FACULTE DES SCIENCES DE TUNIS
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

M1R-MA
Septembre 2018

Feuille d'exercices N° 1

Exercice 1.

Soit l une forme linéaire non nulle sur E dont le noyau H est fermé.

(1) *Justifier l'existence de $x \in E$ tel que $l(x) = 1$.*
(2) *Justifier l'existence de $r > 0$ tel que $\forall y \in B(0,r)$, $l(y) \neq -1$.*
(3) *Montrer alors que $\forall y \in B(0,r)$, $|l(y)| \leq 1$.*
(4) *En déduire que l est continue.*
(5) *On prend $E = C^{\infty}([0,1], \mathbb{C})$ muni de la norme de la convergence uniforme et on considère l'endomorphisme de E défini par $u(f) = f'$.*
 a) *Quel est le noyau de u?*
 b) *u est-il continu?*

Exercice 2.

Démontrer qu'un espace métrique compact est séparable.

On rappelle qu'un espace métrique est séparable s'il contient une partie dénombrable partout dense.

Exercice 3.

Soit (X,d) et (Y,d') deux espaces métriques, Y étant supposé complet et soient A une partie dense de X et $f : A \longrightarrow Y$ une application uniformément continue. Démontrer qu'il existe un unique prolongement uniformément continu $\widetilde{f}$ de f sur X.

Indication: *$\widetilde{f}$ doit vérifier $\widetilde{f}(x) = \lim f(x_n)$ où (x_n) est une suite dans A qui converge vers x.*

Exercice 4.

Soit $\alpha \in]0,1]$ et $I = [0,1]$. On note $C^{0,\alpha}(I)$ l'ensemble des fonctions Holderiennes sur I de rapport α, c'est à dire les fonctions $u : I \longrightarrow \mathbb{C}$ pour lesquelles il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall x, y \in I \qquad |u(x) - u(y)| \leq C\,|x-y|^{\alpha}.$$

On note alors $|u|_{\alpha} = \sup\limits_{\substack{x \neq y \\ x,y \in I}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\alpha}}$ *et* $\|u\|_{\alpha} = \|u\|_{\infty} + |u|_{\alpha}$.

(1) a) *Vérifier que $(C^{0,\alpha}(I), \|\cdot\|_{\alpha})$ est un espace de Banach.*
 b) *Comparer $C^{0,\alpha}(I)$ et $C^{0,\beta}(I)$ pour $0 < \alpha < \beta \leq 1$.*
 c) *Dans quels espaces $C^{0,\beta}(I)$ est la fonction $u_{\alpha}(x) = x^{\alpha}$?*
(2) *Démontrer que la boule unité fermée $B'(C^{0,\alpha}(I))$ de $C^{0,\alpha}(I)$ est une partie compacte de $C(I)$.*
(3) *Soient α et β vérifiant $0 < \alpha < \beta < 1$ et $f \in C^{0,\beta}(I)$*
 a) *Démontrer que pour tout $\eta > 0$ on a $|f|_{\alpha} \leq \max\left(\eta^{\beta-\alpha}|f|_{\beta}, 2\|f\|_{\infty}\eta^{-\alpha}\right)$.*
 En déduire que si $(f_n)_n$ est une suite bornée de $C^{0,\beta}(I)$ qui converge uniformément vers f alors $\|f_n - f\|_{\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
 b) *Démontrer alors que la boule unité fermée $B'(C^{0,\beta}(I))$ de est $C^{0,\beta}(I)$ un compact de $C^{0,\alpha}(I)$.*

Exercice 5.
Soit E un K-espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E.
Montrer qu'il y a équivalence de :
(1) $x \in \overline{F}$,
(2) *pour toute forme linéaire continue l sur E nulle sur F, on a $f(x) = 0$.*
En déduire une caractérisation des sous-espaces vectoriels denses de E.

Serie n° 1

Exercice 1:

$f : E \xrightarrow{l_n} K$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), E k.e.v,

$f \neq 0$.

