

# Алгосы, часть ii

Денис Осипов, Иван Ермошин, Егор Нечаев

2 сентября 2020 г.

## Информация

Этот проект – коллективный **конспект** по второй части курса «Математические основы алгоритмов», впервые прочитанного первокурсникам МКН СПбГУ в первой половине ii семестра 2020 года Эдуардом Алексеевичем Гиршем.

Актуальные исходники: <https://www.overleaf.com/read/hnbkrkyknbpk> и <https://github.com/gogochushij/algosi-hirsch>

## Ошибки и корректура

Совсем скоро конспект перейдет в стадию *публичной вычитки*. Цель проекта – создать не просто билеты к экзамену, а написать **максимально понятный**, достаточный для самостоятельного изучения курса текст. В связи с этим,

**задавайте ВСЕ ваши вопросы авторам конспекта!**

Каждый Ваш вопрос по материалу это не только возможность глубже разобраться в материале, но и обратная связь, направленная на повышение читабельности, **доступности для понимания** текста. Мы **непрерывно** ждем Ваших вопросов. Вы можете задавать вопросы по любым главам любому из троих авторов: Денис Осипов, Иван Ермошин, Егор Нечаев.

## Билеты про онлайн-алгоритмы

Прямо сейчас в конспекте не хватает двух билетов про онлайн-алгоритмы. Если вы хотите помочь нам и написать хотя бы один, или же **сообщить об ошибке**, напишите <http://vk.com/gogochushij>.

А это просто какая-то рабочая ссылка ([algosi-authors](#))

## Обозначения

Символом  $\heartsuit$  обозначены разделы, которые не входят в экзамен (еще не всё проставлено).

Символом  $\triangle$  обозначаются окончания описаний алгоритмов – в противопоставление с символом  $\square$ , который оканчивает доказательства теорем.

## Содержание

<b>1 (1) Параллельные алгоритмы – i (Осипов Д.)</b>	<b>4</b>
1.1 Булевы схемы как модель параллельного алгоритма . . . . .	4
1.2 Принцип Брента . . . . .	5
1.3 Параллельное умножение булевых матриц . . . . .	5
1.4 Параллельная достижимость в графе . . . . .	6

<b>2</b>	<b>(2) Параллельные алгоритмы – ii (Осипов Д.)</b>	<b>6</b>
2.1	Параллельное вычисление всех префиксных сумм . . . . .	6
2.2	Параллельное сложение чисел . . . . .	6
2.3	Параллельное умножение чисел . . . . .	7
<b>3</b>	<b>(3) Параллельные алгоритмы – iii (Осипов Д., Нечаев Е.)</b>	<b>8</b>
3.1	Параллельное вычисление всех расстояний до конца списка . . . . .	8
3.2	Параллельное вычисление всех глубин дерева . . . . .	8
<b>4</b>	<b>(4) Приближенный алгоритм для задачи о рюкзаке (Осипов Д.)</b>	<b>9</b>
<b>5</b>	<b>(5) Set Cover - i (Осипов Д.)</b>	<b>10</b>
5.1	Сведение к задаче линейного программирования . . . . .	10
5.2	Следствие для задачи вершинного покрытия (Vertex Cover) . . . . .	11
5.3	Двойственная задача . . . . .	12
5.4	Прямо-двойственный метод . . . . .	14
<b>6</b>	<b>(6) Set Cover – ii (Осипов Д.)</b>	<b>14</b>
6.1	Жадный приближенный алгоритм . . . . .	14
<b>7</b>	<b>(7) Транспортные сети. Задача о максимальном потоке. Разрез. Теорема о максимальном потоке и минимальном разрезе. Алгоритм Форда-Фалкерсона (Нечаев Е.)</b>	<b>16</b>
7.1	Транспортные сети. Задача о максимальном потоке . . . . .	16
7.2	Разрез. Теорема о максимальном потоке и минимальном разрезе . . . . .	18
7.3	Алгоритм Форда-Фалкерсона . . . . .	19
7.4	Применение к паросочетаниям . . . . .	19
<b>8</b>	<b>(8) Алгоритм Эдмондса-Карпа (Нечаев Е.)</b>	<b>20</b>
<b>9</b>	<b>(9) Алгоритм проталкивания предпотока (Нечаев Е.)</b>	<b>21</b>
9.1	Интуитивные соображения . . . . .	22
9.2	Операция проталкивания . . . . .	22
9.3	Операция подъема . . . . .	22
9.4	Начальный предпоток . . . . .	23
9.5	Алгоритм. Его корректность. . . . .	23
9.6	Время работы . . . . .	24
<b>10</b>	<b>(10) Приближенные алгоритмы для метрической задачи коммивояжера (Осипов Д.)</b>	<b>25</b>
10.1	2-оптимальное решение . . . . .	25
10.2	1.5-оптимальное решение . . . . .	26
<b>11</b>	<b>(11) Алгоритмы Прима и Крускала для задачи о минимальном остовном дереве (Нечаев Е.)</b>	<b>27</b>
11.1	(WIP) Алгоритм Крускала . . . . .	27
11.1.1	Система непересекающихся множеств . . . . .	27
11.1.2	Сам алгоритм . . . . .	28
11.2	Алгоритм Прима . . . . .	28
<b>12</b>	<b>(12) Вероятностные алгоритмы с односторонней ограниченной вероятностью ошибки. Алгоритм Фрейвальдса для проверки умножения матриц. (Ермошин И.)</b>	<b>29</b>
12.1	Вероятностные алгоритмы с односторонней ограниченной вероятностью ошибки . . . . .	29
12.2	Алгоритм Фрейвальдса для проверки умножения матриц. . . . .	29

<b>13 (13) (В РАЗРАБОТКЕ) Вероятностный алгоритм для сравнения строк на расстоянии и алгоритм Рабина-Карпа. (Ермошин И., Осипов Д.)</b>	<b>29</b>
13.1 Вероятностный алгоритм для сравнения строк «на расстоянии» . . . . .	29
13.2 Алгоритм Рабина-Карпа для поиска подстроки в строке . . . . .	30
<b>14 (14) Рандомизированный QuickSort (Осипов Д.)</b>	<b>30</b>
<b>15 (15) Проверка равенства полиномов. Лемма Шварца-Циппеля. (Ермошин И.)</b>	<b>32</b>
<b>16 (16) (В РАЗРАБОТКЕ) Вероятностная проверка на простоту: алгоритм Соловея-Штрассена. (Ермошин И., Осипов Д.)</b>	<b>33</b>
16.1 Теоретико-числовые основания . . . . .	33
16.2 Достаточное условие простоты числа . . . . .	34
16.3 Описание алгоритма и вероятность ошибки . . . . .	34
<b>17 (17) Хеш-таблицы. Универсальные семейства хеш-функций. (Осипов Д.)</b>	<b>35</b>
17.1 Прямая адресация . . . . .	35
17.2 Хеш-таблица с чеинингом . . . . .	35
17.3 ♡ Гипотеза простого равномерного хеширования: оценки . . . . .	36
17.4 Универсальное семейство хеш-функций: оценки . . . . .	37
17.5 Универсальное семейство хеш-функций: построение . . . . .	37
<b>18 (18) Совершенное хеширование</b>	<b>38</b>
<b>19 (19) Алгоритм Борувки для MST. Линейный вероятностный алгоритм для MST. (Осипов Д.)</b>	<b>38</b>
19.1 Алгоритм Борувки . . . . .	38
19.2 Линейный вероятностный алгоритм для MST . . . . .	39
<b>20 (20) Слабоэкспоненциальные детерминированные алгоритмы SAT для 3-КНФ (Осипов Д.)</b>	<b>41</b>
20.1 Начальные сведения . . . . .	41
20.2 Метод расщепления: $O(1.92^n)$ , $O(1.84^n)$ . . . . .	41
20.3 Метод локального поиска: $O(1.74^n)$ . . . . .	42
<b>21 (21) Алгоритм Шоннинга для 3-SAT, использующий случайное блуждание (Осипов Д.)</b>	<b>42</b>

# 1 (1) Параллельные алгоритмы – i (Осипов Д.)

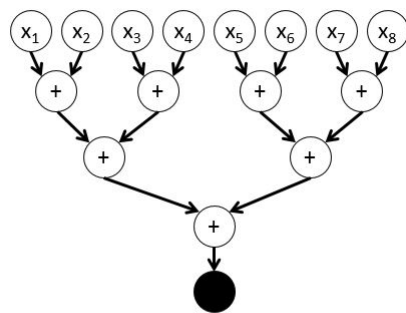
**Определение.** *Параллельный алгоритм – предназначенный для исполнения на нескольких процессах.*

## 1.1 Булевы схемы как модель параллельного алгоритма

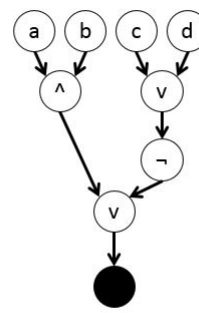
**Определение.** *Булева схема – модель параллельного алгоритма, представляющая собой ориентированный граф без циклов, где:*

- вершины без входящих ребер соответствуют входным данным,
- вершины с входящими ребрами («гейты») соответствуют процессорам, которые выполняют операцию с данными, поступающими в вершину по входящим ребрам,
- вершины без выходящих ребер соответствуют выходным данным.

**Пример.**



Сумма массива «бинарным деревом»  
за  $O(\log n)$



Вычисление формулы  $(a \wedge b) \vee \neg(c \vee d)$   
за три шага

«Высота» схемы, т.е. длина наибольшего пути от вершины выходных данных – количество параллельных шагов алгоритма. Еще можно заметить, что если каждому гейту присвоить число – «номер этажа» так, что каждый переход осуществляется с «верхнего» этажа на «нижний», то максимальное число процессоров на одном этаже – достаточное количество процессоров для исполнения всего алгоритма. Так, в левом примере достаточно взять четыре процессора, а в правом – два.

Суммирование массива за  $O(\log n)$  параллельных шагов в примере слева – уже хороший пример параллельного алгоритма. Хотя он интуитивно понятен, опишем его формально.

**Задача.** Пусть дано  $n$  чисел. Вычислить их сумму.

**Решение за  $O(\log n)$ .** Считаем, что  $n$  – степень двойки (если нет, дополним нулями). Разобъем все числа на  $n/2$  пар и поручим каждому процессору одну пару, чтобы он вычислил ее сумму. Получившиеся  $n/2$  чисел разобъем на  $n/4$  пар и так же вычислим суммы этих пар. Повторяем до тех пор, пока не останется одно число. Ясно, что всего будет выполнено  $\log_2 n = O(\log n)$  параллельных шагов.  $\triangle$

**NB.** Сложить<sup>1</sup>  $n$  чисел быстрее, чем за  $\log n$  шагов, нельзя. В самом деле, если можно, то булева схема такого алгоритма как граф-дерево имеет высоту  $h \leq \log_2 n - 1$ . Но каждый гейт принимает на вход не больше двух чисел, т.е. входная степень каждой вершины не больше 2. Значит верхних входных гейтов не может быть более  $2^h \leq n/2$  чисел, а надо  $n$ .

При проектировании параллельных алгоритмов в качестве меры их эффективности возникает аж три параметра: количество параллельных шагов (время работы), количество используемых процессоров и общая работа (определение дано далее). К счастью, об одном из них – количестве процессоров – можно не задумываться, о чем говорит нам следующее утверждение.

<sup>1</sup>Имея в распоряжении только «+»-гейты, принимающие ровно два числа

## 1.2 Принцип Брента

**Теорема** (принцип Брента). Рассмотрим параллельный алгоритм, выполняющий  $t$  параллельных шагов, где на  $i$ -том шаге задействовано  $w_i$  процессоров (т.е. выполняется  $w_i$  операций). Обозначим  $W = \sum_{i=1}^t w_i$  и назовем эту величину общей работой алгоритма. Тогда алгоритм можно перепрограммировать так, чтобы на  $P$  процессорах он работал не более, чем за  $\frac{W}{P} + t$  параллельных шагов.

*Доказательство.* Перераспределим все  $W$  операций на  $P$  процессорах наиболее равномерно. Тогда  $i$ -тый шаг изначального алгоритма можно выполнить за  $\lceil \frac{w_i}{P} \rceil$  новых шагов. Оценим общее число шагов нового алгоритма:

$$t' = \sum_{i=1}^t \lceil \frac{w_i}{P} \rceil \leq \sum_{i=1}^t \left( \frac{w_i}{P} + 1 \right) = \sum_{i=1}^t \frac{w_i}{P} + t = \frac{W}{P} + t$$

Таким образом, получили алгоритм с искомым временем работы.  $\square$

**НВ.** Принцип Брента позволяет при проектировании параллельных алгоритмов **не думать**, на скольких процессорах будет работать алгоритм. Именно: пусть был создан алгоритм, работающий на неизвестном (лень считать) числе процессоров  $P_0(n)$  и совершающий общую работу  $W(n)$  за  $t(n)$  параллельных шагов. Тогда его можно перепроектировать на любое число процессоров  $P(n)$  такое, что

$$\frac{W(n)}{P(n)} = O(t(n)),$$

и асимптотически не потерять во времени, так как тогда новое время работы все еще  $t'(n) \leq \frac{W(n)}{P(n)} + t(n) = O(t(n))$ . Поэтому в дальнейшем при изучении параллельных алгоритмов считаем, что у нас **сколь угодно много процессоров**, а затем количество нужных процессоров будем вычислять по принципу Брента.

## 1.3 Параллельное умножение булевых матриц

**НВ.** булевые – только чтобы арифметика с числами была  $O(1)$ .

**Задача.** Даны две матрицы  $A$  и  $B$  размера  $n \times n$  над  $\mathbb{F}_2$ . Вычислить их произведение, то есть числа  $C_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik}B_{kj}$  для всех  $i, j = 1 \dots n$  (всего  $n^2$  чисел)

**Непараллельное решение.** Вычислить все  $n^2$  чисел  $C_{ij}$ , каждое считается за  $O(n)$ , значит общая сложность  $O(n^3)$ .  $\triangle$

Несмотря на то, что в прошлом разделе мы условились не думать о количестве процессоров, конкретно здесь на всякий случай приведем два решения. Второе решение – просто пример того, как работает принцип Брента.

**Решение за  $O(\log n)$  времени на  $n^3$  процессорах.** Занумеруем все  $n^3$  процессоров тройками чисел  $(i, k, j)$ , где  $i, k, j = 1 \dots n$ . Сначала на каждом процессоре  $(i, k, j)$  посчитаем  $A_{ik}B_{kj}$ . Теперь хотим получить число  $C_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik}B_{kj}$ . Сделаем это за  $\log n$  шагов (суммирование бинарным деревом). Задача решена за  $1 + \log n = O(\log n)$  шагов на  $n^3$  процессорах.  $\triangle$

Общая работа этого решения  $W(n) = O(n^3)$ . Действительно, ведь данное решение просто считает  $n^2$  сумм  $C_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik}B_{kj}$ , переставив слагаемые в другом порядке, таким образом,  $n^2$  раз совершено  $n$  действий сложения. Тогда из принципа Брента следует, что для исполнения этого алгоритма за  $O(\log n)$  на самом деле достаточно  $P(n) = \frac{W(n)}{t(n)} = O\left(\frac{n^3}{\log n}\right)$  процессоров.

Можно даже явно перепроектировать алгоритм, чтобы он работал на  $O\left(\frac{n^3}{\log n}\right)$  процессорах.

**Решение за  $O(\log n)$  времени на  $O\left(\frac{n^3}{\log n}\right)$  процессорах.** Модифицируем алгоритм выше. На первом шаге вычислить все числа  $A_{ik}B_{kj}$  получится не за 1, а за  $O(\log n)$  шагов: за каждый шаг просто посчитаются очередные  $\frac{n^3}{\log n}$  чисел  $A_{ik}B_{kj}$ . Получать из них  $C_{ij}$  за  $O(\log n)$  мы уже умеем. Итоговая сложность  $O(\log n) + O(\log n) = O(\log n)$ .  $\triangle$

## 1.4 Параллельная достижимость в графе

**Задача.** Дан граф, заданный матрицей смежности  $\{a_{ij}\}$ . Построить его матрицу достижимости.

**Решение за  $O(\log^2 n)$  времени.** Будем булево умножать матрицы: вместо  $\cdot$  возьмем  $\wedge$ , вместо  $+$  возьмем  $\vee$ . Из формулы перемножения матриц несложно видеть, что  $A^k$  – матрица  $k$ -шаговой достижимости. Тогда матрица достижимости – любая матрица  $A^k$ , где  $k \geq n$ . Умеем возводить матрицу в квадрат за  $O(\log n)$ . Для получения матрицы достижимости  $A^n$  возведем матрицу  $A$  в квадрат  $\log n$  раз. Итоговая сложность  $O(\log n) \cdot O(\log n) = O(\log^2 n)$ . Общая работа  $W(n) = O(n^3 \log n)$ , так как  $\log n$  раз перемножили матрицы за  $O(n^3)$  работы. Число процессоров:  $P(n) = O\left(\frac{n^3 \log n}{\log^2 n}\right) = O\left(\frac{n^3}{\log n}\right)$ .  $\triangle$

## 2 (2) Параллельные алгоритмы – ii (Осипов Д.)

### 2.1 Параллельное вычисление всех префиксных сумм

**Задача.** Дан массив  $A[0 \dots n-1]$ . Вычислить все его префиксные суммы

**Решение за  $O(\log n)$ .** Рекурсивный алгоритм. Предположим, что умеем считать префиксные суммы массивов меньшего размера.

Заведем вспомогательный массив  $B[0 \dots \frac{n}{2} - 1]$ , в котором положим  $B[i] = A[2i] + A[2i+1]$  (один параллельный шаг). Посчитаем (по предположению) все префиксные суммы  $B$  и заменим ими сам массив  $B$ . После этой операции для всякого  $0 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1$  верно  $B[k] = \sum_{j=0}^{2k+1} A[j]$ .

Теперь делаем на месте  $A$  массив префиксных сумм  $A$  следующим образом. Если  $i > 0$  четное, то полагаем  $A[i] = B[\frac{i}{2} - 1] + A[i]$  (проверьте подстановкой, что  $= \sum_{j=0}^i A[j]$ ). Если же  $i > 0$  нечетное, то просто полагаем  $A[i] = B[\frac{i-1}{2}]$  (снова проверьте, что  $= \sum_{j=0}^i A[j]$ ). Эта операция – снова один параллельный шаг. Таким образом, на месте массива  $A$  был построен массив префиксных сумм  $A$ .  $\triangle$

Соответствующий псевдокод:

---

```
1 PrefixSum(&A[0...n-1]):
2   if n > 1 :
3       B = [0] * (n/2 - 1)
4       parallel for i = 0... (n/2 - 1) :
5           B[i] = A[2i] + A[2i+1]
6
7       PrefixSum(B)
8
9       parallel for i = 0...(n-1) :
10          if i > 0 :
11              A[i] = B[i/2 - 1] + A[i]
12          else
13              A[i] = B[(i-1)/2]
```

---

Время работы оценивается просто: из кода следует соотношение  $T(n) = T(n/2) + C$ , и далее можно написать  $= T(n/4) + 2C = T(n/8) + 3C = \dots = C \cdot \log n = O(\log n)$ . Общая работа:  $W(n) = W(n/2) + O(n)$ , откуда по мастер-теореме  $W(n) = O(n)$ . По принципу Брента количество процессоров можно взять  $P(n) = \frac{W(n)}{T(n)} = O\left(\frac{n}{\log n}\right)$ .  $\square$

### 2.2 Параллельное сложение чисел

**Задача.** Даны два (длинных) двоичных числа в виде  $a = \sum_{i=0}^n a_i 2^i$  и  $b = \sum_{i=0}^n b_i 2^i$ . Вычислить их сумму в виде  $c = \sum_{i=0}^n c_i 2^i$ .

**Решение за  $O(\log n)$ .** Для удобства считаем  $a_n = b_n = 0$ , остальные  $a_i, b_i = 0$  или 1

Формализуем алгоритм сложения столбиком. Через  $z_i$  обозначим число (0 или 1), которое при сложении столбиком переносится из  $i$ -го разряда в  $(i+1)$ -тый. Если бы мы знали все переносы  $z_i$ , то  $c_i$  можно было бы вычислить по формуле<sup>2</sup>  $c_i = (a_i + b_i + z_{i-1}) \% 2$ .

Положим:

- $g_i = a_i \wedge b_i$  – «генератор переноса»,
- $p_i = a_i \vee b_i$  – «продолжатель переноса».

