Chapitre 2

Espaces de Hilbert

2.1 Définitions et premières propriétés

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Définition 2.1
On appelle forme hermitienne sur E toute application $f : E \times E \to \mathbb{K}$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

i) Pour tout $y \in E$, $x \mapsto f(x, y)$ est linéaire.

ii) Pour tous $x, y \in E$, $f(y, x) = \overline{f(x, y)}$.
Cela entraine en particulier que pour tout $x \in E, y \mapsto f(x, y)$ est antilinéaire, c.à.d elle est additive et $f(x, \lambda y) = \overline{\lambda} f(x, y)$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

Remarques 2.1

1. *Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on a affaire à une forme bilinéaire symétrique et dans tous les cas, $f(x, x)$ est réel, pour tout $x \in E$.*
2. *Grâce à l'identité suivante, appelée identité de polarisation*

$$f(x, y) = 1/4[f(x + y, x + y) + f(x - y, x - y) + if(x + iy, x + iy) - if(x - iy, x - iy)],$$

on voit que f est entièrement déterminée par ses valeurs sur la diagonale de $E \times E$.

Définition 2.2
On appelle produit scalaire sur E toute forme hermitienne f définie positive sur E, c.à.d telle que $f(x, x) > 0$ pour tout $x \in E \setminus \{0\}$.

Remarques 2.2

1. *Un produit scalaire est en général noté par $\langle .,. \rangle$ ou $(.,.)$.*

2. *On établit facilement les deux inégalités classiques :*
Inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|(x,y)|^2 \leq (x,x)(y,y)$$

(considérer pour cela le trinôme $P(\lambda) = (\lambda x+y, \lambda x+y) \geq 0$*, puis choisir* $\lambda = \frac{\overline{(x,y)}}{|(x,y)|} \cdot t, t \in \mathbb{R}$*).*
Inégalité de Minkowski

$$(x+y, x+y)^{1/2} \leq (x,x)^{1/2} + (y,y)^{1/2}.$$

Cela entraine, en particulier, que l'existence d'un produit scalaire sur E *fournit immédiatement une norme définie par* $\|x\| = (x,x)^{1/2}$ *et munit* E *d'une structure d'espace vectoriel normé.*

Définition 2.3
On appelle espace préhilbertien un espace vectoriel muni d'un produit scalaire (et de la norme associée).
Et on appelle espace de Hilbert tout espace préhilbertien complet.
Un espace de Hilbert est, en particulier, un espace de Banach.
Deux vecteurs x *et* y *d'un espace de Hilbert (ou d'un préhilbertien)* E *sont dits orthogonaux si leur produit scalaire est nul. Comme* $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2Re(x,y)$*, deux vecteurs orthogonaux vérifient la relation de Pythagore :* $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$*.*
Si A *est une partie non* $\varnothing$ *de* E*, on définit l'orthogonal de* A *noté* $A^\perp$ *par*

$$A^\perp = \{x \in E, (x,a) = 0 \text{ pour tout } a \in A\}.$$

On a $A^\perp = \bigcap\limits_{a \in A} a^\perp$ *, ce qui prouve que* $A^\perp$ *est un sous espace fermé de* E*, car, par continuité du produit scalaire, chacun des* $a^\perp$ $(a \neq 0)$ *est un hyperplan fermé de* E*.*

Exemples d'espaces de Hilbert

1. Tout d'abord l'exemple le plus naturel : $\mathbb{K}^n$, muni du produit scalaire $(x,y) = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}$ et de la norme euclidienne $\|x\| = (\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j|^2)^{1/2}$

2. $l^2(\mathbb{K})$: l'espace des suites $u = (u_n)_{n\geq 1}$ de $\mathbb{K}$ telles que $\sum\limits_{n\geq 1} |u_n|^2 < +\infty$. muni du produit scalaire $(u,v) = \sum\limits_{n\geq 1} u_n \overline{v_n}$.

