МИНОБРНАУКИ РОССИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(СПбГЭУ)

Факультет информатики и прикладной математики

Кафедра прикладной математики и экономико-математических методов

КУРСОВАЯ РАБОТА

по дисциплине:
«Исследование операций»

Тема: «Моделирование оптимизационных задач средствами динамического программирования»

Направление: 01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность: Прикладная математика и информатика в экономике и управлении

Обучающийся: Бронников Егор Игоревич

Группа: ПМ-1901 Подпись: ___________________

Проверил: Чернов Виктор Петрович

Должность: профессор

Оценка: ________________________ Дата: _____________

Подпись: ________________

Санкт-Петербург
2022

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Большое количество производственных задач можно сформулировать в виде математической задачи на экстремум. К некоторым из этих задач применимы классические методы оптимизации и математического анализа. Но для значительной части задач производства и управления подобные методы не применимы или малоэффективны. Нахождение экстремума классическими методами зачастую приводит к тому, что на следующем этапе решения приходится решать новые задачи, ещё более сложные, чем поставленные первоначально. Даже в тех случаях, когда задача формулируется, как задача математического программирования, применение необходимых условий для построения оптимального решения очень часто не приводит к нужному результату. В производственных задачах оптимизации к максимуму целевой функции легче бывает подойти поэтапно, чем аналитически решить систему уравнений, определяемую возможными ограничениями поставленной задачи. И даже, в том случае, когда задача математического программирования может быть решена, проверка найденного решения может оказаться довольно сложной и тем сложнее, чем больше аргументов у функции.

Курсовая работа посвящена моделированию оптимизационных задач средствами динамического программирования.

Целью курсовой работы является обоснование метода динамического программирования при моделировании оптимизационных задач, решение задач аналитически и с помощью программных средств.

Объект исследования – оптимизационные модели, решаемые методом динамического программирования.

Предмет исследования – алгоритм метода динамического программирования.

Задачи работы:

1) изучить общий подход динамического программирования;

2) выявить оптимизационные модели, решаемые методом динамического программирования;

3) продемонстрировать применение метода динамического программирования при решение оптимизационных задач аналитически;

4) выполнить программную реализацию некоторых моделей.

Актуальность, выполненной работы можно обосновать тем, что решение ряда оптимизационных задач, например, производственного управления, можно упростить, если процесс управления осуществляется поэтапно, заменив нахождение точек экстремума целевой функции многих переменных многократным нахождением точек экстремума функции одного или небольшого числа переменных, что возможно, если воспользоваться методом динамического программирования.

Результатом работы является программа решения нескольких оптимизационных задач, таких как задача о рюкзаке, задачи о замене оборудования, задача о распределении ресурсов и инвестиций и другие.

1. МЕТОД ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

1.1 Общая постановка задачи динамического программирования

Основоположником динамического программирования можно считать русского математика А. А. Маркова. Его исследовательские работы были продолжены в 1940-х годах американским математиком А. Вальдом, одним из основателей исследовательского анализа.

Однако наиболее полно и систематизировано сформулировать основные принципы оптимального управления многошаговыми процессами впервые удалось американскому математику Р. Баллману. Задачи управления запасами были первыми задачами, которые решались этим методом.

Динамическое программирование является разделом математической науки, в основе которой лежит изучение экстремальных задач управления (методы вычислительной математики, которые применяются для поиска экстремумов функций), планирование и разработка методов их решения, в котором процесс принятия решения разбивается на отдельные этапы. Также можно сказать, что динамическое программирование – это способ решения сложных задач путём разбиения их на более простые подзадачи. Он применим к задачам с оптимальной подструктурой, выглядящим как набор перекрывающихся подзадач, сложность которых чуть меньше исходной.

В общей постановке задачу динамического программирования можно сформулировать следующим образом. Управляемая физическая система S, характеризуется определённым набором параметров. Требуется построить оптимальное решение u^*, на множестве допустимых решений, переводящее систему из начального состояния x_0 в конечное состояние x_n, обеспечив целевой функции нужный экстремум.

Алгоритмы динамического программирования используются для поиска решения не сразу для всей сложной задачи, а для поиска оптимального решения для нескольких более простых задач аналогичного содержания, на которые распадается исходная задача. Также данные алгоритмы могут применяться для подсчёта количества этих решений.