Перебирая все возможные случаи, когда в  $i$ -том разряде может возникнуть перенос, получаем формулу для  $z_i$  (опустим знак  $\wedge$  для наглядности):

$$z_i = g_i \vee p_i z_{i-1}$$

Обратите внимание, что это похоже на «линейную рекурренту» на  $z_i$ . Распишем дальше  $z_{i-1}$ :

$$\begin{aligned} z_i &= g_i \vee p_i (g_{i-1} \vee p_{i-1} z_{i-2}) \\ &= g_i \vee p_i g_{i-1} \vee p_i p_{i-1} z_{i-2} \end{aligned}$$

Итак, при одной «итерации» «свободный член»  $g_i$  заменился на  $g_i \vee p_i g_{i-1}$ , а «коэффициент»  $p_i$  – на  $p_i p_{i-1}$ . Определим операцию на парах битов:

$$(a, b) \odot (a', b') = (a' \vee b'a, b'b)$$

Проверим (**нужно уметь проверять!**), что эта операция ассоциативна. Тогда если умеем вычислять вектора

$$(v_{k1}, v_{k2}) = (0, 0) \odot (g_1, p_1) \odot (g_2, p_2) \odot \dots \odot (g_k, p_k) \text{ для всех } k = 1 \dots n,$$

то имеем  $z_k = v_{k1} \vee v_{k2} z_{-1} = v_{k1}$ . Но вектора  $(v_{k1}, v_{k2})$  суть просто префиксные «суммы» последовательности  $(0, 0), (g_1, p_1), \dots, (g_n, p_n)$  относительно ассоциативной операции  $\odot$ . К ним применим алгоритм нахождения префиксных сумм за  $O(\log n)$  выше.

Время и работа алгоритма: сначала посчитали  $g_i$  и  $p_i$  за время  $O(1)$  и работу  $O(n)$ , потом префиксы за  $O(\log n)$  и работу  $O(n)$ , наконец вычислили  $z_i$  и  $c_i$  за время  $O(1)$  и работу  $O(n)$ . Итоговое время  $O(\log n)$ , итоговая работа  $O(n)$ , процессоров  $O\left(\frac{n}{\log n}\right)$ .  $\triangle$

## 2.3 Параллельное умножение чисел

**Задача.** Даны два (длинных) двоичных числа в виде  $a = \sum_{i=0}^n a_i 2^i$  и  $b = \sum_{i=0}^n b_i 2^i$ . Вычислить их произведение в виде  $c = \sum_{i=0}^{2n} c_i 2^i$ .

**Решение за  $O(\log n)$ .** Ясно, что  $ab = \sum_{i=0}^n a_i b_i 2^i = \sum_{i: b_i=1} a_i 2^i$ . Таким образом мы свели умножение двух чисел к сложению не более чем  $n$  чисел. Но на этом не все.

Трюк «Два по цене трёх». Пусть нам даны три числа  $x, y, z$ . Как за  $O(1)$  времени сделать из них два числа с той же суммой? Для каждого  $i$  число  $x_i + y_i + z_i$  есть некоторое двубитовое число  $2p_i + q_i$ . Составим числа  $p, q$  из таких  $p_i, q_i$ . Тогда верно  $x + y + z = 2p + q$ . Итак, мы свели сложение трех чисел к сложению двух чисел за  $O(1)$  времени<sup>3</sup> и  $O(n)$  работы.

Итак, как быстро складывать много чисел? Разбиваем их на тройки (возможные лишние 1-2 числа игнорируем), применяем к каждой тройке трюк. Делаем так, пока не останется одно или два числа (в последнем случае просто сложим их).

Оценим время и работу. Один трюк требует  $O(1)$  времени и  $O(n)$  работы. На каждом параллельном шаге трюк применяется  $\sim n/3 = O(n)$  раз, т.е. общая работа на одном параллельном шаге  $O(n^2)$ . На каждом шаге количество чисел уменьшается в  $3/2$  раза, откуда  $T(n) = T\left(\frac{n}{3/2}\right) + O(1)$  и  $W(n) = W\left(\frac{n}{3/2}\right) + O(n^2)$ . По мастер-теореме получаем  $T(n) = O(\log_{3/2} n) = O(\log n)$  и  $W(n) = O(n^2)$ .<sup>4</sup> Процессоров можно брать  $O\left(\frac{n^2}{\log n}\right)$ .  $\triangle$

<sup>2</sup>Пологая  $z_{-1} = 0$  по определению

<sup>3</sup>Именно  $O(1)$ , так как мы разобрались с каждым из  $n$  битов по отдельности. Ни о каких «переносах» и сложении длинных чисел здесь речи не идет.

<sup>4</sup>Оценка из «Computational Complexity» Пападимитриу  $W(n) = O(n^2 \log n)$  тоже верна, но грубее.

### 3 (3) Параллельные алгоритмы – iii (Осипов Д., Нечаев Е.)

#### 3.1 Параллельное вычисление всех расстояний до конца списка

**Задача.** Дан список  $a_1, \dots, a_n$  в следующем формате. Про каждый элемент  $a_i$  известно, какой элемент за ним следует. Обозначим его номер за  $next[i]$ . Если за элементом ничего не следует, считаем  $next[i] == nil$ . Предположим, что указатели  $next[i]$  действительно образуют список. Найти расстояние до конца списка для каждого элемента.

**Решение за  $O(\log n)$ .**

Каждому элементу  $a_i$  сопоставим процессор  $p_i$ . Заведем массив  $d[1..n]$ , проинициализируем его следующим образом. На первом параллельном шаге для концевой  $i$  ( $next[i] == nil$ ) положим  $d[i] = 0$ , для всех остальных положим  $d[i] = 1$ . В дальнейшем указатели будут изменяться (таким образом, структура списка будет нарушаться), и тогда  $d[i]$  будет означать расстояние между  $a_i$  и  $a_{next[i]}$  в исходном списке.

Далее на каждом параллельном шаге происходит пересчет расстояний. Именно, каждый процессор  $i$ , для которого  $next[i] \neq nil$ , делает следующее (порядок важен!): запоминает  $d[next[i]]$ , затем увеличивает  $d[i]$  на запомненное значение. После этого (снова порядок важен!) процессор  $i$  запоминает  $next[next[i]]$ , затем присваивает это значение к  $next[i]$ . Алгоритм останавливается, когда все  $next[i] == nil$ .

Алгоритм корректно находит ответ. Действительно, только что описанный цикл сохраняет инвариант « $d[i]$  – расстояние между  $a_i$  и  $a_{next[i]}$  в исходном списке», а в конце алгоритма все  $next[i] == nil$

Время работы алгоритма  $O(\log n)$ . Это следует из того, что начальная инициализация и каждая итерация цикла проходят за  $O(1)$  времени, а сам цикл выполняется  $\log n$  раз: за итерацию цикла  $d_i$  либо удваивается, либо ему присваивается  $nil$ .  $\triangle$

#### 3.2 Параллельное вычисление всех глубин дерева

**Задача.** Дано подвешенное неориентированное дерево на  $n$  вершинах, занумерованных  $\{0, \dots, n-1\}$  в следующем формате. Имеются три массива  $left[0..n-1]$ ,  $right[0..n-1]$ ,  $parent[0..n-1]$ , для каждого  $i$   $left[i]$ ,  $right[i]$  и  $parent[i]$  суть номера левого потомка, правого потомка, родителя вершины  $i$  (при отсутствии какого-то из параметров присвоено  $nil$ ). Предположим, что эти массивы действительно задают дерево. Вычислить глубины всех вершин относительно корня.

**Решение за  $O(\log n)$ .** Сопоставим каждой вершине  $i$  три процессора  $A_i, B_i, C_i$ <sup>5</sup>. Перестроим дерево в ориентированный граф, вершины которого будут этими процессорами. Именно, проведем ребро:

- $A_i \rightarrow A_{left[i]}$ , либо  $A_i \rightarrow B_i$ , если  $left[i] == nil$ ;
- $B_i \rightarrow A_{right[i]}$ , либо  $B_i \rightarrow C_i$ , если  $right[i] == nil$ ;
- $C_i \rightarrow \dots$ 
  - $\dots B_{parent[i]}$ , если  $i$  – левый потомок,
  - $\dots C_{parent[i]}$ , если  $i$  – правый потомок,
  - $\dots nil$ , если  $parent[i] == nil$  ( $i$  – корень) (можно, наверное, считать, что у корневой вершины нет процессора  $C$ ).

Можно проверить<sup>6</sup>, что у этого графа существует эйлеров обход, начинающийся в  $A$  корня и заканчивающийся в  $C$  корня.

<sup>5</sup>Я, честно говоря, так и не понял, по какой причине они называются процессорами. Как мне кажется, намного легче интерпретировать это как просто 3 числа, сопоставленные каждому узлу дерева.

<sup>6</sup>Например, вспомнить критерий полуэйлеровости: для всех вершин  $v$ , кроме двух,  $in(v) = out(v)$ , а для особых двух вершин  $in(v_1) = out(v_1) + 1$  и  $in(v_2) = out(v_2) - 1$ .



Поместим теперь<sup>7</sup> в процессоры  $A_i$  число 1, в  $B_i$  число 0, в  $C_i$  число  $-1$ . эйлеров обход графа превратился в последовательность чисел, у которой мы умеем параллельно вычислять частичные суммы (мы учились это делать в 2.1).  $\triangle$

**Теорема.** Частичная сумма, вычисленная до  $C_i$  — это глубина вершины  $i$ .

*Доказательство.* Заметим из устройства нашего дерева, что процессор  $C_i$  встречается всегда перед процессором  $A_i$ ,  $A_i$  потомка встречается позже  $A_j$  предка, а с  $C_i, C_j$  наоборот. Процессор  $A_i$  добавляет 1, процессор  $B_i$  добавляет 0, процессор  $C_i$  добавляет  $-1$ , поэтому вклад в сумму от посещения поддеревьев нулевой. До  $C_i$   $C$ -процессоры могут встречаться только в поддеревьях предков вершины  $i$  и поддеревьях самой вершины  $i$ , но они не вносят вклад в сумму. Поэтому в сумму добавляют только  $A$ -вершины предков (а их на 1 больше, чем глубина вершины), а отнимает только  $C_i$ , то есть вся сумма — это ровно глубина.  $\square$

## 4 (4) Приближенный алгоритм для задачи о рюкзаке (Осипов Д.)

Напомним сначала классическое, точное решение задачи о рюкзаке методом динамического программирования.

**Задача** (о рюкзаке с повторениями). Пусть есть  $n$  видов вещей,  $i$ -тая вещь имеет вес  $w_i$  и стоимость  $v_i$ . Количество каждого вида вещей неограничено. Пусть  $W$  — максимальный вес, который выдерживает рюкзак. Найти максимальную стоимость по всем наборам вещей, суммарный вес которого не превышает  $W$ .

**Точное решение** за  $O(n \sum v_i = nV)$ . Динамическое программирование. Пусть  $K[v]$  — минимальный вес набора стоимостью ровно  $v$ . Тогда  $K[0] = 0$ ,  $K[v] = \min_{0 \leq i \leq n} \{K[v - v_i] + w_i\}$ . Ответ на задачу:  $\max\{v : K[v] \leq W\}$ .

Таким образом заполняется массив длины  $V + 1$ , на каждый поиск минимума уходит  $O(n)$  времени, на поиск ответа  $O(n)$ , всего  $O(nV)$ .  $\triangle$

Теперь рассмотрим решение, которое может выдавать решение с заданной точностью. Именно, для всякого  $0 < \varepsilon < 1$  это решение будет работать за  $O\left(\frac{n^3}{\varepsilon}\right)$  времени, а ценность найденного набора будет отличаться от оптимальной на множитель, не превышающий  $(1 - \varepsilon)$ .

**Приближенное  $\frac{1}{1-\varepsilon}$ -оптимальное решение** за  $O\left(\frac{n^3}{\varepsilon}\right)$ .

Зафиксируем параметр  $\varepsilon > 0$ . Заменяем все  $v_i$  на:

$$\hat{v}_i = \left\lceil \frac{n}{\varepsilon} \cdot \frac{v_i}{v_{\max}} \right\rceil$$

Запустим на новом наборе алгоритм ДП выше.  $\triangle$

**Теорема.** Время работы этого алгоритма есть  $O\left(\frac{n^3}{\varepsilon}\right)$

*Доказательство.*  $V = \sum v_i \leq n \cdot \frac{n}{\varepsilon} = \frac{n^2}{\varepsilon}$ . Поэтому время  $O\left(n \cdot \frac{n^2}{\varepsilon}\right) = O\left(\frac{n^3}{\varepsilon}\right)$ .  $\square$

**Теорема.** Это действительно  $\frac{1}{1-\varepsilon}$ -оптимальный алгоритм.

*Доказательство.* Пусть оптимальное решение исходной задачи — набор  $S$ , его стоимость с точки зрения старой задачи  $K^* = \sum_{i \in S} v_i$ .

С точки зрения новой задачи сумма этого набора оценивается как:

$$\sum_{i \in S} \hat{v}_i = \sum_{i \in S} \left\lceil \frac{v_i n}{\varepsilon v_{\max}} \right\rceil \geq \sum_{i \in S} \left( v_i \cdot \frac{n}{\varepsilon v_{\max}} - 1 \right) \geq K^* \frac{n}{\varepsilon v_{\max}} - n$$

<sup>7</sup>Вот видите, это просто числа а никакие не процессоры. Кто это название вообще придумал?

С точки зрения новой задачи набор  $S$  необязательно оптимален. То есть, если  $\hat{S}$  – оптимальный с точки зрения новой задачи набор, то имеем

$$\sum_{i \in \hat{S}} \hat{v}_i \geq \sum_{i \in S} \hat{v}_i \geq K^* \frac{n}{\varepsilon v_{\max}} - n$$

Нужно оценить, насколько стоимости наборов  $S$  и  $\hat{S}$  отличаются с точки зрения старой задачи, т.е. сравнить величины  $\sum_{i \in S} v_i = K^*$  и  $\sum_{i \in \hat{S}} v_i$ . Что же, так как  $\hat{v}_i \leq \frac{v_i n}{\varepsilon v_{\max}}$ ,

$$\sum_{i \in \hat{S}} v_i \geq \sum_{i \in \hat{S}} \hat{v}_i \frac{\varepsilon v_{\max}}{n} \geq \left( K^* \frac{n}{\varepsilon v_{\max}} - n \right) \frac{\varepsilon v_{\max}}{n} = K^* - \varepsilon v_{\max} \geq K^* - \varepsilon K^* = K^* (1 - \varepsilon)$$

Таким образом, полученное решение хуже оптимального не более, чем в  $\frac{1}{1-\varepsilon}$  раз.  $\square$

## 5 (5) Set Cover - i (Осипов Д.)

**Задача** (о покрытии множествами, Set Cover). Пусть дано множество  $\{e_1, \dots, e_n\} = E$  и несколько подмножеств  $S_1, \dots, S_m \subseteq E$ , каждому  $S_j$  присвоен неотрицательный вес  $w_j$ . Необходимо выбрать из  $S_1, \dots, S_m$  набор, полностью покрывающий  $E$ , с минимальным суммарным весом. Более формально: требуется найти такое  $I \subseteq \{1, \dots, m\}$ , что:

$$\bigcup_{j \in I} S_j = E \text{ и } \sum_{j \in I} w_j \text{ минимально.}$$

В этом билете представляются различные подходы к приближенным решениям этой задачи.

### 5.1 Сведение к задаче линейного программирования

**Определение.** *Задача линейного программирования* – задача минимизации (максимизации) некоторой линейной функции  $h = h(x_1, \dots, x_n)$  при ограничениях вида  $g_k \wedge b_k$ , где  $\wedge$  есть один из знаков  $\leq, \geq$ , а  $g_k = g_k(x_1, \dots, x_n)$  – линейные функции;  $b_k$  – числа. Функция  $h$  называется целевой функцией.

Далее в тексте сокращение ЛП-задача будет означать задача линейного программирования.

Обозначим за  $f_j$  количество множеств среди  $S_1, \dots, S_m$ , в которые входит элемент  $e_j$ . Положим  $f = \max_{j=1 \dots n} f_j$ . Оказывается, что эти параметры играют решающую роль в следующем решении.

Переформулируем задачу Set Cover. Каждому множеству  $S_j$  сопоставим переменную  $x_j$ , принимающую значение 1, если  $S_j$  взято в набор  $I$ , и 0 – иначе. Столбец  $x = (x_1, \dots, x_m)^T$  взаимно однозначно кодирует любой набор индексов  $I$ . Тогда целевая функция – суммарный вес покрытия – выглядит как  $\sum_{j=1}^m w_j x_j$ . Ограничение на то, что набор  $I$  – покрытие, записывается так: каждый элемент  $e_i$  покрыт хотя бы одним элементом  $I$ , или же что условие  $\sum_{j: e_i \in S_j} x_j \geq 1$  выполнено для всех  $i = 1 \dots n$ . Итак, формулировка задачи:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m w_j x_j &\rightarrow \min, \\ \sum_{j: e_i \in S_j} x_j &\geq 1, \quad i = 1 \dots n, \\ x_j &\in \{0, 1\}, \quad j = 1 \dots m \end{aligned}$$

Это почти ЛП-задача. Если бы умели решать такие задачи точно, решили бы и нашу – это просто ее переформулировка. «Ослабим» задачу до настоящей ЛП-задачи:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m w_j x_j &\rightarrow \min, \\ \sum_{j: e_i \in S_j} x_j &\geq 1, \quad i = 1 \dots n, \\ x_j &\geq 0 \quad j = 1 \dots m \end{aligned}$$

Мы перестали требовать, что  $x_j$  обязательно должен быть целым и не превышать единицы. Отметим, что если обозначить минимум ЦФ в исходной задаче за  $OPT$ , а в ослабленной – за  $Z^*$ , то будет справедлива оценка

$$Z \leq OPT,$$

так как фактически вторая задача – следствие первой.

**Приближенное  $f$ -оптимальное решение (методом прямой ЛП-задачи, primal).**

Считаем, что ослабленную ЛП-задачу мы решать умеем. Пусть  $x^* = (x_1^*, \dots, x_m^*)^T$  – оптимальное решение ослабленной ЛП-задачи, т.е.  $Z = \sum_{j=1}^m w_j x_j^*$ . Сконструируем из нее решение исходной задачи (и задачи Set Cover) следующим образом:

$$x_j = 1 \ (j \in I) \iff x_j^* \geq 1/f;$$

Итак, алгоритм заключается в следующем: мы находим минимум  $x_j^*$  ослабленной ЛП-задачи, а далее в покрытие берем все  $S_j$ , для которых получилось  $x_j^* \geq 1/f$ .  $\triangle$

Теперь докажем его корректность и точность.

**Теорема.** *Найденный набор  $S$ -ок действительно покрывает всё  $E$ .*

*Доказательство.* Именно, докажем, что каждый элемент  $e_i \in E$  покрыт какой-то  $S$ -кой. Найденное решение  $x^*$  удовлетворяет ослабленной ЛП-задаче, то есть для данного  $e_i$  имеем  $\sum_{j: e_i \in S_j} x_j^* \geq 1$ . В этой сумме по определению  $f_i = |\{j : e_i \in S_j\}| \leq f$  членов, значит, хотя бы один из них  $x_k^* \geq 1/f$ . Значит, соответствующий  $x_k = 1$ , что доказывает то, что  $e_i$  покрыт  $S_k$ .  $\square$

**Теорема.** *Приведенный алгоритм  $f$ -оптимальный.*

*Доказательство.* Обозначим (снова) минимальное значение целевой функции исходной почти-ЛП задачи за  $OPT$ , а ослабленной ЛП-задачи за  $Z \leq OPT$ . (То есть, в обозначениях  $x^*$  имеем  $Z = \sum_{j=1}^m w_j x_j^*$ ). Для всякого  $j \in I$  имеем  $x_j^* \geq 1/f$ , или же  $x_j^* \cdot f \geq 1$ . Тогда значение целевой функции в найденном решении исходной почти-ЛП задачи оценивается как:

$$\sum_{j=1}^m w_j x_j = \sum_{j \in I} w_j \leq f \sum_{j \in I} w_j x_j^* \leq f \sum_{j=1}^m w_j x_j^* = f Z^* \leq f \cdot OPT.$$

Таким образом, найденное решение хуже оптимального не более, чем в  $f$  раз.  $\square$

## 5.2 Следствие для задачи вершинного покрытия (Vertex Cover)

**Задача** (о вершинном покрытии, Vertex Cover). Пусть дан неориентированный граф  $G = (V, E)$ , каждой вершине  $i$  которого сопоставлен неотрицательный вес  $w_i$ . Найти минимальный по весу набор вершин  $C \subseteq V$  такой, что всякое ребро графа хотя бы одним из двух концов лежит в  $C$ .

