МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет информатики и прикладной математики
Кафедра прикладной математики и экономико-математических методов

ОТЧЁТ

по дисциплине:

«Теория и системы поддержки принятия решений»

на тему:

«Разностные уравнения. Задание 3»

Направление: 01.03.02
Обучающийся: Бронников Егор Игоревич
Группа: ПМ-1901

Санкт-Петербург
2022

Задача 9

Задание: Найти общее решение однородного линейного разностного уравнения:

$$u_{s+4} - 7u_{s+3} + 22u_{s+2} - 32u_{s+1} + 16u_s = 0$$

Решение:
Перепишем исходное уравнение в виде для $s \geq 4$:

$$u_s - 7u_{s-1} + 22u_{s-2} - 32u_{s-3} + 16u_{s-4} = 0$$

Для получения общего решения однородного разностного уравнения находим фундаментальную систему решений, элементы которой ищем в виде:

$$\breve{u}_s = Ch^s$$

Тогда

$$h^s - 7h^{s-1} + 22h^{s-2} - 32h^{s-3} + 16h^{s-4} = 0$$

Находим харатеристическое уравнение:

$$H(h) = h^4 - 7h^3 + 22h^2 - 32h + 16 = 0$$

Решаем уравнение, получим следующие корни: $h_1 = 1, h_2 = 2, h_3 = 2 - 2i$ $h_4 = 2 + 2i$.
Можно видеть, что у нас нет кратных корней, но есть комлексные корни.
Запишем представление комлексного числа в тригонометрической форме:

$$\hat{u}_s = r^s((C_1 + C_2)\cos(s\phi) + i(C_1 - C_2)\sin(s\phi))$$

Отсюда следует, чтобы получить действительное решение, постонные надо взять комлексно-сопряжёнными: $C_{1,2} = U(\cos\theta \pm i\sin\theta)$.
В итоге, получается:

$$\hat{u}_s = 2Ur^s\cos(s\phi + \theta)$$

где $r = 2\sqrt{2}, \phi = \dfrac{\pi}{4}$

Таким образом, общее решение будет выглядеть следующим образом:

$$\breve{u}_s = C_1 + 2^sC_2 + 2U(2\sqrt{2})^s\cos(\frac{\pi}{4}s + \theta)$$

Задача 10

Задание: Найти общее решение неоднородного линейного разностного уравнения первого порядка методом итераций и методом обратного оператора при помощи z-преобразования:

$$u_{s+1} = \frac{6}{7}u_s + \frac{s+6}{s+7}$$

Метод итераций

Пусть дано u_0:

$$u_1 = \frac{6}{7}u_0 + \frac{7}{8}$$

$$u_2 = \frac{6}{7}u_1 + \frac{8}{9} = \frac{6}{7}\left(\frac{6}{7}u_0 + \frac{7}{8}\right) + \frac{8}{9} = \left(\frac{6}{7}\right)^2 u_0 + \frac{6\cdot 7}{7\cdot 8} + \frac{8}{9}$$

$$u_3 = \frac{6}{7}u_2 + \frac{9}{10} = \frac{6}{7}\left(\left(\frac{6}{7}\right)^2 u_0 + \frac{6\cdot 7}{7\cdot 8} + \frac{8}{9}\right) + \frac{9}{10} =$$
$$= \left(\frac{6}{7}\right)^3 u_0 + \left(\frac{6}{7}\right)^2 \cdot \frac{7}{8} + \frac{6}{7}\cdot\frac{8}{9} + \frac{9}{10}$$

$$u_4 = \frac{6}{7}u_3 + \frac{10}{11} = \frac{6}{7}\left(\left(\frac{6}{7}\right)^3 u_0 + \left(\frac{6}{7}\right)^2 \cdot \frac{7}{8} + \frac{6}{7}\cdot\frac{8}{9} + \frac{9}{10}\right) + \frac{10}{11} =$$
$$= \left(\frac{6}{7}\right)^4 u_0 + \left(\frac{6}{7}\right)^3 \cdot \frac{7}{8} + \left(\frac{6}{7}\right)^2 \cdot \frac{8}{9} + \frac{6}{7}\cdot\frac{9}{10} + \frac{10}{11}$$

$$\ldots$$

Общая формула при $s \geq 1$:

$$u_s = \left(\frac{6}{7}\right)^s u_0 + \sum_{i=0}^{s-1}\left(\frac{6}{7}\right)^i \frac{(s-i)+6}{(s-i)+7}$$

