



МИНОБРНАУКИ РОССИИ

**Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Факультет информатики и прикладной математики
Кафедра прикладной математики и экономико-математических методов

ОТЧЁТ
по дисциплине:
«Модели экономической динамики»

Студента: Бронникова Егора Игоревича

Курс: 4

Группа: ПМ-1901

Форма обучения: очная

Форма представления на кафедру выполненных заданий:
отчёт в электронной форме

Оценка по результатам текущего
контроля (КТ№3)

Санкт-Петербург
2022

Содержание

Моделирование экономического роста	2
Модель Солоу с человеческим капиталом	2
Модель Солоу с человеческим капиталом – переход к отно- сительным показателям	2
Качественный анализ модели Солоу с человеческим капиталом	3
Численный анализ модели Солоу с человеческим капиталом	5
Модель роста R&D	8
Кластеризация стран	10
Оценка коэффициента Джини по квинтильным данным	17
Анализ показателей Японии	19
Модели мировой динамики	28
Модель Коротаева	28
Модель взаимодействия центра и периферии	31
Модель разрешения конфликта	34
Модели циклов	36
Модель Кейнса	36
Модель международной торговли	40
Показатель Хёрста	42
Модель Тобина	48
Модель Калдора-Калецкого	51
Модель Гудвина	55
Модели экономического равновесия	58
Модель Вальраса-Маршалла	58
Реализация и анализ МЭД	60
Моделирование валютного курса	60
Заключение	65

Моделирование экономического роста

Модель Солоу с человеческим капиталом

Модель Солоу с человеческим капиталом:

Y – валовый внутренний продукт (ВВП)

K – физический капитал

H – человеческий капитал

L – трудовые ресурсы

A – технологический прогресс

s_K – доля инвестиций на физический капитал

s_H – доля инвестиций на человеческий капитал

δ – доля износа

n – постоянный прирост трудовых ресурсов

g – постоянный прирост технологического прогресса

α – эластичность выпуска по физическому капиталу

β – эластичность выпуска по человеческому капиталу

$$Y = K^\alpha \cdot H^\beta \cdot (AL)^{1-\alpha-\beta}$$

$$\dot{K} = s_K Y - \delta K$$

$$\dot{H} = s_H Y - \delta H$$

$$g_L = \frac{dL}{dt} = n$$

$$g_A = \frac{dA}{dt} = g$$

$$\alpha + \beta < 1$$

Модель Солоу с человеческим капиталом – переход к относительным показателям

Задание:

Перейти к относительным показателям в модели Солоу с человеческим капиталом.

Решение:

$y = \frac{Y}{AL}$ – ВВП на душу населения с учётом технологического прогресса

$k = \frac{K}{AL}$ – фондовооружённость с учётом технологического прогресса

$h = \frac{H}{AL}$ – человековооружённость с учётом технологического прогресса

$$\begin{aligned} \frac{dk}{dt} &= \left(\frac{K}{AL} \right)' = \frac{\dot{K}AL - K(\dot{A}L + \dot{L}A)}{(AL)^2} = \frac{\dot{K}}{AL} - \frac{K}{AL} \cdot \frac{\dot{A}}{A} - \frac{K}{AL} \cdot \frac{\dot{L}}{L} = \\ &= \frac{s_K Y - \delta K}{AL} - kg - kn = s_K \cdot y - (n + g + \delta)k \end{aligned}$$

$$Y = AL \cdot k^\alpha \cdot h^\beta \Rightarrow y = k^\alpha \cdot h^\beta$$

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \left(\frac{H}{AL} \right)' = \frac{\dot{H}AL - H(\dot{A}L + \dot{L}A)}{(AL)^2} = \frac{\dot{H}}{AL} - \frac{H}{AL} \cdot \frac{\dot{A}}{A} - \frac{H}{AL} \cdot \frac{\dot{L}}{L} = \\ &= \frac{s_H Y - \delta H}{AL} - hg - hn = s_H \cdot y - (n + g + \delta)h \end{aligned}$$

Итого:

$$y = k^\alpha \cdot h^\beta$$

$$\frac{dk}{dt} = s_K \cdot y - (n + g + \delta)k$$

$$\frac{dh}{dt} = s_H \cdot y - (n + g + \delta)h$$

Качественный анализ модели Солоу с человеческим капиталом

Задание:

Провести качественный анализ модели Солоу с человеческим капиталом.

Решение:

Получается система из двух нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{k} = s_K \cdot y_t - (n + g + \delta)k_t \\ \dot{h} = s_H \cdot y_t - (n + g + \delta)h_t \end{cases}$$

Как и в модели Солоу, каждое из уравнений имеет устойчивое состояние при нулевом спросе.

$$\dot{k} = s_K \cdot y_t - (n + g + \delta)k_t = s_K \cdot k_t^\alpha \cdot h_t^\alpha - (n + g + \delta)k_t = 0$$

$$s_K \cdot k_t^\alpha \cdot h_t^\alpha = (n + g + \delta)k_t$$

$$k_t^{1-\alpha} = \frac{s_K \cdot h_t^\beta}{n + g + \delta}$$

Преобразовав и выразив фондооружённость, получим её значение при нулевом приросте фондооружённости:

$$k_t = \left[\frac{s_K}{n + g + \delta} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} h_t^{\frac{\beta}{1-\alpha}}$$

Аналогично можно преобразовать второе дифференциальное уравнение:

$$h_t = \left[\frac{s_H}{n + g + \delta} \right]^{\frac{1}{1-\beta}} k_t^{\frac{\alpha}{1-\beta}}$$

Система уравнений локально устойчива, имеет действительные корни и тип равновесия будет – «устойчивый узел».

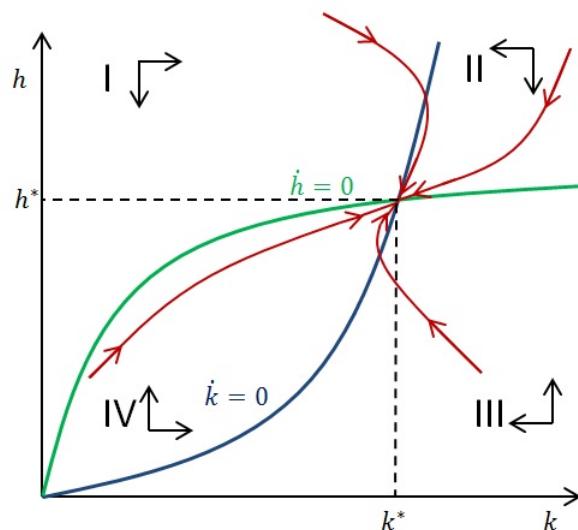


Рис. 1: Фазовая диаграмма модели

Устойчивое состояние модели можно выразить, подставляя полученные

уравнения одно в другое:

$$k^* = \left(\frac{s_K^{1-\beta} \cdot s_H^\beta}{n + g + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}$$

$$h^* = \left(\frac{s_K^{1-\alpha} \cdot s_H^\alpha}{n + g + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}$$

$$y^* = \left(\frac{s_K^\alpha \cdot s_H^\beta}{(n + g + \delta)^{\alpha+\beta}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}$$

Линии $\dot{k} = 0$ – синяя и $\dot{h} = 0$ – зелёная делят диаграмму на четыре квадранта. Возможные траектории фондооружённости показаны красным. В итоге, в модели из любой начальной точки система приходит к равновесию (k^*, h^*) .

Численный анализ модели Солоу с человеческим капиталом

Задание:

Провести численный анализ модели Солоу с человеческим капиталом.

Решение:

В соответствии с формулами, данная модель была реализована в среде моделирования AnyLogic. В качестве начальных параметров было принято решение взять $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.2$, $s_K = 0.6$, $s_H = 0.9$, $\delta = 0.01$, $n = 0.3$, $g = 0.2$, $k_0 = 7$, $h_0 = 14$. (Рисунок 2)

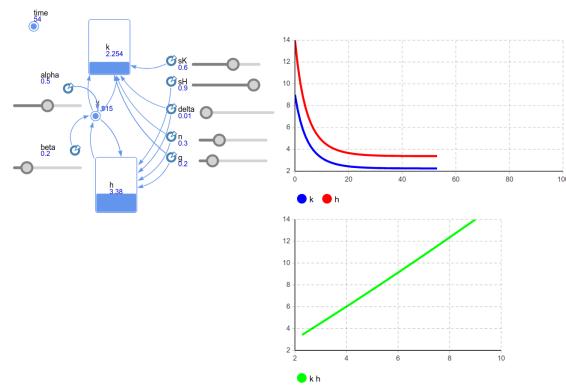


Рис. 2: Результаты построения модели Солоу с человеческим капиталом в AnyLogic

Как можно заметить на графике, который демонстрирует изменение физического капитала и изменение человеческого капитала с течением времени, изначально имел место спад, а затем система пришла в стационарное состояние.

Также данная модель была реализована на языке программирования Python. Для решения системы дифференциальных уравнений был реализован и применён метод Рунге-Кутта. (Рисунок 3)

Метод Рунге-Кутта

```
def runge_kutta(fs: Tuple[Callable], n: int, h: float, t: float, x: float, y: float) -> Tuple[float, float, float]:
    """ Численный метод решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутта

    :param fs: кортеж из первого и второго уравнений
    :type fs: Tuple[Callable]
    :param n: количество итераций (дней)
    :type n: int
    :param h: шаг
    :type h: float
    :param t: начальная точка `t`
    :type t: float
    :param x: начальная точка `x`
    :type x: float
    :param y: начальная точка `y`
    :type y: float

    :return: решение ДУ
    :rtype: Tuple[float, float, float]
    """
    def k(k1, k2, k3, k4):
        return (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4) / 6
    for _ in range(n):
        k11, k21 = map(lambda f: h * f(t, x, y), fs)
        k12, k22 = map(lambda f: h * f(t + h / 2, x + k11 / 2, y + k21 / 2), fs)
        k13, k23 = map(lambda f: h * f(t + h / 2, x + k12 / 2, y + k22 / 2), fs)
        k14, k24 = map(lambda f: h * f(t + h, x + k13, y + k23), fs)
        k1, k2 = k(k11, k12, k13, k14), k(k21, k22, k23, k24)
        t, x, y = t + h, x + k1, y + k2
    return t, x, y
```

Рис. 3: Метод Рунге-Кутта на языке программирования Python

Параметры модели были взяты из AnyLogic. (Рисунок 4)

```
def f(t, k, h, *,
      alpha=0.5, beta=0.2, sK=0.6, n=0.3, g=0.2, delta=0.01):
    y = (k**alpha) * (h**beta)
    return sK * y - (n + g + delta) * k

def g(t, k, h, *,
      alpha=0.5, beta=0.2, sH=0.9, n=0.3, g=0.2, delta=0.01):
    y = (k**alpha) * (h**beta)
    return sH * y - (n + g + delta) * h

runge_kutta((f, g), 1000, 0.01, 0, 7, 14)
(9.99999999999831, 3.0516210529145322, 4.598770192351719)
```

Рис. 4: Результаты построения модели Солоу с человеческим капиталом в Python для десятого момента времени

На основании полученных результатов можно построить график, который демонстрирует изменение физического капитала (k) и изменение человеческого капитала (h) с течением времени. (Рисунок 5)

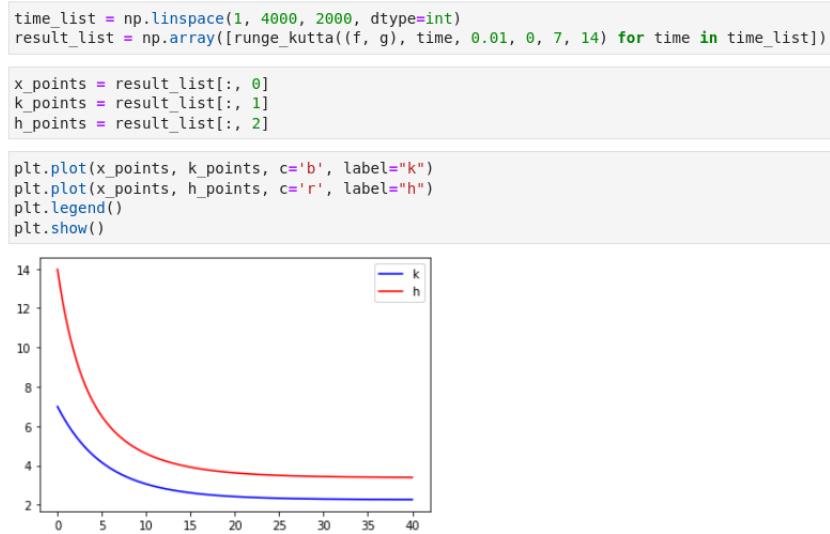


Рис. 5: График изменение капиталов модели

Как можно заметить данный график полностью соответствует графику, который был построен с помощью инструмента AnyLogic.

Также если изменять параметры модели, то она всё равно будет приходить в устойчивое состояние. (Рисунок 6)

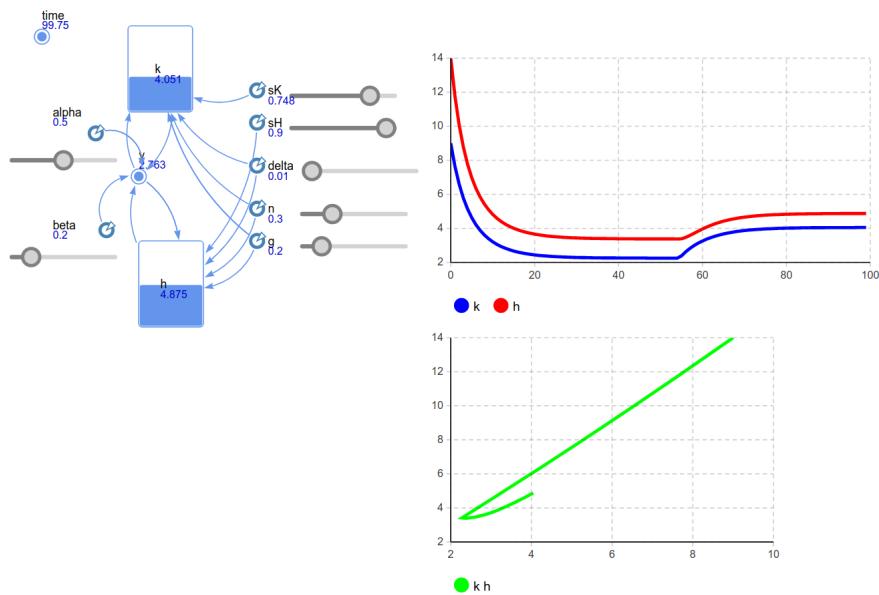


Рис. 6: Изменение параметров модели

Модель роста R&D

Задание:

Провести численный и качественный анализ модели роста R&D.

Решение:

Качественный анализ:

A – знания в рассматриваемой экономике

L – общий объём труда

K – капитал

Y – агрегированный выпуск благ

$$Y = [(1 - a_K)K]^\alpha [A(1 - a_L)L]^{1-\alpha}$$

$$\dot{A} = B(a_K K)^\beta (a_L L)^\gamma A^\theta$$

$$\dot{K} = sY - \delta K$$

$$\frac{\dot{L}}{L} = n$$

Ограничения на параметры: $B > 0$, $\beta \geq 0$, $\gamma \geq 0$, $0 < s < 1$, $n \geq 0$, $0 < \alpha < 1$.

Приведём данную модель к относительным показателям.

$$y = \frac{Y}{L}$$

$$k = \frac{K}{L}$$

$$a = \frac{A}{L}$$

$$\dot{k} = \left(\frac{K}{L}\right)' = \frac{\dot{K}L - K\dot{L}}{L^2} = \frac{\dot{K}}{L} - \frac{K}{L}\frac{\dot{L}}{L} = \frac{sY - \delta K}{L} - kn = sy - \delta k - kn = sy - (n + \delta)k$$

$$Y = \left[(1 - a_K)\frac{K}{L} \times L\right]^\alpha \left[\frac{A}{L} \times L(1 - a_L)L\right]^{1-\alpha} = ((1 - a_K)k \times L)^\alpha [a \times L(1 - a_L)L]^{1-\alpha} =$$

$$= (1 - a_K)^\alpha k^\alpha (1 - a_L)^{1-\alpha} a^{1-\alpha} L^{2-\alpha}$$

$$y = (1 - a_K)^\alpha k^\alpha (1 - a_L)^{1-\alpha} a^{1-\alpha} L^{1-\alpha}$$

$$\begin{aligned}
\dot{a} &= \left(\frac{A}{L} \right)' = \frac{\dot{A}L - A\dot{L}}{L^2} = \frac{\dot{A}}{L} - \frac{A\dot{L}}{L} = \frac{B(a_K K)^\beta (a_L L)^\gamma A^\theta}{L} - an = \\
&= \frac{B(a_K \frac{K}{L} L)^\beta (a_L L)^\gamma (\frac{A}{L} L)^\theta}{L} - an = B(a_K k L)^\beta (a_L L)^\gamma a^\theta L^{\theta-1} - an \\
\dot{k} &= sy - \delta k - kn = sy - (n + \delta)k = s((1 - a_K)^\alpha k^\alpha (1 - a_L)^{1-\alpha} a^{1-\alpha} L^{2-\alpha}) - \delta k - kn \\
\dot{a} &= B(a_K k L)^\beta (a_L L)^\gamma a^\theta L^{\theta-1} - an
\end{aligned}$$

Численный анализ:

В соответствии с формулами, данная модель была реализована в среде моделирования AnyLogic. (Рисунок 7)

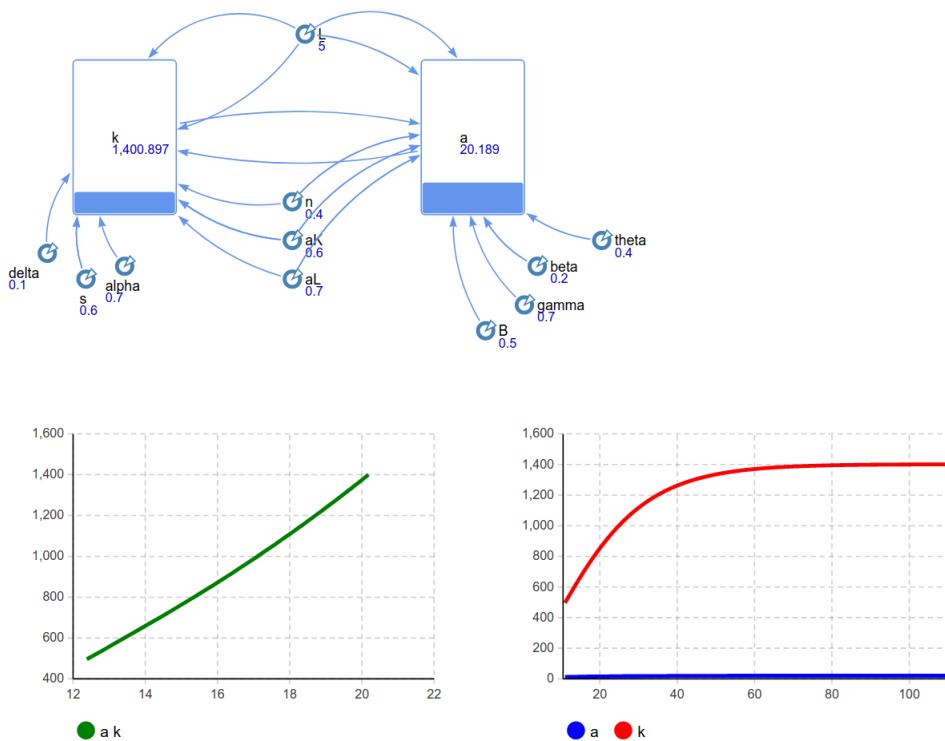


Рис. 7: Результаты построения модели R&D в AnyLogic

В ходе симуляции было получено состояние равновесия – устойчивый узел.

