Es 1: Sia $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in R^3$

Determinare $v^\perp$ cioè l'insieme di tutti i vettori di R^3 ortogonali a v.

$$v^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 \;\middle|\; \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\}$$

Calcoliamo

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = x \cdot 1 + y \cdot 2 + z \cdot 3 = x + 2y + 3z$$

$\iff \quad x = -2y - 3z$

Allora

$$v^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 \;\middle|\; x = -2y - 3z \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} -2y-3z \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

Per esempio,

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin v^\perp, \quad \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in v^\perp, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in v^\perp$$

Es 2: Siano $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

1) Scrivere un vettore ortogonale a u e v

2) Determinare tutti i vettori ortogonali a u e v.

1) Dati due vettori $v, w \in \mathbb{R}^3$, il prodotto vettoriale di u e v $(u \times v = u \wedge v)$ è un vettore ortogonale a u e v cioè

$u \times v \perp u$ e $u \times v \perp v$

$$u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \qquad u \times v = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ -x_1 y_3 + x_3 y_1 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

OSS: Quando faremo i determinanti delle matrici avremo un modo per ricordare questa definizione

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$u \times v = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 - (-1) \cdot (-1) \\ -1 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) \\ 1 \cdot (-1) - 2 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Calcolare $S^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 ,\ \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\}$

Calcoliamo

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = x + 2y - z = 0$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = -x - y + 3z = 0$$

Abbiamo un sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -x - y + 3z = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = -2y + z \\ 2y - z - y + 3z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2y + z \\ y = -2z \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 5z \\ y = -2z \end{cases}$$

Per caso: Risolvere con matrice

$$\Rightarrow S^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x = 5z,\ y = -2z \right\}$$

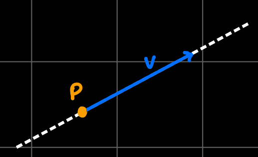
il vettore trovato nel punto 1)

Rette e PIANI

Es 3: Scrivere un'eq.ne parametrica e una cartesiana della retta passante per i punti $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

retta — parametrica $X = P + t \cdot v$ → vettore direzione $t \in \mathbb{R}$

P ↓ punto di passaggio



retta — cartesiana

$$\begin{cases} \underbrace{ax + by + cz + d = 0}_{} \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

eq.ne cartesiana di un piano

eq.ne cartesiana di un piano

retta come intersezione di due piani

Determino un'eq.ne parametrica

$$X = A + t(A - B)$$

il vettore direttore

$$A - B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = X = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

cioè
$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$$ eq.ne parametrica

Ricaviamo un'eq.ne cartesiana:

Dalla seconda eq.ne $t = -y$

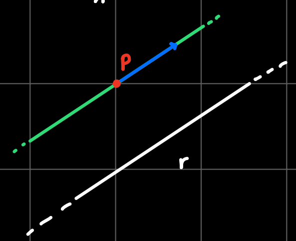
Allora sostituisco nelle altre due eq.ni:

$$\begin{cases} x = 3 - y \\ z = 1 + 3y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ -3y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Es 4: Scrivere un eq.ne parametrica della retta s // a

$$r : \begin{cases} x = \overset{Q}{-1} \overset{t}{+ 2t} \\ y = 1 - 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

e passante per $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$



La retta r è scritta in forma parametrica

$$X = Q + t \cdot v \quad \text{con} \quad Q = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Quindi la retta s che cerchiamo deve passare per il punto $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e deve avere direzione un vettore multiplo di v

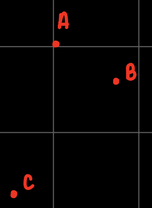
Quindi un'eq. parametrica di s è:

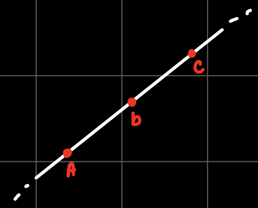
$$X = P + t \cdot v$$

cioè:
$$\begin{cases} x = \overset{P}{2} \overset{t}{+ 2t} \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

Quanti piani passano per 3 punti?

