Faculté des Sciences de Tunis
Département de mathématiques

2017-2018

M 1- MA : Analyse de Fourier et Distributions

Série de Révision

Exercice 1.

1. Montrer que la fonction $F(x) = \int_0^{+\infty} exp(-xt)\frac{sint}{t}dt$ est bien définie et continue sur $[0, +\infty[$.

2. Vérifier que $|F(x)| \leq 1/x$ pour tout $x > 0$.

3. En raisonnant sur les intervalles $[a, +\infty[$, montrer que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et calculer $F'(x)$ pour $x > 0$.

4. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{sint}{t}dt$.

Exercice 2.

1. Montrer que les deux intégrales $\int_0^{+\infty} sinx^2dx$ et $\int_0^{+\infty} cosx^2dx$ sont convergentes. On notera par S et C leurs valeurs respectives.

2. Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, on désigne par C_t le carré $[0, t] \times [0, t]$, $t > 0$. Etablir les identités suivantes

$$\begin{cases} F(t) = \int\int_{C_t} sin(x^2+y^2)dxdy = 2\left(\int_0^t sinx^2dx\right)\left(\int_0^t cosx^2dx\right) \\ G(t) = \int\int_{C_t} cos(x^2+y^2)dxdy = \left(\int_0^t cosx^2dx\right)^2 - \left(\int_0^t sinx^2dx\right)^2 \end{cases}$$

3. **a)** Montrer que si une fonction φ continue sur $[0, +\infty[$ tend vers L en $+\infty$, alors

$$\frac{1}{t}\int_0^t \varphi(x)dx \longrightarrow L \qquad \text{quand } t \longrightarrow \infty.$$

b) En déduire en fonction de S et C les limites quand t tend vers $+\infty$ de

$$\frac{1}{t}\int_0^t F(x)dx \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{t}\int_0^t G(x)dx.$$

4. Montrer que $F(t) = \int\int_{D_t} sin(x^2+y^2)dxdy$ où on a noté $D_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leq x \leq t, 0 \leq y \leq x\}$. En déduire une expression de $F(t)$ à l'aide d'une intégrale simple puis les valeurs de S et C.

Serie de Revision

Exercice n° 1 :

1. Etudier cette fonction

$$F(x) = \int_0^{\infty} \exp(-xt)\, \frac{\sin t}{t}\, dt \, , \ x > 0$$

Et l'objective est $\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$

1ère chose à faire

Montrons que $\frac{\sin t}{t}$ est bien.

définie

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \int_0^1 \frac{\sin t}{t}\, dt + \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$$

Définition. Convergence :

$\int_1^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ Converge

$\Leftrightarrow \lim\limits_{A \to \infty} \int_1^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ existe

il suffit de faire une integration par partie

$$\int_1^A \frac{\sin t}{t}\, dt = \underbrace{\left[-\frac{\cos t}{t}\right]_1^A}_{\underbrace{\cos 1 - \frac{\cos A}{A}}_{\text{converge en } +\infty}} - \underbrace{\int_1^A \frac{\cos t}{t^2}\, dt}_{\underbrace{\leqslant \int_1^A \frac{1}{t^2}\, dt}_{\text{Converge}}}$$

donc $\int_1^A \frac{\cos t}{t^2}\, dt$ Conv.

Donc $\int_1^A \frac{\sin t}{t}\, dt$ Converge

$$F(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt}\, \frac{\sin t}{t}\, dt \ ; \ x \geqslant 0$$

on a : $\left| e^{-xt} \frac{\sin t}{t} \right| \leqslant e^{-xt} \ ; \ \forall x > 0$

et $x \longmapsto e^{-xt}$ est integrable.

donc $F : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est bien.

définie

Montrons que F est Continue.

il ya des théorème pour ça :

- c.v.g dominée ...

