FACULTE DES SCIENCES DE TUNIS
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

M1R-MA
Novembre 2018

Feuille d'exercices N° 4

Exercice 1 (Bases algébriques des espaces de Banach).

Soit E un espace vectoriel normé Complet (Banach) *et $F = \{e_i, i \in I\} \subset E$ une famille de vecteurs de E indexée par un ensemble I (non nécessairement dénombrable). On rappelle que*

- *la famille F est génératrice si tout vecteur de x s'écrit comme une combinaison linéaire finie de vecteurs de F:*

$$\forall x \in E, \exists J \quad \text{fini} \subset I \quad \text{et } \{\alpha_i, i \in I\} \subset \mathbb{R} / x = \sum_{i \in J} \alpha_i e_i,$$

- *la famille F est libre si toute sous-famille finie est libre:*

$$\forall J \quad \text{fini} \subset I, \sum_{i \in J} \alpha_i e_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0, \forall i \in J.$$

Une famille $\mathcal{B}$ est une base (algébrique) de E si elle est libre et génératrice.

(1) *Montrer que dans un espace de Banach de dimension infinie, toute base algébrique est nécessairement non dénombrable (Indication: Utiliser le théorème de Baire).*
(2) *Déduire de ce qui précède qu'il n'existe aucune norme sur l'espace $\mathbb{R}[X]$ qui le rende complet.*

Exercice 2 (Produit de projection orthogonales et application).

Soit V un espace de Hilbert et deux sous-espaces vectoriels fermés V_1 et V_2 tels que $V = V_1 + V_2$.

0. *On suppose que V est de dimension finie. On désigne par Q_j , l'opérateur de projection orthogonale sur $V_j^{\perp}$. Montrer que $\|Q_1 Q_2\| < 1$.*
1. *On va maintenant généraliser le résultat au cas où V est de dimension infinie. Montrer l'existence d'une constante $\alpha > 0$ telle que*

$$\forall v \in V, \exists (v_1, v_2) \in V_1 \times V_2 \quad \text{tels que} \quad v = v_1 + v_2 \quad \text{et } \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 \leq \alpha^2 \|v\|^2.$$

(Indication: Utiliser le théorème de l'application ouverte). Montrer que $\alpha^2 \geq 2$.

2. *On désigne par P_j , $j = 1, 2$, la projection orthogonale de V sur V_1. Montrer que*

$$\forall v \in V, \|v\|_V \leq \alpha \big(\|P_1 v\|^2 + \|P_2 v\|^2 \big)^{1/2}.$$

3. *Soit Q_j la projection orthogonale sur $V_j^{\perp}$. Montrer que $\|Q_1 Q_2\| \leq \sqrt{1 - \alpha^{-2}}$.*

Exercice 3 (Non surjectivité de la transformation de Fourier de $L^1(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$).

Désignons par $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui tendent vers 0 à l'infini.

Il est bien connu que $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est un sous-espace fermé de $L^\infty(\mathbb{R})$. On rappelle que la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est une application linéaire, continue et injective de $L^1(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Le but de cet exercice est de montrer qu'elle n'est pas surjective.

(1) *Pour tout entier n, on pose $u_n(x) = \frac{\sin nx \sin x}{x^2}$. Montrer que $\lim_{n \to +\infty} \|u_n\|_{L^1} = +\infty$.*
(2) *Quelle est la transformée de Fourier de u_n ?*
(3) *Montrer que la transformation de Fourier n'est pas surjective de $L^1(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.*

Exercice 4 (Lemme de Gröthendieck).

(1) *Soit X et Y deux espaces de Banach de dimension infinie tels que $Y \subset X$ avec injection continue, c'est à dire qu'il existe $C > 0$ telle que*

$$x \in Y, \|x\|_X \leq C\|x\|_Y. \tag{0.1}$$

Soit S un sous-espace vectoriel de Y qui est fermé dans X. Montrer qu'il existe une constante $C_1 > 0$ telle que (Indication: Utiliser le théorème du graphe fermé)

$$x \in S, \|x\|_Y \leq C_1\|x\|_X. \tag{0.2}$$

(2) *On rappelle que $L^1(0,1)$ et $\mathcal{C}^0(0,1)$, munis respectivement des normes L^1 et L^∞ définies par*

