Faculté des Sciences de Tunis

Département de Mathématiques

2018-2019

M 1- MA : Analyse de Fourier et Distributions

Série 1

Exercice 1

Calculer les produits de convolution des fonctions suivantes:

1. $f(x) = \chi_{[0,1]}(x)$ et $g(x) = \frac{\chi_{[0,\infty[}(x)}{1+x}$.
2. $f(x) = g(x) = exp(-|x|)$.
3. $f(x) = \chi_{[0,\infty[}(x)$ et $g(x) = x\chi_{[0,\infty[}(x)$.

Exercice 2

Soit h une fonction de $L^1(\mathbb{R})$ qui vérifie $h * f = f$ pour toute $f \in L^1(\mathbb{R})$.

1. Pour $k \geq 1$, on définit la fonction $f_k(x) = exp(-k|x|)$. Montrer que $h * f_k$ est continue.

2. Montrer que $h * f_k(0) \longrightarrow 0$ quand $k \longrightarrow \infty$. Conclure.

Exercice 3

1. Soit $h \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq +\infty$. On sait que l'application T_h définie par $T_h(f) = f * h$ est linéaire et continue de $L^1(\mathbb{R}^n)$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, de norme $\|T_h\| \leq \|h\|_p$.
En testant T_h sur une suite régularisante, montrer que $\|T_h\| = \|h\|_p$.

2. Maintenant soit $p \in [0, +\infty[$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ une fonction positive. On sait que l'application T_g définie par $T_g(f) = f * g$ est linéaire et continue de $L^p(\mathbb{R}^n)$ dans lui même, de norme $\|T_g\| \leq \|g\|_1$.
En utilisant la suite $g_k(x) = \|g\|_1^{-1} k^n g(kx)$, montrer que $\|T_g\| = \|g\|_1$.

Exercice 4

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Déterminer l'adjoint de l'opérateur T_f défini sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ par $T_f(g) = f * g$.

Exercice 5

Soit $\alpha \in]0, 1[$ et g une fonction continue, bornée et holdérienne d'ordre α, cad qu' il existe $C > 0$ tel que

$$|g(x) - g(y)| \leq C|x - y|^{\alpha}, \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^n.$$

Montrer que si ρ_k est une approximation de l'identité et $g_k = g * \rho_k$ alors

$$\begin{cases} ||g - g_k||_\infty \leq Ck^{-\alpha}, \\ \\ ||\nabla_x g_k||_\infty \leq C'k\,||g||_\infty, \end{cases}$$

Interpréter ces inégalités.

Exercice 6

1. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Pour $h, x \in \mathbb{R}$, montrer l'égalité $\int_x^{x+h} f(t)dt = (f * \chi_{[-h,0]})(x)$.

2. On pose $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ et $G_h(x) = 1/h(F(x+h) - F(x))$. Montrer que G_h tend vers f dans $L^1(\mathbb{R})$ quand $h \longrightarrow 0$.

Interpréter ce résultat.

Exercice 7

On note E la fonction de $L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ définie par $E(x,y) = \frac{1}{x+iy}$ et P l'opérateur différentiel $P = \partial_x + i\partial_y$ (opérateur de Cauchy-Riemann).

1. Pour $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, montrer que

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} E(x,y)P\varphi(x,y)dxdy = -2\pi\varphi(0,0).$$

2. En déduire une solution de l'équation aux dérivées partielles $Pu = \varphi$.

Serie n° 1

Exercice 1 :

1. $f(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$, $g(x) = \dfrac{\mathbb{1}_{]0,\infty[}(x)}{1+x}$

$f * g$?

montrons que $f * g$ est bien définie alors :

- i) si f, g sont même parité alors $f * g$ est paire
- ii) Si f et g ne sont pas de même parité alors $f*g$ est impaire

f, g paire $\Rightarrow f*g(-x)$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(y) g(-x-y)\, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(-y) g(x+y)\, dy$$

$$\underset{y=-t=\varphi(t)}{=} \int_{\mathbb{R}} f(t) g(x-t)\, dt$$

$$= f * g(x)$$

$\mathrm{Supp}(f*g) \subset \overline{\mathrm{Supp}\, f + \mathrm{Supp}\, g}$

$\mathrm{Supp}\, f = \{x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) \neq 0\}$

$f \in L^p(\mathbb{R})$, $\forall\, 1 \leq p \leq \infty$;

$\|f\|_p = 1$, $\forall\, 1 \leq p \leq +\infty$.

