



МИНОБРНАУКИ РОССИИ

**Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Факультет информатики и прикладной математики
Кафедра прикладной математики и экономико-математических
методов

ОТЧЁТ

по дисциплине:

«Методы оптимизации»

на тему:

**«Решение задачи линейного программирования
табличным симплекс-методом. Вариант 4.1»**

Направление: 01.03.02

Обучающийся: Бронников Егор Игоревич

Группа: ПМ-1901

Санкт-Петербург
2021

Дано

Целевая функция:

$$f = 4x_1 + x_2 \longrightarrow \max$$

Ограничения:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \geq -8 \\ 3x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_2 \leq 8 \\ x_1 \leq 4 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Задание

Стандартная форма

Целевая функция:

$$f = 4x_1 + x_2 \longrightarrow \max$$

Ограничения:

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ -3x_1 - x_2 \leq -3 \\ x_2 \leq 8 \\ x_1 \leq 4 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Каноническая форма

Целевая функция:

$$f = 4x_1 + x_2 \longrightarrow \max$$

Ограничения:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \geq -8 \\ 3x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_2 \leq 8 \\ x_1 \leq 4 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

1. Вводим слабые переменные $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0$:

$$3x_1 - 2x_2 - y_1 = -8$$

$$3x_1 + x_2 - y_2 = 3$$

$$x_2 + y_3 = 8$$

$$x_1 + y_4 = 4$$

2. Делаем правые части равенств положительными:

$$-3x_1 + 2x_2 + y_1 = 8$$

$$3x_1 + x_2 - y_2 = 3$$

$$x_2 + y_3 = 8$$

$$x_1 + y_4 = 4$$

Таким образом, задача сведена к канонической форме.

Матричная форма

$A \times X^T = B^T$, где:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad X = (x_1 \ x_2 \ y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4) \quad B = (8 \ 3 \ 8 \ 4)$$

Метод штрафов

Введём искусственную переменную — $r \geq 0$.

Целевая функция:

$$f = 4x_1 + x_2 \longrightarrow \max$$

Ограничения:

$$-3x_1 + 2x_2 + y_1 = 8$$

$$3x_1 + x_2 - y_2 + r = 3$$

$$x_2 + y_3 = 8$$

$$x_1 + y_4 = 4$$

$$x_i \geq 0 \quad \forall i = \overline{1, 2}; \quad y_j \geq 0 \quad \forall j = \overline{1, 4}$$

В качестве базисных переменных возьмём y_1, r, y_3, y_4 , свободные переменный — x_1, x_2, y_2 .

Выразим базисные переменные через свободные:

$$y_1 = 8 + 3x_1 - 2x_2$$

$$r = 3 - 3x_1 - x_2 + y_2$$

$$y_3 = 8 - x_2$$

$$y_4 = 4 - x_1$$

Перепишем функцию цели:

$$f = 4x_1 + x_2 - Mr = 4x_1 + x_2 - M(3 - 3x_1 - x_2 + y_2)$$

\downarrow

$$f = -3M + (3M + 4)x_1 + (M + 1)x_2 - My_2$$

Пусть $M = 1$, тогда функция цели примет следующий вид:

$$f = -3 + 7x_1 + 2x_2 - y_2$$

Перепишем функцию цели:

$$f - 7x_1 - 2x_2 + y_2 = -3$$

1 итерация

Базисные переменные: y_1, r, y_3, y_4 .

Свободные переменный: x_1, x_2, y_2 .