$$F(x) = \int_0^1 e^{-xt}\, \frac{\sin t}{t}\, dt + \int_1^{\infty} e^{-xt}\, \frac{\sin t}{t}\, dt$$

$$F_1(x) = \int_0^1 e^{-xt}\, \frac{\sin t}{t}\, dt$$

$$F_2(x) = \int_1^{\infty} e^{-xt}\, \frac{\sin t}{t}\, dt$$

$$F_1(x) - F_1(x') = \int_0^1 (e^{-xt} - e^{-x't})\, \frac{\sin t}{t}\, dt$$

théorie des Croissement finie

$$|e^a - e^b| \leqslant f'(c)\, |a - b| \, , \ a < c < b$$

$$\leqslant e^c\, |a - b|$$

$e^{-xt} - e^{-x't}$ $\quad -xt < c < -x't \, , \ x' < x$

$e^c \leqslant e^{|c|}$ $\quad x' < c < x$

$\leqslant e^x$

$F_1(x) - F_1(x') = \int_0^1 (e^{-xt} - e^{-x't}) \frac{\sin t}{t}\, dt$

on a $\left|\frac{\sin t}{t}\right| \leq 1$

$|F_1(x) - F_1(x')| \leq \int_0^1 e^x |x-x'| t \, dt$

$\leq e^x |x-x'|$ car $0 \leq t \leq 1$

Donc F_1 est localement Lipschitzienne ce qui implique F_1 est Continue.

* $F_2(x) = \int_1^{\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t}\, dt \quad , x \geq 0$

on peut utiliser le théorie de Convergence dominée car on est près de 0 , $x \geq 0$

$u' = e^{-xt} \sin t$

$v = \frac{1}{t}$

Integration par partie, pour faire apparaître $\frac{1}{t^2}$ qui

$F_2(x) = \left[\frac{u(t)}{t}\right]_0^{\infty} + \int_1^{\infty} \frac{u(t)}{t^2}\, dt$

comme $u' = e^{-t} \sin t$

Donc $u(t) = e^{-xt}(a\cos t + b\sin t)$

on dérive :

$u'(t) = e^{-xt} \begin{pmatrix} -a\sin t & b\cos t \\ -bx\sin t & -ax\cos t \end{pmatrix}$

$u'(t) = e^{-xt}(-(a+bx)\sin t + (b-ax)\cos t)$

Par identification :

$\Rightarrow \begin{cases} b = ax \\ a + bx = -1 \end{cases}$

$a + ax^2 = -1$

$a = \frac{-1}{1+x^2} \quad , b = \frac{-}{1+x^2}$

$F_2(x) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-xt} \sin t}{t}\, dt$

$F_2(x) = -\frac{1}{1+x^2} \left[\frac{e^{-xt}(\cos t + x\sin t)}{t}\right]_1^{\infty} - \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{\text{continue}} \underbrace{\int_1^{\infty} \left(\frac{\cos t + x\sin t}{t^2}\right) e^{-xt}\, dt}_{\text{Converge dominée}}$

continue + on majore $\leq \frac{1}{t^2}$ qui est integrable

$-\frac{1}{1+x^2}\left[\frac{e^{-xt}(\cos t + \sin t)}{t}\right]_1^{\infty}$

$= \underbrace{\frac{1}{1+x^2} e^{-x}(\cos 1 + x\sin 1)}_{\text{Continue.}}$

donc F_2 est Continue

alors F est Continue

2 - Pour tout $x > 0$

verifiant que $|F(x)| \leq \frac{1}{x}$

$|F(x)| \leq \int_0^{\infty} e^{-xt} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt ,$

$\leq \int_0^{\infty} e^{-xt}\, dt = \frac{1}{x}$

$f(x,t) = e^{-xt}\,\frac{\sin t}{t}$.

3- Application du théorème de dérivation.

H 1 : $(t,x) \longmapsto f(t,x)$ dérivable % x en $\forall t$

$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}$ existe et $\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ est Continue

Sur $]0,\infty[$

dérivée partielle

H 2 : Pour $x \in [0,\infty[$; $a>0$

$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| \leqslant e^{-at}$ est integrable sur $\mathbb{R}_+$ et noter bien elle est ~~intéo~~ independante de x

D'après le théorème de dérivation F est de classe C^1 sur $[a,+\infty[$ comme $a>0$ et quel donc F est C^1 sur $[a,+\infty[$ calculons $F'(x)$; $\forall x>0$