$$\|u\|_{L^1} = \int_0^1 |u(x)|dx, \|u\|_{L^\infty} = \sup_{x\in[0,1]} |u(x)|,$$

sont des espaces de Banach. Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(0,1)$ qui est également un sous-espace fermé dans $L^1(0,1)$. Montrer qu'il existe une constante $C_1 > 0$ telle que

$$\forall u \in V, \|u\|_{L^\infty} \leq C_1\|u\|_{L^1}.$$

(3) *Montrer que V est également fermé de L^2 et qu'il existe une constante $C_2 > 0$ telle que*

$$\forall u \in V, \|u\|_{L^\infty} \leq C_2\|u\|_{L^2}.$$

(4) *Soit $(f_1, f_2, ..., f_N)$ une famille orthonormée dans L^2 telle que $f_j \in V$, $\forall 1 \leq j \leq N$. A tout $a = (a_1, a_2, ..., a_N) \in \mathbb{R}^N$, on associe $u_a \in V$ défini par*

$$u_a = \sum_{j=1}^{N} a_j f_j.$$

On note $|.|$ la norme euclidienne usuelle de $\mathbb{R}^N$. Montrer qu'il existe une constante $K > 0$ indépendante de N telle que

$$\forall t \in]0,1[, \forall a \in \mathbb{R}^N/|a| \leq 1, |u_a(t)| \leq K.$$

(5) *Montrer que $\forall t \in]0,1[$, $\sum_{j=1}^{N} |fj(t)|^2 \leq K^2$. En déduire que V est de dimension finie.*

(6) *On a démontré le lemme de Gröthendieck : tout sous espace de $\mathcal{C}^0(0,1)$ qui est fermé dans $L^1(0,1)$ est nécessairement de dimension finie. Cet énoncé reste-t-il vrai si on remplace $]0,1[$ par $\mathbb{R}$?*

Exercice 5 (Sur la limite simple d'une suite de fonctions continues).

Soit $\{f_n(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, n \geq 1\}$ une suite de fonctions continues. On suppose que cette suite converge simplement vers une limite $f(x)$. On sait que la fonction limite $f(x)$ n'est pas nécessairement continue sur $\mathbb{R}$. On va voir que néanmoins, l'ensemble des points où elle n'est pas continue est d'intérieur vide (c'est à dire que l'ensemble des points où elle est continue est dense).

(1) *A tout couple (n, k) d'entiers strictement positifs, on associe l'ensemble*

$$F_{n,k} = \{x \in \mathbb{R}/\forall p \geq n, \forall q \forall n, |f_p(x) - f_q(x)| \leq 1/k\}.$$

Montrer que $F_{n,k}$ est fermé et que, pour tout k, $\bigcup_{n=1}^{+\infty} F_{n,k} = \mathbb{R}$.

(2) *Montrer que pour tout* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $a < b$ *et pout tout entier* $k \geq 1$, *il existe* $n > 1$ *tel que* $F_{n,k} \cap [a, b]$ *soit d'intérieur non vide (Indication: Utiliser le théorème de Baire).*

(3) *Soit* $\mathcal{O}_{n,k}$ *l'intérieur de* $F_{n,k}$ *et* $\mathcal{O}_k = \bigcup\limits_{n\geq 1} \mathcal{O}_{n,k}$. *Montrer que, pour tout* $k \geq 1$, $\mathcal{O}_k$ *est dense dans* $\mathbb{R}$. *En déduire que l'ensemble* $\mathcal{O}$, *intersection sur* $k \geq 1$ *des ouverts* $\mathcal{O}_k$, *est dense dans* $\mathbb{R}$.

(4) *Démontrer que la fonction* f *est continue en tout point de* $\mathcal{O}$.

Exercice 6.

Soit E *un espace vectoriel normé sur* $\mathbb{R}$.

(1) *Soit* $x \in E$. *Montrer que*

$$\|x\| = \sup_{T \in E', \|T\| \leq 1} |Tx| .$$

(2) *Soit* (x_n) *une suite de* E *vérifiant :* $\varphi(x_n)$ *converge pour toute forme* $\varphi \in E'$. *Montrer que* $(x_n)_n$ *est bornée.*

Exercice 7.

