Языки программирования. Семантика и система типов

Теоретическое задание. Тема 11

Бронников Егор

Задание 1. Предположите правила типизации на основе ограничений для пар и типов-сумм. Используя предложенные правила, постройте дерево вывода типа с ограничениями, имеющее заключение:

$$. \quad \vdash \quad \lambda x : X. (case\ x\ of\ inl\, y \Rightarrow y \mid inr\, z \Rightarrow z.1).2\ false \quad : \quad S \,|_{\chi}\, C$$

для некоторых S, C и χ.

Решение.

Правила типизации на основе ограничений для пар.

$$\frac{\Gamma \vdash t_1 : T_1 \,|_{x_1}\, C_1 \quad \Gamma \vdash t_2 : T_2 \,|_{x_2}\, C_2}{\Gamma \vdash \{t_1, t_2\} : T_1 \times T_2 \,|_x\, C_1 \cup C_2} \quad T\text{-}Pair$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : T \,|_x\, C}{\Gamma \vdash t.1 : T_1 \,|_x\, C \cup \{T = T_1 + T_2\}} \quad T\text{-}Proj1$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : T \,|_x\, C}{\Gamma \vdash t.2 : T_2 \,|_x\, C \cup \{T = T_1 + T_2\}} \quad T\text{-}Proj2$$

Правила типизации на основе ограничений для типов-сумм.

$$\frac{\Gamma \vdash t : T_1 \,|_x\, C}{\Gamma \vdash inl\ t : T_1 + T_2 \,|_x\, C} \quad T\text{-}Inl$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : T_2 \,|_x\, C}{\Gamma \vdash inr\ t : T_1 + T_2 \,|_x\, C} \quad T\text{-}Inr$$

$$\frac{\Gamma \vdash t_0 : T \,|_x\, C_0 \quad \Gamma, x : T_1 \vdash t : X \,|_x\, C_1 \quad \Gamma, x_2 : T_2 \vdash t : Y \,|_x\, C_2}{\Gamma \vdash case\ t_0\ of\ inl\, x_1 \Rightarrow t_1 \mid inr\, x_2 \Rightarrow t_2 : X \,|_x\, C_0 \cup C_1 \cup C_2 \cup \{X = Y, T = T_1 + T_2\}} \quad T\text{-}Case$$

Дерево вывода типа с ограничениями.

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, z{:}Z \vdash z{:}Z}}{\Gamma, z{:}Z \vdash z{:}Z \,|_{\emptyset}\, \{\}}}{\Gamma, z{:}Z \vdash z.1{:}Z_1 \,|_x\, \{Z = Z_1 + Z_2\}} \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, y{:}Y \vdash y{:}Y}}{\Gamma, y{:}Y \vdash y{:}Y \,|_{\emptyset}\, \{\}} \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, x{:}X \vdash x{:}X}}{\Gamma, x{:}X \vdash x{:}X \,|_{\emptyset}\, \{\}}}{\Gamma, x{:}T \vdash case\ x\ of\ inl\ y \Rightarrow y \mid inr\ z \Rightarrow z.1 : Y \,|_x\, \{X = T_1 + T_2, Y = T_1, Z = T_2, Z_1 = Y, Z = Z_1 + Z_2\}}}{\Gamma, x{:}T \vdash (case\ x\ of\ inl\ y \Rightarrow y \mid inr\ z \Rightarrow z.1).2\ : X \to Y_2 \,|_x\, \{Y = Y_1 + Y_2, X = T_1 + T_2, Y = T_1, Z = T_2, Z_1 = Y, Z = Z_1 + Z_2\}}}{\Gamma \vdash \lambda x{:}X\,.(case\ x\ of\ inl\ y \Rightarrow y \mid inr\ z \Rightarrow z.1).2\ : X \to Y_2 \,|_x\, \{Y = Y_1 + Y_2, X = T_1 + T_2, Y = T_1, Z = T_2, Z_1 = Y, Z = Z_1 + Z_2, X = Bool\}} \quad \dfrac{}{false : Bool \mid \{\}}}{\Gamma \vdash \lambda x{:}X\,.(case\ x\ of\ inl\ y \Rightarrow y \mid inr\ z \Rightarrow z.1).2\ false : ERROR \,|_x\, \{Y = Y_1 + Y_2, X = T_1 + T_2, Y = T_1, Z = T_2, Z_1 = Y, Z = Z_1 + Z_2, X = Bool\}}$$

Ответ. Конфликт $\{X = T_1 + T_2, X = Bool\}$

Задание 2. Выпишите главные унификаторы для следующих множеств ограничений, если возможно. Иначе, укажите ограничение, на котором алгоритм унификации выдаёт неудачу.

(a) $\{A \to B = B \to Nat, C \to A = Bool \to B\}$

(b) $\{A \to B = (C \to D) \to A, C \to A = B\}$

(c) $\{A = B \to B, C \to C = A \to B\}$

(d) $\{A \to B = B \to C, C \to A = A \to B\}$

(e) $\{A \to A = (B \to B) \to A, B \to A = (C \to C) \to (B \to B), C = D \to D\}$

Решение.

Главные унификаторы:

(a) $\{A = Nat, B = Nat, C = Bool\}$

(b) $\{B = A, C \to A = B\}$

(c) $\{A = B \to B, C = A, C = B\}$

(d) $\{A = B, B = C\}$

(e) $\{A = ((D \to D) \to (D \to D)) \to ((D \to D) \to (D \to D)), B = (D \to D) \to (D \to D), C = D \to D\}$

Задание 3. Покажите, что следующие подстановки σ и θ эквивалентны (т.е. $\sigma \sqsubseteq \theta$ и $\theta \sqsubseteq \sigma$):

$$\sigma = [A \mapsto B, B \mapsto A \to Bool, C \mapsto A]$$
$$\theta = [B \mapsto C \to Bool]$$

Решение.

Необходимо рассмотреть применение подстановок σ и θ к каждой из типов A, B и C.

(a) Тип A.

Применим подстановку σ к типу A: $\sigma(A) = B$; $\sigma(B) = A \to Bool$, значит $\sigma(A) = A \to Bool$.
Применим подстановку θ к типу A: $\theta(A) = A$.

(b) Тип B.

Применим подстановку σ к типу B: $\sigma(B) = A \to Bool$.
Применим подстановку θ к типу B: $\theta(B) = C \to Bool$, так как $\sigma(C) = A$, то $\theta(B) = A \to Bool$.

(c) Тип C.

Применим подстановку σ к типу C: $\sigma(C) = A$; $\sigma(A) = B$, $\sigma(B) = A \to Bool$, значит $\sigma(C) = A \to Bool$.
Применим подстановку θ к типу C: $\theta(C) = C$.

Ответ. Подстановки σ и θ – не эквиваленты, так как $\sigma(A) = \sigma(B) = \sigma(C) = A \to Bool$, однако $\theta(A) = A$ и $\theta(C) = C$, то есть θ не меняется A и C.

Задание 4. Используя неявные аннотации типа и `let`-полиморфизм, постройте дерево вывода типа с ограничениями и найдите главный тип для следующего выражения (в пустом контексте):

$$let\ f = \lambda s.\, \lambda z.\, s(s(sz))\ in\, f\ f\ f$$

Решение.

$$-$$