$H = \ker f = \{x \in E,\ f(x) = 0\}$ fermé de K

A fermé $\Leftrightarrow \bar{A} = A$

$x \in \bar{A} \Leftrightarrow \exists (x_n)_n \subset A \quad x_n \to x$

$x \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall B(x,r) \quad B(x,r) \cap A \neq \emptyset$

1. $\exists ?\ x \in E,\ l(x) = 1$, en effet

Comme $l \neq 0$ $\exists a \in E,\ l(a) \neq 0$

on pose $x = \dfrac{a}{l(a)} \in \underset{\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}}{K} . E \subset E$ car E e.v.

et vérifie $l(x) = \dfrac{l(a)}{l(a)} = 1$

2. $\exists r \overset{?}{>} 0$, $l(y) \neq -1$. $\forall y \in B(a,r)$ (*)

$l(y) = -1 \Leftrightarrow l(y) + 1 = l(y) + l(x)$
$= l(y+x)$
$= 0$

$\Leftrightarrow y + x \in \ker l$

$l(y) \neq -1 \Leftrightarrow y + x \in (\ker l)^c$

$\Leftrightarrow y \in \{\ker l\}^c - \{x\}$

(*) $\exists r > 0$? $B(0,r) \subset (\ker l)^c - \{x\}$

Comme $(\ker l)^c$ est un ouvert de E

et t_x est un homéomorphisme de E

ds E alors $(\ker l^c) - \{x\} = t_x(H^c)$

est un ouvert de E contenant 0

car $l(x) = 1 \neq 0$

3) Par l'absurde, on suppose qu'il... ①

$\exists b \in B'(0,r)$, $|l(b)| > 1$

Soit $y = \dfrac{-b}{l(b)} \in B(0,r)$ en effet

$\left\| \dfrac{-b}{l(b)} \right\| = \dfrac{1}{\|l(b)\|} \|b\| < \|b\| < r$

or $l(y) = l\left(\dfrac{-b}{l(b)}\right) = -1$

et $y \in B'(0,r)$ absurde

D'où l est bornée par 1 ds $B'(0,r)$

4) l est bornée sur $B'(a,r)$

$\Rightarrow l$ est bornée sur $B'(0,1)$

Soit $z \in B'(0,1)$ alors $rz + a \in B(a,r)$

en effet $\|rz + a - a\| = \|rz\| = r\|z\|$
$< r$

Comme l est bornée alors

$|l(rz+a)| \leq M$

$\Rightarrow |l(z) + l(a)| \leq M$

$\to |r\ l(z) + l(a)| \leq M$

$\to r|l(z)| \leq M - l(a) \Rightarrow |l(z)| \leq \dfrac{M - l(a)}{r}$

4) Comme l est linéaire et bornée

par 1 sur $B'(0,r)$ alors l est bornée

par $\dfrac{1}{r}$ sur $B'(0,1)$

en effet, $\forall z \in B'(0,1)$, $rz \in B'(0,r)$

$\Rightarrow |l(rz)| = r|l(z)| \leq 1$

$\to |l(z)| \leq \dfrac{1}{r}$

Remarque.

Un operateur est une application linéaire de E ds E

Une forme lineaire est une application lineaire de E ds $\mathbb{K}$.

E K.e.v. $\ell : E \xrightarrow{\text{lin}} k$, $\ell \equiv 0$

$\ell^{-1}(\{0\}) = \{x \in E, \ell(x) = 0\}$

$= \ker \ell$ fermé de E

$\Leftrightarrow$ ℓ est Continue

5. $E = C^{\infty}([0,1], \mathbb{C})$;

$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$, $f \in E$

$u : E \longrightarrow E$: endomorphisme

$f \longmapsto f' = u(f)$

a) $\ker u = \{f \in \mathcal{C}^{\infty}([0,1], \mathbb{C}) ; f' = 0\}$

$= \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}, \text{cste}\}$

$= \mathbb{C}$

Ker u est un fermé de E, en effet, $\forall c_n \in \ker u$ / c_n cv vers c, alors $c \in \mathbb{C}$

b) u est-il cont ?

on pose $f_n(t) = \frac{\sin(nt)}{n}$, $t \in [0,1]$

$f_n \in E$

$\|f_n\|_{\infty} = \sup_{t \in [0,1]} |f_n(t)| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

Donc f_n Converge ds E vers 0 mais $u(f_n) = f_n'$ verifie $f_n'(t) = \cos(nt)$ n'admet pas de limite

Donc, u n'est pas Continue

Exercice 2.

