# Chapitre 1 : La Convolution

## I - Convolution :

**Théorème:**

Rappel: $f$ mesurable càd $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx < \infty$

* $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$

La formule : $\underset{\uparrow}{(f * g)}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$

Produit de Convolution

définit une fonction de $L^1(\mathbb{R})$

et on a : $\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^1}$

. Cette fonction est appelée Convolée de $f$ et $g$.

**Preuve:**

$$\underset{(x \in \mathbb{R}^n,\, y \in \mathbb{R}^n)}{(x, y) \longmapsto} F(x,y) = \underset{\in L^1(\mathbb{R}^n)}{f(x-y)}\underset{\in L^1(\mathbb{R}^n)}{g(y)}$$

Pour presque tout $y \in \mathbb{R}^n$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |F(x,y)|\, dx = |g(y)| \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|dx$$
$$= |g(y)|\, \|f\|_{L^1}$$

$$\rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |F(x,y)|\, dx \right) dy$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|\, \|f\|_{L^1}\, dy$$
$$< \|g\|_{L^1}\, \|f\|_{L^1}$$

$F \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ et $\int_{\mathbb{R}^n} dx \left( \int_{\mathbb{R}^n} |F(x-y)|dy \right) < \infty$

**Remarque:**

1- la Convolution est Commutative

$$f * g = g * f$$

et associative et distributive/+

2. Elle est bilinéaire

3- $(L^1(\mathbb{R}^n), +, *)$ est une algèbre de Banach (associative, bilinéaire, Commutative, Sous-multiplicative)

**Théorème:**

$f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$

alors $f * g \in L^p$ et

$$\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^p}$$

$L^1 \times L^p \longrightarrow L^p \leftarrow \left( \begin{array}{l} f \text{ fixé ds } L^1 \\ M_f : g \longrightarrow M_f(g) = f * g \\ M_f : L^p \longrightarrow L^p \end{array} \right.$

$\left( \begin{array}{l} g \text{ fixé ds } L^p \\ M_g : f \longrightarrow M_g(f) = f * g \\ M_g : L^1 \longrightarrow L^p \end{array} \right.$

Preuve:

$f \in L^1$, $g \in L^p$

$p = 1 \longrightarrow$ déf

$p = \infty \longrightarrow$ trivial

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y)\, dy$$

$$|(f * g)(x)| \leqslant \Big( \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\, dy}_{\|f\|_{L^1}} \Big) \|g\|_{L^\infty}$$

$$\rightarrow \|f * g\|_{L^\infty} \leqslant \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^\infty}$$

* $1 < p < \infty$

$f \in L^1$, $g \in L^p$

$|f| \in L^1$ et $|g|^p \in L^1 \longrightarrow y$

$\longrightarrow |f(x-y)| \cdot |g(y)|^p \in L^1$

pp. tout $x$

$p'$ la conjugée de $p$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\,|g(y)|\, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^{\frac{1}{p'}} |f(x-y)|^{\frac{1}{p}} |g(y)|\, dy$$

Hölder $$\leqslant \|f\|_{L^1}^{1/p'} \Big( \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| \cdot |g(y)|^p dy \Big)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant \|f\|_{L^1}^{p'} \Big( [\,|f| * |g|^p\,](x) \Big)^{\frac{1}{p}}$$

or $$\|(f * g)\|_{L^p}^p = \int_{\mathbb{R}^n} |(f * g)(x)|^p dx$$

$$\leqslant \|f\|_{L^1}^{p/p'} \cdot \big( (|f| * |g|^p)(x) \big)$$

$$\leqslant \|f\|_{L^1}^{p/p'} \Big( \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| \cdot |g|^p(y)\, dy \Big)$$

$$\leqslant \|f\|_{L^1}^{p/p'} \cdot \|f\|_{L^1} \cdot \|g^p\|_{L^1}$$

$$\Rightarrow \|f * g\|_{L^p}^p \leqslant \|f\|_{L^1}^{1/p'} \|f\|_{L^1}^{1/p} \|g\|_{L^1}^{1/p}$$