3. Plus généralement, pour $s \in \mathbb{N}$ posons

$$l_s^2 = \{u = (u_n)_{n\geq 1} \in l^2(\mathbb{K}), (n^s u_n)_{n\geq 1} \in l^2(\mathbb{K})\}$$

l_s^2 est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $(u,v)_s = \sum\limits_{n\geq 1} n^{2s} u_n \overline{v_n}$. On a $l_0^2 = l^2(\mathbb{K})$; si $s_1 \leq s_2$ alors $l_{s_2}^2 \subset l_{s_1}^2$ (injection continue) et les l_s^2 constituent une chaine décroissante de Hilberts.

Exercice :
$l^2_{+\infty} = \bigcap_{s\geq 0} l^2_s$ est formé par les suites à "décroissance rapide". c.a.d telles que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $c_k > 0$, vérifiant $|n^k u_n| \leq c_k$, pour tout $n \geq 1$.

4. Si μ est une mesure positive sur un ensemble X, alors $L^2(X,\mu)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $(f,g) = \int_X f\bar{g}d\mu$.

2.2 Théorème de projection et applications

On rappelle qu'une partie C d'un espace vectoriel E est convexe si pour tous $x, y \in C$, le segment $[x,y] = \{tx + (1-t)y, t \in [0,1]\}$ est contenu dans C. Ainsi, tout sous espace vectoriel de E est convexe.

Théorème 2.1 *(Projection) Soit E un espace de Hilbert et C une partie non vide, convexe et fermée de E. Alors*

a) Pour tout $x \in E$, il existe un unique point de C (appelé projection de x sur C) dont la distance à x est minimum.

b) La projection de x sur C est l'unique point $x_0 \in C$ tel que l'on ait

$$Re(x - x_0, y - x_0) \leq 0 \quad \text{pour tout } y \in C.$$

Démonstration.

a) Rappelons la relation suivante, appelée identité de la médiane

$$\|u\|^2 + \|v\|^2 = 1/2\|u+v\|^2 + 1/2\|u-v\|^2. \tag{2.1}$$

Posons $d = inf\{\|x-y\|, y \in C\}$ et supposons qu'il existe y_1 et y_2 distincts dans C tels que $\|x - y_1\| = \|x - y_2\| = d$. Par convexité, $\gamma = 1/2(y_1 + y_2) \in C$ et en écrivant (2.1) avec $u = x - y_1$ et $v = x - y_2$, on obtient $2\|x-\gamma\|^2 = 2d^2 - 1/2\|y_1 - y_2\|^2 < 2d^2$ ce qui est impossible. Cela établit l'unicité de la projection.

Maintenant, par définition de la borne inférieure, il existe une suite (x_j) de C, telle que $\|x - x_j\| \to d$ lorsque $j \to +\infty$. En notant $\gamma_{jk} = 1/2(x_j + x_k)$ et en utilisant à nouveau l'identité de la médiane, on obtient

$\to x_0.$

$$1/2\|x_j - x_k\|^2 = \|x - x_j\|^2 + \|x - x_k\|^2 - 2\|\gamma_{jk} - x\|^2 \leq \|x - x_j\|^2 + \|x - x_k\|^2 - 2d^2.$$

$-\|x - x_j\||$ Le membre de droite tend vers 0 quand j et k tendent vers l'infini ; la suite (x_j) est donc de Cauchy. C étant fermé donc complet, elle converge vers un élément x_0 de C.

$-x_j\|$ Par continuité, on a $\|x - x_0\| = lim\|x - x_j\| = d$; ce qui achève la preuve du point a).

$\downarrow$

0

b) Soit $y \in C$, $t \in [0,1]$ et $y_t = x_0 + t(y - x_0) \in C$. On a

$n\ \|x - x_j\| = \|x - x_0\|$

$$\|x - x_0\|^2 \leq \|x - y_t\|^2 = \|x - x_0\|^2 + t^2\|y - x_0\|^2 + 2tRe(x_0 - x, y - x_0).$$

En faisant $t \to 0$, on voit que le coefficient de t est ≥ 0 ; ce qui établit l'inégalité $Re(x - x_0, y - x_0) \geq 0$.

