МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет информатики и прикладной математики

Кафедра прикладной математики и экономико-математических методов

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

на тему:

«Построения наилучшего приближения функции»

метод:

«Паде-аппроксимация — 1.3.6[n+2/n]»

Направление (специальность)________________01.03.02___________________
(код, наименование)

Направленность (специализация)____

Обучающийся _______________Бронников Егор Игоревич________________
(Ф.И.О. полностью)

Группа___ПМ-1901__
(номер группы)

Проверил _______________Хазанов Владимир Борисович_________________
(Ф.И.О. преподавателя)

Должность_____профессор____

Оценка ________________________ Дата: ________________

Подпись: _______________

Санкт-Петербург

2021

Оглавление

1. НЕОБХОДИМЫЕ ФОРМУЛЫ

Данные:

$f(x)$ *− функция*

n *− степень результирующего полинома*

Формулы:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \quad -\text{разложение функции в ряд Тейлора}$$

$$[n+2/n]_f=\frac{a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\ldots+b_nx_n}=\sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k \quad , \quad d_i=c_i \quad \text{где } i=0\ldots 2n+2$$

$$\sum_{k=0}^{n+2} a_k x^k=\sum_{i=0}^{2n+2} c_i x^i \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \quad \Rightarrow b_0=1$$

Решая систему, находим коэффициенты b_i

$$\underbrace{\begin{bmatrix} c_3 & c_4 & \cdots & c_{n+1} & c_{n+2} \\ c_4 & \cdots & \cdots & \cdots & c_{n+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n+1} & \cdots & \cdots & \cdots & c_{2n} \\ c_{n+2} & c_{n+3} & \cdots & c_{2n} & c_{2n+1} \end{bmatrix}}_{\text{Ганкелева матрица}} \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ \vdots \\ b_2 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{n+3} \\ c_{n+2} \\ \vdots \\ c_{2n+1} \\ c_{2n+2} \end{bmatrix}$$

Находим коэффициенты a_i

$$a_0=c_0b_0$$

$$a_1=c_1b_0+c_0b_1$$

$$\vdots$$

$$a_{n-1}=c_{n-1}b_0+c_{n-2}b_1+\ldots+c_0b_{n-1}$$

$$a_n=c_nb_0+c_{n-1}b_1+\ldots+c_0b_n$$

2. ВХОДНЫЕ ДАННЫЕ

$f_1(x)=\frac{1}{1+\sin(x^2)}$, $n_1=6$

$f_2(x)=\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}x}{1+2x}}$, $n_2=2$

$f_3(x)=\ln(1+x)$, $n_3=2$

$f_4(x)=\frac{e^{-x}}{1+x}$, $n_4=4$

$f_5(x)=\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+x}}$, $n_5=3$

3. СКРИНШОТЫ ПРОГРАММЫ

```
Clear[pade]
pade[f_, n_Integer] := Module[
  {
   a, b,
   c,
   res, hankelMatrix
  },
  c = CoefficientList[Series[f, {x, 0, 2 n + 2}], x];
  hankelMatrix = Table[c[[i + j]], {j, 4, n + 3}, {i, 0, n - 1}];
  res = Table[c[[i]], {i, n + 4, 2 n + 3}];
  b = Composition[Abs, Prepend[#, 1] &, Reverse][LinearSolve[hankelMatrix, res]];
  a = Dot[Take[b, {1, #}], Reverse[Take[c, {1, #}]]] & /@ Range[n + 1];
  Sum[a[[i + 1]] x^i, {i, 0, n}] / Sum[b[[i + 1]] x^i, {i, 0, n}]
 ]
```

