

Si svolgano 3 esercizi a scelta sui 4 proposti.

Il punteggio finale sarà la somma dei punti dei 3 esercizi riusciti meglio.

Problema 1.1 (12 punti). Una pulce si muove sugli interi $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ partendo da 0 e saltando ogni volta a sinistra o a destra di 1 con probabilità $\frac{1}{2}$ e in modo indipendente dai salti precedenti. Siano X_1, X_2, \dots le vv.aa. che rappresentano le ampiezze dei singoli salti ($X_i = \pm 1$ con prob $1/2$) e $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ la posizione della pulce dopo n salti.

(7 punti) Quanto valgono media e deviazione standard di X_i ? Quanto valgono quelle di S_n ? Quanto vale approssimativamente la probabilità che dopo 100 salti la pulce si trovi nell'intervallo $[-10; 10]$?

(2 punti) Dopo quanti salti diventa maggiore o uguale a $1/2$ la probabilità che la pulce si trovi a distanza maggiore di 100 dall'origine?

(3 punti) Si calcoli esattamente la probabilità che $S_{12} = 0$ e la si confronti con l'approssimazione Gaussiana della stessa.

Problema 1.2 (12 punti). Sia X una variabile aleatoria continua con funzione di densità

$$f(t) = c e^{-|t|}$$

(7 punti) Si determinino il valore della costante c , la media, la varianza, la moda e la mediana di X . Si trovi la corrispondente funzione di ripartizione F e si traccino i grafici approssimativi di f e di F .

(2 punti) Si generalizzi la formula della densità f inserendo due parametri μ e σ in modo che al variare di essi la distribuzione abbia media μ e deviazione standard σ . (Analogamente a quello che succede ad esempio per la legge Gaussiana.)

(3 punti) Sia Y una variabile aleatoria indipendente da X e con la stessa distribuzione. Si determini la pdf di $X + Y$ e se ne tracci il grafico approssimativo.

Problema 1.3 (11 punti). I video delle prime 10 ore di lezione di questo insegnamento hanno avuto i seguenti *bitrate* (in kB/s):

Prima settimana	57.2	54.4	54.9	57.6	61.5
Seconda settimana	60.5	60.9	60.6	60.3	63.3

(7 punti) Mettendo insieme tutti i dati, e supponendo che provengano da una unica distribuzione Gaussiana, se ne stimino media e deviazione standard al 95% di confidenza.

(2 punti) Si dia un limite superiore L alla media s della dimensione complessiva di tutti i video a fine corso, ipotizzando una durata totale di 56 ore, tutte di 45 minuti. (È richiesto un intervallo di confidenza unilaterale destro $s \leq L$ con il 90% di confidenza.)

(2 punti) Ipotizzando ora che i dati delle due settimane possano avere distribuzioni Gaussiane di media diversa, si verifichi tramite calcolo del p -value (p -dei-dati) se è plausibile che le medie siano in effetti uguali.

Problema 1.4 (12 punti). L'elettrocardiogramma mostra una particolare oscillazione detta complesso QRS che ha nella popolazione sana una durata tipica con media 85 ms e deviazione standard 8 ms. Un campione di 44 persone affette da malattia coronarica riporta per questo valore media campionaria 89.8 ms e deviazione standard campionaria 10.2 ms.

(7 punti) Si verifichi al 5% di significatività se vi sia evidenza che la media della durata tipica sia per questo gruppo diversa da quella della popolazione sana. Quanto vale il p -value di questo test?

(3 punti) Si verifichi tramite calcolo del p -value se vi sia evidenza che la deviazione standard della durata tipica di questo gruppo sia *maggiore* di quella della popolazione sana.

(2 punti) Si determini la potenza del test del punto precedente, per un valore di deviazione standard *vero* di 10.2 ms ad un livello di significatività del 10%.