Egzamin z Analizy Matematycznej I

część teoretyczna - dowody

Michał Radwański

MiNI PW

21 stycznia 2018

Ciąg zbieżny ma tylko jedną granicę

Niech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem zbieżnym. Załóżmy, że ma dwie różne granice, g i g'. Z definicji granicy ciągu,

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{M} \forall_{n>M} |a_n - g| < \varepsilon$$

Obierzmy $\varepsilon = |g - g'|/4 > 0$. Niech $M = max\{M_g, M_{g'}\}$ (odpowiednie liczby M, dla ε i obu granic). Wówczas, dla każdego $n > M$

$$|a_n - g| < \varepsilon \wedge |a_n - g'| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} 2\varepsilon > |a_n - g| + |a_n - g'| &= |a_n - g| + |g' - a_n| \\ \geq |a_n - g + g' - a_n| &= |g - g'| = 4\varepsilon \end{aligned}$$

Uzyskana sprzeczność dowodzi, że założenie było błędne, t.j. $g = g'$.

Ciąg zbieżny jest ograniczony

Niech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem zbieżnym do g. Z definicji,

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{M}{\exists}\ \underset{n>M}{\forall}\ |a_n - g| < \varepsilon$$

Obierzmy $\varepsilon > 0$ i odpowiadające mu M_ε. Zbiór $\{a_n : 0 < n \leq M_\varepsilon\}$ jest skończony, a zatem ograniczony. Niech $n > M_\varepsilon$. Wówczas

$$|a_n - g| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < a_n - g < \varepsilon \Leftrightarrow g - \varepsilon < a_n < g + \varepsilon$$

Wobec tego, ciąg $\{a_n\}_{n=M+1}^{\infty}$ jest ograniczony z dołu przez $g - \varepsilon$, a z góry przez $g + \varepsilon$. Zbiór $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, jako suma mnogościowa zbiorów ograniczonych, jest ograniczony (z góry przez maksimum z kresów górnych, z dołu przez minimum kresów dolnych).

Ciąg niemalejący i ograniczony z góry jest zbieżny

Niech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem niemalejącym i ograniczonym z góry. Wobec tego $\varsigma = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$ istnieje, i jest liczbą rzeczywistą. Pokażemy, że $\lim_{n\to\infty} a_n = \varsigma$. Z definicji kresu górnego (warunek 2 o najmniejszym ograniczeniu górnym),

$$\underset{\delta>0}{\forall}\ \underset{n}{\exists}\ \underset{m>n}{\forall}\ \varsigma < a_m + \delta$$

Ponadto, z warunku 1 kresu górnego, $\underset{n}{\forall}\, a_n \leq \varsigma \Rightarrow \varsigma - a_n = |\varsigma - a_n|$.
Wobec tego,

$$\underset{\delta>0}{\forall}\ \underset{n}{\exists}\ \underset{m>n}{\forall}\ |\varsigma - a_m| < \delta$$

Zatem, z definicji granicy ciągu, $\varsigma = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^{1/x} = \exp(1/x \cdot \ln x)$. f, jako złożenie funkcji ciągłych, jest funkcją ciągłą. Niech $a_n = n$ będzie ciągiem liczb naturalnych. Z definicji ciągłości wg. Heinego, jeżeli $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, to

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \exp(1/x \cdot \ln x) \overset{\text{ciągłość}}{=}$$

$$= \exp\left(\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}\right) = \exp\left(\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\right) \overset{\mathcal{H}}{=} \exp\left(\lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1}\right) = \exp(0) = 1$$

tw. Weierstraßa – sformułowanie

Niech $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem domkniętym. Jeśli $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to

1. f jest ograniczona
2. istnieją punkty x_0, $x_0' \in \mathcal{I}$ t.ż.

$$f(x_0) = \sup_{x \in \mathcal{I}} f(x) \qquad \text{oraz} \qquad f(x_0') = \inf_{x \in \mathcal{I}} f(x)$$

Jako, że dowody przebiegają analogicznie w obu przypadkach, pokażemy iż

1. f jest ograniczona z góry
2. istnieje punkt $x_0 \in \mathcal{I}$ t.ż.

$$f(x_0) = \sup_{x \in \mathcal{I}} f(x)$$

tw. Weierstraßa cd. – dowód (1)

Załóżmy przez sprzeczność, że f nie jest ograniczona z góry. Wobec tego, istnieje ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, taki, że $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \infty$. Ciąg ten jest ograniczony, więc z tw. Bolzana-Weierstraßa, osiada podciąg zbieżny, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$. Jako, że $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest podciągiem $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, to $\lim_{n\to\infty} f(b_n) = \infty$. Niech $\mathfrak{L} = \lim_{n\to\infty} b_n$. Wówczas, z ciągłości

$$\infty = \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(\lim_{n\to\infty} b_n) = f(\mathfrak{L}) \in f(\mathcal{I}) \subseteq \mathbb{R}$$

tw. Weierstraßa cd. – dowód (2)

Z poprzedniego dowodu wynika, iż f jest ograniczona, zatem $\varsigma = \sup_{x \in \mathcal{I}} f(x) \in \mathbb{R}$. Pokażemy, iż $\exists_{x \in \mathcal{I}} f(x) = \varsigma$. Załóżmy, że dla każdego ciągu $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ elementów z $\mathcal{I}$, $\lim_{n \to \infty} f(a_n)$ bądź to nie istnieje, bądź jest mniejsza niż ς. Wobec tego sprzeczność, bo nie jest prawdą, że

$$\underset{\delta > 0}{\forall} \; \underset{x \in \mathcal{I}}{\exists} \; \varsigma - f(x) < \delta$$

