Языки программирования. Семантика и система типов

Теоретическое задание. Тема 5

Бронников Егор

Расширьте доказательство теоремы о нормализации простого типизированного λ-исчисления, добавив поддержку арифметических выражений, `let`-связываний и типов-сумм.

Задание 1. Расширьте определение $R_T(t)$ для случаев:

- $T = Nat$
- $T = T_1 + T_2$

Решение.

Случай 1. $T = Nat$.

$R_{Nat}(t)$, если t завершаем.
Более подробно можно рассмотреть термы, которые добавляются при добавлении типа Nat:

- $R_{Nat}(0)$ – очевидно, так как 0 – значение;
- $R_{Nat}(succ\ t)$ – если $R_{Nat}(t)$ завершаем;
- $R_{Nat}(pred\ t)$ – если $R_{Nat}(t)$ завершаем;
- $R_{Nat}(iszero\ t)$ – если $R_{Nat}(t)$ завершаем.

Случай 2. $T = T_1 + T_2$.

$R_{T_1+T_2}(t)$, если t завершаем и существует $R_{T_1}(inl\ t)$ и $R_{T_2}(inr\ t)$.
Более подробно можно рассмотреть термы, которые добавляются при добавлении типа $T_1 + T_2$:

- $R_{T_1+T_2}(inl\ t)$ – если $R_{T_1}(t)$ завершаем;
- $R_{T_1+T_2}(inr\ t)$ – если $R_{T_2}(t)$ завершаем;
- $R_{T_1+T_2}(case\ t\ of\ inl\ x \Rightarrow t \mid inr\ x \Rightarrow t)$ – если $R_{T_1}(t)$ и $R_{T_2}(t)$ завершаем.

Задание 2. Расширьте доказательство леммы о сохранении свойства R_T.

Решение.

Лемма (о сохранении свойства R_T). Пусть $\cdot \vdash t : T$ и $t \longrightarrow t'$. Тогда $R_T(t)$ тогда и только тогда, когда $R_T(t')$.

Случай 1. $T = Nat$.

Рассмотреть термы, которые добавляются при добавлении типа Nat:

- $R_{Nat}(0)$ – очевидно, так как 0 – значение;
- $R_{Nat}(succ\, t)$ – если $R_{Nat}(t)$ завершаем из вычисления $succ$, так как $t \to t'$ тогда и только тогда, когда $succ\, t \to succ\, t'$;
- $R_{Nat}(pred\; t)$ – если $R_{Nat}(t)$ завершаем из вычисления $pred$, так как $t \to t'$ тогда и только тогда, когда $pred\; t \to pred\; t'$;
- $R_{Nat}(iszero\; t)$ – если $R_{Nat}(t)$ завершаем из вычисления $iszero$, так как $t \to t'$ тогда и только тогда, когда $iszero\; t \to iszero\; t'$.

Случай 2. $T = T_1 + T_2$.

Если t является выражением типа $T_1 + T_2$, то это значит, что оно либо имеет форму $inl\; t_1$ для некоторого терма $t_1 : T_1$, либо $inr\; t_2$ для некоторого терма $t_2 : T_2$.

В процессе вычисления $t \to t'$ сохранение типа означает, что структура выражения (inl или inr) сохраняется, и соответственно, сохраняется свойство R_T.

Задание 3. Расширьте доказательство леммы о нормализации открытых термов, рассмотрев следующие правила типизации:

- T-Zero, T-Succ, T-Pred, T-IsZero;
- T-Inl, T-Inr, T-Case;
- T-Let.

Решение.

Лемма (о нормализации открытых термов). Если $x_1 : T_1, ..., x_n : T_n \vdash t : T$, а $v_1, ..., v_n$ – замкнутые значения типов $T_1, ..., T_n$, такие что $R_{T_i}(v_i)$ для каждого i, то $R_T([x_1 \mapsto v_1, ..., x_n \mapsto v_n]t)$.

Правила типизации.

