



Языки программирования. Семантика и система типов  
Теоретическое задание. Тема 14

Бронников Егор

---

**Задание 1.** Предположите кодировку для типов-сумм в Системе  $F_{<}$ : (аналогично кодировке пар):

- (a) определите тип  $Sum\ T_1\ T_2$ ;
- (b) выпишите типы и определения *функций*  $left$ ,  $right$ ,  $match$ , соответствующих синтаксическим конструкциям  $inl(t)$ ,  $inr(t)$  и  $case\ t\ of\ inl(x_1) \Rightarrow t_1 \mid inr(x_2) \Rightarrow t_2$ ;
- (c) покажите (построив соответствующее дерево вывода), что выполняется следующее правило:

$$\frac{\Gamma \vdash S_1 <: T_1 \quad \Gamma \vdash S_2 <: T_2}{\Gamma \vdash Sum\ S_1\ S_2 <: Sum\ T_1\ T_2} \text{ S-Sum}$$

*Решение.*

(a) *Определение типа*  $Sum\ T_1\ T_2$ .

$$Sum\ T_1\ T_2 = \forall X. (T_1 \rightarrow X) \rightarrow (T_2 \rightarrow X) \rightarrow X$$

(b) *Типы и определения функций*  $left$ ,  $right$ ,  $match$ , соответствующих синтаксическим конструкциям  $inl(t)$ ,  $inr(t)$  и  $case\ t\ of\ inl(x_1) \Rightarrow t_1 \mid inr(x_2) \Rightarrow t_2$ .

$$left = \Lambda X. \Lambda T_1. \Lambda T_2. \lambda r : T_1. \lambda f_1 : T_1 \rightarrow X. \lambda f_2 : T_2 \rightarrow X. f_1\ r\ as\ Sum\ T_1\ T_2$$

$$right = \Lambda X. \Lambda T_1. \Lambda T_2. \lambda r : T_2. \lambda f_1 : T_1 \rightarrow X. \lambda f_2 : T_2 \rightarrow X. f_2\ r\ as\ Sum\ T_1\ T_2$$

$$match = \Lambda X. \Lambda T_1. \Lambda T_2. \lambda r : Sum\ T_1\ T_2. \lambda y_1 : T_1 \rightarrow X. \lambda y_2 : T_2 \rightarrow X. r\ [X]\ y_1\ y_2$$

(c) *Дерево вывода.*

$$\begin{array}{c} \frac{\Gamma \vdash S_1 <: T_1}{\Gamma \vdash (T_1 \rightarrow X) <: (S_1 \rightarrow X)} \quad \frac{\frac{\Gamma \vdash X <: X}{\Gamma \vdash (T_2 \rightarrow X) <: (S_2 \rightarrow X)}}{\Gamma \vdash ((S_2 \rightarrow X) \rightarrow X) <: ((T_2 \rightarrow X) \rightarrow X)} \\ \frac{\Gamma \vdash Top <: Top \quad \Gamma \vdash ((S_1 \rightarrow X) \rightarrow ((S_2 \rightarrow X) \rightarrow X)) <: ((T_1 \rightarrow X) \rightarrow ((T_2 \rightarrow X) \rightarrow X))}{\Gamma \vdash (\forall X. (S_1 \rightarrow X) \rightarrow (S_2 \rightarrow X) \rightarrow X) <: (\forall X. (T_1 \rightarrow X) \rightarrow (T_2 \rightarrow X) \rightarrow X)} \\ \hline \Gamma \vdash Sum\ S_1\ S_2 <: Sum\ T_1\ T_2 \end{array}$$


---

---

**Задание 2.** Для каждого из следующих типов ядерной Системы  $F_{<}$ , постройте (любой) терм этого типа вместе с соответствующим деревом вывода типа (включая поддеревья вывода подтипизации, где необходимо) или покажите, что это невозможно:

(a)  $\forall X <: Top. \forall Y <: X. X \rightarrow Y$

(b)  $\forall X <: Top. \forall Y <: X. Y \rightarrow X$

(c)  $\forall X <: Top. \forall Y <: X. Y \forall Z <: Y. Y \rightarrow (X \rightarrow Z) \rightarrow Z$

*Решение.*

(a)  $\forall X <: Top. \forall Y <: X. X \rightarrow Y$

*Ответ.* Невозможно построить терм, так как нет гарантий, что любой элемент типа  $X$  можно преобразовать в любой элемент типа  $Y$ , потому что  $Y$  может быть любым подтипом  $X$ , включая пустой тип.

(b)  $\forall X <: Top. \forall Y <: X. Y \rightarrow X$

*Ответ.* —

(c)  $\forall X <: Top. \forall Y <: X. Y \forall Z <: Y. Y \rightarrow (X \rightarrow Z) \rightarrow Z$

*Ответ.* —

---

**Задание 3.** Постройте дерево вывода, соответствующее алгоритму проверки типов для ядра  $F_{<}$  для соответствующих замкнутых термов:

(a)  $(\lambda X <: Top. \lambda x : X. x) [\{a : Nat, b : Bool\}] \{a = 0, b = true, c = false\} : \{a : Nat\}$

(b)  $\lambda X <: Top. \lambda Y <: X \rightarrow X. \lambda Z <: X \rightarrow Y. \lambda f : Z. \lambda x : X. f x x : \forall X <: Top. \forall Y <: X \rightarrow X. \forall Z <: X \rightarrow Y. Z \rightarrow X \rightarrow X$

(c)  $\forall X <: Top. \lambda f : (\forall Y <: X \rightarrow X. Y). \lambda x : X. f x x : \forall X <: \{a : Nat\}. (\forall Y <: X \rightarrow \{a : Nat\}. X \rightarrow X) \rightarrow X \rightarrow \{a : Nat\}$

*Решение.*

—