СПБГЭУ

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет информатики и прикладной математики
Кафедра прикладной математики и экономико-математических методов

ОТЧЁТ

по дисциплине:
«Методы оптимизации»
на тему:
«Задание 17. Метод сопряжённых направлений»

Направление: 01.03.02
Обучающийся: Бронников Егор Игоревич
Группа: ПМ-1901

Санкт-Петербург
2021

Дано:
$f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - 3x_2 - 5)^2 + (6x_1 - x_2 - x_3 - 2)^2 + (2x_1 + 5x_2 + x_3 - 1)^2$

Условие:
Найти стационарную точку методом сопряжённых направлений.

Решение:
Проверим выпуклость целевой функции. Определим первые производные функции, матрицу Гессе функции $f(x_1, x_2, x_3)$ и её угловые миноры:

$$\frac{df}{dx_1} = 98x_1 - 10x_2 - 8x_3 - 58$$
$$\frac{df}{dx_2} = -10x_1 + 70x_2 + 12x_3 + 24$$
$$\frac{df}{dx_3} = -8x_1 + 12x_2 + 4x_3 + 2$$

$$H(X) = \begin{pmatrix} 98 & -10 & -8 \\ -10 & 70 & 12 \\ -8 & 12 & 4 \end{pmatrix}$$

Вычисляем главные миноры:
$M_1(\boldsymbol{H}) = 98 > 0,\ \ M_2(\boldsymbol{H}) = 6760 > 0,\ \ M_3(\boldsymbol{H}) = |\boldsymbol{H}| = 10368 > 0$

Матрица $\mathbf{H}$ – положительно определённая матрица и, следовательно, $f(x_1, x_2, x_3)$ – выпуклая функция, которая имеет минимум в некоторой точке X^*.

$$grad\, f(X) = (\frac{df}{dx_1}, \frac{df}{dx_2}, \frac{df}{dx_3}) =$$
$$= (98x_1 - 10x_2 - 8x_3 - 58, -10x_1 + 70x_2 + 12x_3 + 24, -8x_1 + 12x_2 + 4x_3 + 2)$$

Выберем в качестве начальной точки $X^0 = (0, 0, 0)$. Тогда на первом шаге итерации получаем:

$f(X^0) = 30,\ grad\, f(X^0) = (-58, 24, 2)$

Рассчитываем сопряжённый вектор:
$\boldsymbol{S}^0 = -grad\, f(X^0) = -(-58, 24, 2)$

Рассчитываем смещение вдоль направления $\boldsymbol{S}^0$:

$$t_1 = \frac{-grad\, f(X^0) \cdot \boldsymbol{S}^{0t}}{\boldsymbol{S}^0 \boldsymbol{H} \boldsymbol{S}^{0t}} = \frac{-(-58, 24, 2)\begin{pmatrix} 58 \\ -24 \\ -2 \end{pmatrix}}{(58, -24, -2)\begin{pmatrix} 98 & -10 & -8 \\ -10 & 70 & 12 \\ -8 & 12 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 58 \\ -24 \\ -2 \end{pmatrix}} =$$

$$= \frac{493}{50107} \approx 0.00983894$$

$X^1 = X^0 + t_1 \boldsymbol{S}^0 = (0, 0, 0) + 0.00983894(58, -24, -2) = (0.570659, -0.236135, -0.0196779)$

$f(X^1) = 10.5976, grad\, f(X^1) = (0.443355, 1.52783, -5.4776)$

Находим коэффициент β_0 из условия сопряжённости:

$$\beta_0 = \frac{(\boldsymbol{H}\boldsymbol{S}^{\mathbf{0t}}) \cdot grad\, f(X^1)}{\boldsymbol{S}^{\mathbf{0}} \boldsymbol{H} \boldsymbol{S}^{\mathbf{0t}}} = \frac{\begin{pmatrix} 98 & -10 & -8 \\ -10 & 70 & 12 \\ -8 & 12 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 58 \\ -24 \\ -2 \end{pmatrix}(0.443355, 1.52783, -5.4776)}{(58, -24, -2)\begin{pmatrix} 98 & -10 & -8 \\ -10 & 70 & 12 \\ -8 & 12 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 58 \\ -24 \\ -2 \end{pmatrix}} =$$

$= 0.0082497$

Второй шаг итерации:

$\boldsymbol{S}^{\mathbf{1}} = -grad\, f(X^1) + \beta_0 \boldsymbol{S}^{\mathbf{0}} = (0.0351276, -1.72582, 5.4611)$

$$t_2 = \frac{-grad\, f(X^1) \cdot \boldsymbol{S}^{1t}}{\boldsymbol{S}^1 \boldsymbol{H} \boldsymbol{S}^{1t}} = 0.325827$$

$X^2 = X^1 + t_2\boldsymbol{S}^1 = (0.582105, -0.798454, 1.7597)$

$f(X^2) = 5.2972, grad\, f(X^2) = (-7.04677, -16.5964, -5.19949)$

$\beta_1 = 10.8232$

Третий шаг итерации:

$\boldsymbol{S^2} = -grad\, f(X^2) + \beta_1\boldsymbol{S^1} = (7.42694, -2.08269, 64.3065)$

$t_3 = \dfrac{-grad\, f(X^2) \cdot \boldsymbol{S}^{2t}}{\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{H}\boldsymbol{S}^{2t}} = 0.0300868$

$X^3 = X^2 + t_3\boldsymbol{S}^2 = (0.805556, -0.861111, 3.69444)$

$f(X^3) \approx 0, grad\, f(X^3) \approx (0, 0, 0)$

$\beta_2 \approx 0$

$\boldsymbol{S^3} = -grad\, f(X^3) + \beta_2\boldsymbol{S^2} \approx (0, 0, 0)$

Останавливаемся на третьем шаге и заканчиваем итерационный процесс по критерию $\dfrac{||grad\, f(X^{k+1})||}{|f(X^{k+1})|} \leq \delta_3$ и потому что $\beta_2 = 0$ и $\boldsymbol{S^3} = (0, 0, 0)$. Данное решение задачи не зависит от выбора начальной точки X^0, а её точное решение равно $X^* = (\dfrac{29}{36}, -\dfrac{31}{36}, \dfrac{133}{36})$, $f(X^*) = 0$.