МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет информатики и прикладной математики
Кафедра прикладной математики и экономико-математических методов

ОТЧЁТ

по дисциплине:

«Теория и системы поддержки принятия решений»

на тему:

«Представление функций рядом Фурье. Задание 4»

Направление: 01.03.02
Обучающийся: Бронников Егор Игоревич
Группа: ПМ-1901

Санкт-Петербург
2022

Задача 14

Задание: Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом $2l$, заданную в интервале $(-l, l)$:

$$l = \pi, \quad f(x) = \pi + x$$

Решение:
Разложение в ряд Фурье на интервале $(-\pi, \pi)$ имеет вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos\left(\frac{\pi n x}{\pi}\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{\pi n x}{\pi}\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{\pi}\right)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{\pi}\right)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

Таким образом, подставляя исходные данные, получаем:

$$\boldsymbol{a_0} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi + x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2}{2} + \pi x\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{3\pi^2}{2} - \left(-\frac{\pi^2}{2}\right)\right) = 2\pi$$

$$\boldsymbol{a_n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi+x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{x\sin(nx)}{n} + \frac{\pi\sin(nx)}{n} + \frac{\cos(nx)}{n^2}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(2\pi \cdot \frac{\sin(\pi n)}{n} + \frac{\cos(\pi n)}{n^2} - \frac{\cos(\pi n)}{n^2}\right) = \frac{2\sin(\pi n)}{n} = 0$$

$$\boldsymbol{b_n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi+x)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x\cos(nx)}{n} - \frac{\pi\cos(nx)}{n} + \frac{\sin(nx)}{n^2}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} =$$

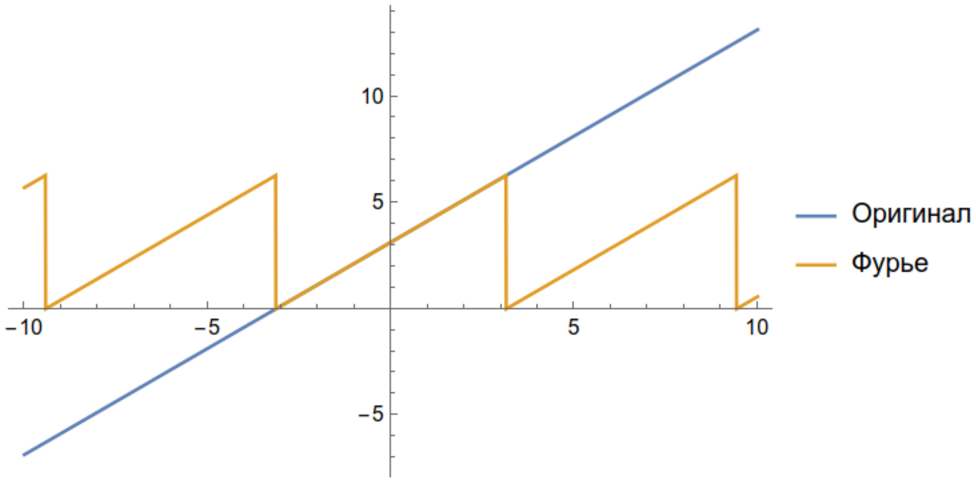
$$= \frac{1}{\pi}\left(-2\pi \cdot \frac{\cos(\pi n)}{n} + \frac{\sin(\pi n)}{n^2} + \frac{\sin(\pi n)}{n^2}\right) = -2 \cdot \frac{\cos(\pi n)}{n} = -2\frac{(-1)^n}{n}$$

Окончательно, получаем искомое разложение:

$$f(x) = \pi + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-2\frac{(-1)^n}{n} \right) \cdot \sin(nx)$$

Построим график полученного ряда и исходной функции:

```
Plot[
 {x + π, π + Sum[-2 (-1)^n/n Sin[n x], {n, 1, ∞}]},
 {x, -10, 10},
 PlotLegends → {"Оригинал", "Фурье"}
]
```



Также можно записать равенство Парсеваля. Оно в общем случае принимает следующую форму:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2\, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

где a_0, a_n, b_n – коэффициенты ряда Фурье
Если мы подставим полученные значения коэффициентов ряда Фурье, то равенство Парсеваля запишется так:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\pi + x)^2\, dx = 2\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n^2} \right)$$

Механический смысл состоит в том, что при рассмотрении любого 2π-периодического движения материальной точки энергия этого движения (определяемая интегралом от квадрата амплитуды) полностью исчерпывается энергиями состовляющих его гармоник.

Задача 15

Применим теперь дискретное преобразование Фурье:

$$f_F(y_k) = \sum_{l=0}^{N-1} f\left(\frac{l}{N}\right) \cdot e^{\dfrac{-2\pi \cdot i \cdot y_k \cdot l}{N}}$$

Получим следующий результат:

```
Clear[fourier]
```

$$\texttt{fourier[N\_, k\_] := Sum}\left[\left(\frac{l}{N} + \pi\right) * e^{\frac{-2\,\pi * k * i * l}{N}}, \{l, 0, N-1\}\right]$$

```
TrigToExp /@ fourier[7, 2] // Expand
```

$$\frac{4}{7} e^{-\frac{2 i \pi}{7}} + \frac{3}{7} e^{\frac{2 i \pi}{7}} + \frac{1}{7} e^{-\frac{4 i \pi}{7}} + \frac{6}{7} e^{\frac{4 i \pi}{7}} + \frac{5}{7} e^{-\frac{6 i \pi}{7}} + \frac{2}{7} e^{\frac{6 i \pi}{7}} + \pi + e^{-\frac{2 i \pi}{7}} \pi + e^{\frac{2 i \pi}{7}} \pi + e^{-\frac{4 i \pi}{7}} \pi + e^{\frac{4 i \pi}{7}} \pi + e^{-\frac{6 i \pi}{7}} \pi + e^{\frac{6 i \pi}{7}} \pi$$