FACULTE DES SCIENCES DE TUNIS
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

M1R-MA
Octobre 2018

Feuille d'exercices N° 2

Exercice 1.

On pose $I = [0,1]$ *et*

$$H^1(I) = \{f / \exists\, g \in L^2(I),\ \exists\, \alpha \in \mathbb{C} \text{ tels que } f(x) = \alpha + \int_0^x g(t)dt, \forall\, x \in I\}.$$

Pour $f \in H^1(I)$, *on note* $g = f'$. *On pose pour* f *et* h *dans* $H^1(I)$,

$$\langle f, h\rangle = f(0)\overline{h(0)} + \int_0^1 f'(x)\overline{h'(x)}dx. \quad (1)$$

(1) *Montrer que si* $f \in H^1(I)$ *alors* f *est continue sur* $[0,1]$
(2) *Vérifier que la relation (1) définie un produit scalaire sur* $H^1(I)$.
(3) *Montrer que* $(H^1(I), \langle .,. \rangle)$ *est complet.*

Exercice 2.

Soit E *l'espace de Banach* $C([0,1],\mathbb{C})$ *(l'ensemble des fonctions complexes continues sur* $[0,1]$*) muni de la norme suivante*

$$\|f\| = |f(0)| + \|f\|_1 = |f(0)| + \int_0^1 |f(x)|dx.$$

Soit F *l'ensemble des fonctions* $f \in E$ *vérifiant* $f(0) = 0$, *soit* f_0 *la fonction 1.*

(1) *Calculer* $d(f_0, F)$
(2) *Existe-t-il* $f \in F$ *tel que* $\|f_0 - f\| = d(f_0, F)$?
(3) *Conclure.*

Exercice 3.

On se place dans l'espace de Hilbert $H = l^2(\mathbb{R})$ *dont on note* $x = (x_n)_{n\geq 1}$ *les éléments, on définit les sous ensembles suivants de* H :

$$C_1 = \{x \in H, \|x\| \leq 1\}$$

$$C_2 = \{x \in H, x_1 + x_2 = 0\}$$

$$C_3 = \{x \in H, x_1 \geq \sum_{n\geq 2} x_n^2\}$$

et on donne les points de H : $a = (-2, 0, 0, 0, \dots)$ *et* $b = (1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots)$.

(1) *Montrer que chacun de ces sous ensembles est fermé convexe de* H.
(2) *Montrer que la projection de a sur* C_1 *est* $\frac{a}{\|a\|}$.
(3) *Déterminer la projection de* b *sur* C_2.
(4) *Déterminer la projection de* b *sur* C_3 *(on rappelle que* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$*) et vérifier que la projection de* a *sur* C_3 *est* 0_H.

Exercice 4.

Soit E un espace de Hilbert réel. On considère une forme bilinéaire a sur E, que l'on suppose continue et coercive, c'est à dire qu'il existe deux constantes $C > 0$ et $\alpha > 0$ telles que

$$\forall\, x, y \in E \quad |a(x,y)| \leq C\|x\|\|y\| \qquad et \qquad \forall\, x \in E \quad a(x,x) \geq \alpha\|x\|^2.$$

(1) a) *Démontrer qu'il existe un opérateur linéaire continu T sur E tel que*

$$\forall\, x, y \in E \quad a(x,y) = \langle Tx, y\rangle.$$

b) *Démontrer que $T(E)$ est dense dans E.*

c) *Démontrer que pour tout $x \in E$, $\|Tx\| \geq \alpha\|x\|$. En déduire que T est injectif et que $T(E)$ est fermé.*

d) *En déduire que T est un isomorphisme de E sur lui-même*

(2) *Soit L une forme linéaire continue sur E.*

a) *Déduire des questions précédentes qu'ils existe un unique $u \in E$ tel que*

$$\forall\, y \in E \quad a(u,y) = L(y)$$

b) *On suppose que dans cette question que la forme bilinéaire a est symétrique et l'on définit, pour $x \in E$,*

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}a(x,x) - L(x).$$

Démontrer que le point u est caractérisé par la condition suivante :

$$\Phi(u) = \min_{x \in E} \Phi(x)$$

Exercice 5.

On désigne par E l'ensemble des suites $(x_n)_{n\geq 1}$ de nombres complexes vérifiant

$$\sum_{n\geq 1} \frac{|x_n|^2}{n} < \infty.$$

(1) *Montrer que l'application B de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$ définie par $B(x,y) = \sum_{n\geq 1} \frac{x_n \overline{y_n}}{n}$ est un produit scalaire sur E.*

(2) *Montrer que E est un espace de Hilbert séparable.*

(3) *On désigne par F l'ensemble des suites $(x_n)_{n\geq 1}$ de nombres complexes tels que $x_n = 0$ sauf pour un nombre fini de valeurs de n. Montrer que F est un sous-espace vectoriel dense dans E.*

Exercice 6.

Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une base hilbertienne d'un espace de Hilbert H. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{cases} f_n &= e_{2n} \\ g_n &= \sqrt{1 - 9^{-n}}\, e_{2n} + 3^{-n} e_{2n+1}. \end{cases}$$

On désigne par X le sous-espace vectoriel fermé de H engendré par la suite de vecteurs $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et par Y le sous-espace vectoriel engendré fermé par la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

(1) *Vérifier que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont des bases hilbertiennes de X et Y respectivement et en déduire que $x \in X$ si et seulement si il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans $l^2(\mathbb{N}^*)$ tel que $x = \sum_{n\geq 1} \alpha_n f_n$.*

(2) *Montrer que* $X \cap Y = \{0_H\}$ *et que* $\overline{X+Y} = H$.
(3) *Montrer que* $\sum_{n\geq 1} 3^{-n} e_{2n+1}$ *converge dans* H, *mais que sa somme n'appartient pas à* $X+Y$. *En déduire que* $X+Y$ *n'est pas fermé dans* H.

Exercice 7 (Polynômes de Laguerre).

Soit μ *la mesure de Radon positive sur* $\mathbb{R}^+$ *définie par :*

$$\forall\, \Phi \in C_c(\mathbb{R}^+) \quad \mu(\Phi) = \int_0^{+\infty} \Phi(x) e^{-x} dx$$

On pose, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$L_n(x) = \frac{e^x d^n}{n! dx^n}(e^{-x} x^n).$$

(1) *Démontrer que pour tout entier* $n \in \mathbb{N}$, L_n *est un polynôme de degré* n.
(2) a) *Calculer le produit scalaire* $\langle X^k, L_n\rangle$, *pour* $0 \leq k \leq n$, *où* $X^k : x \to x^k$.
b) *En déduire que* $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une famille orthonormée de l'espace* $E = L^2(\mu)$.
(3) *Démontrer que si* α *est un réel positif ou nul, alors*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} L_n(x) e^{-x} dx \right]^2 = \frac{1}{2\alpha+1}$$

En déduire que la fonction $f_\alpha : x \mapsto e^{-\alpha x}$ *appartient à l'adhérence dans* E *de l'espace vectoriel engendré par la suite* (L_n).
(4) *Démontrer que la famille* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est totale dans* $C_0(\mathbb{R}^+)$ *(utiliser le théorème de Weierstrass et un changement de variable). En déduire que* $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une base hilbertienne de* E.

Exercice 8.

Soit H *un espace de Hilbert. On dit qu'une suite* (x_n) *de* H *converge faiblement vers* x *si pour tout* $y \in H$, *la suite* $(\langle x_n, y\rangle)_n$ *converge vers* $\langle x, y\rangle$.

(1) *Montrer que la convergence dans* H *entraine la convergence faible.*
(2) *Montrer que la réciproque est vraie si* H *est de dimension finie.*
(3) *On pose* $H = l^2$ *et* $x_n - e_n := (\delta_i^n)_{i\in\mathbb{N}^*}$. *Montrer que* (x_n) *converge faiblement vers 0. A-t-on la convergence vers* x *dans* H.
(4) *Montrer que si* (x_n) *converge faiblement vers* x *et* $(\|x_n\|)$ *converge vers* $(\|x\|)$ *alors* (x_n) *converge vers* x *dans* H. *bornée.*
(5) *Montrer que si* (x_n) *converge faiblement alors elle est bornée. (Utiliser le Théorème de Banach-Steinhaus).*
(6) *Soient* (x_n) *et* (y_n) *deux suites de* H. *Démontrer que si la suite* (x_n) *converge faiblement vers* x *et si la suite* (y_n) *converge fortement vers* y *dans* H *alors la suite* $(\langle x_n, y_n\rangle)$ *converge vers* $\langle x, y\rangle$.
Qu'en est-il si l'on suppose seulement que la suite (y_n) *converge faiblement vers* y ?