Soit $T : E \longrightarrow F$ *linéaire,* E *et* F *deux espaces de Banach sur* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.
On suppose que $\varphi \circ T \in E'$ *pour tout* $\varphi \in F'$. *Montrer que* T *est continue.*

Exercice 8.

Soient E, F *deux espaces de Banach et* $f : E \longrightarrow F$ *une application linéaire continue. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) $\exists k > 0$ *tel que* $\|f(x)\|_F \geq k \|x\|_E$, $\forall x \in E$.
(ii) f *est injective et son image est fermée dans* F.
(iii) f *induit un homéomorphisme de* E *sur* $f(E)$.

Exercice 9.

On considère la suite $(x^j)_{j\geq 1}$ *d'éléments de* $l^2(\mathbb{C})$ *définie de la manière suivante :*
$x^j = \left(x_1^j,\ x_2^j,\ x_3^j, \ldots, x_n^j, \ldots\right)$ *avec* $x_j^j = 1$, $x_{j+2}^j = -4$, $\forall j \geq 1$; *et* $x_n^j = 0$ *si* $n \notin \{j,\ j+2\}$.
On note $F = Vect\{x^1,\ x^2,\ x^3, \ldots\}$.

(1) *Etablir l'équivalence des propriétés suivantes :*
  a) $y = (y_1,\ y_2,\ y_3, \ldots) \in F^{\perp}$.
  b) $4y_{n+2} - y_n = 0$ *pour tout* $n \geq 1$.
  c) $y \in Vect\left\{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)_{n\geq 1},\ \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)_{n\geq 1}\right\}$.

(2) *Trouver la distance de* $y = (1, -2,\ 0,\ 0,\ 0, \ldots)$ *au sous espace vectoriel* $\overline{F}$.

Exercice 10.

Les trois questions dans cet exercice sont indépendantes.

On note $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ *qu'on munit de la norme uniforme.*

(1) *On considère l'application* φ *de* E *dans* $\mathbb{R}$ *telle que :*

$$\forall f \in E,\ \ \varphi(f) = \int_0^1 (2y - 1) f(y) dy.$$

Montrer que $\varphi \in E'$ *et calculer sa norme.*

(2) *On considère la suite des applications L_n de E dans $\mathbb{R}$ définie par :*

$$L_n(f) = \int_{1/n}^{1} \frac{f(t)}{\sqrt{t}} dt, \quad \forall n \geq 1.$$

a) *Déterminer l'application limite L et montrer que $\|L_n - L\| \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$.*
b) *Utiliser le Théorème de Banach-Steinhaus pour montrer que $L \in E'$.*
c) *Montrer que L est définie et continue sur $L^p((0,1),\mathbb{R})$ pour tout $p > 2$.*

(3) *Un opérateur est dit compact s'il transforme la boule unité fermé de E en un ensemble relativement compact.*
On considère l'application T de E dans E telle que :

$$\forall f \in E, \quad T(f)(x) = \int_0^1 cos(xy) f(y) dy.$$

Utiliser le Théorème d'Ascoli pour montrer que T est un opérateur compact de E.

Exercice 11.

Soit $E = C^1([0,1])$ l'espace des fonctions définies sur $[0,1]$, à valeurs complexes, continûment dérivables, et $F = \mathcal{C}([0,1])$ l'espace des fonctions continues définies sur $[0,1]$, à valeurs complexes, tous deux munis de la norme $\|.\|_\infty$.
Soit $T : E \longrightarrow F$ défini par $\forall f \in E, Tf = f'$.
On note $\mathcal{G}(T) = \{(f, Tf); f \in E\}$ le graphe de T.

(1) *Montrer que $\mathcal{G}(T)$ est fermé dans $E \times F$.*
(2) *Montrer que T n'est pas continue. (On pourra utiliser la suite $f_n \in E, f_n(x) = x^n$.)*
(3) *Expliquer le résultat.*

Serie n° 4.

Exercice 1 :

$E = \mathcal{C}^1([0,1])$, $F = \mathcal{C}([0,1])$ — $\|\cdot\|_\infty$

$T : F \longrightarrow F$
$f \longmapsto f'$

$G(T) = \{(f, Tf) \,;\, f \in E\}$.