$$\rightarrow \|f * g\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p}$$

**Théorème: Inégalité de young**

$f \in L^p$, $g \in L^q$ ; $1 \leqslant p, q \leqslant +\infty$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geqslant 1$$

alors $f * g \in L^r$, $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$

- Si $p < \infty$, $q = p'$, ie: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

alors $r = \infty$

$f * g$ est continue et essentiellement bornée

soit $a \in \mathbb{R}^n$,

$T_a : f \longrightarrow T_a f$

$$T_a f(x) = f(x-a)$$

$T_a : L^p \longrightarrow L^p$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(T_a f)(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-a)|^p dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx.$$

$f \in L^p$, $n \leqslant p < \infty$

$$\| T_a f - f \| \xrightarrow[a \to 0]{} 0$$

$$T_a f \xrightarrow[a \to 0]{} f \quad \text{ds } L^p$$

$$\| T_a f - f \|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-a) - f(x)|^p dx$$

**Exemple.**

$\mathbb{R}$, $n = 1$

$f(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}$, $0 \leqslant x - a \leqslant 1$

$a < 0$

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x-a) - f(x)|^p dx$$

$$= \int_{-\infty}^{a} |f(x-a) - f(x)|^p dx + \int_{a}^{a+1} + \int_{a+1}^{\infty} |f(x-a) - f(x)|^p dx$$

$$= \int_{a}^{a+1} |f(x-a) - f(x)|^p dx.$$

$$= \int_{a}^{a+1} |1 - f(x)|^p dx.$$

$$\to \int_{\mathbb{R}} |f(x-a) - f(x)|^p dx$$

$$= \int_{a}^{0} |1 - 0|^p dx + \int_{0}^{a+1} |1 - f(x)|^p dx$$

$$= -a + 0 = -a$$

**Rappel:**

$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$

$x \notin \operatorname{sup} f$ s'il existe un ouvert $x \in C$

$$f/_{O_x} \equiv 0$$

**Exercice :**

Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ est continue,

alors $\operatorname{sup} f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n, \ f(x) \neq 0\}}$

$\overset{\|}{f^{-1}(\mathbb{C}^*)}$

**Exemple :**

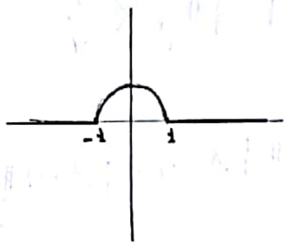
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ; $\operatorname{Supp} f = \mathbb{R}$

$\to$ Car $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

$f(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$

**Rappel:**

$C_0^a(\mathbb{R}^n)$




Supp de $f$ = supp $f$

$x \notin \operatorname{Supp} f$ si $\exists O_x$ tq

$f(y) = 0 \ \forall y \in O_x$

**Théorème :**

L'espace $C_c^0(\mathbb{R})$ (espace des fcts continues) à support compact est dense ds $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour $1 \leqslant p < \infty$

$$\overline{C_c^0(\mathbb{R}^n)} = L^p(\mathbb{R}^n)$$

$f \in L^p$, $\varepsilon > 0 \longrightarrow \exists C_c(\mathbb{R}^n)$, $\| f - g \|_{L^p} < \varepsilon$

$\to f \in L^p(\mathbb{R}^n)$

**Théorème.**

La translation $\mathbb{R}^n \ni x \to f(x+\cdot)$ est continue sur $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$

**Rappel:**

$C_c(\mathbb{R}^n)$ est dense ds $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$

$$\| f(x+\cdot) - f(\cdot) \|_{L^p} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists y > 0$. $|x| \leq y$

$$\Rightarrow \| f(x+\cdot) - f(\cdot) \|_{L^p} \leq \varepsilon$$

En vecteur de la densité de $C_c(\mathbb{R}^n)$ dans $L^p$.

