Es 1) Risolvere se possibile il seguente sistema:

numero che non moltiplica variabili

almeno un termine noto diverso da 0

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = -2 \\ -2x_1 + x_2 - 7x_3 + x_4 = -1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = -7 \end{cases}$$

omogeneo → $\dots = 0$, $\dots = 0$, $\dots = 0$

Questo è un sistema lineare non omogeneo

3 equazioni

4 incognite : x_1, x_2, x_3, x_4

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & -7 & +1 \\ 4 & -2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \qquad b = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

matrice del sistema / dei coefficienti

vettori dei termini noti

La matrice completa

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -7 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 5 & 4 & -7 \end{array}\right)$$

Per risolvere il sistema, riduciamo a scala la matrice completa con il metodo di Gass:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -7 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 5 & 4 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III} - 2\text{I} \to \text{III}]{\text{II} - \text{I} \to \text{II}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

matrice ridotta a scala

$$\xrightarrow[\text{III}-\text{II}\to\text{II}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = -2 \\ -3x_3 + 2x_4 = -3 \end{cases}$$

La matrice a scala ha 2 PIVOT $(r=2)$

$p_{11} = 2 \qquad p_{23} = -3$

L'ultimo pivot non è nell'ultima colonna $\Rightarrow$ il sistema ammette soluzioni (= compatibile) e le soluzioni dipendono

da $n-r$ variabili libere.
n° variabili

Quindi il sistema iniziale ha soluzione e le soluzioni dipendono da $n-r = 4-2 = 2$ variabili libere.

(vedi teorema di ROUCHÉ-CAPELLI)

Per risolvere il sistema iniziale possiamo risolvere il sistema ridotto a scala:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = -2 \\ -3x_3 + 2x_4 = -3 \end{cases}$$

sono le colonne senza PIVOT, mi daranno le variabili libere

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 + \frac{8}{3}x_4 + 4 + x_4 = -2 \\ x_3 = \frac{3+2x_4}{3} = \frac{2}{3}x_4 + 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 = -6 + x_2 - \frac{11}{3}x_4 \\ \text{———} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -3 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{11}{6}x_4 \\ x_3 = \frac{2}{3}x_4 + 1 \end{cases}$$

x_2, x_4 variabili libere

x_1, x_3 variabili dipendenti

L'insieme delle soluzioni

$$\text{Sol}(A|b) = \left\{ \begin{pmatrix} -3 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{11}{6}x_4 \\ x_2 \; t \\ \frac{2}{3}x_4 + 1 \\ x_4 \; s \end{pmatrix} \middle| \; \begin{matrix} x_2, x_4 \in \mathbb{R} \\ t, s \end{matrix} \right\} = \text{parametrica}$$

Es 2: Risolvere, se possibile, il sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = -2 \\ -2x_1 + x_2 - 7x_3 + x_4 = -1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 7 \end{cases}$$

non omogeneo

3 eq.ni

4 incognite: $x_1, x_2, x_3, x_4 \quad = n$

La matrice completa è:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & +4 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -7 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 5 & 4 & 7 \end{array}\right)$$

Applichiamo l'algoritmo di Gauss:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & +4 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -7 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 5 & 4 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III} - 2\text{I} \to \text{III}]{\text{II} + \text{I} \to \text{II}} \left(\begin{array}{ccccc} 2 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 11 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{III} - \text{II} \to \text{III}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \end{array}\right)$$

La matrice ridotta a scala ha 3 pivot:

$P_{11} = 2 \qquad P_{23} = -3 \qquad P_{35} = 14$

L'ultimo pivot si trova in ultima colonna $\Rightarrow$ sistema è impossibile

non è compatibile

Es 3: Discutere, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x + 2y - kz = 1 \\ 2x + 4y - 2z = k \end{cases}$$

2 eq.ni

3 incognite : x y z $n=3$

1 parametro : k

La matrice completa:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -k & 1 \\ 2 & 4 & -2 & k \end{array}\right)$$

Applichiamo l'algoritmo di Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -k & 1 \\ 2 & 4 & -2 & k \end{array}\right) \xrightarrow{II - 2I \to II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -k & 1 \\ 0 & 0 & -2+2k & k-2 \end{array}\right)$$

Abbiamo due casi
1. $-2 + 2k \neq 0$ PIVOT
2. $-2 + 2k = 0$

① $-2k + 2k \neq 0 \iff k \neq 1$

La matrice ridotta a scala

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -k & 1 \\ 0 & 0 & -2+2k & k-2 \end{pmatrix}$$

2 PIVOT $\rightarrow$ $r=2$

$P_{11} = 1$ $P_{23} = -2+2k$

L'ultimo NON si TROVA in ultima colonna (= compatibile), ammette soluzioni ed dipendono da n-r soluzioni, 1 variabile libera.

