МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет информатики и прикладной математики
Кафедра прикладной математики и экономико-математических методов

ОТЧЁТ

по дисциплине:

«Теория и системы поддержки принятия решений»

на тему:

«Разностные уравнения. Задание 3»

Направление: 01.03.02
Обучающийся: Бронников Егор Игоревич
Группа: ПМ-1901

Санкт-Петербург
2022

Задача 9

Задание: Найти общее решение однородного линейного разностного уравнения:

$$u_{s+4} - 7u_{s+3} + 22u_{s+2} - 32u_{s+1} + 16u_s = 0$$

Решение:
Перепишем исходное уравнение в виде для $s \geq 4$:

$$u_s - 7u_{s-1} + 22u_{s-2} - 32u_{s-3} + 16u_{s-4} = 0$$

Для получения общего решения однородного разностного уравнения находим фундаментальную систему решений, элементы которой ищем в виде:

$$\breve{u}_s = Ch^s$$

Тогда

$$h^s - 7h^{s-1} + 22h^{s-2} - 32h^{s-3} + 16h^{s-4} = 0$$

Находим харатеристическое уравнение:

$$H(h) = h^4 - 7h^3 + 22h^2 - 32h + 16 = 0$$

Решаем уравнение, получим следующие корни: $h_1 = 1, h_2 = 2, h_3 = 2 - 2i$ $h_4 = 2 + 2i$.
Можно видеть, что у нас нет кратных корней, но есть комлексные корни.
Запишем представление комлексного числа в тригонометрической форме:

$$\hat{u}_s = r^s((C_1 + C_2)\cos(s\phi) + i(C_1 - C_2)\sin(s\phi))$$

Отсюда следует, чтобы получить действительное решение, постонные надо взять комлексно-сопряжёнными: $C_{1,2} = U(\cos\theta \pm i\sin\theta)$.
В итоге, получается:

$$\hat{u}_s = 2Ur^s\cos(s\phi + \theta)$$

где $r = 2\sqrt{2}, \phi = \dfrac{\pi}{4}$

Таким образом, общее решение будет выглядеть следующим образом:

$$\breve{u}_s = C_1 + 2^sC_2 + 2U(2\sqrt{2})^s\cos(\frac{\pi}{4}s + \theta)$$

Задача 10

Задание: Найти общее решение неоднородного линейного разностного уравнения первого порядка методом итераций и методом обратного оператора при помощи z-преобразования:

$$u_{s+1} = \frac{6}{7}u_s + \frac{s+6}{s+7}$$

Метод итераций

Пусть дано u_0:

$$u_1 = \frac{6}{7}u_0 + \frac{7}{8}$$

$$u_2 = \frac{6}{7}u_1 + \frac{8}{9} = \frac{6}{7}\left(\frac{6}{7}u_0 + \frac{7}{8}\right) + \frac{8}{9} = \left(\frac{6}{7}\right)^2 u_0 + \frac{6 \cdot 7}{7 \cdot 8} + \frac{8}{9}$$

$$\begin{aligned} u_3 = \frac{6}{7}u_2 + \frac{9}{10} &= \frac{6}{7}\left(\left(\frac{6}{7}\right)^2 u_0 + \frac{6 \cdot 7}{7 \cdot 8} + \frac{8}{9}\right) + \frac{9}{10} = \\ &= \left(\frac{6}{7}\right)^3 u_0 + \left(\frac{6}{7}\right)^2 \cdot \frac{7}{8} + \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} + \frac{9}{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_4 = \frac{6}{7}u_3 + \frac{10}{11} &= \frac{6}{7}\left(\left(\frac{6}{7}\right)^3 u_0 + \left(\frac{6}{7}\right)^2 \cdot \frac{7}{8} + \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} + \frac{9}{10}\right) + \frac{10}{11} = \\ &= \left(\frac{6}{7}\right)^4 u_0 + \left(\frac{6}{7}\right)^3 \cdot \frac{7}{8} + \left(\frac{6}{7}\right)^2 \cdot \frac{8}{9} + \frac{6}{7} \cdot \frac{9}{10} + \frac{10}{11} \end{aligned}$$

$$\ldots$$

Общая формула при $s \geq 1$:

$$u_s = \left(\frac{6}{7}\right)^s u_0 + \sum_{i=0}^{s-1} \left(\frac{6}{7}\right)^i \frac{(s-i)+6}{(s-i)+7}$$

