МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет информатики и прикладной математики
Кафедра прикладной математики и экономико-математических методов

ОТЧЁТ

по дисциплине:

«Методы оптимизации»

на тему:

«Построение и решение двойственной задачи. Задание 5»

Направление: 01.03.02
Обучающийся: Бронников Егор Игоревич
Группа: ПМ-1901

Санкт-Петербург
2021

Задание 2.1

Дано

Целевая функция:
$f = -x_1 + x_2 \longrightarrow max$

Ограничения:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \geq -1 \\ -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ 3x_1 + x_2 \leq 3 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Задание

Каноническая форма прямой задачи

1. Вводим слабые переменные $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$:
$-x_1 + 2x_2 - y_1 = -1$
$-2x_1 + x_2 + y_2 = 2$
$3x_1 + x_2 + y_3 = 3$

2. Делаем правые части равенств положительными:
$x_1 - 2x_2 + y_1 = 1$
$-2x_1 + x_2 + y_2 = 2$
$3x_1 + x_2 + y_3 = 3$

Таким образом, прямая задача сведена к канонической форме.

Формулируем двойственную задачу

Функция цели:
$\phi = -\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 \longrightarrow min$

Ограничения:
$\lambda_1 - 2\lambda_2 + 3\lambda_3 \geq -1$
$-2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \geq 1$
$\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0$

Каноническая форма двойственной задачи

Функция цели:
$\phi = -\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 \longrightarrow min$

1. Вводим слабые переменные $\xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0$:
$\lambda_1 - 2\lambda_2 + 3\lambda_3 - \xi_1 = -1$
$-2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \xi_2 = 1$
$\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0$

2. Делаем правые части равенств положительными:
$-\lambda_1 + 2\lambda_2 - 3\lambda_3 + \xi_1 = 1$
$-2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \xi_2 = 1$
$\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0$

Решение двойственной задачи

Напоминание из задачи 2.1

y_2, y_3 — свободные переменные

x_1, x_2, y_1 — базисные переменные

1. Выразим базисные переменные через свободные:

$x_1 = \frac{1}{5} + \frac{y_2}{5} - \frac{y_3}{5}$

$x_2 = 2 + 2x_1 - y_2 = \frac{12}{5} - \frac{3}{5}y_2 - \frac{2}{5}y_3$

$y_1 = 5 + 3x_1 - 2y_2 = \frac{28}{5} - \frac{7}{5}y_2 - \frac{3}{5}y_3$

$$\downarrow$$

$x_1 = \frac{1}{5} + \frac{y_2}{5} - \frac{y_3}{5}$

$x_2 = \frac{12}{5} - \frac{3}{5}y_2 - \frac{2}{5}y_3$

$y_1 = \frac{28}{5} - \frac{7}{5}y_2 - \frac{3}{5}y_3$

2. Выразим функцию цели f через свободные переменные:

$f = x_1 - y_2 + 2 = \frac{11}{5} - \frac{4}{5}y_2 - \frac{y_3}{5} \longrightarrow max$

$$\downarrow$$

$f = \frac{11}{5} - \frac{4}{5}y_2 - \frac{y_3}{5} \longrightarrow max$

Из оптимального решения симплекс-методом прямой задачи видно, что переменные базисные переменные x_1, x_2 выражаются через свободные переменные y_2, y_3 следующим образом:

$x_1 = \frac{1}{5} + \frac{y_2}{5} - \frac{y_3}{5}$

$x_2 = \frac{12}{5} - \frac{3}{5}y_2 - \frac{2}{5}y_3$

Функция цели:

$f = \frac{11}{5} - \frac{4}{5}y_2 - \frac{y_3}{5} \longrightarrow max$

y_2 и y_3 входят в выражение для оптимальной функции цели прямой задачи с коэффициентами $-\frac{4}{5}$ и $-\frac{1}{5}$.

Переменные y_2 и y_3 индуцируют следующие ограничения двойственной задачи:

$$y_2 \to \lambda_2 \geq 0 \qquad y_3 \to \lambda_3 \geq 0$$

Лемма:
Если в прямой (двойственной) задаче начальная базисная переменная входит в оптимальное решение целевой функции как свободная переменная, то коэффициент при ней в целевой функции равен разности между правой и левой частями ограничения двойственной (прямой) задачи, индуцированного рассматриваемой начальной базисной переменной.

