Inducción

Pablo F. Castro

Programación Avanzada, Universidad Nacional de Río Cuarto, Departamento de Computación

2011

Inducción Matemática

La inducción matemática nos permite probar propiedades sobre dominios inductivos. Ejemplos de estos dominios son:

- Naturales.
- Listas.
- Fórmulas.

El principio de inducción sobre naturales, se escribe formalmente:

Principio de Inducción para Naturales

Sea $P : Nat \rightarrow Bool$, entonces se cumple:

$$P.0 \wedge \langle \forall n :: P.n \Rightarrow P.(n+1) \rangle \Rightarrow \langle \forall n :: P.n \rangle$$

Inducción Matemáica sobre Naturales

En la práctica cuando queremos probar una propiedad P por inducción podemos proceder demostrando los dos items siguientes por separado:

- $P.0$
- $\forall n :: P.n \Rightarrow P.(n+1)$

Por ejemplo, demostrar:

$$\langle \forall n :: \langle \sum i : 0 \leq i \leq n : i \rangle = \frac{n * (n+1)}{2} \rangle$$

Un Ejemplo

Probemos primero $P.0$

$$
\begin{aligned}
& P.0 \\
& = [\text{Def. de } P] \\
& \langle \sum i : 0 \leq i \leq 0 : i \rangle = \frac{0 * (0 + 1)}{2} \\
& = [\text{Aritmética}] \\
& \langle \sum i : i = 0 : i \rangle = 0 \\
& = [\text{Rango único}] \\
& 0 = 0 \\
& = [\text{Lógica}] \\
& \mathit{True}
\end{aligned}
$$

Un Ejemplo II

Ahora demostremos que para cualquier n, ocurre $P.(n) \Rightarrow P.(n+1)$.

$$P.(n+1)$$
$$= \text{[Def. de } P\text{]}$$
$$\langle \sum i : 0 \leq i \leq n+1 : i \rangle = \frac{n*(n+1)}{2}$$
$$= \text{[Aritmética]}$$
$$\langle \sum i : 0 \leq i \leq n \vee i = n+1 : i \rangle = \frac{n*(n+1)}{2}$$
$$= \text{[Partición de Rango]}$$
$$\langle \sum i : 0 \leq i \leq n : i \rangle + \langle \sum i : i = n+1 : i \rangle = \frac{n*(n+1)}{2}$$
$$= \text{[Rango único e Hipótesis Ind.]}$$
$$\frac{n(n+1)}{2} + n + 1 == \frac{(n+1)*(n+2)}{2}$$
$$= \text{[Aritmética]}$$
$$\mathit{True}$$

Inducción Fuerte sobre Naturales

El principio de inducción tiene diversas variantes, una de ellas es el llamado principio de inducción fuerte o inducción generalizada, que se escribe de la siguiente forma:

$$P.0 \wedge \langle \langle \forall i : i < n : P.i \rangle \Rightarrow P.n \rangle \Rightarrow \langle \forall n :: P.n \rangle$$

Muchas veces esta formulación del principio de inducción es muy útil. Por ejemplo, probemos que:

$$\langle \forall n : 2 \leq n : \langle \exists p : prime.p \wedge p \leq n : p \mid n \rangle \rangle$$

La relación $p \mid n$ es true cuando p divide a n, es decir existe un natural k, tal que: $n = p * k$, esta es una relación de orden (reflexiva, antisímetrica y transitiva).

Ejemplo de Inducción Generalizada

Probemos el caso base:

$$
\begin{aligned}
& P.(2) \\
& = [\text{Def. de } P] \\
& \langle \exists p : prime.p \wedge 2 \leq p \leq 2 : p \mid 2 \rangle \\
& = [\text{Aritmética}] \\
& \langle \exists p : prime.p \wedge p = 2 : p \mid 2 \rangle \\
& = [\text{Rango único}] \\
& 2 \mid 2 \\
& = [\text{Reflex.}|] \\
& true
\end{aligned}
$$

Ejemplo de Inducción Generalizada II

Demostremos $P.n$, si n es primo es trivial, supongamos que n no es *primo*.

$$
\begin{aligned}
& P.(n) \\
& = [\text{Def. de } P] \\
& \langle \exists p : \mathit{prime}.p \wedge 2 \leq p \leq n : p \mid n \rangle \\
& = [\neg \mathit{primo}.n \text{ y Leibniz}] \\
& \langle \exists p : \mathit{prime}.p \wedge 2 \leq p \leq n : p \mid (n_1 * n_2) \rangle \\
& = [\text{Hipótesis Ind. y } p \mid n_1 \Rightarrow p \mid n_1 * n_2] \\
& \mathit{true}
\end{aligned}
$$