Z-преобразование

1) Применим z-преобразование к рассматриваемому уравнению, заменяя u_s на $\tilde{u}(z)$, u_{s-1} на $z^{-1}(\tilde{y}(z)+y_{-1}z)$.

$$Z\{u_s\} = \tilde{u}(z) = \frac{6}{7}z^{-1}(u_{-1}z + \tilde{u}(z)) + \tilde{x}(z)$$

2) Из полученного выражения выразим $\tilde{u}(z)$.

$$\tilde{u}(z) = \frac{6}{7}z^{-1}u_{-1}z + \frac{6}{7}z^{-1}\tilde{u}(z) + \tilde{x}(z)$$
$$\tilde{u}(z) - \frac{6}{7}z^{-1}\tilde{u}(z) = \frac{6}{7}u_{-1} + \tilde{x}(z)$$
$$\tilde{u}(z)(1 - \frac{6}{7}z^{-1}) = \frac{6}{7}u_{-1} + \tilde{x}(z)$$
$$\tilde{u}(z) = \frac{\frac{6}{7}u_{-1} + \tilde{x}(z)}{1 - \frac{6}{7}z^{-1}}$$
$$\tilde{u}(z) = \frac{\frac{6}{7}u_{-1} + \tilde{x}(z)}{z^{-1}(z - \frac{6}{7})}$$
$$\tilde{u}(z) = \frac{\frac{6}{7}u_{-1}z + z\tilde{x}(z)}{z - \frac{6}{7}}$$

3) Разложим $\tilde{u}(z)$ на простые дроби.
Получившееся выражение уже является простой дробью, так что ничего делать не надо.

4) Выполним обратное z-преобразование.
Воспользуемся способом в котором коэффициенты берутся из ряда Лорана.

$$u_s = \sum_{\zeta_1=\frac{6}{7}} Res \frac{\left(\frac{6}{7}u_{-1} + \tilde{x}(z)\right) zz^{s-1}}{z - \frac{6}{7}} = \lim_{z\to\frac{6}{7}} \left(z - \frac{6}{7}\right) \frac{\frac{6}{7}u_{-1}z^s + \tilde{x}(z)z^s}{z - \frac{6}{7}} =$$

$$= \left(\frac{6}{7}\right)^{s+1} u_{-1} + \tilde{x}\left(\frac{6}{7}\right)\left(\frac{6}{7}\right)^s$$

где $\tilde{x}\left(\frac{6}{7}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \left(\frac{6}{7}\right)^{s-k} = \sum_{k=1}^{s} x_k \left(\frac{6}{7}\right)^{s-k} = \sum_{i=0}^{s-1} x_{s-i}\left(\frac{6}{7}\right)^i = \sum_{i=0}^{s-1} \frac{(s-i)+6}{(s-i)+7}\left(\frac{6}{7}\right)^i$

Таким образом, мы получили следующее решение:

$$u_s = \left(\frac{6}{7}\right)^{s+1} u_{-1} + \sum_{i=0}^{s-1} \frac{(s-i)+6}{(s-i)+7} \left(\frac{6}{7}\right)^{i} = \left(\frac{6}{7}\right)^{s} u_0 + \sum_{i=0}^{s-1} \frac{(s-i)+6}{(s-i)+7} \left(\frac{6}{7}\right)^{i}$$

Обратный оператор

Применим к исходному уравнению оператор сдвига на шаг назад ($\mathcal{B}$):

$$u_s = \frac{6}{7}\mathcal{B}u_s + \frac{s+6}{s+7}$$

Выразим u_s:

$$u_s - \frac{6}{7}\mathcal{B}u_s = \frac{s+6}{s+7}$$

$$\left(1 - \frac{6}{7}\mathcal{B}\right) u_s = \frac{s+6}{s+7}$$

$$u_s = \left(1 - \frac{6}{7}\mathcal{B}\right)^{-1} \frac{s+6}{s+7}$$

Воспользуемся свойством обратного оператора (разложением в ряд):

$$u_s = \left(1 + \frac{6}{7}\mathcal{B} + \left(\frac{6}{7}\right)^2 \mathcal{B}^2 + \left(\frac{6}{7}\right)^3 \mathcal{B}^3 + \dots\right) \frac{s+6}{s+7}$$

