МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет информатики и прикладной математики
Кафедра прикладной математики и экономико-математических методов

ОТЧЁТ

по дисциплине:

«Методы оптимизации»

на тему:

«Решение задачи линейного программирования двойственным симплекс-методом. Задание 6»

Направление: 01.03.02
Обучающийся: Бронников Егор Игоревич
Группа: ПМ-1901

Санкт-Петербург
2021

Рассмотрим и решим двойственную задачу для прямой задачи 4.1.

Напоминание из задания 5
Целевая функция:
$f = 4x_1 + x_2 \longrightarrow max$

Ограничения:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \geq -8 \\ 3x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_2 \leq 8 \\ x_1 \leq 4 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Задание

Каноническая форма прямой задачи

1. Вводим слабые переменные $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0$:
$3x_1 - 2x_2 - y_1 = -8$
$3x_1 + x_2 - y_2 = 3$
$x_2 + y_3 = 8$
$x_1 + y_4 = 4$

2. Делаем правые части равенств положительными:
$-3x_1 + 2x_2 + y_1 = 8$
$3x_1 + x_2 - y_2 = 3$
$x_2 + y_3 = 8$
$x_1 + y_4 = 4$

Таким образом, прямая задача сведена к канонической форме.

Метод штрафов

Введём искусственную переменную — $r \geq 0$.

Целевая функция:
$f = 4x_1 + x_2 \longrightarrow max$

Ограничения:

$$\begin{array}{ll} -3x_1 + 2x_2 + y_1 = 8 & \rightarrow \lambda_1 \\ 3x_1 + x_2 - y_2 + r = 3 & \rightarrow \lambda_2 \\ x_2 + y_3 = 8 & \rightarrow \lambda_3 \\ x_1 + y_4 = 4 & \rightarrow \lambda_4 \end{array}$$

$x_i \geq 0 \ \forall i = \overline{1,2}; \quad y_j \geq 0 \ \forall j = \overline{1,4}$

Перепишем функцию цели:
$f = 4x_1 + x_2 - Mr = 4x_1 + x_2 - M(3 - 3x_1 - x_2 + y_2)$

$$\downarrow$$

$f = -3M + (3M + 4)x_1 + (M + 1)x_2 - My_2$

Пусть $M = 100$, тогда функция цели примет следующий вид:
$f = -300 + 304x_1 + 101x_2 - 100y_2$

Формулируем двойственную задачу

Функция цели:
$\phi = 8\lambda_1 + 3\lambda_2 + 8\lambda_3 + 4\lambda_4 - 300 \longrightarrow min$

Ограничения:
$-3\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_4 \geq 304$
$2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \geq 101$
$-\lambda_2 \geq -100$
$\lambda_1 \geq 0, \lambda_3 \geq 0, \lambda_4 \geq 0$

Дано

Функция цели:
$\phi = 8\lambda_1 + 3\lambda_2 + 8\lambda_3 + 4\lambda_4 - 300 \longrightarrow min$

Ограничения:
$-3\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_4 \geq 304$
$2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \geq 101$
$-\lambda_2 \geq -100$
$\lambda_1 \geq 0, \lambda_3 \geq 0, \lambda_4 \geq 0$

Задание

Каноническая форма

1. Вводим слабые переменные $\xi_1 \geq 0$, $\xi_2 \geq 0$, $\xi_3 \geq 0$:
$-3\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_4 - \xi_1 = 304$
$2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \xi_2 = 101$
$-\lambda_2 - \xi_3 = -100$

2. Делаем правые части равенств положительными:
$-3\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_4 - \xi_1 = 304$
$2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \xi_2 = 101$
$\lambda_2 + \xi_3 = 100$

Таким образом, задача сведена к канонической форме.

Отсюда получается:
$\xi_1 = -304 - 3\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_4$
$\xi_2 = -101 + 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$
$\xi_3 = 100 - \lambda_2$

Базисное решение:

$$\xi_1 = -304, \xi_2 = -101, \xi_3 = 100, \lambda_i = 0 \ \ \forall i = \overline{1,4}$$

которое не удовлетворяет естественным ограничениям:

$$\xi_i \geq 0 \ \ \forall i = \overline{1,3}$$

и поэтому оно не является допустимым.

Двойственный симлекс-метод

1 итерация

Базисные переменные: ξ_1, ξ_2, ξ_3.
Свободные переменный: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$.

