



Языки программирования. Семантика и система типов
Теоретическое задание. Тема 2

Бронников Егор

Выражение 1. $(\lambda x : Bool \rightarrow Nat. \lambda y : Bool. \text{succ } (x y)) (\lambda x : Bool. \text{if } x \text{ then succ } 0 \text{ else } 0) \text{ true}$

Дерево вывода типа.

$\frac{x : Bool \rightarrow Nat, y : Bool \vdash \text{succ } (x y) : Nat}{x : Bool \rightarrow Nat \vdash \lambda y : Bool. \text{succ } (x y) : (Bool \rightarrow Nat)}$	$\frac{x : Bool \vdash x : Bool}{x : Bool \vdash \text{if } x \text{ then succ } 0 \text{ else } 0 : Nat}$	$\frac{x : Bool \vdash \text{succ } 0 : Nat}{x : Bool \vdash 0 : Nat}$
$\vdash \lambda x : Bool \rightarrow Nat. \lambda y : Bool. \text{succ } (x y) : (Bool \rightarrow Nat) \rightarrow (Bool \rightarrow Nat)$	$\vdash \lambda x : Bool. \text{if } x \text{ then succ } 0 \text{ else } 0 : Bool \rightarrow Nat$	
$\vdash (\lambda x : Bool \rightarrow Nat. \lambda y : Bool. \text{succ } (x y)) (\lambda x : Bool. \text{if } x \text{ then succ } 0 \text{ else } 0) : Bool \rightarrow Nat$		$\vdash \text{true} : Bool$
$\vdash (\lambda x : Bool \rightarrow Nat. \lambda y : Bool. \text{succ } (x y)) (\lambda x : Bool. \text{if } x \text{ then succ } 0 \text{ else } 0) \text{ true} : Nat$		

Выражение 2. $(\lambda b : Bool. \text{if } b \text{ then } (\lambda x : Nat. \lambda y : Bool. x) \text{ else } (\lambda x : Nat. \lambda y : Bool. y)) \text{ false } 0$

Дерево вывода типа.

$\frac{b : Bool, x : Nat, y : Bool \vdash x : Nat}{b : Bool, x : Nat \vdash \lambda y : Bool. x : Bool \rightarrow Nat}$	$\frac{b : Bool, x : Nat, y : Bool \vdash y : Bool}{b : Bool, x : Nat \vdash \lambda y : Bool. y : Bool \rightarrow Bool}$
$b : Bool \vdash b : Bool$	$b : Bool \vdash \lambda x : Nat. \lambda y : Bool. x : Nat \rightarrow (Bool \rightarrow Nat)$
$b : Bool \vdash \text{if } b \text{ then } (\lambda x : Nat. \lambda y : Bool. x) \text{ else } (\lambda x : Nat. \lambda y : Bool. y) : (Nat \rightarrow (Bool \rightarrow Nat)) \vee (Nat \rightarrow (Bool \rightarrow Bool))$	$\vdash \text{false} : Bool$
$\vdash (\lambda b : Bool. \text{if } b \text{ then } (\lambda x : Nat. \lambda y : Bool. x) \text{ else } (\lambda x : Nat. \lambda y : Bool. y)) \text{ false} : Bool \rightarrow ((Nat \rightarrow (Bool \rightarrow Nat)) \vee (Nat \rightarrow (Bool \rightarrow Bool)))$	$\vdash 0 : Nat$
$\vdash (\lambda b : Bool. \text{if } b \text{ then } (\lambda x : Nat. \lambda y : Bool. x) \text{ else } (\lambda x : Nat. \lambda y : Bool. y)) \text{ false } 0 : (Bool \rightarrow Nat) \vee (Bool \rightarrow Bool)$	

Ответ. Данный терм является плохо типизированным.

Выражение 3. $(\lambda f : (Nat \rightarrow Nat) \rightarrow (Nat \rightarrow Nat). f (f (\lambda x : Nat. x)) 0) (\lambda z : Nat \rightarrow Nat. \lambda n : Nat. z (z n))$

Дерево вывода типа.

$\frac{f : (Nat \rightarrow Nat) \rightarrow (Nat \rightarrow Nat) \vdash f : (Nat \rightarrow Nat) \rightarrow (Nat \rightarrow Nat)}{f : (Nat \rightarrow Nat) \rightarrow (Nat \rightarrow Nat) \vdash f (f (\lambda x : Nat. x)) : (Nat \rightarrow Nat)}$	$\frac{f : (Nat \rightarrow Nat) \rightarrow (Nat \rightarrow Nat), x : Nat \vdash x : Nat}{f : (Nat \rightarrow Nat) \rightarrow (Nat \rightarrow Nat) \vdash \lambda x : Nat. x : Nat \rightarrow Nat}$	$\frac{f : (Nat \rightarrow Nat) \rightarrow (Nat \rightarrow Nat) \vdash f (f (\lambda x : Nat. x)) 0 : Nat}{f : (Nat \rightarrow Nat) \rightarrow (Nat \rightarrow Nat) \vdash 0 : Nat}$	$\frac{z : Nat \rightarrow Nat, n : Nat \vdash z : Nat \rightarrow Nat}{z : Nat \rightarrow Nat, n : Nat \vdash z (z n) : Nat}$
$\vdash (\lambda f : (Nat \rightarrow Nat) \rightarrow (Nat \rightarrow Nat). f (f (\lambda x : Nat. x)) 0) : (Nat \rightarrow Nat) \rightarrow (Nat \rightarrow Nat)$	$\vdash (\lambda z : Nat \rightarrow Nat. \lambda n : Nat. z (z n)) : (Nat \rightarrow Nat) \rightarrow (Nat \rightarrow Nat)$		
$\vdash (\lambda f : (Nat \rightarrow Nat) \rightarrow (Nat \rightarrow Nat). f (f (\lambda x : Nat. x)) 0) (\lambda z : Nat \rightarrow Nat. \lambda n : Nat. z (z n)) : Nat$			

Примечание. Рекомендуется изучить исходный Excel-документ `source.xlsx`.