1. T-Zero.

$$\frac{}{0 : Nat}\ \text{T-Zero}$$

$R_{Nat}([x_1 \mapsto v_1, ..., x_n \mapsto v_n]0)$ – завершается, так как 0 – значение.

2. T-Succ.

$$\frac{t : Nat}{succ\, t : Nat}\ \text{T-Succ}$$

Пусть $R_{Nat}([x_1 \mapsto v_1, ..., x_n \mapsto v_n]t)$ – завершается, тогда $t \rightarrow {}^*v : Nat$. Из правил вычисления *succ* и предположения $succ\, t \rightarrow {}^*succ\, v : Nat$ получаем, что $R_{Nat}(succ\, t)$.

3. T-Pred.

$$\frac{t : Nat}{pred\, t : Nat}\ \text{T-Pred}$$

Пусть $R_{Nat}([x_1 \mapsto v_1, ..., x_n \mapsto v_n]t)$ – завершается, тогда $t \rightarrow {}^*v : Nat$. Из правил вычисления *pred* и предположения $pred\, t \rightarrow {}^*pred\, v : Nat$ получаем, что $R_{Nat}(pred\, t)$.

4. T-IsZero.

$$\frac{t : Nat}{iszero\, t : Bool}\ \text{T-IsZero}$$

Пусть $R_{Nat}([x_1 \mapsto v_1, ..., x_n \mapsto v_n]t)$ – завершается, тогда $t \rightarrow {}^*v : Nat$ и $iszero\, t \rightarrow {}^*iszero\, t \rightarrow true \,|\, false : Bool$, тогда получаем $R_{Bool}(iszero\, t)$.

5. T-Inl.

$$\frac{\Gamma \vdash t_1 : T}{\Gamma \vdash inl\ t_1 : T_1 + T_2}\ \text{T-Inl}$$

Пусть $R_{T_1}([x_1 \mapsto v_1, ..., x_n \mapsto v_n]t_1)$ – завершается, тогда $t_1 \rightarrow {}^*v : T_1$ и $inl\ [x_1 \mapsto v_1, ..., x_n \mapsto v_n]t \rightarrow {}^*inl\ v$, значит $R_{T_1}(inl\ t)$.

6. T-Inr.

$$\frac{\Gamma \vdash t_2 : T}{\Gamma \vdash inr\ t_2 : T_1 + T_2}\ \text{T-Inr}$$

Пусть $R_{T_2}([x_1 \mapsto v_1, ..., x_n \mapsto v_n]t_2)$ – завершается, тогда $t_2 \rightarrow {}^*v : T_2$ и $inr\ [x_1 \mapsto v_1, ..., x_n \mapsto v_n]t \rightarrow {}^*inr\ v$, значит $R_{T_2}(inr\ t)$.

7. T-Case.

$$\frac{\Gamma \vdash t_1 : T_1 + T_2 \quad \Gamma, x : T_1 \vdash t_2 : C \quad \Gamma, x : T_2 \vdash t_3 : C}{\Gamma \vdash case\ t_1\ of\ inl\, x \Rightarrow t_2 \mid inr\, x \Rightarrow t_3 : C} \text{ T-Case}$$

По правилам вычисления $t_1 := inl\, v_{t_2} \mid inr\, v_{t_3}$, то есть всё завершается исходя из предыдущих рассмотренных случаев.

8. T-Let.

$$\frac{\Gamma \vdash t_1 : T_1 \quad \Gamma, x : T_1 \vdash t_2 : T_2}{\Gamma \vdash let\ x = t_1\ in\ t_2 : T_2} \text{ T-Let}$$

Пусть $R_{T_1}([x_1 \mapsto v_1, ..., x_n \mapsto v_n]t_1)$ и $R_{T_2}([x \mapsto v_x]t_2)$ – завершаются, тогда $[x_1 \mapsto v_1, ..., x_n \mapsto v_n]t_1 \to\ ^*v_{t_1}$, значит $[x_1 \mapsto v_1, ..., x_n \mapsto v_n]t_2 \to\ ^*v_{t_2}$, следовательно всё завершается.