То есть в динамическом программировании задача разделяется на подзадачи, и решения этих подзадач объединяются вместе для достижения общего решения основной задачи.

Подзадачи могут быть рекурсивно вложены в более крупные задачи, тогда методы динамического программирования применимы, и существует связь между значением более крупной проблемы и значениями подзадач. В литературе такое соотношение называется уравнением Беллмана.

При использовании алгоритмического подхода «разделяй и властвуй», подзадача может быть решена несколько раз. Динамическое программирование решает каждую из этих подзадач только один раз, тем самым уменьшив количество вычислений, а затем сохраняет результат, избегая повторного вычисления на более позднем этапе, когда требуется решение для этой подзадачи.

Динамическое программирование используется для решения задач оптимизации (например, поиск кратчайшего пути), где может существовать множество решений, но интерес представляет только поиск оптимального решения.

Эти проблемы должны иметь свойства перекрывающихся подзадач. Иными словами, решаемая задача может быть разбита на подзадачи, которые многократно используется, причём рекурсивный алгоритм решает одну и ту же подзадачу много раз, а не создаёт новую подзадачу. Например, числа Фибоначчи. В конечном итоге, оптимальное решение может быть построено из оптимальных решений подзадач.

Следует отметить, что во многих случаях алгоритмы перебора могут работать быстрее, чем алгоритмы динамического программирования, но они не гарантируют оптимальное решение задачи.

1.2 Уравнение Беллмана

Согласно Беллману, основной принцип оптимальности управления многошаговыми процессами может быть словесно выражен следующим образом: «Оптимальное поведение обладает тем свойством, что, каковы бы ни были исходное состояние и первоначальное решение, последующие решения должны составлять оптимальное поведение относительно состояния, получающегося в результате первоначального решения». Иными словами, любой участок оптимальной траектории, в том числе и завершающий, также являются оптимальным, а ошибки в управлении, приводящие к отклонениям от оптимальной траектории, впоследствии не могут быть исправлены.

Рассмотрим функции $B_0(x_0), B_1(x_1), \ldots, B_n(x_n)$. Функции $B_i(x_i), i = 0,1,\ldots,n$ представляют собой максимальные значения сумм частных целевых функций $z_{i+1}(x_i, u_{i+1}) + \cdots + z_n(x_{n-1}, u_n)$, вычисляемые по всем допустимым «укороченным» наборам управлений $(u_{i+1}, \ldots, u_n)$. Иными словами, $B_i(x_i)$ – условно-оптимальное значение целевой функции при переводе системы из состояния x_i после шага с номером i в конечное состояние x_n; условность оптимального значения состоит в том, что оно относится не ко всему процессу, а к его заключительной части, и зависит от выбора состояния x_i, являющегося начальным для «укороченного» процесса. Тем самым функции $B_i(x_i)$, называются функциями Беллмана, характеризуют экстремальные свойства управляемой системы S на последних шагах процесса. При этом имеет место соотношение:

$$B_n(x_n) = 0 \tag{1}$$

Формула 1. Соотношение функции Беллмана.

Это выражение справедливо, так как состояние x_n уже является конечным, дальнейших изменений состояний системы не происходит, и соответствующий экономический эффект равен 0.

Принцип оптимальности Беллмана, лежащий в основе метода динамического программирования решений рассматриваемых задач, выражается следующим основным функциональным уравнением:

$$B_{i-1}(x_{i-1}) = \max_{u_i}\{z_i(x_{i-1}, u_i) + B_i(x_i) \ \mid \ x_i = f_i(x_{i-1}, u_i)\} \tag{2}$$

Формула 2. Функциональное уравнение Беллмана.

в котором индекс i изменяется по номерам всех шагов процесса в обратном порядке: $i = n, n-1, \dots, 2,1$;

$z_i(x_{i-1}, u_i)$ – значение целевой функции на k-м шаге.

По своей структуре функциональное уравнение Беллмана является рекуррентным. Это означается, что в последовательности функций $B_0(x_0), B_1(x_1), \dots, B_n(x_n)$ каждая предшествующая выражается через последующую.

Уравнение Беллмана было впервые применено к теории управления техническими системами и другим темам прикладной математики, а затем стало важным инструментом экономической теории.

