Chapitre 1

Espaces vectoriels normés - espaces de Banach

Ce chapitre est constitué de rappels sur les espaces vectoriels normés, les espaces de Banach et les applications linéaires continues.

1.1 Espaces vectoriels normés

Soit E un espace vectoriel réel ou complexe.

Définition 1.1 *On appelle norme sur E toute application $N : E \to \mathbb{R}_+$ qui vérifie les propriétés suivantes :*

i) $N(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0, \ \forall x \in E.$
ii) $N(\lambda x) = |\lambda| N(x), \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{C}$ *(ou* $\mathbb{R}$ *)*
iii) $N(x+y) \leq N(x) + N(y), \ \forall (x,y) \in E \times E.$

Le couple (E, N) est appelé espace vectoriel normé (EVN). La norme N est, en général, notée $\|.\|$.

Exemples 1.1 *1. Sur $\mathbb{R}^n$ dont le point courant est noté $x = (x_1, ..., x_n)$, on dispose des trois normes classiques :*

$$N_1(x) = \sum_{j=1}^{n} |x_j|, \quad N_2(x) = \Big(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\Big)^{1/2}, \quad N_\infty(x) = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|.$$

2. $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ espace des fonctions continues sur $[0,1]$, à valeurs réelles. Pour $u \in E$, on peut prendre $\|u\| = \sup_{x \in [0,1]} |u(x)|$. C'est la norme de la convergence uniforme.

3. $E = l^1(\mathbb{C})$ l'ensemble des suites complexes $x = (x_n)_{n \geq 1}$ telles que $\sum_{n \geq 1} |x_n| < +\infty$, et

$$\|x\| = \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|.$$

Remarques 1.1 1. *En posant $d(x,y) = N(x-y)$, on définit de manière naturelle sur l'EVN E une distance invariante par translation. Dans toute la suite, un EVN sera donc toujours considéré comme un espace métrique et un espace topologique.* ???

2. *De l'inégalité $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|$, on déduit que la norme est une application uniformément continue. De même, il est facile de vérifier que les applications qui définissent la structure algébrique de E : $(x,y) \to x+y$ de $E \times E$ dans E et $(\lambda, x) \to \lambda.x$ de $\mathbb{C} \times E$ (ou $\mathbb{R} \times E$) dans E sont continues.* ?? .

3. *Deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sur E sont équivalentes s'il existe une constante $C \geq 1$ telle que $\frac{1}{C}\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1$ pour tout $x \in E$. Dans ce cas, les distances associées sont équivalentes et définissent donc la même topologie sur E.*

4. *Si F est un sous espace vectoriel de l'EVN E, il est naturellement muni, en restreignant à F l'application norme, d'une structure d'EVN.*

5. *Si E_1 et E_2 sont deux EVN, il en est de même de leur produit $E_1 \times E_2$ en posant (par exemple) $\|(x_1, x_2)\| = (\|x_1\|_{E_1}^2 + \|x_2\|_{E_2}^2)^{1/2}$.*

1.2 Applications linéaires continues sur les EVN

Une partie A d'un EVN E est dite bornée si elle est contenue dans une boule ou encore si $\{\|x\|,\ x \in A\}$ est borné dans $\mathbb{R}_+$. Une fonction f d'un EVN E dans un EVN F est bornée sur $A \subset E$ si la partie $f(A)$ est bornée. On peut ainsi énoncer le théorème suivant :

Théorème 1.1 *Soient (E, N) et (E', N') deux EVN, et $L : E \to E'$ une application linéaire. Les cinq assertions suivantes sont alors équivalentes.*

i) L est uniformément continue sur E.
ii) L est continue sur E.
iii) L est continue à l'origine.
iv) L est bornée sur la boule unité de E.
v) Il existe une constante $C > 0$ telle que $N'(L(x)) \leq CN(x)$, $\forall x \in E$.

Démonstration. On établit seulement les implications $iii) \Rightarrow iv)$ et $iv) \Rightarrow v)$, les autres étant simples et laissées aux soins du lecteur.

$iii) \Rightarrow iv)$: Par définition de la continuité de L à l'origine, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$N(x) < \alpha \Rightarrow N'(L(x)) < 1.$$

On obtient alors, par linéarité

$$N(x) < 1 \Rightarrow N(\alpha x) < \alpha \Rightarrow N'(L(x)) < \frac{1}{\alpha}.$$

$iv) \Rightarrow v)$: Par hypothèse, il existe $\alpha > 0$ tel que $N'(L(x)) < \alpha$, pour tout $x \in E$, tel que $N(x) < 1$.
En appliquant ce fait à $\frac{x}{2N(x))}$, $x \neq 0$, on déduit en particulier que $N'(L(x)) \leq 2\beta N(x)$, pour tout $x \neq 0$, cela achève la preuve.

important → Le cas $x = 0$ étant trivial.