1

$g \in L^\infty(\mathbb{R})$, $\|g\|_\infty = 1$ et $g \in L^p(\mathbb{R})$

$\Rightarrow f*g \in L^1 * L^\infty \subset \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$

$\in L^2(\mathbb{R}) * L^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$

$\|g\|_1 = \infty$ $(g \in \ell'_\infty)$

$\mathrm{Supp}(f*g) \subset \overline{\mathrm{Supp}\, f + \mathrm{Supp}\, g}$

$\subset \overline{[0,1] + [0,+\infty[}$

$= [0,+\infty[$

Pour $x \leq 0$ une $f*g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$

alors $f*g(0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0^- \\ x < 0}} f*g(x) = 0$

Pour $x > 0$

$$f*g(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+y}\, \mathbb{1}_{[0,\infty[}(y) . \mathbb{1}_{[0,1]}(x-y)\, dy$$

$\mathbb{1}_{[0,1]}(x-y) = 1 \Leftrightarrow 0 \leq x-y \leq 1$

$\Leftrightarrow x-1 \leq y \leq x$

$\Leftrightarrow \mathbb{1}_{[x-1,x]}(y) = 1$

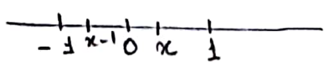
$$f*g(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+y}\, \mathbb{1}_{[0,\infty[}(y) . \mathbb{1}_{[x-1,x]}(y)\, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+y}\, \mathbb{1}_{[x-1,x]\cap[0,\infty[}(y)\, dy$$

1

1ᵉʳ Cas :

Si $0 \leq x \leq 1$,

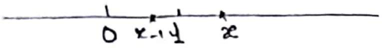


$[x-1, x] \cap [0,\infty[\ = [0,x]$

et $f*g(x) = \int_0^x \frac{1}{1+y}\, dy$

$= \log(1+x)$

• Si $x > 1$:



$[x-1, x] \cap [0,\infty[\ = [x-1,x]$

$f*g(x) = \int_{x-1}^x \frac{1}{1+y}\, dy$

$= \log(1+x) - \log(x)$

$f*g(x) = \log(1+x)\, 1_{[0,1]}(x) + \underbrace{(\log(\overbrace{1+x}^{x(1+\frac{1}{x})}) - \log(x))}_{\xrightarrow[x\to\infty]{} 0}\, 1_{]1,\infty[}(x)$

$\log(1+x) \underset{\infty}{\sim} X$

$L^1 * L^p \subset L^p$, $\|f*g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$

$L^1 * L^\infty \subset \mathcal{C}_b$, $\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$

$L^p * L^q \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, $\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$

Proposition:

$f \in L^1(\mathbb{R})$

$g \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R})$, $g, g', \dots, g^m$ existe

$f*g \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R})$

2- $f(x) = g(x) = e^{-|x|}$

$f*g$?

$\|f\|_\infty = 1$

$1 \leq p \leq \infty$

$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-p|x|}\, dx\right)^{1/p}$

$= \left(2\int_0^{+\infty} e^{-px}\, dx\right)^{1/p}$

$= \left(\frac{2}{p}\right)^{1/p} < \infty$

$\forall\, 1 \leq p \leq +\infty$

Définition:

A algèbre normée commutative

on dit que a_n est une approximation de l'identité si $(a_n)_n \subset A$

$\lim_{n\to\infty} a_n \times a = a$, $\forall a \in A$

$\|a_n \times a - a\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$f = g \in L^p(\mathbb{R})$, $\forall\, 1 \leq p \leq +\infty$

$\Rightarrow f*g$ est bien définie

f paire $\Rightarrow$ $f*f$ est paire

$f*f(0) = \|f\|_2^2 = 1$

Pour $x > 0$

$f*f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) f(x-y)\, dy$

$= \int_{\mathbb{R}} e^{-|y|} e^{-|x-y|}\, dy$.