1) Mq G est fermé ds $E \times F$.

Soit $(f_n, Tf_n)_n$ une suite de G qui converge vers (f, g)

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, n \geq n_0,$

$$\|f_n - f\|_\infty + \underbrace{\|Tf_n - g\|_\infty}_{\|f' - g\|_\infty} < \varepsilon$$

ie : f_n cvge de unif vers f
et f'_n converge ie unif vers g

Théo. de dérivation par les suites de fcts :

- f_n de $\mathcal{C}^1$ sur I
- $f_n \xrightarrow[I]{C.S} f$
- $f'_n \xrightarrow[\text{segment de } I]{C.U} g$

$\Rightarrow$ f est de C^1 sur I et $f' = g$

- f_n est C^1 sur I ($f_n \in E$) , $I = [0,1]$
- f_n converge simplement vers f (f_n cv. unif vers f)
- f'_n cv. unif vers g sur I .1.

donc d'après théorème de dérivation pour les suites de fcts.

$f' = g$.

$\Rightarrow (f, g) \in G \Rightarrow G$ est fermé.

Par l'absurde :

Supposons que T est continue

$\exists c > 0$, tq $\forall f \in E$, $\|Tf\|_\infty < c \|f\|_\infty$

en particulier pour $f(x) = x^n$

$$\Rightarrow \underbrace{\|n x^{n-1}\|_\infty}_{n} \leq c \|x^n\|_\infty$$

$n < c$ absurde

$\Rightarrow T$ n'est pas continue

3. Comme F est de Banach par $\|\cdot\|_\infty$ est T n'est pas continue donc d'après le théo. de graphe fermé. E n'est pas de Banach pour $\|\cdot\|_\infty$.

. Toute reunion de fermé d'interieur vide $\mathring{A}_i = \emptyset$ est d'interieur vide $\Leftrightarrow$ $\bigcup \mathring{A}_i = \emptyset$
$\Leftrightarrow$ toute intersection d'ouvert dense est dense ds A. $\overline{{}^c\mathring{A}_i} = \overline{{}^cA_i} = A$, $\bigcup \overline{{}^cA_i} = A$

. Un esp. métrique Complet est un espace de Baire.

Exercice 1 :

E.R.e.v.

$F = \{ e_i , i \in I \} \subset E$

1) Montrer que si E est un espace de Banach de dim infinie de E est non dénombrable.

- Par absurde ;

Supposons $\mathcal{B} = \{ e_n , n \in \mathbb{N} \} \subset E$, une Base algèbrique de E.

On pose $F_n = \mathrm{Vect}\{ e_1, \dots, e_n \}$

Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dim F_n < \infty$

alors F_n est un fermé de E et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = E$

De plus, $\overset{\circ}{F_n} = \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Sinon, $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$; $\overset{\circ}{F}_{n_0} \neq \emptyset$

Soit $a \in \overset{\circ}{F}_{n_0}$, $\exists r$ tq $B(a, r) \subset F_{n_0}$

$\Rightarrow B(0, 1) \in F_{n_0}$, en effet :

Si $y \in B(0,1)$ alors $y = rx + a \in B(a, r)$

donc $y \in F_{n_0}$ et par V suite $rx = y - a \in F_{n_0}$

et $x = \frac{y-a}{r} \in F_{n_0}$ (F_{n_0} e.v.n)

donc F_{n_0} Contient $\lambda B(0,1) = \{ \lambda x \text{ tq } \|x\| < 1 \}$

$\forall \lambda > 0$, car F_{n_0} est un e.v.

donc $E \subset F_{n_0}$ absurde Car

$\dim F_{n_0} < \infty$ et $\dim E = +\infty$.

En fin, Les F_n sont des fermés d'intérieur vide. il vient donc grâce au théorème de Barre que $\bigcup F_n = E$ est d'intérieur vide, absurde

(E est un Complet)

Conclusion : Toute base algèbrique d'un espace de Banach de dim infinie est nécessairement non dènombrable

2) $\mathbb{R}[x]$ est un espace vectoriel normé qui possède $B = \{ e_n , n \in \mathbb{N} \}$ comme Base algèbrique, ou $e_n(x) = x$.

ne peut d'après 1) se munir d'une norme le rendrant complet.

