



**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**

**Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Факультет информатики и прикладной математики  
Кафедра прикладной математики и экономико-математических  
методов

**ОТЧЁТ**

по дисциплине:

**«Методы оптимизации»**

на тему:

**«Решение транспортной задачи. Задание 8»**

Направление: 01.03.02

Обучающийся: Бронников Егор Игоревич

Группа: ПМ-1901

Санкт-Петербург  
2021

## Задание 1. Сбалансированная задача

Дано

<i>Дано</i>
-------------

<i>ПОПН</i>	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$a_i$
$A_1$	4	5	5	4	5	330
$A_2$	4	5	6	2	6	320
$A_3$	4	4	5	5	6	410
$A_4$	2	3	5	6	4	430
$A_5$	4	4	5	3	4	400
$b_j$	340	370	420	410	350	

## а. Метод северо-западного угла

**Дано**

ПО\ПН	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$a_i$
$A_1$	4	5	5	4	5	330
$A_2$	4	5	6	2	6	320
$A_3$	4	4	5	5	6	410
$A_4$	2	3	5	6	4	430
$A_5$	4	4	5	3	4	400
$b_j$	340	370	420	410	350	

**Метод северо-западного угла**

ПО\ПН	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$a_i$
$A_1$	330	4	5	4	5	330
$A_2$	10	310	6	2	6	320
$A_3$	4	60	350	5	6	410
$A_4$	2	3	70	360	4	430
$A_5$	4	4	50	350	4	400
$b_j$	340	370	420	410	350	

$$f = 8960$$

Рассматриваем левый верхний угол и ставим туда максимально возможную перевозку – 330. Далее переходим ко второй строке и видим, что мы не выполнили все заказы в пункте  $B_1$ , поэтому дополняем пункт нужным количеством груза – 10 и переходим к следующему пункту  $B_2$ . Тоже заполняем его максимально возможной перевозкой – 310 и т. д.

$$f = 4 * 330 + 4 * 10 + 5 * 310 + 4 * 60 + 5 * 350 + 5 * 70 + 6 * 360 + 3 * 50 + 4 * 350 = 8960$$

↓

$$f = 8960$$

Стоит также отметить, что мы получили невырожденный допустимый план, так как количество базисных клеток совпало с  $M + N - 1 = 5 + 5 - 1 = 9$ .

## б. Метод минимального элемента

*Дано*

ПО\ПН	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$a_i$
$A_1$	4	5	5	4	5	330
$A_2$	4	5	6	2	6	320
$A_3$	4	4	5	5	6	410
$A_4$	2	3	5	6	4	430
$A_5$	4	4	5	3	4	400
$b_j$	340	370	420	410	350	

*Метод минимального элемента*

ПО\ПН	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$a_i$
$A_1$	4	5	5	4	5	330
$A_2$	4	5	6	2	6	320
$A_3$	4	4	5	5	6	410
$A_4$	2	3	5	6	4	430
$A_5$	4	4	5	3	4	400
$b_j$	340	370	420	410	350	

$$f = 6520$$

Находим минимальный тариф, в данном случае я выбрал  $A_4B_1 - 2$ . В эту клетку записываем максимально возможную перевозку – 340 и исключаем столбец  $B_1$  из дальнейшего рассмотрения, так как мы удовлетворили данный пункт и т.д.

$$f = 5 * 290 + 5 * 40 + 2 * 320 + 4 * 280 + 5 * 130 + 2 * 340 + 3 * 90 + 3 * 90 + 4 * 310 = 6520$$

↓

$$f = 6520$$

Стоит также отметить, что мы получили невырожденный допустимый план, так как количество базисных клеток совпало с  $M + N - 1 = 5 + 5 - 1 = 9$ .

## с. Метод Фогеля

Дано						
ПОЛН	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$a_i$
$A_1$	4	5	5	4	5	330
$A_2$	4	5	6	2	6	320
$A_3$	4	4	5	5	6	410
$A_4$	2	3	5	6	4	430
$A_5$	4	4	5	3	4	400
$b_j$	340	370	420	410	350	

Метод Фогеля							
1 итерация							
ПОЛН	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$a_i$	Штрафы
$A_1$	4	5	5	4	5	330	0
$A_2$	4	5	6	<u>2</u> 320	6	320	2
$A_3$	4	4	5	5	6	410	0
$A_4$	2	3	5	6	4	430	1
$A_5$	4	4	5	3	4	400	1
$b_j$	340	370	420	410	350		
Штрафы	2	1	0	1	0		

Сначала вычислим штрафы. Наибольший по строкам штраф получился 2, поэтому мы рассматриваем соответствующую строку – 2. Далее в этой строке у нас минимальный тариф 2 и мы ему приписываем максимально возможную перевозку, то есть 320 и исключаем эту строку из рассмотрения. Переходим к следующему шагу.

