СПБГЭУ

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет информатики и прикладной математики

Кафедра прикладной математики и экономико-математических методов

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

на тему:

«Вычисление интеграла»

метод:

«Квадратурные формулы типа Эйлера. Формула Грегори — 3.1.15в»

Направление (специальность)________________01.03.02__________________
(код, наименование)

Направленность (специализация)______________________________________

Обучающийся _______________Бронников Егор Игоревич________________
(Ф.И.О. полностью)

Группа___ПМ-1901__
(номер группы)

Проверил _______________Хазанов Владимир Борисович_________________
(Ф.И.О. преподавателя)

Должность_____профессор____

Оценка _________________________ Дата: _________________

Подпись: ________________

Санкт-Петербург

2021

Оглавление

1. НЕОБХОДИМЫЕ ФОРМУЛЫ

Данные:

$f(x)$ − *функция*

a − *начальный промежуток итегрирования*

n − *количество разбиений*

Формулы:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx T_n = \frac{h}{2}\left(f_0 + 2\sum_{i=1}^{n-1} f_i + f_n\right) - \text{формула трапеций}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx T_n - \frac{h}{12}\left[\Delta f_{n-1} - \Delta f_0\right] - \frac{h}{24}\left[\Delta^2 f_{n-2} - \Delta^2 f_0\right] - \frac{19h}{720}\left[\Delta^3 f_{n-3} - \Delta f_0\right] - \frac{3h}{160}\left[\Delta^4 f_{n-4} - \Delta f_0\right] - \frac{863h}{60480}\left[\Delta^6 f_{n-6} - \Delta f_0\right]$$

2. ВХОДНЫЕ ДАННЫЕ

$f_1(x)=\sin(x^2)+1$, $[a_1=1;b_1=10]$, $n_1=150\,000$

$f_2(x)=\dfrac{x}{1+x}$, $[a_2=1;b_2=5]$, $n_2=100\,000$

$f_3(x)=\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}$, $[a_3=1;b_3=4]$, $n_3=120\,000$

$f_4(x)=\sin(\sin(x))$, $[a_4=0;b_4=4]$, $n_4=10\,000$

3. СКРИНШОТЫ ПРОГРАММЫ

```
Clear[trapezoidalFormula]
trapezoidalFormula[f_, {a_Real, b_Real}, n_Integer] := Module[
  {
   h = (b - a)/n,
   xk
  },
  xk = Table[a + h i, {i, 0, n}];
  N[h/2 ((f /. x → xk[[1]]) + 2 Sum[(f /. x → xk[[i]]), {i, 2, n}] + (f /. x → xk[[n + 1]]))]]
```

Рис.1 — Функция расчёта формулы трапеций

```
Clear[finiteDifferences]
finiteDifferences[y_List] := Module[
  {
   n = Length[y],
   coef
  },
  coef = ConstantArray[0, {n, 6}];
  coef[[All, 1]] = y;
  Do[
   coef[[i, j]] = coef[[i + 1, j - 1]] - coef[[i, j - 1]],
   {j, 2, 6}, {i, n - j + 1}];
  coef
 ]
```

Рис.2 — Функция расчёта конечных разностей

```
Clear[gregory]
gregory[f_, {a_Real, b_Real}, n_Integer] := Module[
  {
   h = (b - a)/n,
   xk,
   y,
   coefs
  },
  xk = Table[a + h i, {i, 0, n}];
  y = Composition[N, f /. x → # &][Range[n]];
  coefs = finiteDifferences[y];
  trapezoidalFormula[f, {a, b}, n] - h/12 (coefs[[n - 1, 1]] - coefs[[1, 1]]) - h/24 (coefs[[n - 2, 2]] - coefs[[1, 2]]) - (19 h)/720 (coefs[[n - 3, 3]] - coefs[[1, 3]]) - (3 h)/160 (coefs[[n - 4, 4]] - coefs[[1, 4]]) - (863 h)/60480 (coefs[[n - 6, 6]] - coefs[[1, 6]])
 ]
```

Рис.3 — Функция расчёта формулы Грегори

4. РЕЗУЛЬТАТЫ И ГРАФИКИ

На графиках продемонстрированы приближения к решению в зависимости от количества разбиений.

```
f1 = Sin[x^2] + 1;

NIntegrate[f1, {x, 1, 10}]

9.2734

gregory[f1, {1., 10.}, 150000]

9.2734

res1 = ConstantArray[NIntegrate[f1, {x, 1, 10}], 500 - 6];

test1 = Table[gregory[f1, {1., 10.}, i], {i, 7, 500}];

ListLinePlot[{res1, test1},
 PlotRange → {1, 12},
 PlotLegends → {"Wolfram", "Приближения"},
 PlotLabel → Style[Framed["Пример №1: Sin(x^2)+1"], 16, Bold, Black],
 PlotStyle → {{Red}, {Blue}},
 ImageSize → Large]
```