**Приближенное 2-оптимальное решение.** Это частный случай задачи Set Cover: основное множество – множество ребер графа  $E$ , а каждой вершине  $i \in V$  сопоставляется множество  $S_i$  веса  $w_i$ , состоящее из ребер, смежных с  $i$ . Причем в обозначениях предыдущего раздела каждое ребро  $(i, j)$  содержится ровно в двух множествах:  $S_i, S_j$ , поэтому  $f = 2$ , а значит, алгоритм становится 2-оптимальным.  $\triangle$

### 5.3 Двойственная задача

От автора: к сожалению, получился не очень приятный для чтения параграф. Автор не смог вникнуть в «экономический смысл» двойственной ЛП-задачи, поэтому все рассуждения построены на противной формалистике с матрицами и суммами. Возможно, вы лучше поймете эту тему, прочитав ее [здесь](#) ("1.4 Rounding a dual solution")

Задачи линейного программирования можно записывать в матричном виде. Вспомним нашу ослабленную ЛП-задачу:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m w_j x_j &\rightarrow \min, \\ \sum_{j: e_i \in S_j} x_j &\geq 1, \quad i = 1 \dots n, \\ x_j &\geq 0 \quad j = 1 \dots m \end{aligned}$$

Положим  $w = (w_1, \dots, w_m)^T$  – столбец весов, тогда, очевидно, первое условие переписывается как:

$$w^T x \rightarrow \min$$

Со вторым условием разберемся так. Введем матрицу  $\mathcal{E}$  размера  $n \times m$ :

$$\mathcal{E}_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } e_i \in S_j \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Тогда для фиксированного  $1 \leq i \leq n$  условие  $\sum_{j: e_i \in S_j} x_j \geq 1$  переписывается как  $\mathcal{E}_{i*} x \geq 1$ .

Ясно, что все такие  $n$  условий можно заменить одним матричным:

$$\mathcal{E} x \geq \mathbb{I}_n,$$

где за  $\mathbb{I}_n$  обозначен столбец из единиц высоты  $n$ .

Наконец, третье условие, очевидно, просто заменяется на

$$x \geq \mathbb{O}_m,$$

где за  $\mathbb{O}_m$  обозначен столбец из нулей высоты  $m$ .

Итак, мы получили задачу  $w^T x \rightarrow \min, \mathcal{E} x \geq \mathbb{I}_n, x \geq \mathbb{O}_m$ .

**Определение.** Пусть дана ЛП-задача вида  $c^T x \rightarrow \min$  с ограничениями  $Ax \geq b, x \geq \mathbb{O}$ . Двойственная к ней ЛП-задача ставится следующим образом:  $b^T y \rightarrow \max$  при ограничениях  $A^T y \leq c, y \geq \mathbb{O}$ .

В обозначениях определения имеем  $c = w, A = \mathcal{E}, b = \mathbb{I}_n$ . Поэтому двойственная к нашей ЛП-задаче такова:

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_n^T y &\rightarrow \max, \\ \mathcal{E}^T y &\leq w, \\ y &\geq \mathbb{O}_m \end{aligned}$$

Использование этой двойственной задачи на самом деле приведет нас к алгоритму той же эффективности, но далее в билете она пригодится лучше.

«Разворачиваем» матричные обозначения. Перепишем первое ограничение:

$$(\mathcal{E}^T y)_i = \sum_{j=1}^n \mathcal{E}_{ij}^T y_j = \sum_{j=1}^n \mathcal{E}_{ji} y_j = \sum_{j=1}^n [e_j \in S_i] y_j = \sum_{j: e_j \in S_i} y_j, \quad i = 1 \dots m$$

Разверните ЦФ и второе ограничение самостоятельно и убедитесь, что вы получили:

$$\sum_{j=1}^m y_j \rightarrow \max,$$

$$\sum_{i: e_i \in S_j} y_i \leq w_j, \quad j = 1 \dots m,$$

$$y_i \geq 0, \quad i = 1 \dots n$$

Мы наконец-то готовы к созданию приближенного алгоритма на основе двойственной задачи.

**Приближенное  $f$ -оптимальное решение (методом двойственной ЛП-задачи, dual).**

Аналогично первому разделу, считаем, что эту задачу мы решать умеем. Пусть  $y^* = (y_1^*, \dots, y_n^*)^T$  – оптимальное решение двойственной ЛП-задачи. Сконструируем из нее решение  $I'$  исходной задачи (и задачи Set Cover) следующим образом:

$$j \in I' \iff \sum_{i: e_i \in S_j} y_i^* = w_j,$$

т.е. берем только те  $S_j$ , для которых первое ограничение ЛП-задачи обращается в равенство.  $\triangle$

**Теорема.** Найденный набор  $S$ -ок действительно покрывает все  $E$ .

*Доказательство.* Действительно, пусть какое-то  $e_k$  оказалось не покрытым. Тогда в  $I'$  не взяты все  $j$  такие, что  $S_j$  содержит  $e_k$ , т.е. для всех  $S_j \ni e_k$  справедливо

$$\sum_{i: e_i \in S_j} y_i^* < w_j.$$

Обозначим  $\varepsilon = \min_{j: e_k \in S_j} \left( w_j - \sum_{i: e_i \in S_j} y_i^* \right) > 0$ . Определим столбец  $y'$  следующим образом:  $y'_k = y_k^* + \varepsilon$ , а все остальные  $y'_j = y_j^*$ . Покажем, что это решение подходит в нашу ЛП-задачу.

1. Для всякого  $S_j \ni e_k$  имеем  $\sum_{i: e_i \in S_j} y'_i = \varepsilon + \sum_{i: e_i \in S_j} y_i^* \stackrel{\text{def } \varepsilon}{\leq} \left( w_j - \sum_{i: e_i \in S_j} y_i^* \right) + \sum_{i: e_i \in S_j} y_i^* = w_j$
2. А для всякого  $S_j \not\ni e_k$  имеем просто  $\sum_{i: e_i \in S_j} y'_i = \sum_{i: e_i \in S_j} y_i^* \leq w_j$ .

Таким образом, проверено первое ограничение задачи. Второе ограничение  $y_i \geq 0$  тривиально, тем самым,  $y'$  – решение ЛП-задачи. При этом решении значение ЦФ оказывается лучшим, чем при  $y^*$ :  $\sum_{j=1}^n y'_j = \varepsilon + \sum_{j=1}^n y_j^* > \sum_{j=1}^n y_j^*$ , но мы предполагали, что  $y^*$  – оптимальное решение. Противоречие.  $\square$

**Теорема.** Приведенный алгоритм  $f$ -оптимален.

*Доказательство.* Распишем суммарный вес найденного набора  $I'$ :

$$\sum_{j \in I'} w_j = \sum_{j \in I'} \sum_{i: e_i \in S_j} y_i^* = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n i = 1^n [j \in I'] [e_i \in S_j] y_i^* = \sum_{i=1}^n i = 1^n |\{j \in I' : e_i \in S_j\}| \cdot y_i^*$$

Оценим сверху в терминах  $f_i = |\{j : e_i \in S_j\}|$  и  $f = \max_{i=1 \dots n} f_i$ :

$$\leq \sum_{i=1}^n f_i y_i^* \leq f \sum_{i=1}^n y_i^*$$

Последняя сумма равна оптимальному значению ЦФ двойственной задачи. Воспользуемся без доказательства следующим фактом:

**Теорема** (о сильной двойственности). Рассмотрим ЛП-задачу и двойственную к ней. Если хотя бы у одной из двух задач есть оптимальное решение, то оно есть и у второй задачи, причем оптимальные значения целевых функций совпадают.

Значит,  $\sum_{i=1}^n y_i^*$ , будучи равной оптимальному значению прямой ЛП-задачи, не превосходит  $OPT$ . Таким образом,

$$\sum_{j \in I'} w_j \leq f \cdot OPT$$

□

## 5.4 Прямо-двойственный метод

Алгоритмы, которые решают задачи ЛП, довольно быстры. Но мы хотим еще быстрее.

**Приближенное  $f$ -оптимальное решение (прямо-двойственный метод, primal-dual).**

Вспомним, как мы из решения двойственной ЛП-задачи построили приближенное решение исходной, и как мы доказали, что это решение. Идея доказательства – если данное  $I$  не покрытие, то можем увеличить переменную, отвечающую за непокрытый элемент, – порождает следующий алгоритм:

---

```

1 PrimalDual( $E = \{e_1, \dots, e_n\}, S_1, \dots, S_m$ ):
2    $y = [0] * n$ 
3    $I = []$ 
4   while  $\exists e_i \notin \bigcup_{j \in I} S_j$  :
5        $l =$  все индексы, для которых  $e_i \in S_l$  и  $\varepsilon = \left( w_l - \sum_{k: e_k \in S_l} y_k \right)$  минимален
6        $y_l += \varepsilon$ 
7       Добавить в  $I$  все элементы  $l$ 

```

---

Итераций внешнего цикла **while** не более  $n$  штук, так как каждый раз в  $I$  добавляем не менее одного элемента. Ясно (из раздела про двойственную задачу), что это корректный  $f$ -оптимальный алгоритм. △

## 6 (6) Set Cover – ii (Осипов Д.)

### 6.1 Жадный приближенный алгоритм

Условие задачи все еще **в том билете**.

Сейчас окажется, что обычный жадный подход часто дает результат лучше, чем все подходы к Set Cover, описанные до этого. Именно, если обозначить  $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ , то получим:

**Приближенное  $H_n$ -оптимальное решение.**

Вот вполне интуитивный «жадник»:

---

```

1 Greedy( $E = [e_1, \dots, e_n], S = [S_1, \dots, S_m], w = [w_1, \dots, w_m]$ ):
2    $I = []$ 
3    $\hat{S}_1, \dots, \hat{S}_m = S_1, \dots, S_m$ 
4   while  $\bigcup I \neq E$  :
5        $l =$  любой индекс  $j$  т.ч.  $\hat{S}_j \neq \emptyset$  и  $\frac{w_j}{|\hat{S}_j|}$  минимально
6       Добавить  $l$  в  $I$ 
7       for  $j = 1 \dots m$  :
8            $\hat{S}_j = \hat{S}_j \setminus S_l$ 

```

---

△

Ясно, что этот алгоритм действительно дает покрытие всего  $E$ . Нужно доказать точность.

**Теорема.** Приведенный алгоритм  $H_n$ -оптимальный, где  $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ .

*Доказательство.* Пусть алгоритм сделал  $l$  итераций. За  $n_k$  обозначим количество непокрытых элементов  $E$  перед  $k$ -той итерацией (полагаем по определению  $n_{l+1} = 0$ ). Так,  $n = n_1 > \dots > n_{l+1} = 0$ .

**Пока поверим**, что если на  $k$ -той итерации выбрано множество  $S_i$ , то справедливо неравенство:

$$w_i \leq \frac{n_k - n_{k+1}}{n_k} OPT$$

По модулю этого факта доказываем  $H_n$ -оптимальность. Пусть  $I$  – множество индексов, найденное жадным алгоритмом. Тогда суммарный вес всех выбранных множеств оценивается как:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in I} w_j &\leq \sum_{k=1}^l \frac{n_k - n_{k+1}}{n_k} OPT \\ &= OPT \cdot \sum_{k=1}^l \underbrace{\left( \frac{1}{n_k} + \dots + \frac{1}{n_k} \right)}_{n_k - n_{k+1} \text{ раз}} \\ &\leq OPT \cdot \sum_{k=1}^l \left( \frac{1}{n_k} + \frac{1}{n_k - 1} + \dots + \frac{1}{n_{k+1} + 1} \right) \\ &= OPT \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = OPT \cdot H_n \end{aligned}$$

Это и требовалось. Теперь доказываем неравенство  $w_i \leq \frac{n_k - n_{k+1}}{n_k} OPT$ .

Для данной итерации  $k$  и выбранного на ней элемента  $S_i$  обозначим  $I_k$  – множество индексов, выбранных на итерациях  $1, \dots, k-1$ , а для всякого  $j = 1 \dots m$  положим  $\hat{S}_j = S_j \setminus \bigcup_{p \in I_k} S_p$  – множество элементов из  $S_j$ , которые были покрыты на  $k$ -той итерации. Заметьте, что получается ровно те  $\hat{S}_j$ , которые фигурируют в псевдокоде. По смыслу алгоритма получается

$$\frac{w_i}{|\hat{S}_i|} = \min_{j: \hat{S}_j \neq \emptyset} \frac{w_j}{|\hat{S}_j|}.$$

Обозначим за  $O$  множество индексов в оптимальном решении (т.е. соответствующее суммарному весу  $OPT$ ). Ясно, что  $j \in O \implies \hat{S}_j \neq \emptyset$ , так что:

$$\min_{j: \hat{S}_j \neq \emptyset} \frac{w_j}{|\hat{S}_j|} \leq \min_{j \in O} \frac{w_j}{|\hat{S}_j|}$$

Вспомним такое неравенство из курса анализа. Пусть  $a_1, \dots, a_q, b_1, \dots, b_q$  – положительные числа. Тогда

$$\min_{j=1 \dots q} \frac{a_j}{b_j} \leq \frac{\sum_{j=1 \dots q} a_j}{\sum_{j=1 \dots q} b_j} \leq \max_{j=1 \dots q} \frac{a_j}{b_j}$$

Применим его первую часть для чисел  $w_j, |\hat{S}_j|$ , где  $j \in O$ , получим:

$$\min_{j \in O} \frac{w_j}{|\hat{S}_j|} \leq \frac{\sum_{j \in O} w_j}{\sum_{j \in O} |\hat{S}_j|}$$

Числитель просто равен  $OPT$  по определению, а знаменатель не меньше  $n_k = |\bigcup_{j \in O} \hat{S}_j|$  (это просто количество оставшихся непокрытых элементов!). Резюмируя, имеем:

$$\frac{w_i}{|\hat{S}_i|} \leq \frac{OPT}{n_k}$$

А так как на  $k$ -той итерации покрываем  $|\hat{S}_i| = n_k - n_{k+1}$ , получаем наконец:

$$w_i \leq \frac{|\hat{S}_i| \cdot OPT}{n_k} = \frac{(n_k - n_{k+1}) \cdot OPT}{n_k}$$

□

## 7 (7) Транспортные сети. Задача о максимальном потоке. Разрез. Теорема о максимальном потоке и минимальном разрезе. Алгоритм Форда-Фалкерсона (Нечаев Е.)

Фактически эта глава — просто пересказ параграфов из кормена в правильном порядке. Начнем, с того, что это вообще такое. Итак,

### 7.1 Транспортные сети. Задача о максимальном потоке

**Определение 7.1.** *Транспортной сетью* называется ориентированный граф  $G = \langle V, E \rangle$  с функцией  $c: V \times V \rightarrow \mathbb{N}$ , которая называется **пропускной способностью**, причем  $c(u, v) = 0 \iff (u, v) \notin E$ , а также двумя выделенными вершинами — **источником**  $s$  и **стоком**  $t$ .

Внимание! В источник могут входить ребра, а из стока выходить.

Для удобства предполагается, что любая вершина находится на некотором пути от источника к стоку (то есть граф связный).

**Пример 7.1.** Здесь нужна картинка

**Определение 7.2.** *Потоком* называется функция  $f: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ , для которой выполняются следующие свойства:

1.  $\forall (u, v) \in V \times V: f(u, v) \leq c(u, v)$
2.  $\forall (u, v) \in V \times V: f(u, v) = -f(v, u)$
3.  $\forall u \in V \setminus \{s, t\}: \sum_{v \in V} f(u, v) = 0$

**Величиной** потока называется число  $|f| \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{v \in V} f(s, v)$ .

Одна из возможных интерпретаций этого — электрическая цепь. Тогда все свойства потоков превращаются в правила Кирхгофа.

Обратите внимание, что если есть ребро  $(u, v)$  и с потоком  $f(u, v) \neq 0$ , но нет ребра  $(v, u)$ , то тем не менее  $f(v, u) = -f(u, v) \neq 0$ . Подумайте, почему если между вершинами нет ребра ни в каком направлении, то поток между ними нулевой<sup>8</sup>.

**Задача 7.1** (о максимальном потоке). *Дана транспортная сеть. Нужно найти в ней поток максимальной величины.*

Базовая идея: взять какой-нибудь (например, тривиальный) поток и увеличивать его, пока можно. Осталось только научиться все это делать, но нужно еще несколько определений.

**Определение 7.3.** Для сети  $G$  и потока  $f$  **остаточной пропускной способностью** ребра  $(u, v)$  называется величина  $c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$ . **Остаточной сетью**  $G_f = \langle V, E_f \rangle$  называется сеть на вершинах графа  $G$  с множеством ребер  $E_f = \{(u, v) \in V \times V | c_f(u, v) > 0\}$  с пропускной способностью  $c_f$  и теми же источником и стоком.

Обратите внимание, что если в  $G$  есть ребро  $(u, v)$ , но нет ребра  $(v, u)$  (то есть его пропускная способность 0), то остаточная пропускная способность  $c_f(v, u) = c(v, u) - f(v, u) = f(u, v)$ , то есть если между вершинами есть одно из ребер с ненулевым потоком, то в остаточную сеть попадут оба. Получается, что  $|E_f| \leq 2|E|$ .

<sup>8</sup>потому что  $0 = c(u, v) \geq f(u, v) = -f(v, u) \geq -c(v, u) = 0$



**Лемма 7.1.** Пусть  $\langle G, c \rangle$  — транспортная сеть,  $f$  — поток в ней,  $G_f$  — остаточная сеть и в ней задан поток  $f'$ . Тогда  $f + f'$  — поток в  $G$ , а его величина  $|f + f'| = |f| + |f'|$ .

*Доказательство.* Проверим условия на потоки:

1.

$$(f + f')(u, v) = f(u, v) + f'(u, v) \leq f(u, v) + (c(u, v) - f(u, v)) = c(u, v)$$

2.

$$(f + f')(u, v) = f(u, v) + f'(u, v) = -f(v, u) - f'(v, u) = -(f + f')(v, u)$$

3.

$$\sum_{v \in V} (f + f')(u, v) = \sum_{v \in V} f(u, v) + \sum_{v \in V} f'(u, v) = 0$$

Поэтому это поток.

С величиной все понятно:

$$|f + f'| = \sum_{v \in V} (f + f')(s, v) = \sum_{v \in V} f(s, v) + \sum_{v \in V} f'(s, v) = |f| + |f'|$$

□

**Определение 7.4.** Увеличивающим путем называется простой путь между  $s$  и  $t$  в  $G_f$ .

**Лемма 7.2.**  $G, c, s, t$  — сеть с потоком  $f$ ,  $p$  — увеличивающий путь в  $G_f$ . Определим  $f_p: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$f_p(u, v) = \begin{cases} c_f(p), & (u, v) \in p, \\ -c_f(p), & (v, u) \in p, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

где  $c_f(p) = \min\{c_f(u, v) \mid (u, v) \in p\}$ . Тогда  $f_p$  — поток в  $G$  с величиной  $c_f(p) > 0$ .

*Доказательство.*

1.

$$f_p(u, v) \leq c_f(p) \leq c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v) \leq c(u, v)$$

если  $f(u, v) \geq 0$ . Остальные случаи тривиальны.

2. ...

3. Заметим, что для любой вершины  $v$  (не источника и не стока) в путь входит ровно одно ребро  $(u, v)$  и ровно одно ребро  $(v, w)$ , то есть у всех остальных ребер потока будут нулевые, а у этих они отличаются знаком, поэтому сумма потоков  $\sum_{v \in V} f_p(u, v) = 0$ .

□

Из лемм 7.1 и 7.2 следует, что поток на каждом ребре пути может быть увеличен на величину  $c_f(p)$  (которая называется **пропускной способностью пути**), чтобы не нарушить условия на сумму потоков и ограничение пропускной способности.

Теперь осталось научиться определять, чем максимальный поток отличается от немаксимального. Для этого нужно еще несколько определений и важная теорема, а именно

## 7.2 Разрез. Теорема о максимальном потоке и минимальном разрезе

**Определение 7.5.** Разрезом сети  $G$  называется разбиение  $V = S \sqcup T$ , что  $s \in S, t \in T$ .

Чистым потоком потока  $f$  через разрез  $(S, T)$  называется  $f(S, T) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{x \in S} \sum_{y \in T} f(x, y)$ .

Пропускной способностью разреза называется  $c(S, T) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{x \in S} \sum_{y \in T} c(x, y)$ . Минимальный разрез — это тот, у которого пропускная способность минимальна.

**Лемма 7.3.** Чистый поток через любой разрез равен величине потока.

*Доказательство.* Заметим, что  $\sum_{x \in S} \sum_{y \in S} f(x, y) = 0$ .

$$\begin{aligned} \sum_{x \in S} \sum_{y \in T} f(x, y) &= \sum_{x \in S} \sum_{y \in V} f(x, y) - \sum_{x \in S} \sum_{y \in S} f(x, y) = \\ &= \sum_{x \in S} \sum_{y \in V} f(x, y) = \sum_{y \in V} f(s, y) + \sum_{x \in S \setminus \{s\}} \sum_{y \in V} f(x, y) = \sum_{y \in V} f(s, y) = |f| \end{aligned}$$

□

**Лемма 7.4.** Величина любого потока не превышает пропускную способность любого разреза.

*Доказательство.*

$$|f| = \sum_{x \in S} \sum_{y \in T} f(x, y) \leq \sum_{x \in S} \sum_{y \in T} c(x, y) = c(S, T)$$

□

**Теорема 7.1** (О максимальном потоке и минимальном разрезе).  $G, c, s, t$  — транспортная сеть с потоком  $f$ . Следующие утверждения эквивалентны:

1.  $f$  — максимальный поток в  $G$ .
2. Остаточная сеть  $G_f$  не содержит увеличивающих путей.
3.  $|f| = c(S, T)$  для некоторого разреза  $(S, T)$ .