2 итерация							Штрафы
ПО\ПН	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$a_i$	
$A_1$	4	5	5	4	5	330	0,0
$A_2$	4	5	6	2	6	320 (0)	2,-
$A_3$	4	4	5	5	6	410	0,0
$A_4$	<u>2</u> 340	3	5	6	4	430	1,1
$A_5$	4	4	5	3	4	400	1,1
$b_j$	340	370	420	410 (90)	350		
Штрафы	2,2	1,1	0,0	1,1	0,0		

3 итерация							Штрафы
ПОЛН	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$a_i$	
$A_1$	4	5	5	4	5	330	0,0,1
$A_2$	4	5	6	2	6	320 (0)	2,-
$A_3$	4	4	5	5	6	410	0,0,1
$A_4$	2	3	5	6	4	430 (90)	1,1,1
$A_5$	4	4	5	3	4	400	1,1,1
$b_j$	340 (0)	370	420	410 (90)	350		
Штрафы	2,2,-	1,1,1	0,0,0	1,1,1	0,0,0		

4 итерация							Штрафы
ПОЛН	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$a_i$	
$A_1$	4	5	5	4	5	330	0,0,1,0
$A_2$	4	5	6	2	6	320 (0)	2,-
$A_3$	4	4	5	5	6	410	0,0,1,1
$A_4$	2	3	5	6	4	430 (90)	1,1,1,1
$A_5$	4	4	5	3	4	400 (310)	1,1,1,0
$b_j$	340 (0)	370	420	410 (0)	350		
Штрафы	2,2,-	1,1,1,1	0,0,0,0	1,1,1,-	0,0,0,0		

5 итерация							Штрафы
ПОЛН	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$a_i$	
$A_1$	4	5	5	4	5	330	0,0,1,0,0
$A_2$	4	5	6	2	6	320 (0)	2,-
$A_3$	4	4	5	5	6	410	0,0,1,1,1
$A_4$	2	3	5	6	4	430 (0)	1,1,1,1,-
$A_5$	4	4	5	3	4	400 (310)	1,1,1,0,0
$b_j$	340 (0)	370 (280)	420	410 (0)	350		
Штрафы	2,2,-	1,1,1,1,0	0,0,0,0,0	1,1,1,-	0,0,0,0,1		

6 итерация							Штрафы
ПОЛН	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$a_i$	
$A_1$	4	5	5	4	5	330	0,0,1,0,0,0
$A_2$	4	5	6	2	6	320 (0)	2,-
$A_3$	4	4	5	5	6	410 (130)	0,0,1,1,1,1
$A_4$	2	3	5	6	4	430 (0)	1,1,1,1,-
$A_5$	4	4	5	3	4	400 (310)	1,1,1,0,0,1
$b_j$	340 (0)	370 (0)	420	410 (0)	350		
Штрафы	2,2,-	1,1,1,1,0,-	0,0,0,0,0,0	1,1,1,-	0,0,0,0,1,1		

7 итерация							Штрафы
ПОЛН	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$\alpha_i$	
$A_1$	4	5	5	4	5	330	0,0,1,0,0,0,0
$A_2$	4	5	6	2	6	320 (0)	2,-
$A_3$	4	4	5	5	6	410 (130)	0,0,1,1,1,1,1
$A_4$	2	3	5	6	4	430 (0)	1,1,1,1,-
$A_5$	4	4	5	3	4	400 (0)	1,1,1,0,0,1,-
$b_j$	340 (0)	370 (0)	420	410 (0)	350 (40)		
Штрафы	2,2,-	1,1,1,1,0,-	0,0,0,0,0,0,0	1,1,1,-	0,0,0,0,1,1,1		

8 итерация							Штрафы
ПОЛН	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$\alpha_i$	
$A_1$	4	5	5	4	5	330	0,0,1,0,0,0,0
$A_2$	4	5	6	2	6	320 (0)	2,-
$A_3$	4	4	5	5	6	410 (0)	0,0,1,1,1,1,1,-
$A_4$	2	3	5	6	4	430 (0)	1,1,1,1,-
$A_5$	4	4	5	3	4	400 (0)	1,1,1,0,0,1,-
$b_j$	340 (0)	370 (0)	420 (290)	410 (0)	350 (40)		
Штрафы	2,2,-	1,1,1,1,0,-	0,0,0,0,0,0,0	1,1,1,-	0,0,0,0,1,1,1, 5		



9 итерация							Штрафы
ПО\ПН	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$a_i$	
$A_1$	4	5	5	4	5	330	0,0,1,0,0,0,0,5
$A_2$	4	5	6	2	6	320 (0)	2,-
$A_3$	4	4	5	5	6	410 (0)	0,0,1,1,1,1,-
$A_4$	2	3	5	6	4	430 (0)	1,1,1,1,-
$A_5$	4	4	5	3	4	400 (0)	1,1,1,0,0,1,-
$b_j$	340 (0)	370 (0)	420 (0)	410 (0)	350 (40)		
Штрафы	2,2,-	1,1,1,1,0,-	0,0,0,0,0,0,0,-	1,1,1,-	0,0,0,0,1,1,1,5		

Результаты вычислений						
ПО\ПН	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$a_i$
$A_1$	4	5	5	4	5	330 (0)
$A_2$	4	5	6	2	6	320 (0)
$A_3$	4	4	5	5	6	410 (0)
$A_4$	2	3	5	6	4	430 (0)
$A_5$	4	4	5	3	4	400 (0)
$b_j$	340 (0)	370 (0)	420 (0)	410 (0)	350 (0)	

$$f = 6520$$

После 9 итераций мы получили следующий результат.

$$f = 5 * 290 + 5 * 40 + 2 * 320 + 5 * 130 + 4 * 280 + 3 * 90 + 2 * 340 + 3 * 90 + 4 * 310 = 6520$$

↓

$$f = 6520$$

Стоит также отметить, что мы получили невырожденный допустимый план, так как количество базисных клеток совпало с  $M + N - 1 = 5 + 5 - 1 = 9$ .

