СПБГЭУ

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет информатики и прикладной математики

Кафедра прикладной математики и экономико-математических методов

ОТЧЁТ

по дисциплине:

«Математическое моделирование»

на тему:

«**Качественный анализ двумерной модели конкуренции**»

Направление (специальность)_________________01.03.02________________

(код, наименование)

Обучающийся _______________Бронников Егор Игоревич________________

(Ф.И.О. полностью)

Группа___ПМ-1901___

(номер группы)

Санкт-Петербург

2021

Модель конкуренции даёт представление о динамике популяции видов, потребляющих один ограниченный ресурс. Пусть x_1 — количество особей первого вида, а x_2 — количество особей второго вида.

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_1x_1 - b_{11}x_1^2 - b_{12}x_1x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_2x_2 - b_{22}x_2^2 - b_{21}x_1x_2 \end{cases}$$

$$a_{1;\,2} \geq 0, b_{11;\,12;\,22;\,21} \geq 0$$

Найдём особые точки:

$$\begin{cases} a_1x_1 - b_{11}x_1^2 - b_{12}x_1x_2 = 0 \\ a_2x_2 - b_{22}x_2^2 - b_{21}x_1x_2 = 0 \end{cases}$$

Особые точки: (0, 0); (0, $\frac{a_2}{b_{22}}$), ($\frac{a_1}{b_{11}}$, 0), ($\frac{a_2b_{12}-a_1b_{22}}{b_{21}b_{12}-b_{11}b_{22}}$, $\frac{a_1b_{21}-a_2b_{11}}{b_{21}b_{12}-b_{11}b_{22}}$)

Чтобы определить состояние равновесия в точке, проводим линеаризацию:

1 случай – точка (0, 0):

$$\begin{pmatrix} a_1 - 2b_{11}x_1 - b_{12}x_2 & -b_{12}x_1 \\ -b_{21}x_2 & a_2 - 2b_{22}x_2 - b_{21}x_1 \end{pmatrix} \text{при } x_1 = 0, x_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} a_1 - \lambda & 0 \\ 0 & a_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \to (a_1 - 2b_{11} - \lambda)(a_2 - 2b_{22} - \lambda) = 0$$

$\lambda_1 = a_1, \lambda_2 = a_2$, так как коэффициенты положительны, то в точке (0, 0) тип состояния равновесия – *неустойчивый узел*.

2 случай – точка (0, $\frac{a_2}{b_{22}}$):

$$\begin{pmatrix} a_1 - 2b_{11}x_1 - b_{12}x_2 & -b_{12}x_1 \\ -b_{21}x_2 & a_2 - 2b_{22}x_2 - b_{21}x_1 \end{pmatrix} \text{при } x_1 = 0, x_2 = \frac{a_2}{b_{22}}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 - \frac{b_{12}a_2}{b_{22}} & 0 \\ \frac{-b_{21}a_2}{b_{22}} & a_2 - 2b_{22}a_2 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} a_1 - \frac{b_{12}a_2}{b_{22}} - \lambda & 0 \\ \frac{-b_{21}a_2}{b_{22}} & a_2 - 2b_{22}a_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \to$$

$$\left(a_1 - \frac{b_{12}a_2}{b_{22}} - \lambda\right)(a_2 - 2b_{22}a_2 - \lambda) = 0$$

$\lambda_1 = a_1 - \frac{b_{12}a_2}{b_{22}}, \lambda_2 = a_2 - 2b_{22}a_2, \lambda_2 < 0$, с λ_1 ситуация неоднозначна, если $a_1 < \frac{b_{12}a_2}{b_{22}}$, то $\lambda_1 < 0$ и тип состояния равновесия – *устойчивый узел*, иначе, $\lambda_1 > 0$ и тип состояния равновесия – *седло*.