Inducción sobre Listas

Para listas el principio de Inducción es el siguiente:

Inducción para Listas

$$P.[] \wedge \langle \forall x, xs : x \in A \wedge xs \in [A] : P.xs \Rightarrow P.x \triangleright xs \rangle \Rightarrow \langle \forall xs : xs \in [A] : P.xs \rangle$$

Ejercicio: probar:

$$\langle \forall xs, ys, zs :: xs +\!\!+ (ys +\!\!+ zs) = (xs +\!\!+ ys) +\!\!+ zs \rangle$$

Inducción y Recursión

Utilizaremos inducción para probar propiedades de definiciones inductivas. Consideremos la función Fibonacci:

$$
\begin{aligned}
f.0 &\doteq 1 \\
f.1 &\doteq 1 \\
f.(n+2) &\doteq f.(n+1) + f.n
\end{aligned}
$$

Demostremos que $\langle \forall n : o \leq n : f.n < 2^n \rangle$. Demostremos el caso inductivo, es decir: para $n \geq 2$, lo cual es equivalente a decir $n = m + 2$.

Inducción sobre Fibonacci

$$
\begin{aligned}
& f.(m+2) \\
& = [\text{Def. de } f] \\
& f.(m+1) + f.m \\
& < [\text{Hip.Inductiva}] \\
& 2^{m+1} + 2^{m} \\
& < [\text{Aritmética}] \\
& 2^{m+1} + 2^{m+1} \\
& = [\text{Aritmética}] \\
& 2^{m+2}
\end{aligned}
$$

Inducción y Recursión

Veamos el siguiente ejemplo:

$$f.0 \doteq 0$$

$$f.n+1 \doteq f.n + 2 * n + 1$$

Demostremos que: $\langle \forall n :: f.n = n^2 \rangle$ El caso base es dejado como ejercicio. Demostremos el caso inductivo.

$$
\begin{aligned}
& f.(n+1) \\
& = [\text{Def. de } f] \\
& f.n + 2 * n + 1 \\
& = [\text{Hip.Inductiva}] \\
& n^2 + 2 * n + 1 \\
& = [\text{Aritmética}] \\
& (n+1) * (n+1)
\end{aligned}
$$

Usando Inducción para Definir Funciones

De la misma forma podríamos haber usado inducción para definir la función f. f puede ser especificada de la siguiente forma:

$$\langle \forall n :: f.n = n^2 \rangle$$

Especificación

Una especificación de una función define el comportamiento deseado de la función de una forma rigurosa.

Dada un especificación el problema es encontrar una implementación que satisfaga esta especificación. Se puede pensar a f como una incógnita a resolver.

Derivación de Programas

Supongamos que para el valor n, f está definida correctamente. Veamos el caso inductivo:

$$
\begin{aligned}
& f.(n+1) \\
& = [\text{Especificación de } f] \\
& (n+1)^2 \\
& = \text{Aritmética} \\
& n^2 + 2 * n + 1 \\
& = \text{Hip.Inductiva} \\
& f.n + 2 * n + 1
\end{aligned}
$$

Es decir la definición dada anteriormente es correcta. Es decir, utilizando la especificación derivamos una implementación recursiva.

Otro Ejemplo de Derivación

Supongamos que queremos implementar la función:

$$\langle \forall n :: f.n = \langle \sum i : 0 \leq i \leq n : i \rangle \rangle$$

El caso base:

$$
\begin{aligned}
& f.0 \\
& = [\text{Especificación de } f] \\
& \langle \sum i : 0 \leq i \leq 0 : i \rangle \\
& = [\text{Aritmética}] \\
& \langle \sum i : i = 0 : i \rangle \\
& = [\text{Rango único}] \\
& 0
\end{aligned}
$$

Ejemplo (Continuación)

$$
\begin{aligned}
& f.(n+1) \\
= & \text{ [Especificación de } f\text{]} \\
& \langle \sum i : 0 \leq i \leq n+1 : i \rangle \\
= & \text{ [Aritmética]} \\
& \langle \sum i : 0 \leq i \leq n \vee i = n+1 : i \rangle \\
= & \text{ [Partición de Rango]} \\
& \langle \sum i : 0 \leq i \leq n : i \rangle + \langle \sum i : i = n+1 : i \rangle \\
= & \text{ [Rango único]} \\
& \langle \sum i : 0 \leq i \leq n : i \rangle + n + 1 \\
= & \text{ [Hip.Inductiva]} \\
& f.n + n + 1
\end{aligned}
$$