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{y} e^{-(x-y)}\, dy + \int_{0}^{x} e^{-y} e^{-(x-y)}\, dy + \int_{x}^{\infty} e^{-y} e^{x-y}\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{2y-x}\, dy + \int_{0}^{x} e^{-x}\, dy + \int_{x}^{+\infty} e^{x-2y}\, dy$$

$$= e^{-x}\int_{-\infty}^{0} e^{2y}\, dy + x e^{-x} + e^{x}\int_{x}^{+\infty} e^{-2y}\, dy$$

$$= \frac{e^{-x}}{2} + x e^{-x} + \frac{e^{-x}}{2} = e^{-x}(1+x)$$

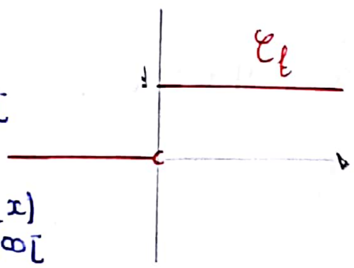
Pour $x<0$; $f*f(x) = f*f(-x)$

$$= (1-x)e^{x}$$

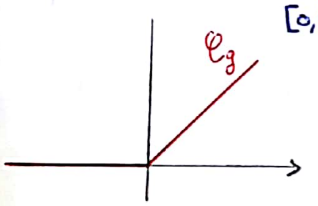
Conclusion:

$$f*f(x) = (1+|x|)e^{-|x|}$$

3- $f(x) = \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$



$g(x) = x\,\mathbb{1}_{[0,\infty[}(x)$



f, g sont des fonctions boréliennes et positive

Soit $x \geq 0$; $\int_{\mathbb{R}} f(y) g(x-y)\, dy$

$$= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[x,+\infty[}(y)(x-y)\,\mathbb{1}_{[0,\infty[}(x-y)\, dy$$

$$= \int_{0}^{x} x-y\, dy = \frac{1}{2}x^2.$$

Soit $x<0$, $\int_{\mathbb{R}} f(y) g(x-y)\, dy = 0$

$\rightarrow f*g(x) = \frac{x^2}{2}\,\mathbb{1}_{[0,\infty[}(x)$

Remarque:

$f \in L^{\infty}$

Exercice 2.

Soit $h \in L^1(\mathbb{R})$ tq $h*f = f$, $\forall f \in L^1(\mathbb{R})$

1- $k \geq 1$,

$f_k(x) = e^{-k|x|} = \frac{2}{k} g_k(x)$,

où g_k est une approximation d'identité ds $L^1(\mathbb{R})$, $g_k(x) = \frac{k}{2} e^{-k|x|}$

$x \xrightarrow{f} e^{-|x|} \in L^1(\mathbb{R})$ ≥ 0, $\|f\|_1 = 2$

$g_k(x) = \frac{k}{2} e^{-k|x|}$

$h * f_k$ Continue?

Comme $f_k \in L^1(\mathbb{R})$, $\|f_k\|_1 = \frac{2}{k} < \infty$

D'après (*) $h*f_k = f_k$ est Continue sur $\mathbb{R}$.

Remarque.

$f_k \in L^{\infty}(\mathbb{R})$, $\|f_k\|_{\infty} = 1 < \infty$

$\Rightarrow h*f_k \in L^1(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$

2) $h*f_k(x) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$?

