



**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**

**Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Факультет информатики и прикладной математики  
Кафедра прикладной математики и экономико-математических  
методов

**ОТЧЁТ**

по дисциплине:

**«Методы оптимизации»**

на тему:

**«Построение и решение двойственной задачи. Задание 5»**

Направление: 01.03.02

Обучающийся: Бронников Егор Игоревич

Группа: ПМ-1901

Санкт-Петербург  
2021

## Задание 2.1

### Дано

Целевая функция:

$$f = -x_1 + x_2 \longrightarrow \max$$

Ограничения:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \geq -1 \\ -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ 3x_1 + x_2 \leq 3 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

### Задание

#### Каноническая форма прямой задачи

1. Вводим слабые переменные  $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$ :

$$-x_1 + 2x_2 - y_1 = -1$$

$$-2x_1 + x_2 + y_2 = 2$$

$$3x_1 + x_2 + y_3 = 3$$

2. Делаем правые части равенств положительными:

$$x_1 - 2x_2 + y_1 = 1$$

$$-2x_1 + x_2 + y_2 = 2$$

$$3x_1 + x_2 + y_3 = 3$$

Таким образом, прямая задача сведена к канонической форме.

### Формулируем двойственную задачу

Функция цели:

$$\phi = -\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 \longrightarrow \min$$

Ограничения:

$$\lambda_1 - 2\lambda_2 + 3\lambda_3 \geq -1$$

$$-2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \geq 1$$

$$\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0$$

### Каноническая форма двойственной задачи

Функция цели:

$$\phi = -\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 \longrightarrow \min$$

1. Вводим слабые переменные  $\xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0$ :

$$\lambda_1 - 2\lambda_2 + 3\lambda_3 - \xi_1 = -1$$

$$-2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \xi_2 = 1$$

$$\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0$$

2. Делаем правые части равенств положительными:

$$-\lambda_1 + 2\lambda_2 - 3\lambda_3 + \xi_1 = 1$$

$$-2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \xi_2 = 1$$

$$\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0$$

## Решение двойственной задачи

---

### Напоминание из задачи 2.1

$y_2, y_3$  — свободные переменные

$x_1, x_2, y_1$  — базисные переменные

1. Выразим базисные переменные через свободные:

$$x_1 = \frac{1}{5} + \frac{y_2}{5} - \frac{y_3}{5}$$

$$x_2 = 2 + 2x_1 - y_2 = \frac{12}{5} - \frac{3}{5}y_2 - \frac{2}{5}y_3$$

$$y_1 = 5 + 3x_1 - 2y_2 = \frac{28}{5} - \frac{7}{5}y_2 - \frac{3}{5}y_3$$

↓

$$x_1 = \frac{1}{5} + \frac{y_2}{5} - \frac{y_3}{5}$$

$$x_2 = \frac{12}{5} - \frac{3}{5}y_2 - \frac{2}{5}y_3$$

$$y_1 = \frac{28}{5} - \frac{7}{5}y_2 - \frac{3}{5}y_3$$

2. Выразим функцию цели  $f$  через свободные переменные:

$$f = x_1 - y_2 + 2 = \frac{11}{5} - \frac{4}{5}y_2 - \frac{y_3}{5} \longrightarrow \max$$

↓

$$f = \frac{11}{5} - \frac{4}{5}y_2 - \frac{y_3}{5} \longrightarrow \max$$

---

Из оптимального решения симплекс-методом прямой задачи видно, что переменные базисные переменные  $x_1, x_2$  выражаются через свободные переменные  $y_2, y_3$  следующим образом:

$$x_1 = \frac{1}{5} + \frac{y_2}{5} - \frac{y_3}{5}$$

$$x_2 = \frac{12}{5} - \frac{3}{5}y_2 - \frac{2}{5}y_3$$

Функция цели:

$$f = \frac{11}{5} - \frac{4}{5}y_2 - \frac{y_3}{5} \longrightarrow \max$$

$y_2$  и  $y_3$  входят в выражение для оптимальной функции цели прямой задачи с коэффициентами  $-\frac{4}{5}$  и  $-\frac{1}{5}$ .

Переменные  $y_2$  и  $y_3$  индуцируют следующие ограничения двойственной задачи:

$$y_2 \rightarrow \lambda_2 \geq 0 \quad y_3 \rightarrow \lambda_3 \geq 0$$

---

**Лемма:**

Если в прямой (двойственной) задаче начальная базисная переменная входит в оптимальное решение целевой функции как свободная переменная, то коэффициент при ней в целевой функции равен разности между правой и левой частями ограничения двойственной (прямой) задачи, индуцированного рассматриваемой начальной базисной переменной.

---

По лемме получается:

$$-\frac{4}{5} = 0 - \lambda_2 \quad -\frac{1}{5} = 0 - \lambda_3$$

Тогда решение двойственной задачи выглядит следующим образом:  
 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \frac{4}{5}, \lambda_3 = \frac{1}{5}$

Функция цели:

$$\phi = -\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = \frac{8}{5} + \frac{3}{5} = \frac{11}{5}$$

↓

$$\phi = \frac{11}{5} = 2.2$$

---

**Напоминание из задачи 2.1**

$$x_1 = \frac{1}{5} = 0.2$$

$$x_2 = \frac{12}{5} = 2.4$$

$$f = \frac{11}{5} = 2.2$$

---

То есть  $\phi(\Lambda^*) = f(X^*)$  и критерий оптимальности Канторовича выполняется.

**Ответ:**  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \frac{4}{5}, \lambda_3 = \frac{1}{5}, \phi = \frac{11}{5}$

## Задание 4.1

### Дано

Целевая функция:

$$f = 4x_1 + x_2 \longrightarrow \max$$

Ограничения:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \geq -8 \\ 3x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_2 \leq 8 \\ x_1 \leq 4 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

### Задание

#### Каноническая форма прямой задачи

1. Вводим слабые переменные  $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0$ :

$$3x_1 - 2x_2 - y_1 = -8$$

$$3x_1 + x_2 - y_2 = 3$$

$$x_2 + y_3 = 8$$

$$x_1 + y_4 = 4$$

2. Делаем правые части равенств положительными:

$$-3x_1 + 2x_2 + y_1 = 8$$

$$3x_1 + x_2 - y_2 = 3$$

$$x_2 + y_3 = 8$$

$$x_1 + y_4 = 4$$

Таким образом, прямая задача сведена к канонической форме.

## Метод штрафов

Введём искусственную переменную —  $r \geq 0$ .

Целевая функция:

$$f = 4x_1 + x_2 \longrightarrow \max$$

Ограничения:

$$-3x_1 + 2x_2 + y_1 = 8 \quad \rightarrow \lambda_1$$

$$3x_1 + x_2 - y_2 + r = 3 \quad \rightarrow \lambda_2$$

$$x_2 + y_3 = 8 \quad \rightarrow \lambda_3$$

$$x_1 + y_4 = 4 \quad \rightarrow \lambda_4$$

$$x_i \geq 0 \quad \forall i = \overline{1, 2}; \quad y_j \geq 0 \quad \forall j = \overline{1, 4}$$

Перепишем функцию цели:

$$f = 4x_1 + x_2 - Mr = 4x_1 + x_2 - M(3 - 3x_1 - x_2 + y_2)$$

$\downarrow$

$$f = -3M + (3M + 4)x_1 + (M + 1)x_2 - My_2$$

Пусть  $M = 100$ , тогда функция цели примет следующий вид:

$$f = -300 + 304x_1 + 101x_2 - 100y_2$$

## Формулируем двойственную задачу

Функция цели:

$$\phi = 8\lambda_1 + 3\lambda_2 + 8\lambda_3 + 4\lambda_4 - 300 \longrightarrow \min$$

Ограничения:

$$-3\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_4 \geq 304$$

$$2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \geq 101$$

$$-\lambda_2 \geq -100$$

$$\lambda_1 \geq 0, \lambda_3 \geq 0, \lambda_4 \geq 0$$

## Решение двойственной задачи

### Напоминание из задачи 4.1

Базисные переменные:  $y_1, x_1, x_2, y_2$ .

Свободные переменный:  $y_3, y_4, r$ .

БП	$x_1$	$x_2$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$r$	Своб. член	
f	0	0	0	0	1	4	100	24	
$y_1$	0	0	1	0	-2	3	0	4	
$x_1$	1	0	0	0	0	1	0	4	
$x_2$	0	1	0	0	1	0	0	8	
$y_2$	0	0	0	1	1	3	-1	17	

Таким образом, получается:

$$f + y_3 + 4y_4 + 100r = 24 \quad \rightarrow \quad f = 24$$

$$y_1 - 2y_3 + 3y_4 = 4 \quad \rightarrow \quad y_1 = 4$$

$$x_1 + y_4 = 4 \quad \rightarrow \quad x_1 = 4$$

$$x_2 + y_3 = 8 \quad \rightarrow \quad x_2 = 8$$

$$y_2 + y_3 + 3y_4 - r = 17 \quad \rightarrow \quad y_2 = 17$$

$$y_3 = 0, y_4 = 0, r = 0$$

Целевая функция прямой задачи выражается так:

$$f = 24 - y_3 - 4y_4 - 100r \rightarrow \max$$

Переменные  $y_2$ ,  $y_3$  и  $y_4$  индуцируют следующие ограничения двойственной задачи:

$$y_2 \rightarrow -\lambda_2 \geq -100 \quad y_3 \rightarrow \lambda_3 \geq 0 \quad y_4 \rightarrow \lambda_4 \geq 0$$

Тогда по лемме:

$$0 = -100 + \lambda_2 \quad -1 = 0 - \lambda_3 \quad -4 = 0 - \lambda_4$$



Тогда решение двойственной задачи выглядит следующим образом:  
 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 100, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = 4$

Функция цели:

$$\phi = 8\lambda_1 + 3\lambda_2 + 8\lambda_3 + 4\lambda_4 - 300 = 8*0 + 3*100 + 8*1 + 4*4 - 300 = 24$$

$\downarrow$

$$\phi = 24$$

---

#### Напоминание из задачи 4.1

$$x_1 = 4$$

$$x_2 = 8$$

$$f = 24$$

---

То есть  $\phi(\Lambda^*) = f(X^*)$  и критерий оптимальности Канторовича выполняется.

**Ответ:**  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 100, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = 4, \phi = 24$