МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет информатики и прикладной математики
Кафедра прикладной математики и экономико-математических методов

ОТЧЁТ

по дисциплине:

«Теория и системы поддержки принятия решений»

на тему:

«Разностные уравнения. Задание 3»

Направление: 01.03.02
Обучающийся: Бронников Егор Игоревич
Группа: ПМ-1901

Санкт-Петербург
2022

Задача 9

Задание: Найти общее решение однородного линейного разностного уравнения:

$$u_{s+4} - 7u_{s+3} + 22u_{s+2} - 32u_{s+1} + 16u_s = 0$$

Решение:
Перепишем исходное уравнение в виде для $s \geq 4$:

$$u_s - 7u_{s-1} + 22u_{s-2} - 32u_{s-3} + 16u_{s-4} = 0$$

Для получения общего решения однородного разностного уравнения находим фундаментальную систему решений, элементы которой ищем в виде:

$$\breve{u}_s = Ch^s$$

Тогда

$$h^s - 7h^{s-1} + 22h^{s-2} - 32h^{s-3} + 16h^{s-4} = 0$$

Находим харатеристическое уравнение:

$$H(t) = h^4 - 7h^3 + 22h^2 - 32h + 16 = 0$$

Решаем уравнение, получим следующие корни: $h_1 = 1, h_2 = 2, h_3 = 2 - 2i$ $h_4 = 2 + 2i$.
Можно видеть, что у нас нет кратных корней, но есть комлексные корни.
Запишем представление комлексного числа в тригонометрической форме:

$$\hat{u}_s = r^s((C_1 + C_2)\cos(s\phi) + i(C_1 - C_2)\sin(s\phi))$$

Отсюда следует, чтобы получить действительное решение, постонные надо взять комлексно-сопряжёнными: $C_{1,2} = U(\cos\theta \pm i\sin\theta)$.
В итоге, получается:

$$\hat{u}_s = 2Ur^s\cos(s\phi + \theta)$$

где $r = 2\sqrt{2}, \phi = \dfrac{\pi}{4}$

Таким образом, общее решение будет выглядеть следующим образом:

$$\breve{u}_s = C_1 + 2^sC_2 + 2U(2\sqrt{2})^s\cos(\frac{\pi}{4}s + \theta)$$

Задача 10

Задание: Найти общее решение неоднородного линейного разностного уравнения первого порядка методом итераций и методом обратного оператора при помощи z-преобразования:

$$u_{s+1} = \frac{6}{7}u_s + \frac{s+6}{s+7}$$

Метод итераций

Пусть дано u_0:

$$u_1 = \frac{6}{7}u_0 + \frac{7}{8}$$

$$u_2 = \frac{6}{7}u_1 + \frac{8}{9} = \frac{6}{7}\left(\frac{6}{7}u_0 + \frac{7}{8}\right) + \frac{8}{9} = \left(\frac{6}{7}\right)^2 u_0 + \frac{6 \cdot 7}{7 \cdot 8} + \frac{8}{9}$$

$$u_3 = \frac{6}{7}u_2 + \frac{9}{10} = \frac{6}{7}\left(\left(\frac{6}{7}\right)^2 u_0 + \frac{6 \cdot 7}{7 \cdot 8} + \frac{8}{9}\right) + \frac{9}{10} =$$
$$= \left(\frac{6}{7}\right)^3 u_0 + \left(\frac{6}{7}\right)^2 \cdot \frac{7}{8} + \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} + \frac{9}{10}$$

$$u_4 = \frac{6}{7}u_3 + \frac{10}{11} = \frac{6}{7}\left(\left(\frac{6}{7}\right)^3 u_0 + \left(\frac{6}{7}\right)^2 \cdot \frac{7}{8} + \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} + \frac{9}{10}\right) + \frac{10}{11} =$$
$$= \left(\frac{6}{7}\right)^4 u_0 + \left(\frac{6}{7}\right)^3 \cdot \frac{7}{8} + \left(\frac{6}{7}\right)^2 \cdot \frac{8}{9} + \frac{6}{7} \cdot \frac{9}{10} + \frac{10}{11}$$

$$\ldots$$

Общая формула при $s \geq 1$:

$$u_s = \left(\frac{6}{7}\right)^s u_0 + \sum_{i=0}^{s-1} \left(\frac{6}{7}\right)^i \frac{(s-i)+6}{(s-i)+7}$$

Z-преобразование