■

On dispose aussi dans le cadre des EVN de dimension finie du résultat suivant.

Théorème 1.2 *Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

Démonstration. Soit E un tel espace et $(e_1, ..., e_n)$ une base de E. Pour $x = x_1e_1 + ... + x_ne_n$, on pose $\|x\| = \max\limits_{1\leq j\leq n} |x_j|$, c'est évidemment une norme sur E. Soit alors N une autre norme.

$$N(x) = N(\sum_{j=1}^{n} x_je_j) \leq \sum_{j=1}^{n} x_jN(e_j) \leq \sum_{j=1}^{n} N(e_j) \max_{1\leq j\leq n} |x_j| \leq \beta\|x\|.$$

Cela établit la première inégalité, il reste donc à trouver $\alpha > 0$ tel que $\alpha\|x\| \leq N(x)$. Pour cela on considère l'application composée $v = N \circ u$, avec

$$(\mathbb{R}^n, N_1) \xrightarrow{u} (E, N) \qquad \xrightarrow{N} \mathbb{R}_+ \tag{1.1}$$

$$(x_1, ..., x_n) \mapsto x = \sum_{j=1}^{n} x_je_j \mapsto N(x) \tag{1.2}$$

v est clairement continue sur $\mathbb{R}^n$, de plus, la sphère unité $S = \{(y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n, \max\limits_{1\leq j\leq n} |y_j| = 1\}$ est une partie compacte de l'espace métrique $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$. Donc v atteint sur S sa borne inférieure α, et celle-ci est strictement positive. On obtient ainsi

$$v(y_1, ..., y_n) \geq \alpha, \quad \forall (y_1, ..., y_n) \in S.$$

Soit alors $x \in E \setminus \{0\}$, en prenant pour $j = 1, ..., n$, $y_j = \frac{x_j}{\max\limits_{1\leq j\leq n} |x_j|} = \frac{x_j}{\|x\|}$, on aboutit à

$$N(x) = \|x\|v(y_1, ..., y_n) \geq \alpha\|x\|.$$

Ce qui achève la preuve. ■

Contre exemple : La suite de fonctions $u_n(t) = t^n$ prouve que les deux normes $\|u\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |u(x)|$ et $\|u\|_1 = \int_0^1 |u(x)|dx$ ne sont pas équivalentes sur $C([0, 1], \mathbb{R})$.

On déduit du théorème précédent le résultat bien connu suivant (théorème de continuité automatique).

Corollaire 1.1 *Toute application linéaire d'un EVN E de dimension finie dans un EVN E' (de dimension quelconque) est continue.*
En particulier, il y a égalité entre le dual algébrique (espace des formes linéaires) et le dual topologique (espace des formes linéaires continues) d'un EVN de dimension finie.

Preuve. En effet, soit $L : (E, N) \to (E', N')$ une application linéaire, on prend E de dimension n et $(e_1, ..., e_n)$ une base de E. Pour $x = x_1e_1 + ... + x_ne_n$, on a

$$N'(Lx) = N'(\sum_{j=1}^{n} x_jL(e_j)) \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j|N'(L(e_j)) \leq (\max_{1\leq jn} |x_j|)\sum_{j=1}^{n} N'(L(e_j)) \leq \alpha N(x),$$

car sur E, les normes N(x) et $\max\limits_{1\leq j\leq n} |x_j|$ sont équivalentes. ■

Théorème 1.3 (Applications bilinéaires) *Soient E, F et G trois EVN et B une application bilinéaire de $E \times F$ dans G, alors B est continue si et seulement si il existe $C > 0$ telle que $\|B(x,y)\|_G \leq C\|x\|_E.\|y\|_F$, pour tout $(x,y) \in E \times F$.*

La preuve est laissée à titre d'exercice.

On s'intéresse à présent à l'espace vectoriel des applications linéaires continues d'un EVN E dans un EVN F. On désignera par $\mathcal{L}(E,F)$ cet espace et on notera invariablement par $\|.\|$ toutes les normes des différents espaces qu'on aura à utiliser.