Réciproquement, si un point y_0 de C vérifie cette inégalité pour tout $y \in C$, l'inégalité de droite ci-dessus montre, pour $t = 1$, que $\cancel{\|x - y\|^2 \leq \|x - y_0\|^2 + \|y - y_0\|^2}$, c.à.d $d(x, y_0) \leq d(x, y)$, ce qui caractérise la projection d'après le point a). cqfd

$\|x - x_0\| \leq \|x - y\|$

$\forall y \in C$

Corollaire 2.1 (Projection sur un sous espace vectoriel fermé.)
Soit F un sous espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert E et x un point de E. Alors la projection de x sur F est l'unique élément x_0 de F tel que $x - x_0$ soit orthogonal à F.

En effet, si x_0 désigne la projection de x sur F, on obtient le résultat en appliquant le b) du théorème 2.1 avec $y = x_0 + (x - x_0, z)z$, z quelconque dans F.
La réciproque est triviale.

Corollaire 2.2 (Supplémentaire orthogonal)
Soit F un sous espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert E. Alors le sous espace $F^{\perp}$ est un supplémentaire de F (appelé supplémentaire orthogonal) : $E = F \oplus F^{\perp}$. C'est à dire tout élément x de E admet une décomposition unique $x = y + z$, $y \in F, z \in F^{\perp}$.
En outre, les deux éléments y et z de cette décomposition sont les projections de x sur F et $F^{\perp}$ respectivement.

Il suffit, en effet d'écrire $x = P_F(x) + (x - P_F(x))$ et d'utiliser le Corollaire 2.1.
Ce résultat indique, en particulier, que l'application P_F, de projection sur F est linéaire, continue, de norme 1 si $F \neq \{0\}$.
Remarquons aussi que $(F^{\perp})^{\perp} = F$.

$P_F(\lambda x + y) = \lambda P_F(x) + P_F(y)$ $\quad \forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}$

Définition 2.4
On dit qu'une partie A d'un e.v.n E est totale si le sous espace vectoriel qu'elle engendre est dense dans E.

Et on peut énoncer le critère de totalité suivant.

Théorème 2.2 *Une partie A d'un espace de Hilbert E est totale si et seulement si $A^{\perp} = \{0\}$.*
En effet, en notant $VectA$ le sous espace engendré par A, on a la décomposition $E = \overline{VectA} \oplus \overline{VectA}^{\perp}$. Par suite, A est totale si et seulement si $\overline{VectA}^{\perp} = VectA^{\perp} = A^{\perp} = \{0\}$ (la première égalité étant vraie pour tous les sous espaces de E).

On donne maintenant un important résultat dû à F. Riesz.

Théorème 2.3 (Théorème de représentation de Riesz) *(Identification de l'espace et de son dual).*
A tout vecteur y d'un espace de Hilbert E, on peut faire correspondre la forme linéaire continue définie par $L_y(x) = (x, y)$.
Réciproquement, étant donnée une forme linéaire continue L sur E, il existe un unique vecteur y de E tel que l'on ait $L = L_y$.

Démonstration. Le premier point est trivial, on a $|L_y(x)| = |(x, y)| \leq \|y\|\|x\|$, ce qui prouve que L_y est continue, de norme $\leq \|y\|$. Et on obtient l'égalité $\|L_y\| = \|y\|$ en prenant $x = y$.
Soit maintenant L une forme linéaire continue sur E, non nulle. Le sous espace $F = KerL$ est un hyperplan fermé de E et $F^{\perp}$ est évidemment non réduit à 0. Soit donc $y_0 \in F^{\perp}$, non nul.

Alors le vecteur $y = \frac{\overline{L(y_0)}}{\|y_0\|^2} y_0$ répond à la question, c'est à dire que $L = L_y$.
En effet, $L(y_0) \neq 0$ et tout vecteur x de E se décompose (de manière unique) en :