*Доказательство.*

- 1  $\Rightarrow$  2 Если есть увеличивающий путь, то по лемме 7.2 можно построить поток со строго большей величиной, то есть  $f$  не максимальный.
- 2  $\Rightarrow$  3 Предположим, что нет увеличивающего пути. Определим  $S = \{v \in V \mid \exists p: s \rightarrow v \text{ in } G_f\}$ ,  $T = V \setminus S$ . Понятно, что это разрез. В нем для любой пары  $(u, v) \in S \times T$  выполняется  $f(u, v) = c(u, v)$ , потому что иначе бы ребро  $(u, v)$  попало бы в  $E_f$  (напомню, что там находятся только те ребра, у которых положительная остаточная пропускная способность) а значит существовал бы путь из  $s$  в  $v$ , это противоречит  $v \in T$ .

$$|f| = \sum_{x \in S} \sum_{y \in T} f(x, y) = \sum_{x \in S} \sum_{y \in T} c(x, y)$$

- 3  $\Rightarrow$  1 Из леммы 7.4 следует, что  $|f| \leq c(S, T)$ . Поэтому если достигается равенство, то  $f$  — максимальный.

□

Теперь мы умеем все доказывать, чтобы описать алгоритм из базовой идеи, который называется

### 7.3 Алгоритм Форда-Фалкерсона

---

```

1 FFA( $G = \langle V, E \rangle, c, s, t$ ):
2   foreach  $(u, v) \in E$  :
3      $f(u, v) := 0$ 
4      $f(v, u) := 0$ 
5   while  $\exists p: s \rightarrow t, p \subseteq E_f$  :
6      $c_f(p) := \min\{c_f(u, v) \mid (u, v) \in p\}$ 
7     foreach  $(u, v) \in p$  :
8        $f(u, v) += c_f(p)$ 
9        $f(v, u) := -f(u, v)$ 

```

---

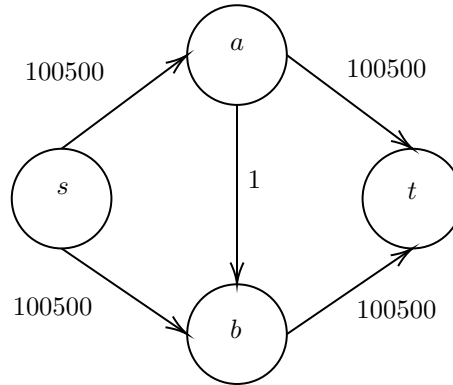
На практике, понятно, он возникает в основном только с целыми числами. Проблема этого алгоритма в том, что не указано, как именно нужно искать увеличивающий путь. Если искать его неудачно<sup>9</sup>, то алгоритм может и зависнуть.

В предположении, что числа рациональные (их можно свести к целым) и при использовании поиска в глубину или поиска в ширину для нахождения увеличивающего, время его работы составляет  $O(|E||f^*|)$ , где  $f^*$  — максимальный поток (в случае использования поиска в ширину этот алгоритм называется **алгоритмом Эдмондса-Карпа**, для него в секции 8 мы докажем более точную оценку).

Проанализируем время работы. Первый цикл выполняется за время  $\Theta(|E|)$ , второй цикл выполняется не более  $|f^*|$  раз (потому что величина потока в каждую итерацию увеличивается хотя бы на 1).

Время работы поиска  $O(|V| + |E|) = O(|E|)$  (так как наш граф связный, а в нем  $|E| \geq |V| - 1$ , поэтому весь цикл выполняется за время  $O(|E||f^*|)$ ).

**Пример 7.2.** Алгоритм работает плохо, если найдется неудачный увеличивающий путь:



Поиском в глубину находится путь  $s \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow t$ , поэтому за одну итерацию поток увеличивается всего лишь на единицу.

В следующей итерации может найтись путь  $s \rightarrow b \rightarrow a \rightarrow t$  (так как остаточная пропускная способность  $b \rightarrow a$  теперь  $0 - (-1) = 1$ ) и он опять уменьшится всего лишь на 1, поэтому нужный поток найдется за 100500 итераций.

### 7.4 Применение к паросочетаниям

Этим алгоритмом можно пользоваться, чтобы найти в двудольном графе  $G = \langle V, E \rangle$  максимальное паросочетание. Для этого нам нужно теперь построить транспортную сеть и научиться сопоставлять потокам паросочетания.

Напомню, что мощностью паросочетания называется количество ребер в нем.

Дан двудольный граф  $G = \langle V = L \sqcup R, E \rangle$ ,  $L, R$  — доли. Добавим еще две выделенные вершины  $s, t$  (источник и приемник) и построим сеть  $G' = \langle V' = V \cup \{s, t\}, E' \rangle$ , где  $E' =$

---

<sup>9</sup>а еще если значения пропускных способностей иррациональные, пример можно найти в [англоязычной википедии](#)

$\{(s, u) | u \in L\} \cup \{(u, v) | (u, v) \in E\} \cup \{(v, t) | v \in R\}$ . У каждого ребра единичная пропускная способность.

**Определение 7.6.** Поток называется **целочисленным**, если  $\forall (u, v) \in V \times V: f(u, v) \in \mathbb{Z}$ .

**Лемма 7.5.** Каждому паросочетанию в  $G$  взаимно однозначно соответствует целочисленный поток  $f$  в  $G'$  мощности  $|f| = |M|$ .

*Доказательство.* Для начала построим поток по паросочетанию: если  $(u, v) \in M$ , то  $f(s, u) = f(u, v) = f(v, t) = 1$ ,  $f(t, v) = f(v, u) = f(v, s) = -1$ , для всех остальных  $(u, v)$   $f(u, v) = 0$ . Понятно, что это поток, и так как чистый поток через разрез  $(L \cup \{s\}, R \cup \{t\})$  равен  $M$ , то и величина всего потока равна  $|M|$ .

Пусть теперь  $f$  – поток в  $G'$ . Определим

$$M = \{(u, v) | u \in L, v \in R, f(u, v) > 0\}$$

Поскольку пропускная способность каждого ребра равна 1, в вершину  $u \in L$  входит не больше одной единицы потока. Так как она обязана куда-то выходить и поток целочисленный, она выходит по одному ребру. Так что единица положительного потока входит в  $u$ , тогда существует единственная вершина  $v \in R$ , в которую эта единица входит. То же самое можно сказать про любую вершину  $v \in R$ , поэтому это паросочетание. Понятно, что величина этого потока равна  $|M|$ : по построению нашей сети  $f(s, v) = 0 \forall v \in R \cup \{s, t\}$ , поэтому

$$|f| = \sum_{v \in V' \setminus \{s\}} f(s, v) = \sum_{v \in L} f(s, v) = |M|$$

□

Понятно, что максимальному паросочетанию  $M$  соответствует максимальный поток (поскольку иначе существует паросочетание  $M'$ , для которого  $|M'| = |f'| > |f| = |M|$ ).

Чтобы применять условия этой леммы, нужно убедиться, что

**Лемма 7.6.** Алгоритм Форда-Фалкерсона в сети с целочисленной пропускной способностью действительно строит целочисленный поток.

*Доказательство.* Индукция по количеству итераций цикла. □

## 8 (8) Алгоритм Эдмондса-Карпа (Нечаев Е.)

Вариант реализации алгоритма Форда-Фалкерсона, где в качестве алгоритма поиска пути используется поиск в ширину (предполагается, что у всех ребер единичная длина), называется **алгоритмом Эдмондса-Карпа**. Для него есть хорошая оценка времени работы  $O(|V||E|^2)$ . Она хорошая, потому что не зависит от величины максимального потока.

Обозначим как  $\delta_f(u, v)$  кратчайшее расстояние между вершинами  $u$  и  $v$  в остаточной сети  $G_f$ .

**Лемма 8.1.** Для всех вершин  $v \in V \setminus \{s, t\}$  длина кратчайшего пути  $\delta_f(s, v)$  в остаточной сети  $G_f$  монотонно возрастает при выполнении алгоритма.

*Доказательство.* Будем доказывать от обратного. Предположим, что существует такое увеличение потока, которое приводит к уменьшению длины кратчайшего пути из  $s$  к некоторой вершине  $v$ .  $f$  – поток перед этим увеличением по пути,  $f'$  – поток после этого увеличения. Выберем  $v$ , чтобы  $\delta_{f'}(s, v)$  было минимальным. Тогда  $\delta_{f'}(s, v) < \delta_f(s, v)$ . Пусть  $u$  – вершина перед  $v$  в этом пути в  $G_{f'}$ , то есть  $\delta_{f'}(s, u) = \delta_{f'}(s, v) - 1$ . По выбору  $v$   $\delta_{f'}(s, u) \geq \delta_f(s, u)$  (иначе противоречие с минимальностью).

Теперь предположим, что  $(u, v) \in E_f$ . Но тогда

$$\delta_{f'}(s, v) = \delta_{f'}(s, u) + 1 \geq \delta_f(s, u) + 1 = \delta_f(s, v)$$

Теперь рассмотрим случай, когда  $(u, v) \notin E_f$  (но  $(u, v) \in E_{f'}$ ). Заметим, что такое может произойти только в том случае, когда поток на ребре  $f'(u, v) < f(u, v)$  ( $c_{f'}(u, v) > 0 = c_f(u, v)$ ),

а значит, поток на ребре  $(v, u)$  увеличился. Алгоритм увеличивает поток только вдоль кратчайших путей, а это значит, что в  $G_f$  кратчайший путь  $s \rightarrow u$  содержит ребро  $(v, u)$ . Поэтому

$$\delta_f(s, v) = \delta_f(s, u) - 1 \leq \delta_{f'}(s, u) - 1 = \delta_{f'}(s, v) - 1 - 1$$

Опять получили противоречие с условием  $\delta_{f'}(s, v) < \delta_f(s, v)$ .  $\square$

Теперь мы можем посчитать ограничение на количество итераций основного цикла (того, в котором проводятся увеличения пути) алгоритма.

**Определение 8.1.** *Критическим* назовем ребро  $(u, v)$  в пути  $p$ , для которого выполняется  $c_f(u, v) = c_f(p)$  (ребро с наименьшей пропускной способностью из леммы 7.2).

**Лемма 8.2.** *Количество итераций основного цикла —  $O(|V||E|)$ .*

*Доказательство.* Понятно, что в каждом увеличивающем пути есть критическое ребро, поэтому нам нужно посчитать, сколько раз каждое ребро может побывать критическим. Докажем, что не больше  $\frac{|V|}{2} - 1$  раз.

Пусть  $(u, v) \in E$  — критическое ребро. Так как увеличение проходит по кратчайшему пути,  $\delta_f(s, v) = \delta_f(s, u) + 1$ . После этого это ребро пропадет из остаточной сети и появится обратно, только если  $(v, u)$  появится в увеличивающем пути. Если  $f'$  — это такой новый поток, то  $\delta_{f'}(s, u) = \delta_{f'}(s, v) + 1$ . По лемме 8.1,  $\delta_f(s, v) \leq \delta_{f'}(s, v)$ , а значит

$$\delta_{f'}(s, u) = \delta_{f'}(s, v) + 1 \geq \delta_f(s, v) + 1 = \delta_f(s, u) + 2$$

Так что между случаями, когда ребро становится критическим, расстояние от источника вырастает как минимум на 2. Промежуточными вершинами на пути от  $s$  к  $u$  не могут быть  $s$ ,  $u$ , и  $t$ . А это значит, что пока вершина  $u$  станет недостижимой из источника, расстояние до нее не превысит  $|V| - 2$ . Поэтому ребро  $(u, v)$  станет критическим не более  $\frac{|V|-2}{2}$  раз (делим на 2, потому что половину случаев ребро  $(v, u)$  становится критическим). Так как всего ребер в остаточной сети может быть  $O(|E|)$  (обоснование есть на странице 16), количество критических ребер будет  $O(|E||V|)$ .

Так как внутренность цикла выполняется за время  $O(|E|)$ , то общее время работы алгоритма Эдмондса-Карпа —  $O(|V||E|^2)$ .  $\square$

## 9 (9) Алгоритм проталкивания предпотока (Нечаев Е.)

Этот алгоритм также находит максимальный поток, но отличается от предыдущих описанных алгоритмов тем, что не является вариантом алгоритма Форда-Фалкерсона, а также другой оценкой времени работы —  $O(|V|^2|E|)$ .

**Определение 9.1.** *Предпоток* называется функция  $f: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  на вершинах транспортной сети  $G = \langle V, E \rangle, s, t$ , для которой выполняются следующие свойства:

1.  $\forall (u, v) \in V \times V: f(u, v) \leq c(u, v)$
2.  $\forall (u, v) \in V \times V: f(u, v) = -f(v, u)$
3.  $\forall u \in V \setminus \{s\}: \sum_{v \in V} f(v, u) \geq 0$

$e(u) = \sum_{v \in V} f(v, u)$  называется **избыточным потоком**.

Вершина  $u \in V$  называется **переполненной**, если  $e(u) > 0$ .

**Определение 9.2.** Функция  $h: V \rightarrow \mathbb{N}$  называется **функцией высоты**, если выполняются следующие свойства:

1.  $h(s) = |V|$
2.  $h(t) = 0$
3.  $\forall (u, v) \in E_f: h(u) \leq h(v) + 1$

## 9.1 Интуитивные соображения

Представим, что наша сеть – это система из резервуаров  $V$ , соединенных трубами  $E$  и находящихся на разной высоте  $h$ . Предпоток – это жидкость, которая течет по трубам, но где-то ее втекает больше, чем вытекает, и она остается в резервуаре (мы предполагаем, что они бесконечные). Можно "перелить" (операция проталкивания) жидкость из резервуара в соединенные трубой резервуары (увеличить значение предпотока на смежных трубах, если выполняются соответствующие интуитивные условия: высота резервуара  $u$ , из которого переливают, должна быть на единицу больше высоты резервуара  $v$ , в который переливают, и  $c_f(u, v) > 0$ ), находящиеся на меньшей высоте или, если таких не найдется, "поднять" (операция поднятия) резервуар на высоту на единицу большую, чем самый нижний из смежных резервуаров.

Почти очевидно, что в таком случае предпоток превратится в поток. Как будет показано, он будет и максимальным.

## 9.2 Операция проталкивания

---

```

1 Push( $(u, v) \in E$ ):
2   if  $e(u) > 0$  and  $c_f(u, v) > 0$  and  $h(u) - h(v) = 1$  :
3      $d := \min(e(u), c_f(u, v))$ 
4      $f(u, v) += d$ 
5      $f(v, u) := -f(u, v)$ 
6      $e(u) -= 'd'$ 
7      $e(v) += 'd'$ 

```

---

Условие  $h(u) - h(v) = 1$  нужно, так как из отрицания пункта 3 условия на функцию высоты следует, что если высоты различаются больше чем на единицу, остаточных ребер просто нет, поэтому проталкивать что-либо бессмысленно.

Понятно, что предпоток после проталкивания остается предпоток (сохранение свойств 1, 2 совсем очевидно, свойство 3 сохраняется, потому что мы вычитаем что-то, не превосходит  $e(u)$ ).

Проталкивание называется **насыщающим**, если после него  $c_f(u, v) = 0$  (ребро, соответственно, становится **насыщенным**). Понятно, что после ненасыщающего проталкивания вершина  $u$  перестает быть переполненной (мы так выбираем  $d = \min(e(u), c_f(u, v))$ ), что зануляется либо переполненность, либо остаточная пропускная способность).

**Лемма 9.1.** *После проталкивания функция высоты остается функцией высоты (не нарушаются ее свойства).*

*Доказательство.* Так как высоты не меняются, нужно только проверить, что сохраняется условие 3. Операция может удалить ребро  $(u, v)$  из  $E_f$  (если  $c_f(u, v) < e(u)$ ) или добавить ребро  $(v, u)$ , если его не было (так как если  $e(u) < c_f(u, v)$ , то  $c_{f_{\text{new}}}(v, u) = c(v, u) + f_{\text{new}}(u, v) > 0 = c_f(v, u)$ ). В первом случае удаление ребра делает неактуальным ограничение. Во втором случае выполняется  $h(v) = h(u) + 1$ , поэтому  $h(v) \leq h(u) + 1$ . Поэтому  $h$  остается функцией высоты.  $\square$

## 9.3 Операция подъема

---

```

1 Relabel( $u \in V$ ):
2   if  $e(u) > 0$  and  $\forall v \in \{x | (u, x) \in E_f\}: h(u) \leq h(v)$  :
3      $h(u) := 1 + \min_{(u, v) \in E_f} \{h(v)\}$ 

```

---

**Лемма 9.2.** *После подъема функция высоты остается функцией высоты (не нарушаются ее свойства).*

*Доказательство.* Докажем, что эта функция назначает наибольшую возможную высоту, удовлетворяющую условиям высоты. Так как вершина  $u$  переполнена ( $e(u) > 0$ ), то существует вершина  $v$ , для которой  $f(v, u) > 0$ , значит,  $c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v) = c(u, v) + f(v, u) > 0$ , а значит,  $(u, v) \in E_f$ . Поэтому  $\min_{(u,v) \in E_f} \{h(v)\}$  определено и это наибольшее возможное значение, удовлетворяющее условию 3.

Понятно, что источник и сток выше поднять нельзя, рассмотрим другую вершину  $u$  и входящее в него ребро  $(u, v)$ . Поскольку высота строго увеличивается ( $h(u) \leq h(v)$  для всех  $(u, v) \in E_f$  до поднятия, а значит,  $h(u) < 1 + h(v) = h_{\text{new}}(u)$  для такого смежного  $v$ , что  $h(v)$  минимально), выполняется  $h(w) \leq h(u) + 1 \leq h_{\text{new}}(u) + 1$   $\square$

## 9.4 Начальный предпоток

Начальный предпоток определяется так:

$$f(u, v) = \begin{cases} c(u, v), & u = s, \\ -c(u, v), & v = s, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Начальная высота определяется так:

$$h(u) = \begin{cases} |V|, & u = s, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Это действительно корректно определенная функция высоты, поскольку единственные ребра, для которых не выполняется условие 3 – это ребра, выходящие из источника, но так как для них значение предпотока равно значению пропускной способности, их нет в  $E_f$ .

## 9.5 Алгоритм. Его корректность.

Для начала нужно доказать лемму:

**Лемма 9.3.** Пусть  $G, s, t$  – транспортная сеть с предпотоком  $f$  и какой-то функцией высоты  $h$ . Тогда к любой переполненной вершине можно применить либо проталкивание, либо подъем.

*Доказательство.* Для  $(u, v) \in E_f$  выполняется  $h(u) \leq h(v) + 1$  (по условию на высоту). Если  $h(u) - h(v) = 1$  для какой-то вершины  $v$ , то выполняется операция проталкивания, а иначе  $h(u) < h(v) + 1 \Rightarrow h(u) \leq h(v) \forall (u, v) \in E_f$ , а значит, выполнима операция подъема.  $\square$

Понятно, что они не могут быть выполнены одновременно.

Теперь мы можем написать алгоритм:

---

```

1 PPA( $G = \langle V, E \rangle, c, s, t$ ):
2   initialize-preflow( $G, s$ )
3   while  $\exists u: (\exists v \in V: \text{Pushable}(u, v)) \vee \text{Relabelable}(u)$  :
4     if  $\text{Pushable}(u, v)$  :
5       | Push( $(u, v)$ )
6     else
7       | Relabel( $u$ )

```

---

**Лемма 9.4.**  $G = \langle V, E \rangle, s, t, f, h$  – транспортная сеть с источником, стоком, предпотоком и функцией высоты. Тогда нет пути из источника в сток в  $G_f$ .

*Доказательство.* Предположим, что существует такой путь  $v_0 = s \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_{k-1} \rightarrow t = v_k$ ,  $(v_i, v_{i+1}) \in E_f$ . Можно считать, что этот путь простой, а поэтому  $k < |V|$ . Кроме того,  $h(v_i) \leq h(v_{i+1}) + 1 \forall 0 \leq i \leq k-1$ . Но, сложив все эти неравенства, мы получим, что  $h(s) \leq h(t) + k \Rightarrow |V| \leq 0 + k$ . Противоречие.  $\square$

**Теорема 9.1** (О корректности). *После окончания работы алгоритма  $f$  становится максимальным потоком.*

*Доказательство.* Понятно, что  $f$ , инициализированный в `initialize_preflow`, является предпотоком.

В процессе выполнения алгоритма производятся операции проталкивания и поднятия, которые, как мы уже знаем, оставляют  $f$  и  $h$  предпотоком и функцией высоты.