$h*f_k(0) = \int_{\mathbb{R}} h(y) f_k(-y)\, dy$.

$$= \int_{\mathbb{R}} f(y)\, e^{-k|y|}\, dy$$

Par T.C.D, sachant que.

i) $\lim_{k\to\infty} f(y)\, e^{-k|y|}\, dy = 0 \quad y \text{ pp}$

ii) $|f(y)\, e^{-k|y|}| \leq |f(y)| \in L^1(\mathbb{R})$

on a $f * f_k(0) \xrightarrow[]{k\to\infty} 0$

absurde car ~~car~~ d'après (*)

$$f * f_k(0) = f_k(0) = 1 \underset{k\to+\infty}{\not\to} 0,$$

conclure $L^1(\mathbb{R})$ est une algèbre non unitaire.

$(L^1(\mathbb{R}^n), +, *, .)$ Algèbre Commutative normée non unitaire

Dans la pratique comment construire une approximation de l'identité ?

1) Soit $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$, $\varphi \geq 0$, $\|\varphi\|_1 = 1$

on pose $\varphi_k(x) = k^n . \varphi(k.x)$

$\varphi_k \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $\|\varphi_k\|_1 = \|\varphi\|_1$

$\varphi_k \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x)\, dx = ?$

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^n$$
$$y \longrightarrow x = \frac{y}{k}$$

$|J_\varphi| = \frac{1}{k^n}$ car $y \in \mathbb{R}^n$

$$\|\varphi_k\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} k^n \varphi(kx)\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{k^n}{k^n} \varphi(y)\, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\, dy = \|\varphi\|_1$$

(φ_k) est une suite régularisante de $L^1(\mathbb{R}^n)$

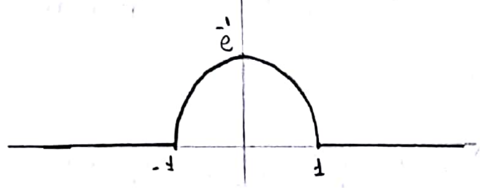
$\forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)$; $1 \leq p \leq \infty$

$$\|f * \varphi_k - f\|_p \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

2°) $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \geq 0$. $\operatorname{supp}\varphi \subset B'(0,1)$

<u>Exemple:</u> $\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\|x\|-1}} & \text{si } x \in B(0,1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$\operatorname{Supp}\varphi = \overline{B(0,1)} = B'(0,1)$



$\varphi_k(x) = \frac{k^n \varphi(kx)}{\|\varphi\|_1}$; φ_k est l'approximation de l'identité, $\varphi_k \geq 0$, $\varphi_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$\mathrm{Supp}\,\varphi_k = B'(0, \frac{1}{k})$

Exercice 3 :

$h \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \leq 1 \leq +\infty$

$$T_h : L^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^p(\mathbb{R})$$
$$f \longmapsto T_h(f) = f * h$$

T_h est lineaire, et $\forall f \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$\| T_h(f) \|_p = \| f * h \|_p \leq \| h \|_p \| f \|_1$$

Par suite T_h est continue et

$$\| T_h \| \leq \| h \|_p$$

Soit φ_k une suite regularisante de $L^1(\mathbb{R}^n)$

$$\| T_h(\varphi_k) \|_p = \| \varphi_k * h \|_p$$

$$\| T_h \| \geq \frac{\| T_h(\varphi_k) \|_p}{1 = \| \varphi_k \|_1} = \| \varphi_k * h \|_p \xrightarrow[k \to \infty]{} \| h \|_p$$

D'où $\| T_h \| = \| h \|_p$

2) $0 \leq p \leq \infty$, $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \geq 0$

$$T_g : L^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$$
$$f \longmapsto T_g(f) = f * g$$

T_g est lineaire et verifie

$$\| T_g(f) \|_p = \| f * g \|_p \leq \| g \|_1 \| f \|_p$$

$\Rightarrow T_g$ continue sur $L^p(\mathbb{R}^n)$

et $\| T_g \| \leq \| g \|_1$

on pose $g_k = \dfrac{k^n g(kx)}{\| g \|_1}$

$(g_k)_k$ est une suite regularisante de $L^1(\mathbb{R}^n)$

Soit $f \in L^p$,

$$f * g_k(x) = \frac{k^n}{\| g \|_1} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(ky)\, dy$$

