Docente, F. Morandin	25 giugno 2019
Laurea Triennale in Matematica, Laurea Triennale in Informatica	
Elementi di Probabilità/Introduzione alla Statistica	Scritto 1

Si svolgano 3 esercizi a scelta sui 4 proposti. In nessun caso verranno assegnati punti per più di 3 esercizi.

Problema 1.1 (11 punti)**.** Alice e Bob si sfidano per 100 volte ad un nuovo misterioso gioco di sorte detto "Nobiliame". L'esito di ciascuna delle 100 sfide è un numero, che può essere 0, 0.5 oppure 1, a seconda che Alice perda, pareggi o vinca. Il punteggio finale è la media aritmetica dei 100 esiti delle singole sfide. Siano p, q e r le probabilità che, in una sfida, Alice perda, pareggi e vinca, rispettivamente. Si può supporre che gli esiti delle 100 sfide siano tutti indipendenti.

(7 punti) Supponendo che $p = 30\%$, $q = 40\%$ e $r = 30\%$, qual è la probabilità che al termine il punteggio finale sia compreso tra 0.4 e 0.6 estremi inclusi?

(2 punti) Se si sa invece solo che $p = r$, qual è il minimo valore che può assumere la probabilità del punto precedente?

(2 punti) Il meccanismo del Nobiliame viene infine svelato: per ogni sfida, ciascuno dei due giocatori lancia 5 monete, e vince chi fa più volte testa. Quanto valgono realmente p, q e r?

Problema 1.2 (12 punti)**.** Sia X una variabile aleatoria continua con funzione di ripartizione

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t \le -1 \\ \frac{1}{2}(1+t)^2 & -1 < t \le 0 \\ 1 - \frac{1}{2}(1-t)^2 & 0 < t \le 1 \\ 1 & t > 1 \end{cases}$$

(7 punti) Si determinino la funzione di densità f, la media, la varianza, la moda e la mediana di X. Si determini quanto vale $P(X > \frac{1}{2})$. Si traccino i grafici approssimativi di F e di f.

(2 punti) Si determinino funzione di densità e valore atteso di $|X|$.

(3 punti) Sia Y una variabile aleatoria indipendente da X e con la stessa distribuzione. Si traccino alcune curve di livello[1] della densità congiunta di (X, Y).

Problema 1.3 (11 punti)**.** Una azienda chimica sta valutando l'adozione di un nuovo procedimento produttivo. Una questione importante è se in questo modo venga alterata la resa del processo, normalmente una grandezza con distribuzione Gaussiana di media del 77%. Viene raccolto un campione di esemplari con il nuovo procedimento, e si trovano rese di

85%	84%	83%	80%	68%
75%	88%	90%	83%	88%

(7 punti) Si può affermare al 5% di significatività che la resa sia cambiata con il nuovo procedimento? Quanto vale il p-dei-dati?

(2 punti) Da una analisi più approfondita emerge che il valore di media "ufficiale" del procedimento precedente (77%) era stato ottenuto poco professionalmente da un campione di soli 20 esemplari, che avevano riportato una deviazione standard campionaria del 9%. Rispondere nuovamente al punto precedente in questa nuova situazione.

(2 punti) Si hanno a disposizione i fondi per ulteriori 30 esemplari, che possono essere divisi a piacere tra vecchio e nuovo procedimento. Come conviene suddividerli se si vuole che il test del punto precedente abbia la potenza maggiore possibile?

Problema 1.4 (12 punti)**.** Una macchina riempitrice dovrebbe dosare esattamente 750 ml di passata di pomodoro in ciascuna confezione, tuttavia è più realistico affermare che la quantità dosata è una variabile aleatoria Gaussiana di media μ e varianza σ^2. Si esamina un campione di 25 confezioni trovando una media campionaria di 745.5 ml e una deviazione standard campionaria di 16.5 ml.

(7 punti) Si stimi σ al 95% di confidenza, con un intervallo unilaterale del tipo $\sigma \ge L$.

(2 punti) Si ritiene che una deviazione standard di 12 ml sia accettabile per questo processo, anche se sarebbe preferibile fosse minore. Si verifichi con un test se vi sia evidenza che la deviazione standard sia eccessiva. È richiesto di calcolare il p-dei-dati.

(3 punti) Una confezione il cui riempimento sia scarso per più del 4% del valore previsto è considerata difettosa. È considerata difettosa altresì una confezione con più di 770 ml, poiché non si chiuderebbe correttamente. Si stimi l'incidenza di confezioni difettose p al 95% di confidenza, con un intervallo unilaterale del tipo $p \ge Q$. (È richiesto di ipotizzare per μ il valore migliore in termini di p e di considerare σ incognita.)

[1] Con curve di livello di una funzione $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, si intendono delle curve per cui g è costante.