$\exists g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ tq $\| f - g \|_{L^p} \leq \frac{\varepsilon}{4}$

$$\| f(x+\cdot) - f(\cdot) \|_{L^p} \leq \| f(x-\cdot) - g(x+\cdot) \|_{L^p} + \| g(x+\cdot) - g \|_{L^p} + \| f - g \|_{L^p}.$$

$$* \ \| f(x+\cdot) - g(x+\cdot) \|_{L^p}^p = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+y) - g(x+y)|^p dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} |f(z) - g(z)|^p dz$$

$$= \| f(z) - g(z) \|_{L^p}^p$$

$$\| f(x+\cdot) - f(\cdot) \|_{L^p} \leq 2 \| f - g \|_{L^p} + \| g(x+\cdot) - g(\cdot) \|_{L^p}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \| g(x+\cdot) - g(\cdot) \|_{L^p}$$

$g \in C_c \Rightarrow g$ est uniformement continue sur $\mathbb{R}^n$, $\forall \alpha > 0$

$\exists \beta > 0$, $|x| \leq \beta$

$$\to |g(x+y) - g(y)| \leq \alpha, \ \forall y \in \mathbb{R}^n$$

$$\| g(x+\cdot) - g(\cdot) \|_{L^p} = \left[ \int_{\mathbb{R}^n} |g(x+y) - g(y)|^p dy \right]^{1/p}$$

$$\leq \alpha \left[ \operatorname{vol} K \right]^{1/p}$$

$* \ y \in \operatorname{supp} g$

$|x| \leq \beta \Rightarrow x + y \in \{ \operatorname{supp} g + \beta \} = K$ compact

on choisit donc $\alpha = \dfrac{\varepsilon}{2 [\operatorname{vol} K]^{1/p}}$

2 -

**Définition: Support d'une fonction:**

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$$

$x \notin \operatorname{supp} f$ si $\begin{cases} \exists O_x \text{ ouvert ds } \mathbb{R}^n \\ \text{tq } f(y) = 0, \ \forall y \in O_x \\ x \in O_x \end{cases}$

Par exemple: Si $f$ est Continue

$$\mathrm{supp}\, f = \overline{\{ x \in \mathbb{R}^n , f(x) \neq 0 \}}$$

Exemple:

$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-\|x\|^2}\right) & ; \text{ Si } \|x\| < 1 \\ 0 & \text{Si } \|x\| \geq 1 \end{cases}$$

$\mathrm{Supp}\, f = \mathcal{B}'(0,1)$

**Proposition.**

$f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$

alors:

$$\mathrm{Supp}\,(f * g) \subset \overline{\mathrm{Supp}\, f + \mathrm{Supp}\, g}$$

(Somme vectorielle)

Exemple.

$F = \{0, 1, \dots\} = \mathbb{N} \leftarrow$ fermé

$G = \{-2 + \frac{1}{2}, -3 + \frac{1}{3}, \dots, n + \frac{1}{n}\} \leftarrow$ fermé

mais $F + G$ n'est pas fermé, en effet, on a $\frac{1}{k} \in F + G$ mais

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} = 0 \notin F + G.$$

$\to F + G$ n'est pas fermé

Preuve:

on suppose $x \notin \overline{\mathrm{Supp} f + \mathrm{Supp}\, g}$

③

$\to \exists\, O_x$ un ouvert contient $x$

tq $O_x \cap (\mathrm{supp}\, f + \mathrm{supp}\, g) = \phi$

on va verifier que $f * g \equiv 0$ sur $O_x$

. Soit $y \in O_x$

$$\cdot [f * g](y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y-z)\, g(z)\, dz = 0$$

Car si $z \in \mathrm{Supp}\, g$ alors $y - z \notin \mathrm{Supp}\, f$

puisque $O_x \cap (\mathrm{supp}\, f + \mathrm{Supp}\, g) = \phi$

Rappel:

$x \notin \bar{A} \iff \exists\, O_x$ ouvert contient $x$ tq $O_x \cap A = \phi$

$x \in \bar{A} \iff \forall\, O_x$ ouvert contient $x$ tq $O_x \cap A \neq \phi$

**Proposition.**

$f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$

alors la convoleé $f * g$ est bien définie en tout point de $\mathbb{R}^n$ et elle est continue.