3 случай – точка ($\frac{a_1}{b_{11}}$,0):

$$\begin{pmatrix} a_1 - 2b_{11}x_1 - b_{12}x_2 & -b_{12}x_1 \\ -b_{21}x_2 & a_2 - 2b_{22}x_2 - b_{21}x_1 \end{pmatrix} \text{ при } x_1 = \frac{a_1}{b_{11}}, x_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} -a_1 & \frac{-b_{12}a_1}{b_{11}} \\ 0 & a_2 - \frac{b_{21}a_1}{b_{11}} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -a_1 - \lambda & \frac{-b_{12}a_1}{b_{11}} \\ 0 & a_2 - \frac{b_{21}a_1}{b_{11}} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$$

$$(-a_1 - \lambda)\left(a_2 - \frac{b_{21}a_1}{b_{11}} - \lambda\right) = 0$$

$\lambda_1 = -a_1,\ \lambda_2 = a_2 - \frac{b_{21}a_1}{b_{11}}, \lambda_1 < 0$, с λ_2 ситуация неоднозначна, если $a_2 < \frac{b_{21}a_1}{b_{11}}$, то $\lambda_2 < 0$ и тип состояния равновесия – *устойчивый узел*, иначе, $\lambda_2 > 0$ и тип состояния равновесия – *седло*.

4 случай – точка ($\frac{a_2b_{12}-a_1b_{22}}{b_{21}b_{12}-b_{11}b_{22}}, \frac{a_1b_{21}-a_2b_{11}}{b_{21}b_{12}-b_{11}b_{22}}$):