$J = \frac{1}{k^n}$ Jacobienne changement de variable $y = ky$

$$= \frac{1}{\| g \|_1} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{f(x - \tfrac{y}{k})}_{= f\left(\frac{kx - y}{k}\right)} g(y)\, dy$$

$$= \frac{1}{\| g \|_1} \underbrace{(f_k * g)(kx)}_{\int_{\mathbb{R}^n} f_k(kx-y) \cdot g(y)\, dy \,=\, \int_{\mathbb{R}^n} f\left(\frac{kx-y}{k}\right) g(y)\, dy} \quad \text{où } f_k(x) = f\left(\frac{x}{k}\right)$$

or $\| f * g_k \|_p = \dfrac{1}{\| g \|_1} \cdot \dfrac{1}{k^{n/p}} \| f_k * g \|_p$

$$= \frac{1}{\| g \|_1} \cdot \frac{1}{k^{n/p}} \| T_g(f_k) \|_p$$

$$\leq \frac{1}{\| g \|_1} \frac{1}{k^{n/p}} \| T_g \| \, \| f_k \|_p$$

comme $\| f_k \|_p = k^{n/p} . \| f \|_p$.

on obtient ainsi

$$\| f * g_k \|_p \leq \frac{1}{\| g \|_1} \| T_g \| \, \| f \|_p$$

par passage à la limite qdk $\to \infty$

on a $\|f\|_p \leq \frac{1}{\|g\|_1} \|T_g\| \|f\|_p$

$\Leftrightarrow \|g\|_1 \leq \|T_g\|$

donc $\|T_g\| = \|g\|_1$

Exercice 4:

$f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $T_f : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$

$g \longmapsto T_f(g) = f * g$

(Hilbert)

$H \xrightarrow[\text{lin, cont}]{u} H$

Thm de Riesz. $\exists!\, u^* \in \mathcal{L}(H)$

$\langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$

u^* adjoint de u.

T_f linéaire et vérifie $\|T_f(g)\|_2 = \|f * g\|_2$
$\leq \|f\|_1 \|g\|_2$

Par suite T_f est cont et $\|T_f\| \leq \|f\|_1$

Par le théorème de Riesz, T_f admet un adjoint T_f^*, T_f^*?

Soit $g, h \in L^2(\mathbb{R}^n)$ (Hilbert)

$$\langle T_f(g), h \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f * g(x) \cdot \bar{h}(x)\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, dy \right] \bar{h}(x)\, dx.$$

$$\overset{(*)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \cdot \bar{h}(x)\, dx \right] dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^*} g(y) \left(\overline{\int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x-y)} \cdot h(x)\, dx} \right) dy$$

$= \langle g, T_f^*(h) \rangle$

où $T_f^*(h) : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$

$h \longmapsto T_f^*(h) = T_{\tilde{f}}(h)$
$= \tilde{f} * h.$

où $\tilde{f}(x) = \bar{f}(-x)$, $\tilde{f}(\mathbb{R}^n)$

$$h * \tilde{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} h(x)\, \tilde{f}(y-x)\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} h(x)\, \bar{f}(x-y)\, dx$$

justification de $(*)$:

$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}$ est intégrable.

$(x,y) \longmapsto g(y)\, f(x-y)\, h(x)$

Par Fubini Tonelli:

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |\varphi(x,y)|\, dx\, dy = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|\, |f(x-y)|\, dy\right) |h(x)|\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{(|g| * |f|)(x)}_{\in L^2(\mathbb{R}^n)}\, \underbrace{|h(x)|}_{\in L^2(\mathbb{R}^n)}\, dx$$

$$\overset{\text{Holder}}{\leq} \| |g| * |f| \|_2 \|h\|_2$$

$$\leq \|g\|_2 \|f\|_1 \|h\|_2 < \infty$$

φ étant intégrable sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$, $*$ est justifier par le théorème Fubini.