Théorème 1.4 *En posant pour $L \in \mathcal{L}(E,F)$*

$$\|L\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|L(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|L(x)\|,$$

on munit $\mathcal{L}(E,F)$ d'une structure d'espace vectoriel normé.

Démonstration. Il suffit clairement d'établir l'égalité. Pour $x \neq 0$,

$$\frac{1}{\|x\|}.\|L(x)\| = \|L(\frac{x}{\|x\|})\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|L(x)\|,$$

d'où la 1ère inégalité. Réciproquement, pour $x \neq 0$, $\|x\| \leq 1$,

$$\|L(x)\| \leq \frac{\|L(x)\|}{\|x\|} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|L(x)\|}{\|x\|},$$

ce qui entraine la 2ème inégalité et achève la preuve. ∎

Remarques 1.2 *i) Vérifier qu'on a aussi $\|L\| = \sup_{\|x\|=1} \|L(x)\|$.*

ii) Cette norme $\|L\|$ est, en fait, la meilleure constante qui réalise l'inégalité du point v) du Théorème 1.

iii) La détermination explicite de $\|L\|$ n'est pas toujours simple. On se contente, en général, d'une bonne majoration de cette quantité.

iv) Lorsque $E = F$, $\mathcal{L}(E,F) = \mathcal{L}(E)$ est une algèbre. Dans ce cas, si u et v sont deux endomorphismes continus de E, on a $\|u \circ v\| \leq \|u\|.\|v\|$.

1.3 Espaces de Banach

On appelle espace de Banach un espace vectoriel normé complet (pour la distance associée à sa norme).

Exemples 1.2 *i) L'espace $\mathbb{R}^n$ et plus généralement tout EVN de dimension finie est un espace de Banach.*

ii) Tout sous epace fermé d'un espace de Banach est de Banach.

iii) $C([0,1],\mathbb{R})$ est complet pour la norme de la convergence uniforme mais ne l'est pas pour la norme "L^1" donnée par $\|u\|_1 = \int_0^1 |u(x)|dx$.

On peut appliquer aux espaces de Banach toutes les propriétés établies sur les espaces métriques complets. En particulier, on a le théorème de prolongement suivant :

$E_1 - E$

Théorème 1.5 *Soit E un EVN et E_1 un sous espace dense de E. Et soit L une application linéaire continue sur E_1 à valeurs dans un espace de Banach F. Alors L se prolonge de manière unique en une application linéaire continue de E dans F.*

$x \in E$

Démonstration. En effet, si $x \in E$ et (x_n) est une suite de E_1 qui converge vers x, on pose $\tilde{L}(x) = \lim_{n\to+\infty} L(x_n)$. Cette limite est bien définie car, en vertu de la continuité uniforme de L sur E_1, la suite $L(x_n)$ est de Cauchy dans le Banach F, de plus, sa valeur ne dépend pas de la suite (x_n). On vérifie alors aisément que $\tilde{L}$ est linéaire, continue et prolonge L à l'EVN E. Enfin, $\tilde{L}$ coïncide sur E_1 avec tout autre prolongement continu de L, ce qui règle la question de l'unicité. ◾

Théorème 1.6 *Soit E un espace vectoriel normé et F un espace de Banach. Alors $\mathcal{L}(E,F)$ est un espace de Banach.*
En particulier, le dual topologique d'un EVN E (càd $\mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ ou $\mathcal{L}(E,\mathbb{C})$) est complet pour sa norme naturelle.

Démonstration. Soit (L_n) une suite de Cauchy de $\mathcal{L}(E,F)$, par définition de la norme de cet espace, on a pour tout x de E, $\|L_nx - L_mx\| \to 0$ quand $n,m \to +\infty$. Ainsi, (L_nx) est une suite de Cauchy de l'espace complet F et elle converge donc vers un vecteur qu'on notera Lx. A partir de là, il est facile de vérifier que L est une application linéaire et continue de E dans F et que $\|L_n - L\| \to 0$. ◾

Proposition 1.1 *Dans un espace de Banach E, toute série de vecteurs normalement convergente est convergente.*
En d'autres termes, si (u_n) est une suite de vecteurs de E telle que la série numérique $\sum \|u_n\|$ soit convergente, alors la suite des sommes partielles $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$ est convergente dans E.

