МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет информатики и прикладной математики
Кафедра прикладной математики и экономико-математических методов

ОТЧЁТ

по дисциплине:
«Имитационное моделирование»
на тему:
«Треугольное распределение. Задание №1»

Направление: 01.03.02
Обучающийся: Бронников Егор Игоревич
Группа: ПМ-1901

Санкт-Петербург
2022

Задание

Получить аналитическое выражение для функции распределения $F(x)$ треугольного закона с параметрами a (min), b (max), c $(мода)$. Найти аналитическое выражение для обратной функции $F^{-1}(x)$.

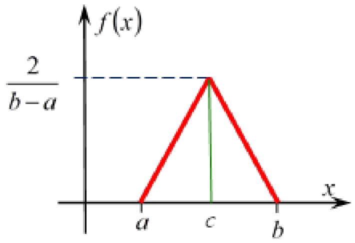

Рис. 1: График плотности треугольного закона

Решение

Плотность распределения $f(x)$

Уравнение по двум точкам:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \cdot (y_2-y_1) + y_1$$

1) Рассмотрим случай $x \in [a, c]$:

Точки: $(a, 0)\,, \left(c, \dfrac{2}{b-a}\right)$

$$f_1(x) = \frac{x-a}{c-a} \cdot \left(\frac{2}{b-a} - 0\right) + 0 \quad \Rightarrow \quad f_1(x) = \frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)}$$

2) Рассмотрим случай $x \in [c, b]$:

Точки: $\left(c, \dfrac{2}{b-a}\right), (b, 0)$

$$f_2(x) = \frac{x-c}{b-c} \cdot \left(0 - \frac{2}{b-a}\right) + \frac{2}{b-a} \quad \Rightarrow \quad f_2(x) = \frac{2(b-x)}{(b-c)(b-a)}$$

Плотность треугольного распределения:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)} & , x \in [a, c] \\ \dfrac{2(b-x)}{(b-c)(b-a)} & , x \in [c, b] \\ 0 & , x \notin [a, b] \end{cases}$$

Функция распределения $F(x)$

По свойству функции распределения: $f'(x) = F(x)$.

1) Рассмотрим случай $x \in [a, c]$:

$$F_1(x) = \int_a^x \frac{2(t-a)}{(b-a)(c-a)}\,dt = \frac{t(t-2a)}{(b-a)(c-a)}\,\Bigg|_a^x = \frac{(x-a)^2}{(b-a)(c-a)}$$

2) Рассмотрим случай $x \in [c, b]$:

При вычислении функции распределения на этом участке следует помнить, что у нас был предшествующий отрезок от $[a, c]$, тогда нужно посчитать его площадь и прибавить к $F_2(x)$.

$$F_1(c) = \frac{c-a}{b-a}$$

$$F_2(x) = \frac{c-a}{b-a} + \int_c^x \frac{2(b-t)}{(b-c)(b-a)}\,dt = \frac{c-a}{b-a} + \frac{t(2b-t)}{(b-c)(b-a)}\,\Bigg|_c^x =$$
$$= \frac{c-a}{b-a} + \frac{(2b-c-x)(x-c)}{(b-a)(b-c)} = 1 - \frac{(x-b)^2}{(b-a)(b-c)}$$

Функция распределения треугольного закона:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < a \\ \dfrac{(x-a)^2}{(b-a)(c-a)} & , x \in [a, c] \\ 1 - \dfrac{(x-b)^2}{(b-a)(b-c)} & , x \in [c, b] \\ 1 & , x > b \end{cases}$$

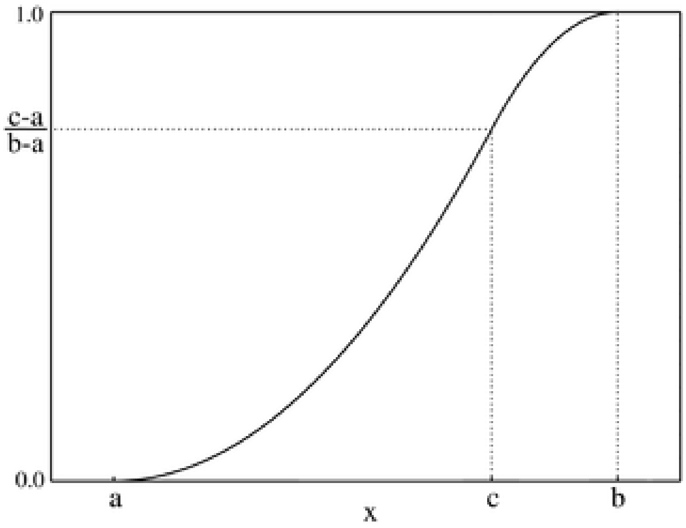

Рис. 2: График функции распределения треугольного закона

Обратная функция $F^{-1}(x)$

У функции распределения есть ограничение: $0 < F(x) < 1$, которое стоит учитывать.
Пусть $y = F(x)$

1) Рассмотрим случай $0 < y < \dfrac{c-a}{b-a}$:

$F_1^{-1}(y) = x_1 = a + \sqrt{(b-a)(c-a)y}$

2) Рассмотрим случай $\dfrac{c-a}{b-a} \leq y < 1$:

$F_2^{-1}(y) = x_2 = b - \sqrt{(b-a)(b-c)(1-y)}$

Обратная функция $F^{-1}(x)$:

$$F^{-1}(y) = x = \begin{cases} a + \sqrt{(b-a)(c-a)y} & , 0 < y < \dfrac{c-a}{b-a} \\ b - \sqrt{(b-a)(b-c)(1-y)} & , \dfrac{c-a}{b-a} < y < 1 \end{cases}$$