La transformation de Fourier

1- Généralités.

Définition:

La transformée de fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ est définie pour $x \in \mathbb{R}$, par :

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x t} f(x)\, dt$$

Notation: $\hat{f}$, $\mathcal{F}_f$

Exemple:

1) $f(t) = 1\!\!1_{[-1,1]}(t)$

$$\hat{f}(x) = \int_{-1}^{1} e^{-2i\pi x t}\, dt$$

$$= \begin{cases} 2 & ; x = 0 \\ \dfrac{\sin 2\pi x}{\pi x}, & x \neq 0 \end{cases}$$

$$\hat{f}(x) = \frac{\sin 2\pi x}{\pi x}$$

2) $f(t) = e^{-a(t)}$, $a > 0$

$$\hat{f}(x) = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 x^2} \quad ??$$

3) $f(t) = e^{-\pi t^2}$

$\hat{f}(x) = e^{-\pi x^2}$

Propriétés :

1) Linéarité : $\widehat{\alpha f + g} = \alpha \hat{f} + \hat{g}$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall f, g \in L^1(\mathbb{R})$

2) Transformée d'une translatée :

$f \in L^1(\mathbb{R})$, $g(t) = f(t-a)$, $a \in \mathbb{R}$

$$\hat{g}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x t} f(t-a)\, dt$$

$$= e^{2i\pi x a} \hat{f}(x)$$

$s = t - a$

3) Changement d'échelle :

$\omega > 0$, $g(t) = f(\frac{t}{\omega})$

$f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{g}(x) = \omega \hat{f}(\omega x)$

Théorème : Lemme de Riemann - Lebesgue

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\hat{f}$ est une fct continue pp et tend vers 0 à l'∞

De plus, $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_{L^1}$

$t \in \mathbb{R}$, fixé $x \longrightarrow f(t) e^{-2i\pi x t}$

$|f(t) e^{-2i\pi x t}| \leq |f(t)| \in L^1$

Reste à montrer que :

$\hat{f}$ tend vers 0 à l'∞.

* $f \in L^1(\mathbb{R})$

* $C_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense ds $L^1(\mathbb{R})$
$\underset{C_0^\infty}{\uparrow}$

$f \in L^1(\mathbb{R})$

$f_k \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

$$\| f - f_k \|_{L^1} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$$

$$\hat{f}(x) = (f - f_k)^\wedge(x) + \hat{f}_k(x)$$

Soit $k > 0$

$$|\hat{f}(x)| \leq |(f - f_k)^\wedge(x)| + |\hat{f}_k(x)|$$

$$\leq \| (f - f_k)^\wedge \|_\infty + |\hat{f}_k(x)|$$

$$\leq \| f - f_k \|_{L^1} + |\hat{f}_k(x)|$$

$\Rightarrow \exists k_0 \geq 1,\ k \geq k_0 \Rightarrow$

$$\| f - f_k \|_{L^1} \leq \varepsilon/2.$$

$$\hat{f}_{k_0}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x t} f_{k_0}(t)\, dt$$

$x \neq 0$ $$= \frac{-1}{2i\pi x} \int_{-A}^{A} -2i\pi e^{-2i\pi x t} f_{k_0}(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{2i\pi x} \int_{-A}^{A} f'_{k_0}(t) e^{-2i\pi x t}\, dt$$

$$\hat{f}_{k_0}(x) = \frac{1}{2i\pi x} \hat{f'}_{k_0}(x)$$

$$|\hat{f}_{k_0}(x)| \leq \frac{1}{2\pi |x|} \| f'_{k_0} \|_{L^1}$$

Propriètes:

$f, g \in L^1(\mathbb{R})$

a) $(f * g)^\wedge = \hat{f} \cdot \hat{g}$

b) Formule de multiplication:

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x)\, g(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \hat{g}(x)\, dx.$$

<u>Preuve:</u>

a) $$(f * g)^\wedge(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x t} (f * g)(t)\, dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x t} \left(\int f(t-s) g(s)\, ds \right) dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x(t-s)} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t-s) g(s) e^{-2i\pi x s}\, ds \right) dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x(t-s)} f(t-s)\, dt \right) e^{-2i\pi s} g(s)\, ds$$

$z = t - s.$

$$= \hat{f}(x)\, \hat{g}(x)$$

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x t} f(x)\, dt \right) g(x)\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} g(x)\, e^{-2i\pi x t}\, dt \right) f(t)\, dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(t)\, f(t)\, dt$$

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x)\, g(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \hat{g}(x)\, dx$$

2- Formule d'inversion de Fourier:

$$F : L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow C_0(\mathbb{R})$$

$$Ff(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-2i\pi x t}\, dt.$$

F injective ? où..

Théorème :

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ alors

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi x t} \hat{f}(t)\, dt$$

pour presque tout $x \in \mathbb{R}$

$\hat{\hat{f}}(-x)$

Em particulier, Cette égalité est vrai . em tout pt x où f est cste

Remarque: Injectivité de F offerte.

