

Si svolgano 3 esercizi a scelta sui 4 proposti. In nessun caso verranno assegnati punti per più di 3 esercizi.

**Problema 4.1** (12 punti). Si organizza una festa con posto per  $m = 200$  invitati. Al primo giro, si invitano  $n = 220$  persone, con l'idea che tanto molti non accetteranno. Supponiamo che la probabilità che un invitato accetti sia dell'80%.

**(7 punti)** Quanti invitati accetteranno in media? Quanto vale la probabilità che gli  $m$  posti non siano sufficienti? Siamo nelle ipotesi per usare il teorema del limite centrale?

**(3 punti)** Quanto può essere al massimo il numero di invitati se si vuole che la probabilità che i posti non siano sufficienti sia del 5% o meno?

**(2 punti)** Condizionando all'evento che i posti siano sufficienti, quanti ne avanzano in media per un secondo giro di inviti? (*Suggerimento:* si usi l'approssimazione Gaussiana notando che  $xf(x)$  è integrabile con una formula chiusa.)

**Problema 4.2** (11 punti). Sia  $X$  una variabile aleatoria continua con funzione di densità

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} + 2t & 0 < t \leq 1/2 \\ \frac{5}{2} - 2t & 1/2 < t \leq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

**(7 punti)** Si determinino media, varianza, moda e mediana di  $X$ .

**(2 punti)** Si tracci il grafico della densità e si calcoli quanto vale  $P(0.2 \leq X \leq 0.7)$ .

**(2 punti)** Sia  $Y$  una variabile aleatoria uniforme su  $[0, 1]$  indipendente da  $X$ . Quanto vale  $P(X < Y)$ ?

**Problema 4.3** (11 punti). Due programmi di intelligenza artificiale si affrontano in 400 sfide ad un gioco online. Non è possibile il pareggio e alla fine il programma X vince 276 partite, e il programma Y vince le altre 124.

**(6 punti)** Si stimi puntualmente e al 99% di confidenza la probabilità di vittoria di X.

**(2 punti)** Si stimi quante altre partite occorre far giocare affinché l'intervallo di confidenza del punto precedente abbia un diametro del 2% circa.

**(3 punti)** Si consideri un test che dichiara X più forte di Y se su 400 partite ne vince almeno il 55%. Quali sono le ipotesi e il livello di significatività di questo test?

**Problema 4.4** (11 punti). Da un'ispezione compiuta su 15 trasformatori prodotti negli anni 70 sono risultati i seguenti valori di contaminazione,

|      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|
| 1.47 | 1.50 | 0.48 | 0.95 | 1.54 |
| 1.25 | 1.70 | 1.30 | 2.26 | 0.48 |
| 2.03 | 0.48 | 1.71 | 0.91 | 1.64 |

(Questi valori rappresentano il logaritmo della concentrazione di PCB, e si possono supporre Gaussiani.)

**(7 punti)** Si verifichi se questo campione è compatibile con l'ipotesi che il valore medio sia maggiore di 1.70. Si usi il 10% di significatività.

**(2 punti)** Si stimi al 80% di confidenza la deviazione standard dei valori di contaminazione.

**(2 punti)** Si determini la potenza del test del primo punto per un valore medio pari a 1.48, supponendo la deviazione standard pari a 0.50.