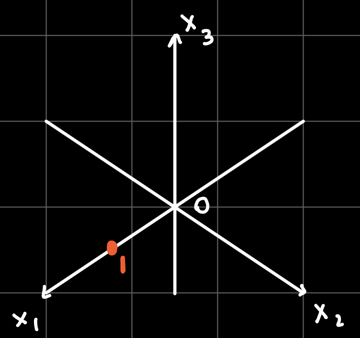
Vogliamo parlare di geometria nello spazio.

Per descrivere i punti nello spazio occorre fissare un sistema di riferimento:

1) scegliere un punto, che chiamiamo origine, e che denoteremo con O

2) Scegliere tre rette, passanti per O e che siano a due a due ortogonali, gli assi cartesiani;

3) Su ciascun asse scegliamo un' orientazione e un' unità di misura;



Un sistema di riferimento ci permette di associare ad ogni punto dello spazio una terna ordinata di numeri.

Dato un punto P, proiettiamo ortogonalmente sul piano sul piano x_1x_2 trovando il punto Q.

Il punto Q avrà due cartesiane (x_1, x_2) come punto del piano coordinato x_1x_2. La terza coordinata x_3 (QUOTA) è la lunghezza (ordinata) del segmento QP.

Grazie a questa procedura possiamo associare ad ogni punto le sue coordinate (x_1, x_2, x_3).

E viceversa, ogni terna di numeri reali è la terna delle coordinate di un unico punto dello spazio.

Quanto fatto ci porta ad identificare lo spazio con l'insieme $R^3 = R \times R \times R = \{(a,b,c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$

Def: PRODOTTO CARTESIANO di due insiemi: Dati due insiemi A, B, il loro prodotto cartesiano è l'insieme

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, \ b \in B\}$$

Posso anche fare il prodotto di A con se stesso: $A \times A = A^2$, $A \times A \times A = A^3 \dots$

Gli elementi dello spazio detti punti, il punto $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ si dice che ha coordinate x_1, x_2, x_3.

Che cosa posso fare con i punti? I punti possono essere "traslati" e l'ente geometrico capace di "muovere" un punto è detto VETTORE.

Un vettore dovrà quindi essere descritto da una successione ordinata di tre numeri (quanto lungo x_1, quanto lungo x_2, ...) e pertanto un vettore è

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Osservazione: Sembra che $\mathbb{R}^3$ sia sia l'insieme dei punti sia l'insieme dei vettori... Posso distinguere questi due ruoli?

Il ruolo di punto è un ruolo passivo: un punto può essere solo spostato, e due punti non hanno in genere nessuna relazione tra di loro.

Il ruolo dei vettori è un ruolo attivo: due vettori possono combinarsi tra di loro per darci la composizione delle due traslazioni.

OPERAZIONI CON VETTORI

1) Siano $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ due vettori di R^3.

La loro somma è il vettore di R^3 così definito:

$$v + w = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$$

Analogamente posso definire una differenza di vettori di $\mathbb{R}^3$

2) Dati $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ e $c \in \mathbb{R}$ un numero (scalare). Il multiplo $c \cdot v$ è il vettore di R^3 così definito:

$$c \cdot v = c \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cdot x_1 \\ c \cdot x_2 \\ c \cdot x_3 \end{pmatrix}$$

Per come sono state definite, queste due operazioni di somma e di prodotto con uno scalare vengono dette operazioni componente per componente.

I tre numeri di cui si compone un vettore sono dette le sue componenti. Così il vettore $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ si dice che ha componenti x_1, x_2, x_3.

DOM: Perché una volta parlo di componenti e uno di coordinate?

le componenti di un vettore sono una sua proprietà assoluta: sono ciò che caratterizza un vettore e che lo distingue dagli altri.

Le coordinate di un punto, invece, sono sempre coordinate relative ad un sistema di riferimento

Abbiamo adoperato per definire queste operazioni dei simboli $+$ e $\cdot$ che sono già impegnati a significare altre operazioni.

Quelle che abbiamo definito sono due operazioni di cui:

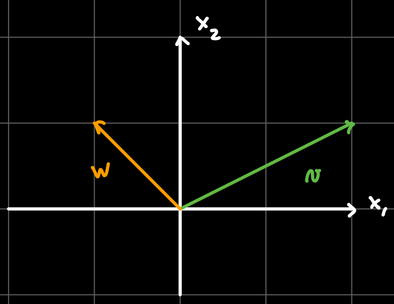
I) la somma ha per argomento due vettori e restituisce un vettore;

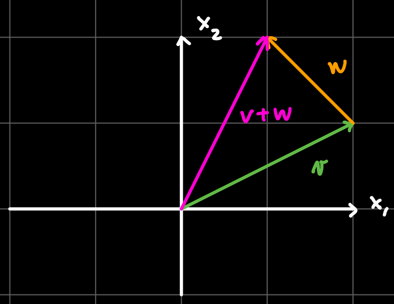
II) il prodotto con lo scalare ha per argomento uno scalare e un vettore e restituisce un vettore.

Come posso interpretare queste operazioni?