После окончания работы все вершины, кроме  $s$  и  $t$  должны иметь избыточный поток 0 (по лемме 9.3). Поэтому это поток. По лемме 9.4 нет пути из источника в сток, а значит по теореме 7.1 этот поток — максимальный.  $\square$

## 9.6 Время работы

**Лемма 9.5.**  *$G, s, t, f$  — Транспортная сеть с предпотоком. Тогда для любой вершины  $u$  с ненулевым избыточным потоком существует простой путь  $u \rightarrow s$  в  $G_f$ .*

*Доказательство.* Пусть  $U = \{v | \exists p: u \rightarrow v \text{ — простой путь в } G_f\}$ . Предположим, что  $s \notin U$ .

Заметим, что  $\forall v \in U, w \in V \setminus U: f(w, v) \leq 0$ , так как если бы  $f(w, v) > 0$ , то  $f(v, w) < 0 \Rightarrow c_f(v, w) > 0$ , а значит  $(v, w) \in E_f$  и существует простой путь  $u \rightarrow v \rightarrow w$ , что противоречит выбору  $w$ .

Отсюда следует, что

$$\sum_{x \in U} e(x) = \sum_{x \in U} \sum_{v \in V} f(v, x) = \sum_{y \in V \setminus U} \sum_{x \in U} f(y, x) + \sum_{y \in U} \sum_{x \in U} f(y, x) = \sum_{y \in V \setminus U} \sum_{x \in U} f(y, x) \leq 0$$

Поскольку избыточные потоки неотрицательны для любой вершины, кроме  $s$ , а  $s \notin U$ , то все избыточные потоки нулевые, а значит  $e(u) = 0$ , что противоречит условию.  $\square$

**Лемма 9.6** (Ограничение на функцию высоты). *Во время работы алгоритма  $\forall u \in V: h(u) \leq 2|V| - 1$ .*

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} h(s) &= |V| \leq 2|V| - 1 \\ h(t) &= 0 \leq 2|V| - 1 \end{aligned}$$

Для  $u \in V \setminus \{s, t\}$  в начале алгоритма  $h(u) = 0$ . После операции поднятия вершина переполнена, а значит есть простой путь  $v_0 = u \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow s = v_k$  (по лемме 9.5), а значит,  $k \leq |V| - 1$ . По условию на высоту  $h(v_i) \leq h(v_{i+1}) + 1$ . Складывая неравенства, получаем  $h(u) \leq h(s) + k \leq |V| + |V| - 1$ .  $\square$

**Теорема 9.2** (Оценка времени). *Алгоритм выполняется за время  $O(|V|^2|E|)$ .*

*Доказательство.* Построим ограничение на каждую из операций: на поднятия, насыщающие и ненасыщающие проталкивания.

**Операций поднятия меньше чем  $2|V|^2$ .** Тут все совсем просто. Подниматься могут  $|V \setminus \{s, t\}| = |V| - 2$  вершин и, так как изначально все высоты 0, а верхняя граница  $2|V| - 1$ , всего поднятий не больше  $(|V| - 2)(2|V| - 1) < 2|V|^2$ .

**Операций насыщающих проталкиваний меньше чем  $2|V||E|$ .** (напомним, что насыщающим проталкиванием вдоль ребра  $(u, v)$  называется такое, что после него  $c_f(u, v) = 0$ .) Будем считать проталкивания вдоль  $(u, v)$  и вдоль  $(v, u)$  вместе. Когда произошло проталкивание вдоль  $(u, v)$ , выполнялось  $h(u) = h(v) + 1$ . чтобы оно произошло еще раз, должно произойти проталкивание вдоль  $(v, u)$ , для которого требуется  $h(v) = h(u) + 1$ , поэтому высота  $u$  должна увеличиться (уменьшиться она не может) хотя бы на 2. Из ограничения на высоту получаем, что насыщающих увеличений вдоль  $(u, v)$  или  $(v, u)$  должно быть меньше  $\frac{2|V|-1}{2} + \frac{2|V|-1}{2} < 2|V|$ . Значит всего насыщающих увеличений вдоль любого ребра должно быть меньше  $2|V||E|$ .

**Операций ненасыщающих проталкиваний меньше чем  $4|V|^2(|V| + |E|)$ .** Рассмотрим величину  $\Phi = \sum_{\substack{v \in V \\ e(v) > 0}} h(v)$ . Понятно, что  $\Phi \geq 0$ . В начале и в конце выполнения алгоритма



$\Phi = 0$  (в конце, потому что у потока единственная переполненная вершина – это  $t$ , но ее высота 0) и оно может измениться после любой из операций, однако при поднятии и насыщающем проталкивании значение обязательно вырастет меньше чем на  $2|V|$ : первое – из ограничения на высоту, а второе – из того, что только одна вершина  $v$  (если проталкивать вдоль  $(u, v)$ ) может стать переполненной, а ее высота меньше строго меньше  $2|V|$ . При ненасыщающем же проталкивании  $\Phi$  уменьшается хотя бы на 1: пусть мы проталкиваем вдоль  $(u, v)$ . После него  $e(u) = 0$ , поэтому  $\Phi$  уменьшилась на  $h(u)$ , а вершина  $v$  могла стать, а могла не стать переполненной. Если она не стала, то она не влияет на  $\Phi$ , а если стала, то к  $\Phi$  добавилось  $h(v)$ , но так как  $h(u) - h(v) = 1$ ,  $\Phi$  уменьшилось на 1. Из прошлых пунктов мы знаем количество увеличений и насыщающих проталкиваний, а значит знаем верхнюю границу на  $\Phi$ :  $\Phi < (2|V|)(2|V|^2) + (2|V|)(2|V||E|) = 4|V|^2(|V| + |E|)$ . Так как  $\Phi$  в конце становится нулем, ненасыщающих проталкиваний меньше чем  $4|V|^2(|V| + |E|)$ .

Из всего этого получается оценка на количество операций.  $O(2|V|^2 + 2|V||E| + 4|V|^2(|V| + |E|)) = O(|V|^2|E|)$  (напомню, что у нас связный граф, а значит,  $|V| \leq |E| + 1$ ).

Если хранить список переполненных вершин и для каждой вершины хранить список менее высоких соседей, то операция проталкивания реализуется за  $O(1)$ , а операция поднятия за  $O(|V|)$  (поскольку нужно вычислить минимум). Понятно, что при такой структуре выбор операции реализуется за  $O(1)$ , что дает оценку времени.  $\square$

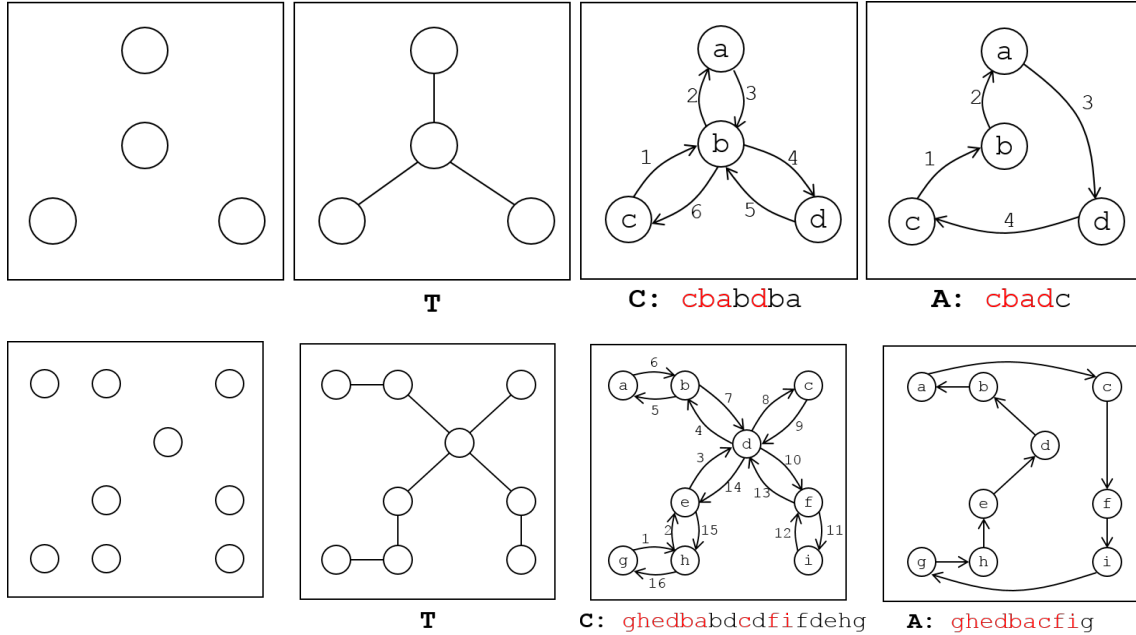
## 10 (10) Приближенные алгоритмы для метрической задачи коммивояжера (Осипов Д.)

**Задача** (Метрическая задача коммивояжера, metric TSP). Дан **полный** неориентированный граф с неотрицательными весами  $l$  у ребер, удовлетворяющий неравенству треугольника: для любой тройки вершин  $u, v, w$  верно  $l(uv) + l(vw) \geq l(uw)$ . Найти в нем цикл минимальной длины, проходящий по всем вершинам (минимальный гамильтонов цикл).

### 10.1 2-оптимальное решение

**Решение (2-оптимальное).** Найдем  $T$  – минимальное остовное дерево в  $G$ . Удвоим в  $T$  каждое ребро, получится эйлеров граф  $D$ . Пусть  $C$  – порядок вершин в эйлеровом цикле в  $D$ . Построим по нему гамильтонов цикл  $A$  следующим образом: для всякой вершины  $v$  удалим все ее вхождения в список  $C$ , кроме первого.  $\triangle$

Два примера работы алгоритма на полных графах, заданных набором точек на плоскости:



Обозначим  $TSP$  – вес оптимального гамильтонова цикла,  $MST$  – вес найденного минимального остовного дерева  $T$ .

**Теорема.**  $Вес\ A \leq 2 \cdot TSP$

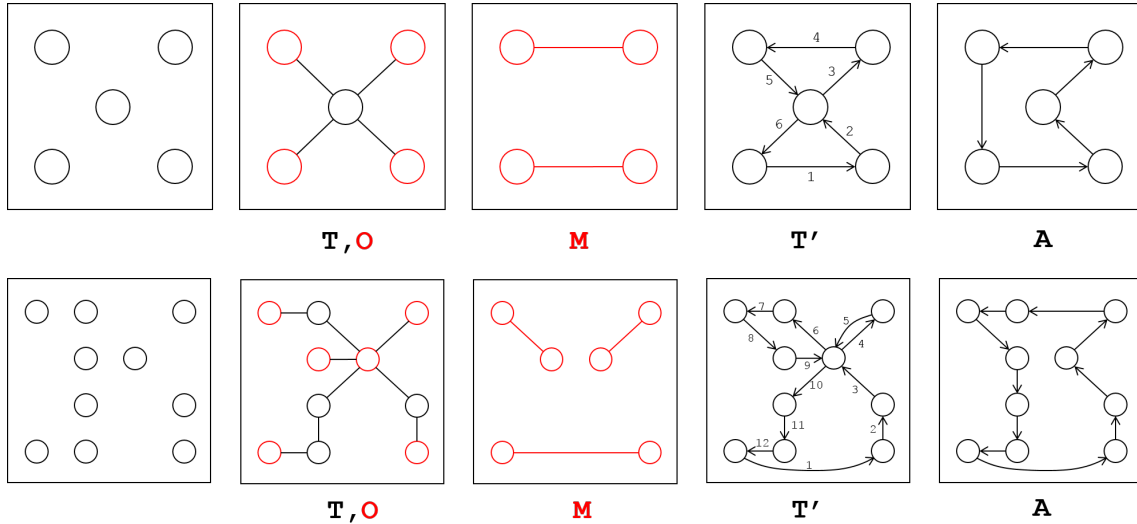
*Доказательство.* Заметим, что  $MST \leq TSP$ . Действительно, удалением любого ребра из гамильтонова цикла мы получаем какое-то остовное дерево, вес которого не превосходит  $TSP$ .

Вес эйлерова цикла  $C$  по определению равен  $2 \cdot MST \leq 2 \cdot TSP$ . Вес  $A$  не превосходит  $C$ , потому что при каждом удалении вершины суммарное расстояние неувеличивается по неравенству треугольника. Стало быть,  $вес\ A \leq 2 \cdot TSP$ .  $\square$

## 10.2 1.5-оптимальное решение

**Решение (1.5-оптимальное).** Найдем  $T$  – минимальное остовное дерево в  $G$ . Выделим все вершины нечетной степени в  $T$ , их четное число. Обозначим индуцированный (из  $G$ ) граф на этих вершинах  $O$ . Этот граф все еще полный, значит в нем есть совершенное паросочетание. Пусть  $M$  – ребра минимального совершенного паросочетания в  $O$ . Добавим их в  $T$  (если какое-то ребро  $M$  уже есть в  $T$ , то добавим еще раз) – получим граф  $T'$ , у которого степени всех вершин четные. Дальнейшие действия те же: пусть  $C$  – порядок вершин в эйлеровом цикле в  $T'$ , гамильтонов цикл  $A$  строится по  $C$  выкидыванием всех повторных вхождений всякой вершины.  $\triangle$

Снова два примера работы алгоритма:



Снова обозначим  $TSP$  – вес оптимального гамильтонова цикла,  $MST$  – вес остовного дерева  $T$ .

**Теорема.**  $Вес\ A \leq \frac{3}{2} \cdot TSP$

*Доказательство.* По тем же рассуждениям (неравенство треугольника) вес найденного гамильтонова цикла  $A$  не превосходит вес эйлерова графа  $T'$ , который равен  $MST + вес\ M$ , и по тем же рассуждениям  $MST \leq TSP$ . Достаточно показать, что  $вес\ M \leq TSP/2$ , а для этого в свою очередь достаточно доказать, что существует какое-то совершенное паросочетание на вершинах  $O$  веса  $\leq TSP/2$ .

Мы построим это паросочетание так. Упорядочим вершины  $M$  в том порядке, в котором они идут в **оптимальном** гамильтоновом обходе в  $G$ . Пусть  $H$  – гамильтонов цикл на вершинах  $M$  в указанном порядке. Так как  $H$  получен из оптимального гамильтонова цикла удалением вершин из него, то  $вес\ H \leq TSP$ . Далее, удалением из  $H$  ребер через одно мы можем получить два различных совершенных паросочетания на вершинах  $M$ , причем их объединение есть в точности  $H$ . Сумма весов этих двух паросочетаний есть вес  $H$ , таким образом, хотя бы у одного из двух паросочетаний вес не превосходит  $TSP/2$ , что и требовалось.  $\square$

## 11 (11) Алгоритмы Прима и Крускала для задачи о минимальном остовном дереве (Нечаев Е.)

**Определение 11.1.** Для связного графа  $G = \langle V, E \rangle$  **остовным деревом** называется подграф  $G' = \langle V, E' \rangle$ ,  $E' \subseteq E$ , который является деревом.

**Задача 11.1.** В связном взвешенном неориентированном графе  $G = \langle V, E \rangle$  с весовой функцией  $w: E \rightarrow \mathbb{R}$  найти остовное дерево минимального веса.

Вспомним, что подмножества ребер графа, в которых нет циклов, являются независимыми в *цикловом матроиде*. Наша задача превращается в поиск базы минимального веса, для которого можно использовать *жадный алгоритм*<sup>10</sup>: начиная с пустого множества последовательно добавляем ребра минимального веса, пока можем.

Алгоритмы Прима и Крускала являются реализациями этого подхода. Остается только научиться быстро находить ребро минимального веса, который можно добавить, чтобы множество осталось независимым.

**Определение 11.2.** **Разрезом** графа  $G = \langle V, E \rangle$  называется пара  $(S, T)$ ,  $S, T \subseteq V$ , что  $V = S \sqcup T$ . Ребро называется **пересекающим разрез**, если концы ребра находятся в разных множествах разреза. Разрез называется **согласованным** со множеством  $A$ , если никакое ребро из  $A$  не пересекает разрез. Ребро называется **легким**, если оно пересекает разрез и имеет минимальный вес среди всех таких ребер, пересекающих разрез.

**Теорема 11.1.** В графе  $G = \langle V, E \rangle$  с весовой функцией  $w$   $A \subseteq E$  – независимое подмножество, согласованное с разрезом  $(S, T)$ , ребро  $(u, v)$  – легкое. Тогда  $A \cup \{(u, v)\}$  – подмножество базы минимального веса, содержащего  $A$ .

*Доказательство.* Понятно, что множество будет независимым: если это нет так, то еще какое-то ребро пересекает разрез.

Пусть  $M$  – база минимального веса, содержащая  $A \cup \{(u, v)\}$ ,  $M'$  – другая база минимального веса, содержащая  $A$ . Если она не содержит  $(u, v)$ , то она содержит какое-то другое ребро  $(x, y)$ , пересекающее разрез, но тогда  $w(M') = w(M) - w((u, v)) + w((x, y)) \geq w(M)$ . Но также  $w(M') \leq w(M) \Rightarrow w(M') = w(M)$ .  $\square$

**Следствие 11.1.**  $G = \langle V, E \rangle$ ,  $w$  – неориентированный взвешенный связный граф.  $A \subseteq E$  – независимое множество в его цикловом матроиде.  $C = \langle V_C, E_C \rangle$  – компонента связности леса  $G_A = \langle V, A \rangle$ . Если  $(u, v)$  – легкое ребро, которое соединяет  $C$  с другой компонентой связности, то  $A \cup \{u, v\}$  – подмножество базы минимального веса, содержащего  $A$ .

*Доказательство.* Разрез  $(V_C, V \setminus V_C)$  согласован с  $A$  и  $(u, v)$  его пересекает.  $\square$

### 11.1 (WIP) Алгоритм Крускала

Этот алгоритм использует структуру данных, которая называется

#### 11.1.1 Система непересекающихся множеств

Эта структура поддерживает  $S$  и множество множеств  $\{S_1, \dots, S_k\}$ ,  $S_i \cap S_j = \emptyset$ ,  $\bigcup S_i = S$ . У каждого множества есть представитель  $r_i \in S_i$ . Кроме того, поддерживаются 3 операции:

**Make-Set**( $x \notin S$ ) создает новое множество  $S_{k+1} = \{x\}$ .

**Union**( $x, y \in S$ ) объединяет два множества  $S_x$  и  $S_y$ , содержащих элементы  $x$  и  $y$ . Представителем выбирается любой элемент из  $S_x \cup S_y$ .

**Find-Set**( $x \in S$ ) возвращает представитель множества, которое содержит элемент  $x$ .

Можно просто реализовать СНМ с помощью связных списков: каждое множество состоит из своего списка. Каждый элемент ссылается на первый элемент списка, который и является его представителем. В этом случае операции **Make-Set** и **Find-Set** реализуются за время  $O(1)$ .

TODO: другая реализация; эвристики. Нужно ли это вообще? Эффективная реализация была на практике в первом семестре.

<sup>10</sup>В курсе комбинаторики был поиск множества максимального веса, но это, по большому счету, одно и то же, потому что можно инвертировать все веса

### 11.1.2 Сам алгоритм

---

```
1 Kruskal-MST( $G = \langle V, E \rangle, w$ ):
2    $A = \emptyset$ 
3   foreach  $x \in E$  :
4      $\text{Make-Set}(x)$ 
5    $\text{Sort}(E, \lambda x \lambda y. [w(x) < w(y)])$ 
6   foreach  $(u, v) \in E$  :
7     if  $\text{Find}(u) \neq \text{Find}(v)$  :
8        $A := A \cup \{(u, v)\}$ 
9        $\text{Union}((u, v))$ 
```

---

Это прямо в буквальном смысле реализация жадного алгоритма, поэтому его корректность очевидна.

Оценка времени зависит от ммм тьгыгыть жюжжб (времени работы операций СНМ) и времени сортировки. Если использовать самую быструю реализацию с эвристиками объединения по рангу и сжатия путей, то операция **Make-Set** занимает время  $O(1)$  и производится  $|V|$  раз, сортировка производится за  $O(|E| \log |E|)$ , операция **Union** и **Find-Set** производится не больше  $|E|$  раз, поэтому весь цикл работает за время  $O((|V| + |E|)\alpha(|V|))$ . Так как  $G$  связный, а  $\alpha(|V|) = O(|V|) = O(|E|)$ , общее время работы —  $O(|E| \log |E|)$ , а так как  $|E| < |V|^2$ , это можно записать как  $O(|E| \log |V|)$ .

## 11.2 Алгоритм Прима

Это тоже вариант жадного алгоритма. Он похож на алгоритм Дийкстры, в частности, использует *очередь с приоритетами* (min-heap, она была у Охотина в [лекции 4](#), а описание реализации с помощью кучи в [лекции 5](#)).

Этот алгоритм находит остовное дерево, строя его из корня  $r \in V$ . К каждой вершине  $u \in V$  добавим два атрибута:  $\text{key}$  — длина наименьшего ребра, которым эту вершину можно соединить с остовным деревом и  $\pi$  — вершина из дерева, с которой  $u$  соединена ребром, описанным в атрибуте  $\text{key}$ . По атрибуту  $\text{key}$  устанавливается приоритет вершины в очереди  $Q$ .