(E, d) Compact $\Rightarrow$ (E, d) séparable

E séparable ssi $\exists A \subset E$, A dénombrable, $\bar{A} = E$

on a $E \subset \bigcup_{x \in E} B(x, \frac{1}{N})$, $N \in \mathbb{N}^*$

Comme E est Compact $\exists x_1^N, \dots, x_{k_N}^N \in E$,

$E \subset \bigcup_{i \in 1}^{k_N} B(x_i^N, \frac{1}{N})$

on pose $A = \{x_i^N, i \in \{1, \dots, k_N, N \in \mathbb{N}^*\}\}$

est une partie de E qui est réunion dénombrable d'ensemble finis, donc A est dénombrable

Montrer que $\bar{A} = E$?

Soit $x \in E$ et Soit $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^*$ $\frac{1}{N} < \varepsilon$ avec $x \in E$, $\exists i_0^N$;

$x \in B(x_{i_0}^N, \frac{1}{N}) \subset B(x_{i_0}^N, \varepsilon)$

$\Rightarrow d(x, x_{i_0}^N) < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall n \geq N$ $(\frac{1}{n} < \frac{1}{N}) \Rightarrow \underbrace{x_{i_0}^N}_{\in A} \subset B(x, \varepsilon)$

Exercice 3 :

(X,d), (Y,d') e.m
complet.

$\bar{A} = X$

$f : A \xrightarrow{\text{unif.Cont}} Y$; montrons que f admet un unique prolongement uniformement Cont.

$\tilde{f} : X \longrightarrow Y$
$x \longmapsto \tilde{f}(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$

ou $(x_n)_n \subset A$ et $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ds (X,d)

$\tilde{f}$ est bien définie, en effet si $(x_n)_n \subset A$.

Converge vers $x \in X \Rightarrow (x_n)_n$ de Cauchy ds A mais si $f : A \xrightarrow[\text{Cont}]{\text{unif}} Y$

(alors $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta$, $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ dès que $d(x,y) < \eta$, $x,y \in A$)

soit $\varepsilon > 0$, Comme (x_n) est de Cauchy ds A, pour η, $\exists N$:

$d(x_n, x_m) < \varepsilon$

$\forall n,m \geq N \Rightarrow d(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$

$\Rightarrow (f(x_n))_n$ est de Cauchy ds Y (complet) donc ~~montron~~

$\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ existe ds Y

montrons que $\tilde{f}(x)$ ne dépend pas de la suite $(x_n)_n \subset A$; $x_n \longrightarrow x$.

$\tilde{f}$ est bien définie et $\tilde{f}$ ne dépend pas pas du choix de la suite de A qui CV ds X

en effet si $(x_n), (x'_n) \subset A$ convergente ds X vers x

alors la suite $(x_1, x'_1, x_2, x'_2, \dots, x_n, x'_n, \dots)$ CV. aussi vers x.

or d'après ce qui précède la suite $(z_n)_n$ $(f(x_n), f(x'_n))$ CV ds Y

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x'_n)$

l'uniforme Continuité de $\tilde{f}$ est une Conséquence immédiate de la Continuité uniforme de f par passage à la limite

l'unicité de prolongement est une conséquence de la densité de A ds X

en effet : si g et h sont deux prolongement de f alors $\forall x \in X$, $h(x) = g(x)$?