Per quanto riguarda la somma, stiamo facendo in tre dimensioni l'usuale metodo punta-coda per la somma di vettori nel piano:

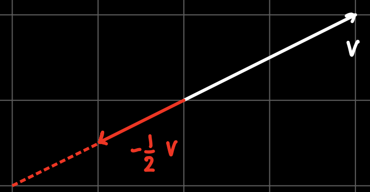
Se nel piano ho i vettori $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; posso fare così la loro somma:





Si sposta il secondo vettore parallelamente a se stesso, in modo che sia spiccato dalla punta del primo. La congiungente origine con la punta del secondo vettore mi da il vettore somma.

Per quanto riguarda il prodotto con uno scalare otteniamo un vettore che può essere così descritto: ha la stessa direzione del vettore di partenza, il verso sarà concorde o discorde a seconda che il numero sia positivo o negativo, e infine la lunghezza del nuovo vettore è la lunghezza vettore originario moltiplicata per il (valore assoluto dello) scalare dato.



chi è $-\frac{1}{2}v$?

PROPRIETÀ DI SOMMA E PRODOTTO CON LO SCALARE?

1) ASSOCIATIVITÀ: per ogni terna di vettori $v, w, z \in \mathbb{R}^3$ si ha che $(v+w)+z = v+(w+z)$;

2) ELEMENTO NEUTRO: c'è un vettore, che denotiamo con 0 (zero), tale che se faccio $v+0=v$; $0+v=v$ per ogni $v \in \mathbb{R}^3$.

Infatti: $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ funziona! Se $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, allora $0 + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+x_1 \\ 0+x_2 \\ 0+x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

3) OPPOSTI: per ogni vettore $v \in \mathbb{R}^3$ esiste un $w \in \mathbb{R}^3$ tale che $v+w=0$, $w+v=0$.

Infatti dato $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, ho che $w = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}$.

4) COMMUTATIVITÀ: per ogni $v, w \in \mathbb{R}^3$ si ha che $v+w = w+v$.

5) Relazioni tra somma e prodotto con gli scalari:

- $c \cdot (v+w) = c \cdot v + c \cdot w$;
- $(c+d) \cdot v = c \cdot v + d \cdot v$;
- $(cd) \cdot v = c \cdot (dv)$;
- $1 \cdot v = v$;

TRASLAZIONI DI PUNTI PER MEZZO DEI VETTORI

Siano $P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ un punto e $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ un vettore. Il punto che si ottiene traslando P tramite v è il punto

$$Q = P + v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+v_1 \\ x_2+v_2 \\ x_3+v_3 \end{pmatrix}$$

Questo simbolo di + descrive una funzione avente in ingresso un punto e un vettore, e che restituisce un punto.

Questa traslazione gode di questa proprietà:

Comunque scelti due punti $P, Q \in \mathbb{R}^3$ è sempre possibile traslare P su Q e lo si può fare solo in un unico modo.

Tradotto: Per ogni $P, Q \in \mathbb{R}^3$ esiste ed è unico $v \in \mathbb{R}^3$ tale che $Q = P + v$. Tale vettore verrà indicato con $Q - P$.

NOTA BENE: Affermare che due punti siano uguali significa affermare che hanno rispettivamente uguali le loro coordinate.

Pertanto (spesso) le uguaglianze di punti o vettori che scriveremo, nasconderanno in realtà dei sistemi.

Es: Consideriamo il seguente sistema:

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t \\ 2-2t \\ -1+t \end{pmatrix} \text{ per qualche } t \in \mathbb{R} \right\}.$$

È vero che $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in I$? $\in \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$?

$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in I$ se e soltanto se esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+t \\ 2-2t \\ -1+t \end{pmatrix}$ ciò equivale affermare che il sistema

$$\begin{cases} 3+t = 4 \\ 2-2t = 1 \\ -1+t = 0 \end{cases}$$

a ammette qualche soluzione.

Risolvo il sistema:

$$\begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{1}{2} \\ t = 1 \end{cases}$$

Sistema impossibile

Così il $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin I$.

Per quanto riguarda $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, si ha che $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in I$ se e solo se il sistema $\begin{cases} 3t-4 = 4 \\ 2t-t = 0 \\ -1+t = 0 \end{cases}$ ha soluzioni (= compatibile)

Risolvendo il sistema, si ottiene $\begin{cases} t = 1 \\ t = 1 \\ t = 1 \end{cases}$ il sistema è compatibile, e così $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in I$.

PRODOTTO SCALARE

Dati due vettori $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, definiamo il loro prodotto scalare come segue:

$$\langle v, w \rangle = \langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 .$$

Osservazione: In ingresso ho due vettori, viene restituito uno scalare.

Es: $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle = 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 2 - 1 + 6 = 7$

$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 2 - 6 + 1 = -3$

$\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle = -6 + 0 + 6 = 0$

Il prodotto scalare è utile perché ci permette di definire la lunghezza di un vettore!

Def: Sia $v \in \mathbb{R}^3$ un vettore, la norma o lunghezza di v, è il numero $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$

Perché questa definizione ha senso?

Oss: Si ha che $\langle v, v \rangle \geq 0$ per ogni $v \in \mathbb{R}^3$. Infatti posto $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, si ha che

$\langle v, v \rangle = \langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rangle = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ e ciascuno di questi tre addendi non è mai negativo. Così $\langle v, v \rangle \geq 0$ in quanto somma di quantità maggiori o uguali di zero.