Preuve

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, dy$$

$x - y \in \mathrm{supp}\, f \iff y \in \{x\} - \mathrm{Supp} f$.

$x_0 \in \mathbb{R}^n$ , $O_{x_0}$ , $\exists x_0$

ouvert

$K$ compact, $O_{x_0} \subset K$.

$\forall x \in O_{x_0}$

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y)\, dy$$

$$= \int_{K-\operatorname{Supp} f} f(x-y)\, g(y)\, dy$$

**Proposition:**

$f \in C_c^m(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^1_{L_{x}}(\mathbb{R}^n)$, alors $f * g \in C^m(\mathbb{R}^n)$ et on a :

$$\partial_x^\alpha (f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^\alpha f(x-y)\, g(y)\, dy$$

$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$

$$\partial_x^\alpha f = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n} f$$

## 3- Suites régularis

une suite régular est une suite de fonction sur $\mathbb{R}^n$ $(\rho_k)_{k \geq 1}$ ← suite régulariste

$\rho_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\rho_k \geq 0$, $\operatorname{Supp} \rho_k \subset B(0, \frac{1}{k})$

et $\int_{\mathbb{R}^n} \rho_k(x)\, dx = 1$.

**Exemple:**

$\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{Supp} \rho \subset B(0,1)$,

$\rho \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\, dx = 0$

$\rho_k(x) = k^n \rho(kx)$ $k \geq 1$.

$$k^n \int \rho(kx)\, dx = k^n \int_{B(0,\frac{1}{k})} \rho(kx)\, dx$$

$y = kx \to dy = k\, dx$ $$= k^n \int_{B(0,1)} \rho(y)\, k^{-n}\, dy$$

$$= 1$$

$\rho$ = fonction-mère

$$\begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-\|x\|^2}\right) & , \|x\| < 1 \\ 0 & ; \|x\| \geq 1 \end{cases}$$

**Vocabulaire:**

une suite régularissante et aussi appelée approximation de l'unité

**Théorème:**

$f \in C(\mathbb{R}^n)$ alors $\rho_k * f$ converge uniformement vers $f$ sur tout compact.

$$\sup_{x \in K} |f(x) - (\rho_k * f)(x)| \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$$

**Preuve:**

$K$ compact fixée ds $\mathbb{R}^n$ (fermé borné)

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tq $k \geq k_0$

$$\to \sup_{x \in K} |f(x) - (\rho_k * f)(x)| \leq \varepsilon$$

$\varepsilon > 0$

$x \in K$.

$$[\rho_k * f](x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\rho_k(y)\,dy - f(x)\int_{\mathbb{R}^n}\rho_k(y)\,dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n}\left(f(x-y) - f(y)\right)\rho_k(y)\,dy$$

$$= \int_{B'(0,\frac{1}{k})}[f(x-y)-f(y)]\rho_k(y)\,dy$$

$$\leq \varepsilon \underbrace{\int_{B'(0,1)}\rho_k(y)\,dy}_{=1}$$

$K' = K + B'(0,1)$ ; $x - Y$ et $Y \in K'$

**Théorème:**

Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $(\rho_k)$ est une suite regularissante alors

$$\rho_k * f \longrightarrow f \text{ dans } L^p(\mathbb{R}^n)$$

$(1 \leq p < \infty)$

**Corollaire:**

$C_c^\infty(\mathbb{R}^*)$ est dense ds $L^p(\mathbb{R}^n)$.

**Preuve:**

on rappelle que, $C_c(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists k_0 \in \mathbb{N},\ k \geq k_0$



$\Rightarrow \| f * \rho_k - f\|_{L^p} < \varepsilon$

$\exists g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ tq $\|g - f\|_{L^p} \leq \varepsilon/2$

$k \geq 1$ $\quad Supp(\rho_k * g) \subset Supp\, g + Supp\, \rho_k$

$\subset Supp\, g + B'(0, \frac{1}{k})$

$\subset Supp\, g + B'(0,1)$

$=$

$K$ compact fixe.