Exercice 9.

Soit F *un sous-espace vectoriel de* $C([0,1], \mathbb{R})$. *On suppose que* F *est ferm pour la topologie de* $L^2(]0,1[)$ *(dont on note* $\langle .,. \rangle_2$ *le produit scalaire et* $\|.\|_2$ *la norme associe).*
Le but de l'exercice est de montrer que F est de dimension finie.

(1) *Soit l'application*

$$T: \quad (\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|.\|_\infty) \longrightarrow (L^2(]0,1[), \|.\|_2)$$
$$f \longmapsto f.$$

(a) *Montrer que* T *est linaire et continue de* $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ *dans* $(L^2(]0,1[), \|.\|_2)$.

(b) *Déduire que* F *est ferm dans* $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$.

(c) *Montrer que* $\|\|\|_\infty$ *et* $\|\|\|_2$ *sont des normes quivalentes sur* F. *(On pourra utiliser la restriction de* T *sur* F.*)*

(2) *Justifier rapidement l'existence de l'oprateur de projection orthogonale sur* F *dans* $L^2(]0,1[)$. *On le note* P_F.

(3) *Dmontrer que pour tout* $x \in [0,1]$, *l'application*

$$\psi_x : f \in L^2(]0,1[) \to (P_F f)(x) \in \mathbb{R}.$$

est bien dfinie et constitue une forme linaire continue sur $L^2(]0,1[)$.
En dduire qu'il existe $g_x \in L^2(]0,1[)$ *telle que*

$$(P_F f)(x) = \langle f, g_x \rangle_2, \forall f \in L^2(]0,1[). \qquad \bigstar$$

(4) *Soit* $(f_n)_n$ *une suite d'lments de la boule unit ferme de* $(F, \|.\|_\infty)$.

(a) *Dmontrer qu'il existe une sous-suite* $(f_{n_k})_n$ *qui converge faiblement dans* $L^2(]0,1[)$ *vers une fonction note* $f \in L^2(]0,1[)$.

(b) *Dmontrer, en utilisant* $\bigstar$, *que pour tout* $x \in [0,1]$, *on a la convergence simple*

$$f_{n_k}(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (P_F f)(x).$$

(c) *Dmontrer que* $(f_{n_k})_n$ *converge fortement vers* $P_F f$ *dans* $L^2(]0,1[)$. *En dduire que* $f \in F$.

(d) *Dmontrer que* $(f_{n_k})_n$ *converge vers* f *dans* $(F, \|.\|_\infty)$.

(e) *Conclure.*

Serie n°9

Exercice 1 :

$$H^1(I) = \{ f \mid \exists g \in L^2(I), \exists \alpha \in \mathbb{C} : f(x) = \alpha + \int_0^x g(t)\,dt, \forall x \in I \}$$

$I = [0,1]$

on note $g = f'$ dans le sens $L^2(I)$

$f, h \in H^1(I)$, $\langle f, h \rangle = f(0)\overline{h(0)} + \int_0^1 f'(x)\overline{h'(x)}\,dx$ $(*)$

1°) $f \in H^1(I) \Rightarrow f \in C(I)$

$\forall x,y \in I$. $|f(x) - f(y)| = \left| \int_0^x g(t)dt - \int_0^y g(t)dt \right|$

$\leq \int_{\inf(x,y)}^{\sup(x,y)} |g(t)|dt$

$= \int_0^1 \underbrace{|g(t)|}_{\in L^2(I)} \underbrace{\mathbb{1}_{[x\wedge y, x\vee y]}(t)}_{\in L^2(I)} dt$

$\leq \sqrt{|x-y|}\, \|g\|_2$

Cauchy schwartz.

$\Rightarrow f \in C(I)$

2°) $\langle\ ,\ \rangle$ est lineaire % à la $1^{ère}$ variable en raison de la linearité de la dérivée ds le sens L^2 et de la linearite de l'integrale

$\cdot \langle f, h \rangle = h(0)\overline{f(0)} + \int_0^1 h'(\ )\overline{f'(x)}\,dx$

$= \overline{\langle h, f \rangle}$

Par suite $\langle\ ,\ \rangle$ est une forme hermitienne

$\cdot \langle f, f \rangle = |f(0)|^2 + \int_0^1 |f'(x)|^2 > 0$

$\forall f \in H^1([0,1]) \setminus 0$

En effet si $\langle f, f \rangle = 0 \Rightarrow f(0) = 0$

et $f' \equiv 0$ ds L^2

$\Rightarrow f(x) = 0 + \int_0^x 0\,dt = 0$

Par suite $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire ds $H^1(I)$, $\|f\|_{H^1}^2 = |f(0)|^2 + \int_0^1 |f'(x)|^2 dx$

3) $(H^1(I), \langle\ ,\ \rangle)$ Complet ?

Soit (f_n) une suite de Cauchy ds I

comme $\|f_n - f_m\|_{H^1}^2 = |f_n(0) - f_m(0)|^2 + \int_0^1 |f_n'(x) - f_m'(x)|$

alors $(f_n(0))_n$ est de Cauchy ds $\mathbb{C}$ Complet $\Rightarrow \exists \beta \in \mathbb{C}$, $f_n(0) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{C}} \beta$

et $(f_n')_n$ est de Cauchy ds $L^2(I)$ Banach

$\Rightarrow \exists g \in L^2(I)$: $f_n' \xrightarrow[n\to\infty]{L^2(I)} g$ $\left(\int_0^1 |f_n'(x) - g(x)|^2 dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \right)$

on pose $f(x) = \beta + \int_0^x g(t)\,dt$, $f \in H^1(I)$

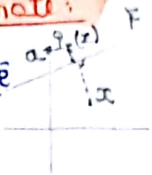
alors $\|f_n - f\|_{H^1}^2 = \underbrace{|f_n(0) - \beta|^2}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$

$+ \underbrace{\int_0^1 |f_n'(x) - g(x)|^2 dx}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Par suite $(H^1(I), \langle \ , \ \rangle)$ est complet.

Théoreme de Projection orthogonale :

Soit F une partie Convexe et fermé d'un espace de Hilbert E



alors $\forall x \in E$, $\exists a! \in F$ $\quad d(a,x) = d(x,F)$

$$\|a - x\| = \inf_{y \in F} \|x - y\|$$

Exercice 2 :

$$E = (\mathcal{C}([0,1], \mathbb{C}), \| \ \|)$$

$$\|f\| = |f(0)| + \|f\|_1 = |f(0)| + \int_0^1 |f(x)| dx$$

$$F = \{ f \in E, \ f(0) = 0 \}$$

$$f_0 = 1$$

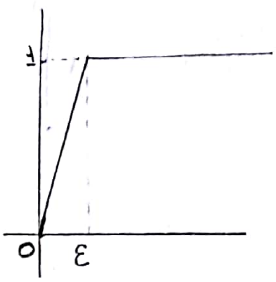
1. $d(f_0, F)$? $= \inf_{f \in F} \|f_n - f\|$

Soit $f \in F$

$$\|f_0 - f\| = |f_0(0) - f(0)| + \int_0^1 |f_0(x) - f(x)| dx$$

$$= 1 + \int_0^1 |1 - f(x)| \ dx \geq 1 \quad ①$$

$$\Rightarrow d(f_0, F) = \inf_{f \in F} \|f_0 - f\| = 1$$



on pose :

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{x}{\varepsilon} & \text{sur } [0, \varepsilon] \\ 1 & \text{sur } [\varepsilon, 1] \end{cases}$$

$f_\varepsilon \in F$

$$\|f_\varepsilon - f_0\| = 1 + \int_0^1 |1 - f_\varepsilon(x)| dx$$

$$= 1 + \int_0^\varepsilon \left(1 - \frac{x}{\varepsilon}\right) dx$$

$$= 1 + \varepsilon - \varepsilon/2 = 1 + \frac{\varepsilon}{2}$$

$m = \inf A \iff \begin{cases} m \text{ minore } A \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists x_\varepsilon \in A \text{ tq } x_\varepsilon < m + \varepsilon \end{cases}$

or $\inf_{\varepsilon > 0} \|f_\varepsilon - f\| = \lim_{\varepsilon \to 0} 1 + \frac{\varepsilon}{2} = 1$

absurde Car $\lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon \notin F$.

$$\|f_\varepsilon - f\| = 1 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$d(f_0, F) = \|f_\varepsilon - f\| = 1 + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow d(f_0, F) \leq \inf \|f_\varepsilon - f\| = 1. \quad ②$$

d'après (1) et (2) $\Rightarrow d(f_0, F) = 1$.

