Ultima nozione legata all'ortogonalità

Consideriamo un sottinsieme S di vettori in R^3, $S \subseteq R^3$. L'insieme $S^\perp$ è l'insieme di tutti i vettori di R^3 che sono simultaneamente ortogonali a tutti gli elementi di S:

$$S^\perp = \{ v \in R^3 \mid \langle v, s \rangle = 0 \quad \forall s \in S \}$$

Vediamo come calcolarlo in alcuni esempi:

1) Sia $S = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$, allora $v \in S^\perp$ se e solo se $\langle v, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle = 0 \longrightarrow \langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle = 0 \longrightarrow 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0$ ciò significa che

$x_3 = 2x_1 + 3x_2$ e così $S^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 2x_1 + 3x_2 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$

2) Sia $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Allora $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in S^\perp$ se e solo se $\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 0$, $\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 0 \longrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

Risolvo il sistema: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{II - 3I \to II} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ Ci sono 2 PIVOT, e le soluzioni dipendono da 1 parametro libero

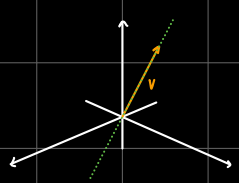
$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = -2x_2 \end{cases}$ e quindi

$$S^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2, x_3 = -2x_2 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ -2x_2 \end{pmatrix} \mid x_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

OSS/DOM: Nelle due righe della matrice compaiono (per riga) i due vettori dati in S. È un caso o è sempre così?

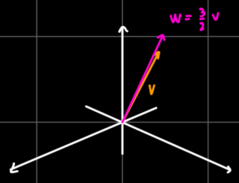
DIREZIONI

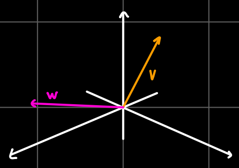
Sia $v \in \mathbb{R}^3$ un vettore non nullo ($v \neq 0$). Allora possiamo utilizzare v per individuare una direzione nello spazio: quella data dal congiungente b o con la "punta" di v.



Oss: se scelgo due vettori non nulli $v, w \in \mathbb{R}^3$, si ha che v, w individuano la stessa direzione se e soltanto se uno dei due è multiplo dell'altro.

In caso contrario, individuano due direzioni distinte.





NOTA BENE: Affermare che w sia un multiplo di v, significa affermare che esiste uno scalare $c \in \mathbb{R}$, tale che $w = c \cdot v$.

Pertanto v e $2v$ identificano la stessa direzione, ma anche v e $-v$ identificano la stessa direzione (eventualmente ciò che cambia è il verso lungo la stessa direzione)

RETTE nello SPAZIO

Il fatto che i vettori possono essere usati per traslare punti, torna comodo per descrivere le rette.

Possiamo infatti considerare una retta, come un punto che trasla lungo una data direzione. Così, dato un punto $P = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix}$ e un vettore non nullo $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

la retta che si ottiene traslando P lungo la direzione individuata da v, è descritta dall'equazione:

$$x = P + tv \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Il ruolo di t è quello di un parametro, così quella appena scritta si chiama FORMA PARAMETRICA della Retta.

N.B: Quest'eq.ne è una forma compatta per il seguente sistema:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{cases} x = x_p + ta \\ y = y_p + tb \\ z = z_p + tc \end{cases}$$

Es: Dato $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $v = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, descriviamo la retta r passante per P e con direzione data da v:

$$r: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - t \\ z = -2 + t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

E viceversa data $r: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2t \\ z = 1 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$, ne individuiamo un punto base e la direzione:

$$r: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 0 + 2t \\ z = 1 \end{cases}$$

Un punto base è $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

La direzione è individuata da $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Dom: Questa retta passa per l'origine?

Altrimenti detto: l'origine appartiene alla retta?

L'origine è un punto della retta se esiste qualche valore di t per cui $O = P + t\cdot v$. Cioè l'origine è un punto della retta se e solo se il sistema (in t) è compatibile.

$$\begin{cases} 0 = 2 - t \\ 0 = 2t \\ 0 = 1 \end{cases} \rightarrow \text{è impossibile} \rightarrow O \notin r.$$

Quanta libertà ho nella descrizione parametricamente di una retta

Abbiamo tantissima libertà: Vediamola in concreto su un esempio: consideriamo la retta:

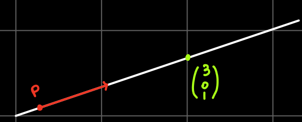
$$r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$

· libertà di scegliere il punto base.