Pour La preuve de théorème, om introduit 2 fcts auxiliaires.

$$H_\lambda(t) = e^{-\lambda|t|} \quad , \lambda > 0 \; , t \in \mathbb{R}$$

$$h_\lambda(x) = \hat{H}_\lambda(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{+2i\pi x t} \cdot e^{-\lambda|t|}\, dt$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}} \cos(2\pi . x . t)\, e^{-i\lambda|t|}\, dt \right)$$

Exercice :

- $h_\lambda(x) = \dfrac{2\lambda}{4\pi^2 x^2 + \lambda^2}$

- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} h_\lambda(x) \, dx = 1$

$$\int_0^{\infty} e^{-(\lambda + 2i\pi x)t}\, dt = \frac{1}{\lambda + 2i\pi x}$$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{(-\lambda + 2i\pi x)t} = \frac{-1}{-\lambda + 2i\pi x}$$

$$\frac{1}{\lambda + 2i\pi x} + \frac{1}{\lambda - 2i\pi x} = \frac{2\lambda}{\lambda^2 + 4\pi^2 x^2}$$

Proposition :

Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, oma :

$$(f * h_\lambda)(x) = \int_{\mathbb{R}} H_\lambda(t)\, \hat{f}(t)\, e^{2i\pi x t}\, dt$$

Preuve :

$$(f * h_\lambda)(x) = \int_{\mathbb{R}} h_\lambda(t)\, f(x-t)\, dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi t s} . e^{-\lambda|s|}\, ds \right) . f(x-t)\, dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda|s|} \int_{\mathbb{R}} f(z) .$$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda|s|} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} f(x-t)\, e^{2i\pi s t}\, dt \right)}_{\hat{f}(s)\; e^{2i\pi x s}} ds$$

$$\int_{\mathbb{R}} f(\underbrace{x-t}_{z})\, e^{-2i\pi s(\underbrace{x-t}_{z})}\, e^{2i\pi x s}$$

Proposition :

Pour $f \in L^\infty(\mathbb{R})$, cont au point $x \in \mathbb{R}$.

om a $\displaystyle\lim_{\lambda \to 0} (f * h_\lambda)(x) = f(x)$

$$(f * h_\lambda)(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\, h_\lambda(t)\, dt - \int_{\mathbb{R}} f(x)\, h_\lambda(t)\, dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} (f(x-t) - f(x))\, h_\lambda(t)\, dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} (f(x-t) - f(x)) \frac{2\lambda}{4\pi^2 t^2 + \lambda^2}\, dt$$

$t = \lambda s$

$$= \int_{\mathbb{R}} (f(x-\lambda s) - f(x)) \frac{2}{4\pi^2 s^2 + 1}\, ds$$

Proposition :

Si $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$

alors $\lim\limits_{\lambda \to 0} \| f * h_\lambda - f \|_{L^p} = 0$

$(f * h_\lambda)(x) - f(x)$

$$= \int_{\mathbb{R}} (f(x-t) - f(x))^{1/p} h_\lambda(t) h(t)^{1/p}\, dt$$

$|(f * h_\lambda)(t) - f(x)|$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-t) - f(x)|^p h_\lambda(t)\, dt\right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}} h_\lambda(t)\, dt\right)^{1/p'}$$

$$|(f * h_\lambda)(x) - f(x)|^p \leq \int |f(x-t) - f(x)|^p h_\lambda(t)\, dt$$

$$\int_{\mathbb{R}} |(f * h_\lambda)(x) - f(x)|^p\, dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(x-t) - f(t)|^p h_\lambda(t)\, dt\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-t) - f(t)|^p dx\right)$$

$g(t) = \| f(x-t) - f(t) \|^p_{L^p_x}$

$t \longmapsto \| f(x-t) - f(t) \|_{L^p_x}$

$$|(f * h_\lambda)(x) - f(x)|^p \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x-t) - f(x)|^p h_\lambda(t)\, dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-t) - f(t)|^p dt\right) h_\lambda(t)\, dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} g(0-t)\, h_\lambda(t)\, dt - \underset{\substack{\downarrow \\ g(0)=0}}{(g * h_\lambda)(0)}$$

$t \longmapsto \| f(x-t) - f(t) \|_{L^p_x}$ est continue.

Fin de la preuve de la formule d'inversion

Si $f \in L^1$ et $\hat{f} \in L^1$ alors

$$f(x) = \int e^{2i\pi x t} \hat{f}(t)\, dt \qquad pp\ x$$

$$\lim_{\lambda \to 0} (f * h_\lambda)(x) = \lim_{\lambda \to 0} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{H_\lambda(t)}_{e^{-\lambda(t)}} \hat{f}(t) e^{2i\pi x t}\, dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t)\, e^{2i\pi x t}\, dt$$

$\lim\limits_{\lambda \to 0} \| f * h_\lambda - f \|_{L^1}$

$f * h_\lambda \xrightarrow[L^1]{} f$

$\Rightarrow \exists \lambda_h \to 0$ tq $f * h_{\lambda_h} \to f$, L^1

$\Rightarrow f * h_{\lambda_h} \longrightarrow f$, pp $x \in \mathbb{R}$

donc $f(x) = (h_{\lambda_h} * f)(x)$

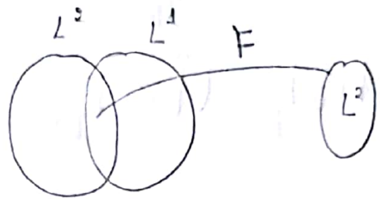
$\lim\limits_{\lambda_h \to} \int \hat{f}(t)\, e^{2i\pi x t}\, dt$, pp $x \in \mathbb{R}$.

