Feuille d'exercices N° 3

Exercice 3.1 (Continuité des applications linéaires en dimension infinie)

1. *Soit* $\mathbb{R}[X]$ *l'espace vectoriel des polynômes sur* $\mathbb{R}[X]$ *que l'on munit de la norme*

$$p(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n x^n \Rightarrow \|p\| := \sup_{1\leq n\leq N} |a_n|.$$

Discuter de la continuité des deux applications linéaires de $(\mathbb{R}[X], \|.\|)$ *dans lui-même suivantes :*

$$T_1 p(x) = \int_0^x p(t)dt, \quad T_2 p(x) = p'(x).$$

2. *On considère sur* $\mathbb{R}[X]$ *une seconde norme* $\|p\|_1 = max(\|p'\|, |p(0)|)$.
Montrer que $\|p\| \leq \|p\|_1$ *et reprendre la question précédente lorsque l'on considère les applications* T_1 *et* T_2 *comme allant de* $(\mathbb{R}[X], \|.\|_1)$ *dans* $(\mathbb{R}[X], \|.\|)$.
Qu'en concluez vous ?

3. *Soit* c_{00}, *l'espace vectoriel des suites réelles presque nulles*

$$c_{00} := \{x = (x_n)_{n\geq 0}, x_n \in \mathbb{R} / \exists N \geq 0 \;\; tel\ que\ x_n = 0 \quad pour\ n > N\}.$$

que l'on munit de la norme l^∞, $\|x\|_\infty = \sup_{n\geq 0} |x_n|$.
Etant donnée une suite $a = (a_n)_{n\geq 0}$ *de réels positif, on considère la fonctionnelle linéaire sur* c_{00},

$$f_a(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_n.$$

Montrer que cette forme linéaire est continue si et seulement si $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty$ *et calculer sa norme.*

Exercice 3.2 (Norme d'une forme linéaire)

1. *On se place dans l'espace de Banach* $E = \{u \in C^0([0,1]) / u(0) = 0\}$ *muni de la norme* L^∞ :

$$\forall u \in C^0(0,1), \|u\|_\infty := \sup_{x\in[0,1]} |u(x)|.$$

Montrer que la forme linéaire donnée par $f(u) = \int_0^1 u(x)dx$ *est continue et calculer sa norme* $\|f\|$.
Peut-on trouver u *dans* E *tel que* $\|u\|_\infty = 1$ *et tel que* $f(u) = \|f\|$ *?*

2. *On reprend l'exemple de la question 3 de l'exercice 1 en supposant que la série de terme général* a_n *est convergente. A quelle condition nécessaire est suffisante sur la suite* a, *peut-on trouver* $x \in c_{00}$ *tel que* $\|x\| = 1$ *et* $f_a(x) = \|x\|$ *?*
$\|f_a\|$

3. *Reprendre la même question lorsque l'on remplace c_{00} par l'espace l^∞ des suites bornées.*

Exercice 3.3 (Théorème de séparation dans un espace de Hilbert)

Soit H un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire $(.,.)$. Soit A un sous ensemble convexe fermé de H et B un ensemble convexe compact de H. On suppose que A et B sont disjoints. Le but de l'exercice est de montrer que l'on peut trouver $a \in H$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$\forall x \in A, (a, x) \leq \alpha - \varepsilon. \forall y \in B, (a, y) > \alpha + \varepsilon. \quad (1)$$

1. *Montrer que, (a, ε) étant donnés, on peut trouver un réel α tel que (1) ait lieu si et seulement si*

$$\forall (x, y) \in A \times B, (a, y) - (a, x) \geq 2\varepsilon. \quad (2)$$

2. *On désigne par P_A (resp. P_B) l'opérateur (non linéaire) de projection orthogonale sur A (resp. B). Montrer que la fonction $y \mapsto \|y - P_A(y)\|$ atteint sont minimum sur B en un point y_0 de B et que ce minimum est strictement positif. Montrer que*

$$\|y_0 - P_A(y_0)\| = d(A, B) = \inf_{(x,y) \in A \times B} \|x - y\|.$$

On pose $x_0 = P_A(y_0)$. Comment peut-on caractériser y_0 à partir de x_0 ?

3. *On pose $a = y_0 - x_0$. Démontrer alors que (2) a lieu, avec ε bien choisi.*

Serie n° 3

Exercice 1.

1) $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme :

$$P(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n \ ; \ \|P\| = \sup_{1\leq n\leq N} |a_n|$$

$$T_1(p)(x) = \int_0^x p(t)\,dt \ , \ T_2(p)(x) = p'(x)$$

Discuter la Continuité de T_1 et T_2 dans $(\mathbb{R}[X], \|\ \|)$

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

$$T_1(p)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$$

$$\|T_1 p\| = \sup \frac{|a_k|}{k+1} \leq \|p\|.$$

$\Rightarrow T_1$ est Continue et $\|T_1\| \leq 1$

$p = 1 \quad T_1 P = X \quad \Rightarrow \|T_1 \underset{P}{1}\| = 1 = \|\underset{P}{1}\|$

or $\quad \frac{\|T_1 1\|}{\|1\|} \leq \sup \frac{\|T_1(P)\|}{\|P\|}$

$$1 \leq \|T_1\|$$

$\Rightarrow \|T_1\| = 1.$

$$\begin{cases} P = X^n & \|P\| = 1 \\ T_2 P = m X^{m-1} & \|T_2 P\| = m \end{cases}$$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\|T_2 X^n\|}{\|X^n\|} = \infty \Rightarrow T_2$ n'est pas Continue.