$L(x_2) = L(x - \frac{L(x)}{L(y_0)} y_0)$
$= L(x) - \frac{L(x)}{L(y_0)} . L(y_0)$
$= 0$

$$x = \frac{L(x)}{L(y_0)} y_0 + (x - \frac{L(x)}{L(y_0)} y_0) = x_1 + x_2,$$

$\langle x, y \rangle = \langle \frac{L(x)}{L(y_0)} . y_0 + x - \frac{L(x)}{L(y_0)} L(y_0), \frac{\overline{L(y_0)}}{\|y_0\|^2} y_0 \rangle$
$= \frac{L(x)}{L(y_0)} . \frac{L(y_0)}{\|y_0\|^2} . \langle y_0, y_0 \rangle = L(x)$

avec $x_1 \in F^\perp$ et $x_2 \in F$. D'où $(x, y) = (\frac{L(x)}{L(y_0)} y_0, \frac{\overline{L(y_0)}}{\|y_0\|^2} y_0) = L(x)$.
Et on obtient facilement l'unicité en remarquant que si $L_{y_1} = L_{y_2}$, alors $y_1 - y_2$ est orthogonal tout élément de E. ∎

Remarque 2.1
L'application $y \to L_y$ est une bijection isométrique de E dans E' : $\|y\|_E = \|L_y\|_{E'}$.
Elle est linéaire dans le cas d'un espace de Hilbert réel et antilinéaire dans le cas complexe ($L_{\alpha y} = \overline{\alpha} L_y$). On a donc une identification naturelle entre E et son dual topologique E'.

Le théorème de Lax-Milgram s'applique à certains problèmes aux dérivées partielles exprimés sous une formulation faible (appelée également formulation variationnelle). Ce théorème est une conséquence immédiate du théorème 2.3. Avant de l'énoncer on donne quelques définitions.

Définition 2.5
Soit $a : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire. On dit que :

- *a est continue (sur l'espace de Hilbert E) s'il existe une constante C_a telle que*

$$\forall x, y \in E, |a(x, y)| \leq C_a \|x\|_E \|y\|_E,$$

- *a est coercive s'il existe une constante $\alpha_a > 0$ telle que*

$$\forall x \in E, a(x, y) \geq \alpha_a \|x\|_E^2.$$

- *a est symétrique si*

$$\forall x, y \in E, a(y, x) = a(x, y).$$

On énonce maintenant de théorème de Lax-Milgram.

Théorème 2.4 (Théorème de représentation de Lax-Milgram)
Soit $a : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire, continue et coercive sur E et soit l une forme linéaire continue sur E. Alors, il existe un élément u_l et un seul de E tel que

$$\forall x \in E, \quad a(x, u_l) = l(x).$$

De plus, l'application qui à u associe u_l est linéaire et continue.
Si on suppose de plus que la forme a est symétrique, alors l'élément u_l est caractérisé comme étant l'unique élément de E qui minimise la fonctionnelle

$$J(x) := \frac{1}{2} a(x, x) - l(x).$$

Voir exercice 4 de la feuille d'exercices N° 4.

On achève ce paragraphe en détaillant un peu le cas particulier de la projection sur un sous espace de dimension finie.

Soit F un sous espace vectoriel de dimension finie p de E ; et $(x_1, ..., x_p)$ une base de F. Si on note P_F la projection sur F, on obtient pour $x \in E$: $P_F(x) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j x_j$ où $(\alpha_1, ..., \alpha_p)$ est l'unique solution du système d'équations

$$(x - P_F(x), x_i) = 0 \quad \text{pour } i = 1, ..., p.$$

c.à.d

$$\sum_{j=1}^{p} (x_j, x_i)\alpha_j = (x, x_i) \quad \text{pour } i = 1, ..., p.$$

Posons la définition suivante.

Définition 2.6
Le détetminant du système précédent

$$G(x_1, ..., x_p) = dét((x_j, x_i))_{1 \leq i,j \leq p},$$

est appelé le déterminant de Gram du système de vecteurs $(x_1, ..., x_p)$.
Notons que dans le cadre ci-dessus, il est non nul. De plus, si $(x_1, ..., x_p)$ est un système orthonormé, on obtient

$$G(x_1, ..., x_p) = 1 \quad et \quad P_F(x) = \sum_{j=1}^{p} (x, x_j)x_j.$$

Proposition 2.1 *Dans le cadre décrit ci-dessus, on a pour tout $x \in E$*

$$d(x, F) = \left[\frac{G(x_1, ..., x_p, x)}{G(x_1, ..., x_p)}\right]^{1/2}.$$

La preuve de ce résultat est laissée aux soins du lecteur.