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt \;,\; x>0$$

$$= -\int_0^{\infty} e^{-xt}\sin t\,dt$$

$$= \frac{1}{1+x^2}\left[e^{-xt}(\cos t + x\sin t)\right]_0^{\infty}$$

$$F'(x) = -\frac{1}{1+x^2} \;,\; \forall x>0$$

donc $F(x) = C - \operatorname{arctg} x$;
cste d'integration

Comme $|F(x)| < \frac{1}{x}$

$\lim_{+\infty} F(x) = 0$

$F(x) \xrightarrow[+\infty]{} 0$

avec $C = \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$

$F(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$; $x \geqslant 0$

ça définie en 0

4) $\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = F(0) = \frac{1}{2}$

Exercice n° 2 :

Integrales de Fros

1) $C = \int_0^{\infty} \cos(x^2)\,dx$

$S = \int_0^{\infty} \sin(x^2)\,dx$

on pose $y = x^2 \Rightarrow dy = 2x\,dx$

$\Rightarrow x = \sqrt{y} \Rightarrow dx = \frac{dy}{2x}$

$$C = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \cos y\,\frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{\cos y}{\sqrt{y}}\,dy$$

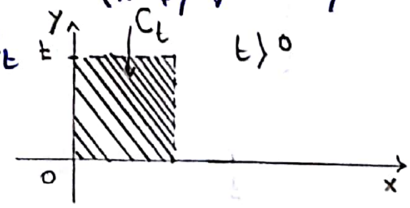
on a $\int_0^{\infty} \cos y\,dy$ est majorée

et $\frac{1}{\sqrt{y}} \searrow$

Du Hame

donc C converge

2- $F(t) = \iint_{C_t} \sin(x^2+y^2)\,dx\,dy$ $t>0$



$$F(t) = \iint_{C_t} (\sin x^2 \cos y^2 + \cos x^2 \sin y^2)\,dx\,dy$$

cste % y

Tonelli
$$= \int_0^t \Big(\underbrace{\int_0^t \sin x^2\,dx}_{\text{constante } \% \ y}\Big) \cos y^2\,dy + \int_0^t \Big(\int_0^t \cos x^2\,dx\Big) \sin y^2\,dy$$

$$= \Big(\int_0^t \sin x^2\,dx\Big)\int_0^t \cos y^2\,dy + \int_0^t \sin y^2\,dy \int_0^t \cos x^2\,dx$$

variable muette

$$= 2\Big(\int_0^t \sin x^2\,dx\Big)\Big(\int_0^t \cos x^2\,dx\Big)$$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Théorème Césaro

$u_n \longrightarrow \ell$

$\dfrac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n} \longrightarrow \ell$

utilité pour certain de calcul dificile

utilisation de théorème de Césaro

si $u_n \longrightarrow \ell$

$\dfrac{u_1 + \cdots + u_n}{n} \longrightarrow \ell$

on remplace par $\int_0^t$ et on derive sur t.

Si $\begin{bmatrix} \varphi(x) \longrightarrow \ell \\ x \longmapsto \infty \end{bmatrix}$

alors
$$\frac{1}{t}\int_0^t \varphi(x)\,dx \underset{t \to \infty}{\longrightarrow} L$$

définition de limite.

$\varepsilon > 0, \ \exists A > 0$

$t \geq A, \Rightarrow \left|\frac{1}{t}\int_0^t \varphi - 1\right| \leq \varepsilon$

or on a $\varphi(x) \underset{x \longmapsto \infty}{\longrightarrow} L$

$\forall \varepsilon > 0, \ \exists B > 0$

$x \geq B \Rightarrow |\varphi(x) - L| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

$t \geq B$ $\quad \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t \varphi(x)\,dx - L$

$$= \frac{1}{t}\Big[\int_0^t (\varphi(x) - L)\,dx$$

$$= \frac{1}{t}\Big[\int_0^B (\varphi(x) - L)\,dx + \underbrace{\int_B^t (\varphi(x) - L)\,dx}\Big)$$

Pour $t \geq B$ $\quad t \geq B$ donc $\leq \frac{\varepsilon}{2}$

$$\left|\frac{1}{t}\int_0^t \varphi - L\right| \leq \frac{1}{t}\underbrace{\int_0^B |\varphi(x) - L|\,dx} \leq \frac{1}{t} B(\|\varphi\|_\infty + L)$$

Pour t assez grand

$$\frac{1}{t} B(\|\varphi\|_\infty + L) \underset{t \to \infty}{\longrightarrow} 0$$