha x^2} = 0$

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha y^2} e^{-2i\pi xy} dy.$$

d'après le théorème de dérivation d'une integrale dépendant d'un paramètre sachant que:

$$\begin{cases} i) & x \longmapsto e^{-\alpha y^2} e^{-2i\pi xy} \text{ est } C^1 \text{ sur } \mathbb{R} \\ ii) & |\varphi'(x)| = \left|-2i\pi y\, e^{-\alpha y^2} e^{-2i\pi xy}\right| \\ & = 2\pi|y|\, e^{-\alpha y^2}. \end{cases}$$

et $|\varphi'|$ integrable sur $\mathbb{R}$

alors $\hat{f} \in C^1(\mathbb{R})$ et

$$(\hat{f}(x))' = -2\pi i \int_{\mathbb{R}} y\, e^{-\alpha y^2} e^{-2i\pi xy} dy$$

on fait une integration par partie:

$$u = e^{-2i\pi xy} \xrightarrow{d} u' = -2i\pi x\, e^{-2i\pi xy}$$

$$v' = y . e^{-\alpha y^2} \xrightarrow{P} v = -\frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha y^2}$$

$$\rightarrow (\hat{f}(x))' = 2i\pi \Big[ \underbrace{-\frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha y^2} e^{-2i\pi xy}}_{=0} \Big]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} \frac{i\pi x}{\alpha} e^{-\alpha y^2} e^{-2i\pi xy} dy$$

$y' + a(x)\, y = 0$

$\Downarrow$

$y = y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)dt}$

$$(\hat{f}(x))' = \frac{-2\pi^2 x}{\alpha} \cdot \hat{f}(x)$$

d'ou $\hat{f}'(x) + \frac{2\pi^2 x}{\alpha} \hat{f}(x) = 0$

et $\hat{f}(0) = \|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$

$$\Rightarrow \hat{f}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-\frac{2\pi^2}{\alpha}\int_0^x t\, dt} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-\frac{2\pi^2}{\alpha}\frac{x^2}{2}}$$

$$\hat{f}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-\frac{\pi^2 x^2}{\alpha}}.$$

## Exercice 3:

$f \in S(\mathbb{R})$ ? $f(0) = 1$.

Réponse: $f = f_\pi \Rightarrow f_\pi(x) = e^{-\pi x^2}$

## Exercice 5:

$f_n = 1\!\!1_{[-n,n]} * 1\!\!1_{[-1,1]}$ ; $n \geq 1$.

1. verifier que $\hat{f}_n(x) = \frac{\sin(2\pi x)\sin(2\pi x n)}{\pi^2 x^2}$

[D'après L'ex 1: 1)]

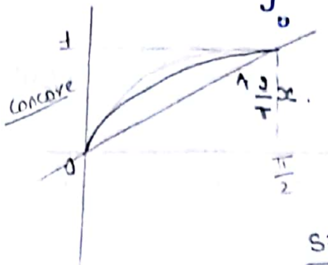
$$\hat{1\!\!1}_{[a,b]}(x) = \frac{1}{2i\pi x}\left[e^{-2i\pi x a} - e^{-2i\pi x b}\right]$$

$$\hat{1\!\!1}_{[-n,n]}(x) = \frac{1}{2i\pi x}\left(e^{2i\pi n x} - e^{-2i\pi n x}\right)$$

$$= \frac{\sin(2n\pi x)}{\pi x}.$$

or $\hat{f}_n = \hat{1\!\!1}_{[-n,n]} * \hat{1\!\!1}_{[-1,1]} = \hat{1\!\!1}_{[-n,n]} \times \hat{1\!\!1}_{[-1,1]}$

2. $\exists c>0$ ? $\int_0^\infty |\hat f_n(x)| \geq c \int_0^{\frac{n\pi}{2}} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$




Sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ $\frac{\sin x}{x} \geq \frac{2}{\pi}$

$0 \leq 2\pi x \leq \frac{\pi}{2}$

$0 \leq x \leq \frac{1}{4}$

$\frac{\sin(2\pi x)}{2\pi x} \geq \frac{2}{\pi}$

$\Downarrow$

$\frac{\sin(2\pi x)}{\pi x} \geq \frac{4}{\pi}$

$$\|\hat f_n\|_1 = \int_0^\infty |\hat f_n(x)|\, dx \geq \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\frac14} \frac{|\sin(2n\pi x)|}{x}\, dx = \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{|\sin t|}{t}\, dt$$

chg de variable.