2) $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad = \max\left(\sup_{1\leq k\leq n} k|a_k| ; |a_0|\right)$ ①

$$\begin{cases} \sup_{1\leq k\leq n} |a_k| \leq \sup_{1\leq k\leq n} k|a_k| \\ |a_0| \leq |a_0| \end{cases}$$

$$\max\left(\sup_{1\leq k\leq n} |a_k| ; |a_0|\right) \leq \|p\|_1$$

$$\Rightarrow \|p\| \leq \|p\|_1$$

$$T_1 : (\mathbb{R}[X], \|\cdot\|_1) \longrightarrow (\mathbb{R}[X], \|\ \|)$$

C.T $\Leftrightarrow \exists c, \forall p \quad \|T_1 p\| \leq c\|p\|$

d'après 1) $\|T_1 P\| \leq \|p\| \leq \|p\|_1$

$\Rightarrow T_1$ est Continue.

$P = 1, \quad T_1 P = 1$

$\|T_1 P\| = 1 \qquad \|1\|_1 = 1, \ \|T_1\| = 1$

$$T_2 : (\mathbb{R}[X], \|\cdot\|_1) \longrightarrow (\mathbb{R}[X], \|\ \|)$$

$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \ , \ \|T_2 P\| = \sup_{0\leq k\leq n} k|a_k| \leq \|P\|_1$

$\Rightarrow T_2$ est Continue et $\|T_2\| \leq 1$

$P = X \qquad T_2 P = 1 ; \quad \|X\|_1 = 1$

$\Rightarrow \|T_2\| = 1$

<u>conclusion</u>: $\|\ \|$ et $\|\ \|_1$ ne sont pas équivalentes.

3) $f_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n$

" $\Leftarrow$ " Supposons que $\sum a_n$ CV.

on $|f_a(x)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n |x_n| \leq (\sum_{n=0}^{\infty} a_n) \|x\|_\infty$

$\Rightarrow f_a$ est Continue et $\boxed{\|f_a\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n}$ (1)

" $\Rightarrow$ " Supposons que f_a est Continue

$\Rightarrow \exists c > 0, \forall x \in \ell^\infty \quad |f_a(x)| \leq c \|x\|_\infty$

càd: $|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n| \leq c \|x\|_\infty$

En particulier, $X = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n \text{ fois}}, 0, \dots 0)$

$\sum_{k=0}^{n} a_k \leq C \times 1 = C \quad , \forall n.$

$\Rightarrow \sum a_n$ CV.

Dans le cas de la CV;

$\frac{|f_a(X)|}{\|X\|_\infty} = \sum_{k=0}^{n} a_k \leq \|f_a\|$

$n \longrightarrow \infty \quad \boxed{\sum_{k=0}^{\infty} a_k \leq \|f_a\|}$ (2)

(1) + (2) $\Rightarrow \|f_a\| = \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$

Exercice 2.

$E = \{u \in \mathcal{C}^0([0,1]) ; u(0) = 0\}, \| \ \|_\infty$

On a $\forall u \in E$, $|f(u)| = \left|\int_0^1 u(x)\, dx\right|$

$\leq \int_0^1 |u(x)|\, dx$

$\leq \|u\|_\infty$

$\Rightarrow f$ est Continue et $\|f\| \leq 1$

$u = x^{\frac{1}{n}}$; $\|u\|_\infty = 1$

$f(u) = \int_0^1 x^{\frac{1}{n}}\, dx = \frac{1}{\frac{1}{n}+1}\left[x^{\frac{1}{n}+1}\right]_0^1 = \frac{n}{n+1}$

or $\frac{|f(x^{\frac{1}{n}})|}{\|x^{\frac{1}{n}}\|_\infty} \leq \|f\|$

$\Rightarrow \forall n \quad \frac{n}{n+1} \leq \|f\| \Rightarrow 1 \leq \|f\|$

Ainsi; $\|f\| = 1$

Peut-on trouver u / $f(u) = 1$

et $\|u\|_\infty = 1$

Si ceci est vrai $\Rightarrow \int_0^1 u(x)\, dx = 1 = \int_0^1 1\, dx$

$\Rightarrow \int_0^1 \underbrace{(1 - u(x))}_{\geq 0 \text{ car } u(x) \leq \|u\|_\infty = 1}\, dx = 0.$

$\hookrightarrow$ Continue.

