Abbiamo visto: cosa vuol dire che "un vettore $v \in R^n$" è combinazione lineare dei vettori $v_1, v_2 \cdots v_k$.

Con esempi abbiamo notato che:

- Dato un qualunque insieme di vettori $v_1, v_2 \cdots v_k$ si ha che 0 è sempre combinazione lineare di $v_1, v_2 \cdots v_k$
- Dato un insieme di vettori S, può succedere che
  - ★ o che ogni vettore di R si possa esprimere come combinazione lineare di elementi di S;
  - ★ o che solo alcuni vettori lo siano

Generazione

Def: Dato $S = \{v_1, \cdots, v_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$, denotiamo

$\mathcal{L}(S) = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid v$ è combinazione lineare di elementi di $S \}$

↓

spazio generato da S

Se $\mathcal{L}(S) = \mathbb{R}^n$, allora diciamo che S è un insieme di generatori di R^n.

Es: Consideriamo i seguenti vettori in R^n:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \cdots \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sia $C = \{e_1, \cdots e_n\}$. Dato un qualunque vettore $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ osserviamo che

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$$

e così $\{e_1 \cdots e_n\}$ è un insieme di generatori per R^n. Tali elementi $e_1 \dots e_n$ si chiamano generatori canonici di R^n.

Es: Consideriamo in R^2 l'insieme $C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ dei generatori canonici. Fissiamoci su un vettore diciamo $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Allora

$0 = 0e_1 + 0e_2$ e osserviamo che questa è l'unica combinazione lineare di e_1, e_2 che restituisce il vettore nullo.

Es: Consideriamo l'insieme $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ in R^2.

È vero che $\mathcal{L}(S) = \mathbb{R}^2$?

Sia $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ un generico vettore, ci chiediamo se è sempre (per ogni x, y) vero che esistono $c_1, c_2 \in R$ tali che

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ c_1 - c_2 + c_3 \end{pmatrix}$$

Equivalentemente: è vero che il sistema:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = x \\ c_1 - c_2 + c_3 = y \end{cases}$$ è sempre compatibile?

Andiamo a lavorare con la matrice rappresentativa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & x \\ 1 & -1 & 1 & y \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{II}-\mathrm{I}\to\mathrm{II}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & -2 & 1 & y-x \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}\mathrm{II}\to\mathrm{II}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}(x-y) \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{I}-\mathrm{II}\to\mathrm{I}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}(x+y) \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}(x-y) \end{pmatrix}$$

Quindi il sistema è sempre compatibile, cioè $\mathcal{L}(S) = \mathbb{R}^2$. Le soluzioni del sistema sono:

$$\begin{cases} c_1 = \frac{1}{2}(x+y) - \frac{1}{2}c_3 \\ c_2 = \frac{1}{2}(x-y) + \frac{1}{2}c_3 \end{cases}$$

Ciò significa che:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}(x+y) - \frac{1}{2}c_3\right)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{2}(x-y) + \frac{1}{2}c_3\right)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

In particolare:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}c_3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}c_3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e così in questo caso vedo che ho anche combinazioni lineari non banali che mi danno il vettore nullo (scelgo $c_3 = -2$):

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Proprietà di $\mathcal{L}(S)$:

★ Sia $S = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Allora $\mathcal{L}(S)$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$.

Dobbiamo verificare che:

- $0 \in \mathcal{L}(S)$ (già fatto)
- Se $v, w \in \mathcal{L}(S)$ allora $v + w \in \mathcal{L}(S)$

Scriviamo $v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_k v_k$ per opportuni $c_1, \cdots, c_k \in \mathbb{R}$ e analogamente $w = d_1 v_1 + \cdots + d_k v_k$. Ma allora:

$$v + w = c_1 v_1 + \cdots + c_k v_k + d_1 v_1 + \cdots + d_k v_k = (c_1 + d_1) v_1 + \cdots (c_k + d_k) v_k$$

Pertanto $v + w \in \mathcal{L}(S)$

· Se $v \in \mathcal{L}(S)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, allora $\alpha v \in \mathcal{L}(S)$.

Infatti: $v = c_1 v_1 + \cdots + c_k v_k$ e quindi $\alpha v = \alpha(c_1 v_1 + \cdots + c_k v_k) = \alpha c_1 v_1 + \cdots + \alpha c_k v_k$

e così $\alpha v \in S$.