Preuve. En effet dans ce cas, pour N et P dans $\mathbb{N}$, on a $\|S_{N+P} - S_N\| \leq \sum_{n=N+1}^{N+P} \|u_n\|$.
Ce dernier terme tend vers 0 quand $N \to +\infty$, la suite (S_N) est donc de Cauchy et converge dans E. ◾ Cette propriété caractérise, en fait, les espaces de Banach. On a ainsi le théorème suivant :

Théorème 1.7 *Un EVN E est un espace de Banach si et seulement si toute série de vecteurs de E normalement convergente est convergente.*

Démonstration. On établit uniquement la réciproque de la Proposition précédente. Soit (u_n) une suite de Cauchy de E, on va montrer que (u_n) possède une valeur d'adhérence (se convaincre que c'est bien suffisant).
Pour n entier non nul, il existe N_n tel que $p,q \geq N_n \Rightarrow \|u_p - u - q\| \leq \frac{1}{n^2}$.
On définit alors la fonction φ par $\varphi(1) = N_1$, $\varphi(2) = max\{\varphi(1), N_2\} + 1$, ...,$\varphi(n) = max\{\varphi(n-1), N_n\} + 1$. φ est croissante sur $\mathbb{N}$ et, par construction,

$$\|u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)}\| \leq \frac{1}{n^2}.$$

Par suite, la série de vecteurs $\sum(u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)})$ est normalement convergente dans E et donc convergente. Cela entraine la convergence de la suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ et achève la preuve. ■

1.4 Histoire de dimension

Théorème 1.8 (Le théorème de Riesz.) *Un EVN E est de dimension finie si et seulement si sa boule unité fermée est compacte.*

Démonstration. On note B' la boule unité fermée de E et on suppose qu'elle est compacte. En vertu de la propriété de Borel-Lebesgue, il existe $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$ tels que $B' \subset \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, \frac{1}{2})$. On va montrer que le sous espace $F = Vect\{x_1, \ldots, x_n\}$ est égal à E. Pour cela, on raisonne par l'absurde et on suppose que $F \subsetneq E$. Soit alors $x \in E \setminus F$ et $\alpha = d(x, F) > 0$. Par définition de la borne inférieure, il existe $y \in F$ tel que $\alpha \leq \|x - y\| \leq \frac{3}{2}\alpha$, d'autre part, le vecteur $\frac{x-y}{\|x-\|} \in B'$ et donc $\|\frac{x-y}{\|x-y\|} - x_j\|\frac{1}{2}$ pour un certain $j \in \{1, \ldots, n\}$. Cela entraine alors

$$\|x - (y + \|x - y\|x_j)\| < \frac{\|x - y\|}{2} <\leq \frac{3}{4}\alpha < \alpha,$$

ce qui contredit notre hypothèse de départ $d(x, F) = \alpha > 0$. ■

Corollaire 1.2 *Dans un EVN E de dimension infinie, tout sous ensemble compact est d'intérieur vide.*

Preuve. En effet, dans le cas contraire, un tel ensemble contiendrait une boule fermée $B'(a, r), r > 0$, qui serait compacte (fermé dans un compact) et donc, par homéomorphisme, la boule unité fermée de E serait elle même compacte, ce qui contredit l'hypothèse de la dimension infinie. ■

1.5 Résultat de compacité : Théorème d'Arzelà-Ascoli

Dans cette section, on note X un espace métrique compact pour une distance d_X.
On note $_mathcalC(X)$ l'ensemble des applications continues de X dans $\mathbb{R}$, et on munit cet espace de la norme :

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Notons d'abord qu'une suite $(f_n)_n$ de $\mathcal{C}(X)$ converge, en norme $\|.\|_\infty$, vers $f \in \mathcal{C}(X)$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \ \forall n \geq n_0, \forall x \in X, |f_n(x) \longrightarrow f(x).| < \varepsilon$$

La convergence pour la norme $\|.\|_\infty$ est appellée convergence uniforme. La topologie résultante de cette norme est appellée topologie de la convergence uniforme. Elle vérifie les propriétés suivantes.

Proposition 1.2 *L'espace $(\mathcal{C}(X), \|.\|_\infty)$ est un espace de Banach séparable.*

Cette proposition indique que toute suite de Cauchy de $\mathcal{C}(X)$ est convergente. La séparabilité signifie que $\mathcal{C}(X)$ admet un sous-ensemble dense et au plus dénombrable.
Dans la suite, on parlera de convergence simple d'une suite de fonctions $(f_n)_n$ de $\mathcal{C}(X)$ vers une fonction f lorsque pour tout $x \in X$, la suite des images $(f_n(x))_n$ converge vers $f(x)$ dans $\mathbb{R}$. Clairement, cette convergence ponctuelle est moins restrictive que la convergence uniforme. Cependant, il existe certaines situations où la convergence ponctuelle implique la convergence uniforme.

