Consideriamo 2 sottospazi S, T di R^n.

È vero che $S \cap T$ è un sottospazio? Ed è vero $S \cup T$ è un sottospazio?

Iniziamo con $S \cap T$: sempre $S \cap T$ è un sottospazio!!

Lemma: Siano $S, T \subseteq \mathbb{R}^n$ due sottospazi. Allora $S \cap T$ è un sottospazio.

Dim:

★ $0 \in S \cap T$.

Infatti: $0 \in S$ perché S è un sottospazio

$0 \in T$ perché T è un sottospazio

così $0 \in S \cap T$

★★ se $v, w \in S \cap T$, allora $v + w \in S \cap T$.

Infatti: so che $v \in S$, $w \in S$, quindi $v + w \in S$ perché S è sottospazio. Analogamente $v \in T$, $w \in T$, quindi $v + w \in T$ perché T è sottospazio

Ma allora $v + w \in S \cap T$

★★★ Se $v \in S \cap T$ e $c \in \mathbb{R}$ allora $cv \in S \cap T$.

Infatti: $v \in S$ e quindi $cv \in S$ perché S è sottospazio, inoltre $v \in T$ e quindi $cv \in T$.

Ma allora $cv \in S \cap T$.

Es: Siano $S, T \subseteq \mathbb{R}^3$ i seguenti sottospazi:

S definito da $2x - y + 3z = 0$, cioè $S = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}\right)$.

T è $\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}\right) = \mathcal{L}\underbrace{\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right)}_{\text{base per } T}$

Determiniamo dimensione e una base per $S \cap T$.

Otteniamo per prima cosa un'eq.ne per T. Sappiamo che $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in T \iff \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ è lin. dip. rispetto a $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$.

Ciò significa che $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ non è una base per R^3. Così un'eq.ne per T è data da

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & 1 & y \\ 3 & 2 & z \end{pmatrix} = 0 \longrightarrow \text{[Laplace sulla PRIMA RIGA]}$$

$$\rightarrow 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & y \\ 2 & z \end{pmatrix} - 0 \det \begin{pmatrix} 2 & y \\ 3 & z \end{pmatrix} + x \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = z - 2y + (2 \cdot 2 - 3 \cdot 1)x = x - 2y + z = 0$$

Di conseguenza, $S \cap T$ è descritto da

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - y + 3z \end{cases}$$

Passiamo ora alla matrice rappresentativa e risolviamo:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{II - 2I \to II} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

così ho che $\begin{cases} x = 2y - z = 5y \\ y = -3y \end{cases}$

Ma allora $S \cap T = \left\{ \begin{pmatrix} 5y \\ y \\ -3y \end{pmatrix} \middle| \, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ y \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \middle| \, y \in \mathbb{R} \right\} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}\right)$

$\downarrow$

$\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$ è una base per $S \cap T$ e così

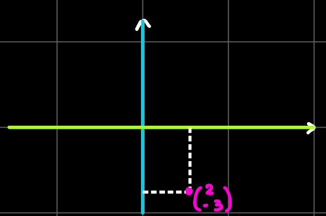
$\dim(S \cap T) = 1$.

Passiamo ora $S \cup T$: questo non è detto che sia sempre un sottospazio, dipende da S e T. Vediamo 2 esempi:

Es 1: Considero $S = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \subseteq \mathbb{R}^3$ e $T = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \subseteq \mathbb{R}^3$. Allora $S \cup T$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ (si osserva in questo caso che $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in S$, così $T \subseteq S$ e pertanto $T \cup S = S$...)

Es 2: Consideriamo $S = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \subseteq \mathbb{R}^2$ e $T = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \subseteq \mathbb{R}^2$. Allora $S \cap T$ non è sottospazio di $\mathbb{R}^2$!

Infatti: $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in S$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \in T$; $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \notin S \cup T$



Questo ci dice che dobbiamo stare attenti quando si ha a che fare con l'unione di sottospazi!