★ Sia S come sopra. Allora $S \subseteq \mathcal{L}(S)$.

Infatti consideriamo un elemento $v_i \in S$, ho che $v_1 = 0 v_1 + 0 v_2 + \cdots + 1 \cdot v_i + \cdots + 0 \cdot v_k$.

Quindi $v_1 \in \mathcal{L}(S)$.

★ (Più difficile) $\mathcal{L}(S)$ è il più piccolo sottospazio di R^n che contiene S.

Da mostrare:

$\mathcal{L}(S)$ è sottospazio (ok!)

$S \subseteq \mathcal{L}(S)$ (ok!)

È il più piccolo, cioè: se V è un sottospazio di R^n che contiene S, allora V contiene anche $\mathcal{L}(S)$.

· Siano $S, T \subseteq \mathbb{R}^n$ due sottoinsiemi. Se $S \subseteq T$, allora $\mathcal{L}(S) \subseteq \mathcal{L}(T)$.

Invece, dal fatto che $\mathcal{L}(S) \subseteq \mathcal{L}(T)$ non posso dedurre nulla sul contenimento tra S e T.

Esercizio: Trovare esempi!!

In particolare, se $\mathcal{L}(S) = R^n$ e $S \subseteq T$, allora anche $\mathcal{L}(T) = \mathbb{R}^n$.

Ciò mi dice che dal punto di vista della generazione sono interessato agli insiemi di generatori che hanno un numero minimale di elementi.

Esempio: Sia $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq R^2$. Questo è un insieme di generatori per R^2. Togliendo uno qualunque di questi tre vettori da S, si ottiene un nuovo insieme formato da due vettori, e questo nuovo insieme è ancora un insieme di generatori per R^2.

D'altra parte, se ne tolgo due qualsiasi, il vettore che mi resta non basta per generare tutto R^2.

Generazione e i sistemi lineari

Consideriamo $S=\{v_1,v_2,\cdots,v_k\}\subseteq R^n$ e poniamo $v_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{pmatrix}$ $\quad v_2=\begin{pmatrix}a_{21}\\a_{22}\\\vdots\\a_{n2}\end{pmatrix},\ \cdots\ ,\ v_k=\begin{pmatrix}a_{1k}\\a_{2k}\\\vdots\\a_{nk}\end{pmatrix}$

[Il primo indice ricorda quale coordinate, il secondo indice ricorda di quale vettore]

Sia $v=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\in R^n$. Allora affermare che v è combinazione lineare di $v_1,\cdots,v_k$ vuol dire affermare che esistono $c_1,\cdots,c_k\in\mathbb{R}$ tali che

$v=c_1v_1+c_2v_2+\cdots+c_kv_k=c_1\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}a_{21}\\a_{22}\\\vdots\\a_{n2}\end{pmatrix}+\cdots+c_k\begin{pmatrix}a_{1k}\\a_{2k}\\\vdots\\a_{nk}\end{pmatrix}$. A sua volta, ciò equivale a richiedere che il sistema

$$\begin{cases}a_{11}c_1+a_{12}c_2+\cdots+a_{1k}c_k=x_1\\ \vdots\\ a_{n1}c_1+a_{n2}c_2+\cdots+a_{nk}c_k=x_n\end{cases}$$

sia compatibile.

DOM: Chi è la matrice rappresentativa di questo sistema?

$$\left(\begin{array}{cccc|c}\boxed{\begin{matrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{n2}\end{matrix}} & \cdots\cdots & \boxed{\begin{matrix}a_{1k}\\a_{2k}\\\vdots\\a_{nk}\end{matrix}} & \begin{matrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_k\end{matrix}\end{array}\right)=\left(\boxed{v_1}\,\middle|\,\boxed{v_2}\,\middle|\cdots\middle|\,\boxed{v_k}\right)$$

Questa matrice dei coefficienti la si ottiene giustapponendo i vettori $v_1\cdots,v_k$

Pertanto questa osservazione giustifica la seguente affermazione:

PROPOSIZIONE: Sia $S=\{v_1,\cdots,v_k\}\subseteq\mathbb{R}^n$ e sia $A=(v_1|\cdots|v_k)$. Allora

$$\mathcal{L}(S)=\{b\in\mathbb{R}^n \mid Sol(A|b)\neq\emptyset\}$$

Questo fatto è utile se vogliamo delle equazioni a $\mathcal{L}(S)$!!