2) $f \in F$? $\quad \|f_0 - f\| = d(f_0, F) = 1$

on suppose qu'il $\exists f \in F$. $\|f_0 - f\| = 1$

$$\|f_0 - f\| = 1 + \int_0^1 |1 - f(t)| \ dt = 1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 |1 - f(t)| = 0$$

f Cont sur $[0,1]$

$\Rightarrow f \equiv 1$ sur $[0,1]$

absurde car $f(0) = 0$.

3. Conclusion:

Dans un espace de Banach non nécessairement de hilbert le théorème de projection n'est pas valide.

Exercice 3:

Th: Si F un fermé convexe d'un hilbert E

$\forall x \in E, \exists! a \in F, \|x-a\| = d(x,F)$

$a = P_F(x) \iff \forall y \in F$ a l'unique élement de F $Re\langle y-a, x-a\rangle \leq 0$

Corollaire:

F s.e. fermé de E alors $F^\perp$ le supplémentaire orthogonal de F

$E = F \oplus F^\perp$

$F^\perp = \{x \in E ; \langle x,y\rangle = 0, \forall y \in F\}$

$H = l^2(\mathbb{R}) = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} ; \sum_{n\geq 1} x_n^2 < \infty\}$

$\|x\| = \sqrt{\sum x_n^2}$

$\langle x,y\rangle = \sum_{n\geq 1} x_n y_n$

H est un espace de Hilbert.

$C_1 = B'(0,1) = \{x \in H, \|x\| \leq 1\}$

$C_2 = \{x \in H, \underbrace{x_1 + x_2 = 0}_{\langle x,d\rangle = 0}\} = \{d\}^\perp = (Vect\{d\})^\perp$ car $\langle x, \lambda d\rangle = 0$

$\langle (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots), (1, 1, \dots)\rangle = 0$

$d = (1, 1, \dots)$

$C_3 = \{x \in H, x_1 \geq \sum_{n\geq 2} x_n^2\}$

1. C_1 est convexe, en effet si $t \in [0,1]$ et $x,y \in B'(0,1)$ alors

$\|tx + (1-t)y\| \leq t\|x\| + (1-t)\|y\|$
$\leq (t + 1 - t) = 1.$

$C_2 = \{x \in H, x_1 + x_2 = 0\}$

$= (Vect\{d\})^\perp$

est un sous espace vectoriel fermé de H (tout s.e.v fermé est convexe)

donc convexe fermé.

C_3 convexe ?

Soient $x = (x_n)_{n\geq 1}, y = (y_n)_{n\geq 1}$ ds H,

$x_1 \geq \sum_{n\geq 2} x_n^2$ et $y_1 \geq \sum_{n\geq 2} y_n^2$.

$\forall t \in [0,1]$, $tx + (1-t)y = (tx_n + (1-t)y_n)_{n} \in H$

montrer $tx_1 + (1-t)y_1 \overset{?}{\geq} \sum_{n\geq 2} (tx_n + (1-t)y_n)^2$

Comme $tx_1 + (1-t)y_1 \geq \sum_{n\geq 2} (tx_n^2 + (1-t)y_n^2)$

$2ab \leq a^2 + b^2$. $\quad \overset{?}{\geq} \sum_{n\geq 2} (tx_n + (1-t)y_n)^2$

$(tx_n + (1-t)y_n)^2 = t^2x_n^2 + (1-t)^2y_n^2 - 2(tx_n)(1-t)y_n)$

$t x_n^2 + (1-t) y_n^2 - (t x_n + (1-t) y_n)^2$

$= t x_n^2 + (1-t) y_n^2 - t^2 x_n^2 - (1-t)^2 y_n^2$
$- 2 t (1-t) x_n y_n$

$= t(1-t) x_n^2 + t(1-t) y_n^2 - 2t(1-t) x_n y_n$

$= t(1-t)(x_n - y_n)^2 \geq 0$

$\Rightarrow C_3$ est convexe.

$C_3 = \{ x = (x_1, \dots, x_n, \dots) \ , \ x_1 \geq \sum_{n \geq 2} x_n^2 \}$
est un fermé.

car: $C_3 = f^{-1}(\underbrace{[0, \infty[}_{\text{fermé de } \mathbb{R}})$

et $\varphi : H \xrightarrow{\text{cont}} \mathbb{R}$
$x \longmapsto \varphi(x) = x_1 - \sum_{n \geq 2} x_n$

en effet si $\mathring{x} = (\mathring{x}_1, \dots, \mathring{x}_n, \dots)$

et $x = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots) \in H$

$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| = |x_1 - \mathring{x}_1 + \sum (\mathring{x}_n^2 - x_n^2)|$

$\leq |x_1 - \mathring{x}_1| + \sum_{n \geq 2} |\mathring{x}_n^2 - x_n^2|$

$\leq |x_1 - \mathring{x}_1| + \sum_{n \geq 2} |\mathring{x}_n - x_n| |\mathring{x}_n + x_n|$

cauchy-Schwarz.

$\leq \|x - \mathring{x}\| + \|x - \mathring{x}\| \|x + \mathring{x}_n\|$

$\leq \|x - \mathring{x}\| (1 + \|x + \mathring{x}\|)$

$x \to \mathring{x}$: $\|x - \mathring{x}\| \to 0$, $x \to x^0$: $1 + 2\|x_0\|$

2) $P_{C_1}(a) = \dfrac{a}{\|a\|}$? $(\|a\| = 2 \Rightarrow a \in \mathring{B}(0,1)$ $\overset{\shortparallel}{C_1})$

Soit $x \in C_1$, $\langle a - \dfrac{a}{\|a\|} ; x - \dfrac{a}{\|a\|} \rangle$

$= \langle a, x \rangle + 1 - \|a\| - \dfrac{1}{\|a\|} \langle a, x \rangle$

$= \langle a, x \rangle \left[1 - \dfrac{1}{\|a\|} \right] - (\|a\| - 1)$

$= \dfrac{\langle a, x \rangle}{\|a\|} [\|a\| - 1] - (\|a\| - 1)$

$= (\|a\| - 1) \left(\dfrac{\langle a, x \rangle}{\|a\|} - 1 \right)$

or d'après cauchy-schwartz

$\langle a, x \rangle \leq |\langle a, x \rangle| \leq \|a\| . \|x\|$

$\Rightarrow \dfrac{\langle a, x \rangle}{\|a\|} \leq \|x\| \leq 1$ $x \in B'(0_H, 1)$

$\Rightarrow \dfrac{\langle a, x \rangle}{\|a\|} - 1 \leq 0$

et comme $\|a\| - 1 = 1 \geq 0$

donc $\langle a - \dfrac{a}{\|a\|} , x - \dfrac{a}{\|a\|} \rangle \leq 0$

<u>Conclusion:</u> $P_{C_1}(a) = \dfrac{a}{\|a\|}$.

3) F Convexe fermé d'un hilbert E,
$E = F \oplus F^{\perp}$
$\forall x \in E, \exists x_1 ! \in F, x_2 \in F^{\perp}, x = x_1 + x_2$
$x_1 = P_F(x)$, $x_2 = P_{F^{\perp}}(x)$

H hilbert , $x \in H$ $F = \text{vect}\{e_1, \dots, e_n\}$
$P_H(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$

$P_{C_2}(b)$?

