MUTUE POSIZIONI TRA RETTE E PIANI NELLO SPAZIO

Cioè: date due rette o due piani o una retta e un piano, qual è la posizione reciproca?

Iniziamo con il caso di due rette nello spazio. Siano r e s due rette. Dal punto di vista "descrittivo" una retta è un insieme di punti disposti lungo un'unica direzione. Quindi possiamo capire come sono messe r e s:

1) Confrontando i loro punti; cioè cercando di capire se queste rette si intersecano oppure no ($r \cap s \neq \emptyset$ oppure $r \cap s = \emptyset$ rispettivamente)

2) Confrontando le loro direzioni, cioè cercando di capire se hanno la stessa direzione o no.

Abbiamo quindi quattro diversi scenari, che analizziamo:

i) le due rette si intersecano in almeno un punto, ed abbiano la stessa direzione.

In questo caso posso scegliere un punto P che sia comune ad entrambe. Posso anche scegliere un vettore v che rappresenti la direzione comune di r e s.

Così facendo, posso scrivere un'equazione parametrica che descriva le due rette:

$r: X = P + tv$ $\qquad$ $s: X = P + tv$

Mi accorgo quindi che in realtà due rette coincidono, e diciamo che r e s sono coincidenti.

ii) le due rette si intersecano in almeno un punto ed abbiano direzioni diverse.

Diamo delle eq.ni parametriche per r ed s, dove come punto base scegliamo un punto P comune ad r e s ($P \in r \cap s$):

$r: X = P + tv$ $\qquad$ $s: X = P + \tau w$

dove nessuno tra v e w è multiplo dell'altro.

osserviamo che in questo caso $X = P + tv + \tau w$ è un'eq.ne parametrica che descrive un piano π tale che $r \subseteq \pi$ e $s \subseteq \pi$. Pertanto le due rette sono COMPLANARI, INCIDENTI e DISTINTE.

iii) le due rette non si intersecano e che hanno la stessa direzione. Le scriviamo in forma parametrica:

$r: X = P + tv$ $\qquad$ $s: X = Q + \tau v$

dove osserviamo che $P \neq Q$ (altrimenti r e s inciderebbero). Poniamo $w = Q - P$, di cui sappiamo $w \neq 0$. Inoltre w non è multiplo di v (se fosse $w = c \cdot v$ per qualche $c \in \mathbb{R}$, allora avremmo $Q = P + w = P + c \cdot w \in r$, ma ciò è assurdo).

Di conseguenza, se considero $n = v \times w$ ho che n ha le seguenti proprietà: n è $\perp$ tanto a v quanto a w, $n \neq 0$.

Considero quindi il piano π passante per P e ortogonale alla direzione individuata da n. Tale piano π contiene r, contiene Q, contiene s.

Ma allora le due rette r e s sono COMPLANARI, DISGIUNTE e PARALLELE.

4) Le due rette sono disgiunte e le direzioni sono diverse. Le due rette si dicono SGHEMBE.

OSS:

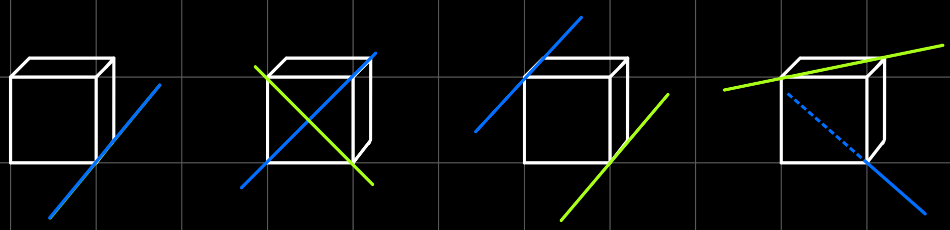
- Due rette r e s si dicono complanari se esiste un piano π tale che $r \subseteq \pi$ e $s \subseteq \pi$; vista la definizione, anche due rette coincidenti sono complanari.

- Per definizione, due rette che hanno la stessa direzione si dicono parallele, anche in questo caso due rette coincidenti.

- Nei due casi in cui le due rette non abbiano la stessa direzione, c'è un caso più felice di altri: se v rappresenta la direzione di r e w quella di s, può succedere $\langle v, w \rangle = 0$.

In questo caso le due rette sono ortogonali.

Mostriamo i quattro casi graficamente:



coincidenti — incidenti e ortogonali — parallele e disgiunte — sghembe e ortogonali

Parliamo ora della mutua posizione di due piani.

Siano $\pi : ax + by + cz = d$ due piani

$\pi' : a'x + b'y + c'z = d'$

Cerchiamo di capire se e come π e π' si intersecano.

Per questo, mettiamo a sistema le eq.ni ottenendo:

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases} \longrightarrow \text{matrice} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{array}\right)$$

Applichiamo Gauss per portare la matrice in forma scala; ho quindi 3 casi a priori, in base al numero r di PIVOT:

• $r=0$. Questo caso non si dà, poichè almeno uno tra a, b, c e almeno uno a', b', c' è non nullo;

• $r=1$ Se ho 1 PIVOT, vuol dire che dopo aver fatto un'operazione del tipo "sostituisci II con ...", succede che la seconda è tutta nulla.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{II}-\alpha \mathrm{I} \to \mathrm{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Pertanto: $\mathrm{II} - \alpha \mathrm{I} = 0$ ossia $\mathrm{II} = \alpha \mathrm{I}$.

