

$X_i \rightarrow \text{row}$
 $j \rightarrow \text{column}$

$$a) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$b) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} = \text{not possible}$$

$$c) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$d) \langle \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle = 0+1=1$$

$$e) \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 0+2=2$$

$$f) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} = 0+2=2$$

$$g) \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 3+2=5$$

$$h) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} = 3+2=5$$

$$i) 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = 2 \cdot (0+2) = 4$$

$$j) 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \left(2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = 4 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$k) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \text{Tr} \left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right) = 5$$

$$3a) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$b) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c) 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + 1 = 2 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} + 1 = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ 14 \end{bmatrix} + 1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 11 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$d) \text{Tr}(X X^T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

$$e) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$f) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$g) 1+2+1=4$$

$$h) \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}_{1 \times 2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 9 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = 5 + 27 = 32$$

$$4a) v \otimes v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 & xy \\ yx & y^2 \end{bmatrix}$$

$$b) x^2 + y^2$$

$$c) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha + \gamma \\ 2\beta + \gamma \\ \beta + \gamma \end{bmatrix}$$

$$d) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha + 3\beta \\ 2\alpha + 3\beta + \gamma \end{bmatrix}$$

$$e) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 2\beta + \gamma \\ \alpha + \beta + \gamma \end{bmatrix}$$

Consolidate your knowledge

$$1) \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 36 \end{bmatrix} = 40 + x^T y \\ = 40 + \begin{bmatrix} 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ = 40 + 2 = 42$$

$$2) \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$3) \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 20 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$4) \begin{bmatrix} 14 & 10 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 18 & 18 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 17 & 28 \\ 16 & 20 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 35 & 46 \\ 24 & 32 \end{bmatrix}$$

$$5) \text{Tr}(Y Y^T) = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}^T \\ = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 21$$

$$6) \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 17 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 52 \\ 24 \end{bmatrix}$$