$2n\pi x = t$

$dx = \frac{dt}{2n\pi}$

(th de Conv. monotone) $n \to +\infty$ : $+\infty$

3) $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \xrightarrow[\text{cont, inj}]{\text{lin}} \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, non surjective ?

Par l'absurde, supposons $\mathcal{F}$ surjective alors $\mathcal{F}$ est linéaire, continue et bijective entre 2 Banach. alors il suit donc du théorème de Banach que: $\mathcal{F}^{-1} : C_0(\mathbb{R}) \longrightarrow L^1(\mathbb{R})$

$\hat f_n \longmapsto f_n$

est linéaire continue, bijective.

il existe $\alpha>0$ : $\|\hat f_n\|_1 \leq \underbrace{\alpha \|\hat f_n\|_\infty}_{<\infty}$.

$n \to \infty$ : $+\infty$ absurde.

4) $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R})) \subsetneq C_0(\mathbb{R})$

$\overline{\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))}^{\mathcal{C}(\mathbb{R})} = C_0(\mathbb{R})$

$S(\mathbb{R}) = \mathcal{F}(S(\mathbb{R})) \subset \mathcal{F}(L^1(\mathbb{R})) \subsetneq C_0(\mathbb{R})$

Comme $S(\mathbb{R})$ est dense ds $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ alors

Thm: $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$ dense ds $C_0(\mathbb{R})$.

Si $(\rho_k)_k$ est une approximation de l'identité alors:

i) $\forall f \in L^p$, $(1 \leq p < \infty)$

$\underset{\in L^p}{f_k = f} * \underset{\in L^1}{\rho_k} \xrightarrow[k\to\infty]{L^p} f$

ii) $f$ bornée, unif. cont, $f_k \xrightarrow{\|\,\|_\infty} f$

$\begin{cases} f \text{ cont sur } [0,+\infty[ \\ \lim_{n\to\infty} f = 0 \end{cases} \Rightarrow \big\{ f$ est unif. continue.

$\lim_{+\infty} f = 0$, pour $\varepsilon>0$, $\exists A$, $x>A$,

$|f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, $x,y>A$, $|f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$

$f$ unif. cont sur $[0, A+1]$

$\forall \varepsilon>0$, $\exists \alpha$; $|x-y|<\alpha \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

on pose $\eta = \inf(\alpha, 1) < 1$

$x,y \in \mathbb{R}^+ = [0,A] \cup ]A,+\infty[$

**Théorème 8**

$\mathcal{F} : S(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S(\mathbb{R}^n)$ est un isomorphisme bicontinue.

$\mathcal{F} : f \to \mathcal{F}(f) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$

$x \longmapsto \mathcal{F}(f(x)) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\, e^{-2i\pi\langle x,y\rangle} dy$

$\overline{\mathcal{F}} f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\, e^{2i\pi\langle x,y\rangle} dy$

La réciproque de $\mathcal{F}$

$\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F} f = \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}} f = f.$

Si $n = 1$ $f$ paire $\Rightarrow \overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F}$

$f$ impaire $\Rightarrow \overline{\mathcal{F}} = -\mathcal{F}$

**Propriétés:**

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$

$$D^\alpha(\varphi(x)) = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1}_{x_1} \dots} \frac{\varphi(x)}{\partial^{\alpha_n}_{x_n}}$$

$$\mathcal{F}(D^\alpha \varphi)(x) = (2i\pi x)^\alpha \mathcal{F}(\varphi(n))$$

$$= (2i\pi)^{|\alpha|} x^\alpha (\mathcal{F}\varphi(n))$$

$$D^\alpha(\mathcal{F}(\varphi))(n) = \mathcal{F}((-2i\pi .)^\alpha . f)(n)$$

**Exercice 4:**

$f \in S(\mathbb{R}^2)$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial^2 x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$\left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right\|_2 \leq \| \Delta f \|_2 \; ?$$