## д. Метод потенциалов

Дано						
ПО\ПН	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$a_i$
$A_1$	4	5	5	4	5	330
$A_2$	4	5	6	2	6	320
$A_3$	4	4	5	5	6	410
$A_4$	2	3	5	6	4	430
$A_5$	4	4	5	3	4	400
$b_j$	340	370	420	410	350	

Начальный допустимый план (метод Фогеля)						
ПО\ПН	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$a_i$
$A_1$	4	5	5	4	5	330
		<b>290</b>		<b>40</b>		
$A_2$	4	5	6	2	6	320
			<b>320</b>			
$A_3$	4	4	5	5	6	410
	<b>280</b>	<b>130</b>				
$A_4$	2	3	5	6	4	430
	<b>340</b>	<b>90</b>				
$A_5$	4	4	5	3	4	400
			<b>90</b>	<b>310</b>		
$b_j$	340	370	420	410	350	

$$f = 6520$$

Метод потенциалов							
ПО\ПН	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$a_i$	$\alpha_i$
$A_1$	4	5	5	4	5	330	0
		<b>290</b>		<b>40</b>			
$A_2$	4	5	6	2	6	320	-2
			<b>320</b>				
$A_3$	4	4	5	5	6	410	0
	<b>280</b>	<b>130</b>					
$A_4$	2	3	5	6	4	430	-1
	<b>340</b>	<b>90</b>					
$A_5$	4	4	5	3	4	400	-1
			<b>90</b>	<b>310</b>			
$b_j$	340	370	420	410	350		
$\beta_j$	3	4	5	4	5		

Пусть  $\alpha_1 = 0$

Проверим, является ли наш допустимый план оптимальным. Пусть  $\alpha_1 = 0$ , тогда мы получим соответствующие значения для платежей  $\alpha_i$  и  $\beta_j$ .

$$\begin{array}{lll}
 \alpha_1 + \beta_1 = 3 \leq 4 \ (c_{11}) & \alpha_1 + \beta_2 = 4 \leq 5 \ (c_{12}) & \alpha_1 + \beta_4 = 4 \leq 4 \ (c_{14}) \\
 \alpha_2 + \beta_1 = 1 \leq 4 \ (c_{21}) & \alpha_2 + \beta_2 = 2 \leq 5 \ (c_{22}) & \alpha_2 + \beta_3 = 3 \leq 6 \ (c_{23}) \\
 \alpha_2 + \beta_5 = 3 \leq 6 \ (c_{25}) & \alpha_3 + \beta_1 = 3 \leq 4 \ (c_{31}) & \alpha_3 + \beta_4 = 4 \leq 5 \ (c_{34}) \\
 \alpha_3 + \beta_5 = 5 \leq 6 \ (c_{35}) & \alpha_4 + \beta_3 = 4 \leq 5 \ (c_{43}) & \alpha_4 + \beta_4 = 3 \leq 6 \ (c_{44}) \\
 \alpha_4 + \beta_5 = 4 \leq 4 \ (c_{45}) & \alpha_5 + \beta_1 = 2 \leq 4 \ (c_{51}) & \alpha_5 + \beta_2 = 3 \leq 4 \ (c_{52}) \\
 \alpha_5 + \beta_3 = 4 \leq 5 \ (c_{53}) & & 
 \end{array}$$

Получили, что во всех свободных клетках выполняется условие  $c_{ij} \geq s_{ij}$ , следовательно наш план является оптимальным.

Возьмём начальный план из метода северо-западного угла и сделаем 2 итерации.

Метод северо-западного угла

ПОЛН	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$a_i$	
$A_1$	330	4	5	5	4	5	330
$A_2$		4	5	6	2	6	320
$A_3$	10	310					
	4	4	5	5	6	410	
$A_4$		60	350				
	2	3	5	6	4	430	
$A_5$		70	360				
	4	4	5	3	4	400	
$b_j$		50	350				
	340	370	420	410	350		

$$f = 8960$$

Метод потенциалов

1 итерация									
ПОПН	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$a_i$	$\alpha_i$		
$A_1$	330	4	5	5	4	5	330	0	
$A_2$	10	4	310	5	6	2	6	320	0
$A_3$		4	60	4	5	5	6	410	-1
$A_4$		2		3	5	6	4	430	-1
$A_5$		4		4	5	3	4	400	-4
$b_j$	340	370	420	410	350				
$\beta_j$	4	5	6	7	8				

Пусть  $\alpha_1 = 0$

Пусть  $\alpha_1 = 0$ . Находим потенциалы  $\alpha_i$  и  $\beta_j$ .

Проверим, будет ли являться наш план оптимальным:

$$A_1 B_2 : 0 + 5 = 5 \leq 5$$

$$A_1 B_3 : 0 + 6 = 6 > 5 \rightarrow v_{13} = 0 + 6 - 5 = 1$$

$$A_1 B_4 : 0 + 7 = 7 > 4 \rightarrow v_{14} = 0 + 7 - 4 = 3$$

$$A_1 B_5 : 0 + 8 = 8 > 5 \rightarrow v_{15} = 0 + 8 - 5 = 3$$

$$A_2 B_3 : 0 + 6 = 6 \leq 6$$

$$A_2 B_4 : 0 + 7 = 7 > 2 \rightarrow v_{24} = 0 + 7 - 2 = 5$$

$$A_2 B_5 : 0 + 8 = 8 > 6 \rightarrow v_{25} = 0 + 8 - 6 = 2$$

$$A_3 B_1 : -1 + 4 = 3 \leq 4$$

$$A_3 B_4 : -1 + 7 = 6 > 5 \rightarrow v_{34} = -1 + 7 - 6 = 1$$

$$A_3 B_5 : -1 + 8 = 7 > 6 \rightarrow v_{35} = -1 + 8 - 7 = 1$$

$$A_4 B_1 : -1 + 4 = 3 > 2 \rightarrow v_{41} = -1 + 4 - 3 = 1$$

$$A_4 B_2 : -1 + 5 = 4 > 3 \rightarrow v_{42} = -1 + 5 - 3 = 1$$

$$A_4 B_5 : -1 + 8 = 7 > 4 \rightarrow v_{45} = -1 + 8 - 4 = 3$$

$$A_5 B_1 : -4 + 4 = 0 \leq 4$$

$$A_5 B_2 : -4 + 5 = 1 \leq 4$$

$$A_5 B_3 : -4 + 6 = 2 \leq 5$$

$$\max \{1, 3, 3, 5, 2, 1, 1, 1, 1, 3\} = 5$$

Следовательно выбираем свободную клетку  $A_2B_4$ , так как она имеет максимальный штраф и строим из неё цикл.

