Avevamo considerato il sistema lineare

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_3 = 2 \end{cases}$$

Stavamo spiegando come associare a tale sistema una tabella:

* nella prima riga inseriamo i coefficenti che compaiono nella prima equazione, nella seconda riga quelli relativi alla seconda equazione e così via.
* nella prima colonna riporteremo i coefficienti relativi alla prima incognita, nella seconda quelli relativa alla seconda incognita, e così via fino all' ultima colonna relativa ai termini noti.

Il sistema che stiamo considerando può essere rappresentata da questa tabella:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \text{Matrice completa del sistema}$$

la matrice dei coefficienti del sistema

Ogni sistema lineare di m equazioni in n incognite si rappresenta tramite una matrice di m righe e n+1 colonne

Osservazione: Ogni matrice di m righe e n+1 colonne è la matrice che rappresenta un sistema lineare di m equazioni in n incognite

Es: se considero la tabella

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{array}\right)$$ ad essa corrisponderà il sistema $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 4x_1 + 5x_2 = 6 \end{cases}$$

La matrice è una matrice 2x3, il sistema è un sistema 2x2.

Tra tutti i sistemi ce ne sono alcuni che sono più semplici da risolvere:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$ lo posso risolvere per sostituzioni successive.

A partire dall'ultima equazione ($x_3 = 1$) posso ricavare il valore di x_2 nella penultima eq:

$x_2 - x_3 = 0 \longrightarrow x_2 = x_3 \longrightarrow x_2 = 1$

A questo punto posso ricavare x_1 dalla prima equazione:

$3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \longrightarrow 3x_1 = 2 + 2x_2 - x_3 \longrightarrow 3x_1 = 3 \longrightarrow x_1 = 1.$

così ho ricavato la soluzione:

$(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 1)$

La matrice di questo sistema è:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$ a scala

Definizione: Una matrice si dice in forma a scala se esiste un certo intero r tale che:

* le righe successive dalla $r+1$ esima compresa fino alla fine, devono essere tutte nulle.
* le righe fino alla r esima hanno ciascuna almeno un elemento non nullo.
* in ciascuna delle prime r righe, il primo elemento non nullo si trova in una colonna strettamente più a destra di quello relativo alla riga precedente

Es: La matrice $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ è in forma scala con $r = 3$.

- La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ è in forma scala, dove $r = 2$

- la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ è anch'essa in forma scala con $r = 3$.

Definizione: Il primo elemento non nullo in una riga di una matrice in forma scala prende il nome PIVOT!

Quindi r in pratica è il numero di PIVOT della matrice in forma scala.

DOM: È sempre possibile manipolare una matrice per ricondurla in forma scala?

Se sì, con che operazioni?

Per rispondere a questa domanda, introduciamo le operazioni elementari di Gauss sulle righe della matrice:

1) scambiare tra di loro due righe di una matrice.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{I \leftrightarrow III} \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

2) posso sostituire ad una riga il prodotto di quella riga per un numero non nullo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{2} \cdot II]{2 \cdot I} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

3) Sostituire al posto di una riga la somma tra quella stessa riga ed un multiplo di una riga differente

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[II - 4I]{} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & -8 & -14 \end{pmatrix}$$

Mostriamo con un esempio come queste operazioni di Gauss possono ridurre una matrice in forma scala:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \\ 7 & -4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III} - 7\text{I}]{\text{II} - 2\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & -10 & 2 \\ 0 & 10 & -20 & 4 \end{pmatrix}$$

vorrei 0

$$\xrightarrow[\text{III} - 2\text{II}]{} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & -10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ è a scala con 2 pivot

Vediamo un algoritmo che mi permette di portare ogni matrice in forma scala.

1) Identifichiamo la prima colonna non tutta nulla;

2) In questa colonna identifichiamo in quale riga si trova il primo elemento non nullo;

3) tramite operazione di Gauss (1 tipo) porto quella riga in cima alla matrice;

4) Posso "mandare a zero" tutti gli elementi al di sotto di quello individuato tramite operazioni di Gauss (3 tipo);

5) Mi concentro sulla sotto matrice ottenuta considerando le righe e le colonne successive a quelle corrispondenti alla posizione dell'elemento non nullo usato al passo 4;

6) Su questa nuova matrice ripeto i passaggi 1, 2, 3, 4, 5, 6;

7) Al termine, quello che trovo è una matrice in forma scala.

OSSERVAZIONE! Questo algoritmo fornisce sostanzialmente la dimostrazione di questa proporzione.

Ogni matrice può essere ricondotta in forma a scala utilizzando operazioni di Gauss.

!! Questo algoritmo può essere poco efficiente. Ad esempio

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

l'algoritmo vorrebbe fare scambio $I \leftrightarrow II$ riga, io farei 1^a e 3^a.

Rimane ora da affrontare un punto delicato da affrontare:

DOM: Dato un sistema, ne posso considerare la matrice, questa può essere portata in forma scala, alla matrice a scala corrisponde un sistema che so risolvere facilmente. Che legame c'è tra le soluzioni di quest'ultimo sistema e quelle del sistema di partenza?

Si può mostrare che i sistemi corrispondenti a matrici che si ottengono l'una dall'altra mediante l'applicazione di un'operazione elementare di Gauss hanno le stesse soluzioni.

Es: Operazione 1: Se scambio due righe di una matrice sto scambiando le due righe corrispondenti del sistema. Così le soluzioni non cambiano.

Operazione 2: In questo caso una riga del sistema passa da questa forma

$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$

a quest'altra

$ta_1 x_1 + ta_2 x_2 + \dots + ta_n x_n = tb$

Ma ora se $x_1, \cdots, x_n$ è soluzione della prima, allora quando calcolo

$$t a_1 x_1 , t a_2 x_2 + \cdots + t a_n x_n = t(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_2) = t \cdot b$$

→ la seconda è verificata.

Viceversa, se $(x_1, \cdots, x_n)$ è soluzione della seconda, allora

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = \frac{1}{t} \cdot t(a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n) =$$

$$\frac{1}{t}(t a_1 x_1 + \cdots + t a_n x_n) = \frac{1}{t} \cdot tb = b$$

Morale: le soluzioni non sono cambiate

ESERCIZIO: Mostrare che le soluzioni non cambiano nemmeno se effettuo l'operazione 3.