



**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Федеральное государственное бюджетное образовательное**  
**учреждение высшего образования**  
**«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ**  
**ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Факультет информатики и прикладной математики  
Кафедра прикладной математики и экономико-математических методов

**ОТЧЁТ**  
по дисциплине:  
**«Модели комбинаторной оптимизации»**  
на тему:  
**«Задание №1»**

Направление: 01.03.02  
Обучающийся: Бронников Егор Игоревич  
Группа: ПМ-1901

Санкт-Петербург  
2022

## Задача №1

Сформулировать точную постановку задачи разбиения множества векторов на  $k$  групп (MDMWNPP) как задачи целочисленного программирования. Каждый вектор имеет длину  $l$ , при этом  $l_1$  количественных характеристик (положительные вещественные числа), а  $l_2$  качественных ( $l_1 + l_2 = l$ ). Для каждой из качественных дано множество допустимых значений. По исходным данным рассчитываются «идеальные» суммарные характеристики для групп по количественным характеристикам и по количеству представителей в группах различных значений качественных характеристик. Целевая функция: минимизация суммы абсолютных отклонений суммарных характеристик групп от идеальных значений.

## Решение

$k$  – количество групп

$n$  – количество векторов

$l$  – количество элементов в векторе

$S = \{s_i = (s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{il}) \mid \forall i \in \{1, \dots, n\}\}$  – мультимножество

$l_1$  – количество количественных признаков в векторе

$l_2$  – количество качественных признаков в векторе

Должно выполняться следующее соотношение:  $l = l_1 + l_2$

$D_i \quad \forall i \in \{l_1 + 1, \dots, l\}$  – множество допустимых значений для  $i$ -ой качественной характеристики

$s_{ij} \in \mathbb{R} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall j \in \{1, \dots, l_1\}$  – множество допустимых значений для количественных характеристик

Разобьём понятие «идеальных» суммарных характеристик для количественных признаков и для качественных признаков.

Пусть  $\tilde{p}_1$  – это «идеальная» сумма для количественных признаков, а  $\tilde{p}_2$  – это «идеальная» сумма для качественных признаков.

Тогда «идеальная» сумма для количественных признаков может быть найдена следующим образом:

$$\tilde{p}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{l_1} s_{ij}}{k}$$

Теперь переходим к качественным признакам.

Пусть  $r = \{|D_{l_1+1}|, \dots, |D_l|\}$  – это вектор мощностей множеств  $D_i$   
 $\forall i \in \{l_1 + 1, \dots, l\}$

Введём матрицы  $I_i = \{y_{ijk}\}$  – элементами которых являются значения 0 или 1. (бинарная матрица)

$$y_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{if в } k\text{-том векторе присутствует } j\text{-тый признак} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$\forall i \in \{l_1 + 1, \dots, l\}, \forall j \in r, \forall k \in \{1, \dots, n\}$$

$\dim(I_i) = (n \times m)$ , где  $n$  – это количество векторов, а  $m$  – это мощность  $D_i$   
 $\forall i \in \{l_1 + 1, \dots, l\}$

### *Пример*

Рассмотрим следующее мультимножество:

$$S = \{(1, 2, 3, \text{red}, \text{big}, \text{triangle}), (1, 2, 3, \text{green}, \text{big}, \text{rectangle}), (2, 4, 5, \text{green}, \text{small}, \text{circle})\}$$

Пусть даны следующие множества допустимых значений качественных признаков:

$$D_1 = \{\text{red}, \text{green}, \text{yellow}\}$$

$$D_2 = \{\text{big}, \text{small}\}$$

$$D_3 = \{\text{triangle}, \text{rectangle}, \text{circle}\}$$

Составим матрицу  $I_1$  для первого качественного признака:

$$I_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Составим матрицу  $I_2$  для второго качественного признака:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Составим матрицу  $I_3$  для третьего качественного признака:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

---

Тогда можно рассчитать «идеальную» сумму для каждого  $i$ -го качественного признака:

$$\tilde{p}_{2_i} = \frac{\sum_{j=1}^{r_i} I_{ij}}{k}$$

где  $I_{ij}$  – это  $j$ -тый столбец матрицы  $I_i$

---

*Пример*

Продолжаем предыдущий пример.

$$\begin{aligned}\tilde{p}_{2_1} &= \left( \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, 0 \right) \\ \tilde{p}_{2_2} &= \left( \frac{2}{k}, \frac{1}{k} \right) \\ \tilde{p}_{2_3} &= \left( \frac{1}{k}, \frac{1}{k}, \frac{1}{k} \right)\end{aligned}$$

---

Введём переменные  $x_{ij}$ .

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } j\text{-ый вектор попал в } i\text{-ую группу} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$\forall i \in \{1, \dots, k\}, \forall j \in \{1, \dots, n\}$ , где  $n$  – это количество векторов, а  $k$  – количество групп.