Чтобы понять функциональное уравнение Беллмана, необходимо понять несколько основных понятий. Во-первых, любая задача оптимизации имеет какую-то цель: минимизация времени в пути, минимизация затрат, максимизация прибыли и т. д. Математическая функция, которая описывает эту задачу, называется целевой функцией.

Динамическое программирование разбивает задачу многопериодного планирования на более простые этапы в разные моменты времени. Следовательно, необходимо отслеживать, как ситуация с решениями меняется со временем. Информация о текущей ситуации, которая необходима для принятия правильного решения, называется «состоянием». Например, чтобы решить, сколько потреблять и тратить в каждый момент времени, люди должны знать (среди прочего) своё первоначальное богатство. Следовательно, богатство будет одной из их переменного состояния, но, вероятно, будут и другие.

Переменные, выбранные в любой данный момент времени, часто называю контрольными переменными. Например, учитывая их текущее состояние, люди могут решить, сколько потреблять сейчас. Выбор управляющих переменных теперь может быть эквивалентен выбору следующего состояния; в более общем случае на следующее состояние влияют другие факторы, помимо текущего контроля. Например, в простейшем случае сегодняшнее богатство (государство) и потребление (контроль) могут точно определять завтрашнее богатство (новое государство), хотя, как правило, другие факторы также влияют на завтрашнее богатство.

Подход динамического программирования описывает оптимальный план, находя правило, которое сообщает, какими должны быть элементы управления, учитывая любое возможное значение состояния. Например, потребление зависит только от богатства, мы бы искали правило потребление как функцию богатства. Такое правило, определяющее элементы управления как функцию государства, называется функцией политики.

Наконец, по определению, оптимальным правилом принятия решения является то, которое достигает наилучшего возможного значения цели. Наилучшее возможное значение цели, записанное как функция состояния, называется функцией значения.

Ричард Беллман показал, что задача динамической оптимизации в дискретном времени может быть сформулирована в рекурсивной пошаговой форме, известной как обратная индукция, записав взаимосвязь между функцией значения в одном периоде и функцией значения в следующем периоде.

Существуют условия, которым должна удовлетворять общая задача оптимизации, чтобы её можно было описать методом динамического программирования:

- задача оптимизации формулируется как итоговый многошаговый процесс управления;
- целевая функция, является аддитивной и равна сумме целевых функций каждого шага оптимизации;
- выбор управления на каждом шаге зависит только от состояния самой системы на этом шаге и не влияет на предшествующие шаги (отсутствие обратной связи);
- состояние системы S_k после каждого шага управления зависит исключительно от предшествующего состояния системы и этого управляющего

воздействия x_k(нет последействия), причём оно может быть записано в виде уравнения состояния системы;

- на каждом шаге управление x_k зависит от конечного числа управляющих переменных, а состояния системы S_k от конечного числа параметров;
- оптимальное управление представляет собой вектор X, который определяется как последовательность оптимальных пошаговых управлений, число которых и определяет количество шагов задачи.

Основные свойства задач, в которых можно применять метод динамического программирования:

- задача должна допускать интерпретацию как многошаговый процесс принятия решения;
- задача должна быть определена для любого числа шагов и иметь структуру, не зависящую от их числа;
- при рассмотрении задачи на каждом шаге должно быть задано множество параметров, описывающих состояние системы;
- выбор решения (управления) на каждом шаге не должен оказывать влияния на предыдущие решения.

2. ЗАДАЧИ, РЕШАЕМЫЕ МЕТОДОМ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Особенность производственных задач, решаемых методом динамического программирования, заключается в том, что процесс, протекающий в системе, зависит либо от времени (от этапов), либо имеет многоступенчатую структуру. Метод решения задач динамического программирования состоит в том, что оптимальное управление строится поэтапно шаг за шагом. На каждом этапе оптимизируется только один шаг, но при этом учитывается изменение всего процесса, так как управление, оптимизирующее целевую функцию только для данного шага, может привести к неоптимальному эффекту всего процесса. Управление на каждом шаге должно быть оптимальным с точки зрения процесса в целом.

В основе вычислительных алгоритмов динамического программирования лежит принцип оптимальности Р. Беллмана. (Формула 2) Данный принцип включается в себя три основных этапа:

1) предварительный этап;
2) этап условной оптимизации;
3) этап безусловной оптимизации.