Lemma: Siano $V, W \in \mathbb{R}^n$ due sottospazi. Se $V \subseteq W$ allora $\dim(V) \leq \dim(W)$, e inoltre $\dim(V) = \dim(W) \iff V = W$

Dim: Il fatto che $V \subseteq W$ allora $\dim(V) \leq \dim(W)$ è una conseguenza del teorema della base incompleta.

Infatti: se poniamo $d = \dim(V)$ e $d' = \dim(W)$, posso considerare una base $\{v_1, \dots, v_d\}$ per V e una base $\{w_1, \dots, w_{d'}\}$ per W. Osservo che $v_1, \dots, v_d \in W$ e sono linearmente ind. in W. Pertanto $d \leq d'$ cioè

$\dim(V) \leq \dim(W)$

Se $V = W$, allora è ovvio che $\dim(V) = \dim(W)$.

Viceversa $V \subseteq W$ e $\dim(V) = \dim(W)$, ragionando come sopra, il teorema della base incompleta mi dice che $\{v_1, \dots, v_d\}$ sono già una base per W. Pertanto:

$$V = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_d) = W$$

PROPOSIZIONE: Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n. Siano $v_1, \dots, v_n \in V$. Sono equivalenti i seguenti fatti:

i) $v_1, \dots, v_n$ è una base per V

ii) $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti

iii) $v_1, \dots, v_n$ generano V

Dim:

$(i \to ii)$ e $(i \to iii)$ discendono dalla definizione di base

$(ii \to i)$ $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_n) \subseteq V$. Inoltre $\{v_1, \dots, v_n\}$ sono una base per $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$ (sono lin. indip. per ipotesi). Così:

$\dim(\mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)) = n = \dim(V)$.

Così $V = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$ e $\{v_1, \dots, v_n\}$ sono base per V.

$iii \to ii)$ Sappiamo che $v_1, \dots, v_n$ generano V, voglio mostrare che sono linearmente indip.

Se non lo fosse, applicando il lemma degli scarti successivi a $v_1, \dots, v_n$ otterrei una base per V con meno di n elementi. Ma ciò è assurdo, e così $v_1, \dots, v_n$ sono lin. indipendenti

OPERAZIONI CON MATRICI

Fin'ora abbiamo trattato le matrici come uno "strumento tecnico" per la risoluzione dei sistemi lineari. In realtà l'insieme delle matrici ha una struttura ben più ricca!

Denotiamo l'insieme delle matrici di taglia $m \times n$ e coefficienti reali con $Mat_{m,n}(\mathbb{R})$.

Date due matrici $A, B \in Mat_{m,n}(\mathbb{R})$ della stessa taglia, posso scrivere:

$A = (a_{ij})$ dove $i = 1, \dots, m$ è l'indice di riga
$j = 1, \dots, n$ è l'indice di colonna

$B = (b_{ij})$

e questo mi permette di definire la matrice $A+B$ nel seguente modo:

$C = A + B = (c_{ij})$ dove $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

cioè: la matrice $A+B$ si ottiene facendo la somma componente per componente di A e B.

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 2+1 & 3-1 \\ -1+3 & -2-2 & -3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

Data una matrice $A = (a_{ij}) \in Mat_{m,n}(\mathbb{R})$ e dato $c \in \mathbb{R}$, possiamo definire la matrice cA ancora componente per componente:

$B = c \cdot A = (b_{ij})$ dove $b_{ij} = c \cdot a_{ij}$

Es: Se $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ e $c = -2$, allora $c \cdot A = -2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ -2 & -6 & 10 \end{pmatrix}$

Dom: E per quanto riguarda il prodotto, è possibile definire un prodotto tra matrici?

OSS/IDEA: Date due matrici $A, B \in Mat_{m,n}(\mathbb{R})$, posso definire $A \cdot B$ come la matrice $m \times n$ che si ottiene facendo i prodotti componente per componente... Questo però porta ad un prodotto con brutte proprietà.

