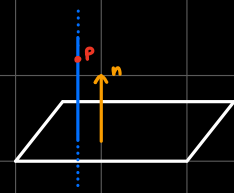
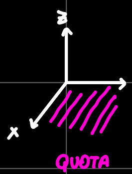
Es 1: Determinare un'eq.ne cartesiana e una parametrica di r, $\perp$ al piano xy e passante per il punto $(3,-2,0)$



piano xy: $z=0$



$ax+by+cz+d=0$ $n=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$

$0\cdot x+0\cdot y+1\cdot z=0$

Il vettore n al piano xy è $n=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Un' eq.ne parametrica della retta r è:

$$X=\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

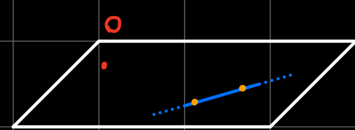
cioè: $\begin{cases}x=3+t\cdot 0\\ y=-2+t\cdot 0\\ z=0+t\end{cases}$ $\begin{cases}x=3\\ y=-2\\ z=t\end{cases}$

Un' eq.ne cartesiana della retta r è

$$\begin{cases}x-3=0\\ y+2=0\end{cases}$$

Es 2: Determinare un'eq.ne cartesiana del piano π contenente l'origine e la retta

$$r:\begin{cases}x=1-t\\ y=2-2t\\ z=3-t\end{cases}$$



Il piano passa per $\underline{0}=(0,0,0)$ e contiene tutti i punti di r, ne scelgo due qualunque:

$t=0$ $P=(1,2,3)$ $t=1$ $Q=(0,0,2)$

Determinare quindi il piano passante per tre punti non allineati

$\underline{0}=(0,0,0)$
$P=(1,2,3)$
$Q=(0,0,2)$

Impongo il passaggio di $ax+by+cz+d=0$, passante per i 3 punti.

passaggio per $\underline{0}$ $d=0$

passaggio per P $a+2b+3c+d=0$

passaggio per Q $\quad \{ \; 2c + d = 0$

$\rightarrow \begin{cases} d = 0 \\ a + 2b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} d = 0 \\ a = -2b \\ c = 0 \end{cases}$

Prendere $b = -1$ e otteniamo $\begin{cases} d = 0 \\ a = 2 \\ c = 0 \end{cases}$

$\downarrow$

$b(-2x + y) = 0$

$\uparrow$ per qualsiasi b

$\Rightarrow$ L'eq.ne del piano diventa

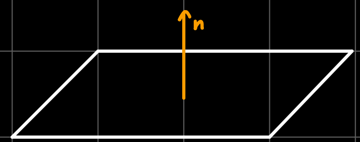
$$2x - y = 0$$

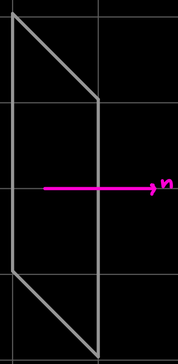
Es 3: Determinare la posizione reciproca dei piani:

π_1 : $\quad 2x - y + 5 = 0$

π_2 : $\quad 2x - y + z - 6 = 0$

π_1





Per capire la posizione reciproca dei due piani, è conveniente capire la posizione reciproca dei due vettori n.

Il vettore normale a π_1 $\quad n_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Il vettore normale a π_2 $\quad n_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Q_1: I due piani sono paralleli? No, poiché i vettori normali n_1 e n_2 non sono paralleli (no multiplo dell'altro)

Q_2: I due piani sono ortogonali? Dobbiamo capire se sono $\perp$ i vettori normali:

$\langle n_1, n_2 \rangle = 4 + 1 = 5 \qquad n_1, n_2$ non sono ortogonali

Dunque i piani si intersecano lungo una retta

$$\begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ 2x - y + z - 6 = 0 \end{cases}$$

e questa è l'eq.ne cartesiana della retta

Es 4: Determinare la posizione reciproca delle retta

$$r: \begin{cases} x - 2z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x + y - 3z + 4 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

Determinare l'eq.ne del piano che le contiene

Determiniamo la forma parametrica delle rette r e s.

