



**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Федеральное государственное бюджетное образовательное**  
**учреждение высшего образования**  
**«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ**  
**ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Факультет информатики и прикладной математики  
Кафедра прикладной математики и экономико-математических методов

**ОТЧЁТ**  
по дисциплине:  
**«Теория и системы поддержки принятия решений»**  
на тему:  
**«Многокритериальная линейная оптимизация. Задание 1»**

Направление: 01.03.02

Обучающийся: Бронников Егор Игоревич

Группа: ПМ-1901

Санкт-Петербург  
2022

# Задача 1

Критерии:

$$f_1 = x_1 + x_2 + 2 \longrightarrow \max$$

$$f_2 = x_1 - x_2 + 6 \longrightarrow \max$$

Ограничения:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 0 \leq x_1 \leq 4 \\ 0 \leq x_2 \leq 2 \end{cases}$$

Найти компромиссное решение

1) Находим индивидуальные экстремальные значения рассматриваемых критериев:

$$\max f_1 = 7, \quad x_1 = 4, \quad x_2 = 1 : \quad f_2 = 9$$

$$\max f_2 = 10, \quad x_1 = 4, \quad x_2 = 0 : \quad f_1 = 6$$

2) Введём компромиссную переменную  $z$  и сформулируем неравенства для относительных отклонений:

$$f_1 : \quad x_1 + x_2 + 2 + 7z \geq 7$$

$$f_2 : \quad x_1 - x_2 + 6 + 10z \geq 10$$

$$z \geq 0$$

3) Формулируем вспомогательную целевую функцию:

$$F = z \longrightarrow \min$$

4) Решаем задачу оптимизации:

Целевая функция:

$$F = z \longrightarrow \min$$

Ограничения:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 0 \leq x_1 \leq 4 \\ 0 \leq x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 + 2 + 7z \geq 7 \\ x_1 - x_2 + 6 + 10z \geq 10 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

Её решение имеет вид:

$$z^* = 0.0588235, \quad x_1^* = 4, \quad x_2^* = 0.0588235 : \quad f_1^* = 6.58824 \quad f_2^* = 9.41177$$

Таким образом, мы получили эффективное решение. Значение  $z^*$  показывает, что относительные отклонения компромиссных значений критериев  $f_1$  и  $f_2$  от их оптимальных величин  $f_{1,max}$  и  $f_{2,max}$  не превышает 6%, что хорошо:

$$f_{1,max} = 7, \quad f_{2,max} = 10$$

**Ответ:**  $x_1^* = 4, \quad x_2^* = 0.0588235 : \quad f_1^* = 6.58824, \quad f_2^* = 9.41177$

## Задача 2

*Критерии:*

$$f_1 = x_1 + x_2 + 2 \longrightarrow \max$$

$$f_2 = x_1 - x_2 + 6 \longrightarrow \max$$

*Ограничения:*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 0 \leq x_1 \leq 4 \\ 0 \leq x_2 \leq 2 \end{cases}$$

Критерий  $f_1$  — главный и уступка  $p_1 = 10\%$

Найти решение методом последовательных уступок (методом главного критерия)

1) Находим индивидуальные экстремальные значения рассматриваемых критериев:

$$\max f_1 = 7, \quad x_1 = 4, \quad x_2 = 1 : \quad f_2 = 9$$

$$\max f_2 = 10, \quad x_1 = 4, \quad x_2 = 0 : \quad f_1 = 6$$

2) Получаем дополнительное ограничение для  $f_1$ :

$$f_1 : \quad x_1 + x_2 + 2 \geq 7 \times (1 - 0.1) = 6.3$$

3) Решаем задачу максимизации для  $f_2$  с исходными ограничениями и с дополнительным ограничением:

Целевая функция:

$$f_2 = x_1 - x_2 + 6 \longrightarrow \max$$

Ограничения:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 0 \leq x_1 \leq 4 \\ 0 \leq x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 + 2 \geq 6.3 \end{cases}$$

**Ответ:**  $x_1^* = 4$ ,  $x_2^* = 0.3$  :  $f_1^* = 6.3$ ,  $f_2^* = 9.7$

## Задача 3

*Критерии:*

$$f_1 = x_1 + x_2 + 2 \longrightarrow \max$$

$$f_2 = x_1 - x_2 + 6 \longrightarrow \max$$

*Ограничения:*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 0 \leq x_1 \leq 4 \\ 0 \leq x_2 \leq 2 \end{cases}$$

Уступка  $p_1$  для первого критерия  $f_1$  составляет 5, 10 и 15%

Уступка  $p_2$  для второго критерия  $f_2$  равна 10, 15 и 20%

*Найти решение методом последовательных уступок (случай двух критериев)*

1) Находим индивидуальные экстремальные значения рассматриваемых критериев:

$$\max f_1 = 7, \quad x_1 = 4, \quad x_2 = 1 : f_2 = 9$$

$$\max f_2 = 10, \quad x_1 = 4, \quad x_2 = 0 : f_1 = 6$$

2) При максимизации  $f_1$  уступка по  $f_2$  приводит к следующему ограничению:

$$f_2 : x_1 - x_2 + 6 \geq 10 \times (1 - p_2)$$

При максимизации  $f_2$  уступка по  $f_1$  приводит к следующему ограничению:

$$f_1 : x_1 + x_2 + 2 \geq 7 \times (1 - p_1)$$

$f_1 \rightarrow \max$ :