Exercice 2 :

V esp. de Hilbert

V_1 , V_2 s.e.v fermé de V : $V = V_1 + V_2$

a) on suppose $\dim V < \infty$.

$Q_j = P_{V_j^\perp}$; $j \in \{1, 2\}$

$Q_1 Q_2 \in \mathcal{L}(E)$,

Montrons que $\| Q_1 Q_2 \| < 1$

on sait que $\| Q_1 \| = \| Q_2 \| = 1$

et $\| Q_1 Q_2 \| \leq \| Q_1 \| \, \| Q_2 \|$

on suppose $\| Q_1 Q_2 \| = 1$

Comme $\| Q_1 Q_2 \| = \sup_{u \in S = \{ u ; \|u\| = 1 \}} \| Q_1 Q_2 (u) \|$

Sphère

| en dim finie S est un Compac

alors $\exists v \in V : \|v\| = 1$ et $\|Q_1 Q_2 v\| = \|v\|$.

d'où $\|v\| \leq \|Q_2 v\| \leq \|v\|$

or d'après le théorème de projection

orth. $\|v - Q_2(v)\|^2 = \|v\|^2 - \|Q_2(v)\|^2$

(Pythagore)

$\|P_F(x) - x\|^2 = \|x\|^2 - \|P_F(x)\|^2$

$\Rightarrow Q_2 v = v$.

de même $Q_1 v = v$

$\Rightarrow v \in V_1^{\perp} \cap V_2^{\perp}$, Comme $v = v_1 + v_2$

$v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$

$\|v\|^2 = \langle v, v_1 + v_2 \rangle = \langle v, v_1 \rangle + \langle v, v_2 \rangle$

$= 0$

$\|v\|^2 = 0 \Rightarrow \|v\| = 0$

absurde.

Exercice 10 :

$E = (C([0,1], \mathbb{R}), \| \ \|_\infty)$

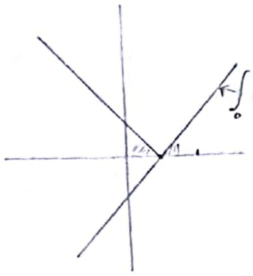
1. $\forall f \in E, \varphi(f) = \int_0^1 (2y-1) f(y)\, dy$

• Mq $\varphi \in E'$

il est claire que φ est lineaire

$\forall f \in E, \ |\varphi(f)| = \left| \int_0^1 (2y-1) f(y)\, dy \right|$

$\leq \int_0^1 |2y-1| \|f\|_\infty \, dy$



$\leq \|f\|_\infty \int_0^1 |2y-1|\, dy.$

$\leq \frac{1}{2} \|f\|_\infty$

donc φ est Continue et $\|\varphi\| \leq \frac{1}{2}$

Soit (f_n) la fct définie sur $[0,1]$ par :

• $f_n(x) = 1$ si $x \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1]$

• $f_n(x) = -1$ si $x \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}]$

$f_n(x) = a(x - \frac{1}{2})$

$1 = a(\frac{1}{2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n}) \Rightarrow a = n$

• $f_n(x) = n(x - \frac{1}{2})$ sur $[\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}]$

$\|\varphi\| = \sup_{\|f\|=1} |\varphi(f)| \geq |\varphi(f_n)| = \varphi(f_n)$

$\varphi(f_n) = \int_0^1 (2y-1) f(y)\, dy$

$= \int_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}} (-2y+1)\, dy + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^1 (2y-1)\, dy$

$+ \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} (2y-1)(n(y-\frac{1}{2}))\, dy$

$= 2\int_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}} (1-2y)\, dy + \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} 2n(y-\frac{1}{2})^2\, dy$ -3.

$= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n} - (\frac{1}{2} - \frac{1}{n})^2\right) + \left[\frac{2n}{3}(y-\frac{1}{2})^3\right]_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}$

$= 2(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2}) + \frac{2n}{3}(\frac{1}{n^3} - (\frac{-1}{n})^3)$

$= \frac{1}{2} - \frac{2}{n^2} + \frac{2}{3n^2} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{1}{2}$

donc $\|\varphi\| \geq \frac{1}{2}$ Conclusion : $\|\varphi\| = \frac{1}{2}$

2. $L_n(f) = \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t}}\, dt, \ \forall n \geq 1$

a) Soit L / $L(f) = \int_0^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t}}\, dt$

Mq $L \in E'$

$\forall f \in E, \ |L(f)| = \left| \int_0^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t}}\, dt \right|$

$\leq \|f\|_\infty \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt = [2\sqrt{t}]_0^1 = 2$

$\Rightarrow |L(f)| \leq 2\|f\|_\infty$

$\forall f \in E,$

$L(f) - L_n(f) = \int_0^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t}}\, dt - \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t}}\, dt$

$= \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{f(t)}{\sqrt{t}}\, dt$

on a,

$\underbrace{|L(f) - L_n(f)|}_{|(L-L_n)(f)|} \leq \|f\|_\infty \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt = \frac{2}{\sqrt{n}} \|f\|_\infty$

$\Rightarrow \| L - L_n \| \leq \frac{2}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0$

$\| L - L_n \| \longrightarrow 0$

b) $L_n(f) = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{f(t)}{\sqrt{t}} dt$

$|L_n(f)| \leq \|f\|_\infty \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2\|f\|_\infty (1 - \frac{1}{\sqrt{t}})$

$\leq 2\|f\|_\infty$

Banach-Steinhaus:

$\Rightarrow \exists c > 0 \ , \forall n \ , \|L_n\| \leq C \ (*)$

or on a $\big| \|L_n\| - \|L\| \big| \leq \|L_n - L\| \to 0$

$\Rightarrow \lim \|L_n\| = \|L\|$

on fait tendre $n \longrightarrow \infty$ dans $*$

$\|L\| \leq c \Rightarrow L \in E'$

on retrouve $(**)$

c) $|L(f)| = \left| \int_0^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t}} dt \right| \leq c\|f\|_{L^p}$

$\leq \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_0^1 \left| \frac{1}{\sqrt{t}} \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}$

Holder

avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$q = \frac{p}{p-1}$

$\leq \|f\|_p \left(\int_0^1 \frac{1}{t^{\frac{p}{2(p-1)}}} dt \right)^{\frac{1}{q}}$

or $\int_0^1 \frac{1}{t^{\frac{p}{2(p-1)}}} dt$ CV ssi $\frac{p}{2(p-1)} < 1$

$\Leftrightarrow p < 2p - 2$

$\Leftrightarrow 2 < p$

3. On veut montrer que T est Compact

$\Leftrightarrow H = \{ T_f \ / \ \|f\|_\infty \leq 1 \}$ est Compact

$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{i) } H \text{ fermé} \\ \text{ii) } H \text{ équicontinue} \\ \text{iii) } H \text{ borné} \end{cases}$ Ascoli - relativement compact

(A relativement Compact $\Leftrightarrow \bar{A}$ Compact)

iii) $\forall f \in E \ , \ |T_f(x)| \leq \int_0^1 |\cos xy| |f(y)| dy$

$\leq \int_0^1 \|f\|_\infty dy = \|f\|_\infty \leq 1$

$\Rightarrow \|T_f\|_\infty \leq 1$

$\Rightarrow H$ est borné

ii) $|T_f(x_1) - T_f(x_2)| \leq \int_0^1 |\cos x_1 y - \cos x_2 y| |f(y)| dy$

TVI:
$|f(x) - f(y)| \leq |f'(c)| |x - y|$

$\leq \int_0^1 |x_1 - x_2| |y| |f(y)| dy$

$\leq |x_1 - x_2| \int_0^1 \|f\|_\infty dy$

$\Rightarrow H$ est équicontinue

i) $T_{f_n} \ / \ \|f_n\|_\infty \leq 1$ et $T_{f_n} \longrightarrow g$.

Scanned by CamScanner

Exercice 4 : (Lemme de Grothendieck)

$X, Y \to$ Banach

$\cdot$ $S \subset Y \subset X$

S fermé de X

$i : Y \longrightarrow X$

$x \longmapsto x$.

elle est linéaire de plus continue.

