Docente, F. Morandin	2 settembre 2021
Laurea Triennale in Matematica, Laurea Triennale in Informatica	
Elementi di Probabilità/Introduzione alla Statistica	Scritto 4

Si svolgano 3 esercizi a scelta sui 4 proposti.
Il punteggio finale sarà la somma dei punti dei 3 esercizi riusciti meglio.

Problema 4.1 (11 punti). Sia $n = 256$ e siano $X_1, \dots, X_n$ variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite, non negative, di media 1 e varianza 2. Sia $Y = \sqrt{X_1 + \cdots + X_n}$.

(6 punti) Si calcoli approssimativamente quanto vale $P(15 \leq Y \leq 17)$.

(3 punti) Si determini $r > 0$ tale che

$$P(|Y - 16| \leq r) \approx 95\%$$

(2 punti) Siano $Z_1, \dots, Z_n$ variabili aleatorie Gaussiane di media 0 e varianza σ^2 e denotiamo con Z il vettore aleatorio $(Z_1, \dots, Z_n)$. Determinare a e b reali positivi tali che

$$P(a \leq |Z| \leq b) \approx 95\%,$$

dove $|Z|$ denota il modulo del vettore Z.

Problema 4.2 (12 punti). Sia X una variabile aleatoria continua con funzione di ripartizione

$$F_X(t) = P(X \leq t) = \begin{cases} 1 - e^{-t^2} & t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(7 punti) Si determini f_X (la funzione di densità di X), e si traccino i grafici di f_X e F_X. Si calcolino moda, mediana e media di X.

(2 punti) Sia $Y = X^2$. Si determini f_Y (la funzione di densità di Y), e se ne tracci il grafico. Si calcolino moda, mediana e media di Y e quindi la varianza di X.

(3 punti) Trovare una funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che, applicandola ad una variabile aleatoria uniforme $U \sim \text{unif}(0, 1)$, si ottenga una variabile aleatoria $Z = g(U)$ con la stessa legge di X.

Problema 4.3 (12 punti). Un gruppo di pesi di una rete neurale artificiale è costituito da 256 numeri reali di media campionaria -0.09955 e deviazione standard campionaria 0.4878. Si suppone che questi pesi provengano da una popolazione Gaussiana di media μ e deviazione standard σ incognite.

(7 punti) Si verifichi al 5% di significatività, tramite il calcolo del p-value, se è plausibile che la media μ sia in effetti nulla.

(2 punti) Per lo stesso test del punto precedente, determinare la regione di accettazione relativa alla statistica

$$W = \frac{\overline{X}^2}{S_X^2}$$

dove $\overline{X}$ e S_X rappresentano come al solito la media e la deviazione standard campionarie.

(3 punti) Si determini approssimativamente la potenza del test del primo punto, per $\frac{\mu}{\sigma} = 0.1$.

Problema 4.4 (12 punti). Un esperimento prevede di misurare 8 volte con un termoscanner la temperatura di una stessa persona, in un breve arco di tempo. Si trovano i seguenti valori, in gradi Celsius,

36.46	36.34	36.44	36.29
36.46	36.31	36.13	36.35

Si ipotizza che le misurazioni abbiano media pari alla temperatura vera della persona e deviazione standard σ che è una misura della precisione del termoscanner.

(6 punti) Si stimi σ con un intervallo di confidenza unilaterale sinistro (ovvero del tipo $\sigma \leq U$) con l'80% di confidenza e anche con un intervallo di confidenza bilaterale al 95%.

(3 punti) Si verifichi tramite il calcolo del p-value se è plausibile che σ sia pari a 0.20° C.

(3 punti) Supponiamo ora che per lo stesso strumento siano disponibili anche 12 misurazioni della temperatura di una seconda persona, con media campionaria 36.025° C e deviazione standard campionaria 0.1745° C. Ripetere il primo punto usando tutti i dati a disposizione.