По лемме получается:

$$-\frac{4}{5} = 0 - \lambda_2 \qquad -\frac{1}{5} = 0 - \lambda_3$$

Тогда решение двойственной задачи выглядит следующим образом:
$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \frac{4}{5}, \lambda_3 = \frac{1}{5}$

Функция цели:
$\phi = -\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = \frac{8}{5} + \frac{3}{5} = \frac{11}{5}$

$$\downarrow$$

$\phi = \frac{11}{5} = 2.2$

Напоминание из задачи 2.1
$x_1 = \frac{1}{5} = 0.2$
$x_2 = \frac{12}{5} = 2.4$
$f = \frac{11}{5} = 2.2$

То есть $\phi(\Lambda^*) = f(X^*)$ и критерий оптимальности Канторовича выполняется.
Ответ: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \frac{4}{5}, \lambda_3 = \frac{1}{5}, \phi = \frac{11}{5}$

Задание 4.1

Дано

Целевая функция:
$f = 4x_1 + x_2 \longrightarrow max$

Ограничения:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \geq -8 \\ 3x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_2 \leq 8 \\ x_1 \leq 4 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Задание

Каноническая форма прямой задачи

1. Вводим слабые переменные $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0$:
$3x_1 - 2x_2 - y_1 = -8$
$3x_1 + x_2 - y_2 = 3$
$x_2 + y_3 = 8$
$x_1 + y_4 = 4$

2. Делаем правые части равенств положительными:
$-3x_1 + 2x_2 + y_1 = 8$
$3x_1 + x_2 - y_2 = 3$
$x_2 + y_3 = 8$
$x_1 + y_4 = 4$

Таким образом, прямая задача сведена к канонической форме.

Метод штрафов

Введём искусственную переменную — $r \geq 0$.

Целевая функция:
$f = 4x_1 + x_2 \longrightarrow max$

Ограничения:

$$\begin{array}{ll} -3x_1 + 2x_2 + y_1 = 8 & \to \lambda_1 \\ 3x_1 + x_2 - y_2 + r = 3 & \to \lambda_2 \\ x_2 + y_3 = 8 & \to \lambda_3 \\ x_1 + y_4 = 4 & \to \lambda_4 \end{array}$$

$x_i \geq 0 \ \forall i = \overline{1,2}; \quad y_j \geq 0 \ \forall j = \overline{1,4}$

Перепишем функцию цели:
$f = 4x_1 + x_2 - Mr = 4x_1 + x_2 - M(3 - 3x_1 - x_2 + y_2)$

$$\downarrow$$

$f = -3M + (3M + 4)x_1 + (M + 1)x_2 - My_2$

Пусть $M = 100$, тогда функция цели примет следующий вид:
$f = -300 + 304x_1 + 101x_2 - 100y_2$

Формулируем двойственную задачу

Функция цели:
$\phi = 8\lambda_1 + 3\lambda_2 + 8\lambda_3 + 4\lambda_4 - 300 \longrightarrow min$

Ограничения:
$-3\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_4 \geq 304$
$2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \geq 101$
$-\lambda_2 \geq -100$
$\lambda_1 \geq 0, \lambda_3 \geq 0, \lambda_4 \geq 0$

Решение двойственной задачи

Напоминание из задачи 4.1
Базисные переменные: y_1, x_1, x_2, y_2.
Свободные переменный: y_3, y_4, r.

БП	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	r	Своб. член	
f	0	0	0	0	1	4	100	24	
y_1	0	0	1	0	-2	3	0	4	
x_1	1	0	0	0	0	1	0	4	
x_2	0	1	0	0	1	0	0	8	
y_2	0	0	0	1	1	3	-1	17	

Таким образом, получается:
$f + y_3 + 4y_4 + 100r = 24 \quad \rightarrow \quad f = 24$
$y_1 - 2y_3 + 3y_4 = 4 \quad \rightarrow \quad y_1 = 4$
$x_1 + y_4 = 4 \quad \rightarrow \quad x_1 = 4$
$x_2 + y_3 = 8 \quad \rightarrow \quad x_2 = 8$
$y_2 + y_3 + 3y_4 - r = 17 \quad \rightarrow \quad y_2 = 17$
$y_3 = 0, y_4 = 0, r = 0$

Целевая функция прямой задачи выражается так:
$f = 24 - y_3 - 4y_4 - 100r \longrightarrow max$
Переменные y_2, y_3 и y_4 индуцируют следующие ограничения двойственной задачи:

$$y_2 \rightarrow -\lambda_2 \geq -100 \qquad y_3 \rightarrow \lambda_3 \geq 0 \qquad y_4 \rightarrow \lambda_4 \geq 0$$

Тогда по лемме:

$$0 = -100 + \lambda_2 \qquad -1 = 0 - \lambda_3 \qquad -4 = 0 - \lambda_4$$

Тогда решение двойственной задачи выглядит следующим образом:
$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 100, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = 4$

Функция цели:
$\phi = 8\lambda_1 + 3\lambda_2 + 8\lambda_3 + 4\lambda_4 - 300 = 8 * 0 + 3 * 100 + 8 * 1 + 4 * 4 - 300 = 24$

$$\downarrow$$

$\phi = 24$

Напоминание из задачи 4.1
$x_1 = 4$
$x_2 = 8$
$f = 24$

То есть $\phi(\Lambda^*) = f(X^*)$ и критерий оптимальности Канторовича выполняется.
Ответ: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 100, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = 4, \phi = 24$