$\forall x \in X$, $\exists (x_n)_n \subset A$
$x_n \xrightarrow{(X,d)} x$ et $h(x_n) = g(x_n)$

D'autre part, Comme g, h sont Continue en x alors par passage à la limite, $h(x) = g(x) \ \forall x \in X$

Exercice 4 :

$[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$G = \{ x \longrightarrow |x|^\alpha, \ 0 < \alpha < 1 \}$

Est-ce que G est équicontinue en 0 ?

$\mathcal{F}$ équicontinue en $a \in X$

$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta > 0 \ \ \forall f \in \mathcal{F}$

$\| f(x) - f(a) \|_\infty < \varepsilon$

dès que $d(x,a) < \eta$

Non : $|f(x) - f(0)| = |x|^\alpha < \varepsilon$

dès que $|x| < \underbrace{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}}_{= \eta}$

η dépend de $\alpha (f_\alpha)$

• $\alpha \in]0,1]$, $I = [0,1]$

$\mathcal{C}^{0,\alpha}(I) = \{ u : I \longrightarrow \mathbb{C} \ / \ \exists c > 0 : \forall x,y \in I, \ |u(x) - u(y)| \leq c|x-y|^\alpha \}$

$|u|_\alpha = \sup \dfrac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha}$, $\|u\|_\alpha = |u|_\alpha + \|u\|_\infty$

1°/ a) $(\mathcal{C}^{0,\alpha}(I), \| \ \|_\alpha)$ e.v.n Complet (Banach) ?

soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy ds $\mathcal{C}^{0,\alpha}(I, \| \ \|_\alpha)$

les étapes :

i) (f_n) est de Cauchy pour $\| \ \|_\alpha \Rightarrow (f_n)_n$ est de Cauchy ds $(\mathcal{C}^{0,\alpha}(I), \| \ \|_\infty) \subset (\underbrace{C(I), \| \ \|_\infty}_{\text{Banach}})$

$\Rightarrow \exists f \in \mathcal{C}(I), \ \| f_n - f \|_\infty \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$

ii) $f \in \mathcal{C}^{(0,\alpha)}$, ($\| f_n \|_\alpha$ unif. bornée parm)

iii) $\| f_n - f \|_\alpha \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$

Etape 2 :

$\|u\|_\alpha = \|u\|_\infty + \|u\|_\alpha$

$|u|_\alpha = \sup \dfrac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha}$

$\Rightarrow \dfrac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq \|u\|_\alpha$

on remplace par f_m

on obtient $| f_n(x) - f | \leq$

$| \|f_n\|_\alpha - \|f_m\|_\alpha | \leq \|f_n - f_n\|_\alpha \underset{n,m \to \infty}{\longrightarrow} 0$

$\Rightarrow \|f_n\|_\alpha$ est convergente

or toute suite convergente est bornée

donc $\|f_n\|_\alpha$ est bornée

$(\mathcal{C}^{0,\alpha}(I), \| \cdot \|_\alpha)$ e.v.n complet ?

soit (f_n) de Cauchy ds $(\mathcal{C}^{0,\alpha}(I), \| \ \|_\alpha)$;

alors (f_n) de Cauchy dans $(C(I), \| \ \|)$ qui est de Banach

$\Rightarrow (f_n)$ converge uniformément vers $f \in C(I)$

ième : $\exists c>0,\ \|f_n\|_\alpha \leq c$, en effet

$$\big|\|f_n\|_\alpha - \|f_m\|_\alpha\big| \leq \|f_n - f_m\|_\alpha$$

Comme (f_n) de Cauchy ds $(C^{0,\alpha}(I), \|\ \|_\alpha)$

Donc $\|f_n - f_m\|_\alpha \xrightarrow{n,m\to\infty} 0$

Donc $\big|\|f_n\|_\alpha - \|f_m\|_\alpha\big| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$

mais valeur absolue ds $\mathbb{R}$

et $\mathbb{R}$ Complet.