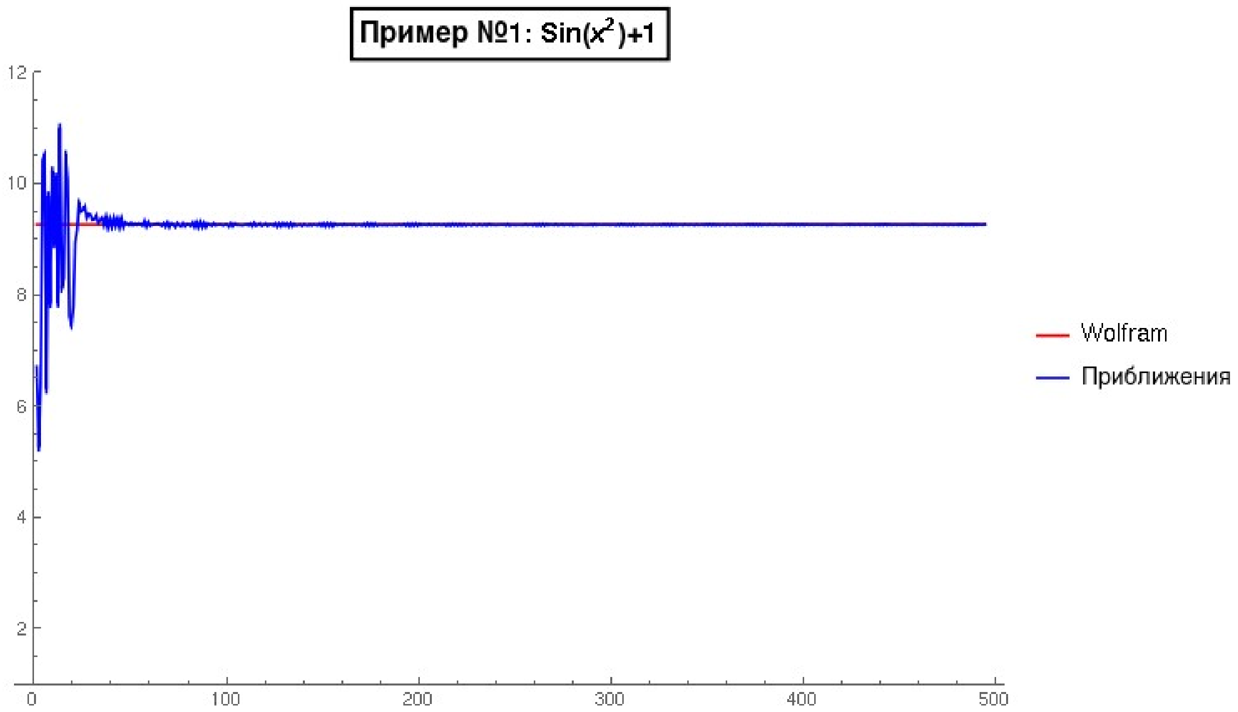

Рис. 4 — Пример №1

```
f2 = x/(1 + x);

NIntegrate[f2, {x, 1, 5}]

2.90139

gregory[f2, {1., 5.}, 100 000]

2.90139

res2 = ConstantArray[NIntegrate[f2, {x, 1, 5}], 500 - 7];

test2 = Table[gregory[f2, {1., 5.}, i], {i, 7, 500}];

ListLinePlot[{res2, test2},
 PlotRange → {{2.5, 2.95}},
 PlotLegends → {"Wolfram", "Приближения"},
 PlotLabel → Style[Framed["Пример №2: x/(1 + x)"], 16, Bold, Black],
 PlotStyle → {{Red}, {Blue}},
 ImageSize → Large]
```