$P_{C_2^{\perp}}(b) = P_{\{\text{vect}\{d\}\}}(b) = \alpha d.$

Or $\langle b - P_{C_2^\perp}(b), d\rangle = 0 = \langle b,d\rangle - \langle \alpha d, d\rangle$

$= \langle b,d\rangle - \alpha \|d\|^2$

vect de la base orthonormée

$P_{C_2^\perp}(b) = \langle b, \frac{d}{\|d\|}\rangle \frac{d}{\|d\|}$ $\Rightarrow \alpha = \frac{\langle b,d\rangle}{\|d\|^2}$

$= \langle b,d\rangle\, d/\|d\|$

$\Rightarrow P_{C_2^\perp}(b) = \frac{\langle b,d\rangle}{\|d\|^2}\cdot d.$

et $P_{C_2}(b) = b - \frac{\langle b,d\rangle}{\|d\|^2}\cdot d$

$E = H \oplus a\cdot\mathbb{C}$

H est un hyperplant ⇒ son supplémentaire est une droite affine

$P_H(x) = x - \frac{\langle x,a\rangle}{\|x\|}\, a.$

4) $P_{C_3}(b)$? $d^2 = \|\overset{c}{P_{C_3}(b)} - b\|^2$

$= d^2(b, C_3)$

$= \inf_{\substack{(x_n)\in \mathbb{N} \\ x_1 \geq \sum_{n\geq 1} x_n^2}} \{\|x - b\|^2\}$

$= \inf_{x_1 \geq \sum_{n\geq 1} x_n^2} \{(x_1 - 1)^2 + (x_2 - \frac{1}{2})^2 + \dots + (x_n - \frac{1}{n})^2\}$

$= \inf_{x_1 \geq \sum_{n\geq 1} x_n^2} (x_1 - 1)^2$

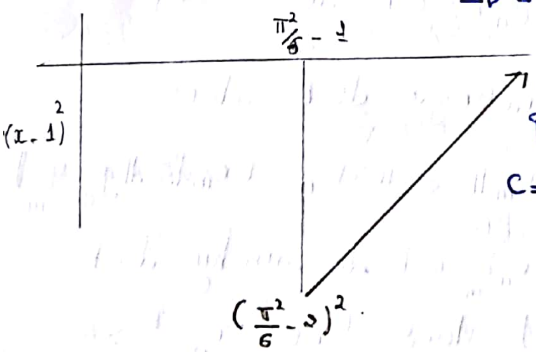
$x_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 2$

$x_1 = \frac{\pi^2}{6} - 1$

$= \inf_{x_1 \geq \frac{\pi^2}{6} - 1} (x_1 - 1)^2 = (\frac{\pi^2}{6} - 2)^2$, $\neq 0$

$\Rightarrow d = 2 - \frac{\pi^2}{6}$ qui est atteinte par

$c = (\frac{\pi^2}{6} - 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$



$P_{C_3}(a) = 0_H$?

Soit $x \in C_3$, $\langle x - P_{C_3}(a), a - P_{C_3}(a)\rangle$

$= \langle x, a\rangle = -2x_1 \leq 0$

car $x_1 \geq \sum_{n\geq 1} x_n^2 \geq 0$

$\Rightarrow P_{C_3}(a) = 0_H.$

Exercice 4: (Thm de Lax-Milgram)

Thm:

E hilbert sur $\mathbb{R}$.

- $a: E\times E \longrightarrow \mathbb{R}$, fonction bilinéaire
  $(x,y) \longmapsto a(x,y)$
- a continue ($\exists c > 0, |a(x,y)| \leq c\|x\|\|y\|$)
- a coercive ($\exists \alpha > 0, a(x,x) \geq \alpha\|x\|^2$)
- $L: E \xrightarrow[\text{cont}]{\text{lin}} \mathbb{R}$

alors $\exists u! \in E$; $L(y) \leq a(u,y)$

Si en + a est symétrique alors

$u = \min_{x\in E} \phi(x)$, où $\phi(x) = \frac{1}{2} a\langle x,x\rangle - L(x)$.

a forme bilinéaire sur E et coercive (E hilbert réel)

1°) a) $T \in \mathcal{L}(E)$, $\forall x,y \in E$, $a(x,y) = \langle Tx, y\rangle$

Soit $x \in E$, on pose $S_x: E \longrightarrow \mathbb{R}$
$y \longmapsto S_x(y) = a(x,y)$

S_x est linéaire car a est ~~lin~~ bilinéaire

S_x est continue car a est continue.

En effet $|S_x(y)| = |a(x,y)|$
$\leqslant C\|y\|\|x\|$

et $\|S_x\| \leqslant C\|x\|^*$

Thm de Riesz :

E. e. hilbert

$T : E \xrightarrow[\text{cont}]{\text{lin}} \mathbb{R}$ alors $\exists! u \in E$

tq $T(x) = \langle u_x, x\rangle, \forall x \in E$

et $\|T\|_{E'} = \|u_x\|_E$

Comme S_x est linéaire et continue d'après le théo. de Riesz $\exists$ un vecteur unique ds E dépendant de S_x noté Tx : $S_x(y) = \langle Tx, y\rangle = a(x,y)$, $\forall y \in E$

on pose $T : E \longrightarrow E$

$x \longmapsto T(x) = a(x,y) = \langle Tx, y\rangle$

- T est bien définit d'après ce qui précèdent
- T est linéaire car $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x_1, x_2 \in E$,

$T(\lambda x_1 + x_2) = \lambda T(x_1) + T(x_2)$

En effet :

$\forall y \in E$

$\langle T(\lambda x_1 + x_2), y\rangle = a(\lambda x_1 + x_2, y)$

$= \lambda a(x_1, y) + a(x_2, y)$

$= \lambda \langle Tx_1, y\rangle + \langle Tx_2, y\rangle$

$\Rightarrow$ T est linéaire.

T cont, en effet, d'après le th de Riesz $\|Tx\| = \|S_x\| \overset{*}{\leqslant} C\|x\|$

b) $T(E)$ dense ds E ($\overline{T(E)} = E$)

il suffit de montrer que $T(E)^\perp = \{0_E\}$

Soit $x \in T(E)^\perp$, alors $\langle Tx, x\rangle = 0$

$\Leftrightarrow a(x,x) = \langle Tx, x\rangle = 0$

or $\underset{\text{coercive}}{a(x,x) \geqslant} \alpha\|x\|^2 \Rightarrow x = 0_E$

$\Rightarrow T(E)^\perp = \{0\}$ par suite

$T(E)$ dense ds E.

c) $\forall x \in E$, $\|Tx\| \geqslant \alpha\|x\|$

Comme $\alpha\|x\|^2 \underset{\text{coercive}}{\leqslant} a(x,x) = \langle Tx, x\rangle$

$\underset{\text{cauchy-schwartz}}{\leqslant} \|Tx\|\|x\|$

$\Leftrightarrow \alpha\|x\| \leqslant \|Tx\| (**)$

$\underset{\ker T = \{0_E\}}{\Rightarrow}$ T est injective

T(E) fermé?

Soit $y_n = T(x_n) \in T(E)$; $y_n \longrightarrow y \in E$.

Comme (y_n) est de Cauchy ds E

car converge ds E alors :

$\alpha\|x_n - x_m\| \leqslant \|Tx_n - Tx_m\| = \|y_n - y_m\|$

alors $(x_n)_n$ est de Cauchy ds E

(hilbert), alors $\exists x \in E : x_n \xrightarrow[n\to\infty]{E} x$

et $y_n = Tx_n \xrightarrow[n\to\infty]{E} Tx$

par unicité de la limite, il vient donc que $y = Tx \in T(E)$

d) D'après b) et le fait que $T(E)$ est un fermé $\overline{T(E)} = T(E) = E$

et par suite T est surjective

ainsi T est un endomorphisme bijective et continue de l'espace de hilbert E et en vertu du théorème de Banach T est un isomorphisme de E dans lui même.

