



МИНОБРНАУКИ РОССИИ

**Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Факультет информатики и прикладной математики
Кафедра прикладной математики и экономико-математических методов

ОТЧЁТ

по дисциплине:

«Модели экономической динамики»

на тему:

**«Количественный анализ модели Солоу с человеческим
капиталом. Задание №2»**

Направление: 01.03.02

Обучающийся: Бронников Егор Игоревич

Группа: ПМ-1901

Санкт-Петербург
2022

Задание

Провести количественный анализ модели Солоу с человеческим капиталом.

Модель Солоу с человеческим капиталом в относительных показателях:

Y – валовый внутренний продукт (ВВП)

K – физический капитал

H – человеческий капитал

L – трудовые ресурсы

A – технологический прогресс

s_K – доля инвестиций на физический капитал

s_H – доля инвестиций на человеческий капитал

δ – доля износа

n – постоянный прирост трудовых ресурсов

g – постоянный прирост технологического прогресса

α – эластичность выпуска по физическому капиталу

β – эластичность выпуска по человеческому капиталу

$$y = k^\alpha \cdot h^\beta$$

$$\frac{dk}{dt} = s_K \cdot y - (n + g + \delta)k$$

$$\frac{dh}{dt} = s_H \cdot y - (n + g + \delta)h$$

В соответствии с формулами, данная модель была реализована в среде моделирования AnyLogic. В качестве начальных параметров было принято решение взять $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.2$, $s_K = 0.6$, $s_H = 0.9$, $\delta = 0.01$, $n = 0.3$, $g = 0.2$, $k_0 = 7$, $h_0 = 14$. (Рисунок 1)

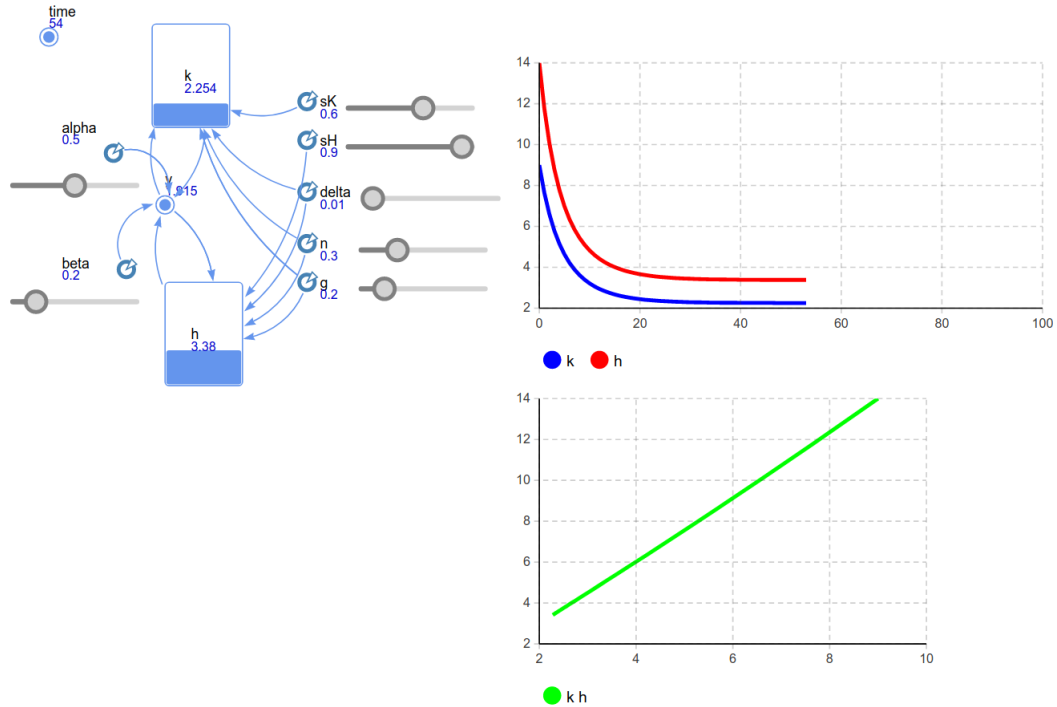


Рис. 1: Результаты построения модели Солоу с человеческим капиталом в AnyLogic

Как можно заметить на графике, который демонстрирует изменение физического капитала и изменение человеческого капитала с течением времени, изначально имел место спад, а затем система пришла в стационарное состояние.

Также данная модель была реализована на языке программирования Python. Для решения системы дифференциальных уравнений был реализован и применён метод Рунге-Кутты. (Рисунок 2)

Метод Рунге-Кутты

```
def runge_kutta(fs: Tuple[Callable], n: int, h: float, t: float, x: float, y: float) -> Tuple[float, float, float]:
    """ Численный метод решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутты

    :param fs: кортеж из первого и второго уравнений
    :type fs: Tuple[Callable]
    :param n: количество итераций (дней)
    :type n: int
    :param h: шаг
    :type h: float
    :param t: начальная точка `t`
    :type t: float
    :param x: начальная точка `x`
    :type x: float
    :param y: начальная точка `y`
    :type y: float

    :return: решение ДУ
    :rtype: Tuple[float, float, float]
    """
    def k(k1, k2, k3, k4):
        return (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4) / 6
    for _ in range(n):
        k11, k21 = map(lambda f: h * f(t, x, y), fs)
        k12, k22 = map(lambda f: h * f(t + h / 2, x + k11 / 2, y + k21 / 2), fs)
        k13, k23 = map(lambda f: h * f(t + h / 2, x + k12 / 2, y + k22 / 2), fs)
        k14, k24 = map(lambda f: h * f(t + h, x + k13, y + k23), fs)
        k1, k2 = k(k11, k12, k13, k14), k(k21, k22, k23, k24)
        t, x, y = t + h, x + k1, y + k2
    return t, x, y
```

