



МИНОБРНАУКИ РОССИИ

**Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Факультет информатики и прикладной математики
Кафедра прикладной математики и экономико-математических
методов

ОТЧЁТ

по дисциплине:

«Методы оптимизации»

на тему:

**«Решение задачи линейного программирования
табличным симплекс-методом. Вариант 4.1»**

Направление: 01.03.02

Обучающийся: Бронников Егор Игоревич

Группа: ПМ-1901

Санкт-Петербург
2021

Дано

Целевая функция:

$$f = 4x_1 + x_2 \longrightarrow \max$$

Ограничения:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \geq -8 \\ 3x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_2 \leq 8 \\ x_1 \leq 4 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Задание

Стандартная форма

Целевая функция:

$$f = 4x_1 + x_2 \longrightarrow \max$$

Ограничения:

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ -3x_1 - x_2 \leq -3 \\ x_2 \leq 8 \\ x_1 \leq 4 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Каноническая форма

Целевая функция:

$$f = 4x_1 + x_2 \longrightarrow \max$$

Ограничения:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \geq -8 \\ 3x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_2 \leq 8 \\ x_1 \leq 4 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

1. Вводим слабые переменные $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0$:

$$3x_1 - 2x_2 - y_1 = -8$$

$$3x_1 + x_2 - y_2 = 3$$

$$x_2 + y_3 = 8$$

$$x_1 + y_4 = 4$$

2. Делаем правые части равенств положительными:

$$-3x_1 + 2x_2 + y_1 = 8$$

$$3x_1 + x_2 - y_2 = 3$$

$$x_2 + y_3 = 8$$

$$x_1 + y_4 = 4$$

Таким образом, задача сведена к канонической форме.

Матричная форма

$A \times X^T = B^T$, где:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad X = (x_1 \ x_2 \ y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4) \quad B = (8 \ 3 \ 8 \ 4)$$

Метод штрафов

Введём искусственную переменную — $r \geq 0$.

Целевая функция:

$$f = 4x_1 + x_2 \longrightarrow \max$$

Ограничения:

$$-3x_1 + 2x_2 + y_1 = 8$$

$$3x_1 + x_2 - y_2 + r = 3$$

$$x_2 + y_3 = 8$$

$$x_1 + y_4 = 4$$

$$x_i \geq 0 \quad \forall i = \overline{1, 2}; \quad y_j \geq 0 \quad \forall j = \overline{1, 4}$$

В качестве базисных переменных возьмём y_1, r, y_3, y_4 , свободные переменный — x_1, x_2, y_2 .

Выразим базисные переменные через свободные:

$$y_1 = 8 + 3x_1 - 2x_2$$

$$r = 3 - 3x_1 - x_2 + y_2$$

$$y_3 = 8 - x_2$$

$$y_4 = 4 - x_1$$

Перепишем функцию цели:

$$f = 4x_1 + x_2 - Mr = 4x_1 + x_2 - M(3 - 3x_1 - x_2 + y_2)$$

\downarrow

$$f = -3M + (3M + 4)x_1 + (M + 1)x_2 - My_2$$

Пусть $M = 100$, тогда функция цели примет следующий вид:

$$f = -300 + 304x_1 + 101x_2 - 100y_2$$

Перепишем функцию цели:

$$f - 304x_1 - 101x_2 + 100y_2 = -300$$

1 итерация

Базисные переменные: y_1, r, y_3, y_4 .

Свободные переменный: x_1, x_2, y_2 .

БП	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	r	Своб. член	
f	$\underline{-304}$ -304	-101 -304/3	0 0	100 304/3	0 0	0 0	0 -304/3	-300 -304	
y_1	$\underline{-3}$ -3	2 -1	1 0	0 1	0 0	0 0	0 -1	8 -3	$-\frac{8}{3} < 0$
r	$\underline{3}$ 1	$\underline{1}$ 1/3	$\underline{0}$ 0	$\underline{-1}$ -1/3	$\underline{0}$ 0	$\underline{0}$ 0	$\underline{1}$ 1/3	$\underline{3}$ 1	$\underline{1} - min$
y_3	$\underline{0}$ 0	1 0	0 0	0 0	1 0	0 0	0 0	8 0	$\frac{8}{0} - /0 !$
y_4	$\underline{1}$ 1	0 1/3	0 0	0 -1/3	0 0	1 0	0 1/3	4 1	4

Меняем свободную переменную x_1 и базисную переменную r местами.

$$x_1 \leftrightarrow r$$

2 итерация

Базисные переменные: y_1, x_1, y_3, y_4 .

Свободные переменный: x_2, y_2, r .