Предварительный этап проводится с целью уменьшения вычислительной работы на последующем этапе решения и, по существу, заключается в нахождении всех допустимых значений управлений u_i и фазовых переменных x_i, то есть фактически область определения функций $B_i(x_i)$ или, в более сложных случаях, множеств, содержащих эти области определения. Иными словами, на данном этапе отбрасываются все заведомо неподходящие, нереализуемые значения фазовых и управляющих переменных. Проводится предварительный этап в естественном порядке от первого шага к последнему: $i = 1,2, \dots, n$, а опираются соответствующие расчёты на уравнение процесса $x_i = f_i(x_{i-1}, u_i)$. Данный этап особенно удобен при табличном способе задания функций, фигурирующих в условии задачи.

Условная оптимизация осуществляется поэтапно при движении из конечного состояния x_n системы S в первоначальное состояние x_0 путём построения на каждом этапе условно-оптимального управления и нахождения условно-оптимального значения функции цели для каждого шага.

Безусловная оптимизация осуществляется в обратном направлении: от первого шага к последнему, в результате чего находятся уже оптимальные управления на каждом шаге с точки зрения всего процесса. На втором этапе отрабатываются рекомендации, полученные на этапе условной оптимизации.

Много интересных многошаговых процессов принятия решений возникает при управлении производственными процессами. Рассмотрим некоторые из них.

Задача о замене оборудования. В настоящее время промышленные предприятия производят замену оборудования в сроки, диктуемые не на основе интуиции, а на основе математических расчётов. Управленцы промышленных предприятий должны владеть методами составления плана замены машинного оборудования, в целях оптимизации его использования. Задачу по замене оборудования можно рассматривать как многоэтапный процесс, к которому применимы методы динамического программирования. Примените методов динамического программирования позволяет максимизировать прибыль или минимизировать затраты.

Задача оптимального распределения инвестиций (ресурсов). В производственной практике очень часто возникают задачи на оптимальное распределение ресурсов между предприятиями или внутри предприятия. Кроме того, к задача оптимального распределения инвестиций можно отнести ещё ряд задач. Например, задачу о размещение по торговым и складским помещениям какого-либо товара, задачу о распределении средств между различными отраслями промышленности и т. п.

Задача о рюкзаке (Задача о загрузке транспортного средства). В рюкзак требуется погрузить несколько видом предметов, так, чтобы ценность рюкзака была максимальной. Также можно переформулировать данную задачу в задачу о загрузке транспортного средства. В транспортное средство требуется погрузить несколько видом груза, так, чтобы результат загрузки был эффективным. Например, максимизировать стоимость груза, размещённого в транспортном средстве, известна грузоподъёмность транспортного средства, вес единицы груза и соответствующая эффективность.

Вышеперечисленные задачи не составляют полный список производственных задач, решаемых динамическим программированием. Аппарат динамического программирования используется и в численных решениях классических функциональных уравнений, обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений с частными производными.

В разделе рассматриваются решения ряда производственных задач методом динамического программирования аналитически.

2.1 Задача о замене оборудования

Постановка задачи:

Разработать оптимальную стратегию замены оборудования возраста k лет в плановом периоде продолжительностью N лет, если известны:

$r(t)$ – стоимость продукции, производимой в течение года на оборудовании возраста t лет ($t = \overline{0, N}$);

$u(t)$ – ежегодные расходы, связанные с эксплуатацией оборудования возраста t лет ($t = \overline{0, N}$);

$s(t)$ – остаточная стоимость оборудования возраста t лет ($t = \overline{0, N}$);

P – стоимость нового оборудования и расходы, связанные с установкой, наладкой и запуском.

В начале каждого года имеется две возможности: сохранить оборудование и получить прибыль $r(t) - u(t)$ или заменить его и получить прибыль $s(t) - P + r(0) - u(0)$. Прибыль от использования оборудования в последнем N-м году планового периода запишется в следующем виде:

$$F_N(t) = max \begin{cases} r(t) - u(t) & - \text{сохранение} \\ s(t) - P + r(0) - u(0) & - \text{замена} \end{cases} \quad (3)$$

Формула 3. Прибыль от использования оборудования в N-м году.