---

```
1 Prim-MST( $G = \langle V, E \rangle, w, r \in V$ ):
2   foreach  $u \in V$  :
3      $u.\text{key} := \infty$ 
4      $u.\pi := \text{NIL}$ 
5    $r.\text{key} := 0$ 
6    $Q := \text{Queue}(V)$ 
7   while  $Q \neq \emptyset$  :
8      $u := \text{extract-min}(Q)$ 
9     foreach  $v \in \{x \mid (u, x) \in E\}$  :
10      if  $v \in Q$  and  $w(u, v) < v.\text{key}$  :
11         $v.\pi := u$ 
12         $v.\text{decrease-key}(w(u, v))$ 
```

---

Алгоритм неявно строит независимое множество  $A$  в виде  $A = \{(v, v.\pi) \mid v \in V \setminus (Q \cup \{r\})\}$ . Разрезом тут является пара  $(Q, V \setminus Q)$ , добавляются только легкие ребра, поэтому (из следствия 11.1) алгоритм корректен.

Оценка времени зависит от варианта реализации очереди с приоритетами. При использовании двоичной кучи строки 2-6 выполняются за время  $O(|V|)$ . Цикл **while** выполняется  $O(|V|)$  раз. Операция **extract-min** выполняется за  $O(\log |V|)$  раз, а внутренний цикл **foreach** всего выполняется  $O(|E|)$  раз (так как общая длина всех списков смежности  $2|E|$ : каждую

ребро посчитано дважды). Операция **decrease-key** реализуется за  $O(\log |V|)$ , поэтому общее время работы  $O(|V| + |V| \log |V| + |E| \log |V|) = O(|E| \log |V|)$ .

## 12 (12) Вероятностные алгоритмы с односторонней ограниченной вероятностью ошибки. Алгоритм Фрейвальдса для проверки умножения матриц. (Ермошин И.)

### 12.1 Вероятностные алгоритмы с односторонней ограниченной вероятностью ошибки

Нам надо что-то проверить. Придумываем алгоритм, который это проверяет, но может ошибиться. Более точно: при истинном успехе алгоритм всегда сообщает об успехе, но при истинной неудаче алгоритм может ошибиться – сообщить об успехе с вероятностью  $p$ . Повторив его 10 раз, получим вероятность ошибки  $p^{10}$ , что, вероятно (ha ha), гораздо меньше.

### 12.2 Алгоритм Фрейвальдса для проверки умножения матриц.

Есть три матрицы:  $A_{m,n}$ ,  $B_{n,k}$  и  $C_{m,k}$ , хотим узнать  $A \times B = C$  или нет

**Решение** за  $O\left(\frac{mnk}{\min(m,n,k)}\right)$  с вероятностью ошибки  $\leq \frac{1}{2}$ .

**НВ.** Если все матрицы  $A$ ,  $B$ ,  $C$  квадратные, то мы проверим за  $O(n^2)$ , а если бы проверяли умножением матриц – это  $O(n^{2.8})$  (алгоритм Штрассена)

Сгенерируем случайный столбец  $r$  длины  $k$  из нулей и единиц (все равновероятно). Давайте проверять равенство  $AB \times r = C \times r$ ; если умножать так:  $A \times (B \times r)$ , получится время  $O(nk + mn + mk) = O\left(\frac{mnk}{\min(m,n,k)}\right)$ , где каждое слагаемое есть время перемножения матриц  $B \times r$ ,  $A \times Br$  и  $C \times r$ .  $\triangle$

Очевидно, если  $A \times B = C$ , алгоритм так и сообщит. Следующая теорема – о том, с какой вероятностью алгоритм ошибется, сообщив о равенстве, когда его нет.

**Теорема.** При  $A \times B \neq C$  для случайно выбранного вектора  $r$  вероятность того, что  $AB \times r = C \times r$ , не превосходит  $\frac{1}{2}$ .

**Доказательство.** Перепишем  $ABr = Cr$  как  $Xr = 0$ ,  $X = AB - C$ . Посмотрим на какой-нибудь ненулевой элемент  $x_{kl}$ . Имеем:

$$\sum_{i=1, i \neq l}^n x_{ki} r_i + x_{kl} r_l = 0$$

Из этого выражения однозначно определяется  $r_l$ . Это означает, что уже векторов  $r$ , удовлетворяющих  $Xr = 0$ , не более  $2^{k-1}$ , а шанс выбрать такой вектор не превосходит  $\frac{2^{k-1}}{2^k} = \frac{1}{2}$ . Таким образом, вероятность ошибки  $\leq \frac{1}{2}$ .  $\square$

## 13 (13) (В РАЗРАБОТКЕ) Вероятностный алгоритм для сравнения строк на расстоянии и алгоритм Рабина-Карпа. (Ермошин И., Осипов Д.)

### 13.1 Вероятностный алгоритм для сравнения строк «на расстоянии»

**НВ:** под «на расстоянии» имеется в виду, что мы хотим потратить как можно меньше памяти на сравнение этих строк. Две строки могут быть очень большими и храниться на разных компьютерах, передача целой строки может занять много времени, надо передавать меньше.

Есть две строчки  $a$  и  $b$  длины  $n$  над  $\{0;1\}$ , хотим их сравнить. Пусть  $\tau$  – параметр, который мы определим позже. Выберем равновероятно случайное простое число  $p$  от 3 до  $\tau$  (как-нибудь, неважно). Сравним остатки ( $a$  и  $b$  отождествим с числами, которые они задают

при переводе в 10-ю систему счисления) от деления на  $p$ . Если остатки совпали, то ответим «строки одинаковые», иначе – «строки разные».

Если остатки разные, то строки гарантированно разные. Вероятность ошибки (для случайно выбранного  $p$  получилось  $a \neq b$ , но  $a \bmod p = b \bmod p$ ) выводится из следующих двух утверждений.

**Лемма.** У числа  $k \leq 2^n$  меньше  $n$  различных простых делителей (очевидно).  $\square$

Ясно, что  $a - b \leq 2^n$ , следовательно, существует не более  $n$  простых чисел, делящих  $(a - b)$ .

**Теорема (PNT, ослабленная версия).** Пусть  $\pi(\tau)$  – количество простых чисел на интервале  $[1, \tau]$ . Тогда

$$\pi(\tau) \sim \frac{\tau}{\log \tau}, \quad \tau \rightarrow \infty.$$

$\square$

Так как  $p$  выбрано равновероятно среди простых чисел интервала  $\{3, \dots, \tau\}$ , имеем:

$$P_{\text{ошибки}} \leq \frac{n}{\pi(\tau)} \sim \frac{n \log \tau}{\tau}.$$

Добьемся хорошей оценки на вероятность ошибки: положим  $\tau = n^2 \log n$ . Тогда:

$$\frac{n \log \tau}{\tau} = \frac{n \log(n^2 \log n)}{n^2 \log n} = \frac{n(2 \log n + O(\log n))}{n^2 \log n} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Следовательно,  $P_{\text{ошибки}} = O\left(\frac{1}{n}\right)$ .

Если сравнивать мы будем числа по модулю  $p$ , нам потребуется только  $O(\log p) = O(\log(n^2 \log n)) = O(\log n)$  памяти на хранение двух остатков.

### 13.2 Алгоритм Рабина-Карпа для поиска подстроки в строке

Есть две строчки,  $|a| = m \leq |b| = n$ , хотим выяснить, является ли  $a$  подстрокой  $b$ .

Обозовем  $b(i) = b_i b_{i+1} \dots b_{i+m-1}$ , если отождествить их с числами, получим  $b(i) = \frac{b(i-1) - b_{i-1}}{2} + 2^{m-1} b_{i+m-1}$ . Посчитаем  $\{b(i)\}_{0 \leq i \leq n-m}$  за  $O(n)$ . Теперь посравниваем  $a$  с получившимися  $b$ -шками по модулю случайного  $p$ , как в предыдущем алгоритме, но возьмем  $\tau = (n^2 m) \log(n^2 m)$ . Можно проверить, что тогда  $P_{\text{ошибки}} \leq \frac{n}{\log \tau} \leq \frac{2}{n^2} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ . Но мы **уберем вероятность ошибки вообще**: если  $a \bmod p = b(i) \bmod p$ , то мы прервем работу алгоритма, и начнем простой посимвольный поиск  $a$  в  $b$  за время  $O(mn)$ .

Посмотрим, за сколько наш алгоритм работает (без ошибки). Все  $b(i)$  и  $a$  посчитаны вместе за  $O(m+n)$  шагов, все сравнения  $a \bmod p$  с  $b(i)$  стоят вместе  $O(n)$  шагов. Вероятность ошибки при одной проверке  $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ , а вероятность хотя бы одной ошибки среди всех  $n - m + 1 = O(n)$  проверок –  $O\left(\frac{1}{n}\right)$ . Ручная проверка работает за  $O(mn)$ .

Итого:

$$\mathbb{E}T \leq O(m+n) + O(n) + O\left(\frac{1}{n}\right) \cdot O(mn) = O(m+n).$$

## 14 (14) Рандомизированный QuickSort (Осипов Д.)

В этой главе мы строго докажем, что среднее время (матожидание времени) работы рандомизированного Quicksort есть  $O(n \log n)$ .

Приведем его реализацию (Cormen). Сортировка всего массива вызывается `Quicksort(A, 1, len(A))`.

---

**Algorithm 1:** Нижний текст

---

```

1 Partition(A, p, r):
2   i = random ∈ [p, r]
3   A[r] ↔ A[i]
4   x = A[r]
5   i = p - 1
6   for j = p ... r - 1 :
7     if A[j] ≤ x :
8       i++
9       A[i] ↔ A[j]
10  A[i + 1] ↔ A[r]
11  return i + 1
12
13 Quicksort(A, p, r):
14   if p < r :
15     q = Partition(A, p, r)
16     Quicksort(A, p, q - 1)
17     Quicksort(A, q + 1, r)

```

---

Напомним, как работает процедура `Partition`. Она обрабатывает отрезок  $[p \dots r]$  массива  $A$  следующим образом. В строках 2-4 случайно выбирается *опорный элемент*, который перемещается в конец отрезка и запоминается в  $x$ . В строках 5-9 элементы  $[p \dots r - 1]$  меняются таким образом, что все элементы  $\leq x$  расположены слева, а все элементы  $> x$  справа. Строка 10 располагает  $x$  между этими частями (немного меняя правую часть). Таким образом, отрезок  $A[p \dots r]$  разбивается на три части: сначала идут элементы  $\leq x$ , потом сам  $x$ , потом  $> x$ . Строка 11 возвращает позицию  $x$ .

**Теорема.** *Среднее время работы такого Quicksort есть  $O(n \log n)$ .*

*Доказательство.* За  $X$  обозначим случайную величину – общее число сравнений, произведенных на строке 7, за все время выполнения `Quicksort(A, 1, len(A))`. Из строк 16-17 видно, что каждый вызов `Quicksort` «убирает» из работы один элемент массива, поэтому всего вызовов `Partition` не более  $n$ . Каждый вызов `Partition` совершает  $O(1)$  действий плюс какое-то количество сравнений, так что суммарное время работы `Quicksort(A, 1, len(A))` есть  $O(n + X)$ .

Нам нужно вычислить матожидание общего числа сравнений  $\mathbb{E}X$ . Переименуем элементы  $A$  как  $z_1 \leq \dots \leq z_n$ .

Заметим, что любая пара элементов сравнивается не более одного раза. Действительно, при любом сравнении, как видно из строки 7, один из двух сравниваемых элементов – опорный, и после окончания цикла (строка 6) этот опорный элемент «выпадает» из работы и более ни с чем не сравнивается. Так что введем случайную величину  $X_{ij} = [z_i, z_j \text{ когда-то сравнивались}]$ . Ясно, что тогда:

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n X_{ij} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \mathbb{E}X_{ij} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \mathbb{P}[z_i, z_j \text{ когда-то сравнивались}]$$

Осталось подсчитать  $\mathbb{P}[z_i, z_j \text{ когда-то сравнивались}]$ . Нужно выяснить, в каком случае  $z_i$  и  $z_j$  сравнятся, а в каких нет.

Для примера рассмотрим массив, содержащий в каком-то порядке числа  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ . Пусть первым опорным элементом стала 7. Во-первых, это означает, что на данном этапе 7 сравнится со всеми остальными числами, а далее «выпадет» и ни с чем сравниваться не будет. Во-вторых, множество разбивается на две части  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  и  $\{8, 9, 10\}$  в том смысле, что все дальнейшие сравнения будут происходить **только** внутри этих частей. Например, 2 и 9

точно не сравнятся, а 2 и 4 могут сравниться (если не попадут в разные части на какой-нибудь из следующих итераций).

В общем случае всё обстоит так: если какой-то элемент  $x$  ( $z_i \leq x \leq z_j$ ) был опорным до того, как опорными стали  $z_i$  и  $z_j$ , то  $z_i$  и  $z_j$  не сравнятся. И наоборот – если ни один из элементов  $z_i, z_{i+1}, \dots, z_j$  не стал опорным до того, как опорным стал  $z_i$  или  $z_j$ , то  $z_i$  и  $z_j$  сравнятся.

Итак, можно видеть, что  $z_i$  и  $z_j$  сравнятся тогда и только тогда, когда среди элементов  $z_i, z_{i+1}, \dots, z_j$  раньше всех опорным элементом станет либо  $z_i$ , либо  $z_j$ . Вероятность этого равна  $\frac{2}{j-i+1}$ .

Имеем:

$$\mathbb{E}X = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{2}{j-i+1}$$

Замена переменных во внутренней сумме  $k = j - i$  дает:

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-i} \frac{2}{k+1} < \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{2}{k} = \sum_{i=1}^n O(\log n) = O(n \log n)$$

Таким образом, матожидание времени работы Quicksort есть  $O(n + n \log n) = O(n \log n)$ .  $\square$

## 15 (15) Проверка равенства полиномов. Лемма Шварца-Циппеля. (Ермошин И.)

**Лемма (Шварца-Циппеля).**  $0 \neq p \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]$ , все  $\deg x_i \leq d$ ,  $A \subset \mathbb{Z}$ ,  $|A| < \infty$ . Тогда

$$|\{(i_1, \dots, i_m) \in A^m : p(i_1, \dots, i_m) = 0\}| \leq md|A|^{m-1}$$

*Доказательство.* Докажем индукцией по количеству переменных: при  $m = 1$ , очевидно, корней  $\leq d$ .

Переход: Очевидно, можно написать  $p(x_1, \dots, x_m) = x_m^d \cdot y_d + \dots + x_m^0 \cdot y_0$ , где  $\{y_i\} \subset \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_{m-1}]$ . Оценим число корней  $x = (x_1, \dots, x_m)$ , рассмотрев два случая:

1.  $x$  обнуляет  $y_d$ . Таких корней  $\leq (m-1)d|A|^{m-2} \cdot |A|$  (выберем  $x_1, \dots, x_{m-1}$  по предположению индукции  $\leq (m-1)d|A|^{m-2}$  способами и возьмем в качестве  $x_m$  любое число из  $A$ ).
2.  $x$  не обнуляет  $y_d$ . Тогда при подстановке  $x_1, \dots, x_{m-1}$  получится ненулевой многочлен от  $x_m$ . У него корней не больше, чем  $d$ . Оценим грубо: всего наборов  $(x_1, \dots, x_{m-1})$  значений  $|A|^{m-1}$  штук, значит корней  $\leq d|A|^{m-1}$ .

$$\text{Итого} \leq (m-1)d|A|^{m-1} + d|A|^{m-1} = md|A|^{m-1}. \quad \square$$

**Задача.** Даны два многочлена  $p_1$  и  $p_2$ . Выяснить, равны ли они.

Считается, что многочлены достаточно большие и даны в таком виде, что приведение к каноническому виду  $p = a_d x^d + \dots + a_0$  очень затруднено, но вычисление значений многочленов в точках возможно. Например, если многочлен задан разложением на множители  $p = (x - x_1) \dots (x - x_d)$ , для раскрытия скобок и приведения подобных нужно сделать  $O(2^d)$  действий, но вычислить значение в точке можно за  $O(d)$ .

**Алгоритм.** За полином от длины вычислим  $m$  – количество переменных,  $d = \max \deg x_i$ . Зафиксируем некоторое конечное  $A \subseteq \mathbb{Z}$ . Выберем случайно  $x \in A^m$  и вычислим значения  $p_1(x), p_2(x)$ . Если  $p_1(x) = p_2(x)$ , то ответим «многочлены совпадают», иначе – «многочлены не совпадают».  $\triangle$

Ясно, что если  $p_1 = p_2$ , то алгоритм об этом и сообщит. Следующая теорема вычисляет вероятность ошибки.

**Теорема.** Вероятность того, что при случайно выбранном конечном  $A \subseteq \mathbb{Z}$  верно  $p_1 \neq p_2$ , но  $p_1(x) = p_2(x)$ , не превосходит  $\frac{md}{|A|}$ .



*Доказательство.* По лемме знаем, что у  $p_1 - p_2$  не более  $md|A|^{m-1}$  корней, таким образом, вероятность попасть в корень не превосходит:

$$\leq \frac{md|A|^{m-1}}{|A|^m} = \frac{md}{|A|}$$

Ясно, что это и есть вероятность  $p_1(x) = p_2(x)$  при  $p_1 \neq p_2$ .  $\square$

**NB.** Размер выбранного конечного  $A$  влияет на вероятность ошибки, но не влияет на время работы алгоритма. Таким образом, требуемая малость вероятности ошибки может достигаться не только повторением алгоритма, но и размером  $A$ .

## 16 (16) (В РАЗРАБОТКЕ) Вероятностная проверка на простоту: алгоритм Соловея-Штрассена. (Ермошин И., Осипов Д.)

### 16.1 Теоретико-числовые основания

Под  $\equiv_p$  имеется в виду «сравнимо по модулю  $p$ ».

**Определение** (Символ Лежандра). Пусть  $p$  – простое число.

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1, & \exists x \in \mathbb{Z}_p^* : x^2 \equiv_p a \text{ (} a \text{ – квадратичный вычет в } \mathbb{Z}_p \text{)} \\ 0, & a \equiv_p 0 \text{ (} a \text{ и } p \text{ не взаимно просты)} \\ -1, & \text{иначе (} a \text{ – квадратичный невычет в } \mathbb{Z}_p \text{)} \end{cases}$$

**Определение** (Символ Якоби). Пусть  $n = \prod_i p_i$  (среди  $p_i$  могут быть равные).

$$\left(\frac{a}{n}\right) = \prod_i \left(\frac{a}{p_i}\right)$$

Несколько свойств, которые нам понадобятся.

**Лемма 16.1.** Пусть  $p$  простое. Если  $a \equiv_p b$ , то  $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right)$ .

*Доказательство.* Тривиально из определения.  $\square$

**Лемма 16.2.** Квадратичных вычетов в  $\mathbb{Z}_p$  ровно  $\frac{p-1}{2}$  штук.

*Доказательство.* Все квадратичные вычеты в  $\mathbb{Z}_p$  есть в точности все ненулевые образы отображения  $x \mapsto x^2$ . Это отображение для каждого ненулевого  $y$  склеивает числа  $y$  и  $-y$  (и только их) в  $y^2$ . Получается, что всего различных образов этого отображения  $\frac{p-1}{2}$ .  $\square$

**Теорема 16.1** (Критерий Эйлера). Пусть  $p$  простое, тогда  $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv_p a^{\frac{p-1}{2}}$ .

*Доказательство.* Если  $a \equiv_p 0$ , то все понятно: и слева, и справа нули.

1. Пусть  $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$ , здесь  $a^{\left(\frac{p-1}{2}\right)} \equiv_p (x^2)^{\left(\frac{p-1}{2}\right)} \equiv_p x^{p-1} \equiv_p 1$ .
2. Пусть теперь  $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$ , посмотрим на  $f(x) = x^{\frac{p-1}{2}} - 1$ . Степень многочлена –  $\frac{p-1}{2}$ , и мы знаем что квадратичные вычеты – его корни. Из сказанного и леммы 16.2 заключаем, что других корней у  $f$  нет.  
Значит невычеты – не корни, в частности,  $f(a) \neq 0$ . Но  $x^{p-1} \equiv_p 1$ , а значит  $x^{\frac{p-1}{2}} \equiv_p \pm 1$ .  
Имеем  $f(x) \equiv_p \pm 1 - 1$ , а из  $f(a) \neq 0$  заключаем, что  $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv_p -1$ .

$\square$

Проверим в три утверждения:

**Теорема 16.2** (Закон квадратичной взаимности). Если  $a$  и  $n$  нечетные, то  $\left(\frac{a}{n}\right) = (-1)^{\frac{a-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2}} \left(\frac{n}{a}\right)$

**Теорема 16.3.**  $\left(\frac{ab}{n}\right) = \left(\frac{a}{n}\right) \left(\frac{b}{n}\right)$

**Теорема 16.4.** Для нечетного  $n > 2$  верно  $\left(\frac{2}{n}\right) = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}}$

## 16.2 Достаточное условие простоты числа

Следующая теорема лежит в основе теста Соловея-Штрассена.