$\Rightarrow \forall x \in [0,1]$, $u(x) = 1$ absurde car $u(0) = 0$

2) Supposons qu'$\exists x \in C_{00}$ / $\|x\|_\infty = 1$

et $f_a(x) = \|f_a\| = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{a_n}_{\geq 0} (\underbrace{1 - x_n}_{\geq 0}) = 0$

$\Rightarrow a_n(1 - x_n) = 0, \quad \forall n \geq 0$

Si $a_n > 0 \Rightarrow$ il faut que $x_n = 1.$

or $x \in C_{00} \Rightarrow x_n$ est nulle à partir d'un certain rang.

$\Rightarrow a_n = 0$ à partir d'un certain rang

$\Rightarrow a \in C_{00}$

La réciproque est triviale (si $a \in C_{00}$ $\Downarrow$ $\sum a_n$ CV)

3) Si on remplace C_{00} par ℓ^∞

on n'a pas de restriction sur (a_n)

Exercice 3 :

$(H, \langle , \rangle)$ Hilbert

A : Sens convexe.

B : Convexe Compact.

$A \cap B = \emptyset$

1) ① $\Rightarrow$ ②

Si $\begin{cases} \langle a,x \rangle \leq \alpha - \varepsilon \\ \langle a,y \rangle \geq \alpha + \varepsilon. \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} -\langle a,x \rangle \geq \varepsilon - \alpha. \\ \langle a,y \rangle \geq \alpha + \varepsilon \end{cases}$

$\Rightarrow \langle a,y \rangle - \langle a,x \rangle \geq 2\varepsilon.$

② $\Rightarrow$ ①

Si $\langle a,y \rangle \geq \langle a,x \rangle + 2\varepsilon.$

Soit $M = \sup_{x \in A} \langle a,x \rangle$

$m = \sup_{y \in A} \langle a,y \rangle$

②

$\Rightarrow m \geq M + 2\varepsilon$ ou bien $m - M \geq 2\varepsilon$

$\langle a,x \rangle \leq M = \frac{M+m}{2} + \underbrace{\frac{M-m}{2}}_{\leq -\varepsilon}$

$\leq \alpha - \varepsilon$

avec $\alpha = \frac{M+m}{2}.$

donc $\langle a,x \rangle \leq \alpha - \varepsilon.$

Et on a : $\langle a,y \rangle \geq m = \frac{m+M}{2} + \underbrace{\frac{m-M}{2}}_{\geq \varepsilon}$

$\Rightarrow \langle a,y \rangle \geq \alpha + \varepsilon.$

2) $f : y \longrightarrow y - P_A(y)$

$f = I - P_A$

P_A est continue ($\|P_A(y)\| \leq \|y\|$)
I est continue.

$\Downarrow$

$\Rightarrow f$ est continue sur H en particulier pour sur le compact $B \Rightarrow y \longmapsto \|y - P_A(y)\|$

atteint son min sur B en $y_0 \in B$.

Si ce minimum est nul. $\Rightarrow \|y_0 - P_A(y_0)\| = 0$

$\Downarrow$

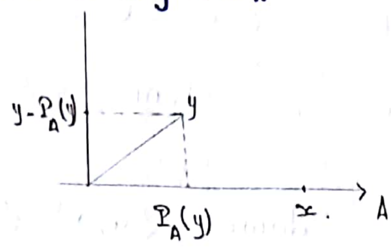
$\underbrace{P_A(y_0)}_{\in A} = \underbrace{y_0}_{\in B}.$

absurde

donc $y_0 > 0$.

om a $\forall y \in B, \forall x \in A$. (déf de la projection)

$$\|y - P_A(y)\| \leq \|y - x\|$$



Soit $x_0 = P_A(y_0)$

$$f(y_0) \leq f(y), \quad \forall y \in B$$

$$\inf_{\substack{x \in A \\ y \in B}} \|y - x\| \leq \|y_0 - x_0\| \leq \|y - P_A(y)\|$$

$$\leq \|y - x\|$$

$$\Rightarrow \|y_0 - x_0\| \leq \inf_{\substack{x \in A \\ y \in B}} \|y - x\|$$

$$\Rightarrow \inf_{\substack{x \in A \\ y \in B}} \|y - x\| = \|y_0 - x_0\|$$

par suite $P_B(x_0) = y_0$.

3) $a = y_0 - x_0$

$$P_B(x_0) = y_0 \overset{(1)}{\iff} \langle \overbrace{y_0 - x_0}^{a}, y_0 - x \rangle \leq 0 \quad \forall x \in A$$

$\|$

$$P_A(y_0) = x_0 \iff \langle x_0 - y_0, x_0 - y \rangle \leq 0 \quad \forall y \in B.$$

(1) $\langle a, y_0 \rangle \leq \langle a, x \rangle, \quad \forall x \in A$

(2) $-\langle a, x_0 \rangle \leq -\langle a, y \rangle, \quad \forall y \in B.$

$$\langle a, x \rangle - \langle a, y \rangle \geq \langle a, y_0 - x_0 \rangle = \|a\|^2.$$

il suffit de prendre $\alpha = \frac{\|a\|^2}{2}$.