Avevamo visto che per risolvere un sistema lineare possiamo sfruttare il metodo di Gauss.

Vediamone ora l'applicazione in qualche esempio:

Es 1: Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ -x_1 - x_2 = -3 \\ 2x_1 + x_2 = 5 \end{cases}$$

È un sistema di $m = 3$ eq. e $n = 2$ incognite.

La matrice completa è

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{III} - 2\text{I}]{\text{II} + \text{I}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 5 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{3}\text{II}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{III} - 5\text{II}]{} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matrice a scala con $r = 2$ PIVOT

Dalla seconda eq.ne $x_2 = 1$, dalla prima eq.ne $x_1 - 2x_2 = 0$ ricavo $x_1 = 2$.

Pertanto la soluzione del sistema $(x_1, x_2) = (2, 1)$

Es 2:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -1 \\ 3x_1 + 3x_3 = 3 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

È un sistema di $m = 3$ eq.ni e $n = 3$ incognite.

$$\xrightarrow[\text{III}+2\text{I}]{\text{II}-3\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[-\text{III}]{\frac{1}{3}\text{II}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{III}-\text{II}]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Matrice a scala con $r=3$ pivot

L'ultima eq.ne è $0=-1$ → sistema impossibile

Es 3:
$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 - x_2 = -2 \end{cases}$$

$m=3$ eq.ni

$n=3$ incognite

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{III}+\text{I}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III}+\text{II}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r=2$ pivot

troviamo il sistema
$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$
→ x_3 variabile libera

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - x_3 \\ x_2 = 1 + x_3 \end{cases}$$

↳ variabili vincolate

Il sistema è indeterminato (ammette quindi infinite soluzioni). Possiamo anche descrivere le soluzioni di questo sistema in forma parametrica:

$$\begin{cases} x_1 = 1-t \\ x_2 = 1+t \\ x_3 = t \end{cases} \quad \text{per } t \in \mathbb{R}$$

Abbiamo visto che un sistema lineare può avere 0, 1, infinite soluzioni. Sono questi i soli casi possibili?

Vediamo ora di riassumere quanto imparato in questi tre esempi:

Consideriamo un sistema lineare di m equazioni in n incognite, scriviamo la corrispondente matrice e portiamola in forma scala.

Due possibilità:

CASO 1) Se l'ultimo PIVOT si trova nell'ultima colonna della matrice a scala, l'eq.ne corrispondente alla riga di quest'ultimo PIVOT è $0 = \text{PIVOT}$ e quindi (un pivot $\neq 0$) l'eq.ne è IMPOSSIBILE. Ma allora tutto il sistema è impossibile.

CASO 2) l'ultimo PIVOT non si trova nell'ultima colonna. In questo caso avremo che $r \leq n$.

Se $r = n$ vuol dire che ci sarà un pivot in ognuna delle n colonne che corrispondono alle variabili.

Pertanto a partire dall'ultima eq.ne possiamo determinare il valore di ciascuna incognita.

Se invece $r < n$, in questo caso ci saranno delle incognite che corrispondono alle colonne dove non sono presenti dei pivot, e che quindi saranno le variabili libere.

Osservazione: Ci sono $n-r$ variabili libere in questo caso.

Grazie a questa descrizione possiamo concludere quanto segue:

Proposizione: UN sistema lineare di m equazioni in n incognite può avere 0, 1, infinite soluzioni.

Se c'è almeno una soluzione, il numero di variabili libere da cui dipendono le soluzioni è $n-r$, dove r è il numero di PIVOT che compaiono in una forma scala per la matrice completa del sistema.

Es 4) Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -8 \end{cases}$$

$m = 3$ eq.ni

$n = 3$ incognite

$$\begin{pmatrix} 1 & +2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & +1 & 5 \\ -1 & +2 & -4 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III} + \text{I}]{\text{II} - 4\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & +2 & -1 & 0 \\ 0 & -10 & 5 & 5 \\ 0 & 4 & -5 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{5}\text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -5 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III} + 2\text{II}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

→ una soluzione

Ricaviamo che $-3x_3 = -6 \rightarrow x_3 = 2$

$-2x_2 + x_3 = 1 \longrightarrow 2x_2 = -1 + x_3 \longrightarrow 2x_2 = 1 \rightarrow x_2 = \frac{1}{2}$

$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \rightarrow x_1 = -2x_2 + x_3 \longrightarrow x_1 = 1$

Così la soluzione è $(x_1, x_2, x_3) = (1, \frac{1}{2}, 2)$

DOM: E se non volessi fare sostituzioni successive? Posso fare in modo di continuare a lavorare sulla matrice facendo in modo che i pivot siano gli unici elementi non nulli sulla loro colonna, e che siano tutti pari a 1.

Es 5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{3}\mathrm{III}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\mathrm{I}+\mathrm{III}]{\mathrm{II}-\mathrm{III}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{I}+\mathrm{II}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{-\frac{1}{2}\mathrm{II}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

C'è scritto $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{1}{2} \\ x_3 = 2 \end{cases}$

Il metodo qui descritto si chiama di Gauss-Jordan

Es 5: Risolviamo il sistema che corrisponde alla matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6h^2-h+1 & 2h^2+6h-2 \\ 1 & 2 & h & h^2 \\ 0 & 0 & 2h^2-h & 2h-1 \end{pmatrix}$$ al variare di $h \in \mathbb{R}$

Portiamo la matrice in forma scala:

$$\xrightarrow{I \leftrightarrow II} \begin{pmatrix} 1 & 2 & h & h^2 \\ 2 & 5 & 6h^2-h+1 & 2h^2+6h-2 \\ 0 & 0 & 2h^2-h & 2h-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{II - 2I} \begin{pmatrix} 1 & 2 & h & h^2 \\ 0 & 1 & 6h^2-3h+1 & 6h-2 \\ 0 & 0 & h(2h-1) & 2h-1 \end{pmatrix}$$

Se $h(2h-1) \neq 0$, in questo caso ho 3 pivot, dei quali l'ultimo non sull'ultima colonna. Così ho un'unica soluzione, che determino per sostituzioni successive.

$h(2h-1)x_3 = 2h-1 \longrightarrow x_3 = \frac{1}{h}$

$x_2 + (6h^2-3h+1)x_3 = 6h-2 \longrightarrow x_2 = 1 - \frac{1}{h}$

$x_1 + 2x_2 + hx_3 = h^2 \rightarrow x_1 = h^2 - 3 + \frac{2}{h}$

Se $h=0$, posso scrivere esplicitamente l'ultima matrice trovata: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Questa matrice ha l'ultimo pivot nell'ultima colonna, pertanto il sistema è impossibile.

Se $h = \frac{1}{2}$, esplicito l'ultimo passaggio: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Ho quindi infinite soluzioni

$\hookrightarrow x_3$ variabile libera

$x_2 + x_3 = 1 \rightarrow x_2 = 1 - x_3$

$$x_1 + 2x_2 + \frac{1}{2}x_3 = \frac{1}{4} \longrightarrow x_1 = -\frac{7}{8} + \frac{3}{2}x_3$$

Porto questa soluzione in forma parametrica

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{7}{8} + \frac{3}{2}t \\ x_2 = 1 - t \qquad \text{per } t \in \mathbb{R} \\ x_3 = t \end{cases}$$