

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет информатики и прикладной математики
Кафедра прикладной математики и экономико-математических
методов

ОТЧЁТ
по дисциплине:
«Методы оптимизации»
на тему:
«Решение задачи линейного программирования
симплекс-методом. Вариант 3.1»

Направление: 01.03.02
Обучающийся: Бронников Егор Игоревич
Группа: ПМ-1901

Санкт-Петербург
2021

Дано

Целевая функция:

$$f = -x_1 + x_2 \longrightarrow \max$$

Ограничения:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \geq -1 \\ -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ 3x_1 + x_2 \leq 3 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Задание

Стандартная форма

Целевая функция:

$$f = -x_1 + x_2 \longrightarrow \max$$

Ограничения:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 1 \\ -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ 3x_1 + x_2 \leq 3 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Каноническая форма

Целевая функция:

$$f = -x_1 + x_2 \longrightarrow \max$$

Ограничения:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \geq -1 \\ -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ 3x_1 + x_2 \leq 3 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

1. Вводим слабые переменные $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$:

$$-x_1 + 2x_2 - y_1 = -1$$

$$-2x_1 + x_2 + y_2 = 2$$

$$3x_1 + x_2 + y_3 = 3$$

2. Делаем правые части равенств положительными:

$$x_1 - 2x_2 + y_1 = 1$$

$$-2x_1 + x_2 + y_2 = 2$$

$$3x_1 + x_2 + y_3 = 3$$

Таким образом, задача сведена к канонической форме.

Матричная форма

$A \times X^T = B^T$, где:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = (x_1 \ x_2 \ y_1 \ y_2 \ y_3)$$

$$B = (1 \ 2 \ 3)$$

Симплекс-метод

Целевая функция:

$$f = -x_1 + x_2 \longrightarrow \max$$

Ограничения в канонической форме:

$$x_1 - 2x_2 + y_1 = 1$$

$$-2x_1 + x_2 + y_2 = 2$$

$$3x_1 + x_2 + y_3 = 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$$

$P = N - M = 5 - 3 = 2$ — свободные переменные

$M = 3$ — базисные переменные

1 итерация

x_1, x_2 — свободные переменные

y_1, y_2, y_3 — базисные переменные

1. Выразим базисные переменные через свободные:

$$y_1 = 1 - x_1 + 2x_2$$

$$y_2 = 2 + 2x_1 - x_2$$

$$y_3 = 3 - 3x_1 - x_2$$

2. Выразим функцию цели f через свободные переменные:

$$f = -x_1 + x_2 \longrightarrow \max$$

3. Вычисляем базисное решение и функцию цели ($x_1 = 0, x_2 = 0$):

$$y_1 = 1$$

$$y_2 = 2$$

$$y_3 = 3$$

$$f = 0$$

4. Проанализируем функцию цели и выберем наращиваемую переменную:

$$f = -x_1 + x_2 \longrightarrow \max$$

Будем наращивать $x_2 \uparrow$, тогда $x_1 = 0$

$$y_1 = 1 + 2x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{2} < 0 \text{ — не интересует}$$

$$y_2 = 2 - x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 2$$

$$y_3 = 3 - x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 3$$

$\min\{2, 3\} = 2$, тогда меняем свободную переменную x_2 и базисную переменную y_2 местами:

$$x_2 \leftrightarrow y_2$$

$$y_2 = 2 + 2x_1 - x_2 \leftrightarrow x_2 = 2 + 2x_1 - y_2$$

2 итерация

x_1, y_2 — свободные переменные

x_2, y_1, y_3 — базисные переменные

1. Выразим базисные переменные через свободные:

$$x_2 = 2 + 2x_1 - y_2$$

$$y_1 = 1 - x_1 + 2x_2 = 1 - x_1 + 4 + 4x_1 - 2y_2 = 5 + 3x_1 - 2y_2$$

$$y_3 = 3 - 3x_1 - x_2 = 3 - 3x_1 - 2 - 2x_1 + y_2 = 1 - 5x_1 + y_2$$

\downarrow

$$x_2 = 2 + 2x_1 - y_2$$

$$y_1 = 5 + 3x_1 - 2y_2$$

$$y_3 = 1 - 5x_1 + y_2$$

2. Выразим функцию цели f через свободные переменные:

$$f = -x_1 + x_2 = x_1 + 2 + 2x_1 - y_2 = x_1 - y_2 + 2 \longrightarrow \max$$

\downarrow

$$f = x_1 - y_2 + 2 \longrightarrow \max$$

3. Вычисляем базисное решение и функцию цели ($x_1 = 0, y_2 = 0$):

$$x_2 = 2$$

$$y_1 = 5$$

$$y_3 = 1$$

$$f = 2$$

4. Проанализируем функцию цели и выберем наращиваемую переменную:

$$f = x_1 - y_2 + 2 \longrightarrow \max$$

Будем наращивать $x_1 \uparrow$, тогда $y_2 = 0$

$$x_2 = 2 + 2x_1 = 0 \quad \Rightarrow x_1 = -1 < 0 \text{ — не интересует}$$

$$y_1 = 5 + 3x_1 = 0 \quad \Rightarrow x_1 = -\frac{5}{3} < 0 \text{ — не интересует}$$

$$y_3 = 1 - 5x_1 = 0 \quad \Rightarrow x_1 = \frac{1}{5}$$

Меняем свободную переменную x_1 и базисную переменную y_3 местами:

$$x_1 \leftrightarrow y_3$$

$$y_3 = 1 - 5x_1 + y_2 \leftrightarrow x_1 = \frac{1}{5} + \frac{y_2}{5} - \frac{y_3}{5}$$

3 итерация

y_2, y_3 — свободные переменные

x_1, x_2, y_1 — базисные переменные

1. Выразим базисные переменные через свободные:

$$x_1 = \frac{1}{5} + \frac{y_2}{5} - \frac{y_3}{5}$$

$$x_2 = 2 + 2x_1 - y_2 = \frac{12}{5} - \frac{3}{5}y_2 - \frac{2}{5}y_3$$

$$y_1 = 5 + 3x_1 - 2y_2 = \frac{28}{5} - \frac{7}{5}y_2 - \frac{3}{5}y_3$$

↓

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{5} + \frac{y_2}{5} - \frac{y_3}{5} \\ x_2 &= \frac{12}{5} - \frac{3}{5}y_2 - \frac{2}{5}y_3 \\ y_1 &= \frac{28}{5} - \frac{7}{5}y_2 - \frac{3}{5}y_3 \end{aligned}$$

2. Выразим функцию цели f через свободные переменные:

$$f = x_1 - y_2 + 2 = \frac{11}{5} - \frac{4}{5}y_2 - \frac{y_3}{5} \longrightarrow \max$$

↓

$$f = \frac{11}{5} - \frac{4}{5}y_2 - \frac{y_3}{5} \longrightarrow \max$$

3. Вычисляем базисное решение и функцию цели ($y_2 = 0, y_3 = 0$):

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{5} \\ x_2 &= \frac{12}{5} \\ y_1 &= \frac{28}{5} \\ f &= \frac{11}{5} \end{aligned}$$

4. Проанализируем функцию цели и выберем наращиваемую переменную:

$$f = \frac{11}{5} - \frac{4}{5}y_2 - \frac{y_3}{5} \longrightarrow \max$$

Коэффициенты при свободных переменных – отрицательные, следовательно итерационный процесс окончен.

$$y_2 = 0, y_3 = 0$$

$$x_1 = \frac{1}{5} = 0.2$$

$$x_2 = \frac{12}{5} = 2.4$$

$$y_1 = \frac{28}{5} = 5.6$$

$$f = \frac{11}{5} = 2.2$$

Ответ: $x_1 = 0.2, x_2 = 2.4, f = 2.2$