А прибыль от использования оборудования в период с n-го по N-й год:

$$F_n(t) = max \begin{cases} r(t) - u(t) + F_{n+1}(t+1) & - \text{сохранение} \\ s(t) - P + r(0) - u(0) + F_{n+1}(1) & - \text{замена} \end{cases} \tag{4}$$

Формула 4. Прибыль от использования оборудования в период с n-го по N-й год.

Где $F_{n+1}(t+1)$ – прибыль от использования оборудования в период с $(n+1)$-го по N-й год.

В случае, если оба управления («сохранить» и «заменить») приводят к одной и той же прибыли, то целесообразно выбрать управление «сохранить».

Рассмотрим следующий пример. Следует найти оптимальную стратегию замены оборудования возраста 3 года на период продолжительностью 10 лет, если для каждого года планового периода известны стоимость $r(t)$ продукции, производимой с использованием этого оборудования, и эксплуатационные расходы $u(t)$. Известны также остаточная стоимость, не зависящая от возраста оборудования и составляющая 4 денежных ед., и стоимость нового оборудования, равная 18 денежных ед., не меняющаяся в плановом периоде.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$r(t)$	31	30	28	28	27	26	26	25	24	24	23
$u(t)$	8	9	9	10	10	10	11	12	14	16	18

Таблица 1. Данные для задачи о замене оборудования.

Решение:

1 этап. Условная оптимизация.

1 шаг. $n = N = 10$. Начнём процедуру условной оптимизации с последнего, десятого года планового периода. Для этого шага состояние системы: $t = 0,1,2,\dots,9,10$. Функциональное уравнение с учётом числовых данных примера принимает следующий вид:

$$F_{10}(t) = max \begin{cases} r(t) - u(t) \\ 4 - 18 + 31 - 8 \end{cases} = max \begin{cases} r(t) - u(t) & - \text{сохранение} \\ 9 & - \text{замена} \end{cases}$$

Полученные результаты для каждого $t = 0,1,2 \dots,9,10$ занесём в таблицу. (Рисунок 1)

2 шаг. $n = 9$. Проанализируем девятый год планового периода. Для второго шага возможны состояния системы $t = 0,1,2 \dots ,9,10$. Функциональное уравнение с учётом числовых данных примера принимает вид:

$$F_9(t) = max\begin{cases} r(t) - u(t) + F_{10}(t+1) \\ 4 - 18 + 31 - 8 + F_{10}(1) \end{cases}$$

$$= max\begin{cases} r(t) - u(t) + F_{10}(t+1) - \text{сохранение} \\ \qquad 9 + F_{10}(1) \qquad\qquad - \text{замена} \end{cases}$$

Полученные результаты для каждого $t = 0,1,2 \dots ,9,10$ занесём в таблицу. (Рисунок 1)

Продолжая вычисления описанным способ, постепенно заполняем всю матрицу функции Беллмана:

Матрица функции Беллмана												
F_n \ t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
10	23	21	19	**18**	17	16	15	13	10	9	9	9
9	44	40	**37**	35	33	31	30	30	30	30	30	30
8	63	**58**	54	51	49	49	49	49	49	49	49	49
7	**81**	75	70	67	67	67	67	67	67	67	67	67
6	98	91	86	**85**	84	84	84	84	84	84	84	84
5	114	107	**104**	102	101	100	100	100	100	100	100	100
4	130	**125**	121	119	117	116	116	116	116	116	116	116
3	**148**	142	138	135	134	134	134	134	134	134	134	134
2	165	159	154	152	**151**	151	151	151	151	151	151	151
1	182	175	171	**169**	168	168	168	168	168	168	168	168

Рисунок 1. Матрица функции Беллмана

2 этап. Безусловная оптимизация.

В начале исследуемого десятилетнего периода возраст оборудования составляет 3 года. Находим в таблице на пересечении строки $F_1(t)$ и столбца $t = 3$ значение максимальной прибыли – $F_1(3) = 169$. Найдём теперь оптимальную политику, обеспечивающую эту прибыль. Значение 169 принимает значение «сохранения». Это означает, что в начале первого года принимается решение о сохранении оборудования. К началу второго года возраст оборудования $3 + 1 = 4$ года. Расположенная на пересечении строки $F_2(t)$ и столбца $t = 4$ клетка принимает значения «сохранения», следовательно, и второй год нужно работать на имеющемся оборудовании. К началу третьего года возраст оборудования $4+1=5$ лет. Расположенная на пересечении строки $F_3(t)$ и столбца $t=5$ клетка принимает значение «заменить», следовательно, в начале третьего года следует заменить оборудование. К началу четвёртого года возраст оборудования составит один год. Расположенная на пересечении строки $F_4(t)$ и столбца $t=1$ клетка принимает значение «сохранить», следовательно, четвёртый год следует работать на имеющемся оборудовании. Продолжая рассуждать таким образом, последовательно, находим: $F_5(2)=104, F_6(3)=85, F_7(4)=67, F_8(1)=58, F_9(2)=37, F_{10}(3)=18$.