$$\begin{pmatrix} a_1 - 2b_{11}x_1 - b_{12}x_2 & -b_{12}x_1 \\ -b_{21}x_2 & a_2 - 2b_{22}x_2 - b_{21}x_1 \end{pmatrix} \text{ при } x_1 = \frac{a_2b_{12}-a_1b_{22}}{b_{21}b_{12}-b_{11}b_{22}}, x_2 = \frac{a_1b_{21}-a_2b_{11}}{b_{21}b_{12}-b_{11}b_{22}}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 - \frac{2b_{11}a_2b_{12} - 2b_{11}a_1b_{22}}{b_{21}b_{12} - b_{11}b_{22}} - \frac{b_{12}a_1b_{21} - b_{12}a_2b_{11}}{b_{21}b_{12} - b_{11}b_{22}} & \frac{-b_{12}a_2b_{12} + b_{12}a_1b_{22}}{b_{21}b_{12} - b_{11}b_{22}} \\ -\frac{b_{21}a_1b_{21} - b_{21}a_2b_{11}}{b_{21}b_{12} - b_{11}b_{22}} & a_2 - \frac{2b_{22}a_1b_{21} - 2b_{22}a_2b_{11}}{b_{21}b_{12} - b_{11}b_{22}} - \frac{b_{21}a_2b_{12} - b_{21}a_1b_{22}}{b_{21}b_{12} - b_{11}b_{22}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 - \frac{2b_{11}a_2b_{12} - 2b_{11}a_1b_{22} - b_{12}a_1b_{21} - b_{12}a_2b_{11}}{b_{21}b_{12} - b_{11}b_{22}} & \frac{-b_{12}a_2b_{12} + b_{12}a_1b_{22}}{b_{21}b_{12} - b_{11}b_{22}} \\ \frac{-b_{21}a_1b_{21} + b_{21}a_2b_{11}}{b_{21}b_{12} - b_{11}b_{22}} & a_2 - \frac{2b_{22}a_1b_{21} - 2b_{22}a_2b_{11} - b_{21}a_2b_{12} - b_{21}a_1b_{22}}{b_{21}b_{12} - b_{11}b_{22}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 - \dfrac{a_2(2b_{11}b_{12} - b_{12}b_{11}) - a_1(2b_{11}b_{22} + b_{12}b_{21})}{b_{21}b_{12} - b_{11}b_{22}} & \dfrac{-b_{12}a_2b_{12} + b_{12}a_1b_{22}}{b_{21}b_{12} - b_{11}b_{22}} \\ \dfrac{-b_{21}a_1b_{21} + b_{21}a_2b_{11}}{b_{21}b_{12} - b_{11}b_{22}} & a_2 - \dfrac{a_1(2b_{22}b_{21} - b_{21}b_{22}) - a_2(2b_{22}b_{11} + b_{21}b_{12})}{b_{21}b_{12} - b_{11}b_{22}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{a_1(b_{21}b_{12} - b_{11}b_{22}) - a_2(b_{11}b_{12}) + a_1(2b_{11}b_{22} + b_{12}b_{21})}{b_{21}b_{12} - b_{11}b_{22}} & \dfrac{-b_{12}a_2b_{12} + b_{12}a_1b_{22}}{b_{21}b_{12} - b_{11}b_{22}} \\ \dfrac{-b_{21}a_1b_{21} + b_{21}a_2b_{11}}{b_{21}b_{12} - b_{11}b_{22}} & \dfrac{a_2(b_{21}b_{12} - b_{11}b_{22}) - a_1(b_{22}b_{21}) + a_2(2b_{22}b_{11} + b_{21}b_{12})}{b_{21}b_{12} - b_{11}b_{22}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{a_1(b_{21}b_{12} - b_{11}b_{22}) - a_2(b_{11}b_{12}) + a_1(2b_{11}b_{22} + b_{12}b_{21})}{b_{21}b_{12} - b_{11}b_{22}} - \lambda & \dfrac{-b_{12}a_2b_{12} + b_{12}a_1b_{22}}{b_{21}b_{12} - b_{11}b_{22}} \\ \dfrac{-b_{21}a_1b_{21} + b_{21}a_2b_{11}}{b_{21}b_{12} - b_{11}b_{22}} & \dfrac{a_2(b_{21}b_{12} - b_{11}b_{22}) - a_1(b_{22}b_{21}) + a_2(2b_{22}b_{11} + b_{21}b_{12})}{b_{21}b_{12} - b_{11}b_{22}} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\left(\frac{a_1(b_{21}b_{12}-b_{11}b_{22})-a_2(b_{11}b_{12})+a_1(2b_{11}b_{22}+b_{12}b_{21})}{b_{21}b_{12}-b_{11}b_{22}} - \lambda\right)\left(\frac{a_2(b_{21}b_{12}-b_{11}b_{22})-a_1(b_{22}b_{21})+a_2(2b_{22}b_{11}+b_{21}b_{12})}{b_{21}b_{12}-b_{11}b_{22}} - \lambda\right) - $$
$$-\left(\frac{-b_{12}a_2b_{12}+b_{12}a_1b_{22}}{b_{21}b_{12}-b_{11}b_{22}}\right)\left(\frac{-b_{21}a_1b_{21}+b_{21}a_2b_{11}}{b_{21}b_{12}-b_{11}b_{22}}\right)=0$$

Отсюда следует, что если $\frac{a_1b_{12}}{b_{22}} < a_1 < \frac{a_2b_{11}}{b_{21}}$ – *устойчивый узел.*

Таким образом, мы можем встретить следующие ситуации:

Особая точка	Фазовые портреты	
(0, 0)	неустойчивый узел	
$(0, \frac{a_2}{b_{22}})$	устойчивый узел при $a_1 < \frac{b_{12}a_2}{b_{22}}$	седло
$(\frac{a_1}{b_{11}},0)$	устойчивый узел при $a_2 < \frac{b_{21}a_1}{b_{11}}$	седло
$(\frac{a_2b_{12}-a_1b_{22}}{b_{21}b_{12}-b_{11}b_{22}}, \frac{a_1b_{21}-a_2b_{11}}{b_{21}b_{12}-b_{11}b_{22}})$	устойчивый узел при $\frac{a_1b_{12}}{b_{22}} < a_1 < \frac{a_2b_{11}}{b_{21}}$	