МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет информатики и прикладной математики
Кафедра прикладной математики и экономико-математических методов

ОТЧЁТ

по дисциплине:

«Модели экономической динамики»

на тему:

«Модель Солоу с человеческим капиталом. Задание №1»

Направление: 01.03.02
Обучающийся: Бронников Егор Игоревич
Группа: ПМ-1901

Санкт-Петербург
2022

Задание

Составить модель Солоу с человеческим капиталом в относительных показателях. Выполнить качественный анализ модели.

Модель Солоу с человеческим капиталом:

Y – валовый внутренний продукт (ВВП)
K – физический капитал
H – человеческий капитал
L – трудовые ресурсы
A – технологический прогресс
s_K – доля инвестиций на физический капитал
s_H – доля инвестиций на человеческий капитал
δ – доля износа
n – постоянный прирост трудовых ресурсов
g – постоянный прирост технологического прогресса
α – эластичность выпуска по физическому капиталу
β – эластичность выпуска по человеческому капиталу

$$Y = K^{\alpha} \cdot H^{\beta} \cdot (AL)^{1-\alpha-\beta}$$
$$\dot{K} = s_K Y - \delta K$$
$$\dot{H} = s_H Y - \delta H$$
$$g_L = \frac{dL}{dt} = n$$
$$g_A = \frac{dA}{dt} = g$$
$$\alpha + \beta < 1$$

Модель Солоу с человеческим капиталом в относительных показателях:

$y = \dfrac{Y}{AL}$ – ВВП на душу населения с учётом технологического прогресса
$k = \dfrac{K}{AL}$ – фондовооружённость с учётом технологического прогресса
$h = \dfrac{H}{AL}$ – человековооружённость с учётом технологического прогресса

$$\frac{dk}{dt} = \left(\frac{K}{AL}\right)' = \frac{\dot{K}AL - K(\dot{A}L + \dot{L}A)}{(AL)^2} = \frac{\dot{K}}{AL} - \frac{K}{AL} \cdot \frac{\dot{A}}{A} - \frac{K}{AL} \cdot \frac{\dot{L}}{L} =$$
$$= \frac{s_K Y - \delta K}{AL} - kg - kn = s_K \cdot y - (n + g + \delta)k$$

$$Y = AL \cdot k^\alpha \cdot h^\beta \quad \Rightarrow \quad y = k^\alpha \cdot h^\beta$$

$$\frac{dh}{dt} = \left(\frac{H}{AL}\right)' = \frac{\dot{H}AL - H(\dot{A}L + \dot{L}A)}{(AL)^2} = \frac{\dot{H}}{AL} - \frac{H}{AL} \cdot \frac{\dot{A}}{A} - \frac{H}{AL} \cdot \frac{\dot{L}}{L} =$$
$$= \frac{s_H Y - \delta H}{AL} - hg - hn = s_H \cdot y - (n + g + \delta)h$$

Итого:

$$y = k^\alpha \cdot h^\beta$$
$$\frac{dk}{dt} = s_K \cdot y - (n + g + \delta)k$$
$$\frac{dh}{dt} = s_H \cdot y - (n + g + \delta)h$$

Качественный анализ динамики:

Получается система из двух нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{k} = s_K \cdot y_t - (n + g + \delta)k_t \\ \dot{h} = s_H \cdot y_t - (n + g + \delta)h_t \end{cases}$$

Как и в модели Солоу, каждое из уравнений имеет устойчивое состояние при нулевом спросе.

$$\dot{k} = s_K \cdot y_t - (n + g + \delta)k_t = s_K \cdot k_t^\alpha \cdot h_t^\alpha - (n + g + \delta)k_t = 0$$
$$s_K \cdot k_t^\alpha \cdot h_t^\alpha = (n + g + \delta)k_t$$
$$k_t^{1-\alpha} = \frac{s_K \cdot h_t^\beta}{n + g + \delta}$$

Преобразовав и выразив фондовооружённость, получим её значение при нулевом приросте фондовооружённости:

$$k_t = \left[\frac{s_K}{n + g + \delta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} h_t^{\frac{\beta}{1-\alpha}}$$

Аналогично можно преобразовать второе дифференциальное уравнение:

$$h_t = \left[\frac{s_H}{n+g+\delta}\right]^{\frac{1}{1-\beta}} k_t^{\frac{\alpha}{1-\beta}}$$

Система уравнений локально устойчива, имеет действительные корни и тип равновесия будет – «устойчивый узел».

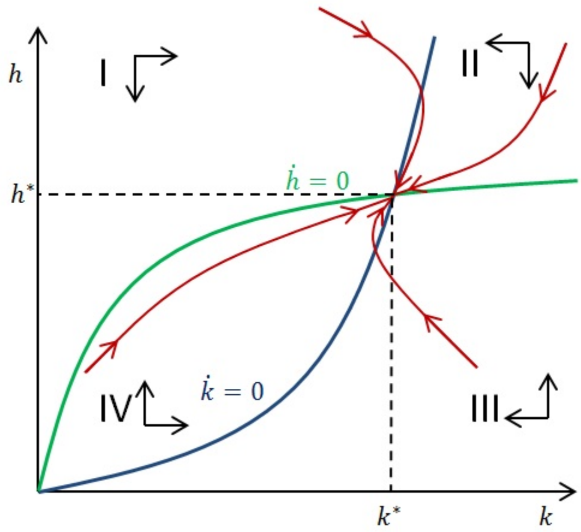

Рис. 1: Фазовая диаграмма модели

Устойчивое состояние модели можно выразить, подставляя полученные уравнения одно в другое:

$$k^* = \left(\frac{s_K^{1-\beta} \cdot s_H^{\beta}}{n+g+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}$$

$$h^* = \left(\frac{s_K^{1-\alpha} \cdot s_H^{\alpha}}{n+g+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}$$

$$y^* = \left(\frac{s_K^{\alpha} \cdot s_H^{\beta}}{(n+g+\delta)^{\alpha+\beta}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}$$

Линии $\dot{k} = 0$ – синяя и $\dot{h} = 0$ – зелёная делят диаграмму на четыре квадранта. Возможные траектории фондовооружённости показаны красным. В итоге, в модели из любой начальной точки система приходит к равновесию (k^*, h^*).