



МИНОБРНАУКИ РОССИИ

**Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Факультет информатики и прикладной математики
Кафедра прикладной математики и экономико-математических
методов

ОТЧЁТ

по дисциплине:

«Методы оптимизации»

на тему:

«Задание 16. Метод Ньютона-Рафсона»

Направление: 01.03.02

Обучающийся: Бронников Егор Игоревич

Группа: ПМ-1901

Санкт-Петербург
2021

Дано:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - 3x_2 - 5)^2 + (6x_1 - x_2 - x_3 - 2)^2 + (2x_1 + 5x_2 + x_3 - 1)^2$$

Условие:

Найти стационарную точку методом Ньютона-Рафсона.

Решение:

Определим первые производные функции:

$$\frac{df}{dx_1} = 98x_1 - 10x_2 - 8x_3 - 58$$

$$\frac{df}{dx_2} = -10x_1 + 70x_2 + 12x_3 + 24$$

$$\frac{df}{dx_3} = -8x_1 + 12x_2 + 4x_3 + 2$$

Составим матрицу Гессе $H(X)$ для функции $f(x_1, x_2, x_3)$ и определим знак её угловых миноров:

$$H(X) = \begin{pmatrix} 98 & -10 & -8 \\ -10 & 70 & 12 \\ -8 & 12 & 4 \end{pmatrix}$$

Вычисляем главные миноры:

$$M_1(\mathbf{H}) = 98 > 0, \quad M_2(\mathbf{H}) = 6760 > 0, \quad M_3(\mathbf{H}) = |\mathbf{H}| = 10368 > 0$$

Матрица \mathbf{H} – положительно определённая матрица и, следовательно, $f(x_1, x_2, x_3)$ – выпуклая функция, которая имеет минимум в некоторой точке X^* .

$$\begin{aligned} \text{grad } f(X) &= \left(\frac{df}{dx_1}, \frac{df}{dx_2}, \frac{df}{dx_3} \right) = \\ &= (98x_1 - 10x_2 - 8x_3 - 58, -10x_1 + 70x_2 + 12x_3 + 24, -8x_1 + 12x_2 + 4x_3 + 2) \end{aligned}$$

$$H^{-1}(X) = \begin{pmatrix} \frac{17}{1296} & -\frac{7}{1296} & \frac{55}{1296} \\ -\frac{7}{1296} & \frac{41}{1296} & -\frac{137}{1296} \\ \frac{55}{1296} & -\frac{137}{1296} & \frac{845}{1296} \end{pmatrix}$$

В качестве начальной точки возьмём $X^0 = (0, 0, 0)$, $f(X^0) = 30$:

$$X^{1t} = X^{0t} - H^{-1}(X^0) \text{grad}^t f(X^0) = X^{0t} - \begin{pmatrix} \frac{17}{1296} & -\frac{7}{1296} & \frac{55}{1296} \\ -\frac{7}{1296} & \frac{41}{1296} & -\frac{137}{1296} \\ \frac{55}{1296} & -\frac{137}{1296} & \frac{845}{1296} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -58 \\ 24 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{29}{36} \\ -\frac{31}{36} \\ \frac{133}{36} \end{pmatrix}$$

В точке X^1 имеет $\text{grad} f(\frac{29}{36}, -\frac{31}{36}, \frac{133}{36}) = (0, 0, 0)$, следовательно X^1 – стационарная точка. В этой точке угловые миноры Гессе положительно определены, а значит точка является точкой минимума.

Значение функции в X^1 : $f(\frac{29}{36}, -\frac{31}{36}, \frac{133}{36}) = 0$

Также мы нашли точное решение рассматриваемой задачи.