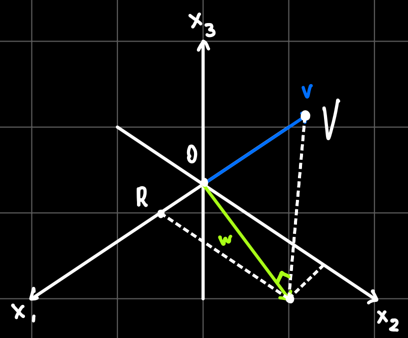
Ricordo che: dati $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ si ha

$\langle v, w \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ e così

$\langle v, v \rangle = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

DOM: Perché questa definizione è quella giusta?



Dato v, considero la sua posizione ortogonale w sul piano $x_1 x_2$.

Geometricamente grazie al teorema di Pitagora, si calcola facilmente che $\overline{Ow}^2 = x_1^2 + x_2^2$

D'altra parte, anche OVW è rettangolo, in w, ma allora $\overline{OV}^2 = \overline{Ow}^2 + \overline{Vw}^2 =$

$= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \langle v, v \rangle$

Ma allora: $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \overline{OV}$

Vediamo adesso quali proprietà del prodotto scalare sono le più importanti:

1) Il prodotto scalare è simmetrico, vale dire: per ogni $v, w \in \mathbb{R}^3$ si ha che $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$. Infatti posto $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ si ha che

$\langle v, w \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$

$\langle w, v \rangle = y_1 x_1 + y_2 x_2 + y_3 x_3$

e così le due espressioni coincidono per la commutatività del prodotto tra numeri.

2) Vale una sorta di "distributività": per ogni $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ si ha che:

$\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$;

$\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$.

Infatti poniamo $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$.

allora $\langle u, v + w \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 + z_1 \\ y_2 + z_2 \\ y_3 + z_3 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 (y_1 + z_1) + x_2 (y_2 + z_2) + x_3 (y_3 + z_3) =$

$= \underline{x_1 y_1} + x_1 z_1 + \underline{x_2 y_2} + x_2 z_2 + \underline{x_3 y_3} + x_3 z_3 =$

$= \underline{\langle u, v \rangle} + \langle u, w \rangle$

L'altra proprietà si mostra in modo analogo oppure sfruttando la prima in combinazione con la simmetria.

3) Posso "portar fuori gli scalari": per ogni $v, w \in \mathbb{R}^3$ e per ogni $c \in \mathbb{R}$ si ha che

$\langle cv, w\rangle = c \cdot \langle v, w\rangle$

$\langle v, cw\rangle = c \cdot \langle v, w\rangle$

4) Il prodotto scalare è definito positivo, cioè per ogni vettore $v \in \mathbb{R}^3$ si ha che $\langle v, v\rangle \geq 0$ e inoltre si ha che

$\langle v, v\rangle = \iff v = 0$.

Mostriamo la seconda parte:

$(\Leftarrow)$ se $v = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, allora $\langle v, v\rangle = 0^2 + 0^2 + 0^2 = 0$

$(\Rightarrow)$ se invece $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ è tale che $\langle v, v\rangle = 0$, allora significa che $\underbrace{x_1^2}_{\geq 0} + \underbrace{x_2^2}_{\geq 0} + \underbrace{x_3^2}_{\geq 0} = 0$. Da qui $x_1^2 = 0$, $x_2^2 = 0$, $x_3^2 = 0$

e così $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, cioè $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$.

Esercizio: Grazie alla definita positività del prodotto scalare, si può mostrare che esso è anche non degenere: vale cioè

che $v \in \mathbb{R}^3$ è un vettore tale che $\langle v, w\rangle = 0$ per ogni $w \in \mathbb{R}^3$, allora $v = 0$.

Vediamo alcuni esempi espliciti:

- $\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle =$

  $= 6 + (-1) \cdot 2 = 6 - 2 = 4$

- $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2022 \\ 3 \\ 4044 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, 2022 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2022 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$

  $= 2022 \cdot \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2022 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$

  $= 2022 \cdot (1 + 0 - 2) = -2022$

— Un esempio interessante: siano $v, w \in \mathbb{R}^3$,

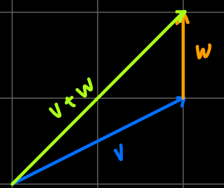
allora:

$\langle v+w, v+w\rangle = \langle v+w, v\rangle + \langle v+w, w\rangle =$

$= \langle v, v \rangle + \langle w, v \rangle + \langle v, w \rangle + \langle w, w \rangle =$

$= \langle v, v \rangle + 2 \langle v + w \rangle + \langle w, w \rangle$

Osservazione: Dati i vettori $v, w \in \mathbb{R}^3$, il metodo punta-coda per la loro somma mi permette di interpretare geometricamente il vettore $v+w$



$v+w$ è il terzo lato del triangolo di lati v e w.

Per continuare riformuliamo l'ultimo esempio:

PROPOSIZIONE: Siano $v, w \in \mathbb{R}^3$. Allora:

$$\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\langle v, w \rangle = \langle v+w, v+w \rangle = \langle v, v \rangle + \langle w, w \rangle + 2\langle v, w \rangle$$

Teorema: Siano $v, w \in \mathbb{R}^3$ due vettori, allora sono tra di loro equivalenti le seguenti affermazioni:

1) $\langle v, w \rangle = 0$

2) $\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$

3) Il triangolo di lati v e w è rettangolo e v e w ne sono i due cateti

Dimostrazione: Sappiamo che:

$\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\langle v, w \rangle$. Pertanto

$\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$ se e solo se $2\langle v, w \rangle = 0$, cioè se e solo se $\langle v, w \rangle = 0$.