Exercice : Montrer qu'un système de vecteurs $(x_1, ..., x_p)$ d'un Hilbert E est libre si et seulement si son déterminant de Gram est non nul et établir dans ce cas l'inégalité

$$0 < G(x_1, ..., x_p) \leq ||x_1||2||x_2||2...||x_p||2.$$

2.3 Bases Hilbertiennes

Rappelons tout d'abord qu'un espace métrique (et donc en particulier un espace de Hilbert) est dit séparable s'il contient une partie dénombrable partout dense.
L'objectif dans ce paragraphe est de montrer que dans un Hilbert séparable, on peut faire des calculs (essentiellement décomposer un vecteur, faire un produit scalaire, résoudre une équation...) comme si on était en dimension finie, à condition d'appliquer la règle suivante :

remplacer la décomposition en combinaison linéaire (donc finie) par une décomposition en une série convergente dans H. Cette décomposition se fera dans des "bases appropriées" de E, notre Hilbert en question.
Mais quelles bases ?
Étant en général, en dimension infinie (il en est ainsi de tous les bons espaces fonctionnels), on doit, bien entendu, mettre de côté toute ambition d'utiliser des bases algébriques : elles seraient trop "touffues" (toujours non dénombrables) et ne joueraient aucun rôle privilégié par rapport au produit scalaire, c.a.d par rapport 'a la structure spécifique de E.
On considère des suites d'éléments de E, libres et "presque génératrices", et qui sont de plus orthonormées ; c.à.d que vis à vis du produit scalaire, les éléments de cette suite vont s'ignorer les uns les autres, ce qui est important dans les calculs. Ce sont de telles suites, que on appelle bases hilbertiennes de E, qui vont permettre de réaliser le programme annoncé au début du paragraphe. On précise cela dans la définition suivante.

Définition 2.7
Une base hilbertienne d'un espace de Hilbert E est une suite $(e_j)_{j\geq 1}$ qui constitue un système total dans E et qui est orthonormée, c.à.d. $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ *(= 1 si $i = j$ et 0 sinon).*

Notons que si E possède une telle base, il est nécessairement séparable car les combinaisons linéaires des e_j à coefficients rationnels, forment alors une partie dense de E.
On s'assure à présent de l'existence de telles bases.

Théorème 2.5
Tout espace de Hilbert séparable possède une base hilbertienne.

Démonstration. Soit $(z_j)_{j\geq 1}$ une suite totale de E. On commence par supprimer tous les vecteurs qui sont combinaison linéaire des précédents. On obtient ainsi une suite $x_1, x_2, \ldots$ qui est libre et aussi totale. On lui applique le procédé suivant appelé procédé d'orthonormalisation de Schmidt.
Notons $F_n = Vect\{x_1, \ldots, x_n\}$; et posons $y_1 = x_1$ et pour $n \geq 2$; $y_n = x_n - P_{F_{n-1}}(x_n)$. La suite $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ est une suite orthogonale et telle que pour tout $n \geq 1$, $\{y_1, \ldots, y_n\}$ est une base de F_n. Comme le sous-espace $\bigcup\limits_{n\geq 1} F_n$ est dense dans E, cette suite est totale. Enfin la suite $e_n = y_n/||y_n||$ est orthonormale et fournit la réponse souhaitée. ◘ Remarquons maintenant qu'un espace de Hilbert étant, en particulier, un espace de Banach, toute série normalement convergente y est convergente. On a cependant le résultat plus spécifique suivant, où la condition portant sur les normes est moins restrictive.