Risolviamo il sistema ridotto a scala:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -k & 1 \\ 0 & 0 & -2+2k & k-2 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x + 2y - kz = 1 \\ (-2+2k)z = k-2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \_\_\_\_ \\ z = \dfrac{k-2}{-2+2k} \end{cases}$$

posso farlo perchè $\neq 0$

variabile libera (=non c'erano PIVOT in colonna)

$$\begin{cases} x = -2y + k\left(\dfrac{k-2}{-2+2k}\right) + 1 \\ \_\_\_\_ \end{cases}$$

Per $k \neq 1$, il sistema ha soluzione e l'insieme delle soluzioni:

$$Sol\ (A|b) = \left\{ \begin{pmatrix} -2y + k\left(\dfrac{k-2}{-2+2k}\right) + 1 \\ y \\ -\dfrac{k-2}{2+2k} \end{pmatrix} \middle|\ y \in \mathbb{R} \right\}$$

② $-2+2k = 0 \rightarrow k = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo 2 Pivot $\rightarrow r = 2$

$p_{11} = 1 \qquad p_{24} = -1$

l'ultimo pivot si trova in ultima colonna, allora il sistema è impossibile

Es 4: Discutere al variare del parametro $h \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = h-3 \\ 5y + 2z = 3 \\ -x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

3 eq.

3 incognite $\quad n=3$

1 parametro $\quad h$

La matrice completa del sistema è:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & h-3 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Riduciamo a scala la matrice completa del sistema applicando l'algoritmo di Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & h-3 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\;III + \frac{1}{2} I \to III\;} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & h-3 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} & 1 & \frac{2+h-3}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\;III - \frac{1}{2} II \to III\;} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & h-3 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{h-4}{2} \end{pmatrix}$$

se $= 0$

se $\neq 0$

Abbiamo 2 casi: $\frac{h-4}{2} = 0$, $\quad \frac{h-4}{2} \neq 0$

1) $\frac{h-4}{2} = 0 \longrightarrow h = 4$

La matrice ridotta scala è:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Abbiamo 2 PIVOT $\rightarrow r=2$

$p_{11} = 2$ $\quad$ $p_{22} = 5$

L'ultimo pivot non si trova in ultima colonna, quindi il sistema è compatibile, le soluzioni dipendono da $n-r = 1$ variabili libere

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 5y + 2z = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{+2z-3}{10} \\ y = \frac{-2z+3}{5} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{1}{5}z + \frac{1}{5} \\ y = \frac{-2z+3}{5} \end{cases}$$

z è variabile libera

x,y variabili dipendenti

Per $h=4$, il sistema ha soluzione e l'insieme delle soluzioni:

$$Sol(A|b) = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{5}z + \frac{1}{5} \\ \frac{-2z+3}{5} \\ z \end{pmatrix} \middle| \; z \in \mathbb{R} \right\}$$

$Sol(Ax=b)$

2) $\frac{h-4}{2} \neq 0 \longrightarrow h \neq 4$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & h-3 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{h-4}{2} \end{pmatrix}$$

3 PIVOT $\Rightarrow r=3$

$p_{11} = 2$ $\quad$ $p_{22} = 5$ $\quad$ $p_{34} = \frac{h-4}{2}$

L'ultimo PIVOT è in ultima colonna, il sistema non è compatibile.

Es: Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ t & 4 \end{pmatrix}$ al variare di $t \in \mathbb{R}$

Per quali valori di t, il sistema lineare omogeneo associato ha soluzione?

$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ tx + 4y = 0 \end{cases}$$

chiamata anche banale

↓

Un sistema lineare omogeneo ha sempre soluzione (quella con $x=0$, $y=0$, $z=0$ ...)