Es: Sia T il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ definito

$$T = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}\right).$$

Determiniamone una dimensione e una base. Come posso fare?

Grazie ai lemmi di scambio visti, notiamo che possiamo usare le op. elementari di Gauss per cambiare i generatori di un sottospazio.

Il problema che abbiamo vettori colonna, mentre Gauss lavora per righe, si risolve se scriviamo i vettori per riga:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III}-7\text{I}\to\text{III}]{\text{II}-4\text{I}\to\text{II}} \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\0 & -3 & -6\\0 & -6 & -12\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II}\cdot -\frac{1}{3}\to\text{II}} \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 1 & 2\\0 & -6 & -12\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{III}+6\text{II}} \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Questo mi dice che

$$T = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}\right) = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \mathcal{L}\Bigg(\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}}_{\text{linearmente indipendenti}}\Bigg)$$

e quindi $\dim(T) = 2$, e $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$ ne è una base

Questo esempio mostra la validità della seguente proposizione la cui dimostrazione discende dai lemmi di scambio visti, che interpretiamo come op. elem. di Gauss

PROPOSIZIONE: Sia A una matrice di m righe e n colonne e sia V il sottospazio di $\mathbb{R}^n$ generato dalle righe di A. Allora:

$\dim(V) =$ max num di righe linearmente indipendenti di A = n° di PIVOT in una forma scala per A.

Def: Sia una matrice $m \times n$, e sia V lo spazio generato in $\mathbb{R}^n$ dalle righe di A.

Allora $\dim(V)$ prende il nome di **rango per righe** di A e lo si indica con $rg_R(A)$ (R → per righe)

Dom: Posso fare la stessa cosa ragionando sulle colonne? Sì

Def: Sia A una matrice $m \times n$, e denotiamo con W il sottospazio di $\mathbb{R}^m$ generato dalle n colonne di A. Definiamo il rango per colonne di A come segue:

$rg_c(A) = \dim(W) = \max$ num colonne indipendenti di A

Oss: Gli spazi delle righe e delle colonne sono in genere molto diversi tra di loro.

Es:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \text{ allora:}$$

* spazio righe è $\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$ in R^2

* spazio colonne è $\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$ in R^3

C'è qualche legame tra $rg_R(A)$ e $rg_C(A)$?

Oss: Se applichiamo delle operazioni el. di Gauss sulle righe di una matrice, lo spazio generato sulle colonne, può cambiare:

Es: Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, allora lo spazio generato dalle sue colonne è $\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \subseteq R^3$ che ha eq.ne $z = 0$.

Se applichiamo: "Scambia II e III riga":

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, lo spazio generato dalle colonne di B è $\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ che ha eq.ne $y = 0$

Si osserva che Gauss possono effettivamente cambiare lo spazio generato dalle colonne.

Malgrado questo, andando più in profondità si può mostrare quanto segue:

Teorema: Sia A una matice $m \times n$. Allora

$$rg_r(A) = rg_c(A)$$

Def: Data una matrice A di taglia $m \times n$, il **rango** di A è:

$$\begin{aligned} rg(A) &= rg_c(A) \\ &= rg_r(A) \\ &= \text{num PIVOT in una forma scala per } A. \end{aligned}$$

Es: Come si può lavorare con le colonne usando operazioni elem. sulle righe.

Consideriamo il sottospazio $V = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \subseteq \mathbb{R}^3$ e determiniamone la dimensione e una base.

Costruisco la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. La porto in forma scala

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{II - 2I \to II} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{III - \frac{1}{2} II \to III} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vedo subito che $\dim(V) = rg(A) = 2$

Dom: Posso capire da questa forma scala chi sia una base di V?

Sì, la posizione dei PIVOT, mi dice quali vettori scegliere tra quelli dati!

I PIVOT si trovano in I e III colonna della matrice originaria, così dovrò scegliere l'I e III vettore per avere una

base: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Ora che abbiamo il concetto di rango, possiamo riformulare tutti i fatti visti per la risoluzione dei sistemi lineari.

La più importante di queste traduzioni è la seguente:

Teorema (Teorema di Rouché - Capelli):

Sia A una matrice $m \times n$ e $b \in \mathbb{R}^m$. Consideriamo il sistema di matrice completa $(A|b)$. Allora:

$Sol(A|b) \neq \emptyset \iff rg(A|b) = rg(A)$, e in questo caso le soluzioni dipendono da $n - rg(A)$ parametri liberi

Dim: Osserviamo che se portiamo in forma scala la matrice $(A|b)$ con op. di Gauss, in particolare anche A è in forma scala.

Sappiamo poi se e solo se $Sol(A|b) \neq \emptyset \iff$ l'ultimo pivot in una forma a scala per $(A|b)$ non è nell'ultima colonna.

