Lo spazio R^n

Consideriamo l'insieme R^n delle n-uple ordinate di numeri reali, cioè

$$R^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \; x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

Ricordiamo che per $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ si dice che $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ se $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \cdots, x_n = y_n$.

Chi è $\mathbb{R}^n$ quando $n = 1, 2, 3, 4 \ldots$

- Per $n=1$, ho che $R^1 = R$.
- Per $n=2$, ho che R^2 è l'usuale piano cartesiano.
- Per $n=3$, si ha che R^3 può essere identificato con lo spazio che ci circonda.
- Per $n=4$, infine, abbiamo che R^4 è uno spazio molto importante per la fisica (teoria della relatività).
- Per n molto grande, R^n può modellizzare un'immagine

Operazioni componente per componente su R^n

Ci chiediamo se le operazioni di somma e di prodotto con lo scalare di R^3 si possono estendere a R^n. Si può sempre fare ponendo

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \qquad c \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx_1 \\ cx_2 \\ \vdots \\ cx_n \end{pmatrix}$$

Prodotto scalare

Definiamo il prodotto scalare di due vettori in R^n con la seguente formula:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

Proprietà di queste operazioni

Le operazioni di somma e prodotto con lo scalare godono delle seguenti proprietà:

(G1) Per $v, w, t \in \mathbb{R}^n$ si ha che $(v+w)+z = v+(w+z)$

(G2) Esiste un elemento $0 \in \mathbb{R}^n$ tale che

$0+v=v$, $v+0=v$ per ogni $v \in \mathbb{R}^n$.

(G3) Per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ esiste $w \in \mathbb{R}^n$ tale che

$v+w=0$, $w+v=0$

(G4) Per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ si ha che $v+w=w+v$

(M1) Per ogni $v, w \in R^n$ e per ogni $c \in \mathbb{R}$ si ha che $(c+h)\cdot v = cv+hv$

(M2) Per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ e $c, k \in \mathbb{R}$ si ha che $(c+k)\cdot v = cv+hv$

(M3) Per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ e $c, k \in \mathbb{R}$ si ha che $(ck)v = c(kv)$

(M4) $1\cdot v = v$ per ogni $v \in \mathbb{R}^n$.

OSS:

· Per quanto riguarda G2, il vettore $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ funziona.

· Per quanto riguarda G3, se $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ si ha che $w = -v = \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}$ funziona.

· Se V è un qualunque insieme dotato di due operazioni $+: V\times V \to V$, $\cdot : R\times V \longrightarrow V$ le quali godono delle proprietà G1-G4 e M1-M4

dico che V è uno spazio vettoriale reale.

Pertanto R^n è uno spazio vettoriale reale.

Per quanto riguarda il prodotto scalare, ha anche lui qualche proprietà, che sono la generalizzazione delle prop. viste per R^3.

(PS1) Per ogni $v, w \in \mathbb{R}^n$ si ha che:

$\langle v, w+z\rangle = \langle v, w\rangle + \langle v+z\rangle$

$\langle v+w, z\rangle = \langle v, z\rangle + \langle w, z\rangle$

Per ogni $c \in \mathbb{R}$ si ha che:

$\langle cv, w\rangle = c\langle v, w\rangle$, $\langle v, cw\rangle = c\langle v, w\rangle$

(PS2) Per ogni $v, w \in \mathbb{R}^n$ si ha che

$\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$

(PS3) Se $v \in \mathbb{R}^n$ è tale che $\langle v, w\rangle = 0$ per ogni vettore $w \in R^n$, allora $v=0$.

(PS4) Si ha $\langle v, v\rangle \geq 0$ per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ e inoltre $\langle v, v\rangle = 0 \leftrightarrow v = 0$

Allora in questo caso possiamo definire $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ definisce la norma o lunghezza di v.

Se $v, w \in \mathbb{R}^n$ sono tali che $\langle v, w\rangle = 0$, diciamo ancora che v e w sono ortogonali

Dato $S \subseteq \mathbb{R}^n$, è quindi ben definito

$$S^{\perp} = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, s\rangle = 0 \quad \text{per ogni } s \in S\}$$

Inoltre valgono tutti i risultati visti in $\mathbb{R}^3$.

· Disuguaglianza triangolare

Per ogni $v, w \in \mathbb{R}^n$ si ha $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

· Teorema di Pitagora generalizzato

Per ogni $v, w \in \mathbb{R}$ si ha che $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\langle v, w\rangle$

· Teorema di Pitagora

Si ha che $\|w + v\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$ se e solo se $\langle v, w\rangle = 0$

· Disuguaglianza di CAUCHY-SCHWARZ

Per ogni $v, w \in \mathbb{R}^n$ si ha che $|\langle v, w\rangle| \leq \|v\| \, \|w\|$

Di conseguenza, dati $v, w \in \mathbb{R}^n$ non nulli possiamo definire l'angolo formato da v e w come quell'unico angolo $\theta \in [0, \pi]$ tale che

$$\cos\theta = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}$$

· Proiezioni ortogonali

Dato $v \in \mathbb{R}^n$ e $w \in \mathbb{R}^n$ (w non nullo) abbiamo che

$$P_w(v) = \frac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle} \cdot w$$

Lemma: Siano $v, w \in \mathbb{R}^n$ con $w \neq 0$. Allora $v - P_w(v)$ è $\perp$ a w.

Dim: $\langle v - P_w(v), w\rangle = \langle v, w\rangle - \langle P_v(v), w\rangle = \langle v, w\rangle - \left\langle \frac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle} w, w\right\rangle = \langle v, w\rangle - \frac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle}\langle w, w\rangle =$

$= \langle v, w \rangle - \langle v, w \rangle = 0$

Quindi $v - P_w(v)$ e v sono ortogonali.