3. La transformation de Fourier-Plancherel:

Théorème:

Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ alors $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$

et $\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2}$.



preuve:

on définit la fonction $\tilde{f}$ par:

$$\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)} \text{ et on pose}$$

$$g(x) = f * \tilde{f}$$

$$\int |f(-x)|^2 \, dx = \|f\|_{L^2}^2$$

$\tilde{f} \in L^1 \cap L^2$.

$$g \in L^1 * L^2 \hookrightarrow L^2$$

$$g \in L^1 * L^1 \hookrightarrow L^1$$

$$g \in L^2 * L^2 \hookrightarrow C_b^0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ |g(x)| \leq \|f\|_{L^2} \cdot \|\tilde{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}^2$$

$$* \ \hat{g}(x) = \hat{f} \cdot \hat{\tilde{f}} = |\hat{f}(x)|^2$$

en effet:

$$\hat{\tilde{f}}(n) = \int \overline{f(-t) \cdot e^{2it\pi}} \, dt = \overline{\hat{f}(n)}$$

D'autre part:

$$(g * h_\lambda)(0) = \int_{\mathbb{R}} H_\lambda(t) \hat{g}(t) \, dt \quad \text{(prop 1)}$$

$$[g * h_\lambda](0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda|t|} \hat{g}(t) \, dt = \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda|t|} |\hat{f}(t)|^2 \, dt$$

$$[g * h_\lambda](0) \xrightarrow{\text{(prop 2)}} g(0)$$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda|t|} |\hat{f}(t)|^2 \, dt \xrightarrow{\lambda \to 0^+} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(t)|^2 \, dt$$

$$\int_{\mathbb{R}} f(-y) \overline{f(-y)} \, dy = \int_{\mathbb{R}} |f(-y)|^2 \, dy$$

$$= \|f\|_{L^2}^2$$

Rappel: (Exercice)

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$f(kx) = k f(x), \quad x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$$

$$x = \frac{y}{k}$$

$$f\left(\frac{y}{k}\right) = \frac{1}{k} f(y)$$

$$f\left(\frac{p}{q} x\right) = \frac{p}{q} f(x)$$

$$f(\alpha x) = \alpha f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}, \forall \alpha \in \mathbb{Q}$$

$$f(\alpha) = f(1) \alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{Q}$$

$$\alpha_n \longrightarrow x$$

$$f(x) = \lim f(\alpha_n) = \lim \alpha_n f(1)$$

$$= f(1) . x$$

Théorème:

La transformation de Fourier définie sur $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ s'étend en une application linéaire de

$L^2(\mathbb{R})$ ds lui même qui préserve la norme, appelée transformation de Fourier - Plancherel.

En continuant à noter de la même façon cette extension, on a pour $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2}$

Preuve:

$L^1 \cap L^2$ est dense ds $L^2(\mathbb{R})$

$\to \exists f \longrightarrow f$ ds L^2

$\to \|f_k - f\| \xrightarrow[k \to 0]{} 0$

$\to f_k$ est de Cauchy ds L^2

$\to \hat{f}_k$ est de Cauchy ds L^2

$\to$ on pose $\hat{f} = \lim_{k \to \infty} \hat{f}_k$ | cette limite a un sens

$L^1 \cap L^2 \longrightarrow f_k \xrightarrow[L^2]{} f$

$L^1 \cap L^2 \longrightarrow g_k \longrightarrow g$.

L^2

$\wedge$

$\|\hat{g}_k - \hat{f}_k\| = \|g_k - f_k\|_{L^2}$

$= \|g_k - f_k\| \leqslant \|g_k - f\|$

$+ \| \quad - f_k\| \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$

$f \in L^1(\mathbb{R}) \to \hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2i\pi x t} dt$

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, cette formule n'est plus vraie

Propriétés:

$f, g \in L^2(\mathbb{R})$

1. $\int_{\mathbb{R}} f(x) \bar{g}(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) \overline{\hat{g}(x)} dx$

$(f, g)_{L^2} = (\hat{f}, \hat{g})_{L^2}$

2. Formule de multiplication ds $L^2(\mathbb{R})$

Exercice:

Sur un Hilbert réel:

$(a|b) = \frac{1}{4}\left[\|a+b\|^2 - \|a-b\|^2\right]$

$(f|g) = \frac{1}{4}\left[\|\widehat{f+g}\|^2 - \|\hat{f}-\hat{g}\|^2\right]$

$= (\tilde{f} | \tilde{g})$

$f_k \in L^1 \cap L^2 \longrightarrow f \quad L^2$

$g_k \in L^1 \cap L^2 \longrightarrow g \quad L^2$

$\|f\hat{g} - f_k \hat{g}_k\|_{L^1} \longrightarrow 0$

$\int f\hat{g} = \lim \int f_k \hat{g}_k = \lim \int \hat{f}_k g_k$

$= \int \hat{f} g$.

$f\hat{g} - f_k \hat{g}_k = f(\hat{g} - \hat{g}_k) + (f - f_k)\hat{g}_k$

$\to \|f\hat{g} - f_k \hat{g}_k\|_{L^1} \leqslant \| \quad \|_{L^1} + \| \quad \|_{L^1}$

$\leqslant \|f\|_{L^2} + \|\hat{g} - \hat{g}_k\|_{L^2}$

$+ \|\hat{g}_k\|_{L^2} + \|f - f_k\|_{L^2}$

alors $\|f\hat{g} - f_k \hat{g}_k\| \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$

Corollaire:

La transformation de Fourier-Plancherel est un isomorphisme de $L^2(\mathbb{R})$

⚠ $F : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$

$u \longmapsto F_u = \hat{u}$

Pour $u \in L^2(\mathbb{R})$

$\hat{u}(\xi) = F_u(\xi) \cancel{= \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x \xi} u(x)\,dx}$

Formule Fausse en générale.

