



МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет информатики и прикладной математики
Кафедра прикладной математики и экономико-математических методов

ОТЧЁТ
по дисциплине:
«Модели комбинаторной оптимизации»
на тему:
«Задание №1»

Направление: 01.03.02
Обучающийся: Бронников Егор Игоревич
Группа: ПМ-1901

Санкт-Петербург
2022

Задача №1

Сформулировать точную постановку задачи разбиения множества векторов на k групп (MDMWNPP) как задачи целочисленного программирования. Каждый вектор имеет длину l , при этом l_1 количественных характеристик (положительные вещественные числа), а l_2 качественных ($l_1 + l_2 = l$). Для каждой из качественных дано множество допустимых значений. По исходным данным рассчитываются «идеальные» суммарные характеристики для групп по количественным характеристикам и по количеству представителей в группах различных значений качественных характеристик. Целевая функция: минимизация суммы абсолютных отклонений суммарных характеристик групп от идеальных значений.

Решение

k – количество групп

n – количество векторов

l – количество элементов в векторе

$S = \{s_i = (s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{il}) \mid \forall i \in \{1, \dots, n\}\}$ – мультимножество

l_1 – количество количественных признаков в векторе

l_2 – количество качественных признаков в векторе

Должно выполняться следующее соотношение: $l = l_1 + l_2$

$D_i \quad \forall i \in \{l_1 + 1, \dots, l\}$ – множество допустимых значений для i -ой качественной характеристики

$s_{ij} \in \mathbb{R} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall j \in \{1, \dots, l_1\}$ – множество допустимых значений для количественных характеристик

Разобьём понятие «идеальных» суммарных характеристик для количественных признаков и для качественных признаков.

Пусть \tilde{p}_1 – это «идеальная» сумма для количественных признаков, а \tilde{p}_2 – это «идеальная» сумма для качественных признаков.

Тогда «идеальная» сумма для количественных признаков может быть найдена следующим образом:

$$\tilde{p}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{l_1} s_{ij}}{k}$$

Теперь переходим к качественным признакам.

Пусть $r = \{|D_{l_1+1}|, \dots, |D_l|\}$ – это вектор мощностей множеств D_i
 $\forall i \in \{l_1 + 1, \dots, l\}$

Введём матрицы $I_i = \{y_{ijk}\}$ – элементами которых являются значения 0 или 1. (бинарная матрица)

$$y_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{if в } k\text{-том векторе присутствует } j\text{-тый признак} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$\forall i \in \{l_1 + 1, \dots, l\}, \forall j \in r, \forall k \in \{1, \dots, n\}$$

$\dim(I_i) = (n \times m)$, где n – это количество векторов, а m – это мощность D_i
 $\forall i \in \{l_1 + 1, \dots, l\}$

Пример

Рассмотрим следующее мультимножество:

$$S = \{(1, 2, 3, \text{red}, \text{big}, \text{triangle}), (1, 2, 3, \text{green}, \text{big}, \text{rectangle}), (2, 4, 5, \text{green}, \text{small}, \text{circle})\}$$

Пусть даны следующие множества допустимых значений качественных признаков:

$$D_1 = \{\text{red}, \text{green}, \text{yellow}\}$$

$$D_2 = \{\text{big}, \text{small}\}$$

$$D_3 = \{\text{triangle}, \text{rectangle}, \text{circle}\}$$

Составим матрицу I_1 для первого качественного признака:

$$I_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Составим матрицу I_2 для второго качественного признака:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Составим матрицу I_3 для третьего качественного признака:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Тогда можно рассчитать «идеальную» сумму для каждого i -го качественного признака:

$$\tilde{p}_{2_i} = \frac{\sum_{j=1}^{r_i} I_{ij}}{k}$$

где I_{ij} – это j -тый столбец матрицы I_i

Пример

Продолжаем предыдущий пример.

$$\begin{aligned}\tilde{p}_{2_1} &= \left(\frac{1}{k}, \frac{2}{k}, 0 \right) \\ \tilde{p}_{2_2} &= \left(\frac{2}{k}, \frac{1}{k} \right) \\ \tilde{p}_{2_3} &= \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}, \frac{1}{k} \right)\end{aligned}$$

Введём переменные x_{ij} .

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } j\text{-ый вектор попал в } i\text{-ую группу} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$\forall i \in \{1, \dots, k\}, \forall j \in \{1, \dots, n\}$, где n – это количество векторов, а k – количество групп.

Введём p_1 – «фактическое» значение суммы для количественных признаков.

$$p_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{l_1} x_{ij} \cdot s_{ij}$$

Введём p_{2_j} – «фактическое» значение суммы для j -го качественного признака.

$$p_{2_j} = x_i \cdot I_j$$

$\forall i \in \{1, \dots, k\}, \forall j \in \{l_1 + 1, \dots, l\}$, где k – количество групп.

Тогда можно составить целевую функцию.

Целевая функция:

$$|\tilde{p}_1 - p_1| + \sum_{i=l_1+1}^l \sum_{j=1}^{r_i} |\tilde{p}_{2_{ij}} - p_{2_{ij}}| \longrightarrow \min$$

НО, получившаяся целевая функция не удовлетворяет линейности, поэтому введём дополнительные переменные z_1 и $z_{2_{ij}}$.

Целевая функция:

$$z_1 + \sum_{i=l_1+1}^l \sum_{j=1}^{r_i} z_{2_{ij}} \longrightarrow \min$$

Ограничения:

$$\begin{cases} z_1 \geq p_1 - \tilde{p}_1 \\ z_1 \geq \tilde{p}_1 - p_1 \\ z_{2_{ij}} \geq \tilde{p}_{2_{ij}} - p_{2_{ij}} \\ z_{2_{ij}} \geq p_{2_{ij}} - \tilde{p}_{2_{ij}} \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^k x_{ij} = 1 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

$$x_{ij} \in \{0; 1\} \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}, \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

$$p_1 \in \mathbb{R}, \quad z_1 \in \mathbb{R}$$

$$p_{2_{ij}} \in \mathbb{R}, \quad z_{2_{ij}} \in \mathbb{R} \quad \forall i \in \{l_1 + 1, \dots, l\}, \forall j \in \{1, \dots, r_i\}$$

Задача №2

Сформулировать точную постановку задачи разбиения мультимножества чисел на k групп (multiway NPP) как задачи целочисленного программирования. Дано множество пар позиций чисел из мультимножества. Если пара чисел на этих позициях оказывается в одной группе, то из суммы чисел в группе вычитается среднее от пары этих чисел. Целевая функция: минимизация разности между наибольшей и наименьшей суммой чисел среди групп, при этом суммы чисел в группах находятся с учетом «штрафных баллов».

Решение

...