Lemme 2.1 *Soit E un espace de Hilbert et $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de E deux à deux orthogonaux. Pour que la série $\sum\limits_{n\geq 0} x_n$ soit convergente il faut et il suffit que la série $\sum\limits_{n\geq 0} ||x_n||^2$ soit convergente. On a alors*

$$||\sum_{n\geq 0} x_n||^2 = \sum_{n\geq 0} ||x_n||^2.$$

Preuve. Le théorème de Pythagore appliqué à la somme partielle $S_N = \sum_{n=0}^{n} x_n$ donne $\sum_{n=0}^{n} \|x_n\|^2 = \|S_N\|^2 \to \|\sum_{n=0}^{+\infty} x_n\|^2$. Ce qui entraine que $\sum_{n\geq 0} \|x_n\|^2$ est convergente et donc, que la condition est nécessaire. Pour la réciproque, il suffit de voir que la suite (S_N) est de Cauchy et donc convergente dans E. ∎

Théorème 2.6
Soit E un espace de Hilbert séparable et $(e_n)_{n\geq 1}$ une base hilbertienne de E. Alors

a) Tout élément x de E peut se décomposer de façon unique sous forme d'une série convergente dans E :

$$x = \sum_{n\geq 0} c_n(x) e_n$$

où les composantes $c_n(x)$ sont données par $c_n(x) = (x, e_n)$ et vérifient :

$$\|x\|^2 = \sum_{n\geq 0} |c_n(x)|^2. \quad \textit{(Identité de Parseval)}$$

b) Réciproquement, étant donnés des scalaires c_n, $n = 1, 2, ...$ vérifiant $\sum_{n\geq 0} |c_n(x)|^2 < +\infty$, la série $\sum_{n\geq 0} c_n e_n$ converge dans E et sa somme x vérifie $c_n(x) = c_n$.

Démonstration.

a) Posons : $S_N = \sum_{n=1}^{N} c_n(x) e_n$; on a :

$$(x, S_N) = \sum_{n=1}^{N} |c_n(x)|^2 = \|S_N\|^2.$$

En vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient ainsi

$$\|S_N\|^2 \leq \|x\|\|S_N\| \;\text{ c.à.d.}\|S_N\|^2 \leq \|x\|^2. \quad \text{(Inégalité de Bessel)}$$

La série $\sum_{n\geq 1} |c_n(x)|^2$ est donc convergente ; et le lemme 2.1 assure qu'il en est de même pour la série $\sum_{n\geq 0} c_n(x) e_n$.

En notant y la somme de cette série, on vérifie facilement que, pour $n = 1, 2...$ $(x - y, e_n) = c_n(x) - c_n(x) = 0$; $x - y$ est donc orthogonal à un système total et par suite nul.

b) La convergence de la série $\sum_{n\geq 0} c_n(x) e_n$ découle encore du lemme 2.1. De plus, par continuité du produit scalaire,

$$(\sum_{n=1}^{N} c_n e_n, e_k) \to (x, e_k) \quad \text{quand} N \to +\infty.$$

Et le membre de gauche est égal à c_k dès que $N \geq k$.

■

Remarques 2.3

i) *Le lecteur a sans doute fait le parallèle entre la décomposition précédente et la décomposition en série de Fourier des fonctions (par exemple continues) périodiques.*
On retrouve là les deux aspects fondamentaux de cette théorie : l'analyse (point a)) et la synthèse (point b)).

ii) *Dans* $E = L^2(0, 2\pi)$, $\{e_n(t) = e^{int}/\sqrt{2\pi}, n \in \mathbb{Z}\}$ *est une base hilbertienne.*

iii) *La suite* $(e_n)_{n\geq 1}$ *définie par* $e_n = (\delta_{nm})_{m\geq 1}$ *est une base hilbertienne de* $l^2(\mathbb{K})$.

iv) *Tout espace de Hilbert séparable est isomorphe à* $l^2(\mathbb{K})$.

On achève ce paragraphe par un résultat qui généralise le théorème 2.6 et dont on laisse la preuve en exercice.