$$\int f\bar{g} = \int \hat{f} \cdot \bar{\hat{g}}$$

$f \in S(\mathbb{R})$,

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$

$$D^\alpha \mathcal{F}(f)(z) = \widehat{(-2i\pi x)^\alpha f(x)}$$

$$\mathcal{F}(D^\alpha f)(x) = (2i\pi x)^\alpha \mathcal{F} f(n)$$

$$\widehat{D^\alpha f}(x_1, \dots, x_n) = (2i\pi x)^\alpha \hat{f}(x_1, \dots, x_n)$$

$$= (2i\pi)^{|\alpha|} x_1^{\alpha} x_2^{\alpha} \dots x_n^{\alpha} \hat{f}(n)$$

$$\widehat{\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}} = (2i\pi)^2 xy \, \hat{f}(x,y)$$

$$\widehat{\Delta f}(x,y) = (2i\pi)^2 (x^2 + y^2) \hat{f}(x,y)$$

$$= -4\pi^2 (x^2 + y^2) \hat{f}(x,y)$$

$$\left| \widehat{\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}} \right| = 2\pi^2 \, 2|xy| \, |\hat{f}(x,y)|$$

$$\leq 2\pi^2 (x^2 + y^2) |\hat{f}(x,y)|$$

$$\leq |\widehat{\Delta f}(x,y)|$$

Par suite $\left\| \widehat{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}} \right\|_2 \leq \| \widehat{\Delta f} \|_2$

et comme $\mathcal{F}$ est un automorphisme isométrique de $S(\mathbb{R})$ alors on a :

$$\left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right\|_2 \leq \| \Delta f \|_2 .$$

**Exercice 6:**

$f$ : de periode $T$

$\tilde{f}(x) = f\left(\frac{x}{2\pi} T\right)$ de periode $2\pi$

$$\tilde{f}(x + 2\pi) = f\left(\frac{x + 2\pi}{2\pi} T\right) = f\left(\frac{x}{2\pi} T + T\right)$$

$$= f\left(\frac{x}{2\pi} T\right) = \tilde{f}(x).$$

$f \in S(\mathbb{R})$

$$F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + n)$$

$F$ est bien définie et de classe $C^1$ sur $[-A, A]$, $\forall A \in \mathbb{R}$, en effet,

$\forall x \in [-A, A]$, $\exists c > 0$, $(x + n)^2 |f(x)| \leq c$

$$\Rightarrow |f(x)| \leq \frac{c}{(|n| - |x|)^2} \leq \frac{c}{(|n| - |A|)^2}$$

terme générale d'une serie CV.

$\Rightarrow \sum f(x,n)$ est normalement convergent et par suite $F$ est bien définie continue.

or $f' \in S(\mathbb{R})$ et $\forall x \in [-A, A]$, $\exists C_2 > 0$

$$|f'(x+n)| \leq \frac{C_2}{(|n|-A)^2}$$

$$\Rightarrow F \in C^1(\mathbb{R})$$

Comme $F(x+1) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} (x+(m+1))$

$$\overset{m=n+1}{=} \sum_{m\in\mathbb{Z}} (n+m) \cdot$$

F est de période 1.

Théorème Direchlet

Si g est $C^1$ sur $\mathbb{R}$ de période T

alors :

$$g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n(g)\, e^{\frac{2i\pi}{T} m x}$$

$$C_n(g) = \frac{1}{T}\int_0^T g(x)\, e^{-\frac{2i\pi m}{T} x} \cdot dx.$$

2) $F(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} f(x+n) \underset{\text{thm Direchlet}}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n(F) e^{2i\pi n x}$

$$\overset{?}{=} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{f}(x) e^{2i\pi m x}$$

il s'agit de montrons que

$$C_n(F) = \hat{f}(m)$$

$$C_n(F) = \int_0^1 F(x)\, e^{-2i\pi n x}\, dx$$

et comme

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^1 |f(x+k)|\, dx < \infty$$

Beppo-levi

f mesurable.