2) Soit $L : E \xrightarrow[\text{Cont}]{\text{lin}} \mathbb{R}$

a) $\exists u ! \in E$; $\forall y \in E$ $a(u,y) = L(y)$

D'après le thé de Riesz, $\exists f ! \in E$

$L(y) = \langle f, y \rangle$

Comme T est bijective, $\exists ! u \in E$

$f = Tu \Rightarrow L(y) = \langle Tu, y\rangle = a(u,y)$

b) on suppose a symétrique,

et on pose $\phi(x) = \frac{1}{2} a(x,x) - L(x)$

u verifie $\phi(u) = \min_{x\in E} \phi(x)$

$\phi(u+y) = \frac{1}{2} a(u+y, u+y) - L(u+y)$

$\phi(u+y) = \underbrace{\frac{1}{2} a(u,u) - L(x)}_{\phi(u)} + a(u,y) - L(y) + \frac{1}{2} a(y,y)$

$= \frac{1}{2} a(u,u) - L(u) + \frac{1}{2} a(y,y)$ ④

$= \phi(u) + \frac{1}{2} a(y,y)$

$\Rightarrow \phi(u) \leq \phi(u+y)$, $\forall y \in E$

$\Rightarrow \phi(u) \leq \phi(v)$; $\forall v \in E$

D'où $\phi(u) = \min_{x\in E} \phi(x)$.

Exercice 5:

$$E = \left\{ x = (x_n)_n \subset \mathbb{C} ; \sum_{n\geq 1} \frac{|x_n|^2}{n} < \infty \right\}$$

$$B : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$(x,y) \longmapsto B(x,y) = \sum_{n\geq 1} \frac{x_n \bar{y}_n}{n}$$

- $\forall \lambda \in \mathbb{C}$; $\forall x, y, z \in E$,

$$B(\lambda x + y, z) = \sum_{n\geq 1} \frac{\lambda (x_n + y_n) \bar{z}_n}{n}$$
$$= \lambda \sum_{n\geq 1} \frac{x_n \bar{z}_n}{n} + \sum_{n\geq 1} \frac{y_n \bar{z}_n}{n}$$

B est bien définie car $\forall x, y \in E$

$$\left| \frac{x_n y_n}{n} \right| \leq \underbrace{\left(\frac{|x_n|}{\sqrt{n}}\right)^2 + \left(\frac{|y_n|}{\sqrt{n}}\right)^2}_{\text{terme d'une serie Convergente}}$$

$B(\lambda x + y, z) = \lambda B(x,z) + B(y,z)$

- $B(x,x) = \sum_{n\geq 1} \frac{|x_n|^2}{2} > 0$, $\forall x \in E \setminus \{0_E\}$

$\Rightarrow B$ définit 1 pdt scalaire.

$\|x\|_E = \sqrt{B(n,n)} \left(\sum_{n\geq 1} \frac{|x_n|^2}{n} \right)$

2) D'après 1) $(E, \langle\,,\rangle)$ est un espace préhilbertien montrons que $(E, \langle\,,\rangle)$ est Complet.

Soit $(x^k)_{k\geq 1}$ une suite de vecteurs de Cauchy ds E.

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $x^k = (x^k)_n = (x_1^k, \dots, x_n^k, \dots)$

alors $\|x^p - x^q\| \underset{p,q \to \infty}{\longrightarrow} 0$; ie $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall p, q \geq N$.

$$\|x^p - x^q\| = \sum_{n \geq 1} \frac{|x_n^p - x_n^q|}{n} < \varepsilon \quad (*)$$

$\Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}^*, (x_n^m)$ est de Cauchy ds $\mathbb{C}$ (complet) $\Rightarrow \exists x_n \in \mathbb{C} : x_n^m \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} x_n$

on pose $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

$x^k \xrightarrow[\|\ \|_E]{k \to \infty} x$?

Par passage à la limite qd $q \longrightarrow \infty$, d'après $(*)$, $\forall m \geq 1$, $\sum_{1 \leq n \leq m} \frac{|x_n^p - x_n|}{n} < \varepsilon$ $\forall p \geq N$

par passage à la limite qd $m \longrightarrow +\infty$,

on a $\sum_{n \geq 1} \frac{|x_n^p - x_n|}{n} < \varepsilon$ dès que $p \geq N$

et $x^k - x \in E$.

ainsi $x = (x - x^k) + x^k \in E$ et x^k Converge vers x ds $(E, \|\ \|)$. D'où E est un Hilbert.

Hilbert (e_n) suite orthonormée, (e_n) base hilbertienne de H $\iff x = \sum \alpha_n e_n$
$\|x\|^2 = \sum |\alpha_n|^2$

D'autre part, E est séparable, en effet la suite $(e^k)_{k \geq 1}$ définie par

$\forall k$. $e^k = (e^k)_n = (\sqrt{n}\, \delta_n^k)$
$= (0, \dots, 0, \sqrt{k}, 0 \dots)$ $k^{\text{ième}}$ position

il est claire que $(e^k)_k$ est une suite orthonormée de E

et $\forall y \in E$, $y = \sum_{k=1}^{n} \langle y, e^k \rangle e^k$,

par suite $(e^k)_n$ est une base hilbertienne de E

3) $F = \{ x = (x_n)_{n \geq 1} \in \mathbb{C}$, $x_n \neq 0$ sauf pour un nbr fini de $n \}$

F ss.ev. dense ds E.

F ss ev. (évident)

$\overline{F} = E$? $\forall y \in E$, $\sum_{n \geq 1} \frac{|y_n|^2}{n}$ cv,

on pose $x^k = (y_1, y_2, \dots, y_k, 0, \dots)$
$= \sum_{i=1}^{k} \langle y, e^i \rangle e^i \in F$

verifie

$$\|y - x^k\|^2 = \sum_{n \geq k} \frac{|y_n|^2}{n} \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

(c'est le reste d'une serie Cv)

Donc F dense ds E.

Exercice 6 :

(e_n) base hilbertiem de H

on pose $\begin{cases} f_n = e_{2n} \\ g_n = \sqrt{1-9^{-n}}\, e_{2n} + 3^{-n} e_{2n+1} \end{cases}$

$X = \overline{\text{Vect}\{f_n\}}$

$Y = \overline{\text{Vect}\{g_n\}}$

1) $\{f_n\}$ est système orthonormé de X

Car si $n \neq m$ $\langle e_{2n}, e_{2m}\rangle = 0$
($(e_n)_n$ est une base hilbertienne de E)

D'autre part, $\|g_n\|^2 = 1 - 9^{-n} + 3^{-2n} = 1$

et $\forall n \neq m$, $\langle g_n, g_m\rangle = 0$ car $\{2n, 2n+1\}$ et $\{2m, 2m+1\}$ sont disjoints et (e_n) base hilbertienne

Ainsi $\{f_n\}$ et $\{g_n\}$ sont des suites orthonormés des ss espaces X et Y de l'espace de Hilbert E, alors $\{f_n\}$ et $\{g_n\}$ sont bases hilbertiennes dans n espaces vectoriels fermés qu'elles engendrent.

Par suite $\forall x \in X$, $x = \sum_{n\geq 1} \alpha_n f_n$

et $\|x\|^2 = \sum_{m\geq 1} |\alpha_n|^2 < \infty$.

$y \in Y$, $y = \sum_{m\in\mathbb{N}} \beta_n g_n$, et $\|y\|^2 = \sum_{m\in\mathbb{N}} |\beta_n|^2 < \infty$

2. $X \cap Y = \{0_H\}$

Soit $x = X\cap Y \iff x = y = \sum_{n\geq 1} \alpha_n f_n$

$= \sum_{n\geq 1} \beta_n g_n$

Calculer C_{2n+1} la Composante de $x = y$ dans la base $(e_n)_n$

$C_{2n+1} = \langle x, e_{2n+1}\rangle = \sum_{k\geq 1} \alpha_k \langle \underbrace{e_{2k}, e_{2n+1}}_{=0}\rangle$

$\|$

$\langle y, e_{2n+1}\rangle = 0$

$\sum \beta_k \langle g_k, e_{m+1}\rangle = 0$

$\Rightarrow 3^{-n}\beta_n = 0 \Rightarrow \beta_n = 0 \ \forall n.$

$\Rightarrow x = y = 0$

donc $X \cap Y = \{0_H\}$

. $\overline{X+Y} = H = \overline{\text{vect}\{e_n, n\in\mathbb{N}\}}$

Comme $\text{vect}\{e_n, n\in\mathbb{N}\} \overset{?}{\underset{(*)}{\subset}} X+Y \subset H$

$H = \overline{\text{vect}\{e_m, m\in\mathbb{N}\}} \subset \overline{X+Y} \subset H$

Alors : $\overline{X+Y} = H$.