$$\rho_k * f - f = \rho_k * (f-g) + (\rho_k * g - g) + (g - f)$$

$$\|\rho_k * f - f\|_{L^p} \leq \|\rho_k * (f-g)\|_{L^p} + \|f-g\|_{L^p} + \|\rho_k * g - g\|_{L^p}$$

$$* \ \|\rho_k * f - f\|_{L^p} \leq \|\rho_k\|_{L^1}\|f-g\|_{L^p} + \|f-g\|_{L^p} + \|\rho_k * g - g\|_{L^p}$$

$$\leq 2\|f-g\|_{L^p} + \|\rho_k * g - g\|_{L^p}$$

$$\|\rho_k * g - g\|_{L^p} = \left(\int |(\rho_k * g - g)(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$$

$$\leq \left(\sup_k |\rho_k * g - g|\right)(vol\, K)^{1/p}$$

$\exists k_0 \in \mathbb{N},\ k \geq k_0$

$$\Rightarrow \sup_k |(\rho_k * g - g)(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2(vol\, K)^{1/p}}$$

Définition.

Deux ensemble fermés F et G de $\mathbb{R}^n$ sont dit Convolutifs, si $\forall R > 0$ $\exists \rho > 0$ tq $\forall x \in F$, $\forall y \in G$.

$$|x - y| \leq R \Rightarrow |x| \leq \rho \text{ et } |y| \leq \rho$$

Chapitre 1

# LA CONVOLUTION

Dans ce chapitre, nous introduisons le produit de convolution de deux fonctions intégrables. Nous présentons aussi les propriétés et les applications les plus importantes de cette opération: approximation, régularisation... Dans tout le chapitre, $\mathbb{R}^n$ est muni de la mesure de Lebesgue.

## 1. Convolution

**Théorème**: Soient $f$ et $g$ deux fonctions de $L^1(\mathbb{R}^n)$. Alors la formule

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$

définit une fonction de $L^1(\mathbb{R}^n)$ et on a

$$||f * g||_{L^1} \leq ||f||_{L^1}||g||_{L^1}.$$

Cette fonction est appelée convolée de $f$ et $g$.

**Preuve:** Posons $F(x,y) = f(x-y)g(y)$. Pour presque tout $y \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\int | F(x,y)|dx = | g(y)| \int | f(x-y)|dx = | g(y)|||f||_{L^1} < \infty$$

et

$$\int dy \int | F(x,y)|dx = ||f||_{L^1}||g||_{L^1} < \infty$$

Par suite, $F \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, en vertu du Théorème de Tonelli. Appliquant alors le Théorème de Fubini, on obtient

$$\int | F(x,y)|dy < \infty \quad \text{p.p} \quad x \in \mathbb{R}^n$$

et

$$\int dx \int | F(x,y)|dy < \infty$$

ce qui est le résultat recherché.

**Remarques**

1. Dans ce cadre, on a $f * g = g * f$, c-a-d que la convolution est une opération commutative.
On peut aussi vérifier qu'elle est associative.
2. Clairement, la convolée est linéaire par rapport à chacun des termes; en particulier, pour tout nombre complexe $\alpha$,

$$(\alpha f) * g = \alpha(f * g)$$

Elle est aussi distributive par rapport à l'addition.
3. En fait, $(L^1(\mathbb{R}^n), +, *)$ est une algèbre de Banach.

**Théorème**

Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ où $1 \leq p \leq +\infty$. Alors $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et on a

$$||f * g||_{L^p} \leq ||f||_{L^1}||g||_{L^p}.$$

Cela exprime en particulier que l'injection $L^1 * L^p \hookrightarrow L^p$ est continue.