Z-преобразование

1) Применим z-преобразование к рассматриваемому уравнению, заменяя u_s на $\tilde{u}(z)$, u_{s-1} на $z^{-1}(\tilde{y}(z)+y_{-1}z)$.

$$Z\{u_s\}=\tilde{u}(z)=\frac{6}{7}z^{-1}(u_{-1}z+\tilde{u}(z))+\tilde{x}(z)$$

2) Из полученного выражения выразим $\tilde{u}(z)$.

$$\tilde{u}(z)=\frac{6}{7}z^{-1}u_{-1}z+\frac{6}{7}z^{-1}\tilde{u}(z)+\tilde{x}(z)$$
$$\tilde{u}(z)-\frac{6}{7}z^{-1}\tilde{u}(z)=\frac{6}{7}u_{-1}+\tilde{x}(z)$$
$$\tilde{u}(z)(1-\frac{6}{7}z^{-1})=\frac{6}{7}u_{-1}+\tilde{x}(z)$$
$$\tilde{u}(z)=\frac{\frac{6}{7}u_{-1}+\tilde{x}(z)}{1-\frac{6}{7}z^{-1}}$$
$$\tilde{u}(z)=\frac{\frac{6}{7}u_{-1}+\tilde{x}(z)}{z^{-1}(z-\frac{6}{7})}$$
$$\tilde{u}(z)=\frac{\frac{6}{7}u_{-1}z+z\tilde{x}(z)}{z-\frac{6}{7}}$$

3) Разложим $\tilde{u}(z)$ на простые дроби.
Получившееся выражение уже является простой дробью, так что ничего делать не надо.

4) Выполним обратное z-преобразование.
Воспользуемся способом в котором коэффициенты берутся из ряда Лорана.

$$u_s=\sum_{\zeta_1=\frac{6}{7}} Res\frac{\left(\frac{6}{7}u_{-1}+\tilde{x}(z)\right)zz^{s-1}}{z-\frac{6}{7}}=\lim_{z\to\frac{6}{7}}\left(z-\frac{6}{7}\right)\frac{\frac{6}{7}u_{-1}z^s+\tilde{x}(z)z^s}{z-\frac{6}{7}}=$$

$$=\left(\frac{6}{7}\right)^{s+1}u_{-1}+\tilde{x}\left(\frac{6}{7}\right)\left(\frac{6}{7}\right)^{s}$$

где $\tilde{x}\left(\frac{6}{7}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}x_k\left(\frac{6}{7}\right)^{s-k}=\sum_{k=1}^{s}x_k\left(\frac{6}{7}\right)^{s-k}=\sum_{i=0}^{s-1}x_{s-i}\left(\frac{6}{7}\right)^{i}=\sum_{i=0}^{s-1}\frac{(s-i)+6}{(s-i)+7}\left(\frac{6}{7}\right)^{i}$

Таким образом, мы получили следующее решение:

$$u_s = \left(\frac{6}{7}\right)^{s+1} u_{-1} + \sum_{i=0}^{s-1} \frac{(s-i)+6}{(s-i)+7} \left(\frac{6}{7}\right)^{i} = \left(\frac{6}{7}\right)^{s} u_0 + \sum_{i=0}^{s-1} \frac{(s-i)+6}{(s-i)+7} \left(\frac{6}{7}\right)^{i}$$

