Математический анализ

Конспект лекций С.В. Кислякова

19 апреля 2021 г.

МКН СПбГУ

Анализ. Третий семестр

Colophon
This document was typeset with the help of KOMA-Script and LaTeX using the kaobook class.

Publisher
First printed in May 2019 by МКН СПбГУ

Оглавление

Глава 1

Мера

1.1. Первые определения

Definition 1.1.1 *Пусть X – множество, $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(X)$.* ***Мера*** *— это функция $\mu : \mathscr{A} \longrightarrow [0, +\infty]$, обладающая свойством* ***аддитивности****: если $A = \bigsqcup_{i=1}^{N} A_j, A_j \in \mathscr{A}$, то $\mu(A) = \sum_{i=1}^{N} \mu(A_i)$.*

Напомню, что символом $\mathscr{P}(X)$ обозначается множество всех подмножеств X.

Это первое "рабочее" определение меры. Впоследствии оно будет меняться, где-то мы будем его ослаблять, где-то усиливать. Например, когда-нибудь может понадобиться изменение условия на область значений:

$[0, +\infty)$ конечная мера
$\mathbb{R}$ Вещественная мера ("заряд")
$\mathbb{C}$ Комплексная мера

Example 1.1.1 $\mathscr{A}_0$ – множество всех конечных отрезков, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ – возрастающая функция. Тогда *квазидлина* $l_f : \langle a, b\rangle \mapsto f(b) - f(a) : \mathscr{A}_0 \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ – мера. Аддитивность очевидна: если $a_0 = a \leq a_1 \leq \ldots \leq a_n = b$, то $l_f(\langle a, b\rangle) = \sum_{i=1}^{n} l_f(\langle a_{i-1}, a_i\rangle) = f(a_n) - f(a_0)$.

При $f : x \mapsto x$ получается обычная длина.

напомню, что у нас отрезками называются множества $\langle a, b\rangle, a \leq b$, без любых ограничений на принадлежность концов

Example 1.1.2 Обычную длину можно считать мерой, заданной на множестве *всех* отрезков: $l(I) = +\infty$, если I – луч или $\mathbb{R}$. Тогда для конечных отрезков все то же самое, а для бесконечных отрезков заметим, что если они представляются в виде объединения, то одно из объединяемых множеств будет бесконечно.

и бесконечных тоже

Example 1.1.3 $P(\mathbb{R}^n) = \{I_1 \times \cdots \times I_n | I_i \in \mathscr{A}\}$ — совокупность всех прямоугольных параллелепипедов (со сторонами, параллельными осям). $l_P(I_1 \times \cdots I_n) = \prod_{i=1}^{n} l(I_i)$. Длины могут быть бесконечными, поэтому считаем, что $+\infty \cdot 0 = 0$, $+\infty \cdot x = +\infty, x > 0$, $+\infty \cdot +\infty = +\infty$.

Это действительно мера, но доказывать мы это пока не будем, а потом докажем общее утверждение.

Или $P_0(\mathbb{R}^n)$ и $\mathscr{A}_0$ соотвественно

Example 1.1.4 (Считающая мера) Если есть функция $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, то можно определить меру как $A \mapsto \sum_{a \in A} \phi(a)$.

Ее частный случай, когда $\phi \equiv 1$:

$$A \mapsto \begin{cases} |A| & A \text{ конечно,} \\ +\infty & \text{иначе} \end{cases}$$

1.2. (Полу)кольца, алгебры

Definition 1.2.1 *$\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(X)$ называют **кольцом**, если это множество замкнуто относительно конечных объединений, пересечений, и разности. $\mathscr{A}$ называют **алгеброй**, если это кольцо и $X \in \mathscr{A}$.*

Правильнее было бы называть ее *алгеброй множеств*, но так почему-то не делают

Example 1.2.1 Очевидные примеры: множество конечных подмножеств X – кольцо, $\mathscr{P}(X)$ – алгебра.

Непустое кольцо содержит пустое множество: $A \in \mathscr{A} \implies \varnothing = A \setminus A \in \mathscr{A}$.

Definition 1.2.2 *$\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(X)$ называют **полукольцом**, если*

1. $\varnothing \in \mathscr{A}$
2. $A, B \in \mathscr{A} \implies A \cap B \in \mathscr{A}$
3. $A, B \in \mathscr{A} \implies A \setminus B = \bigsqcup_{i=1}^{n} C_i, C_i \in \mathscr{A}$

Заметим, что если выполнены условия 1,2, то условие 3 можно проверять только для $A, B : B \subseteq A$, так как $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$

Theorem 1.2.1 *$\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(X), \mathscr{B} \subseteq \mathscr{P}(Y)$ — полукольца. Тогда $C = \{A \times B | A \in \mathscr{A}, B \in \mathscr{B}\}$ – полукольцо в $X \times Y$.*

Доказательство. □