Цикл:  $A_2B_4 \rightarrow A_2B_2 \rightarrow A_3B_2 \rightarrow A_3B_3 \rightarrow A_4B_3 \rightarrow A_4B_4$

Максимальное количество груза, которое мы можем перебросить по этому циклу – 310. Наша целевая функция изменится на следующее значение:

$$\delta f = 310 * [(2 + 4 + 5) - (5 + 5 + 6)] = -1550$$

В результате после 1 итерации мы получаем следующий план:

Результат 1 итерации						
ПО/ПН	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$a_i$
$A_1$	4 <b>330</b>	5	5	4	5	330
$A_2$	4 <b>10</b>	5	6 <b>310</b>	2	6	320
$A_3$	4	4 <b>370</b>	5 <b>40</b>	5	6	410
$A_4$	2	3	5 <b>380</b>	6 <b>50</b>	4	430
$A_5$	4	4	5 <b>50</b>	3 <b>350</b>	4	400
$b_j$	340	370	420	410	350	

$A_2B_2$  стала свободной клеткой, а  $A_2B_4$  стала базисной клеткой. Переходим ко 2 итерации.

2 итерация							
ПО/ПН	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$a_i$	$\alpha_i$
$A_1$	4 <b>330</b>	5	5	4	5	330	0
$A_2$	4 <b>10</b>	5 -	6 -	2 <b>310</b>	6 +	320	0
$A_3$	4	4 <b>370</b>	5 <b>40</b>	5	6	410	4
$A_4$	2 +	3 -	5 <b>380</b>	6 <b>50</b>	4 -	430	4
$A_5$	4	4	5 <b>50</b>	3 <b>350</b>	4	400	1
$b_j$	340	370	420	410	350		
$\beta_j$	4	0	1	2	3		

Пусть  $\alpha_1 = 0$

Пусть  $\alpha_1 = 0$ . Находим потенциалы  $\alpha_i$  и  $\beta_j$ .

Проверим, будет ли являться наш план оптимальным:

$$A_1B_2 : 0 + 0 = 0 \leq 5$$

$$A_1B_3 : 0 + 1 = 1 \leq 5$$

$$A_1B_3 : 0 + 2 = 2 \leq 4$$

$$A_1B_4 : 0 + 2 = 2 \leq 4$$

$$A_1B_5 : 0 + 3 = 3 \leq 4$$

$$A_2B_2 : 0 + 0 = 0 \leq 5$$

$$A_2B_3 : 0 + 1 = 1 \leq 6$$

$$A_2B_5 : 0 + 3 = 3 \leq 6$$

$$A_2B_5 : 0 + 3 = 3 \leq 6$$

$$A_3B_1 : 4 + 4 = 8 > 4 \rightarrow v_{31} = 4 + 4 - 4 = 4$$

$$A_3B_4 : 4 + 2 = 6 > 5 \rightarrow v_{34} = 4 + 2 - 5 = 1$$

$$A_3B_5 : 4 + 3 = 7 > 6 \rightarrow v_{34} = 4 + 3 - 6 = 1$$

$$A_4B_1 : 4 + 4 = 8 > 2 \rightarrow v_{41} = 4 + 4 - 2 = 6$$

$$A_4B_2 : 4 + 0 = 4 > 3 \rightarrow v_{42} = 4 + 0 - 3 = 1$$

$$A_4B_5 : 4 + 3 = 7 > 4 \rightarrow v_{45} = 4 + 3 - 4 = 3$$

$$A_5B_1 : 1 + 4 = 5 > 4 \rightarrow v_{51} = 4 + 1 - 4 = 1$$

$$A_5B_2 : 1 + 0 = 1 \leq 4$$

$$A_5B_3 : 1 + 1 = 2 \leq 5$$

$$\max \{4, 1, 1, 6, 1, 3, 1\} = 6$$

Следовательно выбираем свободную клетку  $A_4B_1$ , так как она имеет максимальный штраф и строим из неё цикл.

$$\text{Цикл: } A_4B_1 \rightarrow A_4B_4 \rightarrow A_2B_4 \rightarrow A_2B_1$$

Максимальное количество груза, которое мы можем перебросить по этому циклу – 10. Наша целевая функция изменится на следующее значение:

$$\delta f = 10 * [(2 + 2) - (4 + 6)] = -60$$

В результате после 2 итерации мы получаем следующий план:

Результат 2 итерации						
ПО/ПН	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$a_i$
$A_1$	4 <b>330</b>	5	5	4	5	330
$A_2$	4	5	6 <b>320</b>	2	6	320
$A_3$	4	4 <b>370</b>	5 <b>40</b>	5	6	410
$A_4$	2 <b>10</b>	3	5 <b>380</b>	6 <b>40</b>	4	430
$A_5$	4	4	5 <b>50</b>	3 <b>350</b>	4	400
$b_j$	340	370	420	410	350	

$$f = 7350$$

$A_2B_1$  стала свободной клеткой, а  $A_4B_1$  стала базисной клеткой.  
Значение целевой функции после двух итераций стало:

$$f = 8960 - (1550 + 60) = 7350$$

## Задание 2. Несбалансированная задача

Дано

Дано

ПОПН	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$a_i$
$A_1$	4	3	3	3	250
$A_2$	4	5	4	4	150
$A_3$	5	3	3	6	50
$A_4$	5	4	3	5	350
$A_5$	4	5	6	5	300
$b_j$	350	50	50	450	

Сбалансированная задача

ПОПН	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$a_i$
$A_1$	4	3	3	3	0	250
$A_2$	4	5	4	4	0	150
$A_3$	5	3	3	6	0	50
$A_4$	5	4	3	5	0	350
$A_5$	4	5	6	5	0	300
$b_j$	350	50	50	450	200	

$\sum a_i = 1100$
$\sum b_j = 900$
$b_\Phi = 200$

У нас получается несбалансированная задача, так как:

$$\sum_{i=1}^5 a_i = 250 + 150 + 50 + 350 + 300 = 1100$$

$$\sum_{j=1}^4 b_j = 350 + 50 + 50 + 450 = 900$$

А именно транспортная задача с избытком запасов, так как:  $\sum_{i=1}^5 a_i > \sum_{j=1}^4 b_j$

Вводим фиктивный пункт  $B_5$  с количеством заявок:  $b_f = 1100 - 900 = 200$ . Цены перевозок задаём равными нулю:  $c_{fj} = 0$ ,  $j = 1, \dots, 5$ . В итоге мы получили сбалансированную задачу.

## а. Метод северо-западного угла

*Дано*

ПОПН	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$a_i$
$A_1$	4	3	3	3	0	250
$A_2$	4	5	4	4	0	150
$A_3$	5	3	3	6	0	50
$A_4$	5	4	3	5	0	350
$A_5$	4	5	6	5	0	300
$b_j$	350	50	50	450	200	

*Метод северо-западного угла*

ПОПН	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$a_i$
$A_1$	4 <b>250</b>	3	3	3	0	250
$A_2$	4 <b>100</b>	5 <b>50</b>	4	4	0	150
$A_3$	5	3	3 <b>50</b>	6	0	50
$A_4$	5	4	3	5 <b>350</b>	0	350
$A_5$	4	5	6 <b>100</b>	5 <b>200</b>	0	300
$b_j$	350	50	50	450	200	

$$f = 4050$$

Алгоритм такой же как и в прошлом задании.

$$f = 4 * 250 + 4 * 100 + 5 * 50 + 3 * 50 + 5 * 350 + 5 * 100 + 0 * 200 = 4050$$

↓

$$f = 4050$$

Стоит также отметить, что мы получили вырожденный допустимый план, так как количество базисных клеток не совпало с  $M + N - 1 = 5 + 5 - 1 = 9$ , а базисных клеток у нас 7.



Сведём этот план к невырожденному. Сделаем так, чтобы базисные клетки можно было бы соединить ломанной линией. В итоге получаем следующий результат:

<i>Метод северо-западного угла (невырожденный)</i>						
<i>ПО/ПН</i>	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$a_i$
$A_1$	250	4	3	3	0	250
$A_2$	100	50	5	4	0	150
$A_3$	5	0	3	3	0	50
$A_4$	5	4	0	3	0	350
$A_5$	4	5	6	100	0	300
$b_j$	350	50	50	450	200	

То есть клетки  $A_3B_2$  и  $A_4B_3$  мы сделали базисными с перевозкой 0.

## б. Метод минимального элемента

Дано

ПО\ПН	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$a_i$
$A_1$	4	3	3	3	0	250
$A_2$	4	5	4	4	0	150
$A_3$	5	3	3	6	0	50
$A_4$	5	4	3	5	0	350
$A_5$	4	5	6	5	0	300
$b_j$	350	50	50	450	200	

Метод минимального элемента

ПО\ПН	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$a_i$
$A_1$	4	3	3	3	0	250
$A_2$	4	5	4	4	0	150
$A_3$	5	3	3	6	0	50
$A_4$	5	4	3	5	0	350
$A_5$	4	5	6	5	0	300
$b_j$	350	50	50	450	200	

$$f = 3650$$

Алгоритм такой же как и в прошлом задании.

$$f = 3 * 50 + 3 * 50 + 3 * 150 + 4 * 150 + 0 * 50 + 5 * 300 + 0 * 50 + 4 * 200 + 0 * 100 = 3650$$

↓

$$f = 3650$$

Стоит также отметить, что мы получили невырожденный допустимый план, так как количество базисных клеток совпало с  $M + N - 1 = 5 + 5 - 1 = 9$ .

## с. Метод Фогеля

Дано

ПОЛН	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$a_i$
$A_1$	4	3	3	3	0	250
$A_2$	4	5	4	4	0	150
$A_3$	5	3	3	6	0	50
$A_4$	5	4	3	5	0	350
$A_5$	4	5	6	5	0	300
$b_j$	350	50	50	450	200	

Метод Фогеля

1 итерация							Штрафы
ПОЛН	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$a_i$	
$A_1$	4	3	3	3	0	250	0
$A_2$	4	5	4	4	0	150	0
$A_3$	5	3	3	6	0	50	0
$A_4$	5	4	50	5	0	350	1
$A_5$	4	5	6	5	0	300	1
$b_j$	350	50	50	450	200		
Штрафы	0	0	0	1	0		

Алгоритм такой же как и в прошлом задании.