**Preuve:** On se concentre sur le cas $1 < p < \infty$ car le cas $p = \infty$ est trivial.
Par le théorème précédent, on sait que pour p.p tout $x \in \mathbb{R}^n$, la fonction $y \mapsto f(x-y)|g(y)|^p$ est dans $L^1(\mathbb{R}^n)$. Ainsi,

$$y \mapsto |f(x-y)|^{1/p}|g(y)| \in L^p(\mathbb{R}^n_y).$$

Si $p'$ est le conjugué de $p$, on a clairement $|f(x-y)|^{1/p'} \in L^{p'}(\mathbb{R}^n_y)$ et on peut alors écrire en vertu de l'inégalité de Holder

$$\int |f(x-y)||g(y)|dy \leq ||f||_{L^1}^{1/p'} \left( \int |f(x-y)||g(y)|^p dy \right)^{1/p}$$

Par suite,

$$|(f*g)(x)|^p \leq ||f||_{L^1}^{p/p'} \left(|f| * |g|^p\right)(x)$$

D'où l'on déduit

$$||f*g||_{L^p} \leq ||f||_{L^1}^{1/p'} \left( \int \left(|f| * |g|^p\right)(x) dx \right)^{1/p} \leq ||f||_{L^1} ||g||_{L^p}$$

en vertu du théorème précédent.

On présente maintenant une version généralisée du résultat précédent.

**Théorème: Inégalité de Young**
Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ où $1 \leq p, q \leq +\infty$ et $1/p + 1/q \geq 1$. Alors $f*g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ où $1/r = 1/p + 1/q - 1$ et

$$||f*g||_{L^r} \leq ||f||_{L^p} ||g||_{L^q}$$

De plus, si $p'$ est le conjugué de $p$, alors $f*g$ est continue.

**Preuve:** Pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$|(f*g)(x)| \leq \int |f(x-y)||g(y)|dy = \int |\left(f(x-y)|^p |g(y)|^q\right) 1/r |f(x-y)|^{p(1/p-1/r)} |g(y)|^{q(1/q-1/r)} dy$$

Comme $(1/p - 1/r) + (1/q - 1/r) + 1/r = 1$, l'inégalité de Holder nous donne alors

$$|(f*g)(x)| \leq || \left(|f(x-.)|^p |g|^q\right)^{1/r} ||_{L^r} || \, |f|^{p(1/p-1/r)}(x-.) ||_{L^{\frac{pr}{r-p}}} || \, |g|^{q(1/q-1/r)} ||_{L^{\frac{qr}{r-q}}}$$

Par suite,

$$|(f*g)(x)| \leq \left(|f|^p * |g|^q(x)\right)^{1/r} ||f||_{L^p}^{p(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} ||g||_{L^q}^{q(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})}$$

On en déduit alors

$$\int |(f*g)(x)|^r dx \leq \left( \int \left(|f|^p * |g|^q\right)(x) dx \right) ||f||_{L^p}^{r-p} ||g||_{L^q}^{r-q} \leq ||f||_{L^p}^r ||g||_{L^q}^r$$

Et l'inégalité en découle.

On s'intéresse maintenant au cas où $p$ et $p'$ sont conjugués et on suppose que $p < \infty$. On a

$$(f*g)(x) - (f*g)(x') = \int \left(f(x-y) - f(x'-y)\right) g(y) dy$$

ce qui donne en vertu de l'inégalité de Holder

$$|(f*g)(x)-(f*g)(x')| \leq ||f(x-.)-f(x'-.)||_{L^p}||g||_{L^{p'}} = ||f(x-x'-.)-f||_{L^p}||g||_{L^{p'}}.$$

Et on conclut grâce au lemme suivant:

**Lemme:** Pour $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, l'application $x \in \mathbb{R}^n \longrightarrow f(x+.)$ est continue sur $L^p(\mathbb{R}^n)$. En particulier $||f(x+.)-f||_{L^p} \longrightarrow 0$ lorsque $x \longrightarrow 0$.

**2. Convolution et régularité**

On commence par rappeler que le support d'une fonction $f$ est défini par ( son compémentaire ): $x \notin \text{supp}(f)$ si et seulement si $x$ possède un voisinage $O_x$ sur lequel $f$ est presque partout nulle . C'est clairement un sous ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$.
Par exemple, si $f$ est continue, on a $\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n, f(x) \neq 0\}}$.

**Proposition:** Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 \leq p \leq +\infty$. Alors

$$\text{supp}(f*g) \subset \overline{\text{supp}f + \text{supp}g}$$

En particulier, $f*g$ est à support compact dès que $f$ et $g$ le sont.