· Punti Allineati: Siano A, b, C tre punti:





A,B,C si dicono allineati se B-A è multiplo di C-A (o qualunque altra combinazione delle loro differenze)

1) Se 3 punti sono allineati per essi passa:

- 1 sola retta

- ∞ piani

2) Se 3 punti NON sono allineati per essi:

- non passa nessuna retta

- passa un solo piano

Es 5: Determinare il piano π passante per i punti:

$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Vediamo se i punti non sono allineati.

Ci basta vedere che B-A e C-A non sono multipli tra loro

$B-A = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\leftarrow$ non sono multipli tra loro

$C-A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ A, B, C non sono allineati

Dunque esiste un solo piano passante per A,B,C.

Abbiamo 2 metodi:

1 metodo: (eq.ne cartesiana del piano)

Il piano π ha eq.ne cartesiana della forma

$$ax + by + cz + d = 0$$

$\Rightarrow$ Impongo il passaggio per i tre punti A, B, C

per A: $\begin{cases} a + c + d = 0 \end{cases}$

per B: $\begin{cases} 2b + 4c + d = 0 \\ 2a + b + c + d = 0 \end{cases}$ per C:

Sistema lineare omogeneo nelle incognite a, b, c, d

$\Rightarrow \begin{cases} a = -c - d \\ 2b + 4c + d = 0 \\ -2c - 2d + b + c + d = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a = -c - d \\ 2c + 2d + 4c + d = 0 \\ b = c + d \end{cases}$ $\begin{cases} a = -c - d \\ 6c + 3d = 0 \\ b = c + d \end{cases}$ $\begin{cases} a = c \\ d = -2c \\ b = -c \end{cases}$

c variabile libera

a, b, d sono dipendenti

Per esempio $c = 1$ $\rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ d = -2 \end{cases}$

$\Rightarrow$ l'eq.ne $ax + by + cz + d = 0$

diventa $x - y + z - 2 = 0$

2° metodo: (eq.ne parametrica del piano)

Determinare un'eq.ne parametrica

punto di passaggio

$X = A + tv + sw$

direzioni

Nel nostro caso

$X = A + t(B-A) + s(C-A)$

$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$

cioè: $\begin{cases} x = 1 - t + s \\ y = +2t + s \\ z = 1 + 3t \end{cases}$ eq.ne parametrica del piano π

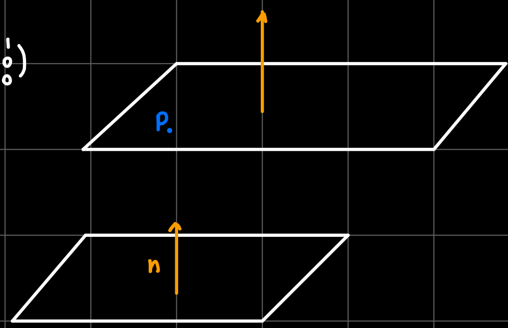
Es extra: Passiamo dall'eq.ne parametrica trovata a un'eq.ne cartesiana $(ax + by + cz + d = 0)$

Ricaviamo s dalla prima eq.ne

$\begin{cases} s = x - 1 + t \\ y = 2t + x - 1 + t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$ $\begin{cases} s = x - 1 + t \\ y = 3t + x - 1 \\ z = 1 + 3t \end{cases}$ $\begin{cases} s = x - 1 + t \\ 3t = y - x + 1 \\ z = 1 + 3t \end{cases}$ $\begin{cases} s = x - 1 + t \\ 3t = y - x + 1 \\ z = 1 + y - x + 1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Un'eq.ne cartesiana del piano π è $-x + y - z + 2 = 0$

Es Determinare il piano ortogonale al vettore $\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$ e passante per il punto $P = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$



è della forma $ax + by + cz + d = 0$

dove a, b, c sono le componenti del vettore normale al piano $n = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$