Di conseguenza, il "vero" prodotto tra matrici è definito in un altro modo... Per definirlo dobbiamo prima di prodotto di una riga per una colonna.

Consideriamo un vettore riga $(x_1 \; x_2 \; \cdots \; x_n)$ e un vettore colonna $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Definisco il prodotto riga per colonna come segue:

$$(x_1 \; x_2 \; \cdots \; x_n) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

In questo modo abbiamo definito un'operazione $Mat_{1,n}(\mathbb{R}) \times Mat_{n,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$.

OSS: C'è qualche legame tra il prodotto riga per colonna e il prodotto scalare di due vettori in $\mathbb{R}^n$? In effetti:

- Dati $v \in Mat_{1,n}(\mathbb{R})$ e $w \in Mat_{n,1}(\mathbb{R})$, allora $v^T \in Mat_{n,1}(\mathbb{R})$ e si ha che $v \cdot w = \langle v^T, w \rangle$.

· Viceversa, dati $v, w \in \mathbb{R}^n = Mat_{n,1}(\mathbb{R})$ allora $\langle v, w \rangle = v^T \cdot w$

Questo prodotto riga per colonna ci aiuta a definire il prodotto di due matrici: date due matrici A e B, il loro prodotto $A \cdot B$ è quella matrice che ha nel posto (i, j) (all'incrocio tra la riga e la colonna j) il prodotto riga per colonna tra la riga i di A e la colonna di j di B.

OSS !!

· Per poterlo fare, bisogna che il numero di colonne di A sia uguale al numero di colonne di B.

· Il risultato avrà tante righe quante A e tante colonne quante B.

· In definitiva, il prodotto riga per colonna che abbiamo definito è di questo tipo: $Mat_{m,n}(\mathbb{R}) \times Mat_{n,p}(\mathbb{R}) \longrightarrow Mat_{m,p}(\mathbb{R})$

Questo è il prodotto più naturale che si può definire tra due matrici.

ES: Consideriamo le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4$ $\qquad$ $1 \cdot (3) - 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & -11 \end{pmatrix}$$

$3 \cdot (-3) + 0 \cdot (-1) - 1 \cdot 2$

$3 \cdot 2 + 0 \cdot 1 - 1 \cdot 4$

!! Questo prodotto è un po' strano...

· Date due matrici A e B, per le quali è definito il prodotto AB, non è detto che sia definito il prodotto BA

ES: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ è definito $A \cdot B$ (e sarà una matrice 2×3) non è definito $B \cdot A$!

Quando $A \cdot B$ e $B \cdot A$ sono entrambi definiti? Se A è $m \times n$ e B è $n \times p$ (di modo che AB sia definito) bisogna che $p = m$, cioè che A sia $m \times n$, B sia $n \times m$.

· Supponiamo che $A \in Mat_{m,n}(\mathbb{R})$ e $B \in Mat_{n,m}(\mathbb{R})$. Confronto allora AB e BA tra di loro... in realtà anche questo non si può fare sempre...

ES: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. Abbiamo visto che $A \cdot B = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & -11 \end{pmatrix}$. D'altra parte $B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -2 & 7 \\ -2 & -1 & 3 \\ 10 & -4 & 6 \end{pmatrix}$

$A \cdot B$ è 2×2, BA 3×3 quindi non le posso confrontare? Per confrontarle bisogna che $n = m$, cioè che le matrici A e B siano entrambe quadrate di ordine n.

· Supponiamo allora che $A, B \in Mat_{n,n}(\mathbb{R})$, di modo che lo possa confrontare AB e BA...

Ad esempio:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Allora $AB = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$ e quindi $AB \neq BA$.

Vale in realtà anche qualche altro fatto strano...

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

In questo caso $AB = BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$