Iniziamo con r, pongo $z = t$

$$r: \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \qquad X = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{punto passaggio}} + t \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{vettore direzione}}$$

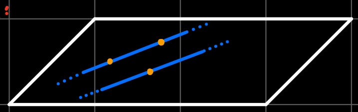
Guardiamo la retta s, pongo $z = t$

$$s: \begin{cases} x + y = 3t - 4 \\ y = t - 1 \\ z = t \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = t \end{cases} \qquad X = \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{punto passaggio}} + t \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{vettore direzione}}$$

$$r: \; X = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad s: \; X = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

I vettori direzione delle due rette coincidono, dunque le due rette sono parallele.

Per casa:

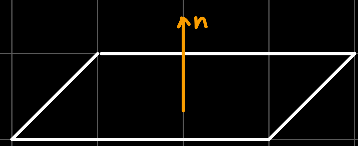


3 punti non allineati

Es 5: Siano dati il piano π e la retta r di eq.ni:

$$\pi: \; 3x - 2y + z + 4 = 0$$

$$r: \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ x - 2z + 1 = 0 \end{cases}$$



Determinare la loro posizione reciproca

Dall'eq.ne abbiamo il vettore normale è $n = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

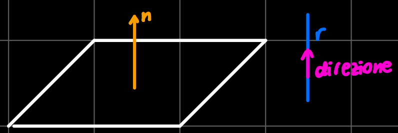
Scriviamo la retta r in forma parametrica, poniamo $z = t$:

$$\begin{cases} x-y+2t=0 \\ x-2t+1=0 \\ z=t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=-1+4t \\ x=-1+2t \\ z=t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-1+2t \\ y=-1+4t \\ z=t \end{cases}$$

L'eq.ne è

$$X=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$$

Il piano π: $3x-2y+z+4=0$ con $n=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$



Q_1: La retta è $\perp$ al piano? No poiché il vettore direzione di r non è parallelo al vettore n di π

Q_2: La retta r è // al piano? Se fossero r e π // avremmo che il vettore direzione della retta è ortogonale al vettore n al piano

$$\left\langle \begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}\right\rangle=-1$$

Quindi retta e piano si intersecano = sono incidenti

Es 6: Siano $u=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $v=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\in \mathbb{R}^3$

Si dica se sono linearmente indipendenti e si calcoli lo spazio generato

Siano $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ e consideriamo le combinazioni lineari di v e u uguali al vettore nullo, cioè:

$$a_1 u + a_2 v = 0$$

u e v sono linearmente indipendenti se $a_1 = a_2 = 0$

Quindi

$$a_1 u + a_2 v = a_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\0\\a_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_2\\a_2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+a_2\\a_2\\a_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1+a_2=0 \\ a_2=0 \\ a_1=0 \end{cases} \rightarrow a_1=0 \quad a_2=0$$

Quindi u e v sono linearmente indipendenti

LIN DIP. allora almeno uno tra i coefficienti a_1, a_2 è $\neq 0$

Supponiamo sia $a_1 \neq 0$

$\rightarrow$ divido per a_1

$u + \frac{a_2}{a_1} v = 0$

$\rightarrow u = -\underset{\substack{\uparrow \\ \text{scalare}}}{\frac{a_2}{a_1}} \cdot v$ $\Rightarrow$ u e v sono multipli tra loro

- Due vettori in $\mathbb{R}^n$ sono linearmente indipendenti se e solo se non sono uno multiplo dell'atro.

- Due vettori in $\mathbb{R}^n$ sono linearmente dipendenti se e solo se sono uno multiplo dell'atro.

Determiniamo lo spazio generato da u e v, cioè l'insieme delle combinazioni lineari di u e v

$$\mathcal{L}(u,v) = \left\{ a_1 u + a_2 v \;\middle|\; a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$a_1 u + a_2 v = \text{da prima} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$\mathcal{L}(u,v) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(u,v)$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \mathcal{L}(u,v)$

Es 7:

Siano $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

Si veda se u, v, w sono linearmente indipendenti e si calcoli lo spazio generaro

Siano $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ tali che $au + bv + cw = 0$

Se mostriamo che $a = 0, b = 0, c = 0$, allora vuol dire che u, v, w sono linearmente INDIP.