БП	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	r	Своб. член	
f	0 0	$\frac{1}{3}$ 4/3	0 0	$\underline{-\frac{4}{3}}$ -4/3	0 0	0 -4	$\frac{304}{3}$ 4/3	4 -12	
y_1	0 0	3 1	1 0	$\underline{-1}$ -1	0 0	0 -3	1 1	11 -9	$-\frac{11}{1} < 0$
x_1	1 0	$\frac{1}{3}$ 1/3	0 0	$\underline{-\frac{1}{3}}$ -1/3	0 0	0 -1	$\frac{1}{3}$ 1/3	1 -3	$-3 < 0$
y_3	0 0	1 0	0 0	$\underline{0}$ 0	1 0	0 0	0 0	8 0	$\frac{8}{0} - /0 !$
y_4	$\underline{0}$ 0	$-\frac{1}{3}$ -1	$\underline{0}$ 0	$\underline{\frac{1}{3}}$ 1	$\underline{0}$ 0	$\underline{1}$ 3	$-\frac{1}{3}$ -1	$\underline{3}$ 9	$\underline{9} - min$

Меняем свободную переменную y_2 и базисную переменную y_4 местами.

$$y_2 \leftrightarrow y_4$$

3 итерация

Базисные переменные: y_1, x_1, y_2, y_3 .

Свободные переменный: x_2, y_4, r .

БП	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	r	Своб. член	
f	0 ₀	<u>-1</u> ₋₁	0 ₀	0 ₀	0 ₋₁	4 ₀	100 ₀	16 ₋₈	
y_1	0 ₀	<u>2</u> ₂	1 ₀	0 ₀	0 ₂	3 ₀	0 ₀	20 ₁₆	10
x_1	1 ₀	<u>0</u> ₀	0 ₀	0 ₀	0 ₀	1 ₀	0 ₀	4 ₀	$\frac{4}{0} - /0!$
y_3	0 ₀	1 ₁	0 ₀	0 ₀	1 ₁	0 ₀	0 ₀	8 ₈	$8 - \min$
y_2	0 ₀	<u>-1</u> ₋₁	0 ₀	1 ₀	0 ₋₁	3 ₀	-1 ₀	9 ₋₈	$-9 < 0$

Меняем свободную переменну x_2 и базисную переменную y_3 местами.
 $x_2 \leftrightarrow y_3$

Оптимальное решение

Базисные переменные: y_1, x_1, x_2, y_2 .

Свободные переменный: y_3, y_4, r .

БП	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	r	Своб. член	
f	0	0	0	0	1	4	100	24	
y_1	0	0	1	0	-2	3	0	4	
x_1	1	0	0	0	0	1	0	4	
x_2	0	1	0	0	1	0	0	8	
y_2	0	0	0	1	1	3	-1	17	

Таким образом, получается:

$$f + y_3 + 4y_4 + 100r = 24 \rightarrow f = 24$$

$$y_1 - 2y_3 + 3y_4 = 4 \rightarrow y_1 = 4$$

$$x_1 + y_4 = 4 \rightarrow x_1 = 4$$

$$x_2 + y_3 = 8 \rightarrow x_2 = 8$$

$$y_2 + y_3 + 3y_4 - r = 17 \rightarrow y_2 = 17$$

$$y_3 = 0, y_4 = 0, r = 0$$

Ответ: $x_1 = 4, x_2 = 8, f = 24$

Двухэтапный метод

Целевая функция:

$$f = 4x_1 + x_2 \longrightarrow \max$$

Ограничения:

$$-3x_1 + 2x_2 + y_1 = 8$$

$$3x_1 + x_2 - y_2 + r = 3 \quad \rightarrow \quad r = 3 - 3x_1 - x_2 + y_2$$

$$x_2 + y_3 = 8$$

$$x_1 + y_4 = 4$$

$$x_i \geq 0 \quad \forall i = \overline{1, 2}; \quad y_j \geq 0 \quad \forall j = \overline{1, 4}$$

Введём вспомогательную функцию цели:

$$\phi = r = 3 - 3x_1 - x_2 + y_2 \longrightarrow \min$$

Перепишем функцию ϕ :

$$\phi + 3x_1 + x_2 - y_2 = 3$$

1 итерация

Базисные переменные: y_1, r, y_3, y_4 .

Свободные переменный: x_1, x_2, y_2 .

БП	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	r	Своб. член	
ϕ	<u>3</u> -3	1 1	0 0	-1 -1	0 0	0 0	0 1	3 3	
y_1	<u>-3</u> -3	2 -1	1 0	0 1	0 0	0 0	0 -1	8 -3	$-\frac{8}{3} < 0$
r	<u>3</u> 1	1 <u>1/3</u>	0 <u>0</u>	-1 <u>-1/3</u>	0 <u>0</u>	0 <u>0</u>	1 <u>1/3</u>	3 <u>1</u>	$1 - \min$
y_3	<u>0</u> 0	1 0	0 0	0 0	1 0	0 0	0 0	8 0	$\frac{8}{0} - / 0 !$
y_4	<u>1</u> 1	0 1/3	0 0	0 -1/3	0 0	1 0	0 1/3	4 1	4

Меняем свободную переменную x_1 и базисную переменную r местами.

$$x_1 \leftrightarrow r$$

Оптимальное решение

Базисные переменные: y_1, x_1, y_3, y_4 .