Preuve,

Pour $u \in L^2(\mathbb{R})$, $\|u\|_{L^2} = \|\hat{u}\|_{L^2}$

il suffit de montrer que $F : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ est surjective c.à.d $F(L^2(\mathbb{R})) = \operatorname{Im} F = L^2(\mathbb{R})$

$L^2(\mathbb{R})$ étant un espace d'Hilbert, il suffit de montrer que :

$$(\operatorname{Im} F)^{\perp} = \{0\}$$

Soit $f \in (\operatorname{Im} F)^{\perp}$ i.e. $\forall (f, \hat{g})_{L^2} = 0$

$\forall g \in L^2(\mathbb{R})$ $\quad \operatorname{Im} F = \{\hat{g},\ g \in L^2(\mathbb{R})\}$

$$0 = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\hat{g}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x)\,g(x)\,dx$$

$\forall g \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f} \equiv 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$

4- L'espace de Schwartz:

$F(L^1) \subset C_b$

$F(L^2) \subset L^2$

$u \in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$

$$\hat{u} = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x t}\, u(t)\,dt$$

ne peut pas être ds C_c^{∞}

Lemme :

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ tq $x \longmapsto x f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ alors la $\hat{f}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\frac{d\hat{f}}{dx}(x) = -2i\pi \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x t}\, t f(t)\,dt$$

$$\hat{f}'(x) = -2i\pi\, \widehat{t f(t)}\,(x)$$

Preuve :

Dériver sur $\int$

Proposition:

Si $f \in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$ alors sa transformée de Fourier $\hat{f}$ est analytique sur $\mathbb{R}$

Remarque : (Une fct analytique) sur $\mathbb{R}$

$\forall x_0 \in \mathbb{R}$, $\exists R > 0$ tq $|x - x_0| < R$ tq

$$g(x) = \sum_{k \geq 0} a_k (x - x_0)^k.$$

Exemple:

$$\sin(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \ ; \ k = \infty$$

* $\operatorname{Supp} f \subset [-R, R]$

$$\hat{f}(x) = \int_{-R}^{R} f(t)\, e^{-2i\pi x t}\,dt$$

$$= \int_{-R}^{R} f(t) \Big(\sum_{k \geq 0} \underbrace{\frac{(-2i\pi x t)^k}{k!}}_{\leq \frac{2\pi |x|^k t^k}{k!}} \Big)\,dt$$

$$\rightarrow \sum_{k \geq 0} \frac{(-2i\pi)^k}{k!} \left[\int_{-R}^{R} t^k f(t)\,dt \right] x^k$$

$$= \sum_{k \geq 0} a_k x^k \quad \text{avec } a_k = \frac{(-2i\pi)^k}{k!} \int_{-R}^{R} t^k f(t)\,dt$$

$$\rightarrow |a_k| \leq \frac{(2\pi)^k}{k!} R^k \|f\|_{\infty} \cdot 2R$$

Définition:

$S(\mathbb{R})$ un espace de Schwartz.

$u \in S(\mathbb{R})$, si u est de C^∞

et $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall m \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} (1+|x|^k)|f^{(m)}(x)| < \infty$$

$m_1 = 0$, $k = 0$ f bornée

$m = 0$, $k = 1$ $f_1 x f$ bornée

$m = 0$, $k \in \mathbb{N}$ $f_1 x f_1 x \dots x f$ bornée

$$|f(x)| \leq \frac{C_k}{|P_k(x)|}$$

$$|f'(x)| \leq \frac{C_2}{1+x^2}$$

Exemple.

1. $C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset S(\mathbb{R})$
2. $f(x) = e^{-x^2}$; $f \in S(\mathbb{R})$

Remarques.

1. $F(C_0^\infty(\mathbb{R})) \subset S(\mathbb{R})$
2. $C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset S(\mathbb{R})' \subset L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$

Preuve:

1. $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} f \subset [-A, A]$

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-A}^{A} e^{-2i\pi x\xi} f(x)\, dx$$

$$|\hat{f}(\xi)| \leq 2A \|f\|_\infty.$$

$$\xi \hat{f}(\xi) = \int_{-A}^{A} \xi\, e^{-2i\pi x\xi} f(x)\, dx$$

$$= \frac{-1}{2i\pi} \int (e^{\ })' f$$

$$= -\frac{1}{2i\pi} \int (\bar{e}) f' = \frac{1}{2i\pi} \hat{f'}(\xi)$$

$$\xi \hat{f} = \frac{1}{2i\pi} \hat{f'}$$

$$\xi^2 \hat{f}(\xi) = \xi(\xi \hat{f}(\xi))$$

$$= \xi \frac{1}{2i\pi} \hat{f'}$$

$$= \frac{1}{(2i\pi)^2} \hat{f''}$$

$$|\xi \hat{f}(\xi)| \leq \frac{A}{\pi} \|f'\|_\infty$$

$$|\hat{f}(\xi)| \leq 2A \|f\|_\infty$$

$$|\xi^k \hat{f}(\xi)| = \left|\frac{1}{(2i\pi)^k}\right| |\hat{f}^{(k)}(\xi)|$$

$$\leq \frac{1}{(2\pi)^k} \cdot 2A \|f^{(k)}\|_\infty$$

$$\frac{d}{d\xi} \hat{f}(\xi) = -2i\pi \int_{-A}^{A} e^{-2i\pi x\xi} x f(x)\, dx$$

$$\frac{d}{d\xi} \hat{f}(\xi) = -2i\pi\, \widehat{x f}(\xi)$$

$$\left|\frac{d}{d\xi} \hat{f}(\xi)\right| \leq 2\pi \cdot 2A \|xf\|_\infty$$

$$\frac{d^{(m)}}{d\xi^m} \hat{f}(\xi) = (-2i\pi)^m \widehat{x^m f}(\xi)$$

3. Si $f, g \in S(\mathbb{R})$ alors $f.g \in S(\mathbb{R})$

$$(f.g)^{(k)} = \sum_{p=0}^{k} C_n^p f^{(k-p)} g^{(p)}$$

4. Si g une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$, à croissance polynomiale ainsi que toutes ses dérivées alors

$$g.f \in S(\mathbb{R}), \forall f \in S(\mathbb{R})$$

Théorème:

La transformation de Fourier est une bijection de $S(\mathbb{R})$ ds lui même.

$$S(\mathbb{R}) \xleftrightarrow{F} S(\mathbb{R})$$

$$x^m \frac{d^k}{dx^k} \hat{f}(x) = x^m \left(\widehat{(-2i\pi t)^k f(t)}(x) \right)$$

$$= (2i\pi)^{-m} \left(\widehat{\frac{d^m}{dt^m} (-2i\pi t)^k f(t)} \right)(x)$$

Exercice :

$S(\mathbb{R})$ est stable pour la convolution

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\, g(y)\, dy$$

$S(\mathbb{R})$ est continue ds L^1 $\Rightarrow f * g$ définie
$S(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$

Par T.C.D

$$(f*g)^{(k)}(x) = \int_{\mathbb{R}} f^{(k)}(x-y)\, g(y)\, dy$$

$$|x^m (f*g)^{(k)}(x)| \leq ?$$

$$x(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}} x\, f(x-y)\, g(y)\, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} (x-y) f(x-y)\, g(y)\, dy + \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\, y\, g(y)\, dy.$$

$$= \int (yf)(x-y)\, g(y)\, dy + \int f(x-y)\, y\, g(y)\, dy$$

$f, g \in S(\mathbb{R})$

$$F(f*g) = F_f \cdot F_g \in S(\mathbb{R})$$

$$f*g = F^{-1}(F(f*g)) = F^{-1}(\underbrace{F_f F_g}_{\in S(\mathbb{R})})$$
$\in S(\mathbb{R})$,

Passage à $\mathbb{R}^n$:

$L^1(\mathbb{R}^n)$, $L^2(\mathbb{R})$

$u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $F_u(\xi) = \hat{u}(\xi)$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2i\pi x\xi}\, u(x)\, dx$$

$x = (x_1, \dots, x_n)$

$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$

$x.\xi = x_1.\xi_1 + \dots + x_n \xi_n$

$|\xi| = |\xi_1| + \dots + |\xi_n|$

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$

$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$

$$\partial_x^\alpha u = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} u.$$

$n = 2$ $\quad \partial_x^{(2,1)} \longrightarrow \partial_x^3$

$|\alpha| = 3$

$$\frac{\partial^3}{\partial_{x_1}^2 \partial_{x_2}}$$

$S(\mathbb{R}^n)$:

$u \in S(\mathbb{R}^n)$ si $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

et $\sup_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^m)\, |\partial_x^\alpha u(x)| < \infty$

$\forall m \in \mathbb{N}$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$.

Application : Principale d'incertitude.

Soit $f \in S(\mathbb{R})$, $\|f\|_{L^2} = 1$

$$D_f^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2\, dx = \|x f\|_{L^2}^2$$

on a : $D_f . D_{\hat f} \geq \frac{1}{4\pi}$

$D_f = \| x f \|_{L^2}$.

$$D^2_{\hat f} = \int_{\mathbb{R}} x^2 . |\hat f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |x \hat f(x)|^2 dx$$

$$x \hat f(x) = (2i\pi)^{-1} \widehat{\left(\frac{d}{dt} f(t) \right)} (x)$$

$$= \frac{1}{2i\pi} \hat{f'}(x)$$

$$D^2_{\hat f} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} | \hat{f'}(x) |^2 dx = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 dx$$

$$D^2_{\hat f} = \frac{1}{4\pi^2} \| f' \|^2_{L^2}$$

$$D_f . D_{\hat f} = \frac{1}{2\pi} \| x f \|_{L^2} \| f' \|_{L^2} \geq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\mathbb{R}} x f(x) \overline{f'(x)} dx \right|$$

$$\geq \frac{1}{2\pi} \left| Re \int_{\mathbb{R}} x f(x) \overline{f'(x)} dx \right|$$

$$\int_{\mathbb{R}} x f(x) \overline{f'(x)} = [x f(x) f'(x)]_{\mathbb{R}} - \int (x f(x))' \overline{f(x)} dx$$

$$= - \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{f(x)} - \int_{\mathbb{R}} x f'(x) . \overline{f(x)}$$

$$\Rightarrow D_f . D_{\hat f} \geq \frac{1}{4\pi} \| f \|^2_{L^2} \quad = 1 \text{ (par hyp)}$$

$$\geq \frac{1}{4\pi}$$

Chapitre 2

TRANSFORMATION DE FOURIER

On introduit ici la transformée de Fourier d'une fonction intégrable avec ses principales propriétés. Puis on présentera la transformation de Fourier-Plancherel. Pour simplifier l'exposé, on travaillera dans $\mathbb{R}$; on expliquera ensuite les changements mineurs qui surviennent quand on passe à $\mathbb{R}^n$.

1. Généralités

Définition: La transformée de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ est définie pour $x \in \mathbb{R}$ par

$$\widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2i\pi xt} dt$$

On utilisera indifféremment les notations $\widehat{f}$ ou $\mathcal{F}f$.

Exemples

1. $f(t) = 1_{|t| \leq R} \Longrightarrow \widehat{f}(x) = \frac{sin(2\pi Rx)}{\pi x}$.
2. $f(t) = e^{-a|t|}, \quad a > 0 \Longrightarrow \widehat{f}(x) = \frac{2a}{a^2+4\pi^2x^2}$.
3. $f(t) = e^{-\pi t^2} \Longrightarrow \widehat{f}(x) = e^{-\pi x^2}$.