★ Se l'ultimo pivot è nell'ultima colonna, allora la forma a scala ottenuta è di questo tipo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \multicolumn{3}{c|}{\text{Forma a scala per la matrix } A} & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \text{PIVOT} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right)$$ ← un po' di righe tutte nulle

notiamo quindi che in questo il $rg(A) = rg(A|b) - 1$ e in particolare $rg(A) \neq rg(A|b)$

★ Se invece l'ultimo pivot non è nell'ultima colonna, allora A e $(A|b)$ hanno lo stesso numero di PIVOT, e quindi lo stesso rango → $rg(A) = rg(A|b)$.

DETERMINANTE e RANGO

Def: Sia A una matrice quadrata di ordine n (cioè $n \times n$) ad A è possibile associare un numero reale, $\det(A)$, che si calcola ricorsivamente come segue:

★ se $n = 1$, allora $A = (a)$, con $a \in \mathbb{R}$ e poniamo $\det(A) = a$

★ se $n > 1$, allora $A = (a_{ij})$ $\begin{pmatrix} i \text{ indice riga} \\ j \text{ '' colonna} \end{pmatrix}$ e definiamo il $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \cdot \det(\hat{A}_{ij})$,

dove $\hat{A}_{ij}$ è la matrice $(n-1) \times (n-1)$ che si ottiene sopprimendo la i-esima riga e j-esima colonna.

Es: $\det(A) = a_{11} \cdot \det(\hat{A}_{11}) - a_{21} \cdot \det(\hat{A}_{21}) + a_{31} \cdot \det(\hat{A}_{31}) - a_{41} \cdot \det(\hat{A}_{41}) + \cdots$

segni alternati

elementi prima colonna

Es:

$n=2$) $$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - a_{21} \cdot \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{12} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot \det(a_{22}) - a_{21} \cdot \det(a_{12}) =$$
$$= a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

$n=3$) $$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} \det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{21} \det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{31} \cdot \det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Oss: Il determinante si calcola solo per le matrici quadrare

PROPRIETÀ:

i-esima colonna

i) Sia $A = (A_1 | A_2 | \cdots | A_i + B | \cdots | A_n)$ dove $A_1, \ldots, A_n, B \in \mathbb{R}^n$. Allora

$\det(A) = \det(A_1 | \cdots | A_i | \cdots | \ldots | A_n) + \det(A_1 | \cdots | B | \cdots | A_n)$ i-esima colonna

ii) Sia $A = (A_1 | \cdots | cA_i | \cdots | A_n)$ $A_i, \ldots, A_n \in \mathbb{R}^n$ e $c \in \mathbb{R}$. Allora $\det = c \cdot \det(A_1 | \cdots | A_i | \cdots | A_n)$.

i-esima colonna

In particolare, se una colonna di A è nulla, allora $\det(A) = 0$

iii) Se la matrice B si ottiene scambiando tra di loro due colonne della matr. A, allora $\det(B) = -\det(A)$

iv) il $\det(I_n) = 1$ dove $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

v) se due colonne di A sono uguali, $\det(A) = 0$.

vi) se B è la matrice che si ottiene dalla matrice A sostituendo al posto di una sua (di A) colonna, la somma tra quella colonna e un multiplo di un'altra colonna, allora $\det(B) = \det(A)$

vii) $\det(A) = \det(A^T)$

Def: Data $A = (a_{ij})$, una matrice $m \times n$, la matrice trasposta di A, è la matrice di $B = (b_{ij})$ ottenuta scambiando tra di loro righe e colonne di A (cioè $b_{ij} = a_{ji}$)

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

REGOLA DI CALCOLO: Sviluppo di Laplace secondo la i-esima riga:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \underbrace{a_{ij}}_{\text{scorre la i-esima riga}} \cdot \det(\hat{A}_{ij})$$

C'è anche lo sviluppo di laplace sulla j-esima colonna

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \underbrace{a_{ij}}_{\text{scorre la i-esima colonna}} \cdot \det(\hat{A}_{ij})$$

RANGO PER MINORI DI UNA MATRICE

Sia A una matrice $m \times n$.

Un minore di ordine p di A è una sottomatrice quadrata di ordine p, che si ottiene da A rimuovendo $n-p$ colonne e $n-p$ righe

Def: Sia A una matrice $m \times n$, Diciamo che il rango per minori di A è r se:

i) esiste un minore $r \times r$ di A con determinante non nullo.

ii) tutti i minori $(r+1) \times (r+1)$ hanno determinante nullo.

Es: Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Allora:

$\det(A) = [\text{Laplace sulla prima riga}] =$

$$= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-3+3) - 1 \cdot \det(3-3) = 0$$

Di conseguenza questa matrice non ha rango per minori uguale a 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 - 3 \cdot 1 = 0$$

Dom: Quindi la matrice non ha nemmeno rango 2?

Non è detto!

Devo guardare tutti i minori 2x2.

Osservo che $\det = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$ e quindi il rango per minori di A è 2.

Nel caso delle matrici quadrate, il legame tra rango, determinante e rango per minori è più forte.

Teorema: Sia A una matrice $m \times n$, Allora il rango per minori di A coincide $rg(A)$

Conseguenza: Se A è una matrice $n \times n$, allora le colonne di A costituiscono una base per $\mathbb{R}^n$ se e solo se $\det(A) \neq 0$.