Si svolgano 3 esercizi a scelta sui 4 proposti.
Il punteggio finale sarà la somma dei punti dei 3 esercizi riusciti meglio.

Problema 4.1 (11 punti)**.** Secondo alcune stime, la frazione di persone che attualmente sono affette da SARS-CoV-2 e contagiose potrebbe essere pari a $p = 0.07\%$ (attenzione al numero di zeri!). La popolazione di studenti di un'università di medie dimensioni è di circa $n = 25000$.

(6 punti) Si calcoli in modo approssimato, con il teorema del limite centrale, la probabilità che il numero di studenti al momento contagiosi sia di 10 o più.

(3 punti) Quanto grande deve essere n, come minimo, affinché l'approssimazione Gaussiana applicata si possa considerare ragionevole? Ad esempio, su un autobus con $n = 50$ passeggeri, qual è la probabilità che almeno uno sia contagioso?

(2 punti) Quanto più grande dovrebbe essere p affinché la probabilità che vi sia almeno un contagioso tra i 50 passeggeri sia almeno del 10%?

Problema 4.2 (12 punti)**.** Sia Z una variabile aleatoria continua con funzione di densità

$$f_Z(t) = ce^{-\lambda t}(1 - e^{-\nu t}), \qquad t \geq 0$$

Per il primo punto, si ponga per semplicità $\lambda = 2$ e $\nu = 1$.

(7 punti) Si determinino il valore della costante c, la media, la varianza e la moda di Z e si tracci il grafico approssimativo di f_Z.

(2 punti) Siano X e Y variabili aleatorie esponenziali e indipendenti, di *rate* rispettivamente λ e μ. Si determini $P(X > Y)$ in funzione dei due parametri.

(3 punti) Si determini la legge di X condizionata all'evento $\{X > Y\}$, verificando che coincide con f_Z.

Problema 4.3 (12 punti)**.** Le lattine che escono da una linea di produzione dovrebbero avere un target di riempimento medio di 335 cc e una deviazione standard di riempimento di 5 cc o meno. Per verificare che il processo sia sotto controllo, si raccoglie un campione di 8 lattine, trovando i valori sequenti,

338.3 329.6 347.6 341.1 329.5 355.8 342.5 324.9

I dati si possono considerare Gaussiani.

(7 punti) Supponendo che la deviazione standard vera della popolazione sia quella ufficiale di 5 cc, verificare al 5% di significatività se la media vera corrisponde al valore ufficiale di 335 cc. È richiesto di calcolare il p-value del test.

(2 punti) Si verifichi al 10% di significatività se è plausibile che la deviazione standard vera della popolazione sia pari o inferiore a quella ufficiale di 5 cc. È richiesto di determinare per questo test la regione di accettazione relativa alla deviazione standard campionaria.

(3 punti) In azienda è in uso un test simile a quello del primo punto. Perché questo test sia superato, basta che la media campionaria delle 8 lattine sia compresa tra 329.7 e 340.3. Si determini il livello di significatività per questo test e la sua potenza nel caso che la media vera si scosti dal target di 4 cc.

Problema 4.4 (13 punti)**.** In un recente esperimento scientifico si sono testati vari tipi di mascherine per misurare la quantità di goccioline di saliva emesse attraverso di esse, durante una normale conversazione. Ad esempio le maschere di tipo *Valved N95* e *MaxAT*, testate 10 volte ciascuna, hanno dato questi risultati:

maschera	n	media camp.	dev. std. camp.
Valved N95	10	146.4	45.47
MaxAT	10	188.5	59.27

Come si immagina, minore è il numero medio di goccioline emesse, migliore dovrebbe essere la maschera, ma piccole differenze possono non essere significative.

(7 punti) Si verifichi tramite calcolo del p-value se sia plausibile che le due maschere siano ugualmente efficaci. Si può supporre che i campioni siano approssimativamente Gaussiani, con deviazione standard σ in comune.

(3 punti) Si stimi σ con un intervallo di confidenza bilaterale al 90% di significatività. Vanno usati tutti i dati, ma facendo attenzione che le due maschere non sembrano avere media uguale.

(3 punti) Un modello più raffinato prevede che i dati siano lognormali, che vuol dire che ad avere distribuzione Gaussiana sarebbero non i valori misurati, ma i loro logaritmi. Fatti i logaritmi naturali dei dati e calcolate medie e deviazioni standard campionarie di questi, si trova

maschera	n	media camp.	dev. std. camp.
Valved N95	10	4.941	0.3207
MaxAT	10	5.187	0.3534

Usando questo modello si stimi al 95% di confidenza il *rapporto* tra le efficienze dei due tipi di maschera.