donc la suite $(\|f_n\|_\alpha)_n$ de Cauchy ds $\mathbb{R}$ qui est Complet. d'où $(\|f_n\|_\alpha)_n$ Converge ds $\mathbb{R}$ or Converge $\Rightarrow$ borné

donc $(\|f_n\|_\alpha)_n$ est bornée

Sachant que (déjà donné)

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq |f_n|_\alpha |x-y|^\alpha$$

Voir l'expression de $\|f_n\|_\alpha$ $\leq \|f_n\|_\alpha |x-y|$

$\leq c\,|x-y|$

$\|f_n\|_\alpha$ bornée.

par passage à la limite qd $n \to +\infty$

on a $|f(x) - f(y)| \leq c|x-y|^\alpha$

$\Rightarrow f \in C^{0,\alpha}$

- $\|f_n - f_m\|_\alpha = \|f_n - f_m\|_\infty + \sup \dfrac{|(f_n-f_m)(x) - (f_n-f_m)(y)|}{|x-y|^\alpha} < \varepsilon$ dès que $m > n > N$

Par passage à la limite, on obtient

(Nb: le grand on le met à l'∞)

on a $m \geq n$ $\|f_n - f_m\| \longrightarrow \|f_n - f\|$

$$\|f_n - f\|_\alpha = \|f_n - f\|_\infty + \sup \frac{|(f_n-f)(x) - (f_n-f)(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

$< \varepsilon$ dès que $n \geq N$

on obtient donc :

$\|f_n - f\| < \varepsilon$ dès que $n \geq N$

donc

(f_n) Converge vers f sur $(C^{0,\alpha}, \|\ \|_\alpha)$

Et par suite $(C^{0,\alpha}(I), \|\ \|_\alpha)$ est de Banach.

b) $0 < \alpha < \beta < 1$

$$\varphi^{0,\beta}(I) \subset \varphi^{0,\alpha}(I)$$

$f \in \mathcal{C}^{0,\beta}(I)$; $x \neq y \in I$

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\beta} \leq c$$

$$\begin{cases} |x-y| < 1 \\ \text{et} \\ \beta > \alpha \end{cases}$$

c) $u_\alpha(x) = x^\alpha$

elle appartient à quelle espace Holder ?

Mq $u_\alpha \in C^{0,\alpha}(I)$

Pour $x = y$ triviale

Pour $x \neq y$; $x > y$

$$\frac{|u_\alpha(x) - u_\alpha(y)|}{|x-y|^\alpha} = \frac{x^\alpha - y^\alpha}{(x-y)^\alpha} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{fct rationnelle}}}{R(x,y)}$$

R est une fct homogène

R est homogène car :

$$R(x,y) = \frac{x^\alpha - y^\alpha}{(x-y)^\alpha} = \frac{x^\alpha\left(1-\left(\frac{y}{x}\right)^\alpha\right)}{y^\alpha\left(1-\left(\frac{y}{x}\right)^\alpha\right)}$$

$$= \frac{1-\left(\frac{y}{x}\right)^\alpha}{1-\left(\frac{y}{x}\right)^\alpha}$$

En raison de l'homogénéité de R on peut prendre $x = 1$ et $y = t \in [0,1[$

(homogénéité $R(ax,ay) = R(x,y)$)

$$R(x,y) = \tilde{R}(t) = \frac{1-t^\alpha}{(1-t)^\alpha} \text{ est continue}$$

(Si φ continue sur $[a,b[$ et $\lim\limits_{x\to b}\varphi$ existe donc φ est bornée)

$$R(x,y) = \tilde{R}(t) = \frac{1-t^\alpha}{(1-t)^\alpha}$$

$\tilde{R}$ est continue sur $[0,1[$

et $\lim\limits_{t\to 1}\tilde{R}(t) = 0$

par suite $\tilde{R}$ est bornée sur $[0,1]$

$\Rightarrow$ R bornée sur $[0,1]$

$$\lim_{t\to 1} R(t) \underset{\substack{\uparrow \\ t = u+1}}{=} \lim_{u\to 0} \frac{-(1+u)^\alpha}{u^\alpha}$$

$$(1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + u\alpha\alpha$$

$$\Rightarrow 1-(1+u)^\alpha = -\alpha u$$

donc

$$\lim_{u\to 0} \alpha u^{\overbrace{1-\alpha}^{>0}} = 0$$

donc $(u_\alpha) \in C^{0,\alpha}(I)$.