Функция

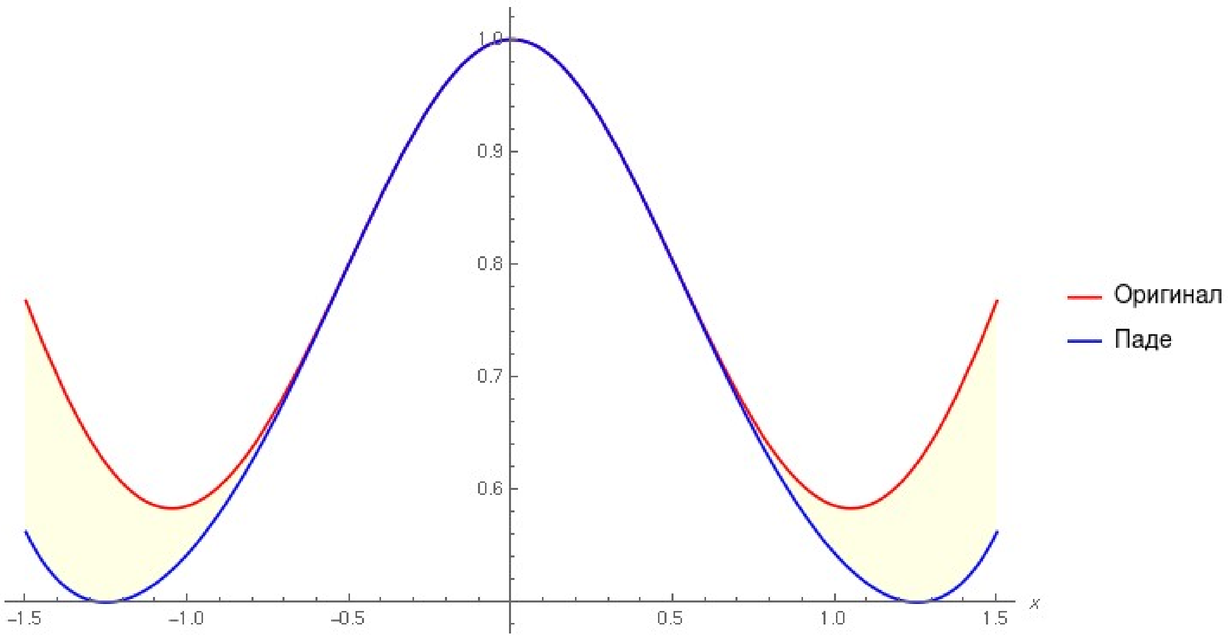
4. РЕЗУЛЬТАТЫ И ГРАФИКИ

```
f1 = 1/(1 + Sin[x^2])
n1 = 6;
res1 = pade[f1, n1]
```

$$\frac{1}{1+\mathrm{Sin}[x^2]}$$

$$\frac{1+\frac{11\,x^2}{686}+\frac{3\,x^4}{49}+\frac{8647\,x^6}{41\,160}}{1+\frac{697\,x^2}{686}+\frac{53\,x^4}{686}+\frac{4307\,x^6}{41\,160}}$$

```
Plot[{res1, f1}, {x, -1.5, 1.5},
 PlotLegends → {"Оригинал", "Паде"},
 AxesLabel → Automatic,
 Filling → {1 → {2}},
 FillingStyle → Directive[Opacity[0.1], Yellow],
 PlotStyle → {{Red}, {Blue}},
 ImageSize → Large]
```