$n = \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ $\qquad ax+by+cz+d=0$

Allora l'eq.ne diventa $2x+3y-z+d=0$

passa per P = cioè le coordinate di P devono soddisfare l'eq.ne

Impongo il passaggio per il punto $P = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

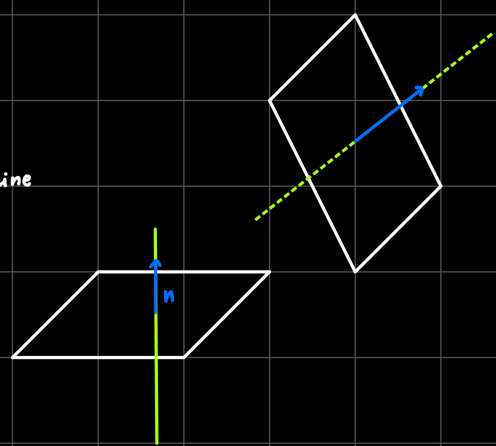
$\Rightarrow 2 + d = 0 \rightarrow d = -2$

Allora il piano ha eq.ne

$$2x+3y-z-2=0$$

Es: Si consideri la retta r di eq.ne

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}}_{\text{punto passaggio}} + t \underbrace{\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}}_{\text{direzione}}$$



Determinare l'eq.ne del piano ⊥ a r e passante per l'origine

Posso prendere come vettore normale al piano $n = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$

il vettore direzione della retta.

→ l'eq.ne del piano diventa

$$3x+2y+z+d=0$$

Imponiamo il passaggio per l'origine $O = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

ma allora $d = 0$

Allora un' eq.ne cartesiana del piano è

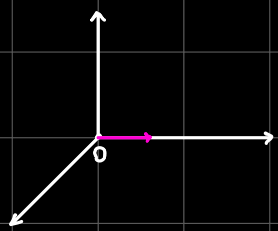
$$3x-2y+z=0$$

Es : Determinare la posizione reciproca dell'asse x con la retta di eq.ne

$$r: \begin{cases} x = -1-2t \\ y = -t \\ z = 4t \end{cases}$$

l'asse x ha eq.ne cartesiana $\begin{cases} y=0 \ (*) \\ z=0 \end{cases}$ PIANO xz / PIANO xy

e parametrica



$$X=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

(*) l'eq.ne $y=0$ è l'eq.ne cartesiana di un piano $\quad ax+by+cz+d=0$

$$0\cdot x+1\cdot y+0\cdot z+0=0$$

Il vettore normale al piano $y=0$

è $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

Il piano $y=0$ è il piano xz.

L'asse x ha eq.ne parametrica: $X=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

La retta r ha eq.ne : $X=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\-1\\4\end{pmatrix}$

Quindi il vettore direzione dell'asse x è $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ e il vettore direzione della retta r $\begin{pmatrix}-2\\-1\\4\end{pmatrix}$

Q_1: le due rette sono parallele?

No, perché i due vettori direzione non sono multipli tra loro.

Q_2: le due rette sono ortogonali?

Devo capire se i vettori direzione sono ortogonali:

$$\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\-1\\4\end{pmatrix}\right\rangle = -2 \quad \neq 0$$

Vediamo se le due rette sono incidenti.

Per farlo intersechiamo le due rette cioè le mettiamo a sistema.

Scriviamo l'eq.ne della retta r in forma cartesiana

$$r: \begin{cases} x=-1-2t \\ y=-t \\ z=4t \end{cases}$$

Dalla seconda $t = -y$

e sostituisco:

$$\begin{cases} x = -1 + 2y \\ z = -4y \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ 4y + z = 0 \end{cases}$$ eq.ne cartesiana retta r

Dobbiamo intersecare la retta r con l'asse x

$$\begin{array}{l} r \\ \\ \\ \text{asse } x \end{array} \begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ 4y + z = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Allora la retta r interseca l'asse x nel punto $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ → INCIDENTI