

*Si svolgano 3 esercizi a scelta sui 4 proposti.*

*Il punteggio finale sarà la somma dei punti dei 3 esercizi riusciti meglio.*

**Problema 4.1** (12 punti). Uno chef che lavora ad un ricevimento per 225 persone, dispone degli ingredienti per preparare 250 piatti di una pietanza un po' difficile. Ciascun piatto ha una probabilità di  $1/15$  di non riuscire bene e dover essere buttato.

**(6 punti)** Determinare approssimativamente la probabilità che i piatti riusciti siano almeno 225.

**(3 punti)** Determinare la minima quantità di ingredienti che sarebbe necessaria per avere almeno il 95% di probabilità di ottenere almeno 250 piatti riusciti.

**(3 punti)** Consideriamo di nuovo il primo quesito, con ingredienti per 250 piatti. Al primo chef se ne affianca un secondo, che lavora alla stessa velocità, ma i cui piatti hanno una probabilità di  $1/10$  di non riuscire bene. Determinare il numero minimo di piatti riusciti che si è sicuri di ottenere al 90% di probabilità.

**Problema 4.2** (12 punti). Sia  $X$  una variabile aleatoria continua con funzione di ripartizione

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 2t^2 - t^4 & 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & t > 1 \end{cases}$$

**(7 punti)** Si ricavi la formula della densità di probabilità  $f_X$  e se ne tracci il grafico. Si calcolino  $P(X > 1/2)$ , media e moda di  $X$ .

**(2 punti)** Sia  $Y = X^2$ . Si determinino la funzione di ripartizione e la media di  $Y$ . Si determini quindi la deviazione standard di  $X$ .

**(3 punti)** Si determinino le mediane di  $Y$  e di  $X$ . Detta  $\tilde{X}$  una variabile aleatoria con la stessa legge di  $X$  e da essa indipendente, si determini la mediana di  $Z := \min(X, \tilde{X})$ .

**Problema 4.3** (12 punti). Il tempo di vita di un tipo di lampada molto potente (di quelle da proiettore) è una variabile aleatoria esponenziale di media 200 ore. Dopo una modifica al processo produttivo, si testa un campione di 20 lampade trovando un tempo di vita medio di 252 ore.

**(7 punti)** Questi dati sono sufficienti a dimostrare che il nuovo processo produttivo ottiene

lampade di durata maggiore? (Si calcoli in  $p$ -value.)

**(2 punti)** Si stimi il tempo di vita medio delle lampade del nuovo processo produttivo al 98% di confidenza.

**(3 punti)** Se la vita media fosse 250 ore, quanto numeroso dovrebbe essere preso un nuovo campione perché ci fosse l'80% di probabilità di riuscire a dimostrare al 5% di significatività che le nuove lampade hanno durata maggiore di 200 ore? (*Suggerimento:* Si può trovare  $n$  per tentativi.)

**Problema 4.4** (11 punti). In un'azienda che produce trafilati metallici viene attivata una nuova linea di produzione che dovrebbe avere caratteristiche non inferiori alla precedente in termini di precisione sullo spessore dei pezzi prodotti. La linea vecchia produce trafilati che hanno (in una unità di misura opportuna) spessori con distribuzione normale di media 1013 e deviazione standard 8 (non si tratta di stime campionarie, ma di valori autentici). La linea nuova viene attivata e calibrata, e viene preso un campione di 15 trafilati che vengono misurati accuratamente, trovando i valori seguenti:

1014	1004	1014	1003	1018
1004	1009	1009	1012	1013
1008	1017	1019	1016	1016

**(6 punti)** Si verifichi al 5% di significatività se è plausibile che la nuova linea sia stata calibrata perfettamente, ovvero se è possibile che lo spessore medio sia 1013.

**(3 punti)** Si verifichi al 10% di significatività se vi sia evidenza che la deviazione standard sia minore di quella della linea vecchia. Si risponda nuovamente supponendo che la nuova linea sia perfettamente calibrata, ovvero che produca trafilati di spessore medio 1013.

**(2 punti)** I trafilati con spessore minore di 1000 sono difettosi e andrebbero evitati. Nell'ipotesi che la nuova linea sia perfettamente calibrata, si verifichi se vi sia evidenza che la frazione di trafilati difettosi sia inferiore al 5%. (Calcolando il  $p$ -value.)