МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет информатики и прикладной математики
Кафедра прикладной математики и экономико-математических методов

ОТЧЁТ

по дисциплине:

«Методы оптимизации»

на тему:

«Задание 14. Условный экстремум»

Направление: 01.03.02
Обучающийся: Бронников Егор Игоревич
Группа: ПМ-1901

Санкт-Петербург
2021

Дано

Функция:
$f = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - x_2x_3 - 3x_1 - 5x_2 - 55x_3$

Ограничения:
$2x_1 - x_2 + x_3 = -2$
$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -7$

Задание 1

Условие:
Составить функцию Лагранжа.

Решение:
Составим функцию Лагранжа $L(\Lambda, X)$:

$L(\Lambda, X) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - x_2x_3 - 3x_1 - 5x_2 - 55x_3 + \lambda_1(2x_1 - x_2 + x_3 + 2) + \lambda_2(x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7)$

Задание 2

Условие:
Определить стационарную точку и проверить её на экстремум.

Решение:
Способ 1:
Составим и решим систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dL(\Lambda, X)}{dx_1} = 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3 + 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \dfrac{dL(\Lambda, X)}{dx_2} = 6x_2 + 2x_1 - x_3 - 5 - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ \dfrac{dL(\Lambda, X)}{dx_3} = 8x_3 + 2x_1 - x_2 - 55 + \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ \dfrac{dL(\Lambda, X)}{d\lambda_1} = 2x_1 - x_2 + x_3 + 2 = 0 \\ \dfrac{dL(\Lambda, X)}{d\lambda_2} = x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7 = 0 \end{cases}$$

Решая данную систему, получим стационарную точку, вектор параметров Лагранжа и значение функции в стационарной точке:

$Y = (x_1, x_2, x_3) = (\frac{5}{4}, \frac{21}{4}, \frac{3}{4}) = (1.25, 5.25, 0.75)$

$\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2) = (-\frac{75}{4}, \frac{47}{2}) = (-18.75, 23.5)$

$f(\frac{5}{4}, \frac{21}{4}, \frac{3}{4}) = \frac{223}{8}$

Найдём такие вектора для которых $grad\psi_j(Y) \cdot \delta X = 0$:
$j = 1 : 2\delta x_1 - \delta x_2 + \delta x_3 = 0$
$j = 2 : \delta x_1 - 2\delta x_2 + 3\delta x_3 = 0$

Решим систему приняв δx_3 за параметр:

$$\begin{cases} 2\delta x_1 - \delta x_2 = -\delta x_3 \\ \delta x_1 - 2\delta x_2 = -3\delta x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta x_1 = \dfrac{\delta x_3}{3} \\ \delta x_2 = \dfrac{5\delta x_3}{3} \end{cases}$$

Получили следующий вектор: $\delta X = (\frac{\delta x_3}{3}, \frac{5\delta x_3}{3}, \delta x_3)$
Составим матрицу вторых производных L''_{XX}:

$$L''_{XX} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & -1 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

Теперь определим знак квадратичной формы:
$\delta X \cdot L''_{XX} \cdot \delta X^T = \dfrac{76\delta x_3^2}{3} > 0 \Rightarrow Y = (\frac{5}{4}, \frac{21}{4}, \frac{3}{4})$ – точка минимума.

Способ 2:
Проверим точку на экстремум при помощи матрицы Гессе:

$$H(\Lambda, X) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 2 & 6 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

В рассматриваемой задаче N = 3 и M = 2, необходимо посчитать миноры порядка 4 и 5, проверить их на знаки.

$M_4(H) = 9 > 0, \;\; M_5(H) = 228 > 0$
Оба минора положительны, значит точка $(\frac{5}{4}, \frac{21}{4}, \frac{3}{4})$ – точка минимума.

Задание 3

Условие:
Найти стационарную точку методом Якоби, проверить её на экстремум и исследовать решение на чувствительность.

Решение:
Выберем в качестве свободной перменной – $x_3(Z)$, а x_1 и $x_2(S)$ в качестве базисных. Посчитаем градиенты целевой функции по этим переменным:
$grad_Z f(X) = (\frac{df}{dx_3}) = (8x_3 + 2x_1 - x_2 - 55)$
$grad_S f(X) = (\frac{df}{dx_1}, \frac{df}{dx_2}) = (4x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3, 6x_2 + 2x_1 - x_3 - 5)$

Теперь посчитаем матрицу управления и матрицу Якоби:

$$J(X) = \begin{pmatrix} \frac{d\psi_1}{dx_1} & \frac{d\psi_1}{dx_2} \\ \frac{d\psi_2}{dx_1} & \frac{d\psi_2}{dx_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$C(X) = \begin{pmatrix} \frac{d\psi_1}{dx_3} \\ \frac{d\psi_2}{dx_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Составим условный градиент – $grad_* f(x)$:

$$grad_* f(X) = grad_Z f(X) - grad_S f(X) J^{-1} C =$$

$$= (8x_3 + 2x_1 - x_2 - 55) - (4x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3, 6x_2 + 2x_1 - x_3 - 5) J^{-1} C =$$

$$(-\frac{193}{3} + \frac{20x_1}{3} + \frac{29x_2}{3} + 7x_3)$$

Решаем систему, чтобы найти стационарную точку:

$$\begin{cases} grad_* f(x) = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{5}{4} = 1.25 \\ x_2 = \frac{21}{4} = 5.25 \\ x_3 = \frac{3}{4} = 0.75 \end{cases}$$

$$\delta x_3 = -J^{-1} C \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix}$$

Проверим на экстремум, составив матрицу Гессе:

$$H(Y) = \left(\frac{grad_* f(Y)}{dx_3} \right) = \left(\frac{29}{3} \right)$$

Матрица Гессе положительна определена и по достаточному условию экстремума точка $Y = (1.25, 5.25, 0.75)$ является точкой минимума.

Анализ чувствительности

$$grad_S f(Y) = (14, \frac{113}{4})$$

Расчитаем коэффициенты чувствительности:

$$\frac{\delta f(Y)}{\delta B} = grad_S f(Y) J^{-1}(Y) = (\frac{75}{4}, -\frac{47}{2}) = (18.75, -23.5)$$

При увеличении b_1 на единицу, функция цели увеличится на 18.75, а при увеличении b_2 на единицу, функция цели уменьшится на -23.5. Целевая функция будет быстрее возрастать по первой переменной.