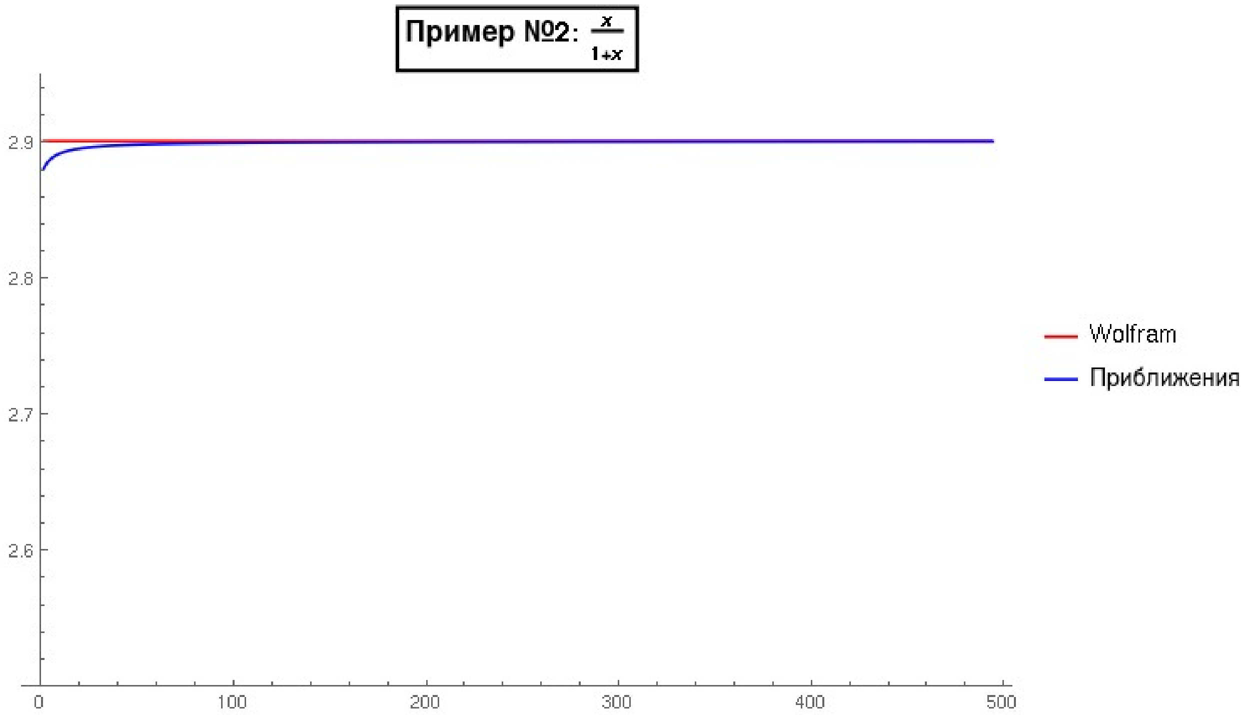

Рис. 5 — Пример №2

```
f3 = Sqrt[1 + 1/x];

NIntegrate[f3, {x, 1, 4}]
3.62018

gregory[f3, {1., 4.}, 120000]
3.62018

res3 = ConstantArray[NIntegrate[f3, {x, 1, 4}], 500 - 7];

test3 = Table[gregory[f3, {1., 4.}, i], {i, 7, 500}];

ListLinePlot[{res3, test3},
 PlotRange → {3.5, 3.7},
 PlotLegends → {"Wolfram", "Приближения"},
 PlotLabel → Style[Framed["Пример №3:  Sqrt[1 + 1/x] "], 16, Bold, Black],
 PlotStyle → {{Red}, {Blue}},
 ImageSize → Large]
```