Таким образом, мы получили следующее решение:

$$u_s = \frac{s+6}{s+7} + \frac{6(s-1)+6}{7(s-1)+7} + \left(\frac{6}{7}\right)^2 \frac{(s-2)+6}{(s-2)+7} + \dots$$

Задача 11

Задание: Решить неоднородное разностное уравнение (решить задачу Коши):

$$y(s+2) - 9y(s+1) + 20y(s) = \cos(s) - 2^s$$
$$y(1) = y(2) = 0$$

Решение:
Общее решение неоднородного разностного уравнения:

$$y_s = \hat{y}_s + \breve{y}_s$$

Составим характеристическое уравнение для однородного уравнения.
Для получения общего решения однородного разностного уравнения находим фундаментальную систему решений, элементы которой ищем в видел:

$$\hat{y}(s) = Ch^s$$

Находим харатеристическое уравнение:

$$y(s+2) - 9y(s+1) + 20y(s) = 0$$

$$H(h) = h^2 - 9h + 20 = 0$$

Решаем уравнение, получим следующие корни: $h_1 = 4$, $h_2 = 5$.
Можно видеть, что у нас нет кратных вещественных корней и нет комплексных корней, значит мы можем записать общее решение однородного уравнения:

$$\hat{y}(s) = 4^s C_1 + 5^s C_2$$

где C_1 и C_2 – произвольные константы.

Найдём частное решение уравнения. Запишем уравнение в операторной форме:

$$a(\mathcal{B})y(s) = \cos(s) - 2^s$$

где $a(\mathcal{B})$ – операторный полином, $\mathcal{B}$ – оператор сдвига на шаг назад.

Тогда формальное частное решение будет выглядеть следующим образом:

$$\breve{y}_s = a^{-1}(\mathcal{B})(\cos(s) - 2^s)$$

$$\breve{y}_s = (1 - 9\mathcal{B} + 20\mathcal{B}^2)^{-1}(\cos(s) - 2^s)$$

Так как у нас получается обратный полином второй степени и h_1, h_2 – действительны и различны, то корни $\zeta_{1,2} = \dfrac{1}{h_{1,2}}$, обратного характеристического полинома $a(\zeta) = 0$ также будут действительны и различны. Тогда можно сделать замену: $a(\zeta) = -a_2(\zeta - \zeta_1)(\zeta - \zeta_2)$
Таким образом:

$$\breve{y}_s = -\frac{1}{a_2}\frac{1}{(\zeta - \zeta_1)(\zeta - \zeta_2)}x_s$$

Разложим $a^{-1}(\zeta)$:

$$a^{-1}(\zeta) = -\frac{1}{a_2}\frac{1}{(\zeta - \zeta_1)(\zeta - \zeta_2)} = -\frac{1}{a_2}\left(\frac{g_1}{\zeta - \zeta_1} + \frac{g_2}{\zeta - \zeta_2}\right)$$

Постоянные g_1 и g_2 определяеются из соотношения:

$$1 = g_1(\zeta - \zeta_2) + g_2(\zeta - \zeta_1)$$

т.е. при $\zeta = \zeta_1$: $g_1 = \dfrac{1}{\zeta_1 - \zeta_2}$, а при $\zeta = \zeta_2$: $g_2 = \dfrac{1}{\zeta_2 - \zeta_1}$
Таким образом,

$$\breve{y}_s = -\frac{1}{a_2}\left(\frac{1}{(\zeta_1 - \zeta_2)(\zeta - \zeta_1)} + \frac{1}{(\zeta_2 - \zeta_1)(\zeta - \zeta_2)}\right)x_s$$

и, переобозначая $\zeta = \mathcal{B}, \mathcal{B}_1 = \dfrac{\mathcal{B}}{\zeta_1}, \mathcal{B}_2 = \dfrac{\mathcal{B}}{\zeta_2}$, получаем:

$$\breve{y}_s = \frac{1}{a_2}\left(\frac{(1 - \mathcal{B}_1)^{-1}}{(\zeta_1 - \zeta_2)\zeta_1} + \frac{(1 - \mathcal{B}_2)^{-1}}{(\zeta_2 - \zeta_1)\zeta_2}\right)x_s$$

