МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет информатики и прикладной математики
Кафедра прикладной математики и экономико-математических методов

ДОКЛАД

по дисциплине:

«Математическое моделирование»

на тему:

«Аттрактор Рёсслера»

Направление: 01.03.02
Обучающийся: Бронников Егор Игоревич
Группа: ПМ-1901

Санкт-Петербург
2021

Вступление

Аттрактор Рёсслера – это аттрактор, которым обладает система дифференциальных уравнений Рёсслера:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - z \\ \frac{dy}{dt} = x + ay \\ \frac{dz}{dt} = b + z(x - r) \end{cases} \qquad , a > 0, b > 0, r > 0$$

Эта система дифференциальных уравнений описывает модель динамики химических реакций, протекающих в некоторой смеси с перемешиванием.
При значениях параметров $a = b = 0.2$ и $2.6 \leq r \leq 4.2$ уравнения Рёсслера обладают устойчивым предельным циклом.
Сам Рёсслер изучал систему при постоянных $a = 0.2$, $b = 0.2$ и $r = 5.7$, но также часто используются и значения $a = 0.1$, $b = 0.1$, и $r = 14$.
Также для аттрактора Рёсслера харатерна фрактальная структура в фазовой плоскости, т.е. явление самоподобия. Важно, что на аттракторе Рёсслера траектории не пересекают сами себя.

Анализ поведения системы на плоскости

При $z = 0$ система примет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y \\ \frac{dy}{dt} = x + ay \end{cases} \qquad , a > 0, b > 0$$

Поэтому устойчивость движения в плоскости $z = 0$ определяется собственными значениями – $\lambda_{1,2} = \dfrac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}$.
Когда $0 < a < 2$, собственные значения имеют положительную вещественную часть и комплексно сопряжены. Поэтому фазовые траектории расходятся от начала координат по спирали.

Теперь проанализируем изменение координаты z, считая $0 < a < 2$. Пока x меньше r, множитель $x - r$ в уравнении на $\dfrac{dz}{dt}$ будет удерживать траекторию близкой к плоскости x, y. Как только x станет больше r, z – координата начнёт расти. В свою очередь, большой параметр – z начнёт тормозить рост x в $\dfrac{dx}{dt}$.

Неподвижные точки

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - z = 0 \\ \frac{dy}{dt} = x + ay = 0 \\ \frac{dz}{dt} = b + z(x - r) = 0 \end{cases} \qquad , a > 0, b > 0, r > 0$$

Решая следующую систему, мы получим, что у нас есть 2 неподвижные точки:

$$\left(\frac{r + \sqrt{r^2 - 4ab}}{2}, \ \frac{-r - \sqrt{r^2 - 4ab}}{2a}, \ \frac{r + \sqrt{r^2 - 4ab}}{2a}\right)$$

$$\left(\frac{r - \sqrt{r^2 - 4ab}}{2}, \ \frac{-r + \sqrt{r^2 - 4ab}}{2a}, \ \frac{r - \sqrt{r^2 - 4ab}}{2a}\right)$$

Как видно на изображении проекции аттрактора Рёсслера, одна из этих точек расположена в центре спирали аттрактора, а другая находится далеко от неё.

Изменение параметров

Поведение аттрактора Рёсслера сильно зависит от значений постоянных параметров. Изменение каждого параметра даёт определённый эффект, в результате чего в системе может возникнуть устойчивая неподвижная точка, предельный цикл или решения системы станут уходить на бесконечность.

Бифуркационные диаграммы являются стандартным инструментом для анализа поведения динамических систем, в том числе и аттрактора Рёсслера. Они создаются путём решения уравнений системы, где фиксируются две переменные и изменяется одна. При построении такой диаграммы получаются почти полностью «закрашенные» регионы; это и есть область динамического хаоса.

Изменение параметра a

Зафиксируем $b = 0.2, r = 5.7$ и будем изменять параметр a. В итоге опытным путём получили такие результаты:

- $a \leq 0$ – сходится к устойчивой точке;
- $a = 0.1$ – крутится с периодом 2;
- $a = 0.2$ – хаос;
- $a = 0.3$ – хаотичный аттрактор;
- $a = 0.35$ – аналогичен предыдущему, но хаос проявляется сильнее;
- $a = 0.38$ – аналогичен предыдущему, но хаос проявляется ещё сильнее.

Изменение параметра b

Зафиксируем $a = 0.2$, $r = 5.7$ и будем менять теперь параметр b. При b стремящемся к нулю аттрактор неустойчив. Когда b станет больше a и r, система уравновесится и перейдёт в стационарное состояние.

Изменение параметра r

Зафиксируем $a = b = 0.1$ и будем изменять r.

Из бифуркационной диаграммы видно, что при маленьких r система периодична, но при увеличении быстро становится хаотичной.

Рисунки показывают, как именно меняется хаотичность системы при увеличении r. Например при $r = 4$ аттрактор будет иметь период равный единице, и на диаграмме будет одна единственная линия, то же самое повторится когда $r = 3$ и так далее; пока r не станет больше 12: последнее периодичное поведение характеризуется именно этим значением, дальше повсюду идёт хаос.

Заключение

Аттрактор Рёсслера наблюдается во многих системах. Например, он применяется для описания потоков жидкости, а также при изучении поведения различных химических реакций и молекулярных процессов.