**Теорема 16.5.** Если  $n$  – нечетное, и для всех  $a$ , т.ч.  $(a, n) = 1$ , выполняется  $\left(\frac{a}{n}\right) \equiv_n a^{\frac{n-1}{2}}$ , то  $n$  – простое.

*Доказательство.* Доказывать будем от противного. Пусть  $n$  бесквадратное:  $n = \prod_i p_i$ . Зафиксируем  $r$  т.ч.  $\left(\frac{r}{p_1}\right) = -1$ . По КТО найдется такое  $a$ , что:

$$\begin{cases} a \equiv_{p_1} r \\ a \equiv_{p_i} 1, \quad i \neq 1. \end{cases}$$

Тогда, учитывая  $\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ :

$$\left(\frac{a}{n}\right) = \left(\frac{a}{p_1}\right) \cdot \prod_{i \neq 1} \left(\frac{a}{p_i}\right) = \left(\frac{r}{p_1}\right) \cdot \prod_{i \neq 1} \left(\frac{1}{p_i}\right) = -1.$$

Но из определения  $a$  имеем  $a^{\frac{n-1}{2}} \equiv_{p_2} 1$ , а по условию  $\left(\frac{a}{n}\right) \equiv_{p_2} a^{\frac{n-1}{2}}$ . Противоречие.

Предположим теперь, что в  $n$  есть квадраты –  $n = p^{2+\alpha} \cdot \prod_i p_i^{\alpha_i}$ . Заметим сначала, что  $\left(\frac{x^{\frac{n-1}{2}}}{n}\right) = \left(\frac{x}{n}\right)^{n-1} = 1$ , то есть  $x^{n-1}$  – всегда квадратичный вычет (разумеется, когда  $x \not\equiv_n 0$ ). Пусть  $r$  – первообразный корень по модулю  $p^2$  ( $\iff r$  – порождающий  $\mathbb{Z}_{p^2}^*$ ), возьмем теперь  $m$ , как в предыдущем случае (такое есть опять по КТО):

$$\begin{cases} m \equiv_{p^2} r \\ m \equiv_{p_i^{\alpha_i}} 1 \end{cases}$$

Тогда  $(m, n) = 1$  (так как  $m$  не кратно никакому  $p_i$  и  $p$ ), пользуемся предположением леммы:

$$m^{n-1} \equiv_n \left(m^{\frac{n-1}{2}}\right)^2 \equiv_n \left(\frac{m}{n}\right)^2 \equiv_n 1,$$

тем более  $m^{n-1} \equiv_{p^2} 1$ . Но, как мы помним,  $m \equiv_{p^2} r$ , значит  $r^{n-1} \equiv_{p^2} 1$ , тогда  $\phi(p^2) = p(p-1) | n-1$ . Итого  $p | n$  и  $p | (n-1)$  – противоречие.  $\square$

## 16.3 Описание алгоритма и вероятность ошибки

Нам понадобится вспомогательный

**Алгоритм вычисления  $\left(\frac{m}{n}\right)$  для нечетных  $n$ .** Мы можем разбираться с двойками в «числителе», пользуясь [теоремой 1.3](#) и [теоремой 1.4](#). Когда же и «числитель», и «знаменатель» нечетные, то, подобно алгоритму Евклида, мы пользуемся [законом квадратичной взаимности](#) всякий раз, когда «числитель» меньше «знаменателя», а далее заменяем «числитель» на его остаток от деления на «знаменатель» по [лемме 1.1](#).  $\triangle$

Приведем пример.

$$\left(\frac{14}{11}\right) = (-1)^{\frac{11^2-1}{2}} \left(\frac{7}{11}\right) = \left(\frac{7}{11}\right) = (-1)^{\frac{7-1}{2}} (-1)^{\frac{11-1}{2}} \left(\frac{11}{7}\right) = \left(\frac{11}{7}\right) = \left(\frac{4}{7}\right) = \left(\frac{2}{7}\right) \cdot \left(\frac{2}{7}\right) = 1$$

Напишем же, наконец, **алгоритм** проверки числа  $n$  на простоту.

**Алгоритм.** Выберем случайное  $m$  из  $[2, \dots, n-1]$ , если  $(m, n) \neq 1$ , ответ – «не простое». Иначе посмотрим на  $\left(\frac{m}{n}\right)$ . Надо его сравнить с  $m^{\frac{n-1}{2}}$  по модулю  $n$ . Если равенства нет, то ответ «не простое», который всегда верен ([теорема 1.5](#)). Если равенство есть, ответ «простое».  $\triangle$

О вероятности ошибки в следующей лемме:

**Лемма 16.3.** Если  $n \notin \mathbb{P}$ , то для более чем половины всех  $m \in [2, \dots, n-1]$ , взаимно простых с  $n$ :

$$\left(\frac{m}{n}\right) \not\equiv_n m^{\frac{n-1}{2}}$$

*Доказательство.* Пусть числа  $b_1, b_2, \dots, b_k \in \{2, \dots, n-1\}$  – все числа, для которых  $\left(\frac{b_i}{n}\right) \equiv_n b_i^{\frac{n-1}{2}}$  и  $(b_i, n) = 1$ . Сейчас мы покажем, что  $k \leq \frac{n}{2}$ , откуда и будет следовать требуемое.

По [теореме 1.5](#)  $\exists a : (a, n) = 1, \left(\frac{a}{n}\right) \not\equiv_n a^{\frac{n-1}{2}}$ . Посмотрим на числа  $b'_i = ab_i \bmod n$ . Во-первых, все  $b'_i$  попарно различны: если  $ab_i \equiv_n ab_j$ , то  $b_i \equiv_n b_j$ , так как  $(a, n) = 1$ . Кроме того, никакой  $b'_i$  не совпадает ни с каким  $b_j$ , так как

$$\left(\frac{ab_i}{n}\right) = \left(\frac{a}{n}\right) \left(\frac{b_i}{n}\right) = \left(\frac{a}{n}\right) \cdot b_i^{\frac{n-1}{2}} \not\equiv_n (ab_i)^{\frac{n-1}{2}},$$

но для всех  $b_j$  по определению верно  $\left(\frac{b_j}{n}\right) \equiv_n b_j^{\frac{n-1}{2}}$ .

Итак, мы получили  $2k$  различных чисел  $b_1, \dots, b_k, b'_1, \dots, b'_k$ , лежащих в  $\{0, \dots, n-1\}$ , откуда по принципу Дирихле  $2k \leq n$ .  $\square$

Таким образом, если  $n$  простое, то при любом  $m$  алгоритм выдаст ответ «простое» ([критерий Эйлера](#)). Если  $n$  составное, то при случайном  $m$  алгоритм выдаст ответ «простое» с вероятностью, не превышающей  $\frac{1}{2}$ .

## 17 (17) Хеш-таблицы. Универсальные семейства хеш-функций. (Осипов Д.)

**Задача.** Реализовать структуру – множество, поддерживающее операции вставки (*Insert*), удаления (*Delete*), поиска (*Search*).

### 17.1 Прямая адресация

Считаем, что элементы нашего множества – целые числа в диапазоне  $[0, m-1]$ .

**Решение (очевидное – прямая адресация).** Заводим булевый массив  $A$  из  $m$  нулей.

- Вставить  $k$  – пометить  $A[k] = 1$ ,
- Удалить  $k$  – пометить  $A[k] = 0$ ,
- Найти  $k$  – посмотреть  $A[k]$ .

$\triangle$

Ясно, что здесь всегда на всё  $O(1)$  времени,  $O(m)$  памяти.

### 17.2 Хеш-таблица с чеинингом

Если так случилось, что элементами множества могут быть не все числа  $\{0, \dots, m-1\}$ , а лишь элементы некоторого  $K \subseteq \{0, \dots, m-1\}$ ,  $|K| = n$ , то при большом  $m$  и маленьком  $n$  будет бесполезно потрачено много памяти.

Пусть теперь  $K$  – произвольное множество натуральных чисел,  $m$  – натуральный параметр.

**Решение (хеш-таблица с чеинингом).**

Предположим, что выбрана некоторая *хеш-функция*

$$h : K \rightarrow \{0, \dots, m-1\},$$

вычисляемая за  $O(1)$ . Наше множество будем хранить в массиве двусторонних списков  $T[0 \dots m-1]$ . Операции реализуем так:

- Вставить  $k$  – положить  $k$  в начало списка  $T[h(k)]$ .
- Найти  $k$  – просмотреть весь список  $T[h(k)]$ .
- Удалить  $k$  – найти  $k$  в списке  $T[h(k)]$  и удалить его, если нашлся.

$\triangle$

### 17.3 ♥ Гипотеза простого равномерного хеширования: оценки

Для работоспособности алгоритма функция  $h$  может быть совершенно любой, но желательно, чтобы хеш-коды  $\{h(k)\}_{k \in K}$  распределялись равномерно. Для этого предположим, что:

1. для каждого  $k \in K$  значение  $h(k)$  является случайной величиной,
2.  $\mathbb{P}\{h(k) = r\} = \frac{1}{m}$  для всех  $r \in \{0, \dots, m-1\}$ ,
3. для всех  $k_1 \neq k_2$  величины  $h(k_1)$  и  $h(k_2)$  независимы.

Эти предположения составляют *гипотезу простого равномерного хеширования*.

Сейчас мы покажем, что в этой модели операция поиска выполняется за  $O\left(\frac{n}{m} + 1\right)$ .<sup>11</sup>

**Теорема.** При гипотезе простого равномерного хеширования средняя длина списка есть  $\frac{n}{m}$ .

*Доказательство.* Занумеруем  $K = \{k_1, \dots, k_n\}$ . Фиксируем  $j \in \{0, \dots, m-1\}$ . Для  $i = 1 \dots n$  определим случайную величину

$$X_{ij} = [h(k_i) = j] - \text{попал ли элемент } k_i \text{ в ячейку } j.$$

Из пункта 2) ясно, что  $\mathbb{E}X_{ij} = \frac{1}{m}$ . Также ясно, что длина списка  $T[j]$  есть  $X_{1j} + \dots + X_{nj}$ . Матожидание этой величины есть

$$\mathbb{E} \sum_{i=1}^n X_{ij} = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}X_{ij} = \frac{n}{m}.$$

□

Далее нужно рассмотреть два случая: искомый элемент  $k_i$  есть в списке  $T[h(k_i)]$  (*успешный поиск*), либо же его нет (*неудачный поиск*).

**Теорема.** Среднее время работы неудачного поиска есть  $O\left(\frac{n}{m} + 1\right)$

*Доказательство.* В случае, если элемента  $k$  в списке  $T[h(k)]$  нет, то алгоритм просматривает весь список длины  $\frac{n}{m}$ . □

**Теорема.** Среднее время работы успешного поиска есть  $O\left(\frac{n}{m} + 1\right)$ .

*Доказательство.* Тут придется повозиться. Предположим, что  $k_1, \dots, k_n$  занумерованы в порядке добавления их в множество. Фиксируем  $k_i$  и считаем среднее время поиска его в списке  $T[h(k_i)]$ . Для  $j = 1 \dots m$  определим случайную величину

$$X_{ij} = [h(k_i) = h(k_j)] - \text{«}k_i \text{ в одном списке с } k_j\text{»}.$$

Ясно, что  $\mathbb{E}X_{ii} = 1$  и  $\mathbb{E}X_{ij} = \frac{1}{m}$  при  $j \neq i$ .

Алгоритм ищет  $k_i$  в списке  $T[h(k_i)]$ . Сколько элементов он пройдет, прежде чем наткнется на  $k_i$ ? Он пройдет те элементы  $k_j$ , которые лежат в  $T[h(k_i)]$  (т.е.  $h(k_i) = h(k_j)$ ) и которые находятся в этом списке раньше  $k_i$  (т.е.  $j < i$  – ведь каждый новый элемент добавляется в начало списка). Поэтому количество пройденных элементов равно

$$X_{in} + \dots + X_{ii}.$$

Матожидание времени поиска фиксированного  $k_i$  равно

$$\mathbb{E} \sum_{j=i}^n X_{ij} = \mathbb{E}X_{ii} + \sum_{j=i+1}^n \mathbb{E}X_{ij} = 1 + \frac{n-i}{m}$$

А если взять среднее по  $i = 1 \dots n$ , получаем:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{n-i}{m}\right) = 1 + \frac{n-1}{2m} = O\left(\frac{n}{m} + 1\right)$$

□

<sup>11</sup>Стоит понимать как  $O(1)$  в случае  $\frac{n}{m} \leq 1$  и  $O\left(\frac{n}{m}\right)$  иначе.

## 17.4 Универсальное семейство хеш-функций: оценки

**Определение.** Универсальное семейство хеш-функций  $\mathcal{H}$  – такое множество хеш-функций, что для любой пары различных ключей  $k_1, k_2$  количество функций  $h \in \mathcal{H}$  таких, что  $h(k_1) = h(k_2)$ , не превосходит  $\frac{|\mathcal{H}|}{m}$ .

**НВ.** Другими словами, при случайном равновероятном выборе функции из  $\mathcal{H}$  вероятность того, что для фиксированной пары различных ключей  $k_1, k_2$  случится коллизия  $h(k_1) = h(k_2)$ , не превосходит  $\frac{1}{m}$ .

Если у нас есть такое семейство, то перед началом работы мы выбираем из него случайно и равномерно одну функцию, по ней строим хеш-таблицу с чейнингом.

Оказывается, что в этой модели среднее время поиска остается тем же самым.

**Теорема.** В модели универсального хеширования среднее время работы как неудачного, так и успешного поиска есть  $O\left(\frac{n}{m} + 1\right)$ .

*Доказательство.* Для элементов  $k$  и  $l$  обозначим:

$$X_{kl} = [h(k) = h(l)]$$

Длина цепочки  $T[h(l)]$ , в которой, возможно, лежит  $l$ , есть  $X_{k_1 l} + \dots + X_{k_n l}$ .

Если  $l$  не лежит в этой цепочке, то матожидание этой суммы не превосходит  $\frac{n}{m}$ , так как матожидание каждого слагаемого не превосходит  $\frac{1}{m}$  (см. **НВ** выше).

Если же  $l$  лежит в этой цепочке, то матожидание суммы не превосходит  $1 + \frac{n-1}{m}$ : матожидание слагаемого  $X_{ll}$  равно 1, матожидание любого другого слагаемого  $\leq \frac{1}{m}$ .

Получается, что и в том, и в другом случае число шагов оценивается сверху как  $O\left(\frac{n}{m} + 1\right)$ .  $\square$

## 17.5 Универсальное семейство хеш-функций: построение

Осталось построить какое-нибудь универсальное семейство хеш-функций. Это несложно. Опишем для числового множества.

Выберем простое  $p > m$ . Для всяких целых  $a \in \{1, \dots, p-1\}$  и  $b \in \{0, \dots, p-1\}$  положим

$$h_{ab}(k) = ((ak + b) \bmod p) \bmod m$$

**Теорема.**  $\mathcal{H} = \{h_{ab}\}$  универсально.

*Доказательство.* Доказательство счётом. Убедитесь самостоятельно в следующем:

1. Фиксируем различные  $k_1, k_2 \in \{0, \dots, m-1\}$ . Обозначим  $t_i = (ak_i + b) \bmod p$  для  $i = 1, 2$ . Докажите, что  $t_1 \neq t_2$ . Напоминание:  $a \neq 0$  и  $k_1, k_2 < m < p$ .
2. Фиксируем различные  $k_1, k_2 \in \{0, \dots, m-1\}$  и различные  $t_1, t_2 \in \{0, \dots, p-1\}$ . Докажите, что существуют и единственные  $a \in \{1, \dots, p-1\}, b \in \{0, \dots, p-1\}$ , что  $t_i = (ak_i + b) \bmod p$  для  $i = 1, 2$  (вычислите эти  $t_1, t_2$ ).

Следовательно, каждая пара  $(t_1, t_2)$ , где  $t_1 \neq t_2$ , при фиксированных  $k_1 \neq k_2$  реализуема ровно одним способом. Так что если выбирать хеш-функцию  $h_{ab}$  случайно и равновероятно из  $\mathcal{H}$ , то для нее пара  $(t_1, t_2)$  окажется так же равновероятна среди всех пар  $\{(t_1, t_2) : t_1 \neq t_2\}$ .

Теперь вероятность того, что  $h_{ab}(k_1) = h_{ab}(k_2)$ , равна вероятности, с которой различные равновероятно выбранные  $t_1, t_2 \in \{0, \dots, p-1\}$  совпадут по модулю  $m$ .

3. Докажите, что для фиксированного  $t_1 \in \{0, \dots, p-1\}$  количество таких  $t_2 \in \{0, \dots, p-1\}$ , что  $t_1 \neq t_2$  и  $t_1 \equiv t_2 \pmod{m}$ , не превосходит  $\frac{p-1}{m}$ .

Тогда при фиксированном  $t_1$  вероятность выбрать  $t_2 \neq t_1$  т.ч.  $t_1 \equiv t_2 \pmod{m}$  не превосходит

$$\frac{1}{p-1} \cdot \frac{p-1}{m} = \frac{1}{m}$$

Нетрудно видеть, что эта оценка сверху справедлива и для успешного равновероятного выбора пары  $(t_1, t_2)$ .  $\square$

## 18 (18) Совершенное хеширование

Умри, Денис, лучше не напишешь!

---

Г. Потёмкин к Д. Фонвизину

Эта тема настолько хорошо описана на страницах 47–48 [СП-шного конспекта](#), что невозможно что-то убрать или добавить. Все настолько идеально, что даже нет смысла копировать текст параграфа сюда. Читайте там.

## 19 (19) Алгоритм Борувки для MST. Линейный вероятностный алгоритм для MST. (Осипов Д.)

### 19.1 Алгоритм Борувки

Шаг Борувки – это алгоритм, который сводит задачу поиска миностова у графа к той же задаче, но с меньшим числом вершин у графа (иногда и с меньшим числом ребер). Алгоритм Борувки – многократное применение шага Борувки. Шаг Борувки базируется на следующей лемме:

**Лемма** (о безопасных ребрах для алгоритма Борувки). *Для всякой вершины  $v \in V$  хотя бы одно смежное с  $v$  ребро минимального веса входит в любое минимальное остовное дерево.*

**Warning! Авторское доказательство.** Если все смежные в  $v$  ребра имеют одинаковый вес, то доказывать нечего – вершина  $v$  должна быть покрыта хоть каким-то смежным с ней ребром. Пусть теперь среди смежных с  $v$  ребер есть ребра веса, строго большего, чем минимальный.

Пусть  $T$  – какой-то минимальный остов. Предположим, что ни одно из ребер, смежных с  $v$  и имеющих среди них минимальный вес, не входит в  $T$ . Пусть  $(v, w)$  – любое такое ребро. Так как  $T$  – остов, то вершина  $v$  покрыта более тяжелым ребром из него, пусть  $(v, u)$ . За  $P$  обозначим единственный путь из  $u$  в  $w$  по дереву  $T$ . Добавим  $(v, w)$  в  $T$ , тогда  $P + (w, v) + (v, u)$  есть цикл в  $T \cup \{(v, w)\}$ , проходящий через  $v$ . Удаление ребра  $(u, v)$  разрушит этот цикл, и полученное множество ребер  $T' = T \setminus \{(v, u)\} \cup \{(v, w)\}$  будет снова остовным деревом. Но вес  $T'$  будет строго меньше веса  $T$  – противоречие с минимальностью.  $\square$

### Шаг Борувки.

1. Для каждой вершины  $v \in V$  помечаем смежное с ней ребро минимального веса. Если таких ребер несколько, выбираем ребро с наименьшим номером.
2. Определим компоненты связности на помеченных ребрах.
3. Каждую компоненту связности стянем в одну вершину. Некоторые ребра при этом станут петлями или мультиребрами.
4. Все петли уберем, а в мультиребрах оставим только ребра минимального веса.

$\triangle$

Корректность алгоритма Борувки заключается в следующем утверждении:

**Теорема.** *Пусть шаг Борувки получил из графа  $G$  граф  $G'$ . Тогда миностов графа  $G$  есть миностов графа  $G'$  плюс помеченные в этом шаге Борувки ребра.*

Для доказательства воспользуемся:

**Лемма.** *Ребра, отмеченные на шаге Борувки, образуют лес.*

**Warning! Авторское доказательство леммы.** Предположим, что какие-то из отмеченных ребер образовали цикл. Ориентируем ребра этого цикла следующим образом. Пусть в шаге 1 для вершины  $v$  было помечено ребро  $(v, u)$ , тогда ориентируем его как  $v \rightarrow u$ .

