

Si svolgano 3 esercizi a scelta sui 4 proposti.

Il punteggio finale sarà la somma dei punti dei 3 esercizi riusciti meglio.

Problema 9.1 (12 punti). Il nuovo social Cringe™ ogni giorno mi mostra una foto a caso tra tutte quelle che vi ho caricato. Al momento ho 15 foto di cui 2 imbarazzanti. (Cringe™ non permette mai di cancellare le foto!)

(7 punti) Sia X il numero di giorni, nei prossimi 60, in cui mi mostrerà una foto imbarazzante. Qual è la legge di X ? Qual è la probabilità che X valga 4 o meno? (Si usi la approssimazione del teorema del limite centrale, dopo averne verificato l'applicabilità.)

(2 punti) Qual è la probabilità che nei prossimi 7 giorni ne mostri una imbarazzante 2 volte o più?

(3 punti) Cringe™ permette di caricare una foto al giorno e non di più. Come cambia la risposta al primo punto se ogni giorno aggiungo una nuova foto non imbarazzante a quelle caricate? (Si può approssimare $\sum_{k=a+1}^b \frac{1}{k} \approx \log b - \log a$.)

Problema 9.2 (13 punti). Sia X una variabile aleatoria continua con funzione di densità

$$f_X(t) = \begin{cases} c[1 - (t - 5)^2] & 4 \leq t \leq 6 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(7 punti) Si verifichi che questa sia una pdf valida per qualche valore di c , che va determinato; si tracci il grafico di f_X ; si calcolino media, moda, mediana e funzione di ripartizione di X ; si tracci il grafico di quest'ultima.

(3 punti) Sia $Y := X - a$, con il parametro a scelto in modo che Y abbia media nulla. Si determinino la pdf e la varianza di Y e si deduca il valore della varianza di X .

(3 punti) Sia \tilde{X} indipendente da X e con la stessa legge. Si determini la pdf di $Z := \max(X, \tilde{X})$.

Problema 9.3 (13 punti). In un esperimento si registrano i tempi di lettura di una persona per le singole pagine di un libro di narrativa. I dati raccolti sono i tempi in secondi per un campione di 40

pagine. La media campionaria è di 67.6 secondi per pagina e la deviazione standard campionaria è di 12.4 secondi.

(7 punti) Stimare al 95% di confidenza, con un intervallo bilaterale, la media μ e la deviazione standard σ del tempo necessario per leggere una pagina a caso del libro di narrativa.

(3 punti) L'esperimento viene ripetuto in condizioni analoghe salvo per l'argomento del libro, che in questo caso è un saggio. Il numero di pagine del campione è sempre 40. La media e la deviazione standard campionarie sono 75.2 e 14.0 secondi. Testare, tramite calcolo del p -value, se vi sia evidenza statistica che la velocità di lettura sia significativamente superiore per il libro di narrativa.

(3 punti) Supponendo σ nota e pari a 12.4 secondi, si stimi la frazione di pagine che avranno un tempo di lettura inferiore al minuto (per il libro di narrativa, al 95% di confidenza, con un intervallo bilaterale).

Problema 9.4 (12 punti). Si studia la frequenza p delle persone mancine nella categoria delle giocatrici professioniste di ping-pong. In un campione casuale di 100 giocatrici, si trova che le mancine sono 19, mentre nella popolazione femminile generale l'incidenza del mancino è stimata essere del $q = 9.3\%$.

(6 punti) Si verifichi al 5% di significatività se vi sia evidenza statistica che la frequenza delle mancine sia superiore per questa categoria.

(3 punti) Si stimi l'aumento di frequenza di mancine a in questa categoria, rispetto alla popolazione femminile (al 90% di confidenza, con un intervallo unilaterale destro del tipo $a \leq U$, e dove si intende che $a := \frac{p-q}{q}$).

(3 punti) Se per la categoria delle giocatrici professioniste di tennis fosse invece $a = 0.1$, quanto grande andrebbe preso il campione per avere una potenza dell'80% nel test del primo punto?