Обратный оператор

Применим к исходному уравнению оператор сдвига на шаг назад ($\mathcal{B}$):

$$u_s = \frac{6}{7}\mathcal{B}u_s + \frac{s+6}{s+7}$$

Выразим u_s:

$$u_s - \frac{6}{7}\mathcal{B}u_s = \frac{s+6}{s+7}$$

$$\left(1 - \frac{6}{7}\mathcal{B}\right) u_s = \frac{s+6}{s+7}$$

$$u_s = \left(1 - \frac{6}{7}\mathcal{B}\right)^{-1} \frac{s+6}{s+7}$$

Воспользуемся свойством обратного оператора (разложением в ряд):

$$u_s = \left(1 + \frac{6}{7}\mathcal{B} + \left(\frac{6}{7}\right)^2 \mathcal{B}^2 + \left(\frac{6}{7}\right)^3 \mathcal{B}^3 + \ldots\right) \frac{s+6}{s+7}$$

Таким образом, мы получили следующее решение:

$$u_s = \frac{s+6}{s+7} + \frac{6(s-1)+6}{7(s-1)+7} + \left(\frac{6}{7}\right)^2 \frac{(s-2)+6}{(s-2)+7} + \ldots$$

Задача 11

Задание: Решить неоднородное разностное уравнение (решить задачу Коши):

$$y(s+2) - 9y(s+1) + 20y(s) = \cos(s) - 2^s$$
$$y(1) = y(2) = 0$$

Решение:
Составим характеристическое уравнение для однородного уравнения.
Для получения общего решения однородного разностного уравнения находим фундаментальную систему решений, элементы которой ищем в видел:

$$\breve{y}(s) = Ch^s$$

Находим харатеристическое уравнение:

$$y(s+2) - 9y(s+1) + 20y(s) = 0$$

$$H(h) = h^2 - 9h + 20 = 0$$

Решаем уравнение, получим следующие корни: $h_1 = 4$, $h_2 = 5$.
Можно видеть, что у нас нет кратных вещественных корней и нет комплексных корней, значит мы можем записать общее решение однородного уравнения:

$$\breve{y}(s) = 4^s C_1 + 5^s C_2$$

где C_1 и C_2 – произвольные константы.

Найдём первое частное решение.
Будем его искать в виде:

$$\hat{y}_1(s) = C2^s$$

Подставив такое частное решение в исходное разностное уравнение, получаем:

$$C2^{s+2} - 9C2^{s+1} + 20C2^s = -2^s$$

$$4C2^s - 18C2^s + 20C2^s = -2^s$$

Отсюда получаем, что $C = -\dfrac{1}{6}$

Найдём второе частное решение.
Будем его искать в виде:

$$\hat{y}_2(s) = A\sin(s) + B\cos(s)$$

Подставив такое частное решение в исходное разностное уравнение, получаем:

$$A\sin(s+2) + B\cos(s+2) - 9(A\sin(s+1) + B\cos(s+1)) + 20(A\sin(s) + B\cos(s)) = \cos(s)$$

$$\ldots$$

Задача 12

Задание: Модель делового цикла Самуэльсона-Хикса предполагает прямую пропорциональность объемов инвестирования приросту национального дохода (принцип акселерации), т.е. $I_t = V(X_{t-1} - X_{t-2})$, где коэффициент V $>$ 0 – фактор акселерации, I_t - величина инвестиций в период t, X_{t-1}, X_{t-2} величины национального дохода соответственно в $(t-1)$-ом и $(t-2)$-ом периодах. Предполагается также, что спрос на данном этапе C_t зависит от величины национального дохода на предыдущем этапе X_{t-1} линейным образом $Ct = aX_{t-1} + b$. Условие равенства спроса и предложения имеет вид $X_t = I_t + C_t$. Тогда приходим к уравнению Хикса:

$$X_t = (a+V)X_{t-1} - VX_{t-2} + b$$

Стационарная последовательность $X_t^* = c = const$ является решением уравнения Хикса только при $c = b(1-a)^{-1}$, множитель $(1-a)^{-1}$ называется мультипликатором Кейнса (одномерный аналог матрицы полных затрат).
Рассмотреть уравнение Хикса. Какова динамика роста национального дохода?
При $V = a = \dfrac{1}{2}, b = 1$ уравнение Хикса будет иметь вид:

$$X_t = X_{t-1} - \frac{1}{2}X_{t-2} + 1$$

Решение:
Для получения общего решения однородного разностного уравнения находим фундаментальную систему решений, элементы которой ищем в виде:

$$\breve{X}_t = Ch^t$$