Рис. 2: Метод Рунге-Кутты на языке программирования Python

Параметры модели были взяты из AnyLogic. (Рисунок 3)

```
def f(t, k, h, *,
      alpha=0.5, beta=0.2, sK=0.6, n=0.3, g=0.2, delta=0.01):
    y = (k**alpha) * (h**beta)
    return sK * y - (n + g + delta) * k

def g(t, k, h, *,
      alpha=0.5, beta=0.2, sH=0.9, n=0.3, g=0.2, delta=0.01):
    y = (k**alpha) * (h**beta)
    return sH * y - (n + g + delta) * h

runge_kutta((f, g), 1000, 0.01, 0, 7, 14)

(9.9999999999999831, 3.0516210529145322, 4.598770192351719)
```

Рис. 3: Результаты построения модели Солоу с человеческим капиталом в Python для десятого момента времени

На основании полученных результатов можно построить график, который демонстрирует изменение физического капитала (k) и изменение человеческого капитала (h) с течением времени. (Рисунок 4)

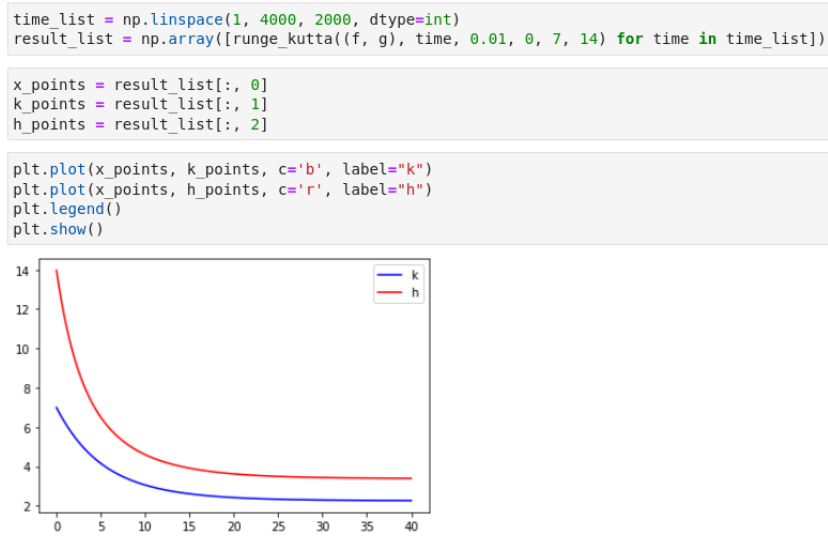


Рис. 4: График изменение капиталов модели

Как можно заметить данный график полностью соответствует графику, который был построен с помощью инструмента AnyLogic.

Также если изменять параметры модели, то она всё равно будет приходить в устойчивое состояние. (Рисунок 5)

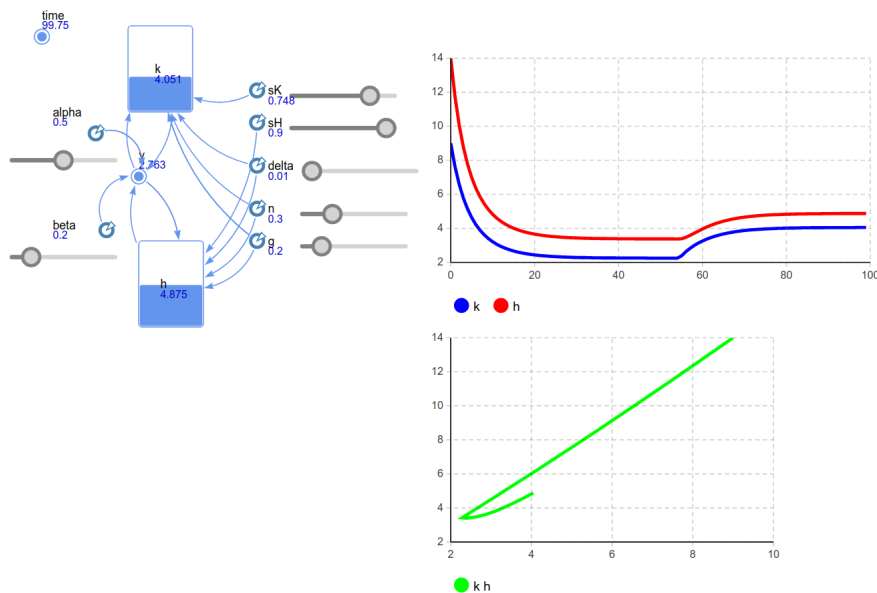


Рис. 5: Изменение параметров модели