МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет информатики и прикладной математики
Кафедра прикладной математики и экономико-математических методов

ОТЧЁТ

по дисциплине:

«Методы оптимизации»

на тему:

«Решение задачи линейного программирования двойственным симплекс-методом. Задание 6»

Направление: 01.03.02
Обучающийся: Бронников Егор Игоревич
Группа: ПМ-1901

Санкт-Петербург
2021

Рассмотрим и решим двойственную задачу для прямой задачи 2.1.

Напоминание из задания 5

Целевая функция:
$f = -x_1 + x_2 \longrightarrow max$

Ограничения:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \geq -1 \\ -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ 3x_1 + x_2 \leq 3 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Задание

Каноническая форма прямой задачи

1. Вводим слабые переменные $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$:
$-x_1 + 2x_2 - y_1 = -1$
$-2x_1 + x_2 + y_2 = 2$
$3x_1 + x_2 + y_3 = 3$

2. Делаем правые части равенств положительными:
$x_1 - 2x_2 + y_1 = 1$
$-2x_1 + x_2 + y_2 = 2$
$3x_1 + x_2 + y_3 = 3$

Таким образом, прямая задача сведена к канонической форме.

Формулируем двойственную задачу

Функция цели:
$\phi = -\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 \longrightarrow min$

Ограничения:
$\lambda_1 - 2\lambda_2 + 3\lambda_3 \geq -1$
$-2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \geq 1$
$\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0$

Дано

Функция цели:
$\phi = -\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 \longrightarrow min$

$\lambda_1 - 2\lambda_2 + 3\lambda_3 \geq -1$
$-2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \geq 1$
$\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0$

Задание

Каноническая форма

Функция цели:
$\phi = -\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 \longrightarrow min$

1. Вводим слабые переменные $\xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0$:
$\lambda_1 - 2\lambda_2 + 3\lambda_3 - \xi_1 = -1$
$-2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \xi_2 = 1$
$\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0$

2. Делаем правые части равенств положительными:
$-\lambda_1 + 2\lambda_2 - 3\lambda_3 + \xi_1 = 1$
$-2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \xi_2 = 1$
$\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0$

Таким образом, задача сведена к канонической форме.

Отсюда получается:
$\xi_1 = 1 + \lambda_1 - 2\lambda_2 + 3\lambda_3$
$\xi_2 = -1 - 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$

Базисное решение:

$$\xi_1 = 1, \xi_2 = -1, \lambda_i = 0 \ \ \forall i = \overline{1,3}$$

которое не удовлетворяет естественным ограничениям:

$$\xi_i \geq 0 \ \ \forall i = \overline{1,2}$$

и поэтому оно не является допустимым.

Двойственный симлекс-метод

1 итерация

Базисные переменные: ξ_1, ξ_2.
Свободные переменный: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

БП	λ_1	$\boldsymbol{\lambda_2}$	λ_3	ξ_1	ξ_2	СЧ
ϕ	1 4	$\underline{-2}$ -2	-3 -2	0 0	0 2	0 -2
ξ_1	-1 -4	$\underline{2}$ 2	-3 2	1 0	0 -2	1 2
$\boldsymbol{\xi_2}$	2 $\underline{-2}$	**-1** 1	-1 $\underline{1}$	0 $\underline{0}$	1 $\underline{-1}$	-1 $\underline{1}$
		2	3			

Меняем свободную переменную λ_2 и базисную переменную ξ_2 местами.
$\lambda_2 \leftrightarrow \xi_2$

2 итерация

Базисные переменные: ξ_1, λ_2.
Свободные переменный: $\lambda_1, \lambda_3, \xi_2$.

БП	λ_1	λ_2	$\boldsymbol{\lambda_3}$	ξ_1	ξ_2	СЧ
ϕ	-3 $\frac{3}{5}$	0 0	$\underline{-1}$ -1	0 $\frac{1}{5}$	-2 $\frac{2}{5}$	2 $-\frac{1}{5}$
$\boldsymbol{\xi_1}$	3 $\underline{-\frac{3}{5}}$	0 $\underline{0}$	**-5** 1	1 $\underline{-\frac{1}{5}}$	2 $\underline{-\frac{2}{5}}$	-1 $\underline{\frac{1}{5}}$
λ_2	-2 $-\frac{3}{5}$	1 0	$\underline{1}$ 1	0 $-\frac{1}{5}$	-1 $-\frac{2}{5}$	1 $\frac{1}{5}$
			$\boldsymbol{\frac{1}{5}}$			

Меняем свободную переменную λ_3 и базисную переменную ξ_1 местами.
$\lambda_3 \leftrightarrow \xi_1$

Результаты вычислений

Базисные переменные: λ_2, λ_3.
Свободные переменный: λ_1, ξ_1, ξ_2.

БП	λ_1	λ_2	λ_3	ξ_1	ξ_2	СЧ
ϕ	$-\frac{18}{5}$	0	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{12}{5}$	$\frac{11}{5}$
λ_3	$-\frac{3}{5}$	0	1	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$
λ_2	$-\frac{7}{5}$	1	1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$

Таким образом, получается:
$\phi = \frac{11}{5}$
$\lambda_2 = \frac{4}{5}, \lambda_3 = \frac{1}{5}$
$\lambda_1 = 0, \xi_1 = 0, \xi_2 = 0$

Напоминание из задания 5

...

Тогда решение двойственной задачи выглядит следующим образом:
$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \frac{4}{5}, \lambda_3 = \frac{1}{5}$

Функция цели:
$\phi = -\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = \frac{8}{5} + \frac{3}{5} = \frac{11}{5}$

$$\downarrow$$

$\phi = \frac{11}{5} = 2.2$

Ответ: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \frac{4}{5}, \lambda_3 = \frac{1}{5}, \phi = \frac{11}{5}$