OSS: Quanto fatto è l'essenza di un processo che vedremo più avanti come processo di GRAM-SCHMIDT

SPAZI e SOTTOSPAZI

Consideriamo un sottoinsieme $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Può darsi il caso che S sia "solo" un sottoinsieme,

In quest'ultimo caso diremo che S è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$

Def: SOTTOSPAZIO di $\mathbb{R}^n$: Un' sottoinsieme $S \subseteq \mathbb{R}^n$ è un sottospazio se soddisfa i seguenti tre requisiti:

i) $0 \in S$

ii) se $w, v \in S$ allora anche $v + w \in S$

iii) se $v \in S$ e $c \in \mathbb{R}$ allora $cv \in S$

OSS: le richieste ii) e iii) affermano che l'insieme S è chiuso rispetto alla somma e il prodotto con gli scalari.

La richiesta i) è equivalente a richiedere che $S \neq \emptyset$

Vediamo alcuni esempi (e non esempi):

i) Se considero $S = \mathbb{R}^n$, allora $\mathbb{R}^n$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$

ii) Se considero $S = \{0\}$, allora $\{0\}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$

N.B. $\mathbb{R}^n$ e $\{0\}$ vengono chiamati i sottospazi banali di $\mathbb{R}^n$

iii) Consideriamo in $\mathbb{R}^3$, i piani della forma

$\pi : x + y + z = d$. Tra questi ce n'è qualcuno che è un sottospazio?

a) Se π è un sottospazio, allora $0 \in \pi$. Cioè $0 + 0 + 0 = d \rightarrow d = 0$. Così $\pi : x + y + z = 0$

è l'unico candidato possibile.

b) $\pi : x + y + z = 0$ è per davvero un sottospazio?

Sappiamo già che $0 \in \pi$.

Voglio verificare che π sia chiuso rispetto alle due operazioni.

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \pi \iff x+y+z=0 \iff z=-x-y$. Perciò $\pi = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} \middle| x,y \in \mathbb{R} \right\}$

Siano quindi $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ -x_1-y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ -x_2-y_2 \end{pmatrix} \in \pi$. Allora

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ -x_1-y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ -x_2-y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \\ -x_1-y_1-x_2-y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \\ -(x_1+x_2)-(y_1+y_2) \end{pmatrix} \in \pi$$

Infine $c\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ -x_1-y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx_1 \\ cy_1 \\ c(-x_1-y_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx_1 \\ cy_1 \\ -cx_1-cy_1 \end{pmatrix} \in \pi$

Pertanto π è un sottospazio di R^3

iv) Consideriamo in $\mathbb{R}^2$ l'insieme

$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| y = x^2 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}$. È un sottospazio di R^2?

- $0 \in S$? Sì, infatti $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0^2 \end{pmatrix} \in S$

- Se $v,w \in S$ è vero (è sempre vero) che $v+w \in S$? NO, infatti notiamo che $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1^2 \end{pmatrix} \in S$ e anche $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2^2 \end{pmatrix} \in S$. Tuttavia

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \notin S$ poiché $5 \neq 3^2$.

COMBINAZIONI LINEARI

In R^n consideriamo dei vettori $v_1, v_2, \cdots, v_k \in \mathbb{R}^n$.

Def: Diciamo che un vettore $v \in \mathbb{R}^n$ è combinazione lineare di $v_1, v_2, \cdots, v_k$ se esistono degli scalari $c_1, c_2, \cdots, c_k \in \mathbb{R}$ tali che

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_k v_k$$

In questo caso, i numeri $c_1, \cdots, c_k$ vengono detti coefficienti di combinazione lineare.

Una combinazione lineare è detta non banale se almeno un coefficiente è diverso da 0.

i) Consideriamo in R^n il vettore $0 \in \mathbb{R}^n$.

Dati $v_1, \cdots, v_k \in \mathbb{R}^n$ qualsiasi, è vero che 0 è combinazione lineare di $v_1, \cdots, v_k$?

Sì, infatti $0 = 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_k$ (combinazione banale)

ii) Siano $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ in R^3. È vero che $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ è combinazione lineare di v_1 e v_2? E $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$?

Dire che $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ è combinazione lineare di $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ significa affermare che esistono c_1 e c_2 (numeri) tali che $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

cioè $\begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ -c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \\ -c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ cioè

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ -c_1 - c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Questo a sua volta equivale a richiedere che il sistema

$$\begin{cases} c_1 = 3 \\ c_2 = 2 \\ -c_1 - c_2 = -5 \end{cases}$$ sia compatibile

Visto che lo è, ho che $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ è combinazione lineare di $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Per quanto riguarda $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ ho da affermare che $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ è combinazione lineare di $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ equivale ad affermare che il

sistema $$\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 3 \\ -c_1 - c_2 = -2 \end{cases}$$ sia compatibile.

Questo non è il caso, quindi $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ non è combinazione lineare di $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

iii) In $\mathbb{R}^2$ consideriamo $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

È vero che OGNI vettore di R^2 è combinazione lineare di v_1 e v_2?

Sia $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ qualsiasi, allora

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} c_1 = x \\ c_2 = y \end{cases}$$ sistema di 2 eq.ni in 2 incognite

Questo sistema è sempre compatibile e ha sempre un'unica soluzione. Pertanto è vero che ogni vettore $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ di R^2 è combinazione

lineare di $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (e lo è in un unico modo).