$(*)$

$\forall m \geq 0$ $\quad e_{2n} = f_m \in X \subset X+Y$

$e_{2n+1} = (g_n - \sqrt{1-9^{-n}}\, f_m)3^n \in X+Y$

Alors $\text{vect}\{e_m, m\in\mathbb{N}\} \subset X+Y \subset H$.
$\Rightarrow \overline{\text{vect}\{e_m, m\in\mathbb{N}\}} \subset \overline{X+Y}$

3- $\vartheta = \sum_{n\in\mathbb{N}} 3^{-n} e_{2n+1} \in H$

car $\sum_{n\in\mathbb{N}} 3^{-2n} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{9}} = \dfrac{9}{8} < \infty$

$\sum |3^{-n} e_{2n+1}|$

on suppose $\vartheta \in X+Y$;

$$\vartheta = \sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k f_k + \sum_{k\in\mathbb{N}} \beta_k g_k$$

Calculer C_{2n+1} des Composantes de ϑ. $C_{2n+1} = \langle \vartheta, e_{2n+1} \rangle$

$C_{2n+1} = 3^{-n} = 3^{-n} \beta_n \Rightarrow \beta_n = 1 \quad \forall n$.

$\Rightarrow y \notin H$ absurde

$\Rightarrow \underbrace{\sum 3^{-n} e_{2n+1}}_{\in X+Y} \xrightarrow[\text{Converge ds } H]{} H.$

mais ne Converge pas ds $X+Y$

$\Rightarrow X+Y$ n'est pas un fermé.

en dim finie la somme hilbertienne de droite vectoriel $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$

où $H = \text{vect}\{e_n\} = E$

Exercice 7: (Polynômes de Laguerre)

$(E, dp) = (L^2(\mathbb{R}^+), e^{-x}dx)$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\infty f(x)\overline{g(x)}\, e^{-x} dx$$

$(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $L_n(x) = \dfrac{e^x}{n!} \underbrace{(x^n e^{-x})^{(n)}}_{P_n e^{-x}}$

1) $L_n(x) = \dfrac{e^x}{n!} (\underbrace{x^n}_{V} \underbrace{e^{-n}}_{U})^{(n)}$

$(UV)^{(n)} = \sum_{k\geq 1} C_n^k U^n V^{n-k}$

Formule Leibnitz $\stackrel{1}{=} \dfrac{e^x}{n!} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \dfrac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} (-1)^{n-k} e^{-x}$

$(VU)^{(n)} \stackrel{2}{=} \dfrac{e^x}{n!} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \dfrac{n!}{k!} (-1)^k x^k e^{-x}$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} C_n^k \cdot x^k.$$

$\Rightarrow L_n$ est un polynôme de degré n de Coeff. dominant (coeff. du monôme x^n) $\text{dom}(L_n) = \dfrac{(-1)^n}{n!}$

2) a) Soit $0 \leq k < n$

$$\langle x^k, L_n \rangle = \int_0^\infty x^k . L_n(x)\, e^{-x} dx$$

$$= \frac{1}{n!} \int_0^\infty x^k (e^{-x} x^n)^{(n)} dx$$

$$= \frac{1}{n!} \int_0^\infty \underbrace{x^k}_{V} \Big(\underbrace{(e^{-x} x^n)^{(n-1)}}_{U'} \Big)' dx$$

$$= \frac{-1}{n!} k \int_0^\infty x^{k-1} (x^n e^{-x})^{(n-1)} dx$$

$$= \frac{(-1)^2}{n!} k(k-1) \int_0^\infty x^{k-2} (x^n e^{-n})^{(n-2)} dx$$

$$= \frac{k!}{n!} (-1)^k \int_0^{+\infty} (x^n e^{-x})^{(n-k)} dx$$

$$= 0$$

d'où $\langle x^k, L_n \rangle = 0$

et pour $k = n$ $\quad \langle x^n, L_n \rangle = (-1)^n . n!$

b) (L_n) une famille orthonormée

$m \neq n$, on suppose que $m > n$.

$$\langle L_m, L_n \rangle = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{(-1)^k}{k!} \underbrace{\langle x^k, L_n \rangle}_{=0}$$

$$= 0$$

car $\langle x^k, L_n \rangle = 0 \quad \forall\, 0 \leq k < n < m$

Pour $m = m$.

$$\langle L_m, L_n \rangle = \frac{(-1)^n}{n!} C_n^n \cdot \langle x^n, L_n \rangle = 1$$

3) $\alpha > 0$, $f_\alpha(x) = e^{-\alpha x}$.

$$\sum_{m=0}^{\infty} \Big(\underbrace{\int_0^\infty e^{-\alpha x} L_n(x)\, e^{-x}\, dx}_{\langle f_\alpha, L_n \rangle} \Big)^2$$

$$m! \langle f_\alpha, L_m \rangle = \int_0^\infty e^{-\alpha x} \underbrace{(e^{-x} x^n)^{(n)}}_{((x^n e^{-x})^{(m-1)})'} dx$$

$$\underset{\substack{\text{intégration} \\ \text{par partie.}}}{=} \Big[e^{-\alpha x} \underbrace{(x^n e^{-x})^{(m-1)}}_{0} \Big]_0^\infty + \alpha \int_0^\infty e^{-\alpha x} (x^n e^{-x})^{n-1} dx$$

$$\underset{\substack{\text{par} \\ \text{itération.}}}{=} \alpha^n \int_0^\infty e^{-\alpha x} x^n e^{-x}\, dx$$

$$= \alpha^n \int_0^\infty x^n e^{-(\alpha+1)x}\, dx$$

$y = (\alpha+1)x$

$$= \alpha^n \int_0^\infty \left(\frac{y}{\alpha+1}\right)^n e^{-y}\, \frac{dy}{1+\alpha}$$

$$= \frac{\alpha^n}{(\alpha+1)^{n+1}} \int_0^\infty y^n e^{-y}\, dy$$

$$= \frac{\alpha^n}{(\alpha+1)^{n+1}} \Gamma(m+1)$$

$$= \frac{n!\, \alpha^n}{(\alpha+1)^{m+1}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{m!\, \alpha^n}{(\alpha+1)^{m+1}} \right)^2 = \frac{1}{(\alpha+1)^2} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^2 \right)^n$$

$$= \frac{1}{(\alpha+1)^2} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{1+2\alpha} < \infty.$$

$$\Rightarrow f_\alpha \in \overline{\text{Vect}\{L_m, m \geq 0\}}$$

<u>thm Ascoli-weierstrass:</u>

Une fct cont sur $[a,b]$ est la limite uniforme d'une suite de polynôme

c.à.d $\overline{\text{Vect}\{P_n, m \in \mathbb{N}\}} = \mathcal{C}([a,b])$

$\Leftrightarrow$ si $f \in \mathcal{C}([a,b])$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists P \in \mathbb{R}[X]$

$\|f - P\|_\infty < \varepsilon$.

4- $f_n(x) = e^{-nx}$, $m \in \mathbb{N}$

$$\overline{\{f_m, m \in \mathbb{N}\}} = C_0(\mathbb{R}^+)$$

on pose $\theta = \underbrace{\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})}_{\text{Banach pour la norme } \|\ \|_\infty} \longrightarrow \underbrace{\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^+)}_{\text{Banach } \|\ \|_\infty}$

$$\theta(f(x)) = f(e^{-x})$$

θ est un isomorphisme bicontinue de $\mathcal{C}([0,1])$ ds $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^+)$

- θ est bien définie, en effet,

$\forall f \subset \mathcal{C}([0,1])$ et $\forall x \in [0,\infty[$

$x \longmapsto f(e^{-x}) \in \mathcal{C}([0,\infty[)$

. θ est linéaire

. θ est continue, isométrique, en effet:

$$\|\theta(f)\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^+} |f(e^{-x})| = \sup_{x\in]0,1]} |f(x)|$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ f\,\text{cont}\,[0,1]}}{=} \sup |f(x)|$$

$$= \|f\|_\infty$$

donc θ est injective.

• θ est surjective $(\theta(\mathcal{C}([0,1]) \supset \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^+))$

$$\varphi : [0,\infty[\longrightarrow]0,1]$$
$$x \longmapsto e^{-x}$$
$$\varphi^{-1}(x) = -\ln x$$

Soit $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^+)$, on cherche $g \in \mathcal{C}([0,1])$ tq $\theta(g) = f$.

on pose $g(x) = f(-\ln x)$

$$g \in \mathcal{C}([0,1]) \text{ et } \theta(g(x)) = g(e^{-x})$$
$$= f(-\ln e^{-x})$$
$$= f(x)$$

D'après thm de Banach, θ est un isomorphisme bicont de $\mathcal{C}([0,1])$ ds $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^+)$, θ est un homéomorphisme d'e.v.n.