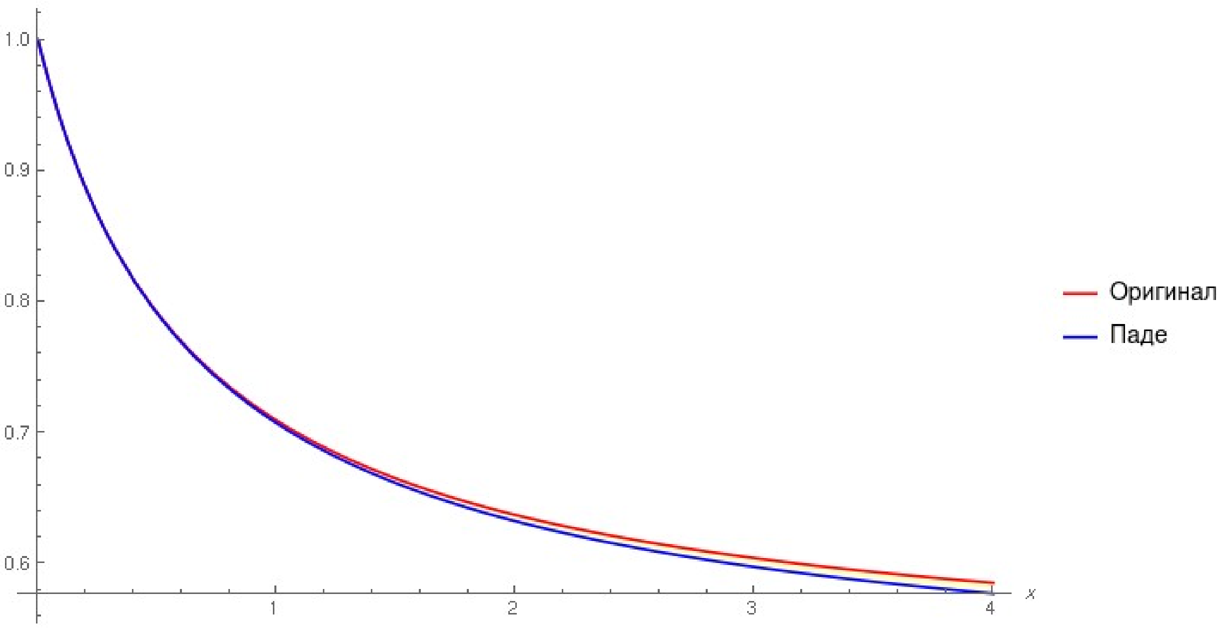
Пример №1

```
f2 = Sqrt[(1 + 1/2 x)/(1 + 2 x)]
n2 = 2;
res2 = pade[f2, n2]
```

$$\sqrt{\frac{1+\frac{x}{2}}{1+2\,x}}$$

$$\frac{1+\frac{76\,577\,x}{32\,486}+\frac{307\,441\,x^{2}}{259\,888}}{1+\frac{201\,883\,x}{64\,972}+\frac{1\,192\,703\,x^{2}}{519\,776}}$$

```
Plot[{res2, f2}, {x, 0, 4},
 PlotLegends → {"Оригинал", "Паде"},
 AxesLabel → Automatic,
 Filling → {1 → {2}},
 FillingStyle → Directive[Yellow],
 PlotStyle → {{Red}, {Blue}},
 ImageSize → Large]
```



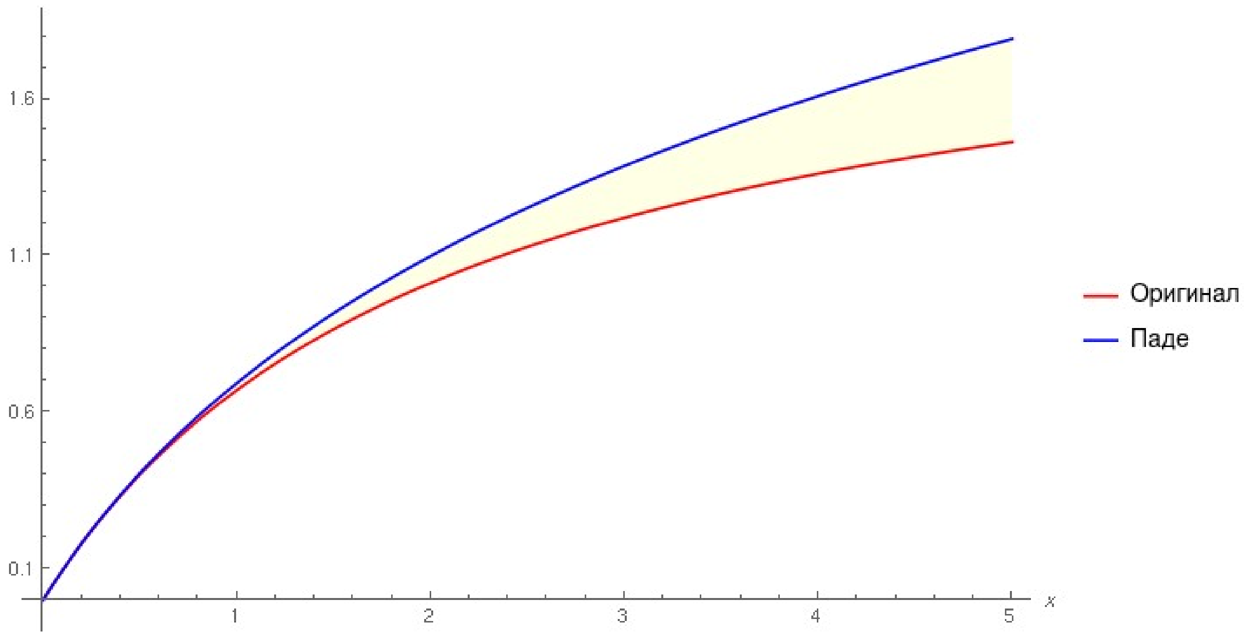
Пример №2

```
f3 = Log[1 + x]
n3 = 2;
res3 = pade[f3, n3]
```

