OPERAZIONI SUI VETTORI IN R^3

ES 1:

SOMMA $v + w$
PRODOTTO PER UNO SCALARE $c \cdot w$ $\Big\} \rightarrow v - w = v + (-1 \cdot w)$

DATI i vettori $v, w, u \in R^3$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Calcolare

- $v + u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $5v + 2w + 7u = 5\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \\ 15 \end{pmatrix}$

- $\underbrace{\frac{1}{2} w + 3w}_{\frac{7}{2} w} - u = \frac{7}{2} w - u = \frac{7}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ \frac{21}{2} \\ -14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ \frac{19}{2} \\ -15 \end{pmatrix}$

- $-3w + 2(u - v) = -3\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + 2\overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}^{u-v} = \begin{pmatrix} -6 \\ -9 \\ +12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 14 \end{pmatrix}$

Def: PRODOTTO SCALARE di due VETTORI

$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $w = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ $\langle v, w \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i \in \mathbb{R}$

3, perché siamo in R^3

ES 2: $\langle u, v \rangle$ dove:

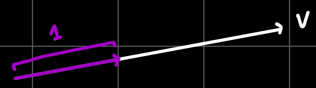
- $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\rightarrow \langle u, v \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 1 = 8$
- $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\rightarrow \langle u, v \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 1$
- $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\rightarrow \langle u, v \rangle = 0 \leftarrow$ ortogonali poiché $\langle u, v \rangle = 0$
- $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $v = \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{2} \\ -2 \end{pmatrix}$ $\rightarrow \langle u, v \rangle = -1$

Def: Un vettore di norma 1 si dice VERSORE

$\hookrightarrow v \in \mathbb{R}^3$ $\|v\| = \sqrt{\underbrace{\langle v, v \rangle}_{\geq 0}}$ se $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, allora $\langle v, v \rangle = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 0$

Quando un versore $v \in \mathbb{R}^3$ è tale che $\|v\| = 1$

Se io ho un vettore $v \in \mathbb{R}^3$



Come posso ottenere da v un vettore di norma 1 (= versore) con la stessa direzione e verso.

$$v \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{v}{\|v\|} = \underbrace{\frac{1}{\|v\|}}_{>0} \cdot v \qquad \text{vettore}$$

Verifichiamo che questo vettore abbia norma 1

$$\left\| \frac{v}{\|v\|} \right\| = \frac{1}{\|v\|} \cdot \|v\|$$

$\|c \cdot w\| = |c| \cdot \|w\| \qquad \forall c \in \mathbb{R}, \ \forall w \in \mathbb{R}^3$

Tutta questa operazione di partire da $v \in \mathbb{R}^3$, per ottenere un versore $\frac{v}{\|v\|}$ si chiama NORMALIZZAZIONE.

Es 3:

- $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\cdot \|v\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \sqrt{3}$

Quindi il normalizzato di v è $\frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$

- $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\|u\| = \sqrt{6}$

Il normalizzato di u è $\frac{u}{\|u\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{12} \end{pmatrix}$

- $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\|w\| = \sqrt{5}$

Il normalizzato di w è $\frac{w}{\|w\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{10} \end{pmatrix}$

Es 4: Siano $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

Si calcolano $\langle u, v \rangle$; $\langle u, w \rangle$; $\langle v, w \rangle$; $\|u\|$, $\|v\|$, $\|w\|$ e infine si determini l'angolo tra u e v

$\langle u, v \rangle = 1$

$\langle u, w \rangle = -2 + 2 = 0 \quad \leftarrow$ i vettori u e w sono ortogonali

$\langle v, w \rangle = -2 + 4 = 2$

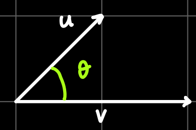
$\|u\| = \sqrt{2}$

$\|v\| = \sqrt{2}$

$\|w\| = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

Determiniamo l'angolo tra u e v: $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

L'angolo θ compreso trovare u e v è tale che



$$\cos\theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$$ (conseguenza della disuguaglianza di CAUCHY-SCHWARZ)

$$= \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{3}$$

ES 5: Siano $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

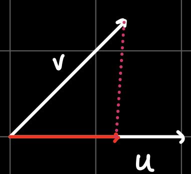
Calcolare $Pr_u(v)$ e $Pr_v(u)$

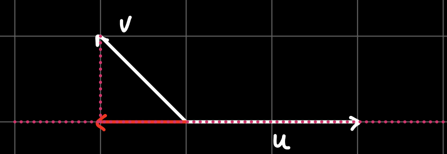
il vettore che sto proiettando

vettore su cui proietto

$Pr_u(v)$

= proiezione di v su u





$$= \underbrace{\frac{\langle v, u \rangle}{\|u\|^2}}_{\in \mathbb{R}} \, u \in \mathbb{R}^3 = \frac{3}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ -\frac{6}{5} \end{pmatrix}$$

$\langle v, u \rangle = 3$

$\|u\|^2 = 5$

$$Pr_v(u) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2} v = \frac{3}{13} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{13} \\ \frac{9}{13} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\|v\|^2 = 13$

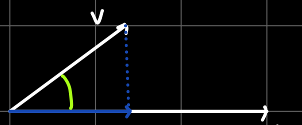
OSS: Sono due vettori diversi $Pr_u(v) \neq Pr_v(u)$

multiplo di u

multiplo di v

Es 6: Siano $v, w \in \mathbb{R}^3$ tali che $Pr_w(v) = c \cdot w$ con $c < 0$
$v, w \neq 0$

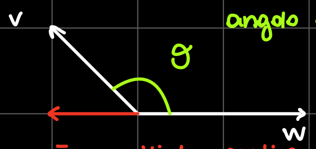
Cosa possiamo dire su v e w?