Weźmy zatem ograniczony ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, taki że $\lim_{n \to \infty} f(a_n) = \varsigma$. Wówczas, z tw. Bolzana-Weierstraßa, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, posiada podciąg zbieżny, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$. Z ciągłości funkcji f mamy, iż

$$\varsigma = \lim_{n \to \infty} f(a_n) = \lim_{n \to \infty} f(b_n) = f(\lim_{n \to \infty} b_n) \in f(\mathcal{I})$$

Warunek konieczny różniczkowalności

Mówimy, że $f : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w $a \in \mathcal{S}$, jeśli istnieje

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \in \mathbb{R}$$

Jeśli f jest różniczkowalna w a, to jest także w tym punkcie ciągła, albowiem

$$0 = \left(\lim_{h \to 0} h \right) \cdot \left(\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right) =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(f(a+h) - f(a) \right) = \left(\lim_{h \to 0} f(a+h) \right) - f(a)$$

Wobec tego, $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$, czyli f jest ciągła w a.

Wzór na pochodną iloczynu funkcji

Niech f, g będą funkcjami różniczkowalnymi w $a \in \mathbb{R}$. Wówczas

$$(f \cdot g)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} =$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x)g(x) - f(x)g(a) + f(x)g(a) - f(a)g(a)}{x - a} =$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x)\left(g(x) - g(a)\right) + g(a)\left(f(x) - f(a)\right)}{x - a} =$$

$$= \lim_{x \to a} \left(f(x) \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right) + \lim_{x \to a} \left(g(a) \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) =$$

$$= f(a)g'(a) + f'(a)g(a)$$

Warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego

Niech $\mathcal{I}$ będzie przedziałem otwartym. Jeśli $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ oraz f jest różniczkowalna w punkcie $a \in \mathcal{I}$ i ma w punkcie a ekstremum lokalne, to $f'(a) = 0$.

dowód: Załóżmy, że $f(a)$ stanowi maksimum lokalne - dowód dla minimum jest analogiczny. Jako, że f ma pochodną w a, zatem

$$f'(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$$

$$f'(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$$

Wobec tego, $f'(a) = 0$.

Tw. Rolle'a i tw. Lagrange'a – sformułowanie

tw. Rolle'a: Niech f będzie funkcją ciągłą na przedziale $[a, b]$, a różniczkowalną na (a, b). Wówczas,

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \underset{c \in (a,b)}{\exists} f'(c) = 0$$

tw. Lagrange'a: Niech f będzie funkcją ciągłą na przedziale $[a, b]$, a różniczkowalną na (a, b). Wówczas,

$$\underset{c \in (a,b)}{\exists} f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Tw. Rolle'a i tw. Lagrange'a – dowód

tw. Rolle'a: Jeśli f jest funkcją stałą, to dla każdego $c \in (a, b)$, $f'(c) = 0$. Załóżmy zatem, że dla pewnego $x \in (a, b)$, $f(x) > f(a) = f(b)$ (jeśli $f(x) < f(a)$ dowód przebiega analogicznie). Jako, że f jest funkcją ciągłą na przedziale domkniętym, to na mocy tw. Weierstraßa osiąga swoje maksimum w punkcie c różnym od a, b. Jako, że warunkiem koniecznym istnienia maksimum jest zerowa pochodna, to istotnie, $f'(c) = 0$.
tw. Lagrange'a: Niech $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x - a)$. Wówczas

$$g(a) = f(a)$$

,

$$g(b) = f(b) - f(b) + f(a) = f(a)$$

, a zatem, z tw. Rolle'a, istnieje takie $c \in (a, b)$, że

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Związek monotoniczności funkcji ze znakiem pierwszej pochodnej

Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą na przedziale $[a, b]$ i różniczkowalną w (a, b). Wówczas

- f jest niemalejąca na $[a, b]$ $\quad \Leftrightarrow \quad \underset{x \in (a,b)}{\forall} f'(x) \geq 0,$
- f jest nierosnąca na $[a, b]$ $\quad \Leftrightarrow \quad \underset{x \in (a,b)}{\forall} f'(x) \leq 0.$

Dowód jest prostym wnioskiem z tw. Lagrange'a.

Warunek wystarczający istnienia ekstremum lokalnego II

Załóżmy, że funkcja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w przedziale (a, b) oraz, że istnieje $f''(x_0)$ gdzie $x_0 \in (a, b)$. Jeśli

- $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) > 0$ to f ma w x_0 minimum lokalne właściwe
- $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) < 0$ to f ma w x_0 maksimum lokalne właściwe

Zapiszmy f za pomocą wzoru Taylora z resztą w postaci Peano..

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f''(x_0)/2 \cdot (x - x_0)^2 + \mathcal{R}_2(x)$$

$$\mathfrak{L} = f(x) - f(x_0) = 0 \cdot (x - x_0) + f''(x_0)/2 \cdot (x - x_0)^2 + \mathcal{R}_2(x)$$

Jako, że $\lim_{x \to x_0} \mathcal{R}_2(x)/(x - x_0)^2 = 0$, to istnieje taka $\delta > 0$, że jeśli $|x - x_0| < \delta$, to $|\mathcal{R}_2(x)| < \varepsilon(x - x_0)^2$. Wobec tego, dla $\varepsilon = f''(x_0)/2$

$$\mathfrak{L} = f''(x_0)/2 \cdot (x - x_0)^2 + \mathcal{R}_2(x) > (x - x_0)^2 \left(f''(x_0)/2 - f''(x_0)/2\right) = 0$$

Zatem, zgodnie z definicją, x_0 jest minimum lokalnym. Dowód drugiego punktu przebiega analogicznie.