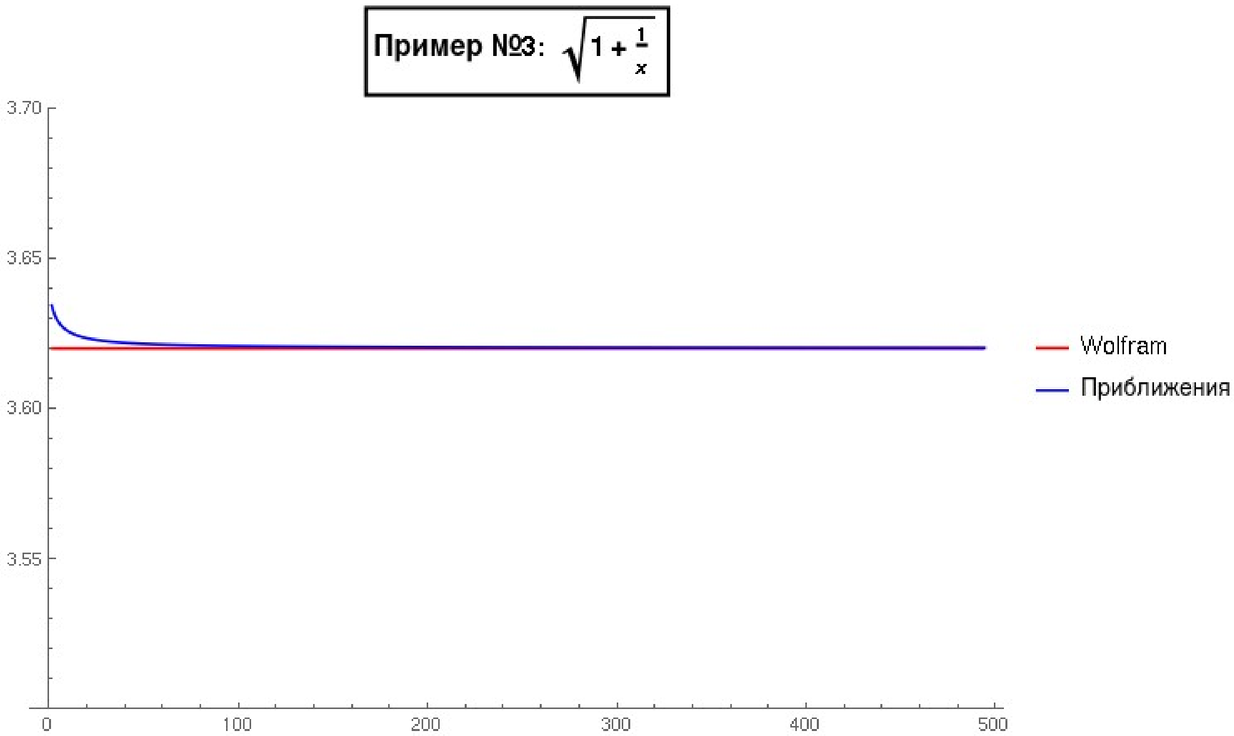

Рис. 6 — Пример №3

```
f4 = Sin[Sin[x]];

NIntegrate[f4, {x, 0, 4}]

1.45747

gregory[f4, {0., 4.}, 10000]

1.45747

res4 = ConstantArray[NIntegrate[f4, {x, 0, 4}], 1000 - 7];

test4 = Table[gregory[f4, {0., 4.}, i], {i, 7, 1000}];

ListLinePlot[{res4, test4},
 PlotRange → {1, 1.5},
 PlotLegends → {"Wolfram", "Приближения"},
 PlotLabel → Style[Framed["Пример №4: Sin(Sin(x))"], 16, Bold, Black],
 PlotStyle → {{Red}, {Blue}},
 ImageSize → Large]
```

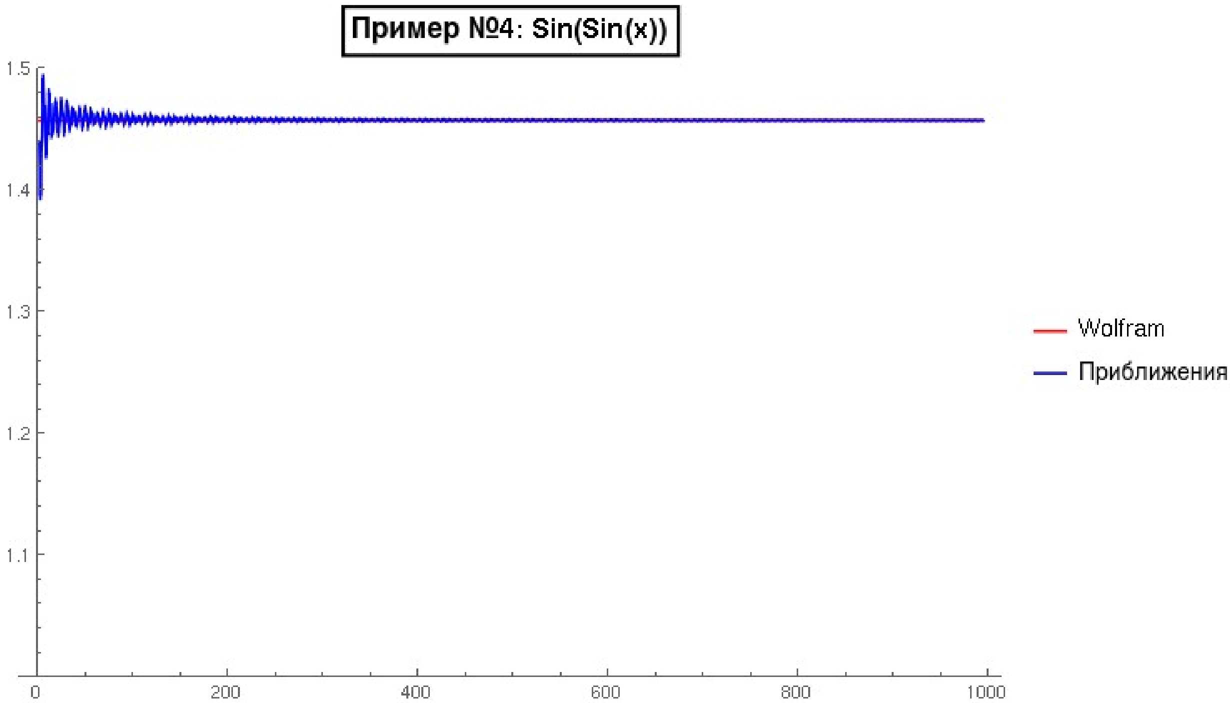

Рис. 7 — Пример №4