Théorème 2.7
Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ *une suite orthonormale d'un espace de Hilbert* E. *On note* F *le sous espace de Hilbert qu'elle engendre, c.à.d* $F = \overline{Vect\{fn, n \geq 1\}}$, *alors pour tout* $x \in E$, *la série* $\sum_{n\geq 1}(x, f_n)f_n$ *est convergente et a pour somme* $P_F(x)$, *la projection orthogonale de* x *sur* F. *On a, en particulier, l'inégalité de Bessel :*

$$\|P_F(x)\|^2 = \sum_{n\geq 1} |(x, f_n)|^2 \leq \|x\|^2.$$

2.4 Exemples de bases hilbertiennes.

1. Un premier exemple. On prend $E = L^2(]-1, 1[)$ et la suite des polynômes de Legendre :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right], \; n \in \mathbb{N}.$$

Chacun des P_n est de degré n ; ils sont deux à deux orthogonaux et constituent une suite totale de $L^2(]-1,1[)$ (théorème de Stone-Weierstrass). La suite $(\sqrt{\frac{2n+1}{1}}P_n)_{n\geq 0}$ est une base hilbertienne de E. Plus généralement, si I est un intervalle réel et $p : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue positive et non nulle, telle que $\int_I e^{r|x|}p(x)dx < +\infty$ pour un certain $r > 0$, on démontre que la suite des polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est totale dans $L^2(I, p(x)dx)$. On obtient ainsi une base hilbertienne de cet espace en normalisant une suite (P_n) de polynômes, $d^\circ P_n = n$, deux à deux orthogonaux.

2. Pour $I =]-1, 1[$, $p(x) = \frac{1}{1-x^2}$, on a les polynômes de Tchebycheff :
$T_0 = 1$ et pour $n \geq 1$, $T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}\cos(narcosx)$.

3. Pour $I = \mathbb{R}$, $p(x) = e^{-x^2}$, on a les polynômes d'Hermite :

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}).$$

4. Pour $I = \mathbb{R}^+$, $p(x) = e^{-x}$, on a les polynômes de Laguerre :

$$L_n(x) = e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}).$$

$g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^k g^{n-k}$

2.5 Un dernier mot : Histoire de convergence

Les espaces compacts sont bien commodes, et il est très regrettable que la boule unité fermée d'un Banach (ou d'un Hilbert) de dimension infinie ne soit pas compacte. Par exemple. d'une suite bornée, on ne peut pas en général extraire une sous suite convergente.
Dans un espace de Hilbert, on peut néanmoins corriger un peu ce défaut de compacité au prix de quelques concessions.

Définition 2.8
Dans un espace de Hilbert E. on dit qu'une suite (x_n) converge faiblement vers x, ce que l'on note $xn \rightharpoonup x$, si $(x_n, y) \to (x, y)$ pour tout $y \in E$.
Naturellement, la convergence forte (en norme) entraine la convergence faible ; mais la réciproque est fausse.

Attention : Si (e_n) est une suite orthonormée de E, on a $e_n \rightharpoonup 0$.
On dispose cependant du résultat intermédiaire suivant :

Proposition 2.2 *Dans un espace de Hilbert, si (x_n) converge faiblement vers x et si de plus $||x_n|| \to ||x||$, alors (x_n) converge fortement vers x, c.à.d $||x_n - x|| \to 0$.*

Il suffit d'écrire $||x_n - x||^2 = ||x_n||^2 + ||x||^2 - 2Re(x_n, x)$, puis de remarquer que ce dernier terme tend vers $-2||x||^2$ lorsque n tend vers l'infini.

Cette notion de convergence correspond en fait à une topologie dite faible mais qui ne peut être définie par une métrique. Et on peut démontrer que la boule unité fermée de E est compacte pour la topologie faible. Mais ce n'est plus un voisinage de l'origine (on ne peut pas tout avoir !).
On se contente du résultat suivant (compacité séquentielle faible).

Théorème 2.8
Soit (x_n) une suite d'éléments d'un espace de Hilbert séparable E, vérifiant $||x_n|| \leq M$ pour tout n. On peut alors en extraire une sous suite (notée encore) (x_n) qui converge faiblement vers un élément x de E tel que $||x|| \leq M$. On dira que les parties bornées d'un espace de Hilbert sont faiblement relativement compactes.

La preuve est simple et laissée aux soins du lecteur (Si (e_n) est une base hilbertienne de E. on peut appliquer le procédé diagonal à la suite double $(x_n, e_m)_{n \geq 1, m \geq 1}$. puis utiliser la décomposition du théorème 2.6).