Questo giustifica l'equivalenza tra 1 e 2.

L'equivalenza tra 1 e 3 è in realtà il teorema di Pitagora.

Def: Siano $v, w \in \mathbb{R}^3$ due vettori, si dice che essi sono ortogonali se $\langle v, w \rangle = 0$.

Quello che è il bello di questa definizione è che il prodotto interno ci dice qualcosa sugli angoli (in questo caso l'angolo retto).

DOM: Posso misurare gli altri angoli?

DOM: Posso usare il prodotto scalare per dare una definizione rigorosa di proiezione ortogonale?

Iniziamo rispondendo alla prima.

Teorema (LA DISUGUAGLIANZA di CAUCHY-SCHWARZ): Siano $v, w \in \mathbb{R}^3$ due vettori, allora:

$$|\langle v, w\rangle| \leq ||v|| \cdot ||w||$$

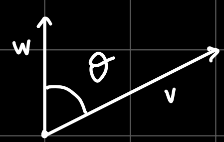
Vediamo ora come possiamo sfruttare tale disuguaglianza per misurare gli angoli.

Se nessuno tra v e w è nullo, allora $||v|| \neq 0$ e $||w|| \neq 0$ e quindi: $|\langle v, w\rangle| \leq ||v|| \cdot ||w|| \longrightarrow \dfrac{|\langle v, w\rangle|}{||v|| \cdot ||w||} \leq 1$

$$-1 \leq \frac{|\langle v, w\rangle|}{||v|| \cdot ||w||} \leq 1$$

Esiste quindi un unico angolo θ, con $0 \leq \theta \leq \pi$ tale che

$$\cos\theta = \frac{\langle v, w\rangle}{||v|| \cdot ||w||}$$

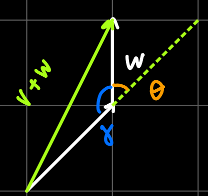


L'angolo θ così definito è l'angolo formato tra v e w.

DOM: È coerente tutto ciò?

1) Abbiamo che $\langle v, w\rangle = 0 \iff \cos\theta = 0$ il capita solo se $\theta = \frac{\pi}{2}$

2) Consideriamo il triangolo di lati di v e w:



l'angolo γ è legato a θ dalla relazione $\gamma = \pi - \theta$.

Ma allora $\langle v, w\rangle = ||v|| \cdot ||w|| \cdot \cos\theta$

$$= ||v|| \cdot ||w|| \cdot \cos(\pi - \gamma) =$$

$$= -||v|| \cdot ||w|| \cdot \cos\gamma$$

La prima proposizione vista diventa:

$$||v+w||^2 = ||v||^2 + ||w||^2 + 2\langle v, w\rangle =$$

$$= ||v^2|| + ||w||^2 - 2\,||v|| \cdot ||w|| \cdot \cos\gamma$$

Questo è noto come teorema di CARNOT o TEOREMA del coseno.

Es: Siano $v = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Calcoliamo l'angolo che essi formano:

$$\langle v, w \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 3\sqrt{2}$$

$$\|v\|^2 = \left\langle \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \right\rangle = 4 \Rightarrow \|v\| = 2$$

$$\|w\|^2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 6 \Longrightarrow \|w\| = \sqrt{6}$$

così

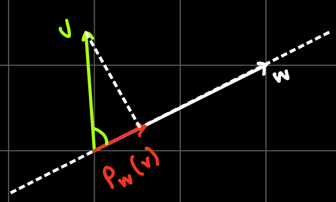
$$\cos\theta = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} = \frac{3\sqrt{2}}{2 \cdot \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

quindi $\theta = \frac{\pi}{6}$.

Es: trovare l'angolo tra $v = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ e $z = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} \\ 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$

Rispondiamo ora sulle proiezioni ortogonali,

Dati due vettori $v, w \in \mathbb{R}^3$ ($w \neq 0$), voglio capire come proiettare ortogonalmente v lungo la direzione individuata da w.



Ci accorgiamo che per determinare $P_w(v)$, ci serve avere un vettore di lunghezza unitaria lungo la direzione di w. Tale vettore è $\frac{1}{\|w\|} \cdot w$ e ha lunghezza 1.

Così: $$P_w(v) = \underbrace{\|v\| \cdot \cos\theta}_{\text{lunghezza}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\|w\|}}_{\text{unità di direzione}} \cdot w$$

$$= \|v\| \cdot \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} \cdot \frac{1}{\|w\|} \cdot w = \underbrace{\frac{\langle v, w \rangle}{\|w\|^2}}_{\text{numero}} \cdot \underbrace{w}_{\text{vettore}}$$

PRODOTTO VETTORIALE in R^3

Questo tipo di prodotto prende due vettori di R^3 e restituisce un vettore di R^3

Definizione: Dati $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

definiamo il prodotto vettoriale di v e w in questo modo:

$$v \times w = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

Il prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$ gode delle seguenti proprietà:

I) Per ogni $v, w \in \mathbb{R}^3$ si ha che

$$v \times w = -w \times v$$

⚠ Il prodotto vettoriale NON è COMMUTATIVO!

II) Si ha che $v \times w = 0$ se e soltanto se uno dei due vettori è multiplo dell'altro (o $v = c \cdot w$ per qualche $c \in \mathbb{R}$ o viceversa).

III) Per ogni $v, w \in \mathbb{R}^3$ si ha che $v \times w$ è ortogonale sia a v sia a w:

$$\langle v \times w, v \rangle = 0$$

$$\langle v \times w, w \rangle = 0$$

Es: considero $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Allora:

$$v \times w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Oss: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono i vettori che identificano le direzioni degli assi coordinati

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0, \quad \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0, \quad \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$