non siamo in questa situazione

$$Pr_w(v) = \underbrace{\frac{\langle v, w \rangle}{\|w\|^2}}_{<0} \cdot w$$

angolo ottuso



è un multiplo negativo di w

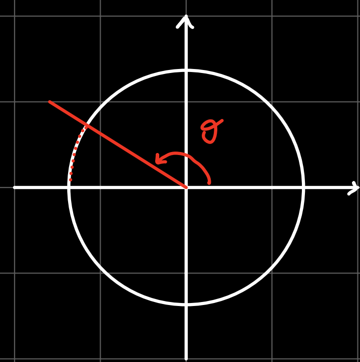
↓

Sia ha che $Pr_w(v) = c \cdot w$ con $c < 0$ se l'angolo compreso tra v e w è un angolo ottuso cioè $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

Dimostriamolo in modo più rigoroso

$$Pr_w(v) = \underbrace{\frac{\langle v, w \rangle}{\| w \|^2}}_{=c} w \quad \text{con} \quad \underbrace{\frac{\langle v, w \rangle}{\| w \|^2}}_{=c} < 0 \quad \Rightarrow \langle v, w \rangle < 0, \quad \text{poiché } \|w\|^2 > 0$$

Ma $\langle v, w \rangle = \underbrace{\overset{>0}{\|v\|} \cdot \overset{>0}{\|w\|} \cdot \cos\theta}_{<0} \Rightarrow \cos\theta < 0$



$\Rightarrow \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ cioè l'angolo compreso tra v e w è ottuso

Es 7: Trovare x e y tali che $\begin{pmatrix} 2x - y \\ 3x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ y - 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Due vettori sono uguali se sono uguali le loro rispettive componenti

Allora,

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 3x = y - 1 \\ 1 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - y = 5 \\ 3x - y = -1 \end{cases}$$

sistema lineare non omogeneo

$$\begin{cases} y = 2x - 5 \\ 3x - 2x + 5 = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -17 \\ x = -6 \end{cases}$$

Verificare che sostituendo $x = -6$ e $y = -17$ i due vettori sono uguali

Es 8: Trovare $k \in \mathbb{R}$ per cui i vettori u, v sono ortogonali, dove:

1) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad v = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2) $u = \begin{pmatrix} -2k \\ k^2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5+k \end{pmatrix}$

Due vettori u e v sono ortogonali se $\langle u, v \rangle = 0$.

1) Calcoliamo $\langle u, v \rangle$

$\langle u, v \rangle = -4 - k$

u e v sono ortogonali $\iff \langle u, v \rangle = 0 \iff -4 + k = 0$

2) Calcoliamo $\langle u, v \rangle$

$\langle u, v \rangle = -k + 5$

u e v sono ortogonali $\iff \langle u, v \rangle$

Es 9: Trovare $k \in \mathbb{R}$ tale che u e v sono paralleli, dove:

1) $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad v = \begin{pmatrix} 4 \\ k \\ 2 \end{pmatrix}$

2) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\quad v = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ k \end{pmatrix}$

3) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ 5k \\ 9 \end{pmatrix}$

Due vettori u e v sono PARALLELI se sono un multiplo dell'altro:

1) $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad v = \begin{pmatrix} 4 \\ k \\ 2 \end{pmatrix}$

Per $k = 6$, il vettore $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

Osserviamo che

$$v = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 2u$$

Per $k = 6$ u e v sono paralleli.

2) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\quad v = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ k \end{pmatrix}$

Per $k = 2$

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = -u$$

3) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 5k \\ 9 \end{pmatrix}$

Chi sono i vettori paralleli a u?

Sono tutti i vettori multipli di u

$$t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 3t \end{pmatrix}$$

Se $K=0$

$$v = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3u$$

Es 10: Siano $u, v \in \mathbb{R}^3$ tali che u e v sono ORTOGONALI a w.

Mostrare che $2u-v$ è ancora ortogonale a w

$u \perp w \Rightarrow \langle u, w \rangle = 0$

$v \perp w \Rightarrow \langle v, w \rangle = 0$

Vogliamo mostrare che $2u-v \perp w$ cioè vogliamo mostrare che $\langle 2u-v, w \rangle = 0$

Dalle proprietà del prodotto scalare

- $\langle u+v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$
- $\langle c \cdot v, w \rangle = c \langle v, w \rangle$

$$\langle 2u-v, w \rangle = \langle 2u, w \rangle + \langle -v, w \rangle = 2 \underbrace{\langle u, w \rangle}_{=0} - \underbrace{\langle v, w \rangle}_{=0} = 0$$

Def: Siano u e v vettori $\in \mathbb{R}^3$, si dice combinazione lineare di u e v, ogni vettore della forma: $au + bv$ dove $a, b \in \mathbb{R}$

- $2u-v$ è combinazione lineare di u e v? Sì $a=2$, $b=-1$
- $-5u+70v$ $a=-5$, $b=70$

ES 11: Siano $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ tali che u e v sono ortogonali a w. Allora ogni combinazione lineare di u e v è ortogonale a w.

Per ipotesi:

$u \perp w \Rightarrow \langle u, w \rangle = 0$

$v \perp w \Rightarrow \langle v, w \rangle = 0$

Mostrare che $au+bv$ è ORTOGONALE a w $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

$$\langle au+bv, w \rangle = \langle au, w \rangle + \langle bv, w \rangle = a \langle u, w \rangle + b \langle v, w \rangle = 0$$

Proprietà del prodotto scalare

cioè $\langle au+bv, w\rangle = 0 \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$