Si $\sum \int_a^b |f_n| < \infty \Rightarrow \int \sum f_n = \sum \int f_n$

car si $|k| < 1 \rightarrow \int_0^1 |f(x+k)|\, dx \leq \frac{1}{(|k|-1)^2}$

d'après théorème de Beppo-levi ③

$$C_n(f) = \int_0^1 f(x+n)\, e^{-2i\pi n x}\, dx$$

$$\overset{t=x+k}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_k^{k+1} f(t)\, e^{-2i\pi n(t-k)}\, dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-2i\pi n t}\, dt.$$

$$= \hat{f}(x)$$

Exercice 1:

$(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$

$\alpha = (k, \beta)$, $k \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}^n$

$$D^\alpha f(t,x) = \frac{\partial^{k+|\beta|}}{\partial t^k \partial x_1^{\beta_1} \cdots \partial x_n^{\beta_n}}$$

$$\mathcal{F}_x : S(\mathbb{R}^{n+1}) \longrightarrow S(\mathbb{R}^{n+1})$$

$$f \longmapsto \mathcal{F}_x f = \tilde{f}$$

$$\mathcal{F}_x(f)(t,x) = \tilde{f}(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t,y)\, e^{-2i\pi\langle x,y\rangle}\, dy.$$

1) $\mathcal{F}_n$ est un isomorphisme de $S(\mathbb{R}^{n+1})$ ds $S(\mathbb{R}^{n+1})$

(voir $\mathcal{F} : S(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S(\mathbb{R}^n)$)

et $\mathcal{F}_x^{-1} = \mathcal{F}_x$.

2) $\mathcal{F}_x(\partial_t f)(t,x) = \widetilde{\partial_t f}(t,x) = \partial_t \mathcal{F}_x(f)(t,x)$

$$= \partial_t \tilde{f}(t,x)\ ?$$

d'après le théorème de différentiabilité des intégrales dépendant d'1 paramètre sachant que $\partial_t f \in S(\mathbb{R}^n)$

alors $\exists c>0$, $(1+\|y\|^2)^n \cdot |\partial_t f(t,y)| < c$

$$\Rightarrow \left| \partial_t f(t,x)\, e^{-2i\pi\langle x,y\rangle} \right| \leq \frac{c}{(1+\|y\|^2)^n}$$

et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \frac{dy}{(1+\|y\|^2)^n} < \infty$

alors $\widetilde{\partial_t f} = \partial_t \tilde{f}$

$$\mathcal{F}_x^0\left(\frac{\partial}{\partial x_i} f(t,x)\right) = \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\frac{\partial f(t,y)}{\partial x_1}}_{u_{y_i}} \underbrace{e^{-2i\pi\langle x,y\rangle}}_{v} dy_1 \dots dy_n$$

$$\underset{\uparrow}{=} +2i\pi x_i \mathcal{F}_x^i f(t,x)$$

intergration par partie. par rapport à la $i^{ème}$ composante.

$$\mathcal{F}_x^0\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f\right) = -4\pi^2 x_i^2 \mathcal{F}_x(f)(t,x)$$

3. $G_t(x) = \dfrac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}$, $t>0$.

$G_t$ est une approximation gaussienne de l'identité

Soit $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$

$u = u(t,x) = G_t * \varphi(t)$ sol de (E) (1) (2)

$u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^n)$; $G_t \in C^\infty(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^n)$

$$\partial_t u - \Delta_x u = \partial_t G_t * \varphi - \Delta_x G_t * \varphi$$
$$= (\partial_t G_t - \Delta_x G_t) * \varphi$$

et l'on a $\mathcal{F}_x^0(\partial_t u - \Delta_x u)$
$$= \left[\mathcal{F}_x^0(\partial_t G_t) - \mathcal{F}^0(\Delta_x G)\right] \cdot \mathcal{F}(\varphi)$$

or d'après 2)

$$\mathcal{F}_x(\partial_t u - \Delta_x u)(t,u) = \partial_t \mathcal{F}_x(G_t) + 4\pi^2\|x\|^2 \mathcal{F}_x^0(G_t)$$

