



**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Федеральное государственное бюджетное образовательное**  
**учреждение высшего образования**  
**«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ**  
**ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Факультет информатики и прикладной математики  
Кафедра прикладной математики и экономико-математических методов

**ОТЧЁТ**  
по дисциплине:  
**«Модели комбинаторной оптимизации»**  
на тему:  
**«Задание №10. Развитие задачи планирования работ**  
**IT-компании»**

Направление: 01.03.02  
Обучающийся: Бронников Егор Игоревич  
Группа: ПМ-1901

Санкт-Петербург  
2022

## Дано

- $k$  – количество проектов
- $n$  – количество работников
- $m$  – количество задач
- $G = \{g_1, g_2, \dots, g_k\}$  – множество проектов
- $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$  – множество работников
- $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}$  – множество задач
- $Q_w$  – множество задач, которые может выполнять работник  $w \in W$
- $W_q$  – множество работников, которые могут выполнять задачу  $q \in Q$
- $T_g$  – дедлайн проекта  $g \in G$
- $T = \max_{g \in G} T_g$  – время выполнения последнего проекта
- $[0; T]$  – горизонт планирования
- $t_q$  – время выполнения задачи  $q \in Q$
- $\pi_w$  – список предпочтений, для каждого работника  $\forall w \in W$ , упорядоченное множество элементов  $Q_w$ , расположенных в порядке убывания приоритета заданий для сотрудника
- $M$  – матрица смежности графов-проектов (связи задач родитель-ребёнок внутри проектов)
- $R : G \times Q \longrightarrow \{0; 1\}$  – матрица принадлежности задач проектам
- $\forall w \in W, \forall i \in \pi_w : position(i) \in \{1, \dots, |Q_w|\}$  – позиция задачи  $i$  в списке предпочтений работника  $w \in W$  (чем меньше данное значение, тем предпочтительнее для данного работника это задание)
- $\forall g \in G : sources(g)$  – множество заданий, которые не имеют предыдущих заданий и которые относятся к проекту  $g$
- $\forall g \in G : sinks(g)$  – множество заданий, которые не имеют последующих заданий и которые относятся к проекту  $g$
- $K$  – большое число

## Переменные

$$x_{i,j,w} = \begin{cases} 1, & \text{if задача } i \text{ выполняется после задачи } j \text{ работником } w \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$u_{i,w} \geq 0 \text{ – начало выполнения задачи } i \text{ работником } w$$

## Целевая функция

1) Минимизация времени окончания работ по проектам:

$$\sum_{w \in W} \sum_{g \in G} \sum_{source \in sources(g)} \sum_{sink \in sinks(g)} u_{sink,w} - u_{source,w} \longrightarrow \min$$

2) Удовлетворение предпочтений сотрудников:

$$\sum_{w \in W} \sum_{i \in \pi_w} position(i) \sum_{j \in Q_w} x_{i,j,w} \longrightarrow \min$$

3) Минимизация количества переключений работников между проектами:

$$\sum_{w \in W} \sum_{i \in Q_w} \sum_{j \in \{q \mid q \in Q_w \forall g \in G \forall r_{g,i}, r_{g,q} \in R: r_{g,i} \neq r_{g,q}\}} \longrightarrow \min$$

*Итоговая целевая функция:*

$$\begin{aligned} & \sum_{w \in W} \sum_{g \in G} \sum_{source \in sources(g)} \sum_{sink \in sinks(g)} u_{sink,w} - u_{source,w} + \sum_{w \in W} \sum_{i \in \pi_w} position(i) \sum_{j \in Q_w} x_{i,j,w} + \\ & + \sum_{w \in W} \sum_{i \in Q_w} \sum_{j \in \{q \mid q \in Q_w \forall g \in G \forall r_{g,i}, r_{g,q} \in R: r_{g,i} \neq r_{g,q}\}} K \cdot x_{i,j,k} \longrightarrow \min \end{aligned}$$

## Ограничения

1) Каждую задачу выполняет ровно один сотрудник из списка допустимых:

$$\sum_{w \in W_j} \sum_{i \in Q_w} x_{i,j,k} = 1, \quad \forall j \in Q$$

2) Задача может начать выполняться, если её задачи-предки выполнены:

$$\sum_{w \in W_j} u_{j,w} - \sum_{w \in W_i} u_{i,w} \geq t_i, \quad \forall i, j \in Q: m_{i,j} = 1$$

3) Дедлайн не нарушается:

$$\sum_{w \in W} \sum_{i \in \{q \mid q \in Q: r_{g,q}=1\}} u_{i,w} + t_i \leq T_g, \quad \forall g \in G$$

4) В каждый момент времени сотрудник выполняет не более одной задачи (ограничение на потенциалы):

$$u_{i,w} - u_{j,w} + K \cdot x_{i,j,w} \leq K - t_i, \quad \forall w \in W, \forall i, j \in Q_w : i \neq j$$

5) Естественные ограничения:

$$x_{i,j,w} \in \{0; 1\}, \quad \forall w \in W, \forall i, j \in Q_w : i \neq j$$

$$u_{i,w} \geq 0, \quad \forall w \in W, \forall i \in Q_w$$