Questo significa che le due operazioni di π e π' sono in realtà la stessa, o meglio

$\pi: ax + by + cz = d$

$\pi': \alpha(ax+by+cz) = \alpha d$

e quindi $\pi = \pi'$ cioè i due piani coincidono.

• $r=2$, ho due PIVOT. Si hanno due ulteriori sottocasi:

a) Se il secondo PIVOT si trova nell'ultima colonna vuol dire che è successo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{array}\right) \longrightarrow \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 0 & 0 & \text{pivot} \end{pmatrix}$$

Sappiamo quindi che il sistema non ha soluzioni, ma come lo interpreto geometricamente?

Il fatto che abbiamo trovato tre zeri mi dice che $a' = \alpha a$, $b' = \alpha b$, $c' = \alpha c$ (ma $d \neq \alpha d$). Ma allora $\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \\ \alpha c \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

e quindi i vettori $\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ identificano la stessa direzione.

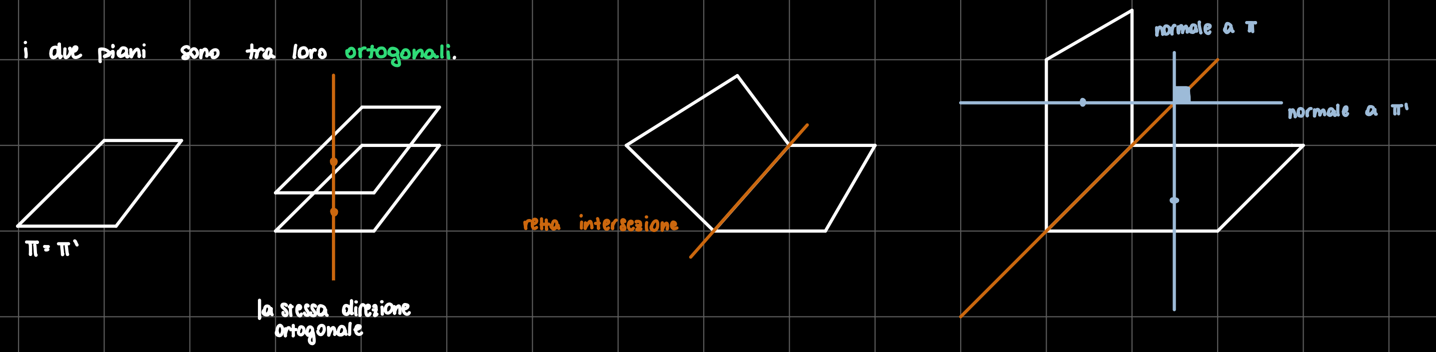
Così π e π' sono ortogonali ad una stessa direzione, cioè π e π' sono paralleli e disgiunti.

b) Il secondo PIVOT non è nell'ultima colonna. Sappiamo che il sistema è compatibile, e le soluzioni dipendono da $n-r$ variabil* liber*.

In questo caso $\pi \cap \pi'$ è una retta

Osserviamo che in questo caso nessuno dei vettori $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ è multiplo dell'altro, cioè i due piani hanno direzioni ortogonali diverse.

OSS: C'è anche qui un caso che è più felice degli altri quello in cui $\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \right\rangle = 0$. In questo caso, In questo caso i due piani sono tra loro ortogonali.



Analizziamo infine la mutua posizione di una retta e un piano.

Siano la retta e il piano descritti dalle eq.ni

$r: X = P + tv$ (v individua la direzione di r)

$\pi: ax + by + cz = d$ ($n = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ individua la direzione normale di π)

Distinguiamo due possibilità:

1) $\langle n, v \rangle \neq 0$

In questo caso, si ha che $P_n(v) = \dfrac{\langle v, n \rangle}{\langle n, n \rangle} n \neq 0$

Questo significa che la retta si sviluppa lungo una direzione che ha una componente ⊥ al piano che è non nulla.

Pertanto prima o poi la retta intersecherà il piano in un punto. Così diciamo che retta e piano sono incidenti.

2) $\langle v, n \rangle = 0$

In questo caso la direzione individuata da v è una delle direzioni possibili lungo le quali si sviluppa il piano.

Vediamo i due sottocasi:

a) se $r \cap \pi = \emptyset$, allora la retta r è parallela e disgiunta da π

b) se $r \cap \pi \neq \emptyset$, cioè posso scegliere un punto $Q \in r \cap \pi$. Parametrizzo r come segue:

$r: X = Q + tv$

Ricordiamoci che un'eq.ne per π può essere scritta come segue:

$\pi = \langle X - Q, n \rangle = 0$

Voglio mostrare che $r \subseteq \pi$. Sia quindi $X \in r$, allora $X = Q + tv$, e quindi $\langle X - Q, n \rangle = \langle Q + tv - Q, n \rangle =$

$$= t \langle v, n \rangle = t \cdot 0 = 0$$

e pertanto $X \in \pi$. Ciò mostra che $r \subseteq \pi$, ossia r è contenuta in π o r giace su π.

OSS: Nel caso in cui $\langle n, v \rangle \neq$, c'è un caso più felice, quello in cui $n = \alpha v$ (oppure $v = \alpha n$, quando uno multiplo dell'altro). Vuol dire che la direzione di r coincide con la direzione normale a π. In questo caso diciamo che r e π incidono ortogonalmente.