

*Si svolgano 3 esercizi a scelta sui 4 proposti.*

*Il punteggio finale sarà la somma dei punti dei 3 esercizi riusciti meglio.*

**Problema 2.1** (12 punti). Un giocatore al casinò gioca 20 volte alla roulette, ogni volta con una probabilità di vittoria di  $\frac{18}{37}$ .

**(6 punti)** Quanto vale la probabilità che vinca almeno 14 volte? (Va bene una risposta approssimata.)

**(3 punti)** Per ciascuna giocata, egli punta 50 euro. In caso di vittoria ne riceve 100, in caso di sconfitta 0. Denotiamo con  $V$  la vincita totale alla fine, ovvero la differenza tra soldi ricevuti e soldi puntati. Si determinino media e deviazione standard di  $V$  e il minimo  $k$  tale che  $P(V \geq k) \leq 5\%$ .

**(3 punti)** Consideriamo il caso che, invece di dividere i suoi 1000 euro in 20 puntate da 50 euro, li divida in un numero arbitrario  $m$  di puntate da  $\frac{1000}{m}$  euro ciascuna. Come varia  $P(V \geq 100)$  in funzione di  $m$ ? In particolare, per quali valori di  $m$  questa probabilità è massima?

**Problema 2.2** (12 punti). Sia  $X$  una variabile aleatoria continua con funzione di densità

$$f_X(t) = \begin{cases} c & 0 \leq t \leq 1 \\ c & 2 \leq t \leq 3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

**(6 punti)** Si determini il valore di  $c$ , si tracci il grafico di  $f_X$ , si calcolino media e deviazione standard di  $X$ .

**(3 punti)** Si determini la funzione di ripartizione di  $X$  e se ne tracci il grafico. Si spieghi come sia possibile generare una variabile aleatoria con la stessa legge di  $X$  a partire da  $U \sim \text{unif}(0, 1)$ .

**(3 punti)** Si determini la pdf di  $Y := (X - 1)^2$  e se ne tracci il grafico.

**Problema 2.3** (11 punti). Si testano delle reti neurali di tipo diverso, addestrate per svolgere un certo compito. Un campione di 5 reti di tipo A ottiene i punteggi seguenti:

10470.8 10423.1 10454.0 10405.9 10425.3

**(6 punti)** Stimare al 95% di confidenza, con un intervallo bilaterale, il punteggio medio di una rete di questo tipo.

**(3 punti)** Un campione di 5 reti di tipo B ottiene i punteggi seguenti:

10384.3 10364.0 10426.1 10426.1 10342.4

Si verifichi tramite calcolo del  $p$ -value se vi sia evidenza che i due tipi di reti abbiano punteggio medio diverso. (Si può supporre che le deviazioni standard dei due tipi di reti siano uguali.)

**(2 punti)** Si stimi la deviazione standard comune dei punteggi dei due tipi di reti, al 90% di confidenza, con un intervallo unilaterale del tipo  $\sigma \leq U$ .

**Problema 2.4** (12 punti). Un calciatore, che gioca come attaccante, segna gol abbastanza spesso: i dati che seguono rappresentano i minuti di gioco trascorsi tra un gol da lui segnato e il successivo, concatenando insieme parecchie partite di 90 minuti ciascuna,

57 43 152 13 19 121 176 70 10

Si può supporre che questi tempi abbiano distribuzione esponenziale.

**(7 punti)** Si vorrebbe poter dedurre da questi dati che il tempo medio tra un gol e l'altro sia minore di 90 minuti. I dati sono *compatibili* con questa ipotesi al 10% di significatività? Inoltre, si può dire che questa ipotesi sia *dimostrata* dai dati al 10% di significatività?

**(2 punti)** Si stimi con un intervallo bilaterale, al 95% di confidenza, il numero medio di gol per partita di questo giocatore.

**(3 punti)** Si calcoli la potenza del secondo test del primo punto, in corrispondenza di un tempo medio di 75 minuti, tra un gol e il successivo.