Par suite, si F est un fermé de $\mathcal{C}([0,1])$, $\theta(F)$ est un fermé de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$

De plus, $\forall A \subset \mathcal{C}([0,1])$, $\theta(\bar{A}) = \overline{\theta(A)}$, en effet;

. $A \subset \bar{A} \Rightarrow \theta(A) \subset \theta(\bar{A}) \Rightarrow \overline{\theta(A)} \subset \theta(\bar{A})$

• Soit $g = \theta(f)$, $f \in \bar{A}$, $\exists (f_n)_n \subset A$,

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{C}[0,1]} f$$

par continuité de θ:

$$\underbrace{\theta(f_n)}_{\in\,\theta(A)} \xrightarrow{\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^+)} \theta(f) = g \Rightarrow g \in \overline{\theta(A)}$$

$$\mathcal{C}[0,1] = \overline{\text{vect}\{x^n, n\in\mathbb{N}\}}$$

$$\Rightarrow \theta(\overline{\text{vect}\{x_n, n\in\mathbb{N}\}}) = \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^+)$$

$$= \overline{\theta(\text{vect}\{x_n, n\in\mathbb{N}\})}$$

$$= \overline{\text{vect}\{f_n, n\geq 0\}} = \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^+)$$

∘ $\bar{A} = \overline{\text{vect}\{L_n, n\in\mathbb{N}\}}^{L^2} = E$?

? $\boxed{f \in \bar{A} \iff \forall \varepsilon > 0, \exists g \in A ; \|f-g\|_2 < \varepsilon}$

sachant que $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^+)$ est dense ds $L^2([0,+\infty[, e^{-x}dx)$

$$\left[\; f_n \xrightarrow{\mathcal{C}_0(\mathbb{R})} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{L^2} f \right.$$

$$\sqrt{\int_0^\infty |f_n - f|^2 e^{-x} dx} \leq \|f_n - f\|_\infty$$

Soit $f \in E$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists h \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^+)$;

$$\|f - h\|_2 < \varepsilon' \quad (1)$$

or $h \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}) = \overline{\text{vect}\{f_n\}}^{\|\cdot\|_\infty}$;

$\exists g \in \mathrm{vect}\{P_n, n\geq 0\} \subset \overline{\mathrm{vect}\{L_n, n\geq 0\}}$

$\|h-g\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ or $\|h-g\|_2 \leq \|h-g\|_\infty$

$< \frac{\varepsilon}{2}$ (2)

D'où $\|f-g\|_2 \leq \|f-h\|_2 + \|h-g\|_2 < \varepsilon$

$\Rightarrow f \in \overline{\mathrm{vect}(L_n)}^{L^2}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{C}([0,1]) &\xrightarrow{\theta} \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^+) \\ f &\longmapsto f(e^{-x}) \end{aligned}$$

$\mathcal{C}[0,1]$ est dense ds $(L^2[0,1], dx)$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}[0,1] \arrow[d, "\theta"] & (L^2[0,1], dx) \arrow[d, "\theta"] \\ \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^+) & L^2(\mathbb{R}^+, e^{-x} dx) \end{tikzcd}$$

$$\int_0^{+\infty} |f(e^{-x})|^2 e^{-x} dx = \int_0^1 |f(y)|^2 dy$$

$y = -\ln x$

$x = e^{-y}$.

Proposition.

Soit un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $w : I \xrightarrow[>0]{\text{cont}} \mathbb{R}$

on suppose qu'il existe $\alpha > 0$

$*) \int_I e^{r|\alpha|} dw(x) < \infty$ $\qquad I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$

Alors $\{x^n, n\geq 0\}$ est totale ds

$(L^2(I), w(x)dx)$

$$\overline{\mathrm{vect}\{x^n, n\geq 0\}}^{L^2} = L^2(I)$$

Exemples

1. $I =]-1, 1[$, $w = 1$

P_n = Polynôme de Legendre

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

$$\overline{\mathrm{vect}\{P_n\}} = L^2(]-1,1[, dx)$$

2. $I =]-1,1[$, $w = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$T_0 = 1$

$$T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x)$$

$\downarrow$

poly de Tchebechev

$$\overline{\mathrm{vect}\{T_n, n\geq 0\}} = L^2\left(I, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx\right)$$

3. $I = \mathbb{R}$, $w(x) = e^{-x^2}$

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$$

$\downarrow$

poly d'hermits

4. $I =]0, \infty[$, $w(x) = e^{-x}$

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$$

$\downarrow$

Les poly. de laguerre.

Exercice 8 :

H hilbert ; $\langle \cdot, \cdot \rangle$

Soient $x_n, x \in H$, $n \in \mathbb{N}$

on dit que $(x_n)_n$ cv. faiblement vers x ds H et on note $x_n \longrightarrow x$

Si $\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y\rangle = \langle x, y\rangle, \forall y \in H$

$\iff \lim_{n\to\infty} \langle x_n - x, y\rangle = 0$

on dit que (x_n) cv fortement vers x

ds H ssi $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\ \|_H} x \iff \|x_n - x\| \xrightarrow[H]{} 0$

1. $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\ \|} x \Rightarrow x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$?

soit $y \in H$, $|\langle x_n - x, y\rangle| \leq \|x_n - x\| \|y\|$ (Cauchy-Schwarz), $\|x_n - x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow \langle x_n - x, y\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow$ Cv. faiblement

2. $\dim H = k < \infty$.

$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \Rightarrow x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\ \|} x$

on pose $\mathcal{B} = (e_i)_{i=1}^{k}$ une base orthonormée de H

$x = \sum_{i=1}^{k} \langle x, e_i\rangle e_i$

$x_n = \sum_{i=1}^{k} \langle x_n, e_i\rangle e_i$

$\Rightarrow x_n - x = \sum_{i=1}^{k} \langle x_n - x, e_i\rangle e_i$

$\Rightarrow \|x_n - x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle x_n - x, e_i\rangle|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\left(x_n - x \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\right)$

3. en dim infinie

$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \not\Rightarrow x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\ \|} x$

$H = \ell^2(\mathbb{R}) = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, \sum_{n\geq 1} |x_n|^2 < \infty\}$

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $x^k = e^k = (x_n^k)_n = (\delta_{m,n})_n$

$= (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ (1 = $k^{\text{ème}}$ terme.)

montrer que $(x^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ conv. faiblement vers 0. mais ne converge pas vers 0 dans H.

soit $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E = H$, alors

$\langle x^k, y\rangle = y_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

car y comme $y \in H$ alors $\sum_{k\geq 1} |y_k|^2 < \infty$

$\Rightarrow y_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

mais

$\|x^k\|^2 = \sum_{n\geq 0} |e^k|^2 = 1 \neq 0$

donc $(x^k)_k$ ne converge pas vers 0 ds H.

4. $\begin{cases} x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \\ \|x_n\| \longrightarrow \|x\| \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow} x_n \xrightarrow{\|\ \|} x$

$\|x_n - x\|^2 = \langle x_n - x, x_n - x\rangle$ (pdt scalaire est sesquilinéaire)

$= \underbrace{\|x_n\|^2 + \|x\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\langle x_n, x\rangle}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$; $\|x_n\|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \|x\|^2$, $\langle x_n, x\rangle \xrightarrow[x_n\to x]{} \|x\|^2$

5. $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$? $\Rightarrow (x_n)$ bornée,

$\exists c \,;\ \|x_n\| \leq c \,,\ \forall n$

on pose que :

$$T_n : H \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$y \longmapsto T_n(y) = \langle x_n, y \rangle$$

T_n est linéaire continue et $\|T_n\| = \|x_n\|_H$ (théo de Riesz)

Comme $T_n(y) = \langle x_n, y \rangle$ converge ds $\mathbb{C}$ (complet) vers $\langle x, y \rangle$ alors $\forall y \in H, T_n(y)$ est bornée ds $\mathbb{C}$.