Lemme 1.1 (Dini.) *Soit X est un espace métrique compacte. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $\mathcal{C}(X)$, et soit f une fonction continue sur X, ie., $f \in \mathcal{C}(X)$. Supposons que $(f_n)_n$ converge ponctuellement, et de manière croissante, vers f, et supposant que $(f_n)_n$ est une suite croissante (i.e., que pour tout $n \geq 1$, $f \geq f_{n+1} \geq f_n$). Alors la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur X.*

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. Pour $n \geq 1$, on considère l'ensemble ouvert

$$\mathcal{O}_n := \{x \in X / f_n(x) > f(x) - \varepsilon\}.$$

Du fait que la suite $(f_n)_n$ est croissante, on peut vérifier aisement que les ensembles $\mathcal{O}_n$ sont croissants au sens de l'inclusion : $\mathcal{O}_n \subset \mathcal{O}_{n+1}$ pour tout $n \geq 1$. De plus, la réunion de ces ouverts recouvre X. Par le critère de compacité de Borel-Lebesgue, on déduit qu'il existe un recouvrement fini de X :

$$\exists I \subset \mathbb{N}, \text{tel que} I \text{est fini et} X \subset \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i.$$

D'où l'existence de $n_0 \geq 1$ tel que $X \subset \mathcal{O}_{n_0}$ et par conséquent :

$$\forall n \geq n_0, \forall x \in X, f(x) \geq f_n(x) \geq f_{n_0}(x) > f(x) - \varepsilon,$$

$f(n) \geq f_m(x) > f(n) - \varepsilon$

d'où la convergence uniforme de $(f_n)_n$ vers f. ∎ $0 \geq f_m(x) - f(x) > -\varepsilon \Rightarrow |f_m(x)$.

la Conv

Soit maintenant $\mathcal{G} := \{f_i, i \in I\} \subset \mathcal{C}(X)$ une famille de fonctions continues.
- Pour $x_0 \in X$, on dit que $\mathcal{G}$ est équicontinue en x_0 si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $f_i \in \mathcal{G}$, on a :

$$\forall x \in X, \quad d_X(x, x_0) < \eta \Longrightarrow |f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon.$$

- On dit que $\mathcal{G}$ est uniformément équicontinue si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $f_i \in \mathcal{G}$, on a :

$$\forall x, y \in X, d_X(x, y) < \eta \Longrightarrow |f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon.$$

Comme dans le cas de la continuité[1], sur un compact K, l'équicontinuité en tout point de K implique l'équicontinuité uniforme sur K.

1. Par Lemme de Hein, Toute fonction continue sur un compact $K \subset X$ est uniformément continue sur K.

Théorème 1.9 (Théorème d'Arzelà-Ascoli.) *Soit $\mathcal{G} \subset \mathcal{C}(X)$ un ensemble d'applications continues. Supposons que*

1. *$\mathcal{G}$ est équicontinu sur X ;*
2. *$\mathcal{G}$ est borné (i.e., $\sup\limits_{g\in\mathcal{G}}\|g\|_\infty < +\infty$)*

Alors $\mathcal{G}$ est relativement compact dans $(\mathcal{C}(X), \|.\|_\infty)$.

On rappelle que la relative compacité de $\mathcal{G}$ signifie que $\overline{\mathcal{G}}$ est compact. Cela équivaut à dire que tout suite d'éléments de $\mathcal{G}$ admet une sous-suite convergente, vers une limite appartenant à $\mathcal{C}(X)$. Cette suite n'appartient pas nécessairement à $\mathcal{G}$. Rappelons aussi que, étant donné que $\mathcal{C}(X)$ est un espace complet, une partie G de $\mathcal{C}(X)$ est relativement compacte si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut couvrir $\mathcal{G}$ par un nombre fini de boules ouvertes de rayon ε et centrées en des points de $\mathcal{G}$.

Démonstration.