Il punto "privilegiato" da questa espressione è $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Possiamo però sostituire questo punto con un qualsiasi altro punto della retta. Ad esempio:

il punto $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in r$ (con $t = 1$)

e quindi $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ è un'altra forma parametrica della stessa retta



· libertà "sulla direzione": Posso cioè scegliere un altro vettore che individui la stessa direzione. Dall'eq.ne si ha che la direzione di r è quella individuata da $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

possiamo quindi usare $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $(= 2v)$ oppure $\begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $(= -\frac{1}{2} v)$, per descrivere la stessa retta:

$$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 1 - 2t \\ z = -1 + 4t \end{cases}$$

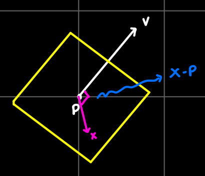
· Combinando entrambe! Ad esempio $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 2 + \frac{1}{2}t \\ z = -3 - t \end{cases}$ descrivono ancora la stessa retta.

PIANI nello SPAZIO

Posso pensare ad un piano nello spazio come all'insieme dei punti che si ottengono traslando un punto dato ortogonalmente ad una direzione fissata.

Sia quindi $P = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix}$ e sia $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, un vettore non nullo. Il piano π passante per P e $\perp$ alla direzione individuata da v è quindi descritto dall'eq.ne:

$$\pi: \quad \langle \underbrace{x - P}_{\text{vettore congiungente } P \text{ con } x}, v \rangle = 0$$



Esplicitiamo quest'eq.ne:

$\langle x-P, v\rangle = 0 \rightarrow \langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \rangle = 0 \longrightarrow \langle \begin{pmatrix} x-x_p \\ y-y_p \\ z-z_p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \rangle = 0 \rightarrow a(x-x_p)+b(y-y_p)+c(z-z_p)=0$

$\longrightarrow ax+by+cz = ax_p+by_p+cz_p$

$ax+by+cz = d$ dove $d = ax_p+by_p+cz_p = \langle P, v\rangle$

Morale: un piano è descritto da un'unica eq.ne lineare (= CARTESIANA del PIANO), dove i coefficienti delle variabili rappresentano una terna che fornisce un vettore che individua la direzione ortogonale al piano

OSS: Anche per i piani abbiamo la libertà di cambiare punto base, vettore che individua la direzione, o entrambi, producendo così eq.ni cartesiane diverse per lo stesso piano.

Esempio: Dato il piano $\pi: x-y+2z=3$, determinare se $P=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, vi appartiene o meno.

Un punto appartiene ad un piano, se le sue coordinate soddisfano l'eq.ne che descrive il piano.

Nel nostro caso abbiamo $2-2+2\cdot 1 = 3 \rightarrow 2 = 3$ ↯ e quindi $P \notin \pi$.

Come determino allora un punto su π? Scelgo due delle tre coordinate del punto (es: $x=1, y=0$) e uso l'eq.ne per determinare la terza coordinata:

$1-0+2z=3 \rightarrow z=1$ e così $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \pi$.

Determiniamo la direzione $\perp$ al piano: è quella individuata da $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$1x - 1y + 2z = 3.$

Esempio: Dato il punto $P=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e il vettore $v=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, descrivere il piano passante per P e $\perp$ alla direzione individuata da v.

Il piano π cercato ha eq.ne della forma $ax+by+cz=d$ dove:

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$ l'eq.ne è del tipo $2x-y+3z=d$

Per trovare d, basta sostituire le coordinate del punto P: $2\cdot 1 - 1 + 3\cdot 1 = d \rightarrow d=4$ e così $\pi: 2x-y+3z=4$

RAPPORTO TRA EQ.ni PARAMETRICHE e CARTESIANE

È possibile descrivere una retta con forma cartesiana? È possibile descrivere parametricamente un piano? Sì.

1) Data la retta $r: \begin{cases} x = 2-3t \\ y = -1+t \\ z = 1+2t \end{cases}$, possiamo ricavare da una delle tre eq.ni il parametro t (lo posso sempre fare perché almeno uno dei coefficienti di t nelle tre eq.ni non è zero). Dopodiché sostituisco t nelle altre due eq.ni e sono a posto!

$$\begin{cases} t = y+1 \\ x = 2 - 3(y+1) \\ z = 1 + 2(y+1) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 3y = 1 \\ 2y - z = -3 \end{cases}$$ FORMA CARTESIANA della RETTA

2) Dato il piano $\pi: 2x - y - z = 3$, per trovarne un espressione parametrica posso esplicitare una delle tre incognite indeterminate e dare il ruolo di parametro alle altre due:

$$2x - y - z = 3 \longrightarrow y = 2x - z - 3 \rightarrow \begin{cases} x = s \\ z = t \\ y = 2s - t - 3 \end{cases}$$ FORMA PARAMETRICA PER il PIANO