Oss: siano $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ linearmente indipendenti. Allora qualsiasi loro sottoinsieme costituisce ancora un insieme linearmente indipendenti

Quindi, parlando di indipendenza lin., saremo interessati agli insiemi che hanno un numero massimale di elementi

Es: Consideriamo i vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, sono linearmente indipendenti?

Siano c_1, c_2, c_3 tali $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ciò significa che $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ sono tali che

$$\begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ c_1 - c_2 + 3c_3 \\ c_1 - c_2 + 3c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ossia $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - c_2 + 3c_3 = 0 \\ c_1 - c_2 + 3c_3 = 0 \end{cases}$$

Per risolvere il sistema, scrivo la matrice rappresentative

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{vedi ieri}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pertanto vediamo che le soluzioni dipendono da un parametro libero. Ciò significa che esistono delle soluzioni non banali per il sistema, e così

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ sono linearmente dipendenti.

Es: Considero $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Sono indipendenti?

Ciò significa chiedersi se esistono $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ non contemporaneamente nulli tali che

$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ossia se il sistema

$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ -c_1 + c_2 = 0 \end{cases}$ ha soluzioni non banali

La matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{I + II \to II} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

In questo caso non ho parametri liberi, così $c_1 = c_2 = 0$ è l'unica soluzione.

Ciò significa che $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti

DIPENDENZA LINEARE e SISTEMI LINEARI

Come traspare dalla spiegazione degli esempi appena visti, per capire se un dato insieme di vettori è composto da vettori linearmente dipendenti, dovremo risolvere un sistema.

Tale sistema:

- ★ è omogeneo, cioè la colonna dei termini noti è nulla. Questi sistemi hanno sempre almeno la soluzione banale.
- ★ ha per matrice, la matrice che si ottiene giustapponendo i vettori dati.

Ciò mostra quindi la validità di questa proposizione:

PROPOSIZIONE: Siano $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ dei vettori e sia $A = (v_1 | \dots | v_k)$.

Allora:

$v_1, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti $\iff$ $\text{Sol}(A|0) = \{0\}$

Abbiamo visto negli esempi scorsi che possiamo avere tutta questa casistica

In R^2	Generano in R^2	NON Generano in R^2
Sono linearm dipendenti	$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$	$\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}\right\}$
Sono linearm indipendenti	$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$	$\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$

Ciò mostra che non c'è nessun legame tra concetti di generazione e di dipendenza lineare.

È quindi interessante il caso in cui ho entrambe le proprietà.

Def: Sia $S = \{v_1, \dots, v_k\} \subseteq V$ uno spazio vettoriale reale. Dico che S è una base per V se

* $v_1, \dots, v_k$ generano V ($\mathcal{L}(S) = V$)
* $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti

Es:

1) Se considero $\mathbb{R}^n$, l'insieme:

$C = \{e_1, \dots, e_n\}$ è una base. Tale base prende il nome di base canonica.

2) $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ è una base per $\mathbb{R}^2$.

Oss: In realtà una base non è solo un'insieme di generatori indipendenti, è un insieme ordinato di generatori indipendenti.

Legami tra generazione e indipendenza lineare

Vedremo alcune proposizioni, altre le dimostreremo, altre le prenderemo come dei fatti.

PROPOSIZIONE: Siano $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$. Allora $v_1, \dots, v_k$ sono indipendenti se e soltanto se nessuno tra di essi è combinazione lineare degli altri.

PROPOSIZIONE (Lemma degli scarti successivi): Siano $v_1, \dots, v_k \in V$ dei generatori. Allora posso estrarre da $v_1, \dots, v_k$ una base per V.

Dim:

i) Mi chiedo se $v_1, \dots, v_k$ sono indipendenti.

→ Se sì, ho già una base e mi fermo.

→ Se no, allora ci sarà un vettore tra questi $v_1, \dots, v_k$ che è combinazione lineare degli altri. Ne individuo uno e passo al passo ii)

ii) Rimuovo da $v_1, \dots, v_k$ il vettore individuato al punto (i). Ora ho un nuovo insieme con un elemento in meno che genera ancora V (davvero? sì)

Riparto con i)

N.B. Il numero di vettori che considero ad ogni passo è minore di quelli del passo precedente.

Ho due possibilità:

. o rispondo sì a (i)

. oppure ad un certo punto finirò i vettori...

Attenzione! Questo può succedere solo quando $V = \{0\}$.

PROPOSIZIONE: Sia $B = \{v_1, \dots, v_k\}$ una base per uno spazio vettoriale V. Comunque scelto $w \in V$, con $w \neq 0$, è possibile sostituire w ad uno dei vettori $v_i \in B$ in modo tale che il nuovo insieme sia ancora una base per V.

Vogliamo vedere ora alcune sostituzioni "particolari".

i) Sia $B = \{v_1, \dots, v_k\}$ una base per V, e sia $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$.

Allora $\{\alpha v_1, \dots, \alpha v_k\}$ è ancora base per V.

oss: se $v_1, \dots, v_k$ fossero solo dei generatori allora $\alpha v_1, \dots, v_k$ sarebbero ancora dei generatori

ii) Sia $B = \{v_1, \dots, v_k\}$ una base per V e sia $\beta \in \mathbb{R}$. Allora $\{v_1 + \beta v_2 + \dots + v_k\}$ è ancora una base per V.

oss: se avessi a che far solo con generatori, continuerei a trovare generatori.

Teorema (Lemma dello scambio di Steinitz o teorema della base incompleta): Sia $B = \{v_1, \dots, v_k\}$ una base per uno spazio vettoriale V. Siano $w_1, \dots, w_m \in V$ dei vettori linearmente dipendenti

Allora:

i) $m \leq k$

ii) È possibile sostituire $w_1, \dots, w_n$ ad m opportuni vettori di B in modo tale che l'insieme che ne risulti continui ad essere una base

A questo punto vediamo due conseguenze molto importanti:

PROPOSIZIONE: Siano $v_1, \dots, v_k \in V$ (sp. vett.) sono quindi dei fatti equivalenti i seguenti:

i) $v_1, \dots, v_k$ è una base per V

ii) $v_1, \dots, v_k$ è un insieme minimale di generatori per V.

iii) $v_1, \dots, v_k$ è un insieme massimale di vettori indipendenti.

Teorema: Siano $B = \{v_1, \dots, v_k\}$ e $B' = \{w_1, \dots, w_m\}$ due basi per uno spazio vettoriale V. Allora:

$k = m$

Dim: Considero B come base e B' come insieme di vettori indipendenti. Per il teorema della base incompleta ho che $m \le k$.

Viceversa se considero B' come base e B come insieme di vettori indipendenti, lo stesso teorema mi dice che $k \le m$.

così: $k = m$

Def: La dimensione di uno spazio vettoriale V, che indicheremo con $\dim V$ o $\dim(V)$ è il numero di elementi presenti in una qualsiasi (e quindi in ogni) base per V.

Es: $\dim \mathbb{R}^n = n$ perché la base canonica $\{e_1, \dots, e_n\}$ ha n elementi.

Es: Sia S il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di eq.ne $2x - y + 3z = 0$. Determinare una base e la dimensione di S.

$$S: \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle/ 2x - y + 3z = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle/ y = 2x + 3z \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x+3z \\ z \end{pmatrix} \middle| \, x, z \in \mathbb{R} \right\}$$

Studiamo che cosa posso dedurre da questa scrittura...

$$\begin{pmatrix} x \\ 2x+3z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3z \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ogni vettore di S è combinazione lineare di $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$S = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

I vettori trovati sono lin. dipendenti? Sì, infatti nessuno dei due è multiplo dell'altro.

Pertanto: $\dim S = 2$ e $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base per S.