Feuille d'exercices N° 1

Exercice 5.1

1. *On considère le problème aux limites suivant :*

$$(I)\begin{cases} -u" + g(x)u &= f \quad \textit{dans }]0,1[, \\ u(0) &= \alpha, \\ u(1) &= \beta, \end{cases}$$

avec $f \in L^2(]0,1[)$*,* g *est une fonction positive et borné sur* $[0,1]$*,* α*,* β *sont des constantes données et on suppose qu'il existe une constante* $\gamma > 0$ *telle que* $g(x) > \gamma$*, pour tout* $x \in [0,1]$.

a) Déterminer une fonction u_0 *régulière qui vérifie* $u_0(0) = \alpha$ *et* $u_0(1) = \beta$*.*

b) Déterminer le système vérifié par $w = u - u_0$*, où* u *est solution du système* (I)*.*

c) Donner une formulation variationnelle du problème vérifié par w*.*

d) Établir que la formulation faible établie à la question 1.c) admet une unique solution.

2. *On considère maintenant le problème aux limites suivant :*

$$(II)\begin{cases} -u" + g(x)u &= f \quad \textit{dans }]0,1[, \\ u'(0) &= u(0), \\ u(1) &= 0, \end{cases}$$

avec $f \in L^2(]0,1[)$*,* g *est une fonction positive et borné sur* $[0,1]$.

a) Montrer que l'espace $V = \{v \in H^1(]0,1[)/v(1) = 0\}$ *est un fermé dans* $H^1(]0,1[)$*.*

b) Donner une formulation variationnelle du système (II) *dans l'espace* V*.*

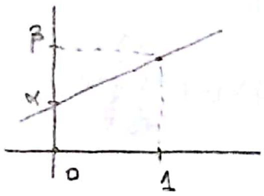
c) Établir que cette formulation faible admet une unique solution. (On utilisera le fait que $H^1(]0,1[)$ *s'injecte continûment dans* $L^\infty(]0,1[)$*.)*

$\| \ \|_\infty \leq c \| \ \|_{H^1}$

Exercice 5.1 :

1) $\begin{cases} -u'' + g(x)\,u = f & \text{dans }]0,1[\\ u(0) = \alpha \\ u(1) = \beta \end{cases}$

a) $u_0(x) = \alpha(1-x) + \beta x$



b) $w = u - u_0$

$$-w'' + g(x)\,w = -(u-u_0)'' + g(x)(u-u_0)$$
$$= -u'' + u_0'' + g(x)u - g(x)u_0$$
$$= f + 0 - g(x)u_0$$

$w(0) = u(0) - u_0(0) = \alpha - \alpha = 0$

$w(1) = u(1) - u_0(1) = \beta - \beta = 0$

w vérifie $\begin{cases} -w'' + g(x)\,w = f - g(x)u_0 \\ w(0) = 0 \\ w(1) = 0 \end{cases}$

on note $h(x) = f(x) - g(x)u_0(x)$

c) $(-w'' + g(x)\,w)\,v = h\,v$

on intègre et après IPP :

$$\int_0^1 w'v'\,dx - [w'v]_0^1 + \int_0^1 g(x)w(x)v(x)\,dx$$
$$= \int_0^1 h(x)\,v(x)\,dx$$

on choisit $V = H_0^1(]0,1[)$

$\Rightarrow v(0) = v(1) = 0$

$$FV = \int_0^1 w'v' + \int_0^1 g(x)\,w\,v\,dx$$
$$= \int_0^1 h(x)v(x)\,dx$$

d) Soit $\ell(v) = \int_0^1 h(x)\,v(x)\,dx$

• on a : $\forall v \in H_0^1$,

$|\ell(v)| \underset{C.S}{\leq} \|h\|_{L^2}\|v\|_{L^2}$

$\Rightarrow \ell$ est continue

• Soit $a(w,v) = \int_0^1 w'(x)v'(x)\,dx + \int_0^1 g(x)w(x)v(x)$

on a $\forall v, w \in H_0^1$

$$|a(w,v)| \leq \|w'\|_{L^2}\|v'\|_{L^2} + \|g\|_{L^\infty}\|w\|_{L^2}\|v\|_{L^2}$$
$$\leq \|w\|_{H^1}\|v\|_{H^1} + \|g\|_{L^\infty}\|w\|_{H^1}\|v\|_{H^1}$$
$$\leq (1 + \|g\|_{L^\infty})\,\|w\|_{H^1}\|v\|_{H^1}$$

donc a est continue

- $a(v,v) = \int_0^1 (v'(x))^2 dx + \int_0^1 \underbrace{g(x)}_{\geq \gamma}(v(x))^2 dx$

$\geq \|v'\|_{L^2}^2 + \int_0^1 \gamma (v(x))^2 dx$

$\geq \|v'\|_{L^2}^2 + \gamma \|v\|_{L^2}^2$

$\geq \min(1,\gamma) \|v\|_{H^1}^2$

$\Rightarrow$ a est coercive

d'après Lax-Milgram, $\exists !$ u solution de la FV.

2) $\begin{cases} -u'' + g(x)u = f \text{ dans }]0,1[\\ u'(0) = u(0) \\ u(1) = 0 \end{cases}$

a) $V = \{ v \in H^1(]0,1[) \, / \, v(1) = 0 \}$

$\varphi : H^1(]0,1[) \longrightarrow \mathbb{R}$

$v \longmapsto v(1)$

$|\varphi(v)| = |v(1)| \leq \|v\|_\infty \leq \|v\|_{H^1}$

$\Rightarrow \varphi$ est continue

or $V = \varphi^{-1}(\underbrace{\{0\}}_{\text{fermé}})$

$\Rightarrow$ V est un fermé

b) $(-u'' + g(x)u) v = f v$

$\int_0^1 u'v' - [u'v]_0^1 + \int_0^1 g(x) u(x) v(x) dx$

$= \int_0^1 f v$

$[u'v]_0^1 = \underbrace{u'(1) v(1)}_{=0} - \underbrace{u'(0)}_{u(0)} v(0)$

FV: $\int_0^1 u'v' + \int_0^1 g(x) uv + u(0)v(0) = \int_0^1 f v$

c) $\ell(v) = \int_0^1 f v$

on vérifie de la même manière que la partie 1) que ℓ est continue

$a(u,v) = \int_0^1 u'v' + \int_0^1 g(x) uv + u(0)v(0)$

$|a(u,v)| \leq \|u'\|_{L^2} \|v'\|_{L^2} + \|g\|_{L^\infty} \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + \|u\|_{L^\infty} \|v\|_{L^\infty}$

$\leq (1 + \|g\|_\infty + 1) \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}$

$\Rightarrow$ a est continue

$a(u,u) = \int_0^1 (v'(x))^2 dx + \int_0^1 g(x)(v(x))^2 dx + (u(0))^2$

$\geq \|v'\|_{L^2}^2 + \int_0^1 \gamma (v(x))^2 dx$

$\geq \|v'\|_{L^2}^2 + \gamma \|v\|_{L^2}^2$

$\geq \min(1,\gamma) \|v\|_{H^1}^2$

$\Rightarrow$ a coercive $\Rightarrow$ Lax-Milgram $\exists !$ sol de FV