Pour $0 < \alpha < \beta < 1$

$u_\alpha \notin C^{0,\beta}(I)$ (montrons que inclusion strict)

on pose :

$$x = \frac{1}{n},\ y = \frac{1}{n^2} \ ;\ n \geq 1$$

$$\frac{|u_\alpha(x) - u_\alpha(y)|}{|x-y|^\beta} = \frac{\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{n^{2\alpha}}}{\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)^\beta}$$

$$= \frac{\frac{1}{n^\alpha}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^\beta}\left(1-\frac{1}{n}\right)^\beta}$$

$$= \underbrace{n^{\beta-\alpha}}_{\to\infty} \underbrace{\frac{1-\frac{1}{n^2}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^\beta}}_{\to 1}$$

$n \longrightarrow \infty$

∞

$\Rightarrow u_\alpha \notin C^{0,\beta}(I)$

2) $B'_\alpha = B'(0,1) \subset C^{0,\alpha}(I)$
$= \{ f \in C^{0,\alpha}(I) \ / \ \|f\|_\alpha \leq 1 \}$

terme ds $C^{0,\alpha}(I)$

Montrons que B'_α Compacte de $(C(I), \| \|_\infty)$

- B'_α est un fermé de $(C(I), \| \|_\infty)$ (par les suite)

Soit $(f_n)_n \subset B'_\alpha$ tel que $f_n \xrightarrow[\text{unif}]{\text{converge}} f$ pour $\| \|_\infty$ ds $C(I)$

Montrons que $f \in C^{0,\alpha}(I)$ et que $\|f\|_\alpha \leq 1$ car $(f_n) \in B'_\alpha$.

$$\|f_n\|_\alpha = \|f_n\|_\infty + \sup \frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq 1$$

Par passage à la limite qd $n \to \infty$

on a $\|f\|_\alpha \leq 1 \Rightarrow f \in B'_\alpha$.

$\Rightarrow B'_\alpha$ est un fermé de $(C(I), \| \|_\infty)$

Pour montrer que B'_α est Compact donc relativement Compact ds $(C(I), \| \|_\infty)$

on montre grâce au théorème d'Arzela-Ascoli que les élements de B'_α est i) équicontinue et ii) uniformement bornée

c'est le Cas Car:

$\forall f$ ii/ $\|f\|_\infty \leq \|f\|_\alpha \leq 1$. ④

(B'_α est uniformement bornée)

i) $\forall f \in B'_\alpha$ et $\forall x,y \in I$

$|f(x) - f(y)| \leq \|f\|_\alpha |x-y|^\alpha \leq |x-y|^\alpha$

car Ceci est bornée indépendament de f

$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$

$\Rightarrow \|f\|_\alpha |x-y|^\alpha < \varepsilon$

$|x-y| < \left(\frac{\varepsilon}{\|f\|_\alpha}\right)^{1/\alpha}$

$\hookrightarrow B'_\alpha$ est équicontinue

en effet pour $\mu = \varepsilon^{1/\alpha}$.

il faut que μ dépend uniquement de ε ne dépend pas de f

$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ dès que $|x-y| < \mu$ cqfd.