Notons d'abord que du fait que X est compact, l'équicontinuité de $\mathcal{G}$ implique que $\mathcal{G}$ est uniformément équicontinue. Soit $\varepsilon > 0$, et soit $\eta > 0$ (dépendent de ε) tel que :

$$d_X(x,y) < \eta \Longrightarrow |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{3} \forall g \in \mathcal{G}.$$

D'autre part, pour $\eta > 0$ fixé, il existe $\{x_1, ..., x_n\} \subset X$ tel que :

$$X \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{B}_X(x_i, \eta),$$

où $\mathcal{B}_X(x_i, \eta) := \{x \in X, d_X(x, x_i) < \eta\}$ est la boule centrée en x_i et de rayon η.
Pour chaque $i = 1, ..., n$, on introduit l'ensemble

$$C_i := \{g(x_i), g \in \mathcal{G}\}.$$

Il est claire que $C_i \subset \bigcup\limits_{g\in\mathcal{G}} B(g(x_i), \frac{\varepsilon}{3})$, et par hypothèse, chaque ensemble C_i est relativement compact dans $\mathbb{R}$. Donc pour chaque $i = 1, ..., n$ il existe un recouvrement fini de C_i : il existe un ensemble fini $\mathcal{J}_i \subset \mathbb{N}$ tel que

$$C_i \subset \bigcup_{j\in\mathcal{J}_i} B(g_j(x_i), \frac{\varepsilon}{3}). \tag{1.3}$$

On veut maintenant montrer que la famille $\{g_j, j \in \mathcal{J}_i, i = 1, ..., n\}$ donne un recouvrement de $\mathcal{G}$ par des boules de tailles ε. Pour cela, on vérifiera que pour tout $g \in \mathcal{G}$, il existe $j \in \mathcal{J}_i$ avec $i \in \{1, ..., n\}$, tel que :

$$\|g_j - g\|_\infty < \varepsilon.$$

Soit $x \in X$ et soit $g \in \mathcal{G}$. On choisit $x_i \in \{x_1, ..., x_n\}$ tel que $d_X(x, x_i) < \eta$. Choisissons maintenant $j \in \mathcal{J}_i$ tel que $|g_j(x_i) - g(x_i)| < \frac{\varepsilon}{3}$ (ceci est possible grâce à (1.3)). On a alors :

$$|g(x) - g_j(x)| \le \underbrace{|g(x) - g(x_i)|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|g(x_i) - g_j(x_i)|}_{< \varepsilon/3} + \underbrace{|g_j(x_i) - g_j(x)|}_{< \varepsilon/3} < \varepsilon.$$

ceci complète la preuve.

∎

On déduit du théorème d'Ascoli que si X est un compact de $\mathbb{R}^m$, alors toute partie $\mathcal{G} \subset C(X)$ équicontinue, et telle que pour tout $x \in X$ l'ensemble $\{g(x), g \in \}\}$ est borné dans $\mathbb{R}$, est relativement compacte.
Notons que les hypothèses d'équicontinuité sont nécessaires dans le théorème d'Ascoli.
En effet, une version plus complète du théorème d'Ascoli est la suivante.

Théorème 1.10 (Théorème d'Arzelà-Ascoli.) *Une partie $\boxed{\mathcal{G} \subset C(X)}$ est relativement compacte si et seulement si $\mathcal{G}$ est équicontinue sur X et $\mathcal{G}$ est bornée (i.e., $\sup_{g\in\mathcal{G}} \|g\|_\infty < +\infty$).*

Démonstration.. La condition suffisante est prouvée dans le théorème précédent. Il suffit d'établir la condition nécessaire. D'abord puisque $\mathcal{G}$ est relativement compact donc $\overline{\mathcal{G}}$ est compact et par conséquent $\mathcal{G}$ est borné. D'autre part, par compacité de $\bar{\mathcal{G}}$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g_1, ..., g_p \in \mathcal{G}$ tel que

$$\mathcal{G} \subset \bigcup_{j=1}^{p} \mathcal{B}_{C(X)}(g_j, \varepsilon).$$

Du fait que g_j est uniformément continue, il existe $\eta > 0$ tel que pour $x, y \in X$, on a :

$$d_X(x, y) < \eta \Rightarrow |g_j(x) - g_j(y)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Maintenant, si on prend $g \in \mathcal{G}$ quelconque, on choisit $j = 1, ..., p$ tel que $\|g - g_j\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$. Ainsi pour tout $x, y \in X$ vérifiant $d_X(x, y) < \eta$, on a :

$$|g(x) - g(y)| \leq \overbrace{|g(x) - g_j(x)|}^{\leq \|g - g_j\|_\infty} + \overbrace{|g_j(x) - g_j(y)|}^{< \varepsilon/3} + \overbrace{|g_j(y) - g(y)|}^{\leq \|g - g_j\|_\infty} < \varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $g \in \mathcal{G}$, on conclut que $\mathcal{G}$ est équicontinue. ■