Comme $\mathcal{F}_x^0(G_t)(n) = e^{-4\pi^2 t\|x\|^2}$ alors

$$\partial_t \mathcal{F}_x^0(G_t) = -4\pi^2 \|x\|^2 \mathcal{F}_x^0(G_t)$$

et $\mathcal{F}_x^0(\partial_t u - \Delta_x u) = 0$

$\underset{\substack{\Downarrow \\ \mathcal{F}_x \text{ est bij}}}{\Longleftrightarrow}$ $\partial_t u - \Delta_n u = 0$ D'où (E) (1)

une fct cont et $\lim\limits_{+\infty} f < \infty \Rightarrow f$ est unif cont

Comme $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, alors $\varphi$ est cont et bornée

donc $G_t * \varphi \xrightarrow[t \to 0]{\text{unif c.v}} \varphi$

$$\Rightarrow G_t * \varphi(x) \underset{k\to 0}{\longrightarrow} u(n)$$

d'où (E) (2)

4- la Convoleé $G_t * \varphi$ est sol° de (E) si $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$

## Exercice 1

2. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $f \in L^2(\mathbb{R}^n) \setminus L^1(\mathbb{R}^n)$

on sait que $g_n(x) = \int_0^n \frac{\sin y}{y} e^{2i\pi\langle x,y\rangle} dy$

Converge dans $L^2(\mathbb{R})$ vers $P(f)$

$g_n(x) = \mathcal{F}(f_n)(x)$

où $f_n = f \cdot 1_{[-n,n]}$

comme $f$ est paire

$$g_n(x) = 2\int_0^n \frac{\sin y}{y}\cos(2\pi x y)\,dy$$

$$= \int_0^n \left[\frac{\sin(1+2\pi x)y}{y} + \frac{\sin((1-2\pi x)y)}{y}\right]dy.$$

or $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Pour $\alpha\in\mathbb{R}^*$,

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx \underset{\uparrow}{=} \int_0^\infty \frac{\sin(Sg(\alpha)y)}{y}\,dy$$

$y=|\alpha|x = \alpha Sg(\alpha) x.$

$$= Sg(\alpha)\int_0^\infty \frac{\sin y}{y}\,dy.$$

$$= \frac{\pi}{2} Sg(\alpha)$$

alors :

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \frac{\pi}{2}\left[Sg(1+2\pi x) + Sg(1-2\pi x)\right]$$

$$= \pi\, 1_{]-\frac{1}{2\pi},\frac{1}{2\pi}[}(x)$$

| | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2\pi}$ | | $\frac{1}{2\pi}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2\pi x+1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $-2\pi x+1$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

Par suite $P(f(y)) = \pi\, 1_{]-\frac{1}{2\pi},\frac{1}{2\pi}[}(x)$

ds $L^p(\mathbb{R})$

## Exercice 2 :

$a>0$, $f(x) = \frac{x}{x^2+a^2}$

1) $f\in L^2(\mathbb{R})\setminus L^1(\mathbb{R})$ car $|f(x)| \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{|x|}$, $\frac{1}{|x|}\notin L^1(\mathbb{R})$, $|f(x)|^2 \underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{x^2}\in L^1(\mathbb{R})$

2) $P(f)$ ?

on sait que d'après 4°) de l'ex 1) que si $g_\alpha(x) = (Sg(x))e^{-|\alpha|x}$

alors $\mathcal{F}(g_\alpha) = P(g_\alpha)(x)$

$$= \frac{4i\pi x}{\alpha^2+4\pi^2x^2}$$

$f = C(a)\cdot f_\alpha$ ?

$$f(x) = \frac{x}{x^2+a^2} = \frac{-i\pi 4\pi x i}{4\pi^2a^2+4\pi^2x^2}$$

$$= -i\pi\, \hat{g}_{2\pi a}$$

$$\overset{*}{=} -i\pi\, P(g_{2\pi a})$$

$P(f) = -i\pi \; P.\,P((g_{2\pi a})) = i\pi g_{2\pi a}$

$PP(g) = -g$

g est impaire
donc son fourier
est impaire

$FFg = -g$

$P(f(x)) = i\pi \, Sg(x) \, e^{-2\pi a x}$

Scanned by CamScanner