БП	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	r	Своб. член	
f	$\underline{-7}_{-7}$	$-2_{-7/3}$	0_0	$1_{1/3}$	0_0	0_0	$0_{-7/3}$	-3_{-7}	
y_1	$\underline{-3}_{-3}$	2_{-1}	1_0	0_1	0_0	0_0	0_{-1}	8_{-3}	$-\frac{8}{3} < 0$
r	$\underline{3}_1$	$1_{1/3}$	0_0	$-1_{-1/3}$	0_0	0_0	$1_{1/3}$	3_1	$1 - min$
y_3	$\underline{0}_0$	1_0	0_0	0_0	1_0	0_0	0_0	8_0	$\frac{8}{0} - /0 !$
y_4	$\underline{1}_1$	$0_{1/3}$	0_0	$0_{-1/3}$	0_0	1_0	$0_{1/3}$	4_1	4

Меняем свободную переменную x_1 и базисную переменную r местами.

$$x_1 \leftrightarrow r$$

2 итерация

Базисные переменные: y_1, x_1, y_3, y_4 .

Свободные переменный: x_2, y_2, r .

БП	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	r	Своб. член	
f	0_0	$\frac{1}{3}_{4/3}$	0_0	$\underline{-\frac{4}{3}}_{-4/3}$	0_0	0_{-4}	$\frac{7}{3}_{4/3}$	4_{-12}	
y_1	0_0	3_1	1_0	$\underline{-1}_{-1}$	0_0	0_{-3}	1_1	11_{-9}	$-\frac{11}{1} < 0$
x_1	1_0	$\frac{1}{3}_{1/3}$	0_0	$\underline{-\frac{1}{3}}_{-1/3}$	0_0	0_{-1}	$\frac{1}{3}_{1/3}$	1_{-3}	$-3 < 0$
y_3	0_0	1_0	0_0	$\underline{0}_0$	1_0	0_0	0_0	8_0	$\frac{8}{0} - /0 !$
y_4	0_0	$-\frac{1}{3}_{-1}$	0_0	$\frac{1}{3}_1$	0_0	1_3	$-\frac{1}{3}_{-1}$	3_9	$9 - min$

Меняем свободную переменную y_2 и базисную переменную y_4 местами.

$$y_2 \leftrightarrow y_4$$

3 итерация

Базисные переменные: y_1, x_1, y_2, y_3 .

Свободные переменный: x_2, y_4, r .

БП	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	r	Своб. член	
f	0 ₀	<u>-1</u> ₋₁	0 ₀	0 ₀	0 ₋₁	4 ₀	1 ₀	16 ₋₈	
y_1	0 ₀	<u>2</u> ₂	1 ₀	0 ₀	0 ₂	3 ₀	0 ₀	20 ₁₆	10
x_1	1 ₀	<u>0</u> ₀	0 ₀	0 ₀	0 ₀	1 ₀	0 ₀	4 ₀	$\frac{4}{0} - /0 !$
y_3	0 ₀	1 ₁	0 ₀	0 ₀	1 ₁	0 ₀	0 ₀	8 ₈	$8 - \min$
y_2	0 ₀	<u>-1</u> ₋₁	0 ₀	1 ₀	0 ₋₁	3 ₀	-1 ₀	9 ₋₈	$-9 < 0$

Меняем свободную переменну x_2 и базисную переменную y_3 местами.
 $x_2 \leftrightarrow y_3$

Оптимальное решение

Базисные переменные: y_1, x_1, x_2, y_2 .

Свободные переменный: y_3, y_4, r .

БП	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	r	Своб. член	
f	0	0	0	0	1	4	1	24	
y_1	0	0	1	0	-2	3	0	4	
x_1	1	0	0	0	0	1	0	4	
x_2	0	1	0	0	1	0	0	8	
y_2	0	0	0	1	1	3	-1	17	

Таким образом, получается:

$$f + y_3 + 4y_4 + r = 24 \rightarrow f = 24$$

$$y_1 - 2y_3 + 3y_4 = 4 \rightarrow y_1 = 4$$

$$x_1 + y_4 = 4 \rightarrow x_1 = 4$$

$$x_2 + y_3 = 8 \rightarrow x_2 = 8$$

$$y_2 + y_3 + 3y_4 - r = 17 \rightarrow y_2 = 17$$

$$y_3 = 0, y_4 = 0, r = 0$$

Ответ: $x_1 = 4, x_2 = 8, f = 24$