BASI DI LOGICA e LINGUAGGIO

Uno dei primi aggettivi che si associa alla matematica è "RIGOROSO"
↓
rigida severità
con cui si esige l'osservanza di una legge, di una regola o norma, e che si esercita ponendone le violazioni o trasgressioni.

In realtà quello che facciamo in matematica è trattare tutto ciò di cui parliamo in maniera esatta e senza possibilità di equivoco.

TRE TERMINI:

- DEFINIZIONE: La matematica si occupa di studiare le relazioni che sussistono tra vari oggetti

DOMANDA: Quali oggetti?

RISPOSTA: Non è importante, purché tale oggetto sia ben definito.

Una definizione è un "processo" che mi permette di prendere un simbolo e riempirlo di significato.
Dal momento che si è data una definizione, la parola usata cessa di avere qualunque altro significato, e significherà solo ciò che è stato definito.
Esempio: sia n un numero naturale, dico che n è pari se la sua rappresentazione decimale termina con la cifra 0,2,4,6,8.

Domanda: 13 è pari? NO

-6 ? NO, non è naturale

Un paio di cose a cui prestare attenzione nelle definizioni sono: l'uso degli articoli e dei quantificatori.

Gli articoli sono di due tipi: determinativi e indeterminativi.

Gli articoli determinativi, DETERMINANO e quindi si riferiscono a qualcosa di ben preciso e univocamente determinato.

I quantificatori servono per dirci se ciò che stiamo predicando vale "sempre" oppure "a volte":

* QUANTIFICATORE UNIVERSALE $\forall$
* QUANTIFICATORE ESISTENZIALE $\exists$

!Attenzione! fare attenzione a negare le frasi con i quantificatori.

Es: "Tutti gli uomini volano"

negata → "Esiste almeno un uomo che non vola"

Domanda: da frase "nessun uomo vola", di chi è la negazione?

Esempio: Siano x, y due numeri naturali, dico che x divide y se esiste un numero naturale t tale che $y = t \cdot x$.

2022 è divisibile per 2? Sì perché è pari.

! Attenzione! Abbiamo dato il concetto di divisibilità che non è (a priori) legato al concetto di parità.

TEOREMI: (lemmi, proporzioni, corollari)

Tutte queste parole indicano (con lievi sfaccettature) delle frasi che hanno pratica_mente sempre il periodo ipotetico.

Un teorema tipicamente è fatto di:

Si da un contesto. SE SUCCEDE QUALCOSA, IPOTESI

Allora DEVE SUCCEDERE QUALCOS'ALTRO. tesi

Es: Sia n un numero intero. Se n è divisibile per 2, allora n è pari.

Se è Natale, allora Mario mangia il panettone

Quello che viene espresso nel teorema è ogni qualvolta si verificano le condizioni espresse dall'ipotesi, non possono NON verificarsi le conseguenze dalla tesi, nulla più nulla meno.

Es: Vedo Mario mangiare il panettone. È Natale? No, non è detto.

Vedo Mario non mangiare il panettone. È vero che non è Natale? Si

Es: Sia n un numero intero. Se n è divisibile per 4, allora n è pari.

Ogni tanto, in realtà, si possono scambiare ipotesi e tesi, e trovare anco_ra un teorema.

Es: Sia n un numero naturale. Se n è pari, n è divisibile per 2.
E viceversa se n è divisibile per 2, n è pari.

In questo caso ipotesi e tesi del teorema sono tra loro equivalenti e si esprime questo fatto:
Un numero naturale n è pari se e solo se n è divisibile per 2.

Un teorema si differenzia da tutti gli altri tipi di frase per il fatto che esprime una cosa vera. La veridicità dei teoremi è garantita dal fatto che essa può essere dimostrata.

DIMOSTRAZIONI:

Una dimostrazione è un processo mediante il quale si mostra la verità di un enunciato.
Pertanto, partendo da un qualunque soggetto per il quale supponiamo siano verificate tutte le condizioni espresse dall'ipotesi.
Compiamo un ragionamento che ci porti a concludere la validità delle condizioni espresse dalla tesi.
Non basta accontentarsi di fornire solo qualche esempio per mostrare la validità di un enunciato.
! Attenzione! per mostrare la falsità di un'affermazione (presunto teorema) in realtà basta fornire un esempio (chiamati controesempio)

Es: Sia n numero naturale, se n è divisibile per 4, allora n è divisibile per 2.

Dimostrazione: Sappiamo che esiste un naturale t, tali che $n = 4 \cdot t$.

Pertanto:

$$n = 4t = 2 \cdot 2 \cdot t = 2 \cdot 2t$$

e così n soddisfa alla definizione di numero divisibile per 2.

Dom: È vero che ogni numero divisibile per 2, è divisibile per 4?

No, 6 per esempio è divisibile per 2 ma non per 4.

START!

Espressioni ed Equazioni

Definizione: Un'espressione è una successione di numeri o simboli legati tra di loro da operazioni

Es: $2 \cdot \left(3 + \frac{1}{2}\right)$ è un'espressione.

Il "bello" delle espressioni è che possono essere valutate.

Es: $2 \cdot \left(3 + \frac{1}{2}\right) = 7$

Es: $2 \cdot \left(3 + \frac{n}{2}\right)$ è un'altra espressione, la cui valutazione dipende dal valore assunto da n. In questo caso, n prende il nome di INDETERMINATA o VARIABILE

Definizione: Un'equazione è un'uguaglianza di due espressioni.

Tale uguaglianza può essere:

* sempre vera $\quad 5 + 2 = 7 \quad\quad (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$

$$0 \cdot x = 0$$

* sempre falsa $2+2=5$ $x^2+1=-2$

$0 \cdot x = 1$

* nel caso in cui siano presenti delle variabili, un' equazione può essere soddisfatta se le variabili assumono specifici valori, o non essere verificata per altri.

Es: $x^5+x^3+x+1=4$

È soddisfatta per $x=1$, non è soddisfatta per $x=2$.

Risolvere un' equazione significa riuscire a trovare tutti e soli i valori che possono assumere le variabili affinché sia verificata l'uguaglianza tra le due espressioni che compongono l'equazione.

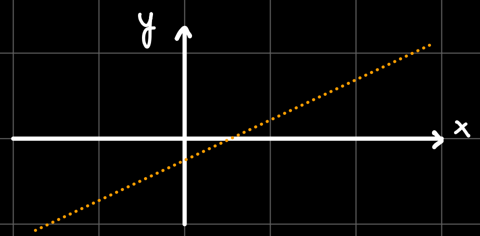
Es 1: $3x+5=8$ ha per soluzioni $x=1$

Es 2: $x^2+2x-4=1$ ha per soluzioni $x=-1+\sqrt{6}$ e $x=-1-\sqrt{6}$

Es 3: $e^x=e^{-x}$ ha per soluzione $x=0$.

Es 4: $\cos(2x)=1$ ha per soluzione $x=k\pi$ dove $k \in \mathbb{Z}$

Es 5: $x-2y=1$ ha per soluzioni tutti e soli i punti della seguente retta nel piano



In un certo senso possiamo dire che risolvere un' equazione significa rispondere ad una domanda: per quali valori delle variabili si ottiene l'uguaglianza dei due membri?

Per quanto detto, le indeterminate di cui si cerca di determinare i valori si chiamano anche incognita.

Nel corso ci occuperemo principalmente di equazioni lineari, vale a dire di quelle del tipo:

$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b$

dove: $x_1 \dots x_n$ sono le incognite

$a_1, \dots, a_n, b$ sono numeri

e quindi gli esempi 1 e 5 visti sopra

Es: Mario non ricorda quanto spende al minuto per le chiamate al cellulare. Fa una chiamata di 6 minuti spendendo 72 centesimi. Quanto spende al minuto?

Sia c il costo al minuto, allora so che $6 \cdot c = 0{,}72$ ← lineare.

Es: Mario si ricorda che ha anche lo scatto alla risposta.

Quanto spende al minuto di scatto alla risposta?

Siano s lo scatto alla risposta e c il costo al minuto. Allora so che $s + 3 \cdot c = 0{,}43$.

Vediamo che un' equazione può essere interpretata come un' informazione, data appunto dal legame tra le quantità espresso dall' equazione stessa.

Ha senso quindi pensare che se ho sufficiente informazione, allora posso provare a determinare i valori che soddisfino tutte queste informazioni.

Es: Mario fa anche una seconda telefonata, di 4 minuti, spendendo 54 centesimi. Quanto spende al minuto e quanto di scatto alla risposta?

Definizione: Un sistema di m equazioni lineari in n incognite ē una collezione di m equazioni lineari in n incognite, delle quali sono interessato alle soluzioni comuni a tutte.

Il nostro problema si puó tradurre nel seguente sistema:

① $\begin{cases} S\cdot 3C = 0.42 \\ S\cdot 4C = 0,54 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} S = 0,42 - 3C \\ 0,42 - 3C + 4C = 0,54 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} S = 0,06 \\ C = 0,12 \end{cases}$

vediamo un'ulteriore metodo per risolvere il sistema

②

$\begin{cases} S\cdot 3C = 0.42 \\ S\cdot 4C = 0,54 \end{cases}$ la differenza tra i due membri a sinistra ē il costo di un minuto

Quindi ricavo subito che

$$C = (S + 4C) - (S + 3C) = 0,54 - 0,42 = 0,12$$

poi ricavo S da una delle due equazioni.

Quest'ultimo approccio è quello che prediligeremo per 2 motivi:

1) facilmente implementabile in svariate situazioni

2) ci fornirà molte!! più informazioni di quelle che possiamo aspettarci

Per implementare questo metodo, dobbiamo però trovare una maniera comoda per rappresentare i sistemi:

Es: Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_3 = 2 \end{cases}$$

Possiamo affermare che tutta l'informazione del sistema è contenuta nei suoi coefficienti una volta che ci ricordiamo, a quale equazione e quale incognita si riferiscono.

Pertanto possiamo costruire una vera e propria tabella in cui riportiamo ordinatamente tutti i coefficienti e termini noti che compaiono nel sistema:

- nella prima riga della tabella