Exercice 5:

$\alpha \in]0, 1[$

$$\mathcal{C}_b^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n) = \left\{ g : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\text{borné}} \mathbb{C} ;\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ |g(x) - g(y)| \leq c\|x-y\|^\alpha \right\}$$

Scanned by CamScanner

ρ_k : approximation de l'identité

$f \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$, $g \in L^1(\mathbb{R})$
(à support compact)

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} g(y) f(x-y)$$

(Loc: Localement intégrable)

$\rho_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp} \rho_k \subset B(0, \frac{1}{k})$,

$$\int \rho_k = 1$$

$g \in \mathcal{C}_b^{(0,\alpha)}$, $g_k = g * \rho_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |(g - g_k)(x)| = \| g - g_k \|_\infty$$

$$g_k(x) - g(x) = g * \rho_k(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y) \rho_k(y) dy - g(x) \boxed{\int_{\mathbb{R}^n} \rho_k(y) dy}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} (g(x-y) - g(x)) \cdot \rho_k(y) dy$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y) - g(y)| \rho_k(y) . dy$$

$$\leq c \int_{\mathbb{R}^n} \|y\|^\alpha . \rho_k(y) dy$$

$\operatorname{Supp} \rho_k \subset B(0, \frac{1}{k})$

$$= c \int_{B(0,\frac{1}{k})} \|y\|^\alpha \rho_k(y) dy$$

$$\leq c \left(\frac{1}{k}\right)^\alpha \underbrace{\int_{B(0,1/k)} \rho_k(y) dy}_{=1}$$

$$\leq c \left(\frac{1}{k}\right)^{-\alpha}$$

$\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^n)$,

$$\nabla \varphi(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

$$\|\nabla \varphi\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\|_\infty$$

$$g_k = g * \rho_k \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty$$

$$g_k = \underbrace{g}_{\text{Cont}} * \underbrace{\rho_k}_{\in C^\infty} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

$$\frac{\partial g_k}{\partial x_i}(x) = g * D^{(0,\dots,1,0,\dots,0)}\rho_k(x) = k\, g * (D\rho)^{(0,\dots,1,0,\dots,0)}_k(x)$$

$$\left\| \frac{\partial g_k}{\partial x_i} \right\|_\infty \leq k \|g\|_\infty \left\| \left(\frac{\partial \rho_k}{\partial x_i}\right)_k \right\|_1$$

$$\|\nabla g_k\|_\infty \leq c' k \|g\|_\infty$$

$$c' = \max \left(\left\|\frac{\partial \rho_k}{\partial x_i}\right\|_1, \dots \right)$$

Exercice 6:

1. $f \in L^1(\mathbb{R})$, $h \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$

$$\int_x^{x+h} f(t)\, dt = f * \mathbb{1}_{[-h,0]}$$

$$\int_x^{x+h} f(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, \mathbb{1}_{[x, x+h]}(t)\, dt$$

or $\mathbb{1}_{[x,x+h]}(t) = 1 \iff x \leq t \leq x+h$

$\iff -x-h \leq -t \leq -x$

$\iff -h \leq x - t \leq 0$

$\iff \mathbb{1}_{[-h,0]}(x-t) = 1$

Par suite $\int_x^{x+h} f(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, \mathbb{1}_{[-h,0]}(x-t)\,dt$

$= f * \mathbb{1}_{[-h,0]}(x)$

2. $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

$$G_h(x) = \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = \frac{1}{h} f * \mathbb{1}_{[-h,0]}(x)$$

$$G_h \xrightarrow[h \to 0]{L_1(\mathbb{R})} f$$

$\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \geqslant 0$; $\int \varphi = 1$

$\varphi_k(x) = k^n \varphi(kx)$; $\varphi_\varepsilon(x) = \dfrac{\varphi(\frac{x}{\varepsilon})}{\varepsilon^n}$