Log[1 + x]

$$\frac{x + \frac{5 x^2}{6}}{1 + \frac{4 x}{3} + \frac{2 x^2}{5}}$$

```
Plot[{res3, f3}, {x, 0, 5},
 PlotLegends → {"Оригинал", "Паде"},
 AxesLabel → Automatic,
 Filling → {1 → {2}},
 FillingStyle → Directive[Opacity[0.1], Yellow],
 PlotStyle → {{Red}, {Blue}},
 ImageSize → Large]
```



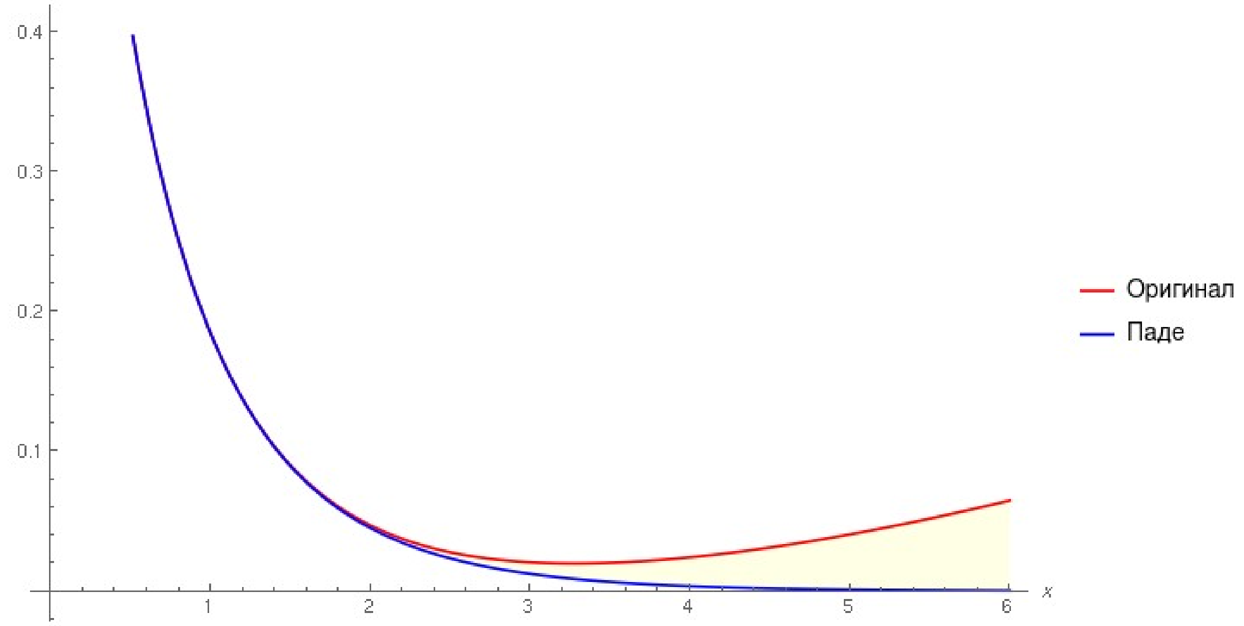
Пример №3

```
f4 = e^-x / (1 + x)
n4 = 4;
res4 = pade[f4, n4]
```