БП	λ_1	$\boldsymbol{\lambda_2}$	λ_3	λ_4	ξ_1	ξ_2	ξ_3	СЧ
ϕ	-8 $_{3}$	$\underline{-3}$ $_{-3}$	-8 $_{0}$	-4 $_{-1}$	0 $_{1}$	0 $_{0}$	0 $_{0}$	-300 $_{-304}$
$\boldsymbol{\xi_1}$	3 $_{\underline{-1}}$	**-3** $_{1}$	0 $_{\underline{0}}$	-1 $\underline{\frac{1}{3}}$	1 $\underline{-\frac{1}{3}}$	0 $_{\underline{0}}$	0 $_{\underline{0}}$	-304 $\underline{\frac{304}{3}}$
ξ_2	-2 $_{1}$	$\underline{-1}$ $_{-1}$	-1 $_{0}$	0 $-\frac{1}{3}$	0 $\frac{1}{3}$	1 $_{0}$	0 $_{0}$	-101 $-\frac{304}{3}$
ξ_3	0 $_{-1}$	$\underline{1}$ $_{1}$	0 $_{0}$	0 $\frac{1}{3}$	0 $-\frac{1}{3}$	0 $_{0}$	1 $_{0}$	100 $\frac{304}{3}$
c_k/a_{2k}	$-\frac{8}{3}$	***1***	-	4	0^+	-	-	

Меняем свободную переменную λ_2 и базисную переменную ξ_1 местами.
$\lambda_2 \leftrightarrow \xi_1$

2 итерация

Базисные переменные: ξ_2, ξ_3, λ_2.
Свободные переменный: $\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4, \xi_1$.

БП	λ_1	λ_2	λ_3	$\boldsymbol{\lambda_4}$	ξ_1	ξ_2	ξ_3	СЧ
ϕ	-11 9	0 0	-8 0	$\underline{-3}$ -3	-1 3	0 0	0 9	4 -12
λ_2	-1 -1	1 0	0 0	$\underline{\frac{1}{3}}$ $\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$ $-\frac{1}{3}$	0 0	0 -1	$\frac{304}{3}$ $\frac{4}{3}$
ξ_2	-3 -1	0 0	-1 0	$\underline{\frac{1}{3}}$ $\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$ $-\frac{1}{3}$	1 0	0 -1	$\frac{1}{3}$ $\frac{4}{3}$
$\boldsymbol{\xi_3}$	1 $\underline{-3}$	0 $\underline{0}$	0 $\underline{0}$	**-**$\frac{1}{3}$ 1	$\frac{1}{3}$ $\underline{-1}$	0 $\underline{0}$	1 $\underline{-3}$	$-\frac{4}{3}$ $\underline{4}$
c_k/a_{2k}	-11	-	-	***9***	-3	-	0^+	

Меняем свободную переменную λ_4 и базисную переменную ξ_3 местами.
$\lambda_4 \leftrightarrow \xi_3$

3 итерация

Базисные переменные: $\xi_2, \lambda_2, \lambda_4$.
Свободные переменный: $\lambda_1, \lambda_3, \xi_1, \xi_3$.

БП	λ_1	λ_2	$\boldsymbol{\lambda_3}$	λ_4	ξ_1	ξ_2	ξ_3	СЧ
ϕ	-20 -16	0 0	$\underline{-8}$ -8	0 0	-4 0	0 8	-9 8	16 -8
λ_2	0 0	1 0	$\underline{0}$ 0	0 0	0 0	0 0	-1 0	100 0
$\boldsymbol{\xi_2}$	-2 $\underline{2}$	0 $\underline{0}$	**-1** 1	0 $\underline{0}$	0 $\underline{0}$	1 $\underline{-1}$	1 $\underline{-1}$	-1 $\underline{1}$
λ_4	-3 0	0 0	$\underline{0}$ 0	1 0	-1 0	0 0	-3 0	4 0
c_k/a_{2k}	10	-	***8***	-	-	0^+	-9	

Меняем свободную переменную λ_3 и базисную переменную ξ_2 местами.
$\lambda_3 \leftrightarrow \xi_2$

Результаты вычислений

Базисные переменные: $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$.
Свободные переменный: $\lambda_1, \xi_1, \xi_2, \xi_3$.

БП	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	ξ_1	ξ_2	ξ_3	СЧ
ϕ	-4	0	0	0	-4	-8	-17	24
λ_2	0	1	0	0	0	0	-1	100
λ_3	2	0	1	0	0	-1	-1	1
λ_4	-3	0	0	1	-1	0	-3	4

Таким образом, получается:
$\phi = 24$
$\lambda_2 = 100, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = 4$
$\lambda_1 = 0, \xi_1 = 0, \xi_2 = 0, \xi_3 = 0$

Напоминание из задания 5

...

Тогда решение двойственной задачи выглядит следующим образом:
$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 100, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = 4$

Функция цели:
$\phi = 8\lambda_1 + 3\lambda_2 + 8\lambda_3 + 4\lambda_4 - 300 = 8*0 + 3*100 + 8*1 + 4*4 - 300 = 24$

$$\downarrow$$

$\phi = 24$

Ответ: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 100, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = 4, \phi = 24$