Введём  $p_1$  – «фактическое» значение суммы для количественных признаков.

$$p_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{l_1} x_{ij} \cdot s_{ij}$$

Введём  $p_{2_j}$  – «фактическое» значение суммы для  $j$ -го качественного признака.

$$p_{2_j} = x_i \cdot I_j$$

$\forall i \in \{1, \dots, k\}, \forall j \in \{l_1 + 1, \dots, l\}$ , где  $k$  – количество групп.

Тогда можно составить целевую функцию.

*Целевая функция:*

$$|\tilde{p}_1 - p_1| + \sum_{i=l_1+1}^l \sum_{j=1}^{r_i} |\tilde{p}_{2_{ij}} - p_{2_{ij}}| \longrightarrow \min$$

**НО**, получившаяся целевая функция не удовлетворяет линейности, поэтому введём дополнительные переменные  $z_1$  и  $z_{2_{ij}}$ .

*Целевая функция:*

$$z_1 + \sum_{i=l_1+1}^l \sum_{j=1}^{r_i} z_{2_{ij}} \longrightarrow \min$$

*Ограничения:*

$$\begin{cases} z_1 \geq p_1 - \tilde{p}_1 \\ z_1 \geq \tilde{p}_1 - p_1 \\ z_{2_{ij}} \geq \tilde{p}_{2_{ij}} - p_{2_{ij}} \\ z_{2_{ij}} \geq p_{2_{ij}} - \tilde{p}_{2_{ij}} \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^k x_{ij} = 1 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

$$x_{ij} \in \{0; 1\} \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}, \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

$$p_1 \in \mathbb{R}, \quad z_1 \in \mathbb{R}$$

$$p_{2_{ij}} \in \mathbb{R}, \quad z_{2_{ij}} \in \mathbb{R} \quad \forall i \in \{l_1 + 1, \dots, l\}, \forall j \in \{1, \dots, r_i\}$$

## Задача №2

Сформулировать точную постановку задачи разбиения мультимножества чисел на  $k$  групп (multiway NPP) как задачи целочисленного программирования. Дано множество пар позиций чисел из мультимножества. Если пара чисел на этих позициях оказывается в одной группе, то из суммы чисел в группе вычитается среднее от пары этих чисел. Целевая функция: минимизация разности между наибольшей и наименьшей суммой чисел среди групп, при этом суммы чисел в группах находятся с учетом «штрафных баллов».

### Решение

$k$  – количество групп

$n$  – количество векторов

$S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  – мультимножество

$D = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_m, b_m)\}$  – множество пар позиций чисел из мультимножества

$m$  – мощность множества пар позиций чисел

---

### Пример

Мультимножество:

$$S = \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100\}$$

Множество пар позиций чисел из этого мультимножества:

$$D = \{(1, 2), (2, 3), (4, 5), (4, 6), (7, 8)\}$$

---

Пусть  $p_i$  – это сумма чисел в  $i$ -ой группе.  $\forall i \in \{1, \dots, k\}$

Тогда пусть  $p_{\max}$  – это максимальная сумма среди всех групп, а  $p_{\min}$  – это минимальная сумма среди всех групп.

Введём переменные  $x_{ij}$ .

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } j\text{-ое число попало в } i\text{-ую группу} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$
$$\forall i \in \{1, \dots, k\}, \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

Введём параметры  $y_{ij}$ .

$$y_{lj} = \begin{cases} 1, & \text{if в паре } i \text{ есть } j\text{-ое число} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$\forall l \in \{1, \dots, m\}, \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

Если  $\sum_{j=1}^n x_{ij} \cdot y_{lj} \geq 2$ , то значит в группе есть числа, позиции которых находятся в одной паре. В противном случае в группе нет чисел, позиции которых находятся в одной паре.

Хотелось бы сделать так:

$$\text{if } \sum_{j=1}^n x_{ij} \cdot y_{lj} \geq 2$$

**then:**

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \cdot s_j - \sum_{j=1}^n \frac{a_{lj} \cdot s_j}{2} \leq p_{\max}$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \cdot s_j - \sum_{j=1}^n \frac{a_{lj} \cdot s_j}{2} \geq p_{\min}$$

**else:**

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \cdot s_j \leq p_{\max}$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \cdot s_j \geq p_{\min}$$

$$\forall i \in \{1, \dots, k\}, \quad \forall l \in \{1, \dots, m\}, \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

Импликацию можно заменить следующим образом:

$$A_1 \Rightarrow A_2 \longrightarrow \text{NOT } A_1 \text{ OR } A_2.$$

Если рассуждать на языке алгебры логики, то имеются следующие события  $A$  и  $B$ :

$$A: \sum_{j=1}^n x_{ij} \cdot y_{lj} < 2 \text{ OR } \left( \sum_{j=1}^n x_{ij} \cdot s_j - \sum_{j=1}^n \frac{a_{lj} \cdot s_j}{2} \leq p_{\max} \text{ AND } \sum_{j=1}^n x_{ij} \cdot s_j - \sum_{j=1}^n \frac{a_{lj} \cdot s_j}{2} \geq p_{\min} \right)$$

$$B: \sum_{j=1}^n x_{ij} \cdot y_{lj} \geq 2 \text{ OR } \left( \sum_{j=1}^n x_{ij} \cdot s_j \leq p_{\max} \text{ AND } \sum_{j=1}^n x_{ij} \cdot s_j \geq p_{\min} \right)$$

Нам бы хотелось в конечном итоге, чтобы выполнялись условия:  $A \text{ OR } B$ .