D'après le thm de Banach-Steinhauss, $(\|T_n\|_{H'})_n$ est bornée, comme $\|T_n\|_{H'} = \|x_n\|_H$ alors $(\|x_n\|_H)_n$ est bornée.

6_ $\left.\begin{array}{l} x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \\ y_n \xrightarrow{\|\ \|} y \end{array}\right\} \overset{?}{\Rightarrow} \langle x_n, y_n \rangle \longrightarrow \langle x, y \rangle$

$|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| \overset{?}{=} |\langle x_n - x, y_n - y\rangle|$

$|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| = |\langle x_n - x, y\rangle + \langle x_n, y_n - y\rangle|$

$\leq |\langle x_n - x, y\rangle| + |\langle x_n, y_n - y\rangle|$

$\leq \underbrace{|\langle x_n - x, y\rangle|}_{\substack{\to 0 \\ n\to\infty \\ (x_n \to x)}} + \underbrace{\|y_n - y\|_H}_{\substack{\to 0 \\ n\to\infty}} \underbrace{\|x_n\|_H}_{\text{bornée d'après 5)}}$ Cauchy-Schwarz.

$\Rightarrow |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\ell^2 \ni x^n = e^n = (0, 0, \dots, \overset{m^{\text{ième}}}{1}, 0, \dots, 0)$

$e^n = (e^n_i)_{i\in\mathbb{N}^*} = (\delta_{i,n})_{i\in\mathbb{N}^*}$

D'après 3) $e^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

en effet ; $\forall y = (y_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell^2$, $\langle e^n, y\rangle = y_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

car $\sum |y_n|^2 < \infty$. (le terme générale tend vers 0)

Si $x^n = y^n = e^n$ alors :

$\langle x^n, y^n\rangle = \langle e^n, e^n\rangle = \|e^n\|^2 = 1 \not\longrightarrow 0$ ($n \to \infty$)

Exercice 9 :

F = s.e.v de $\mathcal{C}([0,1])$

F = fermé de $L^2(]0,1[)$

objectif : $\dim F < \infty$

4) e) on conclure que : $\dim F < \infty$.

1) $T : (\mathcal{C}([0,1]), \|\ \|_\infty) \longrightarrow (L^2(]0,1[), \|\ \|_2)$

$f \longmapsto f$.

• Il est claire que T est linéaire

• $\forall f \in \mathcal{C}([0,1])$,

$$\|Tf\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2 = \int_0^1 |f(x)|^2 dx \leq \int_0^1 \|f\|_\infty^2 dx = \|f\|_\infty^2$$

$\Rightarrow \|Tf\|_2 \leq \|f\|_\infty$.

$\Rightarrow$ T est continue de $(\mathcal{C}([0,1]), \|\ \|_\infty)$ dans $(L^2(]0,1[), \|\ \|_2)$

b) Déduire que F = fermé de $\mathcal{C}([0,1])$

Soit (f_n) une suite de F / $f_n \to f$ pour $\|\ .\ \|_\infty$ Mq $f \in F$.

on sait d'après 1) que

$$\|f_n - f\|_{L^2} \leq \underbrace{\|f_n - f\|_\infty}_{\downarrow\, 0}$$

$\Rightarrow f_n \longrightarrow f$ ds L^2.

$\Rightarrow f \in L^2$ car L^2 est complet pour $\|\ .\ \|_{L^2}$.

D'autre part on a :

$$\begin{cases} f_n \xrightarrow[{[0,1]}]{CV} f \\ (f_n) \text{ est cont} \end{cases} \xrightarrow{\text{Théo de continuité de suite de fct}} f \in \mathcal{C}([0,1])$$

on conclure que $f \in F$.

c) on a $(F, \|\ \|_2)$ est complet (fermé dans un complet). on a aussi $(F, \|.\|_\infty)$ est complet voir ~~1)b)~~ 1) b) et $\|\ \|_{L^2} \leq \|\ \|_\infty$.

D'après le corollaire du théorème de Banach $\|.\|_{L^2}$ et $\|\ \|_\infty$ sont équivalentes.

2 - Comme F = fermé et $\underset{\text{car . s.e.v}}{\underline{\text{convexe}}}$

P_F est bien définie sur $L^2[0,1]$

car F est un s.e.v fermé de L^2.

$$P_F : L^2[0,1] \longrightarrow L^2[0,1]$$
$$f \longmapsto P_F(f)$$

3 - Soit $x \in [0,1]$, on pose $\psi_x : L^2[0,1] \to \mathbb{R}$

$$f \longmapsto \psi_x(f) = P_F(f)$$

ψ_x est bien définie, linéaire et Cont.

. ψ_x est linéaire, en effet :

$\forall f_1, f_2 \in L^2([0,1])$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$\psi_x(\lambda f_1 + f_2) = P_F(\lambda f_1 + f_2)(x)$

$\underset{\substack{\uparrow \\ P_F \text{ est linéaire}}}{=} (\lambda P_F(f_1) + P_F(f_2))(x)$

$= \lambda P_F(f_1)(x) + P_F(f_2)(x)$

$= \lambda \psi_x(f_1) + \psi_x(f_2)$

. $|\psi_x(f)| = |P_F(f(x))| \leqslant \|P_F(f)\|_\infty$

$\leqslant C \|P_F(f)\|_2$ $\quad \|\ \|_\infty \sim \|\ \|_2$

$\leqslant \underbrace{\|P_F\|_{\mathcal{L}(F)}}_{1} \|f\|_2$

Donc ψ_x est Cont.

Comme ψ_x est une forme linéaire Continue sur $L^2([0,1], \mathbb{R})$, $\exists! g_x \in L^2([0,1])$ /

$\forall f \in L^2$, $\psi_x(f) = P_F(f(x)) = \langle f, g_x \rangle$

grâce au théorie de Riesz

4) $(f_n)_n \subset B'_{(F, \|\ \|_\infty)}(0,1)$

a) D'après le théorème 2.8, Comme $(f_n)_n \subset F$ et $\|f_n\|_\infty \leqslant 1$.

donc $\|f_n\|_2 \leqslant C$ ($\|\ \|_F \sim \|\ \|_\infty$)

alors $\exists$ une ss suite $(f_{n_k})_k$: $f_{n_k} \xrightarrow{n\to\infty} f \in L^2[0,1]$

b) $\forall x \in [0,1]$

$f_{n_k}(x) \longrightarrow P_F(f(x))$

D'après $(*)$ $\forall f \in L^2([0,1])$

$P_F f(x) = \langle f, g_x \rangle$

par suite $f_{n_k}(x) - P_F f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ f_{n_k} \in F}}{=} P_F(f_{n_k} - f)(x)$

$= \langle (f_{n_k} - f), g_x \rangle$

$\downarrow n \to \infty$

0

car $f_{n_k} - f \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

converge faiblement $\Rightarrow$ bornée (Exercice 8)

c) $f_{n_k} \xrightarrow{L^2([0,1])} P_F(f)$?

Comme f_{n_k} Converge faiblement ds L^2 donc (f_{n_k}) est bornée ds $(L^2([0,1]), \|\ \|_2)$, comme $\|\ \|_\infty \sim \|\ \|_2$

Alors (f_{n_k}) est bornée ds $(F, \|\ \|_\infty)$

D'après le théo. C.V.D et b)

on obtient $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_{n_k} - P_F(x)\|_2^2$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 |f_{n_k}(x) - P_F(f(x))|^2 dx$

$= 0.$

Comme La Convergence forte implique

la Convergence faible alors

$f_{n_k} \xrightarrow{n\to\infty} P_F(f)$ or d'après 4)a)

$f_{n_k} \xrightarrow[n\to\infty]{} f$

il vient de l'unicité de la limite que

$P_F(f) = f \Rightarrow f \in F$

d) on a montrer que $\|f_{n_k} - f\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

or $\|f_{n_k} - f\|_\infty \leq C \|f_n - f\|_2$

$\| \|_\infty \sim_F \| \|_2$

$\Rightarrow (f_{n_k})$ cv. uniformement ds F

F ~~A~~

e) $F \subset (\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}), \| \|_\infty)$

on vient de montrer que $B'_{(F, \| \|_\infty)}(0,1)$

est un Compact de F.

on en déduit d'après de théorème

de Riez que $\dim F < \infty$

Scanned by CamScanner