**Preuve:** Soit $x \notin \overline{\text{supp}f + \text{supp}g}$; il existe alors un ouvert $O_x$ voisinage de $x$ tel que $O_x \cap (\text{supp}f + \text{supp}g) = \emptyset$. Par suite pour tout $z \in O_x$ et tout $y \in \text{supp}g$, $f(z-y)g(y) = 0$. Cela implique $(f*g)(z) = 0$ et exprime que $x \notin \text{supp}(f*g)$.

**Notations**

On note par

- $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions $f$ telles que $\chi_K f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, pour tout compact K de $\mathbb{R}^n$.
- $C(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$.
- $C_c(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions continues à support compact sur $\mathbb{R}^n$.
- $C^m(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions de classe $C^m$ sur $\mathbb{R}^n$.
- $C^m_c(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions de classe $C^m$ et à support compact sur $\mathbb{R}^n$.
- $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur $\mathbb{R}^n$.
- $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ...., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ et $x = (x_1, x_2, ...., x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\partial^\alpha_x f = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial^{\alpha_1}_{x_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial^{\alpha_1}_{x_2}} ....... \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial^{\alpha_n}_{x_n}} f$$

**Proposition:** Soient $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Alors la convolée $f*g$ est bien définie en tout point $x$ de $\mathbb{R}^n$ et elle est continue, c-a-d $f*g \in C(\mathbb{R}^n)$.

**Preuve:** Soit $x_0$ un point de $\mathbb{R}^n$, $O_{x_0}$ un voisinage de $x_0$ et $K$ un ensemble compact tel que $O_{x_0} \subset K$. Il est clair que pour tout $x \in O_{x_0}$, la fonction $y \to f(x-y)$ est supportée dans $K-$supp$f$. Par suite,

$$(f*g)(x) = \int_{K-\text{supp}f} f(x-y)g(y)dy, \qquad \forall x \in O_{x_0}$$

Et la continuité découle de l'application du théorème de convergence dominée.

**Théorème:** Soient $f \in C_c^m(\mathbb{R}^n)$, $m \in \mathbb{N}$, et $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Alors $f*g \in C^m(\mathbb{R}^n)$ et on a

$$\partial_x^\alpha(f*g) = (\partial_x^\alpha f)*g.$$

En particulier, si $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ alors $f*g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

**3. Suites régularisantes**

Une suite régularisante sur $\mathbb{R}^n$ est une suite de fonctions $\rho_k$ vérifiant les propriétés suivantes:

$$\rho_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \rho_k \geq 0, \quad \text{supp}\rho_k \subset B(0,1/k) \quad \text{et} \quad \int \rho_k(x)dx = 1.$$

**Remarque:** Il suffit de prendre $\rho_k(x) = k^n\rho(kx)$ où on a choisi

$$\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \rho \geq 0, \quad \text{supp}\rho \subset B(0,1) \quad \text{et} \quad \int \rho(x)dx = 1.$$

**Exemple:** En considérant la fonction, $\eta(x) = exp(-\frac{1}{|x|^2-1})$ si $|x| < 1$ et $\eta(x) = 0$ sinon, on peut prendre $\rho(x) = C\eta(x)$, avec C convenable.

**Vocabulaire:** La suite $\rho_k$ est aussi appelée approximation de l'unité.
Cette terminologie est d'ailleurs justifiée par les deux résultats suivants.

**Théorème:** Soit $f \in C(\mathbb{R}^n)$; alors $\rho_k * f$ converge uniformément vers $f$ sur tout compact de $\mathbb{R}^n$.