Утверждается, что получившийся оргграф есть цикл в ориентированном смысле (а не, например, поток). Действительно, для каждой вершины  $v$  в цикле верно  $out(v) = 1$  по смыслу алгоритма и  $in(v) + out(v) = 2$  по смыслу цикла, значит и  $in(v) = 1$ .

Итак, пусть имеем цикл  $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_k \rightarrow v_1$ . Ребро  $(v_j, v_{j+1})$ , ориентированное как  $v_j \rightarrow v_{j+1}$ , означает, что оно было выбрано как минимальное среди всех ребер, смежных с  $v_j$ , откуда имеем для весов  $w(v_j, v_{j+1}) \leq w(v_j, v_{j-1})$ . Применив это рассуждение для всех вершин в цикле, имеем:

$$w(v_1, v_2) \geq w(v_2, v_3) \geq \dots \geq w(v_{k-1}, v_k) \geq w(v_k, v_1) \geq w(v_1, v_2),$$

откуда следует, что у всех ребер цикла одинаковый вес.

Вспомним, что в случае нескольких смежных ребер с минимальным весом алгоритм выбирает ребро с наименьшим номером (см. шаг 1). Обозначим номер ребра через  $\#$ . Тогда имеем для всех  $j$   $\#(v_j, v_{j+1}) > \#(v_j, v_{j-1})$ , или:

$$\#(v_1, v_2) > \#(v_2, v_3) > \dots > \#(v_{k-1}, v_k) > \#(v_k, v_1) > \#(v_1, v_2),$$

откуда и получаем противоречие.  $\square$

**Warning! Авторское доказательство теоремы.** Шаг Борувки в графе  $G$  построил лес  $F$ , каждому дереву которого соответствует вершина в графе  $G'$ . Миностов  $T'$  графа  $G'$  соединяет все вершины графа  $G'$ , т.е. все деревья леса  $F$  в  $G$ , поэтому объединение  $F$  и  $T'$  есть дерево. По *лемме о безопасных ребрах* все ребра этого дерева входят в какой-то миностов  $G$ , ну значит этот миностов и есть  $F \cup T'$ .  $\square$

Теперь несложно получить оценку на время работы.

**Лемма.** *Время работы шага Борувки есть  $O(E + V)$ .*

*Доказательство.* Шаг 1 требует однократного просмотра всех смежных ребер у каждой вершины:  $O(E + V)$ .

Шаг 2 можно выполнить поиском в глубину, который работает за  $O(E + V)$ .

Шаг 3 требует переназначения вершин в новые компоненты связности –  $O(V)$  – и перераспределения всех ребер на новые вершины –  $O(E)$ .

Шаг 4 требует просмотра всех ребер –  $O(E)$ .  $\square$

В связном графе  $V \leq E + 1 = O(E)$ , так что верна и оценка  $O(E)$ .

Заметим, наконец, что всякий шаг Борувки уменьшает число вершин не менее, чем в два раза. Действительно, шаг 1 соединяет каждую вершину с какой-то, значим образуется не более  $n/2$  компонент – вершин в новом графе. Отсюда сразу следует, что применить шаг Борувки до построения полного миностова нужно не более  $\log_2 V = O(\log V)$  раз. Общая оценка времени работы алгоритма Борувки есть  $O(E \log V)$ .

## 19.2 Линейный вероятностный алгоритм для MST

Алгоритм Борувки можно улучшить так, что он будет работать в среднем за  $O(E + V)$ .

Пусть  $F$  – лес в графе  $G$ . Обозначим через  $w_F(u, v)$  – вес максимального ребра на единственном пути  $u \rightarrow v$  в лесе  $F$ . Если пути между  $u$  и  $v$  в  $F$  нет, положим  $w_F(u, v) = \infty$ .

**Определение.** Ребро  $(u, v)$  назовем *F-тяжелым*, если  $w_F(u, v) < w(u, v)$ . Иначе назовем ребро *F-легким*.

Например, ясно, что всякое ребро  $F$  является  $F$ -легким. Ясно, что ребро  $(u, v)$   $F$ -тяжелое, если  $F$  содержит путь между  $u$  и  $v$  в  $F$ , в котором все ребра строго меньшего веса, чем  $w(u, v)$ .

**Лемма.** *Пусть  $F$  – любой лес в  $G$ . Если ребро  $(u, v)$   $F$ -тяжелое, то оно не лежит в миностове  $G$ .*

*Доказательство.* Пусть  $T$  – миностов  $G$ , содержащий  $(u, v)$ . Без него множество  $T \setminus (u, v)$  распадается на две компоненты связности. Из  $F$ -тяжелости ребра  $(u, v)$  существует путь  $u \rightarrow v$ , ведущий из одной компоненты в другую, все ребра которого строго легче, чем  $(u, v)$ . Одно из них, скажем,  $e$ , соединяет две компоненты связности  $T \setminus (u, v)$ . Его и возьмем, полученное множество  $T \setminus (u, v) + e$  будет миностовом строго меньшего веса, чем  $T$ . Противоречие с минимальностью  $T$ .  $\square$

**Определение.** Случайный граф  $G(p)$  для графа  $G$  и числа  $0 < p < 1$  строится так: вершины те же, каждое ребро из  $G$  входит в  $G(p)$  с вероятностью  $p$ , других ребер нет.

**Теорема.** Пусть  $F$  – минимальный остовный лес случайного графа  $G(p)$ . Матожидание числа  $F$ -легких ребер в  $G$  не превосходит  $\frac{n}{p}$ .

*Доказательство.*

**NB.** Сокращение:  $F$ -легкое =  $F$ -легкое для  $G$ .

Упорядочим все ребра  $G$  в порядке возрастания весов:  $e_1, e_2, \dots, e_m$ . Будем строить граф  $G(p)$ , рассматривая ребра именно в этом порядке. Минимальный остовный лес  $F$  мы будем строить одновременно с  $G(p)$  следующим образом. Если  $e_i$  взято в  $G(p)$  и если  $e_i$  соединило две разные компоненты  $F$  на тот момент, то мы берем  $e_i$  в  $F$ .

Ребро  $e_i = (u, v)$   $F$ -легкое в момент рассмотрения  $\iff$  в момент рассмотрения в  $F$  нет пути  $u \rightarrow v$ , содержащего ребро более тяжелое, чем  $e_i$ . Из-за порядка рассмотрения, если между  $u$  и  $v$  уже был путь в  $F$ , то из-за него ребро  $e_i$  автоматически становится  $F$ -тяжелым, потому что все ребра этого пути были рассмотрены раньше  $e_i$ . Стало быть, ребро  $e_i$   $F$ -легкое в момент рассмотрения  $\iff$  оно соединяет две разные компоненты в  $F$ .

Однако добавление ребер в  $F$  после  $e_i$  никак не влияет на  $F$ -легкость ребра  $e_i$  (снова в силу порядка рассмотрения ребер). То есть, ребро  $e_i$   $F$ -легкое в конце построения  $G(p)$   $\iff$  ребро  $e_i$   $F$ -легкое в момент рассмотрения ребра  $e_i$ .

Резюмируя сказанное выше, ребро  $e_i$   $F$ -легкое (в конце построения  $G(p)$ )  $\iff$  оно когда-то соединило (если попало в  $G(p)$ ) или могло соединить (если не попало в  $G(p)$ ) две разные компоненты  $F$  в процессе построения  $F$ .

Определим  $k$ -тую фазу построения  $F$  как начинающуюся в момент, когда в  $F$  находится  $k-1$  ребро и заканчивающуюся, когда в  $F$  добавляется  $k$ -тое по счету ребро. Всякое  $F$ -легкое ребро, рассматриваемое в этой фазе, с вероятностью  $p$  попадает в  $G(p)$  и, следовательно, в  $F$ . Фаза  $k$  заканчивается добавлением в  $G(p)$  (и  $F$ ) любого  $F$ -легкого ребра. Стало быть, случайная величина  $e_k$ , определенная как число рассмотренных  $F$ -легких ребер за фазу  $k$ , имеет распределение:

$$\mathbb{P}(e_k = l) \leq p(1-p)^{l-1}$$

Это геометрическое распределение,  $\mathbb{E}e_k \leq \frac{1}{p}$ .

Пусть лес  $F$  в конце алгоритма имеет  $s < n$  ребер. Сумма  $e_1 + \dots + e_{s-1}$  есть случайная величина, означающая число рассмотренных  $F$ -легких ребер за весь процесс построения  $G(p)$ , то есть просто число всех  $F$ -легких ребер в  $G$ . Ясно, что ее матожидание не превосходит  $\frac{n}{p}$ .  $\square$

На этой теореме базируется следующая модификация алгоритма Борувки, которая из графа  $G_1$  с  $n$  вершинами и  $m$  ребрами строит минимальный остовный лес (ибо граф может быть несвязен).

**Линейный вероятностный Борувка.**

1. Применим к  $G_1$  3 шага Борувки, пусть  $G_2$  – полученный граф с  $\leq \frac{n}{2}$  – вершин,  $S$  – множество всех отмеченных ребер.
2. Построим случайный граф  $G_2(\frac{1}{2})$ . В нем будет  $\leq \frac{n}{8}$  вершин, а матожидание ребер будет  $\leq \frac{m}{2}$ .
3. Рекурсивно построим миностов  $F$  графа  $G_2(\frac{1}{2})$ .
4. Найдем все  $F$ -тяжелые ребра графа  $G_2$ . Выкинем их из  $G_2$ , получится граф  $G_3$ . В нем не более  $\frac{m}{4}$  ребер (применяем предыдущую теорему для  $p = \frac{1}{2}$  и числа ребер  $\frac{n}{2}$ ).



5. Рекурсивно построим миностов  $F_3$  графа  $G_3$ . Выдадим ответ: миностов есть  $S \cup F_3$

△

**Теорема.** Матожидание времени работы этого алгоритма  $O(n + m)$ .

*Доказательство.* Пусть  $T(n, m)$  – максимум по всем графам на  $n$  вершинах и  $m$  ребрах матожидания времени работы этого алгоритма. По шагам:

1.  $O(n + m)$
2.  $O(n + m)$
3.  $T(\frac{n}{8}, \frac{m}{2})$
4.  $O(n + m)$  (верим)
5.  $T(\frac{n}{8}, \frac{n}{4})$

$$T(n, m) = T(\frac{n}{8}, \frac{m}{2}) + T(\frac{n}{8}, \frac{n}{4}) + O(n + m)$$

Несложная индукция:  $T(n, m) = O(n + m)$ . □

## 20 (20) Слабоэкспоненциальные детерминированные алгоритмы SAT для 3-КНФ (Осипов Д.)

### 20.1 Начальные сведения

**Задача (SAT).** Для данной пропозициональной формулы от  $n$  переменных определить, выполнима ли она.

**Решение за  $O(2^n)$ .** Переберем все  $2^n$  возможных наборов значений переменных. △

**NB.** Задача SAT NP-трудна: любую задачу из NP можно свести к SAT. Научимся решать SAT за полином  $\implies$  научимся решать любую NP-задачу за полином и получим  $P = NP$ . Докажем, что SAT не решается за полином  $\implies$  автоматически  $P \neq NP$ .

**NB.** SAT сводится к 3-SAT.

**Задача (3-SAT).** Пусть дана пропозициональная формула от  $n$  переменных в 3-КНФ (каждый конъюнкт содержит не более трех слагаемых). Определить, выполнима ли она.

### 20.2 Метод расщепления: $O(1.92^n)$ , $O(1.84^n)$

**Решение за  $O(\sqrt[3]{7}^n) = O(1.92^n)$  (метод расщепления-1).** Рекурсивный алгоритм. Выделим один из конъюнктов

$$\dots \wedge (x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee x_3^{\sigma_3}) \wedge \dots$$

Из всех восьми возможных наборов значений  $x_1, x_2, x_3$  конкретно под этот конъюнкт подходят только семь – все, кроме  $(x_1, x_2, x_3) = (\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3)$ .

Для каждого из семи наборов значений делаем следующее: подставляем его в формулу и запускаем алгоритм рекурсивно на получившейся формуле от  $n - 3$  переменных.

Время работы определяется соотношением  $T(n) = 7T(n - 3) + O(1)$ , откуда немедленно  $T(n) = O(7^{n/3})$  △

**Решение за  $\sim O(1.84^n)$  (метод расщепления-2).** Снова рекурсивный алгоритм. Выделим один из конъюнктов

$$\dots \wedge (x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee x_3^{\sigma_3}) \wedge \dots$$

Рекурсивно рассмотрим три случая, когда этот конъюнкт может быть истинен:

1. либо  $x_1 = \sigma_1$ ,

2. либо  $x_1 = \neg\sigma_1$  и  $x_2 = \sigma_2$ ,
3. либо  $x_1 = \neg\sigma_1$ ,  $x_2 = \neg\sigma_2$  и  $x_3 = \sigma_3$

Для каждого из этих случаев сделаем подстановку и рекурсивно решим подзадачи: для формул от  $n - 1$ ,  $n - 2$  и  $n - 3$  переменных соответственно.

Время работы описывается соотношением  $T(n) = T(n - 1) + T(n - 2) + T(n - 3) + O(1)$ .  $T(n) = O(1.84^n)$  – его приближенное решение.  $\triangle$

### 20.3 Метод локального поиска: $O(1.74^n)$

Следующее решение основано на методе «локального поиска». Зададим на множестве векторов  $\{0, 1\}^n$  метрику  $d(x, y)$  = количество позиций, в которых  $x$  и  $y$  различны. Для данного вектора  $x$  и натурального  $r$  определим шар  $H(x, r)$  – множество векторов, отличающихся от  $x$  не более, чем в  $r$  позициях.

Нам понадобится следующая *вспомогательная задача*.

**Задача.** Дан вектор  $x \in \{0, 1\}^n$  и натуральный радиус  $r$ . Проверить, есть ли в шаре  $H(x, r)$  выполняющий набор для данной 3-КНФ формулы.

**Решение вспомогательной задачи за  $O(3^r)$ .** Рекурсивный алгоритм. Сначала проверим формулу на наборе  $x$ . Если в нем формула не выполнена, выделим в ней любой ложный конъюнкт  $(x_a^{\sigma_a} \vee x_b^{\sigma_b} \vee x_c^{\sigma_c})$ . Если в  $H(x, r)$  присутствует выполняющий набор  $x^*$ , то  $x^*$  не совпадает с  $x$  хотя бы в одной из позиций  $a, b, c$ . Рассмотрим три набора  $x^{(a)}, x^{(b)}, x^{(c)}$ , каждый из которых получается из  $x$  инвертированием  $a$ -той,  $b$ -той и  $c$ -той переменной соответственно. Хотя бы один из наборов  $x^{(a)}, x^{(b)}, x^{(c)}$  будет на единицу ближе к  $x^*$  (ведь изменилась всего одна переменная). Запустим от каждого из них этот алгоритм рекурсивно. Тогда на глубине рекурсии, не превосходящей  $r$ , набор  $x^*$  найдется, если он есть в  $H(x, r)$ . Очевидно, решение работает за  $O(3^r)$ .  $\triangle$

Теперь мы готовы решать нашу задачу 3-SAT.

**Решение за  $O(\sqrt{3}^n) = O(1.74^n)$  (локальный поиск).** Обозначим  $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$  и  $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$  – вектора в  $\{0, 1\}^n$ . Заметим, что всё пространство  $\{0, 1\}^n$  покрывается двумя шарами  $H(\mathbf{0}, n/2)$  и  $H(\mathbf{1}, n/2)$ . Действительно, каждый вектор длины  $n$  имеет либо хотя бы  $n/2$  единиц, либо хотя бы  $n/2$  нулей, откуда следует требуемое. Значит, достаточно за  $O(3^{n/2})$  поискать выполняющий набор в каждом из двух шаров. Итоговое время работы  $O(3^{n/2}) + O(3^{n/2}) = O(3^{n/2})$ .  $\triangle$

## 21 (21) Алгоритм Шоннинга для 3-SAT, использующий случайное блуждание (Осипов Д.)

Условие задачи все еще [в том билете](#).

Мы предъявим вероятностное решение с *односторонней ограниченной вероятностью ошибки* (такое было [здесь](#)).

**Вероятностное решение (Schöningh, 1999), время  $O(n^2(4/3)^n)$ , шанс ошибки  $\leq 1/2$ .**

Алгоритм описывается даже проще, чем предыдущие. В начале мы берем случайный  $x \in \{0, 1\}^n$ . Повторим не более  $n$  раз следующее: если  $x$  не выполняет формулу, то возьмем в ней случайный ложный конъюнкт, случайно выберем **одну** переменную в нем и изменим ее значение.  $\triangle$

**Теорема.** Если достаточно<sup>12</sup> раз повторить этот алгоритм, то вероятность того, что алгоритм найдет выполняющий набор  $x^*$ , оценивается снизу как  $\frac{1}{2}$ .

*Доказательство.* Сначала мы вычислим вероятность успеха при одном повторении.

Не уменьшая общности, предположим, что выполняющий набор  $x^*$  существует и единственный. Заметим тогда (по [рассуждению из билета 20](#)), что при каждой итерации цикла

<sup>12</sup>См. конец доказательства

$x$  становится ближе к  $x^*$  с вероятностью  $\geq 1/3$  и дальше от  $x^*$  с вероятностью  $\leq 2/3$ . Поэтому, не уменьшая общности, еще предположим, что вероятности приближения и отдаления – **ровно**  $1/3$  и  $2/3$  соответственно.

Итак, вероятность того, что  $x$  совпадет с  $x^*$ , моделируется следующей задачей на случайное блуждание по отрезку  $[0, N]$ .  $x$  начинает свой путь в некоторой точке этого отрезка, делает шаг влево с вероятностью  $1/3$ , вправо – с  $2/3$  (и все время остается в отрезке  $[0, N]$ ), и необходимо оценить вероятность того, что в течение  $n$  шагов он когда-нибудь посетит 0.

Не уменьшая общности, для того, чтобы  $x$  посетил 0 в течение  $n$  шагов, **достаточно** (конечно, не необходимо) два условия:

1. Случайно выбранный в начале алгоритма  $x$  оказался  $x^*$  на расстоянии  $n/3$  от  $x^*$
2. За  $n$  шагов из точки  $n/3$  он придет в 0, совершив  $2n/3$  шагов влево и  $n/3$  шагов вправо, не выходя при этом за границу отрезка 0.

Сейчас мы посчитаем вероятности этих двух событий, их произведение и будет оценкой снизу на вероятность того, что алгоритм найдет выполняющий набор.

Вероятность первого события равна  $P_1 = \frac{\binom{n}{n/3}}{2^n}$  так как из  $2^n$  равновероятных наборов  $\in \{0, 1\}^n$  мы должны выбрать тот, у которого ровно  $n/3$  позиций, в которых он и  $x^*$  различаются.

Для подсчета вероятности второго события воспользуемся следующей задачей.

**Теорема** (Задача о пьянице и канаве). *Сколько существует путей из точки  $S = P - Q > 0$  в точку 0, состоящих ровно из  $P$  шагов влево,  $Q$  шагов вправо и не выходящих за точку 0?*  
*Ответ:*  $\frac{P-Q}{P+Q} \binom{P+Q}{P}$ .

Доказательство задачи можно найти [здесь](#). □

В нашем случае количество шагов влево  $P = 2n/3$ , вправо  $Q = n/3$ , так что всего таких путей  $\frac{1}{3} \binom{n}{n/3}$ . Для фиксированного пути с  $P$  шагами влево и  $Q$  шагами вправо вероятность, что  $x$  пройдет именно его, равна  $(1/3)^P (2/3)^Q = (1/3)^{2n/3} (2/3)^{n/3}$ , так что:

$$P_2 = \frac{1}{3} \binom{n}{n/3} (1/3)^{2n/3} (2/3)^{n/3}$$

Символом  $\simeq$  будем обозначать «эквивалентность с точностью до константы», т.е:

$$[f \simeq g] \iff [\exists C > 0 : f \sim Cg]$$

С помощью формулы Стирлинга  $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \simeq \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$  можно убедиться, что:

$$P_1 \simeq \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{3}{2^{5/3}}\right)^n$$

$$P_2 \simeq \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{2^{1/3}}\right)^n$$

И поэтому вероятность успеха асимптотически хотя бы

$$P \geq P_1 \cdot P_2 \simeq \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{3}{2^{5/3}}\right)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{2^{1/3}}\right)^n = \frac{1}{n} \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Однако этот алгоритм работает за  $O(n)$  времени! Его можно повторить много раз, увеличивая шансы на успех. В частности, если повторить его  $n \left(\frac{4}{3}\right)^n = L$  раз, то имеем вероятность неудачи:

$$\left(1 - \frac{1}{L}\right)^L \leq \frac{1}{e} \leq \frac{1}{2}$$

Что и приводит нас к требуемому результату. □

**НВ.** А если повторить в  $q$  раз больше, то есть  $qn \left(\frac{4}{3}\right)^n$  раз, то вероятность неудачи  $\leq \left(\frac{1}{2}\right)^q$  можно выбрать сколь угодно малой.