Вероятность на конечных и счётных пространствах

Ключевые слова

случаный эксперимент, пространство элементарных событий, элементарное событие, событие, объединение событий, пересечение событий, вложение событий, дополнение событий, вероятность на счётном пространстве элементарных событий, свойства вероятности, вероятности событий в схеме равновозможных исходов

Чтение по мотивам прошедшей лекции

1. Бородин А.Н. Введение в теорию вероятностей и в математическую статистику, §§ 1-3
2. Чернова Н.И. Теория вероятностей, глава 1, § 1, глава 2, §§ 1-2
3. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения, том 1, главы 1-4
4. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей, §§ 1-3
5. Ширяев А.Н. Вероятность, Глава 1 § 1
6. Jacod J, Protter P. Probability Essentials, § 1

Чтение по мотивам будущей лекции

1. Бородин А.Н. Введение в теорию вероятностей и в математическую статистику, §§ 4,6
2. Чернова Н.И. Теория вероятностей, глава I, §§ 2-3, глава 2, §§ 3
3. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения, том 2, глава 4, §§ 1-4
4. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей, § 6
5. Ширяев А.Н. Вероятность, Глава II §§ 1-2
6. Jacod J, Protter P. Probability Essentials, § 2

Задачи

Уровень 1

1. Финансовая система государства состоит из трёх банков. Пусть $A = \{$первый банк допустил дефолт$\}$, $B = \{$второй банк допустил дефолт$\}$, $C = \{$третий банк допустил дефолт$\}$.

a. интерпретировать события $A \cup B \cup C$, $A \cup B \cap C$, $A \cap B \cup \overline{C}$, $\overline{A \cap C}$, $\overline{A \cap B} \cup C$;
b. описать с помощью символов $\cap, \cup, \ldots$ события $\{$первый банк допустит дефолт, а остальные - нет$\}$, $\{$ровно два банка допустят дефолт$\}$.

2. Мишень состоит из десяти кругов, ограниченных концентрическими окружностями с радиусами $r_1 < r_2 < ... < r_{10}$. Пусть $A = \{$стрелок попал в круг радиуса $r_i\}$. Интерпретировать события

a. $A_1 \cup A_2 \cup A_3$;
b. $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$;
c. $(A_1 \cup A_3) \cap A_6$.
d. $\overline{A}_1 \cup A_2$.
e. $\overline{A}_2 \cup A_1$.

3. Пусть $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.6$, $P(C) = 0.9$. Определить, в каких границах могут находиться

a. $P(A \cup B)$;
b. $P(A \cap C)$;
c. $P(A \cup B \cup C)$;
d. $P(B \cup C) \backslash A$.

Изобразить граничные случаи.

4. Бросаются несколько кубиков. Все возможные упорядоченные наборы считаются равновероятными. Найти вероятность того, что:

a. при броске пяти кубиков выпадет четыре пятёрки и одна тройка;
b. при броске восьми кубиков выпадет ровно три шестёрки, три двойки и две четверки;
c. при броске шести кубиков выпадет ровно три шестёрки;
d. при броске восьми кубиков выпадет ровно три шестёрки и три двойки;
e. произведение чисел, выпавших на трёх кубиках, будет чётным;
f. сумма значений на кубиках будет $k + 2$, если бросается k кубиков;
g. при пяти бросках кубика выпадет хотя бы одна двойка и хотя бы одна четвёрка.

Проверить результаты с помощью симуляций.

5. Найти вероятность получить

a. три короля, если из колоды достаётся три карты;
b. король, дама и валет, если из колоды достаётся три карты;
c. два короля и дама, если из колоды достаётся три карты;
d. три карты разных достоинств, если из колоды достаётся три карты;
e. три карты одного достоинства, если из колоды достаётся три карты;
f. три карты одного достоинства и одну другого, если из колоды достаётся четыре карты;
g. две карты одной масти и две карты другой масти, если из колоды достаётся четыре карты;

h. две карты одной масти, две карты второй масти и три карты третьей масти, если из колоды достаётся семь карт;
i. стрит-флеш, если из колоды достаётся пять карт;
j. флеш, если из колоды достаётся пять карт.

Проверить результаты с помощью симуляций.

6. В мешке лежат 8 красных, 5 зелёных и 3 жёлтых шара. Найти вероятность:

a. достать три красных шара, если из мешка достаётся три шара;
b. достать два красных и два жёлтых шара, если из мешка достаётся четыре шара;
c. достать шары всех трёх цветов, если из мешка достаётся четыре шара.

Проверить результаты с помощью симуляций.
7. На экзамен выносится 60 вопросов, в каждом билете два вопроса. Определить, какое минимальное число вопросов надо выучить, чтобы с вероятностью не менее 0.9 знать ответы на оба вопроса из билета.

8. На рейс продано 100 билетов. Во время полёта каждый пассажир может захотеть или не захотеть укрыться пледом. Считая, что все возможные наборы равновероятны, определить, сколько пледов достаточно взять на борт, чтобы с вероятностью 99% никто бы не остался обиженным. Для получения численного ответа бузет разумным использовать математические пакеты. Построить график зависимости вероятности того, что потребуется k пледов, от k.

Уровень 2

1. Доказать, что $P(A) \geqslant P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - 2$, если $(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \subset A$.

2. n студентов играют в Тайного Санту. Для этого каждый кладёт в шапку записку со своей фамилией, затем записки случайным образом раздаются участникам игры. Найти вероятность того, что никому не придётся дарить подарок самому себе. Исследовать асимптотику выражения. Rem: воспользоваться формулой включения-исключения.

3. $2n$ человек стоят в очереди за билетами в театр. Каждый билет стоит 500 рублей, при этом ровно у половины человек есть только по 500 рублей одной купюрой, а у другой половины есть только по 1000 рублей одной купюрой. Найти вероятность того, что все смогут купить билет, если в самом начале в кассе нет сдачи.

4. Для оценки численности населения города используется следующий способ. Случайным образом отбираются 1000 человек, их данные записываются, после чего люди возвращаются в город. Через некоторое время отбираются ещё 1000 человек. Пусть во второй группе оказалось 20 человек, отбиравшихся и в первый раз. Определить наиболее вероятную численность населения.

Ответы

Уровень 1

3. a. [0.6;0.9]; b. [0.2;0.3]; c. [0.9;1]; d. [0.6;0.7].
4. a. 0.00064; b. 0.00033; c. 0.05358; d. 0.00533; e. 0.875; f. $\frac{C_{k+2}^1+C_{k+2}^2}{6^k}$; g. 0.418.
5. a. 0.00018; b. 0.00290; c. 0.00109; d. 0,82824; e. 0.00235; f. 0.00922; g. 0.00013; h. 0.15607; i. 0.00002; j. 0.00198.
6. a. 0.10000; b. 0.04615; c. 0.75275.
7. 57.
8. 62.

Уровень 2

2. асимптотика: e^{-1}.
3. $\frac{1}{n+1}$.
4. 50000.