Таким образом, была построена и проанализирована модель роста R&D.

Кластеризация стран

Задание:

Выполнить кластеризацию экономик, используя следующий набор показателей (отдельно за 2019, 2013 и с использованием среднего темпового показателя на временном интервале с 2013 по 2019):

- темпы роста ВВП;
- подушевой ВВП, темп роста ВВП;
- подушевой ВВП, темпы роста ВВП, темп инфляции.

Проанализировать полученное распределение по кластерам, миграцию между кластерами, дать содержательную интерпретацию результатов кластеризации.

Решение:

Данные были взяты с сайта Всемирного банка.

Первый этап заключался в выделении объединений стран и исключении их из исходного набора данных. Был создан файл с наименованиями этих объединений. (Рисунок 8)

```
Список объединений стран

[3]: with open("./data/CountryAlliances", "r") as f:
    country_alliances = list(map(lambda x: x[:-1], f.readlines()))
```

Рис. 8: Заполнения списка объединений стран

Далее были загружены датасеты с темпами роста ВВП (%), подушевого ВВП (текущий US\$), темпами инфляции (%). (Рисунок 9)

```
Темы роста ВВП (%)

[4]: df_gdp_growth_data = pd.read_csv("./data/GDP_growth.csv", skiprows=4)
df_gdp_growth_data = df_gdp_growth_data.loc[~df_gdp_growth_data["Country Name"].isin(country_alliances)]
df_gdp_growth_data.head()

# df_gdp_growth_data = wb.data.DataFrame("NY.GDP.MKTP.KD.ZG", labels=True)
# df_gdp_growth_data.head()

[4]:   Country Name  Country Code  Indicator Name  Indicator Code  1960  1961  1962  1963  1964  1965 ...
0      Aruba        ABW  GDP growth (annual %)  NY.GDP.MKTP.KD.ZG  NaN  NaN  NaN  NaN  NaN  NaN  ... -1.03
1  Afghanistan      AFG  GDP growth (annual %)  NY.GDP.MKTP.KD.ZG  NaN  NaN  NaN  NaN  NaN  NaN  ... 12.75
2      Angola        AGO  GDP growth (annual %)  NY.GDP.MKTP.KD.ZG  NaN  NaN  NaN  NaN  NaN  NaN  ...  8.54
3     Albania        ALB  GDP growth (annual %)  NY.GDP.MKTP.KD.ZG  NaN  NaN  NaN  NaN  NaN  NaN  ...  1.41
4     Andorra        AND  GDP growth (annual %)  NY.GDP.MKTP.KD.ZG  NaN  NaN  NaN  NaN  NaN  NaN  ... -4.97

5 rows x 66 columns
```

Рис. 9: Пример подгруженных данных

На следующем этапе было решено начать с *кластеризации стран на основании темпов роста ВВП за 2019 год*.

Были отобраны соответствующие данные. Также были удалены страны, которые не содержат данных. (Рисунок 10)

```
df_gdp_growth_2019 = df_gdp_growth_data[["Country Name", "2019"]].dropna()
df_gdp_growth_2019 = df_gdp_growth_2019.rename({"2019": "GDP Growth"}, axis=1)
df_gdp_growth_2019
```

	Country Name	GDP Growth
0	Aruba	-2.085600
1	Afghanistan	3.911603
2	Angola	-0.700000
3	Albania	2.088063
4	Andorra	2.015548
...
212	Kosovo	4.756831
213	Yemen, Rep.	1.400000
214	South Africa	0.113054
215	Zambia	1.441306
216	Zimbabwe	-6.144236

205 rows × 2 columns

Рис. 10: Пример отбора необходимых данных

Далее была построена дендрограмма и на основании получившегося результата было решено взять для рассмотрения 5 кластеров, для более качественной интерпретации. (Рисунок 11)

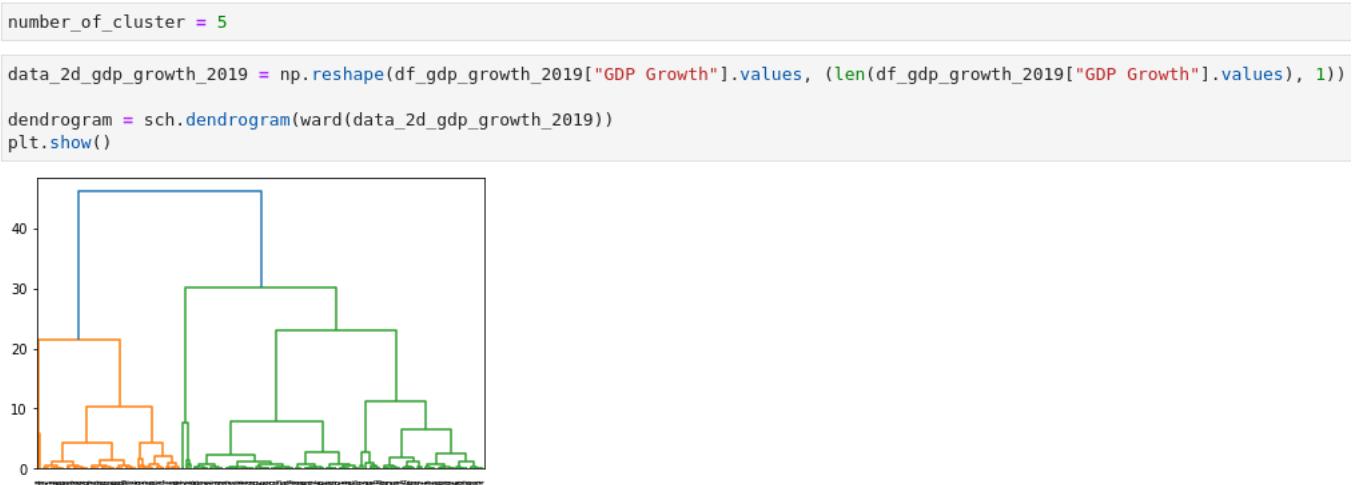


Рис. 11: Построение дерева дендрограммы

Далее происходил процесс кластеризации методом *Agglomerative Clustering*. (Рисунок 12)

```
hc = AgglomerativeClustering(n_clusters=number_of_cluster, affinity="euclidean", linkage="ward")
y_hc = hc.fit_predict(data_2d_gdp_growth_2019)

dict_names_gdp_2019 = {i: [] for i in range(number_of_cluster)}
for i in range(len(y_hc)):
    dict_names_gdp_2019[y_hc[i]].append(df_gdp_growth_2019["Country Name"].values[i])
```

Рис. 12: Кластеризация данных

После чего можно вывести название стран, которые попали в конкретный кластер. (Рисунок 13)

```
df_names_gdp_2019 = pd.DataFrame.from_dict(dict_names_gdp_2019, orient="index").transpose()
df_names_gdp_2019.head()

0          1          2          3          4
0      Aruba      Armenia Equatorial Guinea Afghanistan Timor-Leste
1     Angola Antigua and Barbuda           Lebanon      Albania Tuvalu
2   Argentina           Benin            Libya      Andorra    None
3 American Samoa Burkina Faso Northern Mariana Islands United Arab Emirates    None
4      Austria      Bangladesh           Zimbabwe      Australia    None
```

Рис. 13: Распределение стран по кластерам (названия)

Также можно вывести значение темпов роста ВВП стран в кластерах. (Рисунок 14)

```
dict_vals_gdp_2019 = {i: [df_gdp_growth_2019.loc[df_gdp_growth_2019["Country Name"] == df_
df_vals_gdp_2019 = pd.DataFrame.from_dict(dict_vals_gdp_2019, orient="index").transpose()
df_vals_gdp_2019.head()

0          1          2          3          4
0 -2.085600  7.600000 -5.481823  3.911603 19.535810
1 -0.700000  4.862236 -6.914925  2.088063 13.793103
2 -2.025934  6.865687 -11.195695  2.015548      NaN
3 -0.487805  5.688115 -11.142587  3.411539      NaN
4  1.491211  7.881915 -6.144236  2.113149      NaN
```

Рис. 14: Распределение стран по кластерам (значения)

Можно выделить численные характеристики каждого получившегося кластера: количество стран в кластере, минимальное значение, максимальное значение и среднее значение. (Рисунок 15)

```
aggregate = {i: ["count", "min", "max", "mean"] for i in range(number_of_cluster)}
df_vals_gdp_2019.agg(aggregate)
```

	0	1	2	3	4
count	57.000000	64.000000	5.000000	77.000000	2.000000
min	-3.779889	4.331735	-11.195695	1.671944	13.793103
max	1.491211	9.460598	-5.481823	4.188260	19.535810
mean	-0.090235	5.739661	-8.175853	2.740411	16.664457

Рис. 15: Численные характеристики кластеров

В данном случае можно выделить, что в 4 кластер попали страны, которые имеют очень высокие темпы роста ВВП, в 1 кластер попали страны с высоким темпом роста ВВП, в 3 кластер попали страны со средними темпами роста ВВП, в 0 кластер попали страны с низким темпом роста ВВП, а во 2 кластер попали страны с очень низким темпом роста ВВП.

Также получившиеся данные сохраняются в *Excel*-файл. На 1 листе будут отображены наименования стран распределённые по кластерам, а на 2 листе будут отражены соответствующие им показатели. (Рисунок 16)

```
save_as_xlsx("./results/gdp_growth_2019.xlsx",
            ["Country Names", "GDP growth"],
            [df_names_gdp_2019, df_vals_gdp_2019])
```

Рис. 16: Сохранение получившихся результатов в Excel-файле

Далее данные шаги повторяются для каждого из годов и соответствующих объединений показателей как указано в условии задачи.

Единственное что стоит отметить, что при рассмотрении факторов, которые имеют разные единицы измерения (%) и текущие US\$, перед кластеризацией стоит провести процесс стандартизации. Также стоит отметить, что когда мы рассматриваем средние показатели с 2013 года по 2019 год стоит рассматривать среднее геометрическое показателей если соответствующая величина выражена в % соотношении.

На основании получившихся данных, была рассмотрена миграция стран по кластерам.

В качестве примера рассмотрим миграцию стран по темпам роста ВВП среди стран, которые показали средний темпы роста в 2013 году.

Страны, оставшиеся в кластере средних темпов роста ВВП. (Рисунок 17)

```
list(set(df_names_gdp_2013[0]) & set(df_names_gdp_2019[3]))  
['Colombia',  
 'South Asia',  
 'United Kingdom',  
 'Panama',  
 'North Macedonia',  
 'Canada',  
 'Comoros',  
 'Bolivia',  
 'India',  
 'New Zealand',  
 'Jordan',  
 'El Salvador',  
 'Guam',  
 'Thailand',  
 'Eswatini',  
 'United States',  
 'Afghanistan',  
 'Latvia',  
 'Guatemala',  
 'Burundi',  
 'Gabon',  
 'Pakistan',  
 'Lesotho',  
 'Chad',  
 'Korea, Rep.',  
 'North America',  
 'Cameroon',  
 'Honduras',  
 'Mozambique',  
 'Australia',  
 'Luxembourg',  
 'Romania',  
 'Bahrain',  
 'Sao Tome and Principe',  
 'Morocco',  
 'Seychelles',  
 'Iceland',  
 'Azerbaijan',  
 'Nigeria',  
 'Montenegro']
```

Рис. 17: Оставшиеся в своём кластере

Страны, мигрировавшие в кластер с высокими темпами роста ВВП. (Рисунок 18)

```
list(set(df_names_gdp_2013[0]) & set(df_names_gdp_2019[1]))  
['Burkina Faso',  
 'Uganda',  
 'Serbia',  
 'Marshall Islands',  
 'Vietnam',  
 'Senegal',  
 'Rwanda',  
 'Kazakhstan',  
 'Guinea-Bissau',  
 'Bangladesh',  
 'St. Kitts and Nevis',  
 'Mali',  
 'Niger',  
 'Guinea',  
 'Egypt, Arab Rep.',  
 'Lithuania',  
 'Malaysia',  
 'Indonesia',  
 'Hungary',  
 'Bhutan',  
 'Armenia',  
 'Togo',  
 'Malawi',  
 'Gambia, The',  
 'Madagascar',  
 'Tanzania',  
 'Guyana',  
 'Malta',  
 'Georgia',  
 'Mauritania',  
 'Nepal',  
 'Papua New Guinea',  
 'Kosovo',  
 'Kenya',  
 'Dominican Republic',  
 'Philippines']
```

Рис. 18: Мигрировавшие в кластер с высокими темпами роста

Страны, мигрировавшие в кластер с очень высокими темпами роста ВВП. (Рисунок 19)

```
list(set(df_names_gdp_2013[0]) & set(df_names_gdp_2019[4]))  
['Tuvalu', 'Timor-Leste']
```

Рис. 19: Мигрировавшие в кластер с очень высокими темпами роста

Страны, мигрировавшие в кластер с очень низкими темпами роста ВВП. (Рисунок 20)

```
list(set(df_names_gdp_2013[0]) & set(df_names_gdp_2019[2]))  
['Northern Mariana Islands', 'Zimbabwe', 'Lebanon']
```

Рис. 20: Мигрировавшие в кластер с очень низкими темпами роста

Страны, мигрировавшие в кластер с низкими темпами роста ВВП. (Рисунок 21)

```
list(set(df_names_gdp_2013[0]) & set(df_names_gdp_2019[0]))  
['Oman',  
 'Brazil',  
 'Grenada',  
 'Fiji',  
 'Hong Kong SAR, China',  
 'Qatar',  
 'Ecuador',  
 'Aruba',  
 'Haiti',  
 'Kiribati',  
 'Chile',  
 'Isle of Man',  
 'Namibia',  
 'St. Vincent and the Grenadines',  
 'Saudi Arabia',  
 'Singapore',  
 'Japan',  
 'Solomon Islands',  
 'Switzerland',  
 'Zambia',  
 'Argentina',  
 'Trinidad and Tobago',  
 'Algeria',  
 'Yemen, Rep.',  
 'Sudan',  
 'Angola',  
 'Uruguay',  
 'Cuba',  
 'Nicaragua',  
 'Suriname',  
 'South Africa',  
 'Tunisia']
```

Рис. 21: Мигрировавшие в кластер с низкими темпами роста

Аналогичным образом были получены результаты для всех остальных миграций по показателям и по их принадлежности к конкретному кластеру.

Оценка коэффициента Джини по квинтильным данным

Задание:

Рассчитать коэффициент Джини и построить кривую Лоренца для данных.

Решение:

Коэффициент Джини – это показатель расслоения общества по заданному признаку. Обычно рассматривают расслоение по уровню доходов. В этом случае коэффициент Джини показывает отклонение фактического уровня доходов в обществе от равного их распределения.

Чем выше больше его значение отклоняется от 0 и приближается к 1, тем выше уровень общественного неравенства в государстве.

Графическим представлением индекса Джини является кривая Лоренца – кривая распределения уровня доходов населения. Коэффициент Джини можно посчитать как отношение площади фигуры, образованной кривой Лоренца и прямой равенства, к площади треугольника, образованного прямой равенства и осями координат.