2 итерация							Штрафы
ПОЛН	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$a_i$	
$A_1$	4	3	3	3	0	250	0,0
$A_2$	4	5	4	4	0	150	0,0
$A_3$	5	50	3	6	0	50	0,2
$A_4$	5	4	50	5	0	350	1,1
$A_5$	4	5	6	5	0	300	1,1
$b_j$	350	50	50	450	200		
Штрафы	0,0	0,0	0,-	1,1	0,0		

3 итерация							Штрафы
ПО\ПН	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$a_i$	
$A_1$	4	3	3	<u>3</u> 250	0	250	0,0,1
$A_2$	4	5	4	4	0	150	0,0,0
$A_3$	5	3	3	6	0	50	0,2,-
$A_4$	5	4	3	5	0	350	1,1,0
$A_5$	4	5	6	5	0	300	1,1,1
$b_j$	350	50	50	450	200		
Штрафы	0,0,0	0,0,-	0,-	1,1,1	0,0,0		

4 итерация							Штрафы
ПО\ПН	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$a_i$	
$A_1$	4	3	3	<u>3</u> 250	0	250	0,0,1,-
$A_2$	<u>4</u>	5	4	<u>4</u>	0	150	0,0,0,0
$A_3$	5	3	3	6	0	50	0,2,-
$A_4$	5	4	3	5	0	350	1,1,0,0
$A_5$	<u>4</u> 300	5	6	5	0	300	1,1,1,1
$b_j$	350	50	50	450	200		
Штрафы	0,0,0,0	0,0,-	0,-	1,1,1,1	0,0,0,0		

5 итерация							Штрафы
ПО\ПН	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$a_i$	
$A_1$	4	3	3	3	0	250	0,0,1,-
$A_2$	4	5	4	4	0	150	0,0,0,0,0
$A_3$	5	3	3	6	0	50	0,2,-
$A_4$	5	4	3	5	0	350	1,1,0,0,0
$A_5$	4	5	6	5	0	300	1,1,1,1
$b_j$	350	50	50	450	200		
Штрафы	0,0,0,0,1	0,0,-	0,-	1,1,1,1,1	0,0,0,0,0		

6 итерация							Штрафы
ПО\ПН	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$a_i$	
$A_1$	4	3	3	3	0	250	0,0,1,-
$A_2$	4	5	4	4	0	150	0,0,0,0,0,-
$A_3$	5	3	3	6	0	50	0,2,-
$A_4$	5	4	3	5	0	350	1,1,0,0,0,0
$A_5$	4	5	6	5	0	300	1,1,1,1
$b_j$	350	50	50	450	200		
Штрафы	0,0,0,0,1,5	0,0,-	0,-	1,1,1,1,1,5	0,0,0,0,0,0		

7 итерация							Штрафы
ПОЛН	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$\alpha_i$	
$A_1$	4	3	3	3	0	250	0,0,1,-
$A_2$	4	5	4	4	0	150	0,0,0,0,0,-
$A_3$	5	3	3	6	0	50	0,2,-
$A_4$	5	4	3	5	0	350	1,1,0,0,0,0,5
$A_5$	4	5	6	5	0	300	1,1,1,1
$b_j$	350	50	50	450	200		
Штрафы	0,0,0,0,1,5,-	0,0,-	0,-	1,1,1,1,1,5	0,0,0,0,0,0,0		

8 итерация							Штрафы
ПОЛН	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$\alpha_i$	
$A_1$	4	3	3	3	0	250	0,0,1,-
$A_2$	4	5	4	4	0	150	0,0,0,0,0,-
$A_3$	5	3	3	6	0	50	0,2,-
$A_4$	5	4	3	5	0	350	1,0,0,0,0,5,
$A_5$	4	5	6	5	0	300	1,1,1,1
$b_j$	350	50	50	450	200		
Штрафы	0,0,0,0,1,5,-	0,0,-	0,-	1,1,1,1,1,5,-	0,0,0,0,0,0		

После 8 итераций мы получили следующий результат:

Результат вычислений						
ПОЛН	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$a_i$
$A_1$	4	3	3	3	0	250
$A_2$	4	5	4	4	0	150
$A_3$	5	3	3	6	0	50
$A_4$	5	4	3	5	0	350
$A_5$	4	5	6	5	0	300
$b_j$	350	50	50	450	200	

$$f = 3350$$

$$f = 3 * 250 + 4 * 150 + 3 * 50 + 5 * 50 + 3 * 50 + 5 * 50 + 0 * 200 + 4 * 300 = 3350$$

↓

$$f = 3350$$

Стоит также отметить, что мы получили вырожденный допустимый план, так как количество базисных клеток не совпало с  $M + N - 1 = 5 + 5 - 1 = 9$ , а базисных клеток у нас 8.

Сведём этот план к невырожденному. В итоге получаем следующий результат:

<i>Результат вычислений (невырожденный)</i>						
<i>ПО\ПН</i>	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$a_i$
$A_1$	4	3	3	3	0	250
$A_2$	4	5	4	4	0	150
$A_3$	5	3	3	6	0	50
$A_4$	5	4	3	5	0	350
$A_5$	4	5	6	5	0	300
$b_j$	350	50	50	450	200	

То есть клетку  $A_3B_3$  мы сделали базисной с перевозкой 0.