*Рассмотрим более подробно событие  $A$ .*

Пусть  $M_A$  – большое число и введём параметр  $z_A \in \{0; 1\}$ , тогда событие  $A$  можно переписать следующим образом:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} \cdot y_{lj} < 2 + M_A \cdot z_A \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} \cdot s_j - \sum_{j=1}^n \frac{a_{lj} \cdot s_j}{2} \leq p_{\max} + M_A \cdot (1 - z_A) \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} \cdot s_j - \sum_{j=1}^n \frac{a_{lj} \cdot s_j}{2} \geq p_{\min} + M_A \cdot (1 - z_A) \end{cases}$$

$$\forall i \in \{1, \dots, k\}, \quad \forall l \in \{1, \dots, m\}, \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

*Рассмотрим более подробно событие  $B$ .*

Пусть  $M_B$  – большое число и введём параметр  $z_B \in \{0; 1\}$ , тогда событие  $B$  можно переписать следующим образом:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} \cdot y_{lj} \geq 2 + M_B \cdot z_B \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} \cdot s_j \leq p_{\max} + M_B \cdot (1 - z_B) \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} \cdot s_j \geq p_{\min} + M_B \cdot (1 - z_B) \end{cases}$$

$$\forall i \in \{1, \dots, k\}, \quad \forall l \in \{1, \dots, m\}, \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$



Осталось всё собрать вместе и рассмотреть событие:  $A \text{ OR } B$ .

Пусть  $M$  – большое число и введём параметр  $z \in \{0; 1\}$ , тогда событие  $A \text{ OR } B$  можно переписать следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n x_{ij} \cdot y_{lj} < 2 + M_A \cdot z_A + M \cdot z \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} \cdot s_j - \sum_{j=1}^n \frac{a_{lj} \cdot s_j}{2} \leq p_{\max} + M_A \cdot (1 - z_A) + M \cdot z \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} \cdot s_j - \sum_{j=1}^n \frac{a_{lj} \cdot s_j}{2} \geq p_{\min} + M_A \cdot (1 - z_A) + M \cdot z \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} \cdot y_{lj} \geq 2 + M_B \cdot z_B + M \cdot (1 - z) \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} \cdot s_j \leq p_{\max} + M_B \cdot (1 - z_B) + M \cdot (1 - z) \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} \cdot s_j \geq p_{\min} + M_B \cdot (1 - z_B) + M \cdot (1 - z) \end{array} \right.$$

$$\forall i \in \{1, \dots, k\}, \quad \forall l \in \{1, \dots, m\}, \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

Целевая функция:

$$p_{\max} - p_{\min} \longrightarrow \min$$

Ограничения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n x_{ij} \cdot y_{lj} < 2 + M_A \cdot z_A + M \cdot z \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} \cdot s_j - \sum_{j=1}^n \frac{a_{lj} \cdot s_j}{2} \leq p_{\max} + M_A \cdot (1 - z_A) + M \cdot z \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} \cdot s_j - \sum_{j=1}^n \frac{a_{lj} \cdot s_j}{2} \geq p_{\min} + M_A \cdot (1 - z_A) + M \cdot z \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} \cdot y_{lj} \geq 2 + M_B \cdot z_B + M \cdot (1 - z) \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} \cdot s_j \leq p_{\max} + M_B \cdot (1 - z_B) + M \cdot (1 - z) \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} \cdot s_j \geq p_{\min} + M_B \cdot (1 - z_B) + M \cdot (1 - z) \\ \sum_{i=1}^k x_{ij} = 1 \end{array} \right.$$

$$\forall i \in \{1, \dots, k\}, \quad \forall l \in \{1, \dots, m\}, \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

$$x_{ij} \in \{0; 1\} \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}, \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

$$y_{lj} \in \{0; 1\} \quad \forall l \in \{1, \dots, m\}, \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

$$z_A \in \{0; 1\} \quad z_B \in \{0; 1\} \quad z \in \{0; 1\}$$

$$p_{\min} \in \mathbb{R}, p_{\max} \in \mathbb{R}, M_A \in \mathbb{R}, M_B \in \mathbb{R}, M \in \mathbb{R}$$