$\Leftrightarrow \|x\|_X \leq c\|x\|_Y$

DMQ $\forall x \in S$ $\exists c_1 \geq 0$ $\|x\|_Y \leq c_1 \|x\|_X$

(Theorème de graphe fermé)

montrons que le graphe G est un fermé de $S \times Y$

Soit $(x,y) \in \overline{G}$ $\exists \underbrace{(x_n, x_n)}_{a_n \in G} \longrightarrow (x, y)$

$a_n \in G \Leftrightarrow \exists (x_n)_n \subset S ;\ a_n \in (x_n, x_n)$ et on a

$x_n \xrightarrow{\|\ \|_X} x$ $\qquad y_n \xrightarrow{\|\ \|_Y} y$

Or par hypothèse

$\|x_n - y\|_X \leq \|x_n - y\|_Y \Rightarrow x_n \xrightarrow{\| \|_X} y$ et d'après l'unicité de la limite

$$y = x.$$

$\Rightarrow (x,y) = (x,x) \in G \Rightarrow \bar{G} \subseteq G$ est un fermé

donc i est continue

2) Soit $V \subset \mathcal{C}[0,1] \subset L^1(]0,1[)$

MQ $\forall u \in V, \exists c_1 > 0 \; \|u\|_\infty \leq c_1 \|u\|_1$

- Soit V un s.e.v de $\mathcal{C}[0,1]$ fermé ds $L^1(]0,1[)$

D'après 1°) come $(\mathcal{C}[0,1], \| \|_\infty)$ et $(L^1(]0,1[, \| \|_1)$ sont ds Banach a injection, en effet

$\forall u \in \mathcal{C}[0,1])$, $\|u\|_1 = \int_0^1 |u(t)| \, dt \leq \|u\|_\infty$.

Alors $\forall u \in V ; \exists c_1 > 0 . \|u\|_\infty \leq c_1 \|u\|_1$.

3) Soit $V \subset C[0,1] \cap L^1]0,1[\subset L^2(]0,1[)$

et on a $\|u\|_2 \leq \|u\|_\infty \; \|u\|_1$

En outre V est un fermé de $L^1]0,1[$ car $\forall u \in V$,

$\|u\|_1 \leq \|u\|_2$ car ($]0,1[$ est un bornée)

par suite toute suite de V qui converge ds $L^2(]0,1[)$, elle converge aussi dans $L^1(]0,1[)$ comme V est un fermé $L^1(]0,1[$

alors donc, V_n converge ds V

En appliquant 1°) à V, $Y = \mathcal{C}[0,1]$ et $X = L^2[0,1]$

et en vérifiant que l'injection est continue de Y à X

en effet $\|u\|_2 \leq \|u\|_\infty \quad \forall u \in Y$

On obtient $\forall u \in V \; \exists c_2 \geq 0 \quad \|u\|_\infty \leq c_2 \|u\|_2$

4°) $(f_1 \cdots f_n)$ famille orthonormé de C^2 $f_j \in V$

$a = (a_1, \cdots a_n) \in \mathbb{R}^N$

$u_a = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i \in V$

$|a| = \sqrt{(\sum_{i=1}^{n} a_i^2)^{\frac{1}{2}}}$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^N$

montrons que, $\forall t \in]0,1[$ $\forall a \in \mathbb{R}^n$, $|a| < 1$

$\exists k > 0$

alors $|u_k(U)| \leq k$

$\# \quad |u_a(t)| \underset{3°)}{\leq} \|u_a\|_\infty \leq c_2 \|u_a\|_2 \leq c_2 |a|$

par suite $\forall t \in]0,1[$ et $\forall a \in \mathbb{R}^n$ $|a| \leq 1$

on $|u_a(t)| \leq c_2 = K$

5°) $\forall t \in]0,1[$ $\sum_{j=1}^{n} f_j^2(t)$

on pose $a = \frac{b}{|b|}$ où $b = (b_1, \cdots, b_n)$ et $b_i = f_i(t)$

$u_a(t) = \left(\sum (f_i(t))^2\right)^{\frac{1}{2}} \underset{4°)}{\leq} K$

$N \leq K$

En appliquant 3°) et en intégrant cette inégalité $u_a^2(t)$ entre 0 et 1 On obtient $N \leq K$

$\Rightarrow \dim V < \infty$.