**Remarque:** Bien noter que les fonctions $\rho_k * f$ sont de classe $C^\infty$.

**Preuve:** Soit $K$ un compact de $\mathbb{R}^n$; pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|f(x-y) - f(x)| \leq \epsilon \qquad \forall x \in K, \quad \forall y \in B(0,\delta),$$

par uniforme cointinuité de $f$ sur les compacts de $\mathbb{R}^n$. Par suite

$$(\rho_k * f)(x) - f(x) = \int (f(x-y) - f(x))\rho_k(y)dy = \int_{B(0,1/k)} (f(x-y) - f(x))\rho_k(y)dy.$$

Et pour $k \geq 1/\delta$, on obtient

$$|(\rho_k * f)(x) - f(x)| \leq \int_{B(0,1/k)} \epsilon\, \rho_k(y)dy = \epsilon.$$

**Théorème:** Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $\quad 1 \leq p < \infty$; alors $\rho_k * f \longrightarrow f$ dans $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

**Preuve:** Pour $\epsilon > 0$, on sait qu'il existe une fonction $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ telle que $||f-g||_p \leq \epsilon$. De plus

$$\mathrm{supp}(\rho_k * g) \subset B(0,1/k) + \mathrm{supp}(g) \subset B(0,1) + \mathrm{supp}(g) = K$$

qui est un compact fixe. On peut alors écrire

$$\rho_k * f - f = (\rho_k * (f-g)) + ((\rho_k * g) - g)) + (g - f)$$

puis en déduire

$$||\rho_k * f - f||_p \leq 2||f-g||_p + ||\rho_k * g - g||_p \leq 2\epsilon + ||\rho_k * g - g||_\infty (volK)^{1/p} \leq 3\epsilon$$

pour $k$ assez grand.

**Corollaire:** Si $1 \leq p < \infty$ alors $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

**Commentaire: Histoire de support.**
Il est clair que pour définir le produit de convolution de deux fonctions $f$ et $g$, il n'est pas nécessaire qu'elles soient intégrables ou que les supports soient compacts....
Par exemple, $\chi_{\mathbb{R}^+}$ est convolable avec elle même. De même, deux fonctions à supports dans $\mathbb{R}^+$ sont convolables ( le vérifier à la main !).
Il suffit en effet que les deux supports vérifient une certaine condition. On dira qu'ils sont convolutifs.

**Exemple:** Si $f(x) = 1$, $\quad g(x) = e^x$ pour $x \geq 0$ et $f = g = 0$ sur $\mathbb{R}^-$, alors $(f * g)(x) = e^x - 1$ si $x \geq 0$ et $0$ sinon.

**Définition:** Deux ensembles fermés $F$ et $G$ de $\mathbb{R}^n$ sont dits convolutifs s'ils vérifient la condition suivante:
Pour tout $R > 0$, il existe $\rho > 0$ tel que:

$$x \in F, \quad y \in G, \quad |x+y| \leq R \quad \Rightarrow \quad |x| \leq \rho \text{ et } |y| \leq \rho.$$

On pourra en particulier vérifier que la somme vectorielle de deux fermés convolutifs est fermée.

**Appendice : Les espaces $L^p(\mathbb{R}^n)$.**
On rappelle que $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace des fonctions mesurables essentiellement bornées sur $\mathbb{R}^n$.
Pour $0 < p < \infty$, on rappelle que $L^p(\mathbb{R}^n)$ est constitué des fonctions mesurables sur $\mathbb{R}^n$, à valeurs complexes, telles que $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx < \infty$.
C'est un espace de Banach pour la norme $\|f\|_{L^p} = (\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx)^{1/p}$. Citons ici quelques propriétés des espaces $L^p$.

- Si $f \in L^p$, $1 \leq p \leq \infty$ et $g \in L^{p'}$, où $p'$ est le conjugué de $p$, c-a-d $1/p + 1/p' = 1$, alors $f.g \in L^1$ et

$$\|f.g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}} \qquad \text{( Inégalité de Holder )}$$

- Si $1 \leq p \leq \infty$ et $(f_k)$ est une suite de $L^p$ qui converge vers $f \in L^p$, alors il existe une sous suite $(f_{k_j})$ telle que $f_{k_j}(x) \to f(x)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$.
- Pour $1 \leq p < \infty$, l'espace $C_c(\mathbb{R}^n)$ des fonctions continues à support compact sur $\mathbb{R}^n$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.
- L' espace $L^2(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(f, g)_2 = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}dx.$$