Premières propriétés

Dans ce qui suit, $f, g \in L^1(\mathbb{R})$.

1. La transformation de Fourier est linéaire c-a-d: $\widehat{\alpha f + g} = \alpha\widehat{f} + \widehat{g}$.
2. Transformée d'une translatée : Si on pose $g(t) = f(t-a)$, $a \in \mathbb{R}$, alors
$$\widehat{g}(x) = e^{-2i\pi ax}\widehat{f}(x).$$
3. Changement d'échelle : Pour $\omega > 0$, on note $g(t) = f(t/\omega)$. On a alors $\widehat{g}(x) = \omega\widehat{f}(\omega x)$.

Lemme de Riemann-Lebesgue

Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, la transformée de Fourier $\widehat{f}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et tend vers zéro à l'infini. De plus,

$$\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1.$$

Remarque: $\widehat{f}$ est donc bornée et uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
En outre, si on note par $C_0(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et tendant vers zéro à l'infini, on a alors l'injection continue

$$\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R})) \hookrightarrow C_0(\mathbb{R}).$$

Preuve du Lemme

Tout d'abord, la continuité est claire en vertu du théorème de convergence dominée. De même, la majoration de la borne supérieure est immédiate. D'autre part, par densité de $C_0^\infty(\mathbb{R})$ dans $L^1(\mathbb{R})$, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une fonction $g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\|\ f - g\|_1 \leq \epsilon/2$. Maintenant, par intégration par parties, on peut écrire pour $x \neq 0$,

$$\widehat{g}(x) = \frac{1}{2i\pi x}\widehat{g'}(x),$$

ce qui entraine

$$|\widehat{g}(x)| \leq \frac{1}{2\pi|x|}\|\ g'\|_1.$$

On en déduit alors

$$|\ \widehat{f}(x)| \leq |\ \widehat{f}(x) - \widehat{g}(x)| + |\widehat{g}(x)| \leq \|\ f - g\|_1 + \frac{1}{2\pi|x|}\|\ g'\|_1 \leq \epsilon$$

pour $|x| \geq \frac{1}{\pi\epsilon}\|\ g'\|_1$.

Autres propriétés
On travaille toujours avec $f, g \in L^1(\mathbb{R})$.

1. Transformée d'une convolée: $\widehat{f * g} = \widehat{f}.\widehat{g}$
2. Formule de multiplication.

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\widehat{g}(x)dx$$

Remarque: Bien noter que chacun des membres de ces deux égalités est bien défini.

2. Formule d'inversion de Fourier

Dans cette section nous allons démontrer le résultat suivant :

Théorème: Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ est telle que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t)e^{2i\pi xt}dt = f(x)$$

pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. En particulier, cette égalité est vraie en tout point où f est continue.

Corollaire : Injectivité de la transformation de Fourier
Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ est telle que $\widehat{f}(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors f est nulle p.p. (c-a-d nulle dans $L^1(\mathbb{R})$).

Pour la preuve du théorème on fait appel à une fonction auxiliaire.
Posons pour $t, x \in \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$:

$$H_\lambda(t) = e^{-\lambda|t|} \qquad \text{et} \qquad h_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda|t|}e^{2i\pi xt}dt = \widehat{H_\lambda}(x)$$

Exercice : Vérifier que $h_\lambda(x) = \frac{2\lambda}{4\pi^2x^2+\lambda^2}$ et que $\int_{\mathbb{R}} h_\lambda(t)dt = 1$.

Proposition 1 : Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors

$$(f * h_\lambda)(x) = \int_{\mathbb{R}} H_\lambda(t)\widehat{f}(t)e^{2i\pi xt}dt$$

Preuve : C'est une application directe du théorème de Fubini.

$$\begin{cases} (f * h_\lambda)(x) = \int_{\mathbb{R}} h_\lambda(t)f(x-t)dt = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda|s|}e^{2i\pi ts}ds\right)dt \\ \quad = \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda|s|}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x-t)e^{2i\pi ts}dt\right)ds = \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda|s|}\widehat{f}(s)e^{2i\pi xs}ds \end{cases}$$

Proposition 2 : Si $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ est continue en un point x alors

$$\lim_{\lambda \to 0}(f * h_\lambda)(x) = f(x).$$

Preuve : Compte tenu du fait que $\int_{\mathbb{R}} h_\lambda(t)dt = 1$, on obtient

$$\begin{cases} (f * h_\lambda)(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}} (f(x-y) - f(x))\, h_\lambda(y)dy = \int_{\mathbb{R}} (f(x-y) - f(x))\, \frac{2\lambda}{4\pi^2y^2+\lambda^2}dy \\ \quad = \int_{\mathbb{R}} (f(x-\lambda z) - f(x))\, \frac{2}{4\pi^2z^2+1}dz \end{cases}$$

Et on conclut par convergence dominée.

Proposition 3 : Si $f \in L^p(\mathbb{R})$ avec $1 \leq p < \infty$, alors

$$\lim_{\lambda \to 0} ||(f * h_\lambda) - f||_{L^p} = 0$$

On utilisera ce résultat surtout pour $p = 1$ ou 2.

Preuve : Comme dans la preuve de la proposition précédente, on a

$$(f * h_\lambda)(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}} (f(x-y) - f(x))\, h_\lambda(y)dy = \int_{\mathbb{R}} (f(x-y) - f(x))\, h_\lambda^{1/p}(y)h_\lambda^{1/p'}(y)dy$$

L'inégalité de Holder conduit alors à :

$$|(f * h_\lambda)(x) - f(x)|^p \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)|^p h_\lambda(y)dy.$$

En intégrant en x et en appliquant le théorème de Fubini, on obtient

$$||(f * h_\lambda)(x) - f(x)||^p \leq \int_{\mathbb{R}} g(y)h_\lambda(y)dy,$$

où on a noté $g(y) = ||f(x-y) - f(x)||^p_{L^p_x}$. Cette fonction est continue bornée (cf. Chapitre 1) et la Proposition 2 implique alors

$$\lim_{\lambda \to 0} \int_{\mathbb{R}} g(y)h_\lambda(y)dy = g(0) = 0,$$

ce qui achève la preuve.

Preuve de la formule d'inversion
Tout d'abord, la fonction $\widehat{f}$ étant intégrable, il est clair que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{\lambda \to 0}(f * h_\lambda)(x) = \lim_{\lambda \to 0} \int_{\mathbb{R}} H_\lambda(t)\widehat{f}(t)e^{2i\pi xt}dt = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t)e^{2i\pi xt}dt$$

en vertu du théorème de convergence dominée. D'autre part, la Proposition 3 implique l'existence d'une suite $\lambda_k \to 0^+$ telle que $(f * h_{\lambda_k})(x) \to f(x)$, p.p tout $x \in \mathbb{R}$. Cela conclut la preuve.

3. La transformation de Fourier-Plancherel

Théorème : Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ alors $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ et $|| f||_{L^2} = || \widehat{f}||_{L^2}$.

Preuve : Posons $\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$. D'après les résultats du chapitre précédent, la fonction $g = f * \tilde{f}$ est alors dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$; elle est aussi continue, bornée et vérifie :

$$|g(x)| = |\int_{\mathbb{R}} f(x-y)\overline{f(-y)}dy| \leq || f||_{L^2}^2$$

D'autre part, la Proposition 1 permet d' écrire

$$(g * h_\lambda)(0) = \int_{\mathbb{R}} H_\lambda(t)\widehat{g}(t)dt.$$

Comme $\widehat{g} = |\widehat{f}|^2 \geq 0$, le théorème de convergence monotone appliqué à cette intégrale donne

$$\lim_{\lambda \to 0} \int_{\mathbb{R}} H_\lambda(t)\widehat{g}(t)dt = \int_{\mathbb{R}} \widehat{g}(t)dt = || \widehat{f}||_{L^2}^2.$$

Enfin, par continuité de $\widehat{g}(t)$, on obtient grâce à la Proposition 2,

$$\lim_{\lambda \to 0}(g * h_\lambda)(0) = g(0) = || f||_{L^2}^2.$$

Cela prouve que $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ et l'égalité des normes: $|| f||_{L^2} = || \widehat{f}||_{L^2}$.

Nous allons à présent appliquer ce résultat pour introduire la transformation de Fourier-Plancherel. On rappelle que l'espace $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ car $C_c(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

Théorème : La transformation de Fourier définie sur $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ s'étend en une application linéaire de $L^2(\mathbb{R})$ dans lui même, qui préserve la norme, appelée transformation de Fourier-Plancherel .
En continuant à noter de la même façon cette extension, on obtient pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\quad || f||_{L^2} = || \widehat{f}||_{L^2}$. C'est l'identité de Plancherel.

Preuve : On définit cette extension en posant pour $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\widehat{f} = lim \widehat{f_k}$ où f_k est une suite de $C_c(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ qui converge vers f. On a alors trivialement

$$|| \widehat{f}||_{L^2}^2 = \lim || \widehat{f_k}||_{L^2}^2 = \lim ||f_k||_{L^2}^2 = ||f||_{L^2}^2$$

De plus, on vérifie facilement que cette extension est bien définie, c-a-d que la limite ne dépend pas de la suite choisie.

Propriétés
Pour $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, on a les propriétés suivantes :

1.
$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\overline{g}(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x)\,\overline{\widehat{g}}dx$$

2. Formule de multiplication dans L^2 :
$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\widehat{g}(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x)g(x)dx$$

Preuve : On établit aisément le 1) à l'aide de l'identité de polarisation du produit scalaire L^2. D'autre part, si f_k et g_k sont deux suites de $C_c(\mathbb{R})$ convergeant respectivement vers f et g dans $L^2(\mathbb{R})$, on a

$$|| f\widehat{g} - f_k\widehat{g_k}||_{L^1} \leq || f\widehat{g} - f\widehat{g_k}||_{L^1} + || f\widehat{g_k} - f_k\widehat{g_k}||_{L^1} \leq || f||_{L^2}|| \widehat{g} - \widehat{g_k}||_{L^2} + || f - f_k||_{L^2}||\widehat{g_k}||_{L^2}$$

quantité qui tend vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$. Par suite,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\widehat{g}(x)dx = \lim \int_{\mathbb{R}} f_k(x)\widehat{g_k}(x)dx = \lim \int_{\mathbb{R}} \widehat{f_k}(x)g_k(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x)g(x)dx.$$

Corollaire : La transformation de Fourier-Plancherel est un isomorphisme de $L^2(\mathbb{R})$ dans lui même.

Preuve : On doit juste prouver la surjectivité de cette application. Pour cela, compte tenu du fait que $L^2(\mathbb{R})$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $(f,g)_2 = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\overline{g}(x)dx$, il suffit de montrer que le sous espace $(\mathcal{F}(L^2))^{\perp}$ est réduit au vecteur nul $\{0\}$.
En effet, si $g \in (\mathcal{F}(L^2))^{\perp}$, alors

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\widehat{g}(x)dx = 0\,, \qquad \forall f \in L^2$$

Cela entraine évidemment $\widehat{g} = 0$ et par suite $g = 0$ car $\mathcal{F}$ est injective (isométrie).

4. L'espace de Schwartz

Lemme : Si les fonctions f et $x \to x.f(x)$ appartiennent à $L^1(\mathbb{R})$, alors la fonction $\widehat{f}$ est continûment dérivable et on a

$$\frac{d\widehat{f}}{dx}(x) = -2i\pi \int_{\mathbb{R}} tf(t)e^{-2i\pi xt}dt.$$

Autrement dit

$$\frac{d\widehat{f}}{dx}(x) = -2i\pi\mathcal{F}(tf(t))(x).$$

Preuve: Immédiate grâce à une dérivation sous le signe $\int$.

Exercice: Examiner le cas où f et $x \to x^k.f(x)$ appartiennent à $L^1(\mathbb{R})$, $k \geq 0$. Montrer en particulier que $\mathcal{F}(C_0^\infty(\mathbb{R})) \subset C^\infty(\mathbb{R})$.

Proposition : Si $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ alors sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ est analytique sur $\mathbb{R}$.

Preuve: Soit $R > 0$ tel que supp$f \subset [-R, R]$. Grâce à la convergence normale de la série exponentielle sur tout compact, on peut écrire

$$\widehat{f}(x) = \int_{-R}^{R} f(t)e^{-2i\pi xt}dt = \int_{-R}^{R} f(t)\sum_k 1/k!(-2i\pi xt)^k dt = \sum_k 1/k! \left(\int_{-R}^{R} f(t)(-2i\pi t)^k t dt\right) x^k = \sum_k a_k x^k$$

Et le rayon de convergence de cette série entière est clairement infini car $|a_k| \leq 2R/k! ||f||_\infty (2\pi R)^k$.

Corollaire : La seule fonction qui est C^∞ à support compact ainsi que sa transformée de Fourier est la fonction nulle.

Cela résulte évidemment du théorème de prolongement analytique.

Définition : L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est constitué des fonctions $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ telles que

$$\sup_{\mathbb{R}}(1 + |x|^k)|f^{(m)}(x)| < \infty, \qquad \forall\, k, m \in \mathbb{N}.$$

C'est l'espace des fonctions C^∞ à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées.

Par exemple, la fonction f définie par $f(x) = e^{-x^2}$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Remarques

1. $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est un espace qui contient $C_0^\infty(\mathbb{R})$ ainsi que $\mathcal{F}(C_0^\infty(\mathbb{R}))$.
2. $C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$, $\qquad 1 \leq p \leq \infty$.
3. On peut facilement vérifier que si $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ alors il en est de même pour le produit fg. On utilisera pour cela la formule de Leibniz

$$(f.g)^{(k)} = \sum_{0 \leq j \leq k} C_k^j f^{(j)} g^{(k-j)}.$$

4. $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est stable pour multiplication par les fonctions polynomiales.

Théorème : La transformation de Fourier est une bijection de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans lui même.

Preuve : Il suffit de remarquer que pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, et $m, k \in \mathbb{N}$, on a

$$x^m \frac{d^k}{dx^k}(\mathcal{F}f)(x) = x^m(\mathcal{F}((-2i\pi t)^k f(t))(x) = (2i\pi)^{-m}\mathcal{F}\left(\frac{d^m}{dt^m}(-2i\pi t)^k f(t)\right)(x).$$

Cette fonction est clairement majorée par une constante $C_{m,k} > 0$.

Exercice : Montrer que si $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ alors il en est de même pour leur convolée $f * g$.

Passage à $\mathbb{R}^n$

On note par $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ le point courant de $\mathbb{R}^n$ et $x.y = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$ le produit scalaire usuel.

La transformée de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ est alors définie pour $x \in \mathbb{R}^n$ par

$$\widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-2i\pi x.y}dy$$

Toutes les propriétés de la transformation de Fourier sur $\mathbb{R}$ sont valables pour les fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$.

Notations

Pour $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ et un multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on note

- $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$, $\qquad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} ... x_n^{\alpha_n}$, $\qquad \alpha! = \alpha_1!\,\alpha_2!.......\alpha_n!$
- $\partial_x^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$

Définition : L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est constitué des fonctions $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ telles que

$$\sup_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^k)|\partial_x^\alpha f(x)| < \infty, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

Une application: $\boxed{\textbf{Le principe d'incertitude de Heisenberg}}$ (à voir)

Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ vérifiant $\|f\|_{L^2} = 1$. On pose $D_f^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2|f(x)|^2dx = \|xf\|_{L^2}^2$.
Alors

$$D_f D_{\widehat{f}} \geq 1/4\pi.$$

Preuve : Remarquons tout d'abord que $D_{\widehat{f}}^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2|\widehat{f}(x)|^2dx = 1/4\pi^2 \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f'}(x)|^2dx = 1/4\pi^2\|f'\|_{L^2}$.
En utilisant alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz et une intégration par parties, on peut écrire

$$D_f D_{\widehat{f}} = \frac{1}{2\pi}\|xf\|_{L^2}\|f'(x)\|_{L^2} \geq \frac{1}{2\pi}|\int_{\mathbb{R}} xf(x)\overline{f'(x)}dx| \geq \frac{1}{2\pi}|Re\int_{\mathbb{R}} xf(x)\overline{f'(x)}dx| \geq \frac{1}{4\pi}.$$