Se invece almeno uno tra a, b, c, è diverso da zero allora vuol dire che u, v, w sono LIN. DIP.

$$au + bv + cw = a\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a - b + c \\ a - b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quindi abbiamo un sistema lineare omogeneo

$\begin{cases} 3a - b + c = 0 \\ a - b = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2b = c \\ a = b \end{cases}$ cioè $\begin{cases} a = b \\ c = -2b \end{cases}$

b variabile libera
a, c " dipendenti

Non abbiamo trovato come unica soluzione $a=0,\ b=0,\ c=0$ quindi i tre vettori sono linearmente dipendenti

quindi $au+bv+cw=0$

diventa $bu+bv-2bw=0$

Per esempio: $b=1$ $\quad u+v-2w=0$

da cui $w=\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}v$

cioè ho scritto w come combinazione lineare di u e v

$\mathcal{L}(u,v,w)=$ combinazioni lineari di u,v,w

$\downarrow$

ma nel nostro caso w è già combinazione lineare di u e v

$$=\mathcal{L}(u,v)=$$

$$=\{au+bv \mid a,b\in\mathbb{R}\}$$

$$=\left\{a\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix} \;\middle|\; a,b\in\mathbb{R}\right\}$$

$$=\left\{\begin{pmatrix}3a-b\\a-b\\0\end{pmatrix} \;\middle|\; a,b\in\mathbb{R}\right\}$$

Es 8: Determinare una base e la dimensione dei seguenti sottospazi in $\mathbb{R}^4$

$$W=\mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-4\\-1\\1\\3\end{pmatrix}\right\},\quad W^{\perp}$$

base: insieme di vettori linearmente indipendenti e generatori

dim: n° vettori della base

I tre vettori che individuano W sono generatori devo quindi capire se sono linearmente indipendenti

1° modo: Usare la def come negli esercizi precedenti

2° modo: Considero la matrice che ha come colonne i 3 vettori

e la riduco a scala

$$\begin{pmatrix}-1&1&-4\\0&1&-1\\0&-1&1\\-1&0&3\end{pmatrix}\xrightarrow{IV+I\to IV}\begin{pmatrix}-1&1&-4\\0&1&-1\\0&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{III+II\to III\\ IV-II\to IV}]{}\begin{pmatrix}-1&1&-4\\0&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

n° PIVOT = 2

Il rango della matrice iniziale = 2

Quindi ci sono 2 vettori linearmente indipendenti, sono i vettori che corrispondono alle colonne in cui si trovano i PIVOT.

Nel nostro caso i pivot si trovano nelle prime due colonne, dunque i primi due vettori

$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sono linearm. indipendenti

Quindi $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sono linearm. indipendenti e generatori.

Allora, formano una base di W.

$W = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ e quindi $\dim W = 2$

n° vettori della base

Es 9: Calcolare la dimensione dello spazio vettoriale

$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} x+2y+4z=0 \\ y+5z=0 \end{cases} \right\}$

eq.ne cartesiana di una retta quindi ci aspettiamo dim V = 1

Guardiamo il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x+2y+4z=0 \\ y+5z=0 \end{cases}$$

Chi è la matrice completa del sistema?

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

V è l'insieme delle soluzioni del sistema, qual è la dim? $n - r = 3 - 2 = 1$

Quindi abbiamo $\dim V = 1$

Determiniamo una base di V

- Si risolve il sistema

$\begin{cases} x+2y+4z=0 \\ y+5z=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-4z+10z \\ y=-5z \end{cases}$ $\begin{cases} x=6z \\ y=-5z \end{cases}$ z variabile libera

Allora

$V=\left\{\begin{pmatrix} 6z \\ -5z \\ z \end{pmatrix} \middle| z \in \mathbb{R}\right\}$ V è l'insieme delle sol del sistema

cioè il generico vettore di V è della forma

$\begin{pmatrix} 6z \\ -5z \\ z \end{pmatrix} = z \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ cioè tutti i vettori di V sono multipli di $\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$

raccolgo z

$a_1v_1+a_2v_2+\cdots+a_nv_n$ combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$

Se abbiamo un solo vettore, le combinazioni lineari a_1v_1, cioè i multipli di v_1

cioè $\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ genera V

perché tutti i vettori di V sono multipli di $\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Quindi una base di V è data da

$V = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$