



МИНОБРНАУКИ РОССИИ

**Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Факультет информатики и прикладной математики
Кафедра прикладной математики и экономико-математических методов

ОТЧЁТ

по дисциплине:

«Модели комбинаторной оптимизации»

на тему:

**«Задание №9. Задача коммивояжера с временными окнами
(mTSP_{TW})»**

Направление: 01.03.02

Обучающийся: Бронников Егор Игоревич

Группа: ПМ-1901

Санкт-Петербург
2022

Дано

- $G = (V, A)$ – полный ориентированный взвешенный граф
- $V = \{0, 1, \dots, n\}$ – множество вершин, где вершина 0 - склад
- $A = \{(i, j) : i, j \in V, i \neq j\}$ – множество рёбер
- c_{ij} – использование ребра $\forall (i, j) \in A$
- t_{ij} – время на переезд из вершины $i \in V$ в вершину $j \in V$
- (a_i, b_i) – временное окно клиента, когда клиент должен быть обслужен $\forall i \in V \setminus \{0\}$
- m – количество коммивояжеров

Минимизация затрат за выполнение работ

Переменные

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if ребро } (i, j) \text{ используется в маршрутах коммивояжеров} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$\forall (i, j) \in A$$

$$u_i \geq 0 - \text{потенциалы вершин-клиентов} \quad \forall i \in V \setminus \{0\}$$

Целевая функция

$$\sum_{(i,j) \in A} c_{ij} \cdot x_{ij} \longrightarrow \min$$

Ограничения

1) Полустепень исхода для каждой вершины-клиента должна быть равна единице:

$$\sum_{(i,j) \in A} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in V \setminus \{0\}$$

2) Полустепень захода для каждой вершины-клиента должна быть равна единице:

$$\sum_{(i,j) \in A} x_{ij} = 1, \quad \forall j \in V \setminus \{0\}$$

3) Коммивояжер выполняет один маршрут и возвращается на склад:

$$\sum_{(0,j) \in A} x_{0j} = m$$

4) Запрет сабтуров (ограничение на потенциалы):

$$u_i - u_j + (b_i - a_j + t_{ij}) \cdot x_{ij} \leq b_i - a_j, \quad \forall i, j \in V \setminus \{0\} \ i \neq j$$

5) Ограничение на временные окна:

$$a_i \leq u_i \leq b_i, \quad \forall i \in V \setminus \{0\}$$

6) Естественные ограничения:

$$x_{ij} \in \{0; 1\}, \quad \forall (i, j) \in A$$

$$u_i \geq 0, \quad \forall i \in V \setminus \{0\}$$

Минимизация суммарной продолжительности выполнения маршрутов

Переменные

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if ребро } (i, j) \text{ используется в маршрутах коммивояжеров} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$\forall (i, j) \in A$$

$$u_i \geq 0 - \text{потенциалы вершин-клиентов} \quad \forall i \in V \setminus \{0\}$$

Целевая функция

$$u_n \longrightarrow \min$$

Ограничения

1) Полустепень исхода для каждой вершины-клиента должна быть равна единице:

$$\sum_{(i,j) \in A} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in V \setminus \{0\}$$

2) Полустепень захода для каждой вершины-клиента должна быть равна единице:

$$\sum_{(i,j) \in A} x_{ij} = 1, \quad \forall j \in V \setminus \{0\}$$

3) Коммивояжер выполняет один маршрут и возвращается на склад:

$$\sum_{(0,j) \in A} x_{0j} = m$$

4) Запрет сабтуров (ограничение на потенциалы):

$$u_i - u_j + (b_i - a_j + t_{ij}) \cdot x_{ij} \leq b_i - a_j, \quad \forall i, j \in V \setminus \{0\} \quad i \neq j$$

5) Ограничение на временные окна:

$$a_i \leq u_i \leq b_i, \quad \forall i \in V \setminus \{0\}$$

6) Инициализация времени прибытия к первому клиенту тура и время необходимое для перехода от склада до этого клиента:

$$u_i - t_{0i} \cdot x_{0i} \geq 0, \quad \forall i \in V \setminus \{0\}$$

7) Продолжительность маршрута должна быть меньше или равна времени посещения + время, которое необходимо для возвращения на склад:

$$u_i + t_{i0} \leq u_n, \quad \forall i \in V \setminus \{0\}$$

8) Естественные ограничения:

$$x_{ij} \in \{0; 1\}, \quad \forall (i, j) \in A$$

$$u_i \geq 0, \quad \forall i \in V \setminus \{0\}$$