$$\frac{e^{-x}}{1+x}$$

$$\frac{1-\frac{385\,398\,x}{580\,625}+\frac{47\,907\,x^2}{232\,250}-\frac{40\,762\,x^3}{1\,045\,125}+\frac{62\,767\,x^4}{13\,006\,000}}{1+\frac{775\,852\,x}{580\,625}+\frac{219\,909\,x^2}{580\,625}+\frac{232\,882\,x^3}{5\,225\,625}+\frac{1\,203\,329\,x^4}{585\,270\,000}}$$

```
Plot[{res4, f4}, {x, 0, 6},
 PlotLegends → {"Оригинал", "Паде"},
 AxesLabel → Automatic,
 Filling → {1 → {2}},
 FillingStyle → Directive[Opacity[0.1], Yellow],
 PlotStyle → {{Red}, {Blue}},
 ImageSize → Large]
```



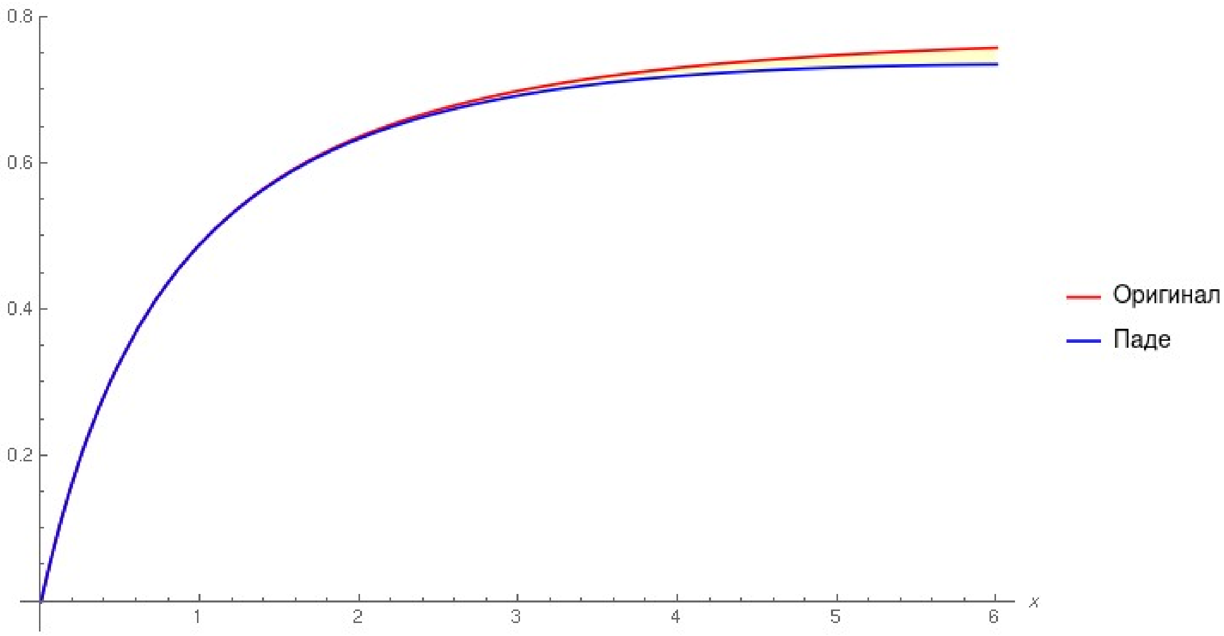
Пример №4

```
f5 = Log[1 + x]/Sqrt[1 + x]
n5 = 3;
res5 = pade[f5, n5]
```

$$\frac{\operatorname{Log}[1+x]}{\sqrt{1+x}}$$

$$\frac{x+\frac{32902\,x^2}{33451}+\frac{315943\,x^3}{2809884}}{1+\frac{66353\,x}{33451}+\frac{2131193\,x^2}{1873256}+\frac{142053\,x^3}{936628}}$$

```
Plot[{res5, f5}, {x, 0, 6},
 PlotLegends → {"Оригинал", "Паде"},
 AxesLabel → Automatic,
 Filling → {1 → {2}},
 FillingStyle → Directive[Yellow],
 PlotStyle → {{Red}, {Blue}},
 ImageSize → Large]
```



Пример №5