Docente, F. Morandin		14 febbraio 2022
	Laurea Triennale in Matematica, Laurea Triennale in Informatica	
Elementi di Probabilità/Introduzione alla Statistica		Scritto 3

Si svolgano 3 esercizi a scelta sui 4 proposti.
Il punteggio finale sarà la somma dei punti dei 3 esercizi riusciti meglio.

Problema 3.1 (12 punti)**.** Un bambino fa colazione mangiando ogni giorno biscotti per un peso casuale, con media 40 g e deviazione standard 10 g.

(6 punti) Determinare media e deviazione standard per il peso X dei biscotti consumati in un mese (30 giorni). Determinare approssimativamente la probabilità che X sia inferiore a 1 Kg.

(3 punti) Una confezione da 800 g di biscotti quanto può durare all'80% di probabilità? (Ovvero, detto Y il numero di giorni necessari per consumare tutti i biscotti della confezione, determinare L tale che $P(Y \geq L) \approx 80\%$.)

(3 punti) Un singolo biscotto pesa 15 g. Il fratello del bambino mangia un primo biscotto con probabilità del 50%. Se effettivamente lo mangia, ne mangia un secondo di nuovo con probabilità del 50%. Fai poi lo stesso con il terzo, e così via. Sia Z il peso dei biscotti mangiati complessivamente dai due fratelli in un mese. Determinare a e b tali che $P(a \leq Z \leq b) \approx 90\%$.

Problema 3.2 (13 punti)**.** Sia X una variabile aleatoria continua con funzione di densità

$$f_X(t) = \begin{cases} c & 0 \leq t \leq 1 \\ c \cdot e^{1-t} & t > 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(7 punti) Si determini il valore di c, si tracci il grafico della funzione, si calcolino $P(X > 1)$, media e deviazione standard di X.

(3 punti) Si determini la funzione di ripartizione di X e se ne faccia il grafico. Sia $Y = 5X$. Si determini la densità di Y, se ne faccia il grafico, si calcolino media e deviazione standard di questa variabile aleatoria.

(3 punti) Sia $\tilde{X}$ una variabile aleatoria indipendente da X e con la stessa legge. Sia $Z := X + \tilde{X}$. Si determini se la mediana di Z sia maggiore, minore o uguale a 2.

Problema 3.3 (12 punti)**.** Si studia la quantità di rifiuti indifferenziati raccolti settimanalmente in una strada. Un campione di 3 mesi (13 settimane) riporta i dati seguenti (in kg),

59.9	72.1	57.9	66.7	67.0	65.7	94.2
47.5	49.4	67.2	57.7	67.9	69.5	

Si assume che la distribuzione del campione sia Gaussiana di parametri μ e σ.

(7 punti) Si stimi μ al 90% di confidenza, sia con un intervallo bilaterale, sia con un intervallo unilaterale destro, tipo $\mu \leq U$.

(2 punti) Si cambiano le regole della raccolta differenziata, e dopo un po' di tempo si raccolgono i dati di altre 6 settimane consecutive, trovando una media campionaria di 57.8 Kg e una deviazione standard campionaria di 10.9 Kg. Si verifichi tramite il calcolo del p-value se vi sia evidenza che il cambiamento di regole abbia ridotto in media la quantità di rifiuti indifferenziati raccolti.

(3 punti) Si determini la potenza del test del punto precedente, per un livello di significatività del 5%, una differenza nella media di 10 Kg e $\sigma = 12$. Come cambia questa potenza se si raccolgono dati per 13 settimane invece di 6?

Problema 3.4 (12 punti)**.** Si testa una nuova implementazione di un GEMM[1]. Vengono fatte 20 prove e si trova una media campionaria di 35.2 ms e una deviazione standard campionaria di 8.33 ms. Dell'implementazione precedente sono noti i parametri veri, che sono media 39.6 ms e deviazione standard 0.751 ms.

(7 punti) Si verifichi all'1% di significatività se vi sia evidenza statistica che la deviazione standard del nuovo metodo sia più alta.

(2 punti) Si stimi la media del nuovo metodo al 95% di confidenza. Si verifichi tramite calcolo del p-value se vi sia evidenza statistica che la media del nuovo metodo sia più bassa.

(3 punti) In realtà i 20 tempi del nuovo metodo sono 17 valori molto uniformi e 3 valori sballati: 55.0, 59.6, 46.8. Trovare media e deviazione standard campionaria degli altri 17 valori e rifare il test del punto precedente su questo campione ridotto.

[1] Si tratta di un algoritmo –generalmente parallelo– per il calcolo del prodotto di matrici.