Выводы:

Итак, на оборудовании возраста 3 года следует работать 2 года, затем произвести замену оборудования, на новом оборудовании работать 3-й, 4-й, 5-й и 6-й годы, после чего произвести замену оборудования и на следующем оборудовании работать 7-й, 8-й, 9-й и 10-й годы планового периода. При этом прибыль будет максимальной и составит $F_1(3)=169$ денежных ед.

2.2 Задача о загрузке транспортного средства

Данная задача может быть известна также как задача о «рюкзаке».

Постановка задачи:

Дано транспортное средство грузоподъёмностью W условных ед. массы загружается предметами трёх типов $T_1, T_2, T_3, \dots, T_n$, масса w_i и стоимость c_i для каждого предмета $i=1,\dots,n$ – известны. Требуется найти такой вариант загрузки, при котором стоимость перевозимого груза была бы максимальной, вес которого не более W.

Рассмотрим следующий пример. Предположим, что самолёт загружается предметами N различных типов с весом w_j и стоимостью c_j, $j=\overline{1,N}$. Максимальная грузоподъёмность равна $W=5$. Определить максимальную стоимость груза, вес которого не более W.

Тип j	Вес w_j	Стоимость c_j
1	3	45
2	1	60
3	2	30

Таблица 2. Данные для задачи о загрузке транспортного средства

Разберём математическую постановку данной задачи. Пусть x_j – количество предметов j-го типа, загружаемых в самолёт. Тогда математическая модель имеет вид:

$$Z(X) = \sum_{j=1}^{N} c_j x_j \rightarrow max \quad (4)$$

Формула 4. Целевая функция задачи о загрузке транспортного средства.

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{N} w_j x_j \leq W \\ x_j \geq 0, \forall j = 1, \dots, N \\ x_j \in Z, \forall j = 1, \dots, N \end{gathered} \quad (5)$$

Формула 5. Ограничения задачи о загрузке транспортного средства.

Отличительными особенностями задачи динамического программирования будут:

1) Этап j связан с загрузкой предметов j-го типа в количестве x_j единиц (x_j – управляемая переменная);

2) Состояние загружаемого самолёта S_j на этапе j определяется через ограничения математической модели. В алгоритме прямой прогонки состояния:

$$S_j = \sum_{i=1}^{j} w_i x_i\,, \quad j = 1, \dots, N; \quad 0 \leq S_j \leq W; \quad S_n = W\,.$$

В алгоритме обратной прогонки:

$$S_j = \sum_{i=j}^{N} w_i x_i\,, \quad j = 1, \dots, N; \quad 0 \leq S_j \leq W; \quad S_1 = W.$$

3) Цель управления на этапе $z_j = c_j x_j$.

4) Варианты решения x_j этапа j описываются количеством предметов типа j: $x_j = 0,1, \dots, \left[\frac{W}{w_j}\right]$ – целые.

Пусть $F_j(S_j)$ – значение целевой функции (максимальная стоимость предметов, включённых на этапах j, при заданном состоянии системы S_j).

3. РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Тема курсовой работы посвящена актуальной проблеме реализации алгоритма решения производственных оптимизационных задач на основе метода динамического программирования.

В ходе выполнения курсовой работы достигнуты следующие результаты:

1) Проанализирован общий подход динамического программирования к решению некоторых типов производственных оптимизационных задач.

2) Приводится аналитическое решение представленных задач с помощью метода динамического программирования.

3) Выполнена реализация алгоритма представленных оптимизационных задач.

Основным результатом выполненной курсовой работы является программная реализация алгоритма решения производственных задач методом динамического программирования.

Результаты работы можно применить для решения практических задач управления ресурсами экономических и производственных систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