Учитывая, что $(1 - \mathcal{B}_i)^{-1} = (1 + \mathcal{B}_i + \mathcal{B}_i^2 + \dots)$, $i = 1, 2$, выражение в больших круглых скобках имеет вид:

$$\left(\frac{1/\zeta_1 + \mathcal{B}/\zeta_1^2 + \mathcal{B}^2/\zeta_1^3 + \dots}{\zeta_1 - \zeta_2} + \frac{1/\zeta_2 + \mathcal{B}/\zeta_2^2 + \mathcal{B}^2/\zeta_2^3 + \dots}{\zeta_2 - \zeta_1}\right) = \frac{1}{\zeta_1 - \zeta_2}\sum_{k=0}^{s-1}\left(\frac{1}{\zeta_1^k} - \frac{1}{\zeta_2^k}\right)\mathcal{B}^{k-1}$$

Окончательно, получаем частное решение уравнения:

$$\breve{y}_s = \frac{1}{a_2}\frac{h_1 h_2}{h_2 - h_1}\sum_{k=0}^{s-1}\left(h_1^k - h_2^k\right) x_{s-(k-1)} =$$

$$= \frac{1}{20}\frac{4\times 5}{5-4}\sum_{k=0}^{s-1}\left(4^k - 5^k\right)\left(\cos(s-(k-1)) - 2^{s-(k-1)}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{s-1}\left(4^k - 5^k\right)\left(\cos(s-(k-1)) - 2^{s-(k-1)}\right)$$

Таким образом, общее решение неоднородного разностного уравнения будет выглядеть следующим образом:

$$y_s = \hat{y}_s + \breve{y}_s = 4^s C_1 + 5^s C_2 + \sum_{k=0}^{s-1}\left(4^k - 5^k\right)\left(\cos(s-(k-1)) - 2^{s-(k-1)}\right)$$

Найдём значения C_1 и C_2, зная, что $y(1) = y(2) = 0$:

$$\begin{cases} y(1) = y_1 = 4C_1 + 5C_2 = 0 \\ y(2) = y_2 = 16C_1 + 25C_2 + (4-5)(\cos(2) - 4) = 0 \end{cases}$$

Решение системы:

$$C_1 = \frac{1}{4}(4 - \cos(2)), C_2 = \frac{1}{5}(-4 + \cos(2))$$

Таким образом, общее решение примет вид:

$$y_s = \sum_{k=0}^{s-1}\left(4^k - 5^k\right)\left(\cos(s-(k-1)) - 2^{s-(k-1)}\right)$$

Задача 12

Задание: Модель делового цикла Самуэльсона-Хикса предполагает прямую пропорциональность объемов инвестирования приросту национального дохода (принцип акселерации), т.е. $I_t = V(X_{t-1} - X_{t-2})$, где коэффициент V $>$ 0 – фактор акселерации, I_t - величина инвестиций в период t, X_{t-1}, X_{t-2} величины национального дохода соответственно в $(t-1)$-ом и $(t-2)$-ом периодах. Предполагается также, что спрос на данном этапе C_t зависит от величины национального дохода на предыдущем этапе X_{t-1} линейным образом $Ct = aX_{t-1} + b$. Условие равенства спроса и предложения имеет вид $X_t = I_t + C_t$. Тогда приходим к уравнению Хикса:

$$X_t = (a+V)X_{t-1} - VX_{t-2} + b$$

Стационарная последовательность $X_t^* = c = const$ является решением уравнения Хикса только при $c = b(1-a)^{-1}$, множитель $(1-a)^{-1}$ называется мультипликатором Кейнса (одномерный аналог матрицы полных затрат).
Рассмотреть уравнение Хикса. Какова динамика роста национального дохода?
При $V = a = \dfrac{1}{2}, b = 1$ уравнение Хикса будет иметь вид:

$$X_t = X_{t-1} - \frac{1}{2}X_{t-2} + 1$$

$$X_t - X_{t-1} + \frac{1}{2}X_{t-2} = 1$$

Решение:
Для получения общего решения однородного разностного уравнения находим фундаментальную систему решений, элементы которой ищем в виде:

$$\hat{X}_t = Ch^t$$

Находим харатеристическое уравнение:

$$H(h) = h^2 - h + \frac{1}{2} = 0$$

Решаем уравнение, получим следующие корни: $h_1 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{i}{2}$, $h_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{i}{2}$.
Можно видеть, что у нас нет кратных корней, но есть комлексные корни.