3) $0 < \alpha < \beta < 1$

soit $f \in C^{0,\beta}(I)$ [d'après 1) b) $C^{0,\beta}(I) \subset C^{0,\alpha}(I)$ $\Downarrow$ $f \in C^{0,\alpha}(I)$]

Soit $0 < \eta < 1$.

montrons que :

$$|f|_\alpha \leq \max(\eta^{\beta-\alpha} |f|_\beta, 2\|f\|_\infty \eta^{-\alpha})$$

• Si $|x-y| \geq \eta$, $x \neq y$ $\quad |f(x)| \leq \sup |f(x)| = \|f\|_\infty$

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq \frac{|f(x)|-|f(y)|}{\eta^\alpha}$$

$$\leq 2\|f\|_\infty \eta^{-\alpha}$$

$$\Rightarrow |f|_\alpha \leq 2\|f\|_\infty \eta^{-\alpha}$$

• Si $|x-y| \leq \eta$ $\quad \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\beta} \leq \sup \frac{|\ |}{|x-y|^\beta} = |f|_\beta$

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} = \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\beta} \cdot |x-y|^{\beta-\alpha}$$

$$\leq |f|_\beta \cdot \eta^{\beta-\alpha}$$

$$\Rightarrow |f|_\alpha \leq |f|_\beta \cdot \eta^{\beta-\alpha}.$$

<u>conclusion:</u> $|f|_\alpha \leq \max(|f|_\beta \eta^{\beta-\alpha}, 2\|f\|_\infty \eta^{-\alpha})$

• (f_n) est bornée de $C^{0,\beta}(I)$

Soit $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$

montrons que $\|f_n - f\|_\alpha \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

sachant que :

$$\|f_n - f\|_\alpha \leq \max(|f_n - f|_\beta \eta^{\beta-\alpha}, 2\|f_n - f\|_\infty \eta^{-\alpha})$$

$$\leq \max((|f_n|_\beta + |f|_\beta)\eta^{\beta-\alpha}, 2\|f_n - f\|_\infty \eta^{-\alpha})$$

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\alpha \leq (C + |f|_\beta)\eta^{\beta-\alpha}.$$

où C est le majorant de $\|f_n\|_\beta$

En passant à la limite qd $\eta \to 0$

$$\lim_{\eta\to 0} \|f_n - f\|_\alpha = 0.$$

b) $B'_{C^{0,\beta}(I)}$ compact de $(C^{0,\alpha}(I), \|\ \|_\alpha)$

Soit $(f_n)_n \subset B'_{C^{0,\beta}(I)}$ alors $\|f_n\|_\beta \leq 1$

(f_n est bornée ds $C^{0,\beta}(I)$)

or d'après 2°) $B'_{C^{0,\beta}(I)}$ compact de $C(I)$, il existe alors une suite f_{k_n} de $B'_{C^{0,\beta}(I)}$ qui converge vers f uniformément

il sont donc de 3)a) que (f_{k_n}) converge vers ds $C^{0,\alpha}(I)$

Comme $(C^{0,\alpha}(I), \|\ \|_\alpha)$ est de Banach alors $B'_{C^{0,\beta}(I)}$ est compact de $C^{0,\alpha}(I)$

• E R.e.v.n., Soit $H \subset E$

<u>Définition.</u>

on dit que H est un hyperplan (affine) de E ssi $\exists \alpha \in \mathbb{R}$, f forme linéaire sur E ($f \neq 0$)

$$H = \{x \in E \mid f(x) = \alpha\} = f^{-1}(\{\alpha\})$$

fermé

Proposition:

H est un hyperplan fermé

$\Updownarrow$

f continue.

Théorème de Hahn - Banach

1ère version: géométrique:

Si A, B sont 2 parties non vides convexes disjoints tel que A est un ouvert il existe un hyperplan fermé qui sépare largement A et B

autrement dit, $\exists$ une forme lineaire et continue $f \neq 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$\forall x \in A$, $\forall y \in B$

$$f(x) \leqslant \alpha \leqslant f(y)$$

Théorème Hahn - Banach: 2ème version:

Si A et B est 2 convexes non vides, disjoints tel que A fermé et B est compact alors $\exists$ un hyperplan fermé qui sépare strictement A et B.

En d'autres termes, $\exists f$ forme lineaire et continue, $f \neq 0$ et $\exists \alpha \in \mathbb{R}$

$\forall x \in A$, $\forall y \in B$

$$f(x) < \alpha < f(y)$$