Свободные переменный: x_2, y_2, r .

БП	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	r	Своб. член	
ϕ	0	0	0	0	0	0	-1	0	
y_1	0	3	1	-1	0	0	1	11	
x_1	1	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	1	
y_3	0	1	0	0	1	0	0	8	
y_4	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	3	

$r = 0$ и значение вспомогательной функции $\phi = 0$.

Таким образом, получается:

$$3x_2 + y_1 - y_2 = 11$$

$$x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}y_2 = 1 \quad \rightarrow \quad x_1 = -\frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}y_2 + 1$$

$$x_2 + y_3 = 8$$

$$-\frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}y_2 + y_4 = 3$$

Выразим функцию цели через свободные переменные:

$$f = 4x_1 + x_2 = 4 - \frac{4}{3}x_2 + \frac{4}{3}y_2 + x_2 = 4 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{4}{3}y_2$$

↓

$$f = 4 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{4}{3}y_2 \longrightarrow \max$$

Перепишем функцию цели:

$$f + \frac{1}{3}x_2 - \frac{4}{3}y_2 = 4$$

1 итерация

Базисные переменные: y_1, x_1, y_3, y_4 .

Свободные переменный: x_2, y_2 .

БП	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	Своб. член	
f	0 ₀	$\frac{1}{3}$ _{4/3}	0 ₀	$-\frac{4}{3}$ _{-4/3}	0 ₀	0 ₋₄	4 ₋₁₂	
y_1	0 ₀	3 ₁	1 ₀	<u>-1</u> ₋₁	0 ₀	0 ₋₃	11 ₋₉	$-\frac{11}{1} < 0$
x_1	1 ₀	$\frac{1}{3}$ _{1/3}	0 ₀	$-\frac{1}{3}$ _{-1/3}	0 ₀	0 ₋₁	1 ₋₃	$-3 < 0$
y_3	0 ₀	1 ₀	0 ₀	<u>0</u> ₀	1 ₀	0 ₀	8 ₀	$\frac{8}{0} - /0 !$
y_4	0 _{<u>0</u>}	$-\frac{1}{3}$ _{<u>-1</u>}	0 _{<u>0</u>}	$\frac{1}{3}$ ₁	0 _{<u>0</u>}	1 _{<u>3</u>}	3 _{<u>9</u>}	$9 - min$

Меняем свободную переменну y_2 и базисную переменную y_4 местами.
 $y_2 \leftrightarrow y_4$

2 итерация

Базисные переменные: y_1, x_1, y_2, y_3 .

Свободные переменный: x_2, y_4 .

БП	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	Своб. член	
f	0 ₀	<u>-1</u> ₋₁	0 ₀	0 ₀	0 ₋₁	4 ₀	16 ₋₈	
y_1	0 ₀	<u>2</u> ₂	1 ₀	0 ₀	0 ₂	3 ₀	20 ₁₆	10
x_1	1 ₀	<u>0</u> ₀	0 ₀	0 ₀	0 ₀	1 ₀	4 ₀	$\frac{4}{0} - /0 !$
y_3	0 _{<u>0</u>}	1 ₁	0 _{<u>0</u>}	0 _{<u>0</u>}	1 _{<u>1</u>}	0 _{<u>0</u>}	8 _{<u>8</u>}	$8 - min$
y_2	0 ₀	<u>-1</u> ₋₁	0 ₀	1 ₀	0 ₋₁	3 ₀	9 ₋₈	$-9 < 0$

Меняем свободную переменну x_2 и базисную переменную y_3 местами.
 $x_2 \leftrightarrow y_3$

Оптимальное решение

Базисные переменные: y_1, x_1, x_2, y_2 .

Свободные переменный: y_3, y_4 .

БП	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	Своб. член	
f	0	0	0	0	1	4	24	
y_1	0	0	1	0	-2	3	4	
x_1	1	0	0	0	0	1	4	
x_2	0	1	0	0	1	0	8	
y_2	0	0	0	1	1	3	17	

Таким образом, получается:

$$f + y_3 + 4y_4 = 24 \quad \rightarrow \quad f = 24$$

$$y_1 - 2y_3 + 3y_4 = 4 \quad \rightarrow \quad y_1 = 4$$

$$x_1 + y_4 = 4 \quad \rightarrow \quad x_1 = 4$$

$$x_2 + y_3 = 8 \quad \rightarrow \quad x_2 = 8$$

$$y_2 + y_3 + 3y_4 = 17 \quad \rightarrow \quad y_2 = 17$$

$$y_3 = 0, y_4 = 0$$

$$\text{Ответ: } x_1 = 4, x_2 = 8, f = 24$$