Запишем представление комлексного числа в тригонометрической форме:

$$\hat{X}_t = r^t((C_1 + C_2)\cos(t\phi) + (C_1 - C_2)\sin(t\phi))$$

где $r = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Таким образом, общее однородное решение уравнения можно представить в виде:

$$\hat{X}_t = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^t ((C_1 + C_2)\cos(t\phi) + (C_1 - C_2)\sin(t\phi))$$

Найдём частное решение уравнения. Запишем уравнение в операторной форме:

$$\breve{X}_t = a^{-1}(\mathcal{B})a_0 = (1 - a_1\mathcal{B} - a_2\mathcal{B}^2)^{-1}a_0 = (1 - (a_1\mathcal{B} + a_2\mathcal{B}^2))^{-1}a_0 = a_0\sum_{k=1}^{\infty}(a_1 + a_2)^k$$

где $a(\mathcal{B})$ – операторный полином, $\mathcal{B}$ – оператор сдвига на шаг назад.

Таким образом, общее частное решение уравнения можно представить в виде:

$$\breve{X}_t = \sum_{k=0}^{\infty}\left(-1 + \frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^k = \frac{2}{3}$$

В итоге, общее решение уравнения примет следующую форму:

$$X_t = \hat{X}_t + \breve{X}_t = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^t ((C_1 + C_2)\cos(t\phi) + (C_1 - C_2)\sin(t\phi)) + \frac{2}{3}$$

Выводы

Таким образом, данное решение осциллирует (колеблется), так как у нас присутствует $\cos(t\phi)$ и $\sin(t\phi)$ и при достаточно больших t наше решение будет асимптотически будет сходиться к $\dfrac{2}{3}$.

Задача 13

Задание: Рассмотрим путинную модель рынка. Предположим, что спрос и предложение задаются линейными функциями, но спрос заисит от цены в данный момент времени, а предложение зависит от цены на предыдущем этапе, т.е.

$$d_t = a - bp_t \text{ (функция спроса)}$$

$$s_t = m + np_{t-1} \text{ (функция предложения)}$$

где a, b, m, n – положительные действительные числа.
Считая, $s_t = d_t$ получаем линейное разностное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами,

$$a - bp_t = m + np_{t-1}$$

здесь $a = 1, b = \frac{3}{2}, m = \frac{1}{2}, n = \frac{1}{4}$

$$1 - \frac{3}{2}p_t = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}p_{t-1}$$

$$\frac{3}{2}p_t + \frac{1}{4}p_{t-1} = \frac{1}{2}$$

Решение:
Для получения общего решения однородного разностного уравнения находим фундаментальную систему решений, элементы которой ищем в виде:

$$\hat{p}_t = Ch^t$$

Находим харатеристическое уравнение:

$$H(h) = \frac{3}{2}h + \frac{1}{4} = 0$$

Решаем уравнение, получим следующее решение: $h = -\frac{1}{6}$.
Можно видеть, что у нас нет кратных вещественных корней и нет комплексных корней, значит мы можем записать общее решение однородного уравнения:

$$\hat{p}_t = \left(-\frac{1}{6}\right)^t C$$

Найдём частное решение уравнения. Запишем уравнение в операторной форме:

$$\breve{p}_t = a^{-1}(\mathcal{B})a_0 = (1 + a_1\mathcal{B})^{-1}a_0 = (1 - (-a_1\mathcal{B}))^{-1}a_0 = a_0 \sum_{k=1}^{\infty}(-a_1)^k$$

где $a(\mathcal{B})$ – операторный полином, $\mathcal{B}$ – оператор сдвига на шаг назад.
Таким образом, общее частное решение уравнения можно представить в виде:

$$\breve{p}_t = \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^k = \frac{4}{5}$$

В итоге, общее решение уравнения примет следующую форму:

$$p_t = \hat{p}_t + \breve{p}_t = \left(-\frac{1}{6}\right)^t C + \frac{4}{5}$$

Выводы

Таким образом, данное решение при достаточно больших t будет асимптотически сходиться к $\frac{4}{5}$.