При построении кривой Лоренца на оси X откладывается процент населения, а по оси Y – процент общего дохода у этого процента населения. Формулу для расчёта коэффициента Джини можно записать следующим образом:

$$G = \left| 1 - \sum_{k=2}^n (X_k - X_{k-1})(Y_k + Y_{k-1}) \right|$$

Нам были даны данные в виде таблицы, в которой были приведены доли доходов по квинтилям. (Рисунок 22)

```
[1]: import numpy as np
import pandas as pd
from typing import List
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline

[3]: df = pd.read_excel("./data/Gini-RF-20.xlsx", skiprows=3)

[4]: df.head()
```

	Год	Первый квинтиль (20%)	Второй квинтиль (20%)	Третий квинтиль (20%)	Четвёртый квинтиль (20%)	Пятый квинтиль (20%)
0	1993	5.8	11.1	16.7	24.8	41.6
1	1994	5.3	10.2	15.2	23.0	46.3
2	1995	5.5	10.2	15.0	22.4	46.9
3	1996	6.5	10.9	15.5	22.4	44.7
4	1997	6.2	10.6	15.1	21.4	46.7

Рис. 22: Данные для квинтилей

Далее была реализована функция, которая рассчитывает значение коэффициента Джини по входным данным. (Рисунок 23)

```
[12]: def get_gini_coef(x: List[float]) -> float:
    mad = np.abs(np.subtract.outer(x, x)).mean()
    rmad = mad / np.mean(x)
    return 0.5 * rmad
```

Рис. 23: Функция для расчёта коэффициента Джини

После чего, по данным были произведены расчёты. (Рисунок 24)

```
[13]: y = [0] + [0.2 for _ in range(5)]
x_axis, y_axis = np.cumsum(y), []
gini_coef_list = []

for i in range(len(df)):
    x = df.loc[i].values[1:] / 100
    gini_coef_list.append(get_gini_coef(x))
    y_axis.append(np.cumsum(np.concatenate(([0], x))))
```

Рис. 24: Расчёт коэффициента Джини

Таким образом, на основе коэффициентов Джини была получена визуализация кривой Лоренца. (Рисунок 25)

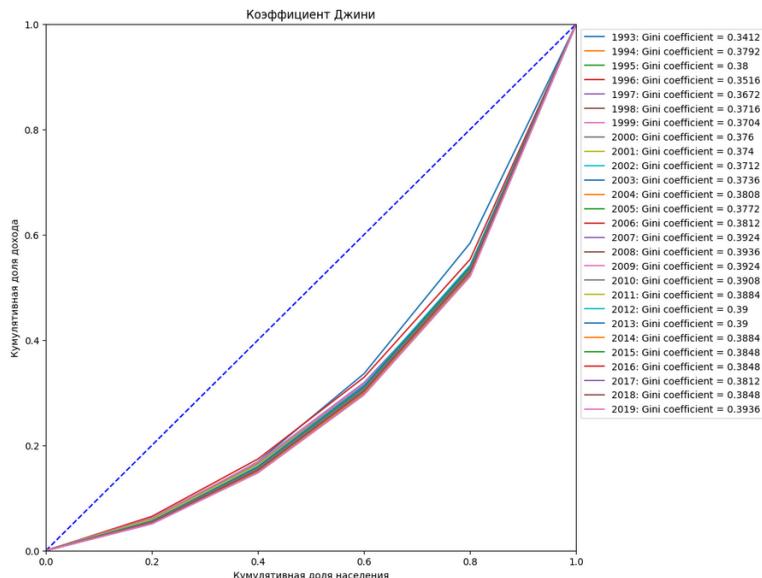


Рис. 25: Кривая Лоренца

Таким образом, нами были рассчитаны коэффициенты Джини и построены кривые Лоренца для доли доходов по квинтилям РФ. Исходя из полученных результатов можно сделать вывод о том, что расслоение по доходам в РФ было приемлемым, так как значение коэффициента Джини за все годы было меньше значения 0.4.

Анализ показателей Японии

Задание:

Выбрать значимые показатели для рассмотрения динамики экономики страны, сделать прогнозы и описать полученные результаты по миграции данной страны в кластерах.

Решение:

В качестве рассматриваемой страны была выбрана Япония.

Были рассмотрены следующие показатели:

1. численность людей (тыс.)
2. численность молодого населения 0-14 (% от общей численности)
3. темпы роста ВВП (%)
4. уровень безработицы (% от всей рабочей силы)
5. уровень экспорта (% от ВВП)
6. уровень импорта (% от ВВП)
7. подушевой ВВП (текущих US\$)

Эти данные были взяты с сайта Всемирного банка [9.10.2022]. (Рисунок 26)

	Feature	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968	...
0	Population, total (thousands)	9.321600e+07	9.405500e+07	9.493300e+07	9.590000e+07	9.690300e+07	9.795200e+07	9.885100e+07	9.987900e+07	1.010110e+08	...
1	Population ages 0-14 (% of total population)	3.026390e+01	2.940904e+01	2.847836e+01	2.752080e+01	2.663051e+01	2.586565e+01	2.533625e+01	2.485897e+01	2.447670e+01	...
2	GDP growth (annual %)	Nan	1.204354e+01	8.908973e+00	8.473642e+00	1.167671e+01	5.819708e+00	1.063856e+01	1.108214e+01	1.288247e+01	...
3	Unemployment, total (% of total labor force) (...)	Nan	...								
4	Exports of goods and services (% of GDP)	Nan	...								
5	Imports of goods and services (% of GDP)	Nan	...								
6	GDP per capita (current US\$)	4.753191e+02	5.689077e+02	6.396408e+02	7.246938e+02	8.436169e+02	9.285188e+02	1.068558e+03	1.239318e+03	1.451338e+03	...

7 rows x 63 columns

Рис. 26: Выбранные показатели Японии с 1960 года по 2021 год

Далее был рассмотрен каждый показатель отдельно.

На основе данных можно построить график как менялась численность населения. (Рисунок 27)

```
plt.figure(figsize=(40, 10))
plt.bar(years, population)
plt.plot(population, linewidth="4", color="orange")
plt.xlabel("Года")
plt.ylabel("Population, total (thousands)")
plt.show()
```

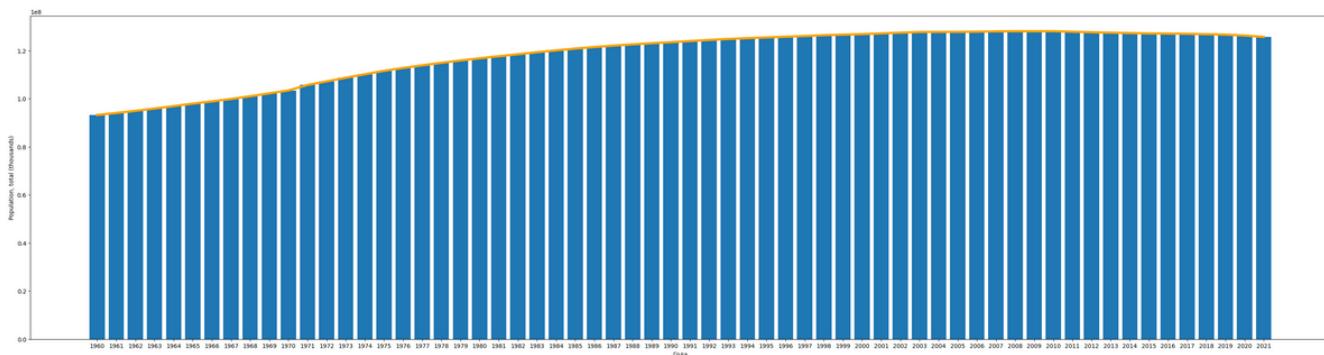


Рис. 27: Динамика численности населения Японии с 1960 года по 2021 год

Можно заметить, что до 2005-2006 года наблюдался рост численности людей, после уровень популяции вышел на плато, а затем (с 2010 года) начал постепенно убывать.

Стоит также проанализировать и «молодую» часть населения Японии. (Рисунок 28)

```
plt.figure(figsize=(40, 10))
plt.bar(years, young_population)
plt.plot(young_population, linewidth="4", color="orange")
plt.xlabel("Года")
plt.ylabel("Population ages 0-14 (% of total population)")
plt.show()
```

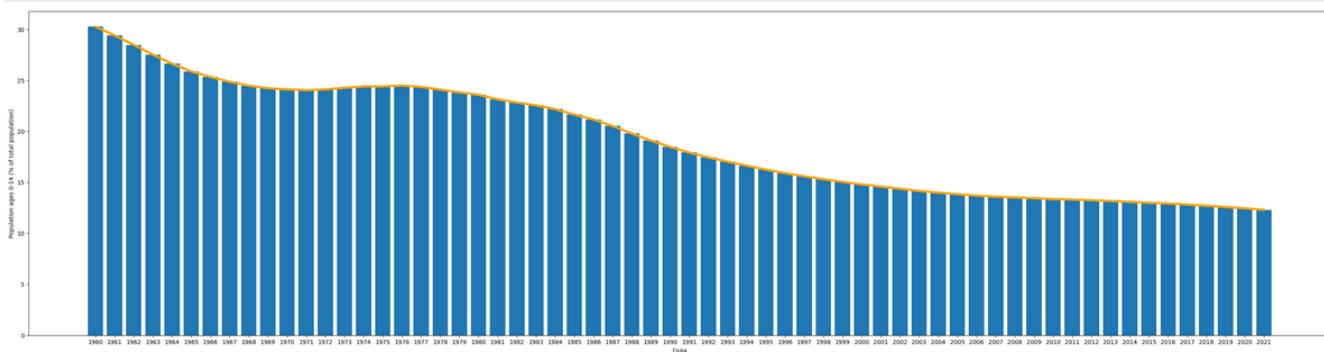


Рис. 28: Динамика молодого населения Японии с 1960 года по 2021 год

На графике видно, что детей становится с каждым годом всё меньше и меньше.

Проблема демографии не обошла и Японию, по демографическим пирамидам можно заметить, что на сегодняшний день основную часть населения составляют люди в «зрелом» возрасте. Как можно заметить из возрастно-половых пирамид, если ничего не поменяется, то прогнозируют, что к 2050 году в Японии сократится население на 20 миллионов человек. (Рисунок 29)

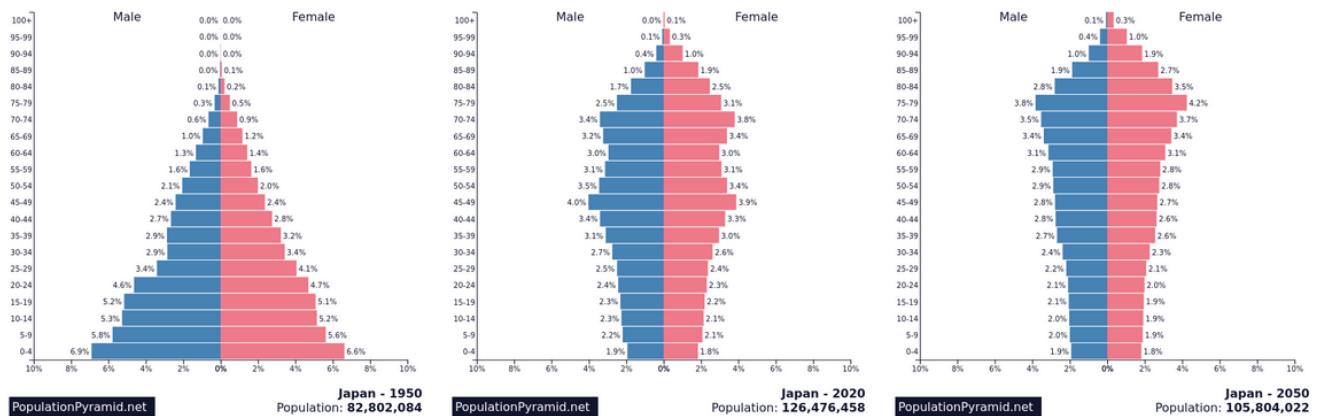


Рис. 29: Возрастно-половые пирамиды

Далее было рассмотрено изменение темпов роста ВВП. (Рисунок 30)

```
plt.figure(figsize=(40, 10))
plt.plot(years, gdp, linewidth="4", color="orange")
plt.xlabel("Года")
plt.ylabel("GDP growth (annual %)")
plt.show()
```

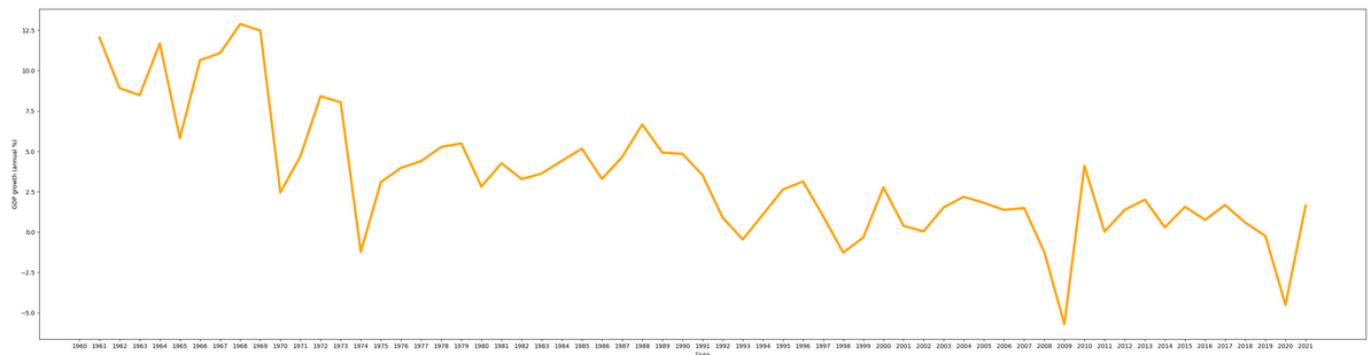


Рис. 30: Динамика темпов роста ВВП Японии с 1960 года по 2021 год

Можно заметить что с середины 1950 до 1973 года темпы прироста ВВП были достаточно велики, составляли более 10% ежегодно и это были самые высокие показатели прироста ВВП среди развитых стран того времени. Этот феномен называют «Японское экономическое чудо».

Причины данного феномена:

- дешевизна рабочей силы
- объединение производителей, поставщиков ресурсов, сбытчиков продукции и банков в тесно связанные группы
- взаимовыгодные отношения предпринимателей с правительством
- Корейская война, поставка вооружения США через Японию
- отсутствие военных расходов у Японии (отказ от милитаристского бюджета). В 1972 году его доля составила только 1% от ВНП
- освоение японской наукой новых технологий, скупка патентов и лицензий
- ...

Также можно заметить, что присутствуют спады, а именно в 1973 году случился Нефтяной кризис, а так как Япония в те годы делала упор на химическую промышленность, в том числе и переработку нефти, то на их экономики это тоже сказалось. Ещё имеются спады в 2008 году и 2020 году, в 2008 году произошёл Мировой кризис, а в 2020 году был COVID-19.

Если посмотреть, то за исключением кризисов был стабильный ежегодный прирост ВВП в среднем на 2.24%, что достаточно хорошо.

Следующий фактор, который был проанализирован – это динамика уровня безработицы. (Рисунок 31)

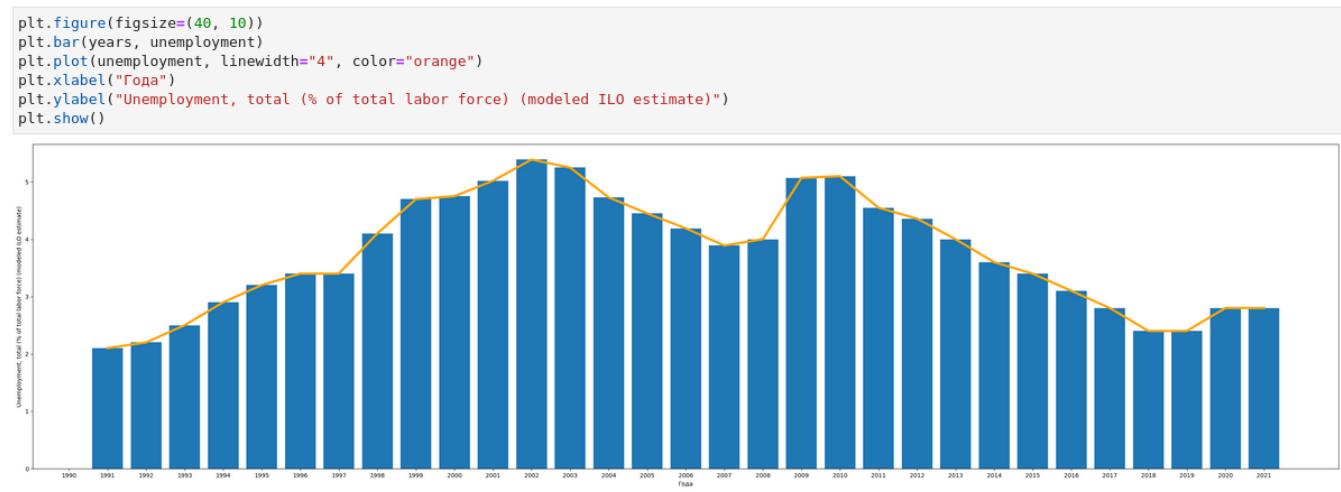


Рис. 31: Динамика уровня безработицы Японии с 1991 года по 2021 год

Можно заметить, что уровень безработицы в Японии достаточно низкий и в среднем составляет 3.7%.

Далее рассматривалась динамика объёмов экспорта. (Рисунок 32)

```
plt.figure(figsize=(40, 10))
plt.bar(years, exports)
plt.plot(exports, linewidth="4", color="orange")
plt.xlabel("Года")
plt.ylabel("Exports of goods and services (% of GDP)")
plt.show()
```

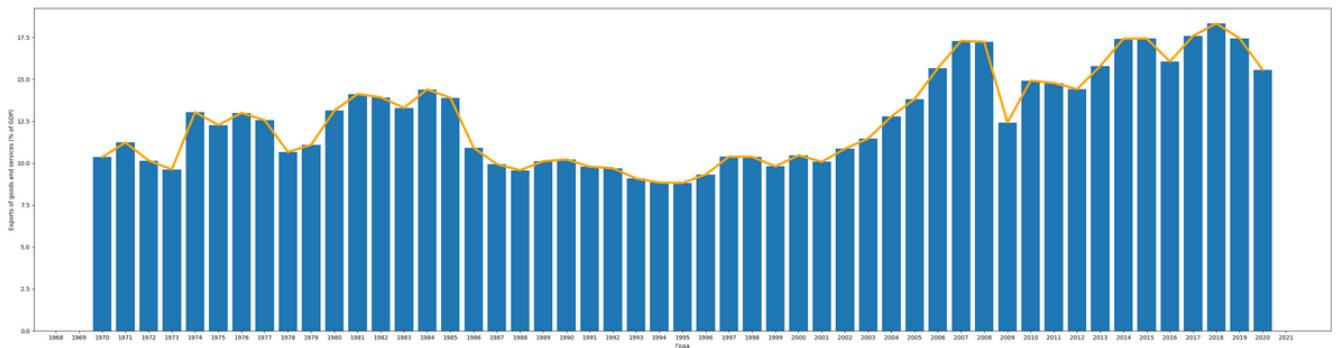


Рис. 32: Динамика объёмов экспорта Японии с 1970 года по 2020 год

Страна не очень богата природными ресурсами, но тем не менее она является одним из главных мировых экспортёров в отраслях:

- робототехники
- автомобилестроения
- электронно-вычислительной техники
- бытовой химии

И также были рассмотрены изменения уровня объёма импорта. (Рисунок 33)

```
plt.figure(figsize=(40, 10))
plt.bar(years, imports)
plt.plot(imports, linewidth="4", color="orange")
plt.xlabel("Года")
plt.ylabel("Imports of goods and services (% of GDP)")
plt.show()
```

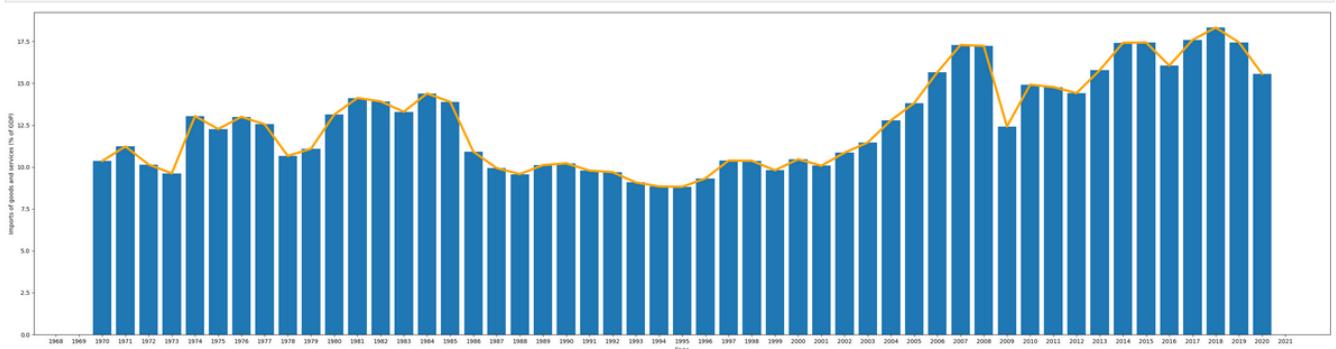


Рис. 33: Динамика объёмов импорта Японии с 1970 года по 2020 год

Основными товарами импорта являются:

- минеральные ресурсы
- текстильные товары
- металло-продукция
- продукты питания

Последний рассмотренный фактор – это динамика подушевого ВВП. (Рисунок 34)

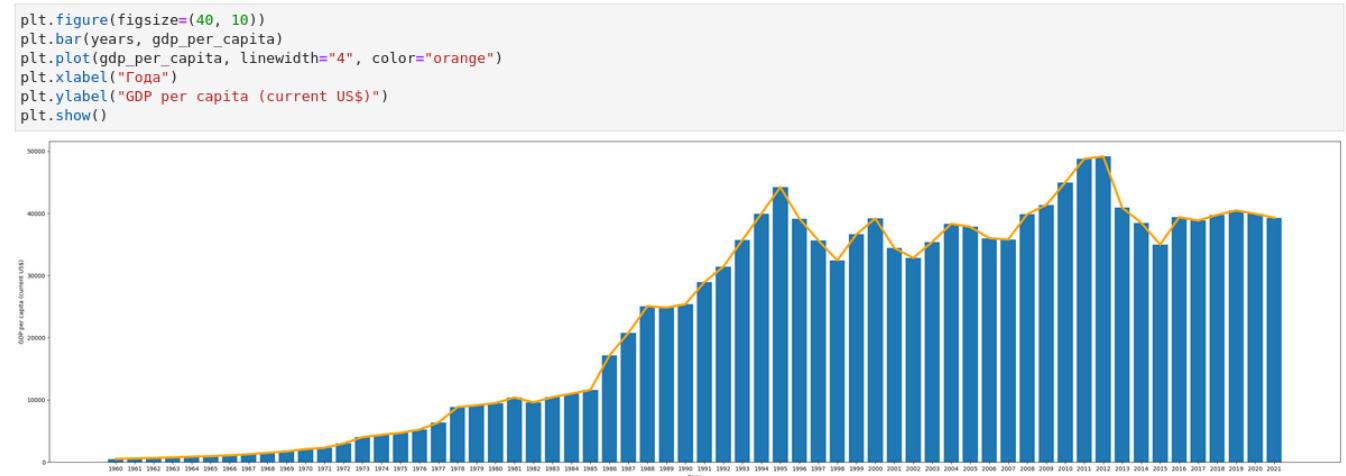


Рис. 34: Динамика объёмов подушевого ВВП Японии с 1970 года по 2020 год

Можно видеть, что когда Япония проиграла Вторую мировую войну, то страна была разрушена и ВВП был достаточно низок, а численность населения была большой. Однако потом страна начала наращивать темпы роста ВВП и произошло «Японское экономическое чудо», после чего темпы подушевого ВВП выросли и сейчас достаточно стабильны.

Далее были построены прогнозы на 10 лет для каждого из признаков с помощью модели прогнозирования *SARIMAX*. Для каждого признака были подобраны оптимальные значения p и q с помощью графиков автокорреляции и частичной автокорреляции.

Первым было спрогнозировано изменение уровня безработицы. (Рисунок 35)

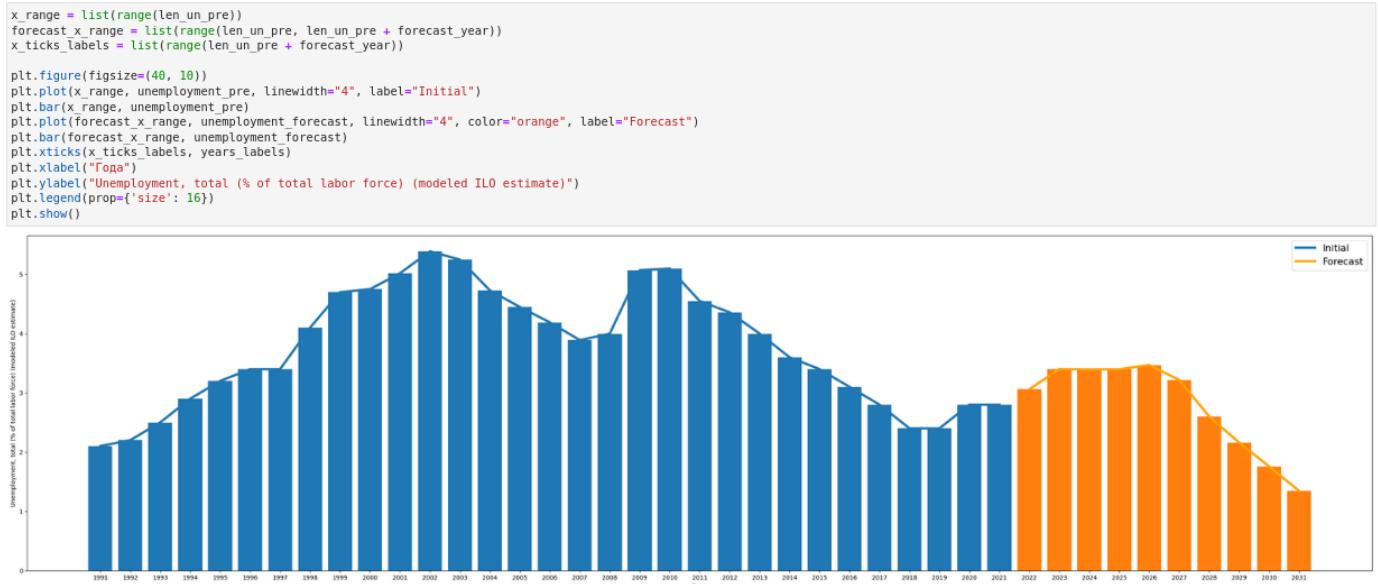


Рис. 35: Прогноз динамики уровня безработицы Японии на 10 лет

Можно видеть, что в ближайшие 10 лет будет ожидаться сначала стабильный уровень безработицы, а затем он будет уменьшаться.

Далее было решено спрогнозировать динамику темпов роста ВВП. (Рисунок 36)

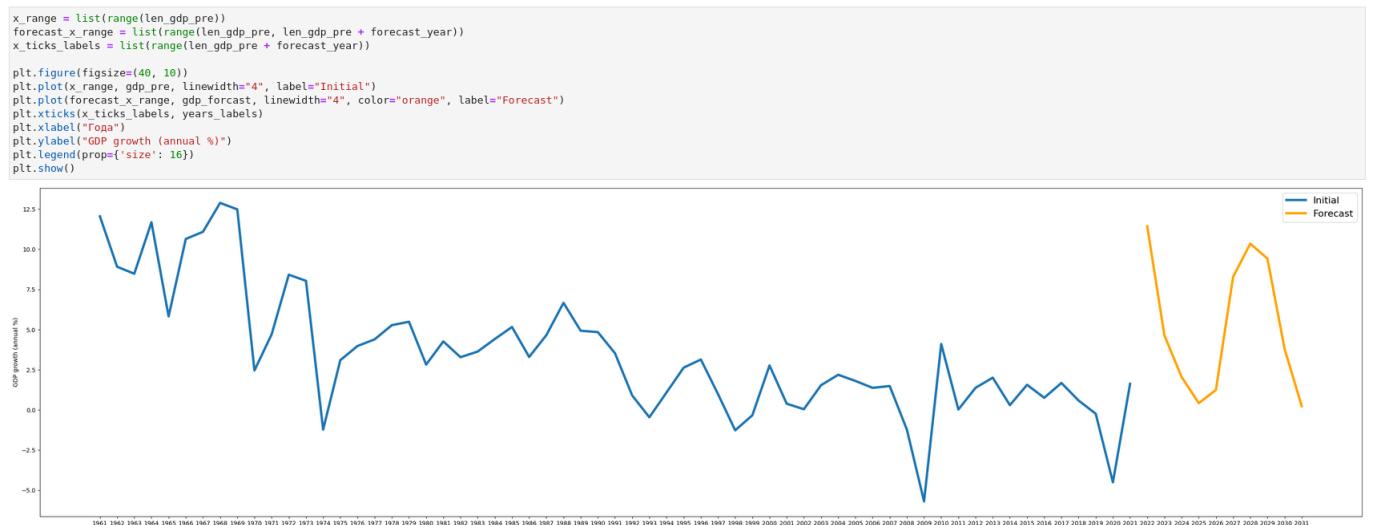


Рис. 36: Прогноз динамики темпов роста ВВП Японии на 10 лет

На графике можно видеть, что ожидается рост темпов роста ВВП, а затем он снова должен нормализоваться.

Также было спрогнозировано изменение численности молодого населения в стране. (Рисунок 37)

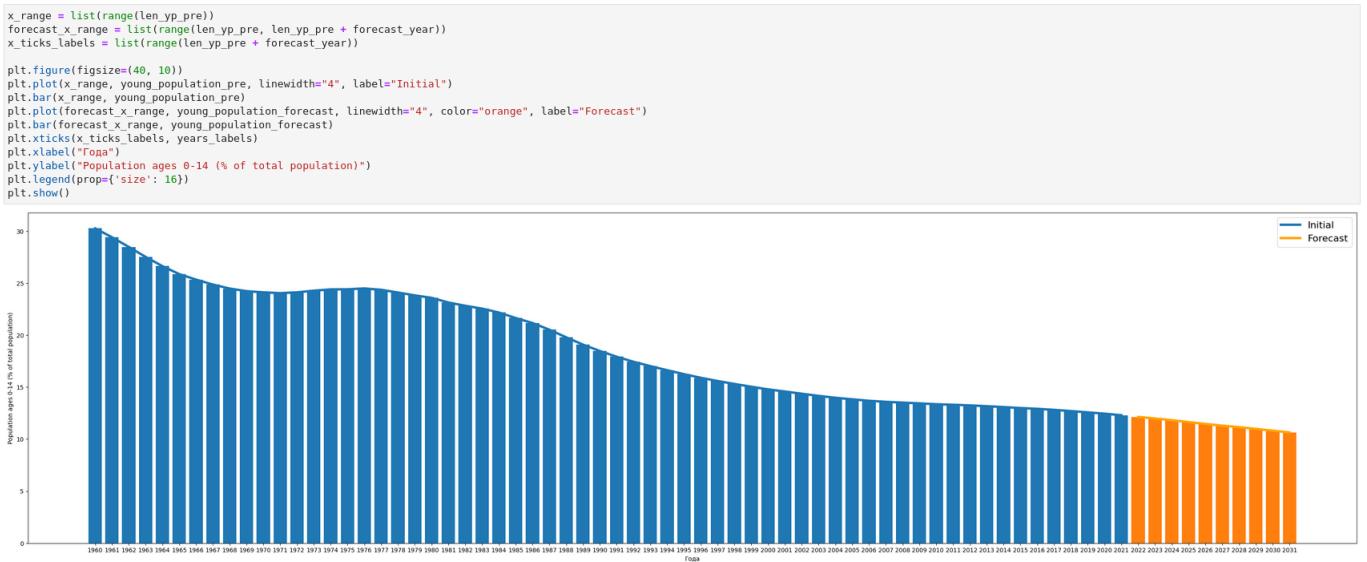


Рис. 37: Прогноз изменения численности молодого населения Японии на 10 лет

Как уже было ранее сказано, что если ничего не поменяется, то ожидается, что численность населения в Японии сократиться на 20 миллионов человек.

Последнее что было спрогнозировано – это изменение уровня экспорта. (Рисунок 38)

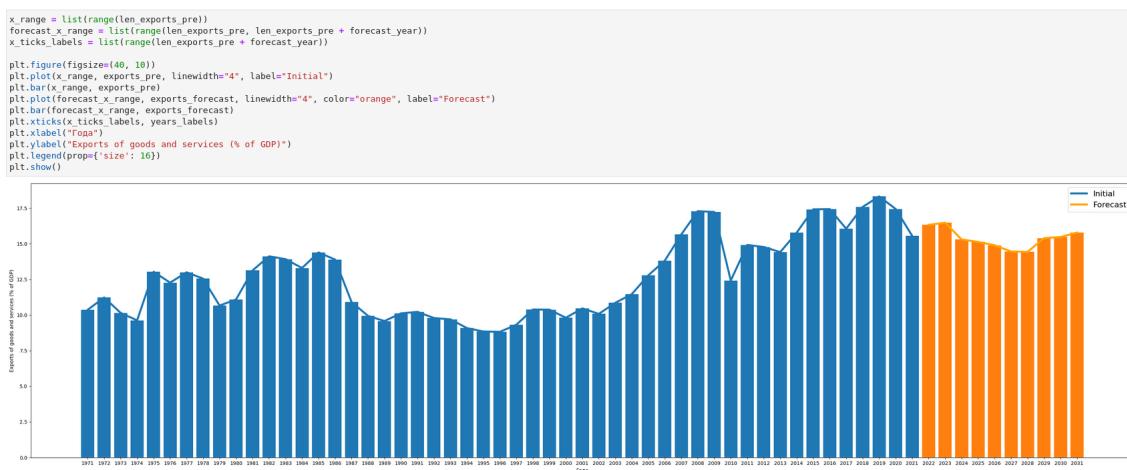


Рис. 38: Прогноз изменения уровня экспорта Японии на 10 лет

На данном графике видно, что уровень экспорта останется примерно стабильным.

Также на основе построенных кластеров было выявлено, что в 2013 году Япония находилась в кластере стран со средним темпом роста подушевого ВВП, в 2019 году её кластер не изменился.

В 2013 году Япония находилась в кластере стран со средним темпом роста ВВП, в 2019 году она оказалась в кластере с низким темпом роста ВВП.

В 2013 году Япония находилась в кластере с низким темпом инфляции, в 2019 году её кластер не изменился.

Модели мировой динамики

Модель Коротаева

Задание:

Провести численный анализ модели Коротаева в среде AnyLogic.

Решение:

N – численность населения

T – производительность труда

E – уровень грамотности населения

Y – величина мирового ВВП

e – отношение числа работающего населения ко всему населению

$$\frac{dN}{dt} = aTN(1 - E)$$

$$\frac{dT}{dt} = bTE$$

$$\frac{dE}{dt} = cTE(1 - E)$$

$$Y = eTN$$

В соответствии с формулами, данная модель была реализована в среде моделирования AnyLogic. В качестве начальных параметров было принято решение взять $a = 0.1$, $b = 0.1$, $c = 0.1$ и $e = 0.6$. (Рисунок 39)

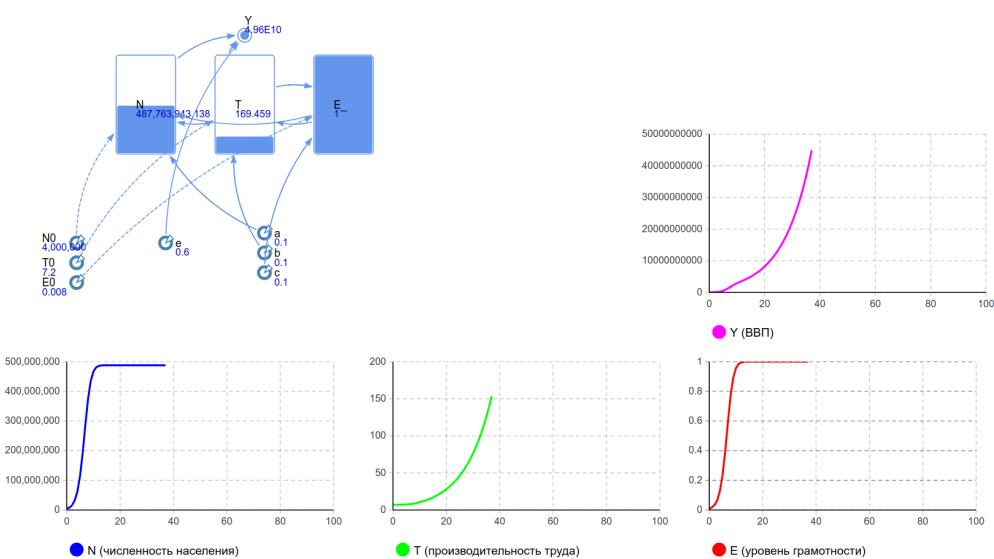


Рис. 39: Результаты построения модели Коротаева в AnyLogic с параметрами: $a = 0.1$, $b = 0.1$, $c = 0.1$ и $e = 0.6$

Теперь попробуем поменять значения параметров: $a = 0.1$, $b = 0.1$, $c = 0.1$ и $e = 0.3$. (Рисунок 40)

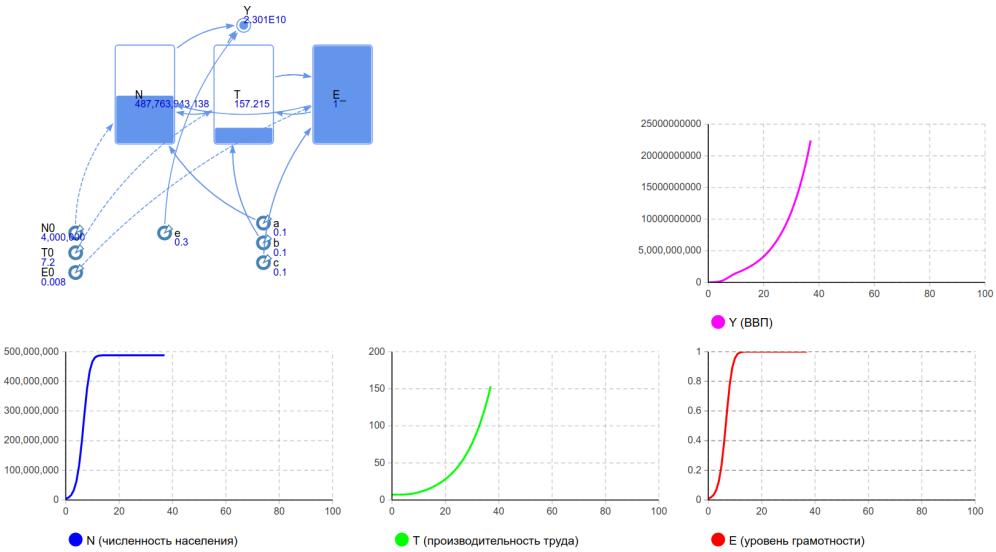


Рис. 40: Результаты построения модели Коротаева в AnyLogic с параметрами: $a = 0.1$, $b = 0.1$, $c = 0.1$ и $e = 0.3$

Можно видеть, что отношение числа работающего населения ко всему населению напрямую влияет на величину мирового ВВП, то есть чем меньше значение параметра e , тем меньше будет значение ВВП – Y .

Теперь попробуем поменять значения параметров: $a = 0.1$, $b = 0.7$, $c = 0.1$ и $e = 0.3$. (Рисунок 41)

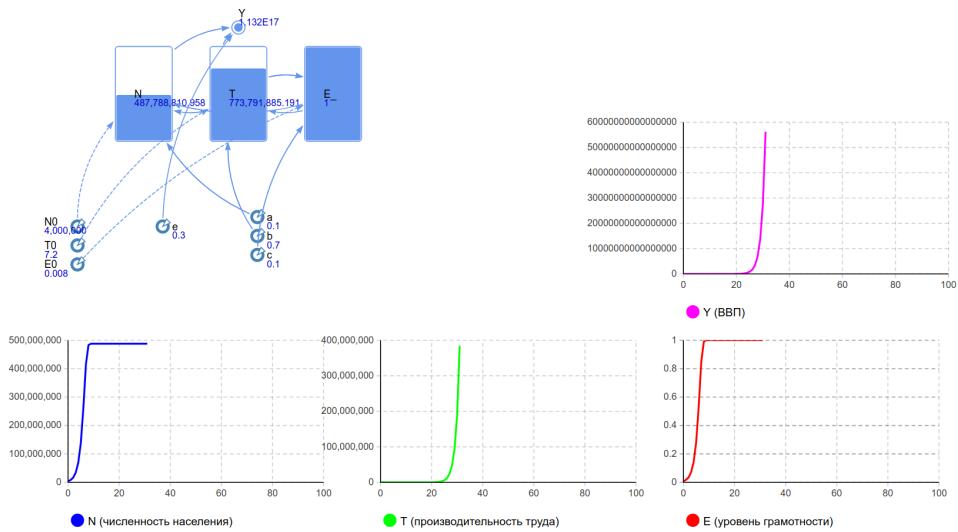


Рис. 41: Результаты построения модели Коротаева в AnyLogic с параметрами: $a = 0.1$, $b = 0.7$, $c = 0.1$ и $e = 0.3$

Можно видеть, что с увеличением значения b , растут значения Y и T .

Таким образом, была реализована модель Коротаева при различных параметрах.

Модель взаимодействия центра и периферии

Задание:

Провести численный анализ модели взаимодействия центра и периферии в среде AnyLogic.

Решение:

N_c – численность населения центра

N_p – численность населения периферии

T_c – техническое развитие центра

T_p – техническое развитие периферии

E_c – уровень грамотности центра

E_p – уровень грамотности периферии

Y_c – величина ВВП центра

Y_p – величина ВВП периферии

e_c – отношение числа работающего населения ко всему населению в центре

e_p – отношение числа работающего населения ко всему населению в периферии

C – функция связи

$$\frac{dN_c}{dt} = a_c T_c N_c (1 - E_c) + a' N_p C_N$$

$$\frac{dT_c}{dt} = b_c T_c E_c$$

$$\frac{dE_c}{dt} = c_c T_c E_c (1 - E_c)$$

$$Y_c = e_c T_c N_c$$

$$\frac{dN_p}{dt} = a_p T_p N_p (1 - E_p) + a' N_p C_N$$

$$\frac{dT_p}{dt} = b_p T_p E_p + b' T_c C_T$$

$$\frac{dE_p}{dt} = c_p T_p E_p (1 - E_p) + c' E_c C_E$$

$$Y_p = e_p T_p N_p$$

В соответствии с формулами, данная модель была реализована в среде моделирования AnyLogic. (Рисунок 42)

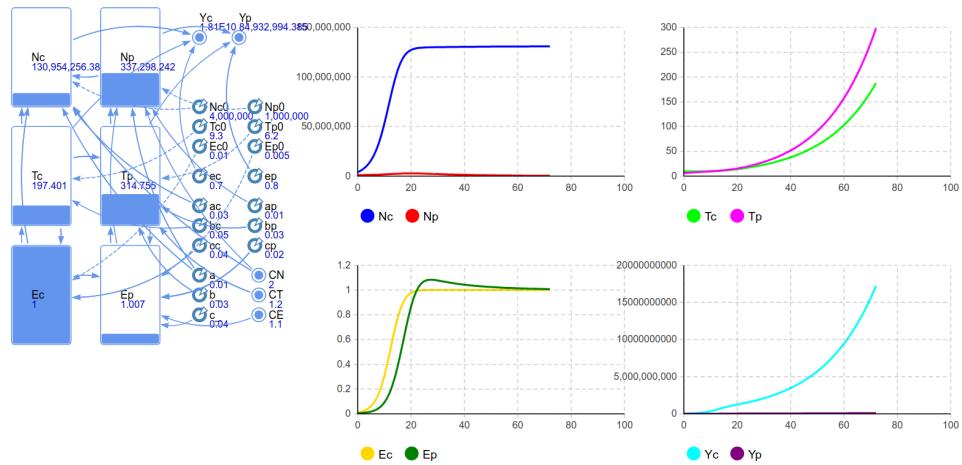


Рис. 42: Результаты построения модели взаимодействия центра и периферии в AnyLogic

Модель подчиняется некоторым следующим соображениям:

1. Технологическое развитие центра растет в значительной мере быстрее чем технологическое развитие периферии, обмениваясь с периферией технологиями.
2. Культурное развитие растет примерно одинаковыми темпами, однако темпы роста культурного развития центра превышают темпы культурного развития периферии.
3. Население периферии растет быстрыми темпами, а население центра растет очень медленно, но засечёт миграции темпы роста увеличиваются, однако все равно остаются гораздо ниже темпов роста населения периферии.
4. Несмотря на то, что доля работоспособного населения на периферии больше, чем в центре, значение ВВП периферии ниже, чем у центра.

Теперь можно поменять значения функции связи и посмотреть что получится в результате данного изменения. (Рисунок 43)

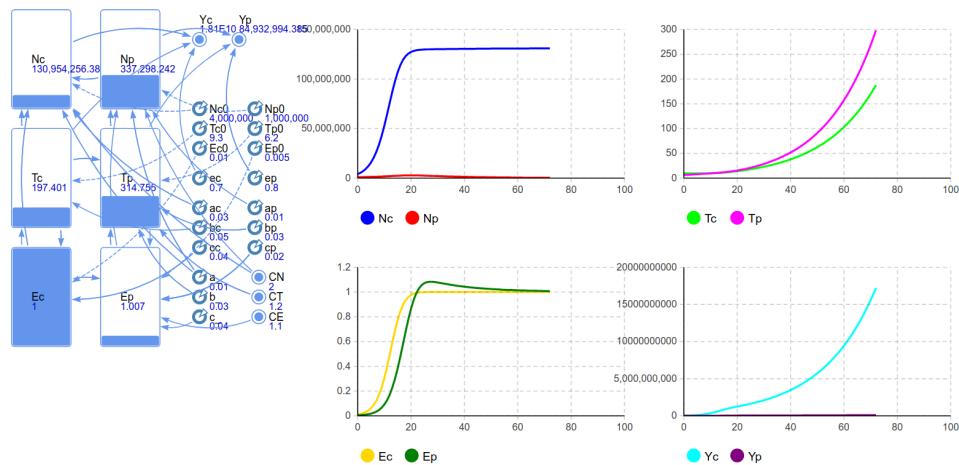


Рис. 43: Результаты построения модели взаимодействия центра и переферией в AnyLogic

Можно видеть, что после увеличения значения функции технического развития увеличиваются темпы роста технического развития переферией.

Схожая ситуация наблюдается при изменении значения функции связи культурного развития.

Таким образом, была реализована модель взаимодействия центра и переферией при различных параметрах.

Модель разрешения конфликта

Задание:

Провести численный анализ модели разрешения конфликта в среде AnyLogic.
Разрешится ли конфликт за 120 дней ?

Решение:

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = -\alpha_1(a - N_1)(b - N_2) + \beta_1 N_1 N_2 \\ \frac{dN_2}{dt} = -\alpha_2(a - N_1)(b - N_2) + \beta_2 N_1 N_2 \end{cases}$$

$$N_1(0) = N_{10}, N_2(0) = N_{20}$$

$$a = a_0 e^{\frac{n_1 t}{T}}, b = b_0 e^{\frac{n_2 t}{T}}$$

$$\alpha_1 = \alpha_{10} e^{\frac{n_3 t}{T}}, \alpha_2 = \alpha_{20} e^{\frac{n_4 t}{T}}$$

$$\beta_1 = \beta_{10} e^{\frac{n_5 t}{T}}, \beta_2 = \beta_{20} e^{\frac{n_6 t}{T}}$$

Условие разрешения конфликта:

$$\begin{cases} \frac{a}{2} < N_1 \leq a \\ \frac{b}{2} < N_2 \leq b \end{cases}$$

В соответствии с формулами, данная модель была реализована в среде моделирования AnyLogic. (Рисунок 44)

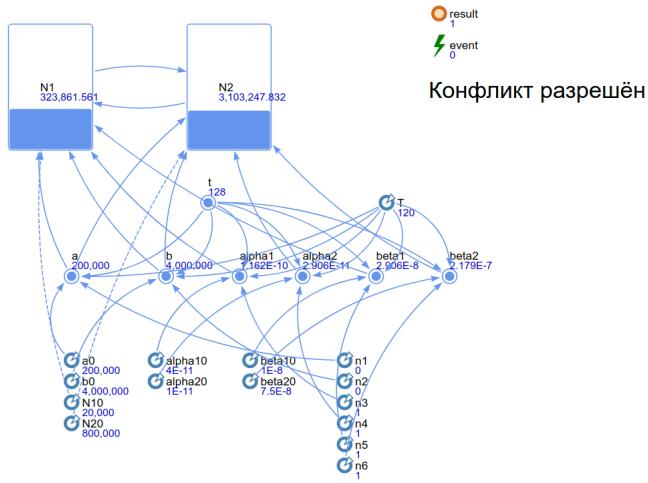


Рис. 44: Результаты построения модели разрешения конфликта в AnyLogic

Можно видеть, что при заданных параметрах конфликт будет разрешён за 120 дней. Отслеживание момента окончания конфликта было реализовано

при помощи событий, которые отслеживали выполнение условия конфликта и останавливали симуляцию при его завершении.

Таким образом, конфликт действительно завершится через 120 дней.

Также стоял вопрос о том, какое минимальное значение β_{20} при котором окончание конфликта останется таким же – 120 дней. Для ответа на данный вопрос проводился ряд экспериментов с различными параметрами, пока количество дней для завершения конфликта не станет больше 120 дней.

По результатам анализа было выявлено, что данное число является: $\beta_{20} = 7.2 \times 10^{-8}$.

Таким образом, была реализована модель разрешения конфликта, а также был подобран минимальный параметр β_{20} при котором конфликт остаётся разрешённым за 120 дней.

Модели циклов

Модель Кейнса

Задание:

Провести численный и качественный анализ модели Кейнса в среде AnyLogic.

Решение:

Y – национальный доход (ВВП)

R – процентная ставка

F – разность функции спроса на инвестиции и функции сбережения

L – совокупный денежный спрос

M – постоянное предложение денег

$$\begin{cases} \frac{dY}{dt} = \alpha F(Y, R) \\ \frac{dR}{dt} = \beta(L(Y, R) - M) \end{cases}$$

Тогда система имеет следующее состояние равновесия:

$$\begin{cases} I(Y, R) = S(Y, R) \\ L(Y, R) = M \end{cases}$$

Рассмотрим Y_0 и R_0 , которые будут являться решением данной системы.

Тогда введём новые переменные и проведём линеаризацию:

$$u = Y - Y_0$$

$$v = R - R_0$$

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \alpha \frac{dF}{dY} u + \alpha \frac{dF}{dR} v \\ \frac{dv}{dt} = \beta \frac{dL}{dY} u + \beta \frac{dL}{dR} v \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \frac{dF}{dY} & \alpha \frac{dF}{dR} \\ \beta \frac{dL}{dY} & \beta \frac{dL}{dR} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} \alpha \frac{dF}{dY} - \lambda & \alpha \frac{dF}{dR} \\ \beta \frac{dL}{dY} & \beta \frac{dL}{dR} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda \left(\alpha \frac{dF}{dY} + \beta \frac{dL}{dY} \right) + \alpha\beta \left(\frac{dF}{dY} \times \frac{dL}{dR} - \frac{dF}{dR} \times \frac{dL}{dY} \right) = 0$$

Следовательно:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\alpha \frac{dF}{dY} + \beta \frac{dL}{dR} \right) \pm \sqrt{\frac{\left(\alpha \frac{dF}{dY} + \beta \frac{dL}{dR} \right)^2}{4} - \alpha\beta \left(\frac{dF}{dY} \times \frac{dL}{dR} - \frac{dF}{dR} \times \frac{dL}{dY} \right)}$$

$$\frac{dL}{dR} < 0, \frac{dF}{dY} > 0, \frac{dL}{dY} > 0, \frac{dF}{dR} < 0$$

Таким образом, возможны следующие состояния системы:

$$\left(\alpha \frac{dF}{dY} + \beta \frac{dL}{dR} \right) < 0$$

$$\alpha\beta \left(\frac{dF}{dY} \times \frac{dL}{dR} - \frac{dF}{dR} \times \frac{dL}{dY} \right) > 0$$

Корни являются комплексными (так как под знаком корня отрицательное число и $\left(\alpha \frac{dF}{dY} + \beta \frac{dL}{dR} \right) < 0$).

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \quad \alpha < 0, \beta \neq 0 - \text{устойчивый фокус}$$

$$\left(\alpha \frac{dF}{dY} + \beta \frac{dL}{dR} \right) = 0$$

$$\alpha\beta \left(\frac{dF}{dY} \times \frac{dL}{dR} - \frac{dF}{dR} \times \frac{dL}{dY} \right) > 0$$

Корни являются комплексными (так как под знаком корня отрицательное число).

$$\lambda_{1,2} = \pm i\beta, \quad \beta \neq 0 - \text{центр}$$

Таким образом, систему уравнений можно переписать следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{dy}{\alpha dt} = \frac{1}{1 + e^{-y}} - l_1 y - r(\beta_1 + \beta_2) \\ \frac{dr}{\beta dt} = l_2 y - r\beta_3 - l_s \\ y(t_0) = y^0, r(t_0) = r^0, y, r > 0 \end{cases}$$

В соответствии с формулами, данная модель была реализована в среде моделирования AnyLogic. (Рисунок 45)

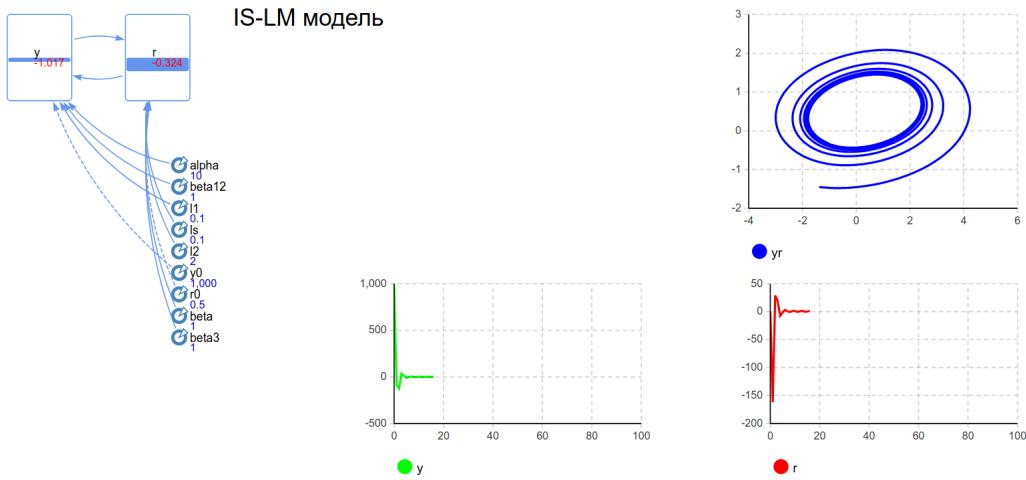


Рис. 45: Результаты построения модели Кейнса в AnyLogic

Таким образом, поведение модели, реализованной в AnyLogic, соответствует тому, что было выявлено при качественном анализе модели.

Также необходимо было построить модифицированную модель Кейнса. Она может быть представлена следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \frac{l_0 K}{l_0 + (K - l_0) + e^{-a_1 y}} - l_1 y - r y (\beta_1 + \beta_2) \\ \frac{dr}{\beta dt} = r(l_2 y - r \beta_3 - l_s) \\ y(t_0) = y^0, r(t_0) = r^0, y, r > 0 \end{cases}$$

В соответствии с формулами, данная модель была реализована в среде моделирования AnyLogic. (Рисунок 46)

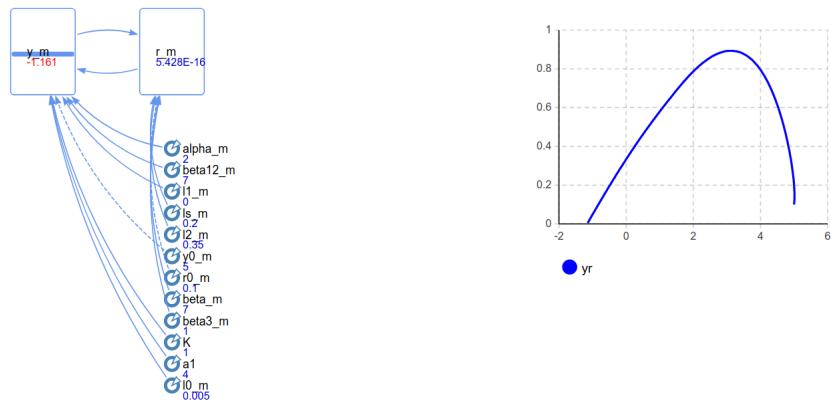


Рис. 46: Результаты построения модифицированной модели Кейнса в AnyLogic

Можно видеть, что поведение модели с модифицированной функцией спроса немного изменилось по сравнению с классической моделью, однако в неё по-прежнему сохранился тип равновесия устойчивый фокус и цикл.

Таким образом, был проведён численный анализ модифицированной модели Кейнса.

Модель международной торговли

Задание:

Провести численный анализ модели взаимодействия трёх экономик в среде AnyLogic.

Решение:

Рассмотрим упрощенную модель международной торговли между экономическими. Покажем, что международная торговля между экономическими, в которых наблюдаются предельные циклы, может привести к появлению странного аттрактора и, следовательно, возникновению хаоса.

Международную торговлю в некотором смысле можно рассматривать как взаимодействие изолированных экономик. Лоренцем (1987) предложена следующая модель. Рассмотрим три экономики (национальные, региональные или городские), каждая из которых описывается упрощенными детерминированными уравнениями Кейнса:

Y – доход

r – процентная ставка

L – функция спроса на деньги

M – постоянное номинальное денежное предложение

p – фиксированные цены товаров

I – функция спроса на инвестиции

S – функция сбережений

$\alpha, \beta > 0$ – параметры установления

$$\begin{cases} \frac{dY_i}{dt} = \alpha_i [I_i(Y_i, r_i) - S_i(Y_i, r_i)] \\ \frac{dr_i}{dt} = \beta \left[L_i(Y_i, r_i) - \frac{M_i}{p_i} \right] \end{cases}$$

При вводе в изолированные системы фактора международной торговли, получим следующее преобразование исходной системы:

$$\begin{cases} \frac{dY_i}{dt} = \alpha_i [I_i(Y_i, r_i) - S_i(Y_i, r_i) + Ex_i(Y_j, Y_k) - Im_i(Y_i)] \\ \frac{dr_i}{dt} = \beta \left[L_i(Y_i, r_i) - \frac{M_i}{p_i} \right] \end{cases}$$

Расширенная система состоит из трех связанных ограниченных осцилляторов. Как показано Ньюхаусом, Рюэлем и Такенсом (1978), возмущение движения по трехмерным торам может привести к странному аттрактору. Очевидно, что существование странного аттрактора подразумевает хаотичность траекторий. Таким образом, в модели международной возможно существование странных аттракторов.

Если все три автономные экономики принадлежат к осцилляторному типу, введение международной торговли может привести к существованию странного аттрактора в объединенной экономике. Существование хаотических траекторий в соответствующих моделях можно установить численным моделированием.

В соответствии с формулами, данная модель была реализована в среде моделирования AnyLogic. (Рисунок 47)

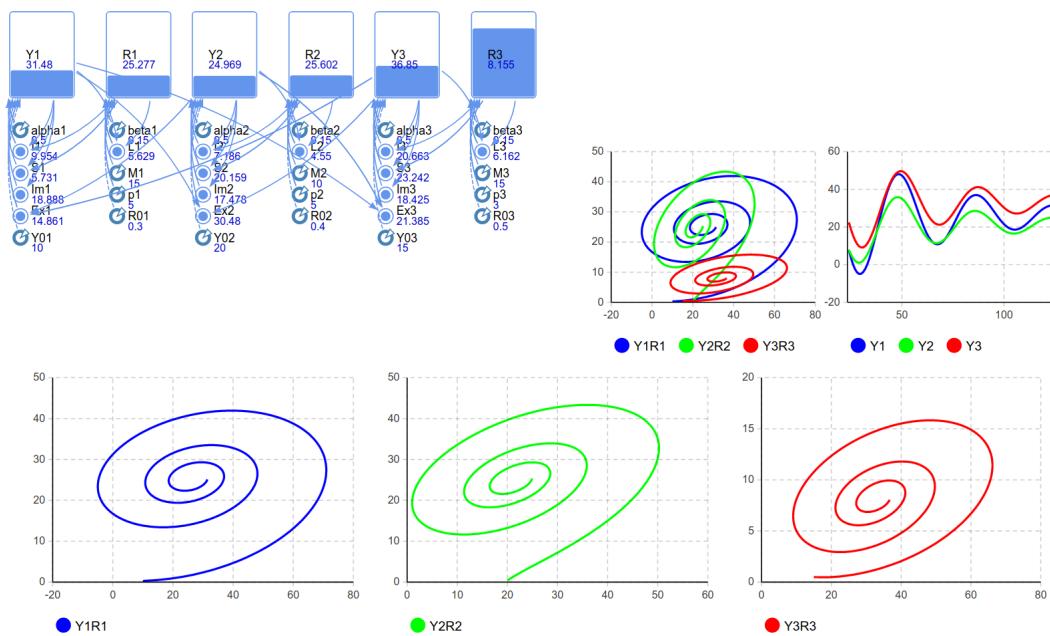


Рис. 47: Результаты построения модели международной торговли в AnyLogic

Таким образом, была реализована модель взаимодействия трёх экономик (модель международной торговли).

Показатель Хёрста

Задание:

Рассчитать показатель Хёрста для проверки рядов на наличие персистентности.

Решение:

Существуют различные способы определения фрактальных размерностей, к числу которых относится R/S метод, на основании которого определяется показатель Хёрста. Этот показатель имеет широкое применение в анализе временных рядов благодаря своей устойчивости. Он содержит минимальные предположения об изучаемой системе и может классифицировать временные ряды, позволяет отличить случайный ряд от неслучайного, даже если случайный ряд не является нормально распределенным.

Пусть имеется некоторый временной ряд X . Пусть S – среднеквадратическое отклонение ряда, N – количество наблюдений, R – максимальный размах ряда.

Для вычисления размаха R можно применить следующий алгоритм:

1. вычислить среднее значение ряда (\bar{x}) и среднеквадратическое отклонение S ;
2. получить ряд: $y_1 = x_1 - \bar{x}$, $y_2 = x_1 + x_2 - 2\bar{x}$, …, $y_N = x_1 + x_2 + \dots + x_N - N\bar{x}$;
3. вычислить: $R = \max Y - \min Y$.

Когда будет вычислено значение размаха, то можно воспользоваться формулой, для нахождения показателя Хёрста:

$$H = \frac{\ln \frac{R}{S}}{\ln aN}$$

В соответствии с рассмотренными алгоритмами, для вычисления показателя Хёрста была написана функция на языке программирования Python. (Рисунок 48)

```
[2]: def hearst_coefficient(x: List[Union[int, float]], *, a=0.5) -> float:
    size = len(x)
    S = np.std(x)
    mean = np.mean(x)
    acc = np.add.accumulate(x)
    y = np.array([acc[i - 1] - i * mean for i in range(1, len(acc) + 1)])
    R = np.max(y) - np.min(y)
    H = np.log(R / S) / np.log(a * size)
    return H
```

Рис. 48: Функция для расчёта показателя Хёрста в Python

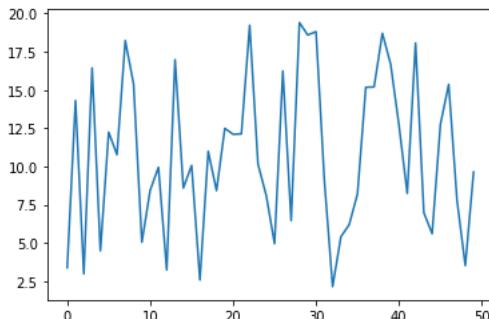
Сгенерируем случайную равномерно распределённую последовательность от $[a, b]$. В качестве длины ряда возьмём значение 50, в качестве $a = 2$, а в качестве $b = 20$. (Рисунок 49)

Случайная равномерно распределённая последовательность от $[a, b]$

```
[5]: a = 2
b = 20
size = 50

[6]: x = np.random.uniform(a, b, size)

[7]: plt.plot(x)
plt.show()
```



```
[8]: print(f"Показатель Хёрста: {hearst_coefficient(x)}")
Показатель Хёрста: 0.6043891553419591
```

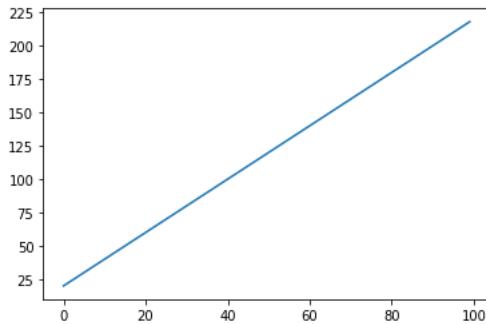
Рис. 49: Расчёт показателя Хёрста для ряда, который равномерно распределён на отрезке $[a, b]$

Показатель Хёрста в данном случае равен 0.604389, что говорит о том, что в данный ряд можно отнести к классу персистентных или трендоустойчивых – сохраняющих имеющуюся тенденцию.

Далее сгенерируем ряд, который подчиняется закону линейного тренда: $y = b + a \times t$. В качестве длины ряда возьмём значение 100, в качестве $a = 2$, а в качестве $b = 20$. (Рисунок 50)

Линейный тренд $y = b + a \times t$

```
[9]: a = 2  
b = 20  
size = 100  
  
[10]: x = np.array([b + a * t for t in range(size)])  
  
[11]: plt.plot(x)  
plt.show()
```



```
[12]: print(f"Показатель Хёрста: {heurst_coefficient(x)}")  
Показатель Хёрста: 0.9632438169391627
```

Рис. 50: Расчёт показателя Хёрста для ряда, который подчиняется линейному тренду

Показатель Хёрста в данном случае равен 0.96324, что говорит о том, что в данный ряд можно отнести к классу персистентных или трендоустойчивых – сохраняющих имеющуюся тенденцию. Данный результат был ожидаемым для данного ряда.

Далее сгенерируем ряд, который подчиняется закону линейного тренда со случайными возмущениями: $y = b + a \times t + \epsilon$. В качестве длины ряда возьмём значение 100, в качестве $a = 2$, а в качестве $b = 20$. (Рисунок 51)

Линейный тренд + случайное возмущение $y = b + a \times t + \epsilon$

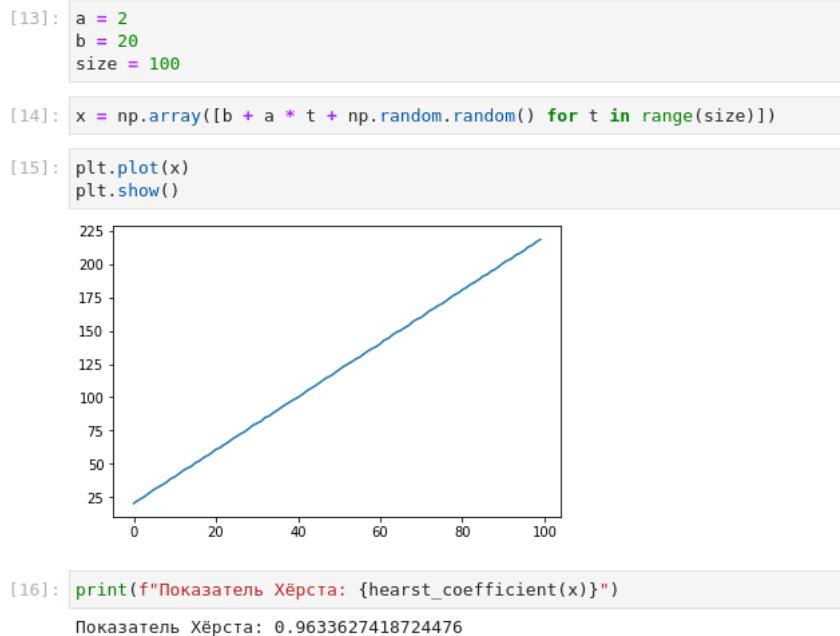


Рис. 51: Расчёт показателя Хёрста для ряда, который подчиняется линейному тренду со случайными возмущениями

Можно видеть, что на графике присутствуют некоторые возмущения, но тем не менее показатель Хёрста в данном случае равен 0.96336, что говорит о том, что в данный ряд можно отнести к классу персистентных или трендоустойчивых – сохраняющих имеющуюся тенденцию. Данный результат был ожидаемым для данного ряда.

Далее сгенерируем ряд, который подчиняется закону: $y = A \times \sin(k \cdot x)$. В качестве длины ряда возьмём значение 100, в качестве $A = 10$, а в качестве $k = 2$. (Рисунок 52)

$$y = A \times \sin(k \cdot x)$$

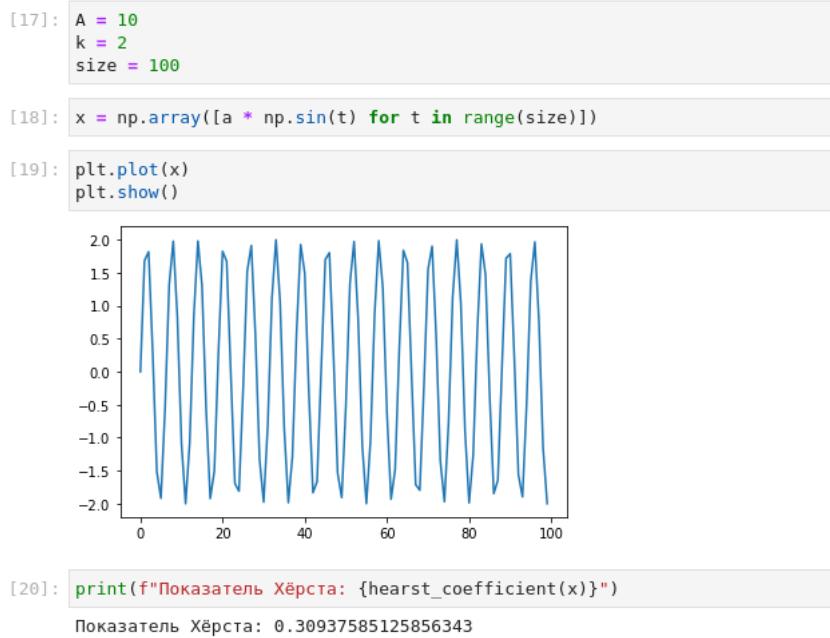


Рис. 52: Расчёт показателя Хёрста для ряда, который имеет синусоидальные колебания

Показатель Хёрста в данном случае равен 0.309375, что говорит о том, что в данный ряд можно отнести к классу антиперсистентных – рост в прошлом означает уменьшение в будущем, а тенденция к уменьшению в прошлом делает вероятным увеличение в будущем. Данный результат был ожидаемым для данного ряда.

Последний сгенерированный ряд был ряд, который подчиняется закону: $y = A \times \sin(k \cdot x)$. В качестве длины ряда возьмём значение 100, в качестве $A = 10$, а в качестве $k = 2$. (Рисунок 53)

$$y = A \times \sin(k \cdot x) + \epsilon$$

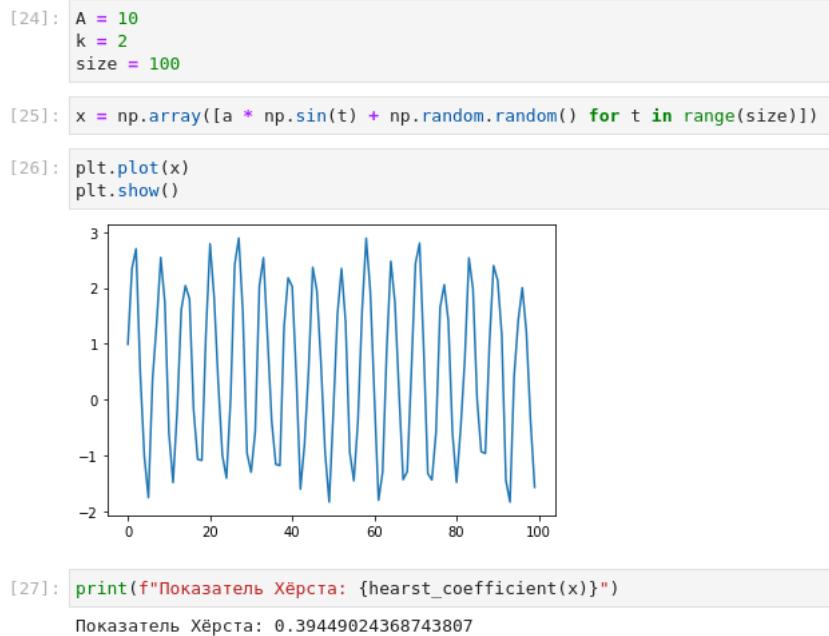


Рис. 53: Расчёт показателя Хёрста для ряда, который имеет синусоидальные колебания и случайные возмущения

Показатель Хёрста в данном случае равен 0.39449, что говорит о том, что в данный ряд можно отнести к классу антипесистентных – рост в прошлом означает уменьшение в будущем, а тенденция к уменьшению в прошлом делает вероятным увеличение в будущем. Данный результат был ожидаемым для данного ряда.

Если сравнивать его с предыдущим рядом, то значение показателя Хёрста возросло с добавлением случайных колебаний.

Таким образом, были рассчитаны показатели Хёрста для различных рядов, после чего был определён класс ряда по наличию в данном ряде долговременной памяти.

Модель Тобина

Задание:

Провести численный анализ и качественный анализ модели Тобина в среде AnyLogic.

Решение:

Рассмотрим модель монетарных циклов Тобина. Предполагается, что благосостояние населения может обеспечиваться несколькими взаимоисключающими путями. Деньги, бесплатно генерируемые (вводимые в оборот) правительством, служат мерой. Деньги требуются для проведения сделок и инвестиции. Спрос на деньги зависит от распределения доходов и благосостояния населения. Однако для простоты мы предположим, что денежный спрос на душу населения является функцией дохода на душу населения, благосостояния на душу населения и прибыли, ожидаемой при данном вложении капитала. Предполагается, что денежный рынок всегда находится в равновесии, т. е. спрос на деньги всегда равен предложению.

$s = (1 - c)$ – предельная склонность к сбережению

k – капитал

x – количество денег в реальных ценах на душу населения

n – фиксированная скорость роста населения

z – постоянная скорость роста номинальных денежных накоплений

q – динамика скорости изменения цен

g – функция взаимодействия капитала и цен

$$\begin{cases} \frac{dk}{dt} = sf(k) - (1 - s)(z - q)x - nk \\ \frac{dx}{dt} = x(z - \alpha[x - g(k, q)] - n) \\ \frac{dq}{dt} = \beta(\alpha[x - g(k, q)] - q) \end{cases}$$

Решив систему уравнений, получим точку, тип состояний равновесия которой – седло. (Рисунок 54)

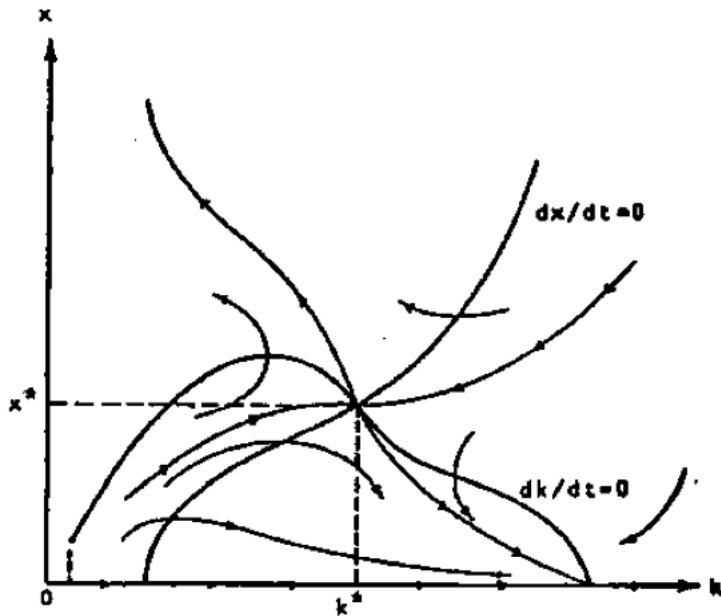


Рис. 54: Состояние равновесия модели Тобина

Рассмотрим процессы, происходящие в точке равновесия при возрастании объема денежной массы. Немедленным следствием этого является повышение уровня цен, и реальный объем денежных запасов стремится вернуться к прежнему уровню, однако первоначальное возрастание денежной массы приводит к повышению ценовых ожиданий и снижает накопленный капитал. Оба эти эффекта вызывают падение денежного предложения и могут стать причиной того, что объем денежных запасов будет превышать свое равновесное значение. Если денежное предложение продолжает падать ниже уровня равновесия, переменные меняются местами: объем накопленного капитала возрастает, а ожидания снижаются. В сочетании с прямым влиянием объема денежных запасов на денежные накопления это приведет к изменению направления динамики денежных запасов. Т.о. возникают долговременные колебания. Доказать существование предельного цикла можно используя теорему Хопфа, или построив фазовый портрет на основе численного анализа.

В соответствии с формулами, данная модель была реализована в среде моделирования AnyLogic. (Рисунок 55)

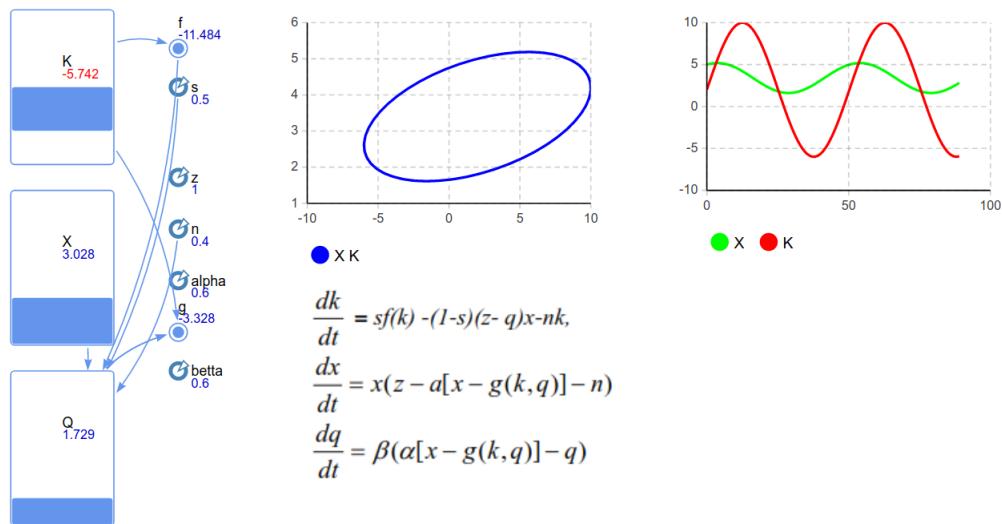


Рис. 55: Результаты построения модели Тобина в AnyLogic

Таким образом, был проведён численный и качественный анализ модели Тобина.

Модель Калдора-Калецкого

Задание:

Провести численный анализ и качественный анализ модели Калдора-Калецкого в среде AnyLogic.

Решение:

Y – основной доход

K – основной капитал

I – инвестиции

α – коэффициент пропорциональности инвестиций и сбережений

δ – степень обесценивания капитала

β – степень влияния капитала на инвестиции

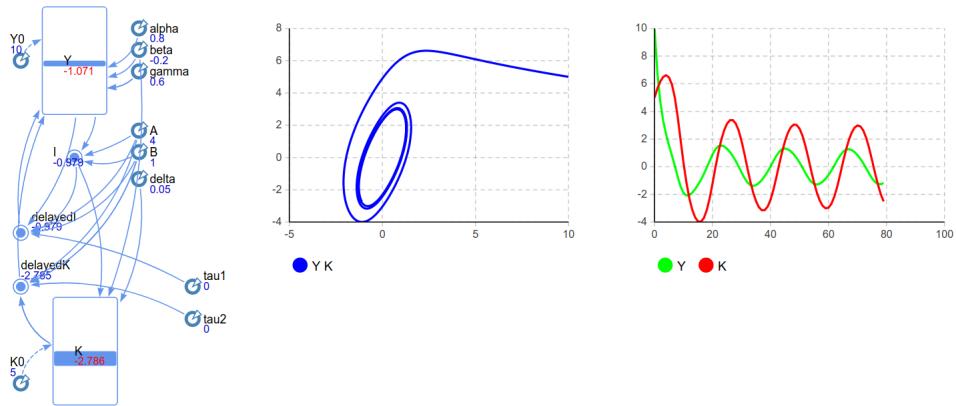
τ_1, τ_2 – величины задержки капитала и инвестиций соответственно

$$\begin{cases} \frac{dY}{dt} = \alpha I(Y(t + \tau_1)) + \alpha \beta K(t + \tau_2) - \alpha \gamma Y(t) \\ \frac{dK}{dt} = I(Y(t)) + (\beta - \delta) K(t) \end{cases}$$

Сформулированная система Калдора-Калецкого включает функциональное дифференциально-разностное уравнение с запаздыванием. Это такой тип дифференциальных уравнений, в котором текущее поведение системы зависит от прошлой истории. Инвестиции зависят от дохода в момент принятия инвестиционные решения, и капитала в момент внедрения инвестиций. Последнее вытекает из того обстоятельства, что в момент времени t могут существовать инвестиции, которые будут внедряться в экономику во временном интервале между $t - \tau$ и t . Таким образом, комбинированная модель Калдора-Калецкого позволяет, при планировании новых инвестиций, учесть полученный в этом интервале капитал.

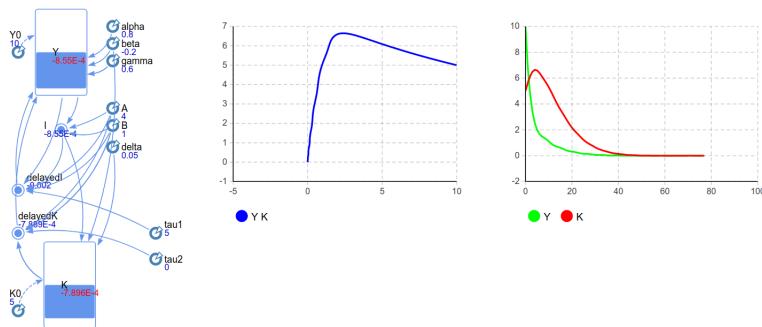
В результате бифуркационного анализа было выявлено, что при $\tau_1 = \tau_2 = 0$ состояние равновесия – неустойчивый фокус, при $\tau_1 > 0, \tau_2 = 0$ состояние равновесия – устойчивый фокус, при $\tau_1 > 0, \tau_2 < 0, \tau_1 = \tau_2$ состояние равновесия – устойчивый фокус, $\tau_1 = 0, \tau_2 > 0$ состояние равновесия – неустойчивый фокус, при $\tau_1 > 0, \tau_2 > 0, \tau_1 > \tau_2$ состояние равновесия – устойчивый фокус, при $\tau_1 > 0, \tau_2 > 0, \tau_1 < \tau_2$ состояние равновесия – неустойчивый фокус.

В соответствии с рассмотренными случаями, данная модель была реализована в среде моделирования AnyLogic с различными параметрами. (Рисунок 56)



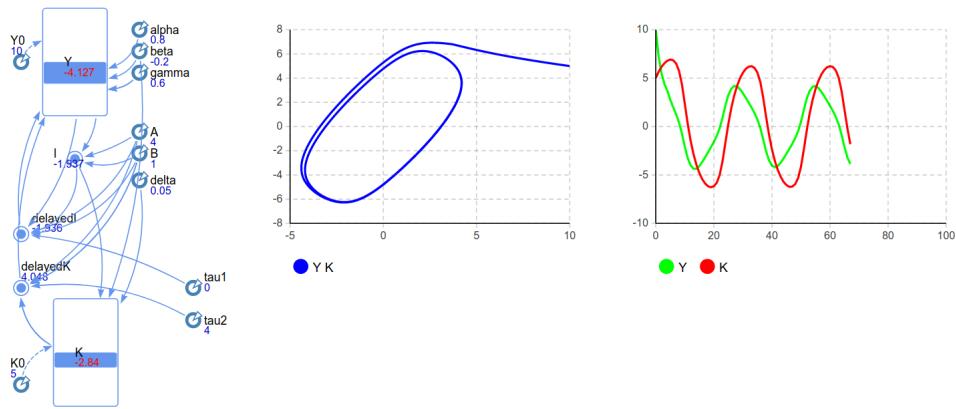
$$\begin{cases} \frac{dY(t)}{dt} = \alpha[I(Y(t), K(t)) - S(Y(t), K(t))], \\ \frac{dK(t)}{dt} = I(Y(t - \tau_1), K(t - \tau_2)) - \delta K(t), \end{cases}$$

Рис. 56: Результаты построения модели Калдора-Калецкого в AnyLogic с параметрами: $\tau_1 = \tau_2 = 0$



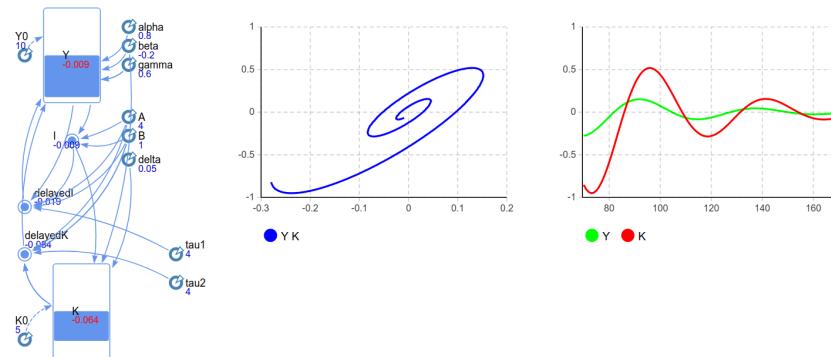
$$\begin{cases} \frac{dY(t)}{dt} = \alpha[I(Y(t), K(t)) - S(Y(t), K(t))], \\ \frac{dK(t)}{dt} = I(Y(t - \tau_1), K(t - \tau_2)) - \delta K(t), \end{cases}$$

Рис. 57: Результаты построения модели Калдора-Калецкого в AnyLogic с параметрами: $\tau_1 > 0, \tau_2 = 0$



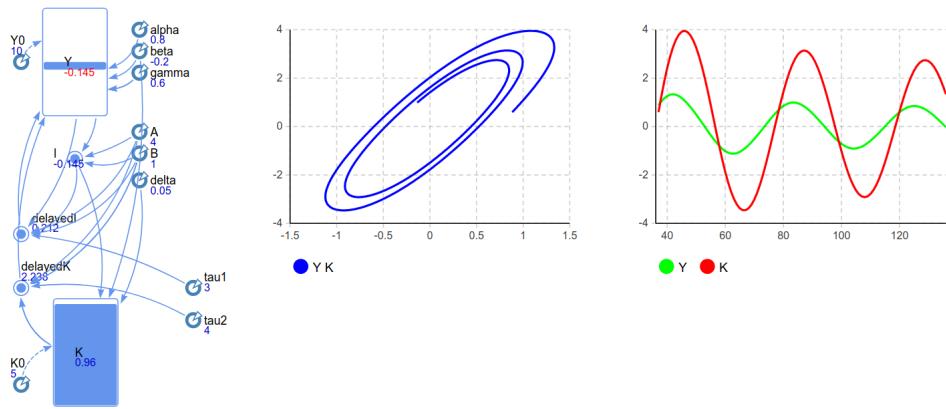
$$\begin{cases} \frac{dY(t)}{dt} = \alpha[I(Y(t), K(t)) - S(Y(t), K(t))], \\ \frac{dK(t)}{dt} = I(Y(t - \tau_1), K(t - \tau_2)) - \delta K(t), \end{cases}$$

Рис. 58: Результаты построения модели Калдора-Калецкого в AnyLogic с параметрами: $\tau_1 = 0, \tau_2 > 0$



$$\begin{cases} \frac{dY(t)}{dt} = \alpha[I(Y(t), K(t)) - S(Y(t), K(t))], \\ \frac{dK(t)}{dt} = I(Y(t - \tau_1), K(t - \tau_2)) - \delta K(t), \end{cases}$$

Рис. 59: Результаты построения модели Калдора-Калецкого в AnyLogic с параметрами: $\tau_1 > 0, \tau_2 > 0, \tau_1 = \tau_2$



$$\begin{cases} \frac{dY(t)}{dt} = \alpha [I(Y(t), K(t)) - S(Y(t), K(t))], \\ \frac{dK(t)}{dt} = I(Y(t - \tau_1), K(t - \tau_2)) - \delta K(t), \end{cases}$$

Рис. 60: Результаты построения модели Калдора-Калецкого в AnyLogic с параметрами: $\tau_1 > 0, \tau_2 > 0, \tau_1 < \tau_2$

Таким образом, был проведен численный и качественный анализ модели Калдора-Калецкого, а так же были найдены соотношения параметров, при которых происходит бифуркация.

Модель Гудвина

Задание:

Провести численный анализ и качественный анализ модели Гудвина в среде AnyLogic.

Решение:

Предельные циклы являются основным элементом теории нелинейных динамических систем и ключом к пониманию происхождения и природы колебательных явлений в экономике. Одной из первых моделей макроэкономических циклов является модель Гудвина [Goodwin, 1951]. Эта модель и ее различные модификации до сих пор эффективно применяются при исследовании механизмов развития экономических процессов, характеризующихся цикличностью.

$O^*(t)$ – внешнее воздействие

x – отклонение дохода от равновесия

a – скорость установления равновесия

c – степень устойчивости

b – степень отклонения дохода от равновесия

$$\ddot{x} + a \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \dot{x} - bx + cx^3 = O^*(t)$$

Для того, чтобы реализовать модель в AnyLogic необходимо привести дифференциальное уравнение второго порядка к системе дифференциальных уравнений первого порядка в предположении о том, что внешнее воздействие отсутствует.

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -a \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} y + bx - cx^3 \end{cases}$$

y в данном соотношении можно проинтерпретировать как скорость отклонения дохода от равновесия.

При анализе было выявлено, что особыми точками в данной модели являются: $(0, 0)$, $\left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}}, 0\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}}, 0\right)$.

Точка $(0, 0)$ является седлом.

Проведём линеаризацию для точки $\left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}}, 0\right)$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b - 3x^2 + \frac{2ax(-1+x^2)y}{(1+x^2)^2} - \frac{2axy}{1+x^2} & -\frac{a(-1+x^2)}{1+x^2} \end{pmatrix} \text{ при } x = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}} \text{ и } y = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2b & -\frac{a(-1+\frac{b}{c})}{1+\frac{b}{c}} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -2b & -\frac{a(-1+\frac{b}{c})}{1+\frac{b}{c}} - \lambda \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2b & -\frac{a(-1+\frac{b}{c})}{1+\frac{b}{c}} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\frac{a(-b+c)}{b+c} \mp \sqrt{\frac{a^2(b-c)^2 - 8b(b+c)^2}{(b+c)^2}} \right)$$

Если $b > c$, то состояние равновесия – устойчивый фокус, а если $b < c$, то состояние равновесия – неустойчивый фокус. В соответствии с формулами, данная модель была реализована в среде моделирования AnyLogic. (Рисунок 61)

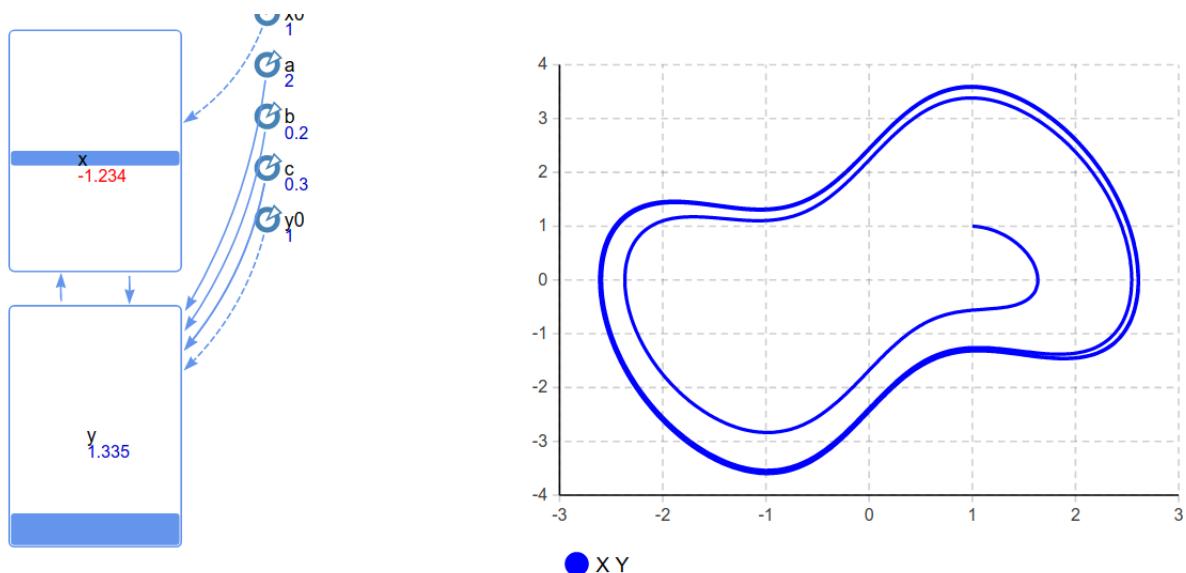


Рис. 61: Результаты построения модели Гудвина в AnyLogic: неустойчивый фокус

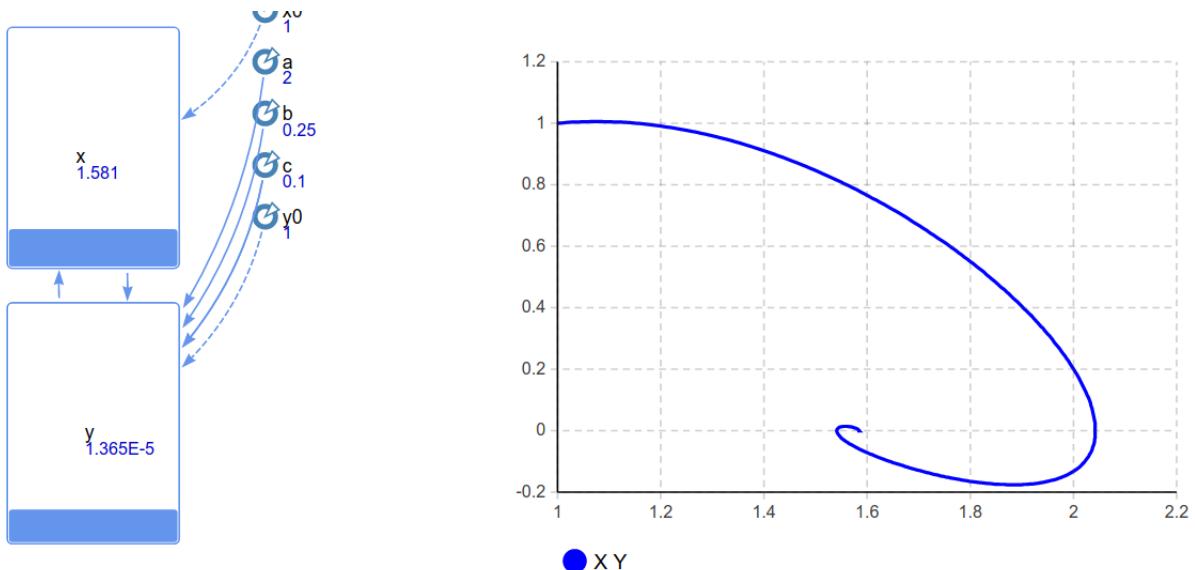


Рис. 62: Результаты построения модели Гудвина в AnyLogic: устойчивый фокус

Таким образом, был проведен численный и качественный анализ модели Гудвина, а так же были найдены соотношения параметров, при которых происходит бифуркация.

Модели экономического равновесия

Модель Вальраса-Маршалла

Задание:

Провести численный анализ моделей Вальраса-Маршалла первого и второго порядков в среде AnyLogic.

Решение:

Динамическая модель поведения рынка первого порядка по Вальрасу-Маршаллу

$Q(t)$ – объём продаж в текущий момент времени t

$P(t)$ – рыночная цена товара

$Q^D(t) = a - bP(t)$ – спрос на товар

$Q^S(t) = c + gP(t - \tau)$ – предложение товара

$P^D(t) = A - BQ(t)$ – цена спроса

$P^S(t) = C + GQ(t)$ – цена предложения

τ – задержка во времени, связанная с тем, что для производства товара и доставки его на рынок требуется некоторое время

$h, k > 0$ – настраиваемые параметры модели

$$\begin{cases} \frac{dP(t)}{dt} = h (Q^D(P(t)) - Q^S(P(t - \tau))) \\ \frac{dQ(t)}{dt} = k (P^D(Q(t)) - P^S(Q(t))) \end{cases}$$

В соответствии с формулами, данная модель была реализована в среде моделирования AnyLogic. (Рисунок 63)

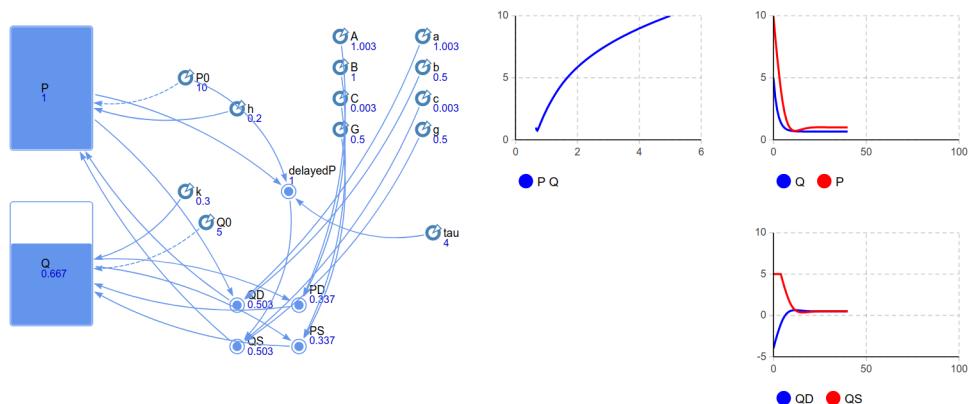


Рис. 63: Результаты построения модели Вальраса-Маршалла первого порядка в AnyLogic

Симуляция показала, что спустя время модель придет к состоянию равновесия – устойчивый узел, независимо от того, какими были заданы входные параметры.

Динамическая модель поведения рынка второго порядка по Вальрасу-Маршаллу

$Q(t)$ – объём продаж в текущий момент времени t

$P(t)$ – рыночная цена товара

P^* – равновесное значение цены

Q^* – равновесное значение объёма продаж

$a, b, q, r > 0$ – настраиваемые параметры модели

$$\begin{cases} \frac{dP(t)}{dt} = -a(P(t) - P^*) - q(Q(t) - Q^*) \\ \frac{dQ(t)}{dt} = -b(Q(t) - Q^*) + r(P(t) - P^*) \end{cases}$$

В соответствии с формулами, данная модель была реализована в среде моделирования AnyLogic. (Рисунок 64)

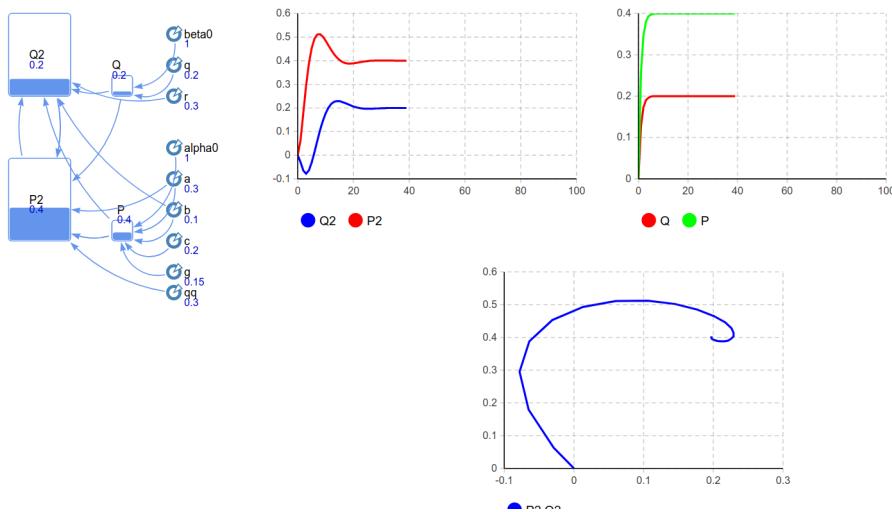


Рис. 64: Результаты построения модели Вальраса-Маршалла второго порядка в AnyLogic

Симуляция показала, что спустя время модель придет к состоянию равновесия – устойчивый фокус, независимо от того, какими были заданы входные параметры.

Таким образом, был проведен численный анализ модели Вальраса-Маршалла.

Реализация и анализ МЭД

Моделирование валютного курса

Задание:

Приказать изменение валютного курса и его зависимость от параметров, провести анализ модели.

Решение:

Валютный курс является одним из основных экономических показателей, он оказывает влияние на международную торговлю, инвестиционные потоки, валютно-обменные операции, международные конкурентные преимущества стран и блоков и другие составляющие мировой экономики.

Задача определения равновесного курса рубля представляет большое значение для эффективного управления народным хозяйством. Особую значимость определение равновесного курса приобретает для основных мировых валют, образующих фундамент мировой экономики и мировой валютной системы.

Результаты моделирования позволяют теоретически обосновать некоторые важные тенденции, наблюдаемые в мировой экономике.

Пусть e_i – валютный курс, D_i – сумма в иностранной валюте, R_i – сумма в национальной валюте i -й сделки. Между собой данные параметры связаны следующим образом:

$$e_i D_i = R_i$$

В связи с тем, что большинство международных сделок на российском рынке происходит в долларах США, то в качестве иностранной валюты в модели будет рассматриваться только доллар США.

Валютный курс можно определить как усредненное взвешенное значение по всем сделкам (N сделок), то есть:

$$e = \sum_{i=1}^N \frac{D_i}{\sum_{i=1}^N D_i} e_i = \sum_{i=1}^N \frac{D_i}{\sum_{i=1}^N D_i} \frac{R_i}{D_i} = \frac{\sum_{i=1}^N R_i}{\sum_{i=1}^N D_i}$$

Таким образом, валютный курс равен совокупной сумме средств в отечественной валюте, делённой на совокупную сумму средств в иностранной

валюте, обращающихся на валютном рынке, и итоговый результат можно представить как:

$$e = \frac{\sum R^{CA} + \sum R^K + \sum R^{CB}}{\sum D^{CA} + \sum D^K + \sum D^{CB}}$$

где R^{CA}, D^{CA} – средства в отечественной и иностранной валюте соответственно, происходящие по счёту текущих операций; R^K, D^K – средства в отечественной и иностранной валюте соответственно, происходящие по счёту движения капитала; R^{CB}, D^{CB} – средства в отечественной и иностранной валюте соответственно, происходящие по счёту изменения официальных валютных резервов ЦБ.

В рассматриваемой модели имеется допущение о том, что модели на уровне баланса текущих операций, включают равноправные двусторонние отношения двух стран-контрагентов и совместные действия монетарных органов по поддержанию стабильности валютного курса на желаемом уровне.

Модель удовлетворяет следующим утверждениям:

1. Мир модели представлен двумя равноправными странами. Экспортные потоки одной страны представляют импорт партнёра симметрично по отношению друг к другу: $I^* = E$, $E^* = I$.
2. ЦБ осуществляют жёсткое регулирование движения капитала либо законодательными мерами, либо полностью удовлетворяя спрос на валюту путём продажи за счёт изменения валютных резервов, то есть на данном этапе учитываются только текущие операции и движение капитала.
3. Счёт текущих операций состоит из операций экспорта – импорта, учитывая счёт услуг, и не учитывает счета односторонних трансфертов.

Тогда получается:

$$\sum R_i^{CA} = I \sum D_i^{CA} = E$$

где I – спрос в национальной валюте на иностранную со стороны импорта; E – предложение иностранной валюты со стороны экспорта.

Пусть $\sum R_i^K = K^-$, $\sum D_i^K = K^+$ – соответственно сумма средств оттока (спроса в национальной валюте на иностранную) и притока (предложения иностранной валюты) по счёту движения капитала. Тогда исходная формула преобразуется следующим образом:

$$e_t = \frac{I_t + K^-}{E_t + K^+}$$

где симметрично определены валютные курсы вовлечённых в рассмотрение стран.

В данной модели E_t – объём экспорта, который напрямую зависит от реальных условий торговли, то есть может быть представлен следующим образом:

$$E_t = P_t^* k_E \sqrt[3]{(Q_{t-1}^2 Q_t)} e_{t-1}^R$$

где $k_E \sqrt[3]{(Q_{t-1}^2 Q_t)}$ отражает то, что экспорт является частью совокупного выпуска; Q_t – совокупный реальный выпуск (например, реальный ВВП); P_t^* – совокупный уровень цен партнёра; $t, t-1$ – начало и конец периода соответственно; $e_{t-1}^R = e_{t-1} \frac{P_{t-1}^*}{P_{t-1}}$ – величина реального валютного курса.

$$I_t = E_t^* = P_t k_I \sqrt[3]{(Q_{t-1}^{*2} Q_t^*)} e_{t-1}^R$$

где P_t – совокупный уровень цен, Q_t^* – совокупный реальный выпуск партнёра.

$$K^+ = k_{K^+} P_t^* \sqrt[3]{(Q_{t-1}^2 Q_t)^\theta} e_{t-1}^R$$

$$K^- = k_{K^-} P_t^* \sqrt[3]{(Q_{t-1}^{*2} Q_t^*)^\rho} e_{t-1}^{*R}$$

$$\text{где } e_{t-1}^{*R} = \frac{1}{e_{t-1}^R}.$$

$$\begin{aligned} e_t &= \frac{I_t + K^-}{E_t + K^+} = \frac{P_t k_I \sqrt[3]{(Q_{t-1}^{*2} Q_t^*)} e_{t-1}^R + k_{K^-} P_t^* \sqrt[3]{(Q_{t-1}^{*2} Q_t^*)^\rho} e_{t-1}^{*R}}{P_t^* k_E \sqrt[3]{(Q_{t-1}^2 Q_t)^\theta} e_{t-1}^R + k_{K^+} P_t^* \sqrt[3]{(Q_{t-1}^2 Q_t)^\theta} e_{t-1}^R} = \\ &= \frac{P_t \sqrt[3]{(Q_{t-1}^{*2} Q_t^*)^\rho} \left(k_I \sqrt[3]{(Q_{t-1}^{*2} Q_t^*)^{1-\rho}} + k_{K^-} \right)}{P_t^* e_{t-1}^2 \left(\frac{P_{t-1}^*}{P_{t-1}} \right) \sqrt[3]{(Q_{t-1}^2 Q_t)^\theta} \left(k_E \sqrt[3]{(Q_{t-1}^2 Q_t)^{1-\theta}} + k_{K^+} \right)} \end{aligned}$$

где $\theta > 0$, $\rho > 0$.

То есть $\frac{k_I \sqrt[3]{(Q_{t-1}^{*2} Q_t^*)^{1-\rho}} + k_{K^-}}{k_E \sqrt[3]{(Q_{t-1}^2 Q_t)^{1-\theta}} + k_{K^+}} = (k')^3 = const$, тогда:

$$e_t (e_{t-1})^2 = \frac{k' P_t}{P_t^*} \frac{Q_t^{*\frac{\rho}{3}}}{Q_t^{\frac{\theta}{3}}} \left(\frac{k' P_t}{P_t^*} \frac{Q_t^{*\frac{\rho}{3}}}{Q_t^{\frac{\theta}{3}}} \right)^2$$

Следовательно:

$$e_t = \frac{k' P_t}{P_t^*} \frac{Q_t^{*\frac{\rho}{3}}}{Q_t^{\frac{\theta}{3}}}$$

В данной модели переменные P , P^* – уровни цен и Q , Q^* – совокупные продукты, являются экзогенными переменными. Другими важнейшими детерминантами поведения валютного курса являются показатели движения капитала между странами, определённые величинами ρ , θ .

Коэффициент k' является курсом рубля к доллару США начальной точки периода модели. θ , ρ – настраиваемые параметры. В качестве рассматриваемого периода возьмем период с 2013 по 2019 года. P_t – совокупный уровень цен за литр газа в России (в долларах США), P_t^* – совокупный уровень цен за литр газа в США (в долларах США), Q_t^* – реальный ВВП США (в долларах США); Q_t – реальный ВВП России (в долларах США).

Данные для расчётов были взяты с сайта Мирового банка, с сайта Центрального банка и сайта U.S. Energy Information Administration.

При параметрах $\theta = 3.19$, $\rho = 2.995$ получили следующий результат. (Рисунок 65)

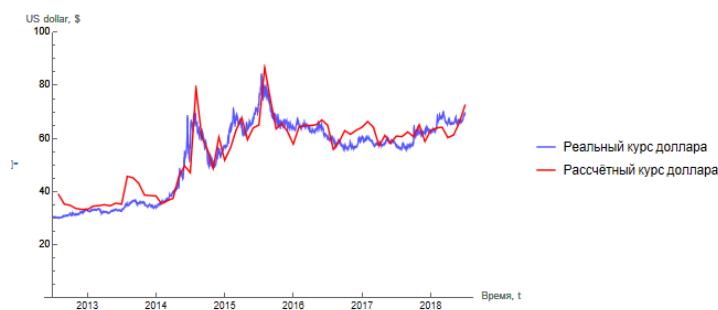


Рис. 65: Результаты моделирования

Исходя из полученного графика можно сделать вывод о том, что модель достаточно четко показывает изменение тенденции валютного курса, однако предсказанные ей значения не всегда являются точными. Модель показывает хорошие результаты в долгосрочной перспективе и может быть использована для долгосрочного или среднесрочного моделирования.

Заключение

В курсе Модели экономической динамики были рассмотрены различные модели функционирования экономик и их составляющих, был проведен качественный и численный анализ моделей в среде AnyLogic и Python, позволивший пронаблюдать изменение поведения моделей при различных условиях.