Programación Avanzada

Pablo F. Castro

Universidad Nacional de Río Cuarto, Departamento de Computación

2015

Razonamiento Riguroso

En esta clase introduciremos algunos conceptos que serán importantes durante la materia.

- Expresiones, valores, funciones.
- Igualdad.
- Propiedades de la Igualdad.
- Cómo razonamos rigurosamente?
- Qué es la programación funcional?

Valores, Expresiones y Funciones.

Los valores son elementos de conjuntos que utilizamos cuando programamos:

- Naturales, **valores:** $0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$
- Racionales, **valores**:$1, 2, 3, \ldots, 0{,}1, 0{,}11, 0{,}111, \ldots$
- Reales, **valores**: $0, \pi, e, \ldots$
- Strings: **valores**: $"", "a", "abc", "acb", etc$

Definamos las expresiones aritméticas:

- Una constante es una expresión aritmética (por ejemplo: 1).
- Una variable es una expresión aritmética (por ejemplo: x).
- Si E y F sin expresiones, entonces $E + F$, $E - F$, $E * F$, $E \setminus F$.

Expresiones vs Valores

Las expresiones no son valores, pero estas denotan valores. Por ejemplo:

- "2" denota el numero 2.
- "$2 + 2$" denota el numero 4.
- "$2 + x$" denota un número que depende del valor actual de x.
- "π" denota el real $3.1416\ldots$
- "∞" denota... no denota ningún número real o entero!

Recordar: No confundir las expresiones con los valores que ellas denotan!

Estados y Asignaciones de Valores

Dado un conjunto de variables $(x, y, z, v, \dots)$, un estado es una asignación de valores a las variables. Por ejemplo:

$$x \mapsto 3, y \mapsto 2, z \mapsto 1$$

Es un estado de las variables x, z, y (también llamada asignación). Ejemplo:

- En el estado $\{(x, 8), (y, 5)\}$, la ecuación $y + 3 = 8$ es verdadera.

Dado un estado, podemos evaluar una expresión en ese estado, por ejemplo:

- En el estado $\{(x, 8), (y, 5)\}$, la ecuación $y + 3$ es igual a 8.

Sustituciones

Dadas expresiones E y F. Usamos la expresión:

$$E(x := F)$$

Para denotar la expresión que es igual a E en donde todas las occurrencias de x se reemplazan por F. Ejemplos:

$$\begin{aligned}
&(x + y)(y := 2 * z) \\
&= \text{Definición de sustitución} \\
&(x + (2 * z)) \\
&= \\
&x + 2 * z
\end{aligned}$$

Reglas de la Igualdad

En la materia trabajaremos mucho con la igualdad. Veamos algunas reglas de esta relación:

- Reflexividad:Para todo X, $X = X$.
- Simetria: Para todo X,Y: Si vale $X = Y$, entonces $Y = X$.
- Transitividad: Para todo X, Y, Z: $X = Y$ e $Y = Z$, entonces $X = Z$.

Hay una propiedad que distingue la igualdad de las otras relaciones de equivalencias:

- Si $X = Y$, entonces $E(x := X) = E(x := Y)$, para cualquier expresión E,

La cual se llama **Leibniz**, o reemplazo de iguales por iguales.

Funciones

El concepto de función será muy importante durante el curso.

Funciones

Una función de A en B es una relación $f \subseteq A \times B$, que cumple:

- Es total: Para todo $x \in A$, existe un $y \in B$ tal que: $f(x) = y$.
- Es determinista: Para todo x, y, si $x = y$, entonces $f(x) = f(y)$.

Ejemplos de funciones:

- $f(x) = x^3$. Falta decir cual es A y B!
- $f(x, y, z) = x + y + z$.
- $f(p, q) = \neg p \vee q$.Donde $p, q \in Bool$.

Notación

Durante el curso utilizaremos la siguiente notación:

- En vez de notar la aplicación de funciones: $f(x)$ usaremos $f.x$.
- Para definir una función usaremos:

$$f.x \doteq E$$

  En donde E es una expresión que define la función. Por ejemplo: $f.x \doteq x^3$.

Para evaluar una función utilizamos sustituciones:

$$f.X = E(x := X)$$

f aplicada a X es igual a la expresión E en donde x es reemplazada por X.

Ejemplo

Veamos un ejemplo

$$
\begin{aligned}
& f.2 \\
= & \text{[definición } f\text{]} \\
& x^3(x := 2) \\
= & \text{[Sustituciones]} \\
& 2^3 \\
= & \text{[Aritmetica]} \\
& 8
\end{aligned}
$$

Ejemplito de Cálculo

Veamos un cálculo para el máximo.

- Axiomas:
  - Conmutatividad: $X \max Y = Y \max X$
  - Asociatividad: $X \max (Y \max Z) = (X \max Y) \max Z$
  - Idempotencia: $X \max X = X$
  - Distrib.max, $+$: $X + (Y \max Z) = (X + Y \max X + Z)$
  - Monotonia: $X \max Y \geq X$

Usaremos la siguiente regla de deducción:

- Si P es un teorema, entonces $P(x := E)$ también es un teorema.

Demostraciones

Demostremos:

$W \max X + Y \max Z = (W+Y) \max (W+Z) \max (X+Y) \max (X+Z)$

$$
\begin{aligned}
&(W + Y) \max (W + Z) \max (X + Y) \max (X + Z)\\
&= [\text{Distrib. } + \text{ con respecto max}]\\
&(W + Y \max Z) \max (X + Y) \max (X + Z)\\
&= [\text{Distrib. } + \text{ con respecto max}]\\
&(W + Y \max Z) \max (X \; + Y \max Z)\\
&= [\text{Conmutatividad de } +]\\
&(Y \max Z + W) \max (Y \max Z + X)\\
&= [\text{Distrib. } + \text{ con respecto max}]\\
&(Y \max Z) + (W \max X)\\
&= [\text{Conmutatividad}]\\
&(W \max X) + (Y \max Z)
\end{aligned}
$$