$p_2$ для $f_2$	$f_1$	$f_2$
0	6	10
0.03	6.3	9.7
0.05	6.5	9.5
0.08	7	9
0.1	7	9
0.15	7	9
0.2	7	9

$f_2 \rightarrow \max$ :

$p_1$ для $f_1$	$f_1$	$f_2$
0	7	9
0.05	6.65	9.35
0.1	6.3	9.7
0.15	6	10

Таблица 1. Метод последовательных уступок II

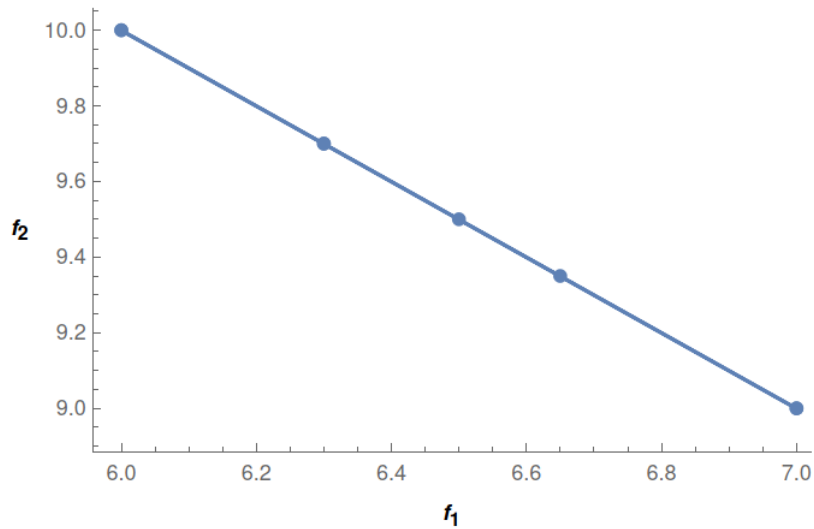


Рис. 1. График зависимости  $f_2$  от  $f_1$

Теперь лицо принимающее решение может выбрать любую точку на этом графике.

## Задача 4

*Критерии:*

$$f_1 = x_1 + x_2 + 2 \longrightarrow \max$$

$$f_2 = x_1 - x_2 + 6 \longrightarrow \max$$

*Ограничения:*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 0 \leq x_1 \leq 4 \\ 0 \leq x_2 \leq 2 \end{cases}$$

Найти решение многокритериальной задачи с двумя целевыми функциями методом равных и наименьших отклонений

1) Находим индивидуальные экстремальные значения рассматриваемых критериев:

$$\max f_1 = 7, \quad x_1 = 4, \quad x_2 = 1 : \quad f_2 = 9$$

$$\max f_2 = 10, \quad x_1 = 4, \quad x_2 = 0 : \quad f_1 = 6$$

2) Переписываем два критерия:

$$x_1 + x_2 + 2 - f_1 = 0$$

$$x_1 - x_2 + 6 - f_2 = 0$$

$f_1$  и  $f_2$  теперь рассматриваем как дополнительные переменные

3) Записываем дополнительное соотношение (условие равенства отклонений):

$$\frac{x_1 + x_2 + 2}{7} - \frac{x_1 - x_2 + 6}{10} = 0$$

4) Формулируем и решаем замещающую задачу ( $f_1$  выбираем в качестве целевой функции):

Целевая функция:

$$f_1 = x_1 + x_2 + 2 \longrightarrow \max$$

Ограничения:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 0 \leq x_1 \leq 4 \\ 0 \leq x_2 \leq 2 \\ \frac{x_1 + x_2 + 2}{7} - \frac{x_1 - x_2 + 6}{10} = 0 \end{cases}$$

**Ответ:**  $x_1^* = 4$ ,  $x_2^* = 0.5882$  :  $f_1^* = 6.5882$ ,  $f_2^* = 9.4118$

## Задача 5

*Критерии:*

$$f_1 = x_1 + x_2 + 2 \longrightarrow \max$$

$$f_2 = x_1 - x_2 + 6 \longrightarrow \max$$

*Ограничения:*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 0 \leq x_1 \leq 4 \\ 0 \leq x_2 \leq 2 \end{cases}$$

Найти решение многокритериальной задачи с двумя целевыми функциями методом весовых оценок критериев (метод экспертных оценок)

1) Задаём значения весовых коэффициентов:

$$\alpha_1 = 0.7, \alpha_2 = 0.3 : \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1$$

2) Формулируем обобщающую целевую функцию:

$$F = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 = 0.7(x_1 + x_2 + 2) + 0.3(x_1 - x_2 + 6) \longrightarrow \max$$

3) Решаем задачу оптимизации:

Целевая функция:

$$F = 0.7(x_1 + x_2 + 2) + 0.3(x_1 - x_2 + 6) \longrightarrow \max$$

Ограничения:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 0 \leq x_1 \leq 4 \\ 0 \leq x_2 \leq 2 \end{cases}$$

**Ответ:**  $F^* = 7.6$ ,  $x_1^* = 4$ ,  $x_2^* = 1$  :  $f_1^* = 7$ ,  $f_2^* = 9$

## Сводный результат

	$f_1$	$f_2$	$x_1$	$x_2$
$f_1 \longrightarrow \max$	7	9	4	1
$f_2 \longrightarrow \max$	10	6	4	0
Задача 1	6.58824	9.41177	4	0.0588235
Задача 2	6.3	9.7	4	0.3
Задача 4	6.5882	9.4118	4	0.5882
Задача 5	7	9	4	1