$f \in L^1$. $\varphi * f \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} f$

$$G_h \xrightarrow[h \to 0]{L_1(\mathbb{R})} f \ ?$$

comme $\mathbb{1}_{[-h,0]}(x) = 1 \iff -h \leqslant x \leqslant 0$

$\iff -1 \leqslant \frac{x}{h} \leqslant 0 \iff \frac{x}{h} \in [-1,0]$

$\iff \mathbb{1}_{[-1,0]}\left(\frac{x}{h}\right) = 1$

alors $\varphi = \mathbb{1}_{[-1,0]} \in L^1(\mathbb{R}) \geqslant 0$

$\int \varphi = 1$ et $\varphi_h : \varphi_h(x) = \dfrac{\varphi(\frac{x}{h})}{h}$

est une approximation de l'identité par

Suite $G_h = f * \varphi_h \xrightarrow{L^1(\mathbb{R})} f$

Exercice 4 :

$E(x,y) = \dfrac{1}{x+iy}$ est borelienne

Pour $R > 0$

$$\int_{B(0,R)} |E(x,y)|\,dx\,dy = \int_{B(0,R)} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$$

$$= \int_0^R \int_0^{2\pi} dr\,d\theta$$

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$(r,\theta) \in]0,R[\times]0,2\pi[$.

$= 2\pi R$.

$E \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ (Localement integrable)

$\partial = \dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y}$ opérateur de cauchy.

$\varphi(x,y) = \varphi(r\cos\theta, r\sin\theta) = \tilde{\varphi}(r,\theta)$

$\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$

$\partial = e^{i\theta}\left(\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{i}{r}\cdot\dfrac{\partial}{\partial \theta}\right)$?

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial r} = \cos\theta \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \sin\theta \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} = -r\cos\theta \dfrac{\partial \varphi}{\partial} + r\sin\theta \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}. \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = \dfrac{1}{r}\left(r\cos \dfrac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial r} - \sin\theta \dfrac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta}\right) \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = \dfrac{1}{r}\left(\cos\theta \dfrac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} + r\sin\theta \dfrac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial r}\right) \end{cases}$$

④

$$\iint_{\mathbb{R}^2} E(x,y)\, P\varphi(x,y)\, dx\, dy \qquad x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

$$= \int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} \frac{e^{-i\theta}}{r} e^{i\theta}\Big[\frac{\partial}{\partial r}\varphi(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

$$+ \frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(r\cos\theta, r\sin\theta)\Big) r\,dr\,d\theta$$

Fubini

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial r}\varphi\big((r\cos\theta, r\sin\theta)\,dr\big)\,d\theta$$

$$+ i\int_0^{\infty}\frac{1}{r}\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial\theta}(r\cos\theta, r\sin\theta)\,d\theta\Big)\,dr$$

$$= \int_0^{2\pi}\Big[\varphi(r\cos\theta, r\sin\theta)\Big]_0^{\infty} d\theta.$$

$$+ i\int_0^{\infty}\Big[\varphi(r\cos\theta, r\sin\theta)\Big]_0^{2\pi} dr$$

$$= -2\pi\,\varphi(0,0) + i\underbrace{\int_0^{\infty}\frac{\varphi(r,0)-\varphi(r,0)}{r}\,dr}_{=0}$$

2- u ? $\quad P_u = \varphi$

on pose $\tilde{\varphi}(x,y) = \varphi(s-x, t-y)$

d'après 1:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} E(x,y)\, P\tilde{\varphi}(x,y)\, dx\, dy$$

$$= \iint_{\mathbb{R}} E(x,y)\, P\varphi(s-x, t-y)\, dx\, dy$$

$$= -2\pi\,\tilde{\varphi}(0,0) = -2\pi\,\varphi(s,t)$$

$$E * P\varphi(s,t) = -2\pi\,\varphi(s,t)$$

$$\Longleftrightarrow P(E * \varphi)(s,t) = -2\pi\,\varphi(s,t)$$

$$u = -\frac{1}{2\pi} E * \varphi.$$

f = fct ~~...~~ à décroissance rapide :

- $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x\to\infty} P(x)f(x) = 0 \quad , \forall P \in \mathbb{R}_n[x]$