## д. Метод потенциалов

**Дано**

ПОЛН	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$a_i$
$A_1$	4	3	3	3	0	250
$A_2$	4	5	4	4	0	150
$A_3$	5	3	3	6	0	50
$A_4$	5	4	3	5	0	350
$A_5$	4	5	6	5	0	300
$b_j$	350	50	50	450	200	

**Начальный допустимый план (метод Фогеля)**

ПОЛН	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$a_i$
$A_1$	4	3	3	3	0	250
$A_2$	4	5	4	4	0	150
$A_3$	5	3	3	6	0	50
$A_4$	5	4	3	5	0	350
$A_5$	4	5	6	5	0	300
$b_j$	350	50	50	450	200	

$$f = 3350$$

**Метод потенциалов**

ПОЛН	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$a_i$	$\alpha_i$
$A_1$	4	3	3	3	0	250	0
$A_2$	4	5	4	4	0	150	1
$A_3$	5	3	3	6	0	50	2
$A_4$	5	4	3	5	0	350	2
$A_5$	4	5	6	5	0	300	1
$b_j$	350	50	50	450	200		
$\beta_j$	3	1	1	3	-2		

Пусть  $\alpha_1 = 0$

Проверим, является ли наш допустимый план оптимальным. Пусть  $\alpha_1 = 0$ , тогда мы получим соответствующие значения для платежей  $\alpha_i$  и  $\beta_j$ .

$$\begin{array}{lll}
 \alpha_1 + \beta_1 = 3 \leq 4 & (c_{11}) & \alpha_1 + \beta_2 = 1 \leq 3 & (c_{12}) & \alpha_1 + \beta_3 = 1 \leq 3 & (c_{13}) \\
 \alpha_1 + \beta_5 = -2 \leq 0 & (c_{15}) & \alpha_2 + \beta_1 = 4 \leq 4 & (c_{21}) & \alpha_2 + \beta_2 = 2 \leq 5 & (c_{22}) \\
 \alpha_2 + \beta_3 = 2 \leq 4 & (c_{23}) & \alpha_2 + \beta_5 = -1 \leq 0 & (c_{25}) & \alpha_3 + \beta_1 = 5 \leq 5 & (c_{31}) \\
 \alpha_3 + \beta_4 = 5 \leq 6 & (c_{34}) & \alpha_3 + \beta_5 = 0 \leq 0 & (c_{35}) & \alpha_4 + \beta_2 = 3 \leq 4 & (c_{42}) \\
 \alpha_5 + \beta_2 = 2 \leq 5 & (c_{52}) & \alpha_5 + \beta_3 = 2 \leq 6 & (c_{53}) & \alpha_5 + \beta_4 = 4 \leq 5 & (c_{54}) \\
 \alpha_5 + \beta_5 = -1 \leq 0 & (c_{55}) & & & & 
 \end{array}$$

Получили, что во всех свободных клетках выполняется условие  $c_{ij} \geq s_{ij}$ , следовательно наш план является оптимальным.

Возьмём начальный план из метода северо-западного угла и сделаем 2 итерации.

**Метод северо-западного угла**

ПО/ПН	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$a_i$
$A_1$	250	4	3	3	0	250
$A_2$	100	50	5	4	0	150
$A_3$		0	50	3	6	50
$A_4$		5	4	0	350	350
$A_5$		4	5	6	5	300
$b_j$	350	50	50	450	200	

**Метод потенциалов**

1 итерация								
ПО/ПН	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$a_i$	$\alpha_i$	
$A_1$	250	<div><div>4</div><div>-</div><div>3</div></div>	<div><div>3</div><div>-</div><div>3</div></div>	<div><div>3</div><div>+</div><div>3</div></div>	0	250	0	
$A_2$	100	<div><div>4</div><div>+</div><div>50</div></div>	<div><div>5</div><div>-</div><div>3</div></div>	<div><div>4</div><div>-</div><div>3</div></div>	0	150	0	
$A_3$		<div><div>5</div><div>0</div><div>3</div></div>	<div><div>3</div><div>+</div><div>50</div></div>	<div><div>3</div><div>-</div><div>3</div></div>	0	50	-2	
$A_4$		<div><div>5</div><div>-</div><div>4</div></div>	<div><div>3</div><div>+</div><div>0</div></div>	<div><div>3</div><div>-</div><div>350</div></div>	0	350	-2	
$A_5$		<div><div>4</div><div>-</div><div>5</div></div>	<div><div>6</div><div>-</div><div>3</div></div>	<div><div>5</div><div>+</div><div>100</div></div>	0	200	-2	
$b_j$	350	50	50	450	200			
$\beta_j$	4	5	5	7	2			

Пусть  $\alpha_1 = 0$ . Находим потенциалы  $\alpha_i$  и  $\beta_j$ .

Проверим, будет ли являться наш план оптимальным:

$$A_1B_2 : 0 + 5 = 5 > 3 \rightarrow v_{12} = 0 + 5 - 3 = 2$$

$$A_1B_3 : 0 + 5 = 5 > 3 \rightarrow v_{13} = 0 + 5 - 3 = 2$$

$$A_1B_4 : 0 + 7 = 7 > 3 \rightarrow v_{14} = 0 + 7 - 3 = 4$$

$$A_1B_5 : 0 + 2 = 2 > 0 \rightarrow v_{15} = 0 + 2 - 0 = 2$$

$$A_2B_3 : 0 + 5 = 5 > 4 \rightarrow v_{23} = 0 + 5 - 4 = 1$$

$$A_2B_4 : 0 + 7 = 7 > 4 \rightarrow v_{24} = 0 + 7 - 4 = 3$$

$$A_2B_5 : 0 + 2 = 2 > 0 \rightarrow v_{25} = 0 + 2 - 0 = 2$$

$$A_3B_1 : -2 + 4 = 2 \leq 5$$

$$A_3B_4 : -2 + 7 = 5 \leq 6$$

$$A_3B_5 : -2 + 2 = 0 \leq 0$$

$$A_4B_1 : -2 + 4 = 2 \leq 5$$

$$A_4B_2 : -2 + 5 = 3 \leq 4$$

$$A_4B_5 : -2 + 2 = 0 \leq 0$$

$$A_5B_1 : -2 + 4 = 2 \leq 4$$

$$A_5B_2 : -2 + 5 = 3 \leq 5$$

$$A_5B_3 : -2 + 5 = 3 \leq 6$$

$$\max \{2, 2, 4, 2, 1, 3, 2\} = 4$$

Следовательно выбираем свободную клетку  $A_1B_4$ , так как она имеет максимальный штраф и строим из неё цикл.

Цикл:  $A_1B_4 \rightarrow A_1B_1 \rightarrow A_2B_1 \rightarrow A_2B_2 \rightarrow A_3B_2 \rightarrow A_3B_3 \rightarrow A_4B_3 \rightarrow A_4B_4$

Максимальное количество груза, которое мы можем перебросить по этому циклу – 50. Наша целевая функция изменится на следующее значение:

$$\delta f = 50 * [(3 + 4 + 3 + 3) - (4 + 5 + 3 + 5)] = -200$$

В результате после 1 итерации мы получаем следующий план:

Результат 1 итерации						
ПО/ПН	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$a_i$
$A_1$	4 <b>200</b>	3	3	3 <b>50</b>	0	250
$A_2$	4 <b>150</b>	5	4	4	0	150
$A_3$	5	3 <b>50</b>	3 <b>0</b>	6	0	50
$A_4$	5	4	3 <b>50</b>	5 <b>300</b>	0	350
$A_5$	4	5	6	5 <b>100</b>	0 <b>200</b>	300
$b_j$	350	50	50	450	200	

$A_2B_2$  стала свободной клеткой, а  $A_1B_4$  стала базисной клеткой. Переходим ко 2 итерации.

2 итерация							
ПО/ПН	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$a_i$	$\alpha_i$
$A_1$	4 <b>200</b>	3 -	3 -	3 <b>50</b>	0 +	250	0
$A_2$	4 <b>150</b>	5 	4 	4 	0 	150	0
$A_3$	5 	3 <b>50</b>	3 <b>0</b>	6 	0 	50	2
$A_4$	5 	4 	3 <b>50</b>	5 <b>300</b>	0 	350	2
$A_5$	4 + <b>200</b>	5 -	6 -	5 <b>100</b>	0 - <b>200</b>	300	2
$b_j$	350	50	50	450	200		
$\beta_j$	4	1	1	3	-2		

Пусть  $\alpha_1 = 0$ . Находим потенциалы  $\alpha_i$  и  $\beta_j$ .

Проверим, будет ли являться наш план оптимальным:

$$A_1B_2 : 0 + 1 = 1 \leq 3$$

$$A_1B_3 : 0 + 1 = 1 \leq 3$$

$$A_1B_5 : 0 - 2 = -2 \leq 0$$

$$A_2B_2 : 0 + 1 = 1 \leq 5$$

$$A_2B_3 : 0 + 1 = 1 \leq 4$$

$$A_2B_4 : 0 + 3 = 3 \leq 4$$

$$A_2B_5 : 0 - 2 = -2 \leq 0$$

$$A_3B_1 : 2 + 4 = 6 > 5 \rightarrow v_{31} = 2 + 4 - 5 = 1$$

$$A_3B_4 : 2 + 3 = 5 \leq 6$$

$$A_3B_5 : 2 - 2 = 0 \leq 0$$

$$A_4B_1 : 2 + 4 = 6 > 5 \rightarrow v_{41} = 2 + 4 - 5 = 1$$

$$A_4B_2 : 2 + 1 = 3 \leq 4$$

$$A_4B_5 : 2 - 2 = 0 \leq 0$$

$$A_5B_1 : 2 + 4 = 6 > 4 \rightarrow v_{51} = 2 + 4 - 4 = 2$$

$$A_5B_2 : 2 + 1 = 3 \leq 5$$

$$A_5B_3 : 2 + 1 = 3 \leq 6$$

$$\max \{1, 1, 2\} = 2$$

Следовательно выбираем свободную клетку  $A_5B_1$ , так как она имеет максимальный штраф и строим из неё цикл.

$$\text{Цикл: } A_5B_1 \rightarrow A_1B_1 \rightarrow A_1B_4 \rightarrow A_5B_4$$

Максимальное количество груза, которое мы можем перебросить по этому циклу – 100. Наша целевая функция изменится на следующее значение:

$$\delta f = 100 * [(3 + 4) - (4 + 5)] = -200$$

В результате после 2 итерации мы получаем следующий план:

Результат 2 итерации						
ПОПН	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$a_i$
$A_1$	4 <b>100</b>	3	3	3 <b>150</b>	0	250
$A_2$	4 <b>150</b>	5	4	4	0	150
$A_3$	5 <b>50</b>	3 <b>0</b>	3	6	0	50
$A_4$	5	4	3 <b>50</b>	5 <b>300</b>	0	350
$A_5$	4 <b>100</b>	5	6	5 <b>200</b>	0	300
$b_j$	350	50	50	450	200	

$$f = 3650$$

$A_5B_4$  стала свободной клеткой, а  $A_5B_1$  стала базисной клеткой.  
Значение целевой функции после двух итераций стало:

$$f = 4050 - (200 + 200) = 3650$$