Es: Consideriamo $S=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix}\right\}$ in R^3. Chi è $\mathcal{L}(S)$? Considero la matrice

$$\begin{pmatrix}1&1&0&x\\1&-1&3&y\\1&-1&3&z\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{III}-\text{I}\to\text{III}]{\text{II}-\text{I}\to\text{II}}\begin{pmatrix}1&1&0&x\\0&-2&3&y-x\\0&-2&3&z-x\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{III}-\text{II}\to\text{III}}\begin{pmatrix}1&1&0&x\\0&-2&3&y-x\\0&0&0&z-y\end{pmatrix}$$

Pertanto il sistema è compatibile se e solo se $z-y=0$, che è l'eq.ne che descrive $\mathcal{L}(S)$. cioè:

$$\mathcal{L}(S)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, y=z\right\}$$

DIPENDENZA e INDIPENDENZA LINEARE

Sia $S=\{v_1,\cdots,v_k\}\in R^n$. Abbiamo visto che a seconda di chi sono gli elementi $v_1,\cdots,v_k$ può darsi che:

- 0 si possa scrivere solo con la combinazione banale di $v_1,\cdots,v_k$
- ci siano combinazioni non banali di $v_1,\cdots,v_k$ che restituiscono 0.

Def: Siano $v_1,\cdots,v_k\in\mathbb{R}^n$. Dico che essi sono linearmente indipendenti se l'unica loro combinazione lineare che restituisce 0 è quella banale. In caso contrario, dico che $v_1,\cdots,v_k$ sono linearmente dipendenti.

Matematicamente: $v_1,\cdots,v_k$ sono linearmente indipendenti se hanno questa proprietà "Siano $c_1,\cdots,c_k\in\mathbb{R}$ tali che $c_1v_1,\cdots,c_kv_k=0$, allora $c_1=c_2=\cdots=c_k=0$".

Es:

- I vettori e_1, e_2 in R^2 sono linearmente indipendenti
- I vettori $\binom{1}{1},\binom{1}{-1},\binom{0}{1}$ in R^2 sono linearmente dipendenti

PROPRIETÀ DELL' INDIPENZA LINEARE

- Siano $v_1,\cdots,v_k\in\mathbb{R}^n$ e supponiamo che uno di essi (diciamo v_1) sia 0. Allora $v_1,\cdots,v_k$ sono linearmente dipendenti.

Infatti: $0=1\cdot 0=1\cdot v_1+0\cdot v_2+\cdots+0\cdot v_k$.

Ciò mostra che c'è una combinazione lineare non banale di $v_1,\cdots,v_k$ che restituisce 0

Lemma: Sia $v\in R^n$. Allora v è linearmente dipendente $\iff v=0$.

Dim: $(\Leftarrow)$ Già fatta (è il punto prima)

$(\Rightarrow)$ Se v è linearmente dipendente, allora $c\cdot v=0$ per qualche $c\neq 0$. Ma allora: $\frac{1}{c}\cdot cv=\frac{1}{c}\cdot 0=v=0$

Lemma: Siano $v_1,v_2\in\mathbb{R}^n$. Allora v_1,v_2 sono linearmente dipendenti $\iff$ uno dei due è multiplo dell'altro.

Dim: $(\Leftarrow)$ Supponiamo che $v=cw$. Allora $1\cdot v-cw=0$ e questa è una combinazione lineare non banale di v e w che restituisce 0.

$(\Rightarrow)$ Sia $c_1v_1+c_2v_2=0$ con almeno uno fra c_1 e c_2. Fissiamo le idee supponendo che $c_1\neq 0$. Allora:

$$c_1v_1=-c_2v_2 \longrightarrow v_1=-\frac{c_2}{c_1}v_2$$

e ciò mostra che v_1 è multiplo di v_2.

Es. Siano $e_1, \cdots, e_n$ i generatori canonici di $\mathbb{R}^n$. Allora se $c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{R}$ sono tali che $c_1 e_1 + \cdots + c_n e_n = 0$, scopro che

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + c_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix},$$ così $c_1 = 0,\ c_